http://oeis.org/A005994 - F(1,2,n)

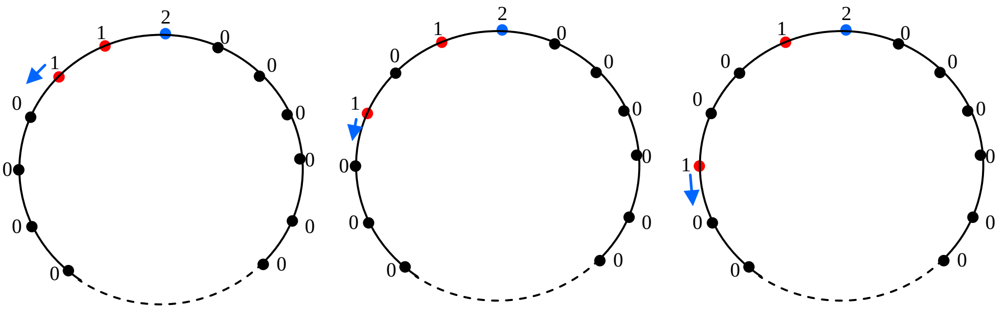
Original work by Ata Aydin Uslu – Hamdi Goktan Ozmenekse

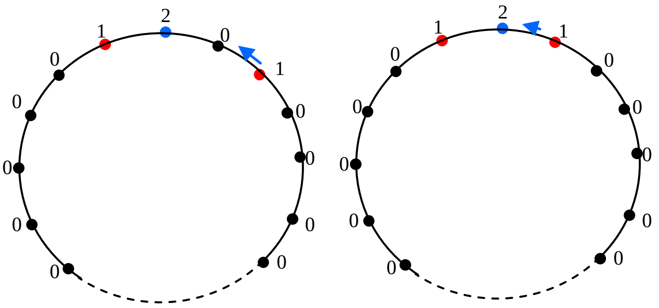
12.01.2012

Explanation: Number of bracelets made with 1 blue, 2 identical red and n identical black beads.

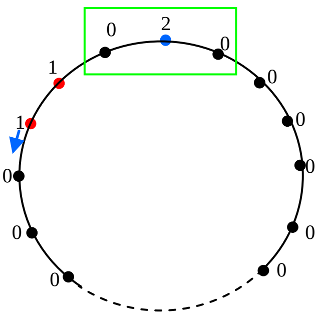
Usage: Chemistry: Paraffin numbers, Maths: Circular permutations of identical objects

Teorem1: 1 tane özdeş mavi, 2 tane özdeş kırmızı ve n tane özdeş siyah boncuklar ile yapılacak bilekliklerin sayısı $F(1,2,n)$ ise
$F(1,2,n) = n+1+F(1,2,n-2)$ dir. (Burada $F(1,2,1)=2$ ve $F(1,2,2)=4$ tür.)
İspat:

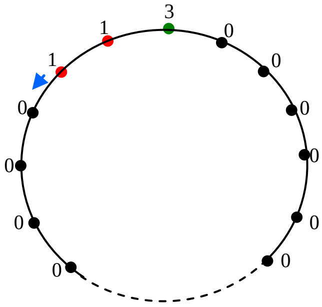




1 in 2 nin yanına gelene kadar $n+1$ durum oluşur.



$(020) \to 3$ ile gösterirsek



$F(1,2,n-2)$

$F(1,2,1)=2$ ve $F(1,2,2)=4$ olmak üzere
$F(1,2,n) = n+1+F(1,2,n-2)$ fonksiyonel denklemi ile ifade edebiliriz.

Bu fonksiyonel denklemi n tek pozitif tamsayı ve n nin pozitif çift tam sayı olma durumlarında bulabiliriz.

Teorem 2: 1 tane özdeş mavi, 2 tane özdeş kırmızı ve n tane özdeş siyah boncuklar ile yapılacak bilekliklerin sayısı $F(1,2,n)$ ise

$F(1,2,2n+1) = n^2 + 3n + 2$ ve $F(1,2,2n) = n^2 + 2n + 1$ dır.

İspat: $\sum_{k=1}^{2n+1} F(1,2,k)$ değerini bulalım.

$F(1,2,1) = 2$, $F(1,2,2) = 4$ olmak üzere $F(1,2,n) = n + 1 + F(1,2,n-2)$ bağıntısından hareket edeceğiz.

$$F(1,2,3) = 3 + 1 + F(1,2,1)$$
$$F(1,2,5) = 5 + 1 + F(1,2,3)$$
$$\vdots$$
$$F(1,2,2n-1) = (2n-1) + 1 + F(1,2,2n-3)$$
$$F(1,2,2n+1) = (2n+1) + 1 + F(1,2,2n-1)$$

eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$F(1,2,2n+1) = F(1,2,1) + \sum_{k=1}^{n} [(2k+1)+1]$$ $F(1,2,1) = 2$ değerini yerine yazarsak

$$F(1,2,2n+1) = 2 + 2.\frac{n.(n+1)}{2} + 2n = n^2 + 3n + 2$$

$n = 0$ için $F(1,2,1) = 2$

$n = 1$ için $F(1,2,3) = 6$

$n = 2$ için $F(1,2,5) = 12$

$n = 3$ için $F(1,2,7) = 20$

$\vdots$

Sonuç olarak ; $F(1,2,2n+1) = n^2 + 3n + 2$ dir.

$$F(1,2,2n) = (2n) + 1 + F(1,2,2n-2)$$
$$F(1,2,2n-2) = (2n-2) + 1 + F(1,2,2n-4)$$
$$\vdots$$
$$F(1,2,6) = 6 + 1 + F(1,2,4)$$
$$F(1,2,4) = 4 + 1 + F(1,2,2)$$

eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$F(1,2,2n)=F(1,2,2)+\sum_{k=2}^{n}\left[2k+1\right]=4+\sum_{k=1}^{n-1}\left[2(k+1)+1\right]=4+2.\frac{(n-1).n}{2}+3.(n-1)$$

$$F(1,2,2n)=n^2+2n+1$$

$n=1$ için $F(1,2,2)=4$
$n=2$ için $F(1,2,4)=9$
$n=3$ için $F(1,2,6)=16$
$n=4$ için $F(1,2,8)=25$

$\vdots$

Sonuç olarak ; $F(1,2,2n)=n^2+2n+1$ dir.