А. КРУТАЛЕВІЧ

ЭЛЕМЭНТАРНАЯ АЛЬГЭБРА

ВЫДАНЬНЕ НАВУКОВА-ЛІТЭРАЦКАГА
АДДЗЕЛУ КАМІСАРЫЯТУ АСЬВЕТЫ Б.С.С.Р.
БЭРЛІН 1922

Беларуская Сацыялістская Савецкая Рэспубліка

А. КРУТАЛЕВІЧ

ЭЛЕМЭНТАРНАЯ АЛЬГЭБРА

Частка I

ВЫДАНЬНЕ НАВУКОВА-ЛІТЭРАЦКАГА АДДЗЕЛУ
КАМІСАРЫЯТУ АСЬВЕТЫ Б. С. С. Р.
БЭРЛІН 1922

ПРАДМОВА.

Пры апрацоўцы данага падручніка элемэнтарнае альгэбры, я перш-на-перш стараўся, каб выкладаньне было відавочным і каб зьмест падручніка адказваў апошнім праграмам альгэбры; дзеля гэтае мэты зьве́рнута асаблівая ўвага на, так званыя, геомэтрычныя інтэрпрэтацыі й графікі (разуме́ньне функцыйнае зале́жнасьці ўводзіцца толькі ў другой частцы).

На маю бяду, шмат-якія акалічнасьці, а паміж імі — няухільная патрэба ў як-найбарджэйшым выданьні беларускае альгэбры, — не дазволілі мне адпаве́дна апрацаваць гэты падручнік, які з'яўляецца, ўласна кажучы, компіляцыей апошніх польскіх твораў, а ўласьне:

1. D-r. L. Böttcher — „Zasady algebry elementarnej“, Warszawa 1911.
2. L. Markuszewski — „Algebra elementarna“, Warszawa 1918.
3. Tadeusz Gutkowski — „Algebra elementarna“, Warszawa 1919.

Прыклады й заданьні браў (апрача вышэй пералічаных аўтараў) з Окуліча, Шапошнікава й Бычкова.

МЕНСК, 1921 г. Але́сь КРУТАЛЕ́ВІЧ.

I. УВОД.

Мэта і заданьне альгэбры.

§ 1. У арытмэтыцы ўсе́ чыслы абазначаюцца на пісьме́ за дапамогаю комбінацыі дзесяцёх знакаў або цыфраў. Спосаб гэты аднолька-ж, як зараз пабачым, аказваецца невыстарчаючым пры разьвязваньні шмат-якіх матэматычных заданьняў агульнага характару. Дзеля гэтае прычыны альгэбра ўводзіць у свае вылічэньні літары, абазначаючы імі ўсялякія, адвольна выбраныя, арытмэтычныя чыслы.

Возьмем дзеля прыкладу наступную задачу:

аловак каштуе 8 *грош., а сшытак* 12 *грош. Колькі можна купіць сшыткаў за тую суму, якая заплачана за* 6 *алоўкаў?*

Разьвязаньне. Калі 1 аловак каштуе 8 грош., дык 6 алоўкаў каштуюць $8 \cdot 6 = 48$ грош; падзяліўшы адтрыманае чысло на цану сшытка, знойдзем шуканую колькасьць сшыткаў: $48 : 12 = 4$.

Ход дзе́яньняў пры разьвязваньні гэтае задачы можам паказаць за дапамогаю формулы:

$$4 = \frac{8 \cdot 6}{12}.$$

Возьмем цяпе́р другую задачу, уложаную водлуг гэтага самага тыпу, але з іншымі чысламі:

аловак каштуе 6 *грош., а сшытак* 14 *грош. Колькі можна купіць сшыткаў за тую суму, якая заплачана за* 7 *алоўкаў?*

Пры разьвязваньні гэтае задачы, так сама, як і ў папярэднім выпадку, множым 6 на 7 і адтрыманае чысло дзе́лім на 14. Дастанецца 3. Ход дзе́яньняў ізноў абазначыцца так:

$$3 = \frac{6 \cdot 7}{14}.$$

Лёгка можам заўважыць, што, апрача розных чыслаў і адказаў, спосаб разьвязваньня абе́дзьвюх задачаў—аднолькавы.

Разважаючы гэтыя спосабы, бачым, што дзеля знаходжаньня шуканае колькасьці сшыткаў—трэба цану аднаго алоўка памножыць на колькасьць алоўкаў і адтрыманае множыва падзяліць на цану аднаго сшытка, або:

$$\text{шуканая кольк. сшытк.} = \frac{\text{цане́ аднаго ал.} \times \text{колькасьць алоўк.}}{\text{цану аднаго сшытка}}$$

Дзеля таго, што формула ў гэтым кшталце-надта доўгая і нязручная, дык абазначым:

цану аднаго алоўка праз . . . . a
колькасьць алоўкаў праз . . . . b
цану аднаго сшытка праз c
шуканую колькасьць сшыткаў праз x

Гэткім чынам, формула наша прыйме выгляд:

$$x=\frac{a\cdot b}{c}$$

Сапастаўляючы папярэднія арытмэтычныя формулы з адтрыманаю агульнаю, або альгэбрычнаю, бачым, што формула арытмэтычная паказвае, якія дзéяньні і ў якім парадку трэба рабіць пры разьвязваньні *аднэй толькі задачы*, формула-ж альгэбрычная, або агульная паказвае, якія дзеяні і ў якім парадку трэба рабіць пры разьвязваньні цэлага *шэрагу задачаў аднолькавага тыпу.* (Каб адтрымаць рэзультат замяняем літары арытмэтычнымі чысламі).

Азначыўшы чыслы, ўходзячыя ў склад нашых задачаў тымі самымі літарамі, якімі абазначалі адпававéдныя чыслы ў формулах, адтрымаем тады наступную задачу:

аловак каштуе ***a*** *грош, а сшытак* ***c*** *грош. Колькі сшыткаў можна купіць за тую суму, якая заплачана за b алоўкаў?*

Маючы агульную формулу для разьвязваньня гэтае задачы:

$$x=\frac{a\cdot b}{c}$$

і даючы што-раз іншыя вартасьці літарам, уходзячым у склад формулы, мы, такім чынам, можам разьвязваць цэлы рад задачаў, уложаных водлуг гэтага самага тыпу.

Так, напрыклад, калі ў гэтай формуле: $a=10$, $b=24$, $c=8$, — тады замяняючы літары на адпавéдныя чыслы, адтрымаем:

$$x=\frac{10\cdot 24}{8}.$$

Па вылічэньні, знойдзем, што шуканая колькасьць сшыткаў ёсьць:

$$x=30$$

§ 2. Пры ўсялякіх вылічэньнях у альгэбры рэзультатам бывае звычайна адна або нéкалькі літараў, злучаных альгэбрычнымі знакамі.

Кожнае злучэньне агульных чыслаў за дапамогаю знакаў альгэбрычных дзéяньняў, — называецца альгэбрычным выразам; так, напрыклад:

$$a+b.\quad \frac{b-c}{a+d},\quad x+\frac{c}{m+p}$$

ёсьць альгэбрычныя выразы.

Вéдамыя чыслы ў альгэбрычным выразе звычайна абазначаем першымі літарамі лацінскага альфабэту: a, b, c, d . . . . . ., а чыслы нявéдамыя, шуканыя, абазначаем апошнімі літарамі: x, y, z . . . Часам, калі трэба выявіць супольныя асаблівасьці нéкалькіх чыслаў, абазначаем іх аднолькавымі літарамі з адпаве́днымі знакамі ўгары ці ўнізу, напрыклад:

a', a'', a''' . . . . (чытаецца: a пе́ршае, a другое, і г. д.)

або a_1, a_2, a_3 . . . . (чытаецца: a адзін, a два, a тры і г. д.)

Лікавою вартасьцю альгэбрычнага выразу будзем называць чысло, якое адтрымаем, калі на ме́йсца літараў падставім іх арытмэтычнае значэньне й зробім дзеяньні, ўходзячыя ў склад гэтага альгэбрычнага выразу.

Напрыклад, лікавая вартасьць выразу $\frac{a \cdot b}{c}$ пры $a = 10$, $b = 24$, $c = 8$, будзе

$$\frac{10 \cdot 24}{8} = 30.$$

Лікавая вартасьць выразу

$$a + \frac{c}{m + p}$$

пры $a = 6, c = 32, m = 7, p = 5,$

ёсьць: $6 + \frac{32}{7 + 5} = 6 + 2\frac{2}{3} = 8\frac{2}{3}.$

Такім парадкам, бачым, што альгэбра за дапамогаю аднаго, адпаве́дна ўложанага выразу, дае магчымасьць разьвязваньня цэлага рада задачаў аднолькавага тыпу; а це́раз падстаноўку на ме́йсца літараў розных арытмэтычных значэньняў, можам адтрымліваць розныя лікавыя вартасьці шуканага ў задачы чысла.

Для прыкладу, разьвяжам наступную задачу:

Купе́ц прадаў b фунтаў тавару па a рублёў за фунт, і d фунтаў другога тавару па c рублёў за фунт, і за адтрыманыя грошы купіў n фунтаў новага тавару. Колькі рублёў плаціў ён за 1 фунт гэтага новага тавару?

Разьвязваньне. — 1 фунт пе́ршага тавару каштуе a рублёў, значыцца, b фунтаў каштуюць $a \cdot b$ рублёў; 1 фунт другога тавару каштуе c рублёў, значыцца, d фунтаў гэта́га тавару каштуюць $c \cdot d$ рублёў. Сума, якую купе́ц заплаціў за абодва тавары, будзе:

$$(a \cdot b + c \cdot d)$$

рублёў.

Як ве́дама з задачы, за гэтыя грошы ён купіў n фунтаў новага тавару, значыцца, 1 фунт новага тавару каштуе:

$$\frac{a \cdot b + c \cdot d}{n}$$

рублёў.

Даючы цяпе́р літарам у гэтым выразе розныя значэньні, можам адтрымаць розныя лікавыя вартасьці шуканае колькасьці рублёў, так, напрыклад, калі

$$a = 3, \quad b = 6, \quad c = 2, \quad d = 8, \quad n = 4,$$

тады выраз гэты заме́ніцца на:

$$\frac{3\cdot6+2\cdot8}{4}=8\frac{1}{2}.$$

Такім чынам, *альгэбра дае́ способы укладаньня агульных выразаў для разьвязваньня задачаў розных тыпаў; побач з тым, яна дае́ нам способы ўпрошчаньня гэтых выразаў і прыстасаваньня іх да розных матэматычных і жыцьцёвых заданьняў.*

Абазначэньне агульных чыслаў за дапамогаю літараў увёў грэцкі матэматык Діофант з Александрыі (паміж 300 і 400 г.г. пасьля Н. Хр.).

Найменьне свае́ альгэбра адтрымала ад кнігі „Aldschebr“, якую напісаў арабскі матэматык Muhamed ibn Mûsâ Alchwarizmi (паміж 800 і 1000 г.г. пасьля Н. Хр. і ў якой былі дадзены способы разьвязваньня раўнаньняў.

Задачы.

У наступных задачах улажыць агульныя выразы разьвязаньняў і, це́раз падстаноўку арытмэтычных значэньняў на ме́сца літараў, знайсьці лікавую вартасьць шуканага чысла.

1. У школе a вучняў, а ў гэтым чысле́ b беларусаў. Колькі ў школе вучняў не беларусаў? ($a=645$, $b=417$.)

2. У ме́сьце ёсьць a дамоў драўляных, а муравных на b меней. Колькі дамоў у ме́сьце? ($a=612$, $b=315$.)

3. Пуд гарбаты каштуе a рублёў. Колькі каштуюць b пудоў гарбаты? ($a=117$, $b=8$.)

4. Купе́ц купляў коні па a рублёў за штуку, а прадаваў па b рублёў. Колькі зыску дастаў ён на c конях? ($a=75$, $b=91$, $c=58$.)

5. Адзін чалаве́к выдаў за год a рублёў. У пе́ршыя b ме́сяцаў пражываў па c рублёў у ме́сяц. Па колькі пражываў ён у іншыя ме́сяцы? ($a=832$, $b=4$, $c=56$.)

6. a муляроў могуць закончыць будоўлю дому ў b дзён. У колькі дзён могуць закончыць будоўлю таго дому c муляроў? ($a=16$, $b=15$, $c=12$.)

7. Тры кампаніі наймітаў зарабілі a рублёў. Колькі рублёў павінна дастаць трэцяя кампанія, калі ў пе́ршай кампаніі было b душ, у другой c, а ў трэцяй d душ?

$$(a=950,\quad b=12,\quad c=9,\quad d=17).$$

8. Крамнік зьмяшаў b пудоў пшаніцы па a рублёў за пуд з d пудамі пшаніцы па c рублёў за пуд. Колькі рублёў каштуе 1 пуд мяшанае пшаніцы?

$$(a=2,\quad b=12,\quad c=3,\quad d=4).$$

Знакі альгэбрычных дзе́яньняў.

§ 3. Знакам *складаньня*, як і ў арытмэтыцы, ёсьць знак $+$, які чытаецца „плюс“.

Выраз $a+b$ паказвае, што да чысла, абазначанага літараю a, трэба дадаць чысло, абазначанае літараю b. Калі, напрыклад, $a=7$, а $b=8$, дык рэзультат складаньня $a+b$ будзе роўным 15.

§ 4. Знакам *адыманьня* ёсьць знак —, які чытаецца „мінус“.

Выраз $a - b$ паказвае, што ад чысла, абазначанага літараю a, трэба адняць чысло, абазначанае літараю b. Калі, напрыклад, $a = 24$, а $b = 8$, дык рэзультат адыманьня будзе роўным 16.

§ 5. Знакамі *множаньня* ёсьць: $\times$, або $\cdot$ (кропка). Калі, значыцца, хочам паказаць, што a трэба памножыць на b, дык пішам

$$a \times b \quad \text{або} \quad a \cdot b.$$

Найчасьцéй, аднолька-ж, дзéля зручнасьцы й лёгкасьці пісаньня, пры літарных выразах ня пішам знаку множаньня, так, напрыклад, a памножанае на b пішам: ab. Так сама ня пішам знаку множаньня й тады, калі маем нéкалькі літарных сумножнікаў, або калі маем цыферны сумножнік пры сумножніках літарных, напрыклад, замéста

$$7 \cdot a \cdot b \cdot c \quad \text{пішам} \quad 7abc.$$

(Пры нéкалькіх цыферных сумножніках, знак множаньня трэба абавязкова ставіць, напрыклад: $15 \cdot 4 \cdot 8$.)

§ 6. Калі адзін з сумножнікаў ёсьць цыферны, дык ён звычайна пішацца на пачатку й называецца *лікавым коэфіцыéнтам*; напрыклад, множыва, адтрыманае ад множаньня a на 3, пішам у кшталце $3a$, і 3 называем лікавым коэфіцыéнтам. Вот-жа, *лікавым коэфіцыéнтам ёсьць цыферны сумножнік пры сумножніках літарных.*

Выраз $3a$ можам напісаць інакш, у кшталце трох складанак, з якіх кожная ёсьць роўная a:

$$3a = a + a + a.$$

Лікавы коэфіцыéнт можа быць і дробавым, напрыклад $\frac{4}{7}abc$. Выраз $\frac{4}{7}abc$, як і папярэдні, можа быць напісаны ў форме чатырох складанак:

$$\frac{4}{7}abc = \frac{abc}{7} + \frac{abc}{7} + \frac{abc}{7} + \frac{abc}{7}.$$

Сапастаўляючы два апошнія выразы, бачым, што *лікавы коэфіцыéнт паказвае, колькі разоў цэлае чысло, або яго частка, бярэцца складанкаю.*

Дзеля таго, што вялічыня чысла пры множаньні на адзінку не зьмяняецца, дык лікавы коэфіцыéнт 1 звычайна ня пішацца; так, напрыклад, замéста $1a$ пішам a, замéста $1bcd$ пішам проста bcd.

Часам, калі хочам паказаць, што альгэбрычны выраз бярэцца складанкаю неазначаную колькасьць разоў, тады й лікавы коэфіцыéнт абазначаем літараю. Літарныя коэфіцыéнты часта ўжываюцца пры чыслах нявéдамых (шуканых), або зьмéнных; напрыклад, у выразах ax і $3aby$, можам лічыць a і $3ab$ за літарныя коэфіцыéнты пры x і y.

§ 7. Калі ў множыве паўтараецца які-нéбудзь сумножнік, дык пішам яго толькі адзін раз, а над ім (угары, з правага боку) ставім чысло, паказваючае, колькі разоў сумножнік гэты павінен быў паўтарацца[1]; пішам, значыцца, a^2 замéста $a \cdot a$, a^3 замéста $a \cdot a \cdot a$, a^4 замéста $a \cdot a \cdot a \cdot a$, і наагул, a^n заместа $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots$ $|n$ разоў$|$.

---

[1] Гэтае абазначэньне ўвёў славуты францускі математык Рэнэ Дэкарт (1596–1650).

Множыва роўных сумножнікаў называецца *ступе́ньню*; сумножнік, які паўтараецца, называем *асновaю*; а чысло, якое паказвае, колькі ўзята роўных сумножнікаў, называем *паказчыкам ступе́ні*.

Так, напрыклад, выраз c^5 ёсьць пятая ступе́нь чысла c; 5—у ім ёсьць паказчык ступе́ні, а c — аснова.

Пе́ршая ступе́нь чысла ёсьць роўная самому чыслу: $a^1 = a$. Дзеля гэтае прычыны, пры пе́ршае ступе́ні ня пішам паказчыка, а толькі яго памятаем, калі гэта патрэбна пры рахунках.

Другую ступе́нь a, ці a^2 называем *квадратам* a, або a паднятым на другую ступе́нь, паднятым у квадрат, або карацей — a квадрат.

Трэцюю ступе́нь a, ці a^3 называем *кубам* a, або a паднятым на трэцюю ступе́нь, у куб, або карацей — a куб.

Для вышэйшых ступе́няў няма асобных найме́ньняў; дзеля гэтага a^4 чытаецца: a паднятае на чацьве́ртую ступе́нь, або a чацьве́ртае ступе́ні; a^n чытаецца: a паднятае на n-тую ступе́н, або a n-тае ступе́ні, і г. д.

Множаньне чысла на сябе́ самаго называецца *ступеняваньнем*, або *падняцьцем на ступе́нь*.

§ 8. Дзеля абазначэньня *дзяле́ньня* ўжываем знаку :, або паземнае рысы ——. Калі хочам паказаць, што чысло, абазначанае літараю a, трэба падзяліць на чысло, абазначанае літараю b, дык пішам:

$$a:b \quad \text{або} \quad \frac{a}{b}.$$

Няхай $a = 24$, $b = 8$, тады вынік дзяле́ньня будзе: 3.

§ 9. Дзе́яньнем, адваротным да ступеняваньня (падняцьця на ступе́нь) ёсьць *карэняваньне (выцягваньне корняў)*. Гэтае дзе́яньне грунтуецца на знаходжаньні асновы, калі ве́дама ступе́нь і яе́ паказчык; гэтую шуканую аснову тутака будзем называць *корнем*. Каб абазначыць, што з данага чысла маем выцягнуць корань, — ставім над ім знак $\sqrt{\ }$ і пры ім паказчык (абазначаючы, якой ступе́ні выцягваем корань).

Корань другой ступе́ні, ці квадратны корань, абазначаецца толькі самым знакам корня, без паказчыка.

$9^2 = 81$, значыцца, корань ква́дратны з 81 ёсьць 9, або: $\sqrt{81} = 9$;

$$\sqrt{64a^2} = 8a \quad \text{дзеля тае прычыны, што} \quad (8a)^2 = 64a^2$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{9}} = \tfrac{1}{3}, \quad \text{дзеля таго, что} \quad \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 = \tfrac{1}{9}.$$

Корань трэцяе ступе́ні, або кубічны корань, абазначаем $\sqrt[3]{\ }$; так напрыклад:

$$\sqrt[3]{27} = 3, \quad \sqrt[3]{125} = 5, \quad \sqrt[3]{\tfrac{1}{8}} = \tfrac{1}{2}.$$

Корань чацьве́ртае ступе́ні можам знайсьці, калі выцягнем квадратны корань з другога квадратнага корня. Так, напрыкл., каб адтрымаць вартасьць $\sqrt[4]{81}$, знойдзем спачатку $\sqrt{81} = 9$, а потным $\sqrt{9} = 3$, такім чынам, $\sqrt[4]{81} = 3$; цяпе́р, зрабіўшы праве́рку адтрыманае формулы, бачым, што, сапраўды, 3, паднятае на чацьве́ртую ступе́нь, ёсьць роўнае 81.

Знак $\sqrt{}$ ёсьць зьмéненая пéршая літара лацінскага слова radix (значыць „корань“).

§ 10. Знак $=$ называецца *знакам роўнасьці* й паказвае, што злучаныя гэтым знакам числы ёсьць роўныя паміж сабою, так, напрыклад, калі число, абазначанае літараю a, ёсьць роўнае з числом, абазначаным літараю b, дык пішам $a=b$ і чытаем „a ёсьць роўнае b“. *Два альгэбрычныя выразы, злучаныя знакам роўнасьці, называюцца роўнасьцю.*

§ 11. Знак $>$ абазначае „больш за“, знак $<$ абазначае „менш ад“; так, напрыклад, $a>b$ значыць, што a ёсьць большае за b; наадварот, $a<b$ значыць, што a ёсьць мéншае ад b. Знакі $>$ і $<$ называюцца знакамі няроўнасьці; а *два выразы, злучаныя знакам няроўнасьці, называюцца няроўнасьцю.*

Калі хочам паказаць, што числы a і b няроўныя паміж сабою (прычым, якое з іх большае ці мéншае для нас — усё роўна), дык пішам

$$a \gtrless b, \quad \text{або} \quad a \neq b.$$

Калі хочам паказаць, што число a ня ёсьць большае за b, тады пішам

$$a \leqq b.$$

Наадварот, калі хочам паказаць, што число a ня ёсьць мéншае ад b, дык пішам:

$$a \geqq b.$$

Два альгэбрычныя выразы, злучаныя знакам роўнасьці, або няроўнасьці, называюцца формулаю.

Прыклады.

Зрабіць упрошчаньні наступных выразаў, за дапамогаю коэфіцыéнтаў і паказчыкаў.

9. $ab+ab+ab-cd-cd$
10. $aab+abb$
11. $aabbb+aabbb+aabbb+aabbb$
12. $\dfrac{aaa-bb}{4ccc}$
13. $abbc+abbc-\dfrac{bc}{2}-\dfrac{bc}{2}-\dfrac{bc}{2}$
14. $m.\,m.\,m.\,m.\,\ldots\ldots\,m$ (a разоў)
15. $y^2+y^2+y^2+\dfrac{yx}{3}+\dfrac{yx}{3}$
16. $\dfrac{xxy+xxy+xxy}{zz+zz}$
17. $\dfrac{mmmm+mmmm+mmmm}{fff+fff+fff+fff}$

Напісаць наступныя выразы без коэфіцыéнтаў:

18. $4ab$
19. $3b+2c$
20. $2a^2-3bc$
21. $\frac{2}{3}a^2b$
22. $2a^3b^2-3a^5b^3$.

Напісаць наступныя выразы без коэфіцыéнтаў і без паказчыкаў:

23. $3a^2b$
24. $2a^3b^2c$
25. $\frac{4}{7}a^3c^3$
26. $2a^3+b^2$
27. $\frac{4}{5}a^2b-\frac{2}{3}ab^2$
28. $\frac{3x^3-3y^3}{2a^2+4b^2}$.

29. Напісаць агульную формулу парнага чысла.

30. Напісаць агульную формулу няпарнага чысла.

31. Напісаць агульную формулу чысла, якое, пры дзялéньні на 2, дае́ ў дзéлі n, а ў астачы 1.

32. Напісаць чысло, ў якім зьмяшчаецца a адзінак, b дзесяткаў і c сотняў.

33. Замяніць a рублёў і b капéйкаў на капейкі.

34. Напісаць розьніцу квадратаў a і b.

35. Напісаць суму кубаў p і q.

36. Напісаць патройнае множыва квадрату a на куб b.

37. Напісаць суму m-тых ступéняў чыслаў a, b, c і d.

38. Паказаць альгэбрычнымі знакамі, што розьніца квадратаў чыслаў a і b ёсьць роўная суме кубаў чыслаў x і y.

39. Паказаць, што чысло a, павялічанае на квадрат чысла b, ёсьць роўнае кубу чысла c, памéншанаму на чысло d.

40. Паказаць, што сума двух чыслаў a і b больш за іх розьніцу.

41. Паказаць, што сума пятых ступéняў a і b больш за суму трэціх ступéняў гэтых самых чыслаў.

Альгэбрычныя выразы.

§ 12. *Злучэньне нéкалькіх альгэбрычных выразаў знакамі складаньня ці адыманьня называецца многачлéнам, напрыклад, выразы*

$$2a^2+4abc-5bc^3; \qquad 2\sqrt{ab}-4c^2.$$

ёсьць многачлéны. — Паасобныя часткі многачлéну, злучаныя знакамі складаньня ці адыманьня, называюцца яго *членамі*: у пéршым прыкладзе члéнамі ёсьць: $2a^2$, $4abc$ і $5bc^3$, у другім $2\sqrt{ab}$ і $4c^2$.

Кожны член многачлéну ёсьць адначлен.

Калі многачлéн складаецца з двух члéнаў, тады ён называецца *двухчленам*, калі складаецца з трох члéнаў — называецца *трохчленам і г. д.*

§ 13. Часта здараецца, што паасобныя члéны многачлéну зьмяшчаюць у сабé суму або розьніцу, як, напрыклад, у двухчлéне:

$$\frac{3a^2+ab^3}{c}-\frac{\sqrt{b}}{a^2-c^2},$$

дзеля гэтае прычыны часам даюць іншае азначэньне адначлéну, а ласьне: *адначлéнам называецца такі альгэбрычны выраз, у якім апошняе дзéяньне ня ёсьць складаньне або адыманьне.* І праўда, у выразе

$$\frac{3a^2+ab^3}{c}$$

ранéй за ўсё a падносім на другую ступéнь і множым на 3, пасьля b падносім у куб і множым на a, дадаём да сябé абодва множывы й адтрыманы рэзультат *дзелім* на c. Вот-жа, апошнім дзéяньнем тутака ёсьць дзяленьне.

Калі ў адначлéне няма дзялéньня на число, абазначанае літараю, тады ён называецца *аднач ленам цэлым*; у праціўным выпадку, называем яго *аднач ленам дробавым*; напрыклад, аднач лéны

$$4a^2b, \quad \frac{2}{3}abc, \quad \frac{5a+2a^2}{2}$$

ёсьць цэлыя аднач лéны;

$$\frac{2a^2}{3b}, \quad \frac{a^2-b^2}{3a+c}$$

ёсьць дробавыя.

§ 14. Альгэбрычны выраз называецца *вымерным*, калі ў склад яго ня ўходзіць корань з літарных чыслаў, у праціўным выпадку, — называецца *нявымерным*; напрыклад, выразы

$$7a^4b, \quad \frac{2a^2}{bc}, \quad \frac{4a^5b-c^2}{2a+b^3}-5ab,$$

ёсьць вымéрныя.

А выразы:

$$2a^2\sqrt{bc}, \quad \frac{2ab\sqrt[3]{a^2c}}{4c}, \quad 6a^3-3\sqrt[4]{a^3}, \quad \frac{4a+7ab}{3\sqrt[3]{b^2}}$$

ёсьць нявымéрныя.

Дужкі.

§ 15. Калі хочам выканаць якое небудзь дзéяньне над многачлéнам, дык бяром яго ў дужкі; хай, напрыклад, патрэбна розьніцу чыслаў a і b памножыць на c; у такім разе пішам:

$(a-b)\cdot c$; калі-б мы напісалі гэты выраз бяз дужак, дык адтрымалі-б $a-b\cdot c$, і тады трэба было-б выканаць зусім іншыя дзéяньні, а ласьне: памножыць b на c і множыва адняць ад a.

Дужкі бываюць звычайныя, ці круглыя, (), квадратныя [] і фігурныя {}.

Калі хочам многачлéн $a+b-c$ памножыць на многачлéн $a-b$, і рэзультат множаньня падняць на ступéнь p, дык пішам:

$$[(a+b-c)\cdot(a-b)]^p.$$

Робячы дзéяньні над многачлéнамі, ня пішам дужак у двух выпадках, а ласьне: калі дзялéньне многачлéну робім за дапамогаю дробу, напрыклад, замéста

$$(a-b):(c-d) \quad \text{можам напісаць:} \quad \frac{a-b}{c-d},$$

і потым, пры выцягваньні корня з многачлéну, напрыклад, змаéста

$$\sqrt[3]{}(2a^2+3b-4d^2) \qquad \text{пішам} \qquad \sqrt[3]{2a^2+3ab-4d^2}\,;$$

у абодвух выпадках дужкі замяняюцца пазéмнаю рысаю.

Часам дужкі трэба напісаць і пры дзéяньнях над адначлéнамі. Так, напрыклад, калі хочам паказаць, што множыва ад множаньня a на b трэба падняць на ступéнь p, — пішам $(ab)^p$. Так сама, пры ступеняваньні дробу бяром яго ў дужкі, каб паказаць, што падносім на ступéнь увéсь дроб; так, напрыклад, каб падняць $\frac{a}{b}$ на ступéнь p, пішам: $\left(\frac{a}{b}\right)^p$.

Прыклады.

Напісаць за дапамогаю знакаў наступныя альгэбрычныя выразы:

42. Множыва чысла a на суму b і c.
43. Множыва сумы a і b на іх розьніцу.
44. Квадрат сумы a і b.
45. Падвойны квадрат розьніцы a і b.
46. Дзель ад дзялéньня сумы q і r на іх розьніцу.
47. Патройны квадрат множыва чыслаў a і b.
48. Патройны куб розьніцы a і b.
49. Куб патройнае сумы x і y.
50. Квадрат патройнага множыва чыслаў a і b.
51. Множыва квадрату сумы p і q на суму іх квадратаў.

Правапіс альгэбрычных выразаў.

§ 16. Пры пісаньні альгэбрычных выразаў, трэба вéдаць наступныя правілы:

Цэлы сумножік пры дробавым пішам ўровень з рысай дробу, напрыклад:

$$\tfrac{2}{5}a\,, \qquad 4\tfrac{6}{7}(a-x)\,, \qquad \frac{a}{b}cd\,.$$

Знакі дзéяньняў і знак роўнасьці пры дробах так-сама пішам насупраціў рысы, напрыклад:

$$ab-\frac{a}{b}+x=\frac{b}{c}\,.$$

Перанасіць з аднаго радку ў другі можам толькі паасобныя часткі выразу, паміж якімі ёсьць знакі складаньня $+$, адыманьня $-$, або роўнасьці $=$. Трэба пры гэтым памятаць, што знак гэты павінен стаяць і ў канцы аднаго радку й спачатку другога, напрыклад:

$$\begin{array}{l} 4a^3+2bc+\tfrac{3}{4}cx+ \\ +3ab-ax\,;\;\; a^2x- \\ -b^3-abx+b^2x= \\ =2a^3d\,. \end{array}$$

II. АДЫМНЫЯ ЧЫСЛЫ.

Азначэньне адымных чыслаў і іх геомэтрычнае прадстаўле́ньне.

§ 17. На пачатку курсу арытмэтыкі мы разглядалі чысло, як групу адзінак, а, значыцца, ме́лі дачыне́ньні толькі з чысламі цэлымі; потым, каб зрабіць магчымаю задачу дзяле́ньня кожнага (а ня толькі кратнага чысла) на другое, былі ўве́дзены чыслы дробавыя.

У альгэбры мы павінны яшчэ больш пашырыць разуме́ньне чысла й ўвясьці новыя чыслы, званыя *адымнымі*1). Мэта іх уводу ёсьць — зрабіць магчымаю задачу адыманьня заўсёды, нават тады, калі адымаецца большае чысло ад ме́ншага.

§ 18. Калі хто-не́будзь, маючы гатоўкі 5 рублёў, выдасьць 3 рублі, тады стан яго мае́тнасьці азначыцца за дапамогаю розьніцы: 5 рубл. — 3 рубл., г. ё. 2 рублі *гатоўкі*; калі-ж хто-не́будзь маючы гатоўкі 3 рублі, выдасьць 5 рублёў, тады стан яго мае́тнасьці азначыцца розьніцаю 3 руб. — 5 руб., г. ё. 2 рублі *доўгу*; падобна, калі хто-не́будзь, маючы гатоўкі 0 (інакш кажучы, калі ён нічога ня мае), выдасьць 2 рублі, дык так сама стан яго мае́тнасьці азначыцца розьніцаю 0 руб. — 2 рубл., г. ё. 2 рублі *доўгу*.

Дзеля таго, што гатоўка й доўг ёсьць вялічыні супраціўныя, дык, каб іх адрозьніць, — абазначаем колькасьць гатоўкі чыслом са знакам +, і называем яго *вялічынёю дадатнаю*, што значыць — *большая за нуль*, а колькасьць доўгу абазначаем чыслом са знакам —, і называем яго *вялічынёю адымнаю*, што значыць — *ме́ншая за нуль*2)

Значыцца, адымаючы вялікшае чысло ад ме́ншага, будзем адтрымліваць чысло адымнае, так што:

$$0-2=-2,\ 0-3=-3,\ 0-4=-4$$

і г. д.; чым большае чысло будзем адымаць ад нуля, тым ме́ншы будзе вынік, значыцца:

$$-2>-3, \qquad -5>-7.$$

(І праўда, хто мае 5 рублёў доўгу, — багацей за таго, хто мае 7 рублёў доўгу.)

---

1) Адымныя чыслы, якія маюць вялікае значэньне ў матэматыцы, ўвёў італьянскі матэматык І. Кардано (1501—1576).

2) Адсюль бачым, што ў альгэбры + і — служаць дзеля падвойнае мэты, а ласьне: для абазначэньня дзе́яньняў складаньня й адыманьня, а так сама для азначэньня дадатных і адымных чыслаў; пры гэтым, калі пе́ршае чысло ў радку — дадатнае, дык знак + перад ім звычайна ня пішам.

Будзем называць *абсолютнаю вартасьцю чысла — колькасьць адзінак у ім, незале́жна ад таго, ці гэныя адзінкі дадатныя, ці адымныя*; напрыклад, 5 ёсьць абсолютная вартасьць для $+5$ і для -5; $3a^2$ ёсьць абсолютная вартасьць для $+3a^2$ і для $-3a^2$.

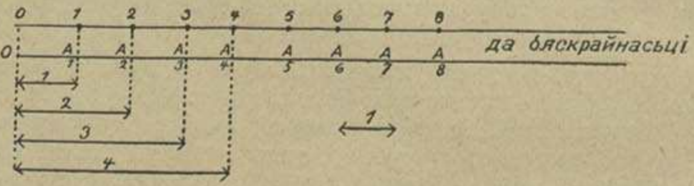
Тады можам сказаць, што *адымнае чысло ёсьць тым ме́ншае, чым большую абсолютную вартасьць яно мае*; так, -25 ёсьць менш за -14, наадварот, $-2 > -7$.

Усе дадатныя (са знакам $+$) і адымныя (са знакам $-$) числы, а так сама нуль, называюцца *адноснымі числамі*, а числы бяз знаку, якія ўжываюцца ў арытмэтыцы, — *звычайнымі*, або *арытмэтычнымі*.

§ 19. Каб уявіць сабе прыроду гэтых новых для нас числаў, возьмем адвольную простую лінію, без канца працягнутую ў два бакі, і на ёй які-не́будзь пункт 0. Няхай адзінку будзе прадстаўляць адцінак, напрыклад, у 1 сантымэтр; тады, адкладваючы гэты адцінак у адным якім-не́будзь кірунку, — будзем адтрымліваць адцінкі: OA_1, OA_2, OA_3 . . . , прадстаўляючыя геомэтрычныя числы:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 . . . да бяскрайнасьці,

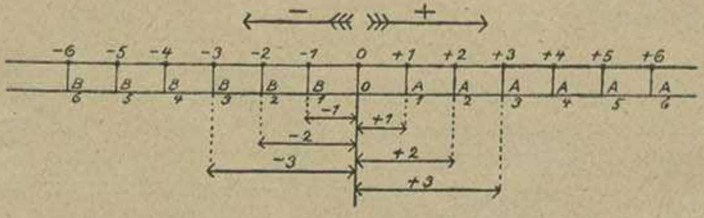
бо даўжыні іх будуць адпаве́дна роўнымі аднэй, дзьвём, тром . . . адцінкам даўжыні:



Бачым, што арытмэтычныя числы 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . . у сваім натуральным парадку йдуць да бяскрайнасьці ў адным толькі кірунку. — Каб напісаць усé адносныя числы (і дадатныя й адымныя), мы павінны напісаць гэты рад бяскрайным у абаіх кірунках:

ад бяскр. . . . -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 . . . да бяскр.

Тады й на рысунку мы павінны будзем адлажыць адцінкі ня толькі ўправа ад 0, але й ўлéва. Вот-жа адтрымаем:



Адцінкі OB_1, OB_2, OB_3 . . . па сваéй вялічыні будуць роўнымі адцінкам OA_1, OA_1, OA_3 . . ., але што да кірунку, дык будуць супраціўнымі.

Числам дадатным $+1$, $+2$, $+3$, . . . адказываюць пункты A_1, A_2, A_3 . . ., числам адымным -1, -2, -3 . . . адказываюць пункты B_1, B_2, $B_3 \ldots$, а нулю адказвае пункт 0, які стаіць паміж тымі й другімі числамі.

Адсюль бачым, што нуль ёсьць вялікшы за -1 на 1 адзінку, за -2, на 2 адзінкі, за -3 на 3 адзінкі і г. д.

§ 20. Адымныя числы маюць вялікае прыстасаваньне ў шмат якіх заданьнях агульнага характару.

Дзеля прыкладу разьвяжам наступную задачу:

Нехта выбраўся з Менску й прайшоў у кірунку на поўнач a вёрст, а потым у супраціўным кірунку (паўднёвым) прайшоў b вёрст. Як далёка на поўнач ад Менску знаходзіцца падарожны?

Дасьледаваньне. — Дзеля таго, што падарожны йшоў у двух супраціўных кірунках, дык шуканую колькасьць вёрст знойдзем за дапамогаю адыманьня b ад a. Абазначаючы шуканае число праз x, адтрымаем $x = a - b$.

Калі a ёсьць *большае* за b, тады, падстаўляючы на мейсца літараў арытмэтычныя числы, адтрымаем рэзультат *дадатны*, напрыклад, калі $a = 8$, $b = 5$, тады $x = 3$.

Рэзультат гэты паказвае, што падарожны знаходзіцца ў 3 вёрстах на поўнач ад Менску.

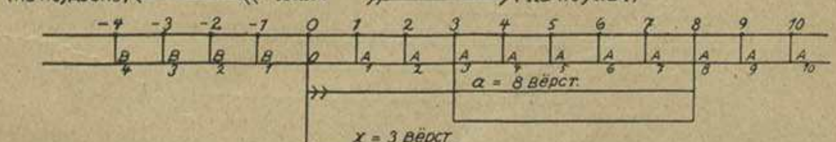
Калі a ёсьць *роўнае* b, напрыклад, калі $a = 8$ і $b = 8$, тады $x = 0$.

Рэзультат гэты паказвае, што падарожны прайшоў на поўнач ад Менску 8 вёрст і тыя-ж 8 вёрст прайшоў на поўдзень, а значыцца вярнуўся да Менску.

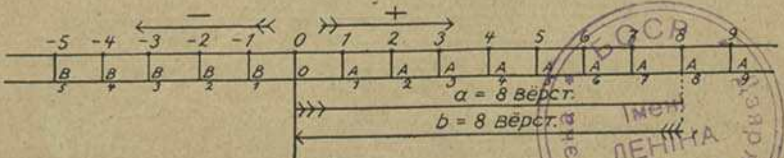
Урэшці, калі a будзе *менш* за b, напрыклад, $a = 8$, $b = 10$, тады шуканая адлегласьць ад Менску на поўнач будзе $8 - 10$, ці $x = -2$.

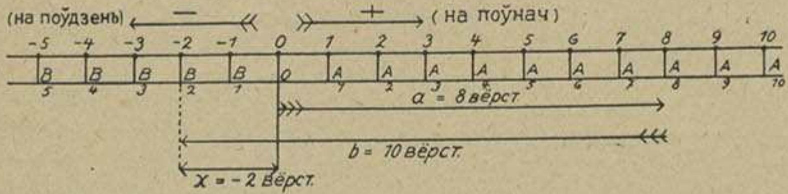
Адымная вартасьць шуканага числа паказвае, што падарожны ня толькі не прайшоў на поўнач, а наадварот, прайшоў 2 вярсты ў супраціўным кірунку, г. ё. ён знаходзіцца ў дзьвюх вёрстах на поўдзень ад Менску.

Праверым знойдзеныя рэзультаты на рысунку. Няхай пункт O будзе Менск, $\overline{OA}$ — паўночны (дадатны) кірунак, а $\overline{OB}$ — паўднёвы (адымны), — тады падарожны прайшоў спачатку $\overline{OA_8} = 8$ вёрст., а потым зрабіў дарогу $\overline{A_8A_3} = 5$ вёрст.



У другім выпадку:



У апошнім выпадку падарожны прайшоў спачатку на поўнач $OA_8 = 8$ вёрст, а потым зрабіў у супраціўным кірунку дарогу $A_8B_2 = 10$ вёрст.

Як бачым, падарожны сапраўды знаходзіцца ў 2 вярстах на поўдзень ад Ме́нску.

Вялічыні дадатныя й адымныя спатыкаем яшчэ ў шмат іншых заданьнях, дзе зьме́на можа адбывацца ў двух супраціўных кірунках, так, напрыклад, пры вылічэньнях капіталу й доўгу, зыску й страты, павялічэньня й зьмяншэньня тэмпэратуры, число гадоў перад Н. Хр. і пасьля Н. Хр. і шм. інш.

Складаньне адносных числаў.

§ 21. Пры складаньні двух адносных числаў могуць быць наступныя чатыры выпадкі:

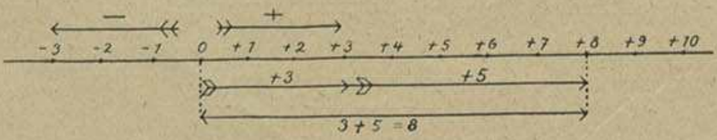
I выпадак. Каб скласьці *дадатнае число з дадатным*, напрыкл. (+ 3) скласьці з (+ 5), пішам

$$+3+(+5),$$

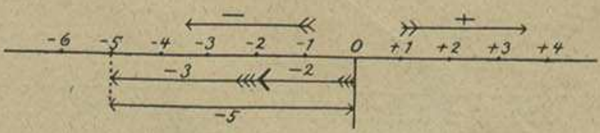
што дае́ 8, але й прасьце́й напісаная формула (бяз дужак і бяз знаку пе́рад імі):

$$3+5$$

так сама дае́ 8; значыцца выраз $3+(+5)$ абазначае тое самое, што і $3+5$, і наадварот.



2 *выпадак.* — Каб скласьці *адымнае число з адымным*, напрыкл., —2 з —3, выканаем спачатку гэтае дзе́яньне геомэтрычным шляхам:

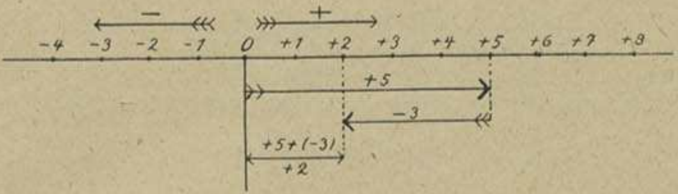


Адтрымалі —5, і сапраўды, калі мы, напрыклад, да нашага доўгу 2 рублі (—2) прылучым яшчэ доўгу 3 рублі (—3), дык будзем мець 5 рублёў доўгу, г. ё. —5.

Складаньне двух адымных числаў абазначаем так:

— 2 + (— 3), што дае́ — 5, але й прасьце́й напісаны выраз — 2 — 3 /гэта значыць, што мы адымаем ад нуля спачатку 2, а потым 3, разам 5 / так сама дае — 5, значыцца, выраз — 2 + (— 3) абазначае тое самае, што і — 2 — 3, і наадварот.

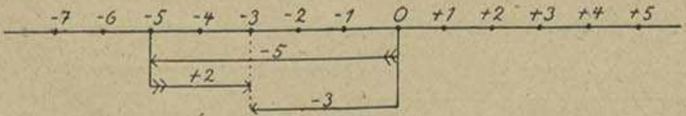
3 *выпадак.* — Каб скласьці *дадатнае чысло з адымным*, напр. 5 скласьці з (— 3), ізноў зьве́рнемся да геомэтрычнага вобразу (інтэрпрэтацыі). Будзем рабіць так, як пры разьвязваньні задачы аб падарожным.



Бачым, што адказ раўняецца 2, і, праўда, калі мы маем гатоўкі 5 рублёў (+ 5) і дадамо да яе́ 3 рублі доўгу (— 3), дык будзем мець 2 руб. гатоўкі (+ 2).

Абазначаем складаньне дадатнага чысла з адымным так: + 5 + (—3) што дае́ 2, але напіса́ўшы гэты выраз пра́сьце́й (бяз дужак і знаку пе́рад імі), так сама адтрымаем 2, значыцца, выраз + 5 + (—3) абазначае тое самае, што 5 — 3, і наадварот.

4 *выпадак.* — Каб скласьці *адымнае чысло з дадатным*, напрыклад, —5 скласьці з + 2, пішам — 5 + (+ 2), што дае́, як бачым на рысунку, — 3:



І праўда, калі мы да доўгу 5 рублёў (— 5) дадамо гатоўкі 2 рублі (+ 2), дык яшчэ будзе доўгу 3 рублі (— 3).

Такім чынам, — 5 + (+ 2) дае́ ў выніку — 3, але й прасьце́й напісаны выраз — 5 + 2 (гэта абазначае, што спачатку адымаецца ад нуля 5, а потым дадаецца 2 (дае́ так сама — 3; значыцца выраз — 5 + (+ 2) абазначае тое самае, што — 5 + 2, і наадварот.

Калі ў апошніх двух выпадках абсолютныя вартасьці складанак будуць роўныя, напрыклад — 3 + (+ 3) або 5 + (— 5), тады вынікам дзе́яньня будзе нуль; значыцца, *два чыслы з аднолькавымі абсолютнымі вартасьцямі, але з рознымі знакамі, — ўзаімна зносяцца.*

Уагульняючы даныя чатыры выпадкі складаньня адносных числаў,— можам сказаць:

1. *Каб скласьці два чыслы з аднолькавымі знакамі, трэба скласьці іх абсолютныя вартасьці й пе́рад рэзультатам напісаць супольны іх знак:*

$$(+4)+(+6)=+10$$
$$(-4)-(-6)=-10.$$

2. *Каб скласьці два чыслы з рознымі знакамі, трэба ад большае абсолютнае вартасьці адняць ме́ншую, і пе́рад рэзультатам напісаць знак, які стаяў пры чысле, ме́ўшым большую абсолютную вартасьць:*

$$(+8)+(-5)=+3$$
$$(-9)+(+5)=-4.$$

Альгэбрычнаю сумаю будзем называць кожнае злучэньне чыслаў за дапамогаю знакаў складаньня, або адыманьня.

Альгэбрычная сума тым розьніцца ад сумы арытмэтычнае, што можа зьмяшчаць у сабе й дадатныя й адымныя выразы, сума-ж арытмэтычная складаецца толькі з выразаў дадатных.

Альгэбрычная сума, так сама як арытмэтычная, не зьмяняе свае́й вартасьці, калі пераставі́м яе́ складанкі (перастаўны закон), напрыклад:

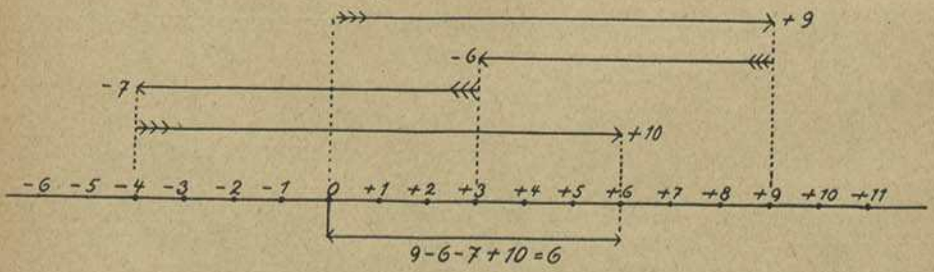
$$16-5+2-4=9$$
$$\text{і}\quad -5-4+16+2=9.$$

Адсюль, каб знайсьці вартасьць альгэбрычнае сумы, можна або папарадку дадаваць ці адымаць паасобныя выразы аж да апошняга, — або спачатку скласьці ўсе́ дадатныя выразы, потым скласьці ўсе́ адымныя, ад большае сумы адняць ме́ншую й паставіць знак большае сумы.

Каб паказаць складаньне альгэбрычнае сумы на рысунку, будзем рабіць так, як у задачы з падарожным; калі, напрыклад, трэба знайсьці вартасьць сумы:

$$+9-6-7+10.$$

Дык робім так:



Прыклады.

Выканаць дзе́яньні, паказаныя знакамі:

52. $7+(-5)$
53. $-11+(-4)$
54. $-\frac{3}{4}+(-\frac{3}{6})$
55. $\frac{7}{10}+(-\frac{3}{10})$
56. $-\frac{9}{13}+(-\frac{7}{13})$
57. $\frac{2}{3}+(-\frac{5}{9})$
58. $-\frac{7}{8}+(-\frac{5}{12})$
59. $0{,}25+(+0{,}053)$
60. $-0{,}375+(+0{,}52)$
61. $8+(-2)+(-3{,}5)+(+2{,}5)$
62. $9+(-2)-5+(-6)$
63. $\frac{3}{2}+(-\frac{3}{4})+\frac{5}{6}+(-\frac{1}{4}).$

Вылічыць і прадставіць геомэтрычна, прыняўшы 1 мілімэтр за адзінку, наступныя выразы:

64. $19-35$
65. $-19+35$
66. $-19-35$
67. $25+36-42$
68. $25-36+42$
69. $-25-36+42$
70. $-25-36-42$
71. $-53+74+23-16$
72. $-53+74-23-16$
73. $-53-74+23+16$
74. $-53-74+23-16$
75. $-56-74-23+16$.

Адыманьне адносных чыслаў.

§ 22. Як ве́дама, адыманьне ёсьць дзе́яньне, адваротнае складаньню, дзе́ля гэтага *адняць ад аднаго чысла другое — значыць знайсьці такое новае (астачу), каб яно ў суме з другім чыслом дало-б першае чысло.*

На падставе гэтага азначэньня, можам напісаць:

1) $a-(+b)=a-b$, бо калі мы да $a-b$ дадамо $+b$ (другое чысло), дык адтрымаем пе́ршае чысло:

$$a-b+b=a.$$

і 2) $a-(-b)=a+b$, бо калі мы да $a+b$ дадамо $(-b)$ (другое чысло), дык адтрымаем пе́ршае чысло:

$$a+b+(-b)=a.$$

Разважаючы формулы (1 і 2) можам сказаць: *Каб адняць ад аднаго чысла якое-не́будзь другое (дадатнае ці адымнае) чысло, трэба зьмяніць знак апошняга чысла на супраціўны і дадаць яго да пе́ршага чысла*, напрыклад:

$$4-(+12)=4-12=-8$$
$$4-(-12)=4+12=16$$
$$-7-(-3)=-7+3=-4.$$

Прыклады.

76. Ад 2,5 адняць 7,5
77. Ад 4 адняць -3
78. Ад -4 адняць -6
79. Ад -2 адняць 12
80. Вылічыць: $(-2)-(+4)$
81. $(+2{,}4)-(-8)$
82. $(-12{,}4)-(-6{,}6)$
83. $0{,}09-(+0{,}003)$
84. $-\frac{3}{2}-(+\frac{4}{5})$
85. $-0{,}57-(-1{,}8)$
86. $7-8+(2-7)+12$
87. $[2+(8-12)-14]-8$
88. $4-[(-2)-(-5)]$
89. $3-(-4)-\{3-[8-(4-5)]\}$.

Знайсьці лікавую вартасьць выразаў:

90. $(a+b-c)-[c-(a+c)]$, пры $a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{5}{6}$, $c=-\frac{5}{4}$.
91. $m-\{n-[(a-p)+q]\}$, пры $a=\frac{1}{6}$, $m=\frac{2}{3}$, $n=-\frac{3}{4}$,
$p=-\frac{1}{4}$, $q=-\frac{5}{6}$.

92. Напісаць ўсе́ цэлыя чыслы, якія знаходзяцца паміж $-4\frac{1}{3}$ і $3\frac{2}{5}$. (Нуль лічыцца цэлым чыслом).

Множаньне адносных чыслаў.

§ 23. *Множаньнем называем дзеяньне, за дапамогаю якога, маючы два чыслы (множнае й множнік), складаем з множнага чысла — новае чысло (множыва), ў такі самы спосаб, якім быў улажаны множнік з дадатнае адзінкі*[1]).

Калі хочам, напрыклад, 7 памножыць на 4, дык, водлуг гэтага азначэньня, складаем з 7 множыва так, як 4 было ўложана з $+1$. Каб 4 улажыць з $+1$, трэба $+1$ узяць складанкаю 4 разы; значыцца, для знаходжаньня нашага множыва, трэба ўзяць 7 складанкаю 4 разы, тады адтрымаем:

$$7+7+7+7=28.$$

Пры множаньні адносных чыслаў могуць быць чатыры наступныя выпадкі:

1. *Ад множаньня дадатнага чысла на дадатнае, —, рэзультат будзе дадатным чыслом.*

Сапраўды, каб памножыць $+6$ на $+3$, трэба $+6$ узяць складанкаю 3 разы (бо й $+3$ адтрымаем, калі так сама возьмем $+1$ складанкаю 3 разы), значыцца:

$$(+6)\times(+3)=+6+6+6=+18.$$

Наагул:

$$(+a)\cdot(+b)=ab.$$

2. Ад множаньня *адымнага чысла на дадатнае — рэзультат будзе адымным чыслом.*

Каб памножыць -6 на $+3$, трэба -6 узяць складанкаю 3 разы, значыцца:

$$(-6)\times(+3)=-6-6-6=-18.$$

І праўда, калі мы маем доўгу 6 рублёў (-6) і павялічым яго ў 3 разы, дык доўгу ў нас будзе 18 рублёў (-18).

Наагул:

$$(-a)\cdot(+b)=-ab.$$

3. Ад множаньня *дадатнага чысла на адымнае — рэзультат будзе адымнае чысло.*

Няхай, напрыклад, множым $+6$ на -3, каб -3 улажыць з $+1$, трэба пры $+1$ зьмяніць знак на супраціўны й ўзяць адтрыманую -1 складанкаю 3 разы. Дзеля гэтага, каб памножыць $+6$ на -3, зьмяняем знак пры $+6$ на супраційны й бярэм адтрыманае чысло -6 складанкаю 3 разы:

$$-6-6-6=-18,$$

значыцца:

$$(+6)\times(-3)=-18.$$

Наагул:

$$(+a)\cdot(-b)=-ab.$$

4. Ад множаньня *адымнага чысла на адымнае, — рэзультат будзе дадатнае чысло.*

Няхай, напрыклад, множым -6 на -3.

Каб -3 улажыць з $+1$, як і ў папярэднім прыкладзе, трэба пры $+1$ зьмяніць знак на супраціўны й адтрыманую -1 узяць складан-

---

[1]) Гэтае азначэньне даў францускі матэматык Кошы (1789—1857).

каю 3 разы. — Дзеля гэтае прычыны, каб памножыць -6 на -3, — зьмяняем знак пры -6 на супраціўны й бярэм адтрыманае чысло $+6$ складанкаю 3 разы:

$$+6+6+6=18,$$

значыцца

$$(-6)\times(-3)=18,$$

і наагул:

$$(-a)\cdot(-b)=ab\,.$$

Сапастаўляючы разглéджаныя чатыры выпадкі, можам сказаць: *аднолькавыя знакі пры абодвух сумножніках даюць у множыве знак* $+$, *а розныя знакі даюць знак* $-$.

§ 24. Для адтрыманьня множыва з нéкалькіх сумножнікаў, напрыклад: $a, b, c, d\ldots$, множым a на b, множыва ab множым на c, новае множыва abc на d, і г. д. Такім чынам, *абсолютная вартасьць множыва нéкалькіх сумножнікаў ёсьць роўная множыву абсолютных вартасьцяў паасобных сумножнікаў.*

Калі ўсé сумножнікі — дадатныя, тады множыва будзе так сама дадатным; калі да сумножнікаў дадатных далучым адзін сумножнік адымны, тады множыва зьмéніць знак на супраціўны; калі далучым два адымныя сумножнікі, дык множыва ізноў будзе дадатным; пры трох адымных сумножніках, множыва будзе адымнае, і наагул:

Калі чысло адымных сумножнікаў — парнае, тады множыва будзе дадатным, у супраціўным выпадку, — яно будзе адымным, напрыклад:

$$(-4)\cdot(+a)\cdot(-m)=4am\,,$$
$$12\cdot(-3)\cdot(+a)\cdot(-b)\cdot(-c)=-36abc\,.$$

[Трэба заўважыць, што множыва, або ступéнь адымных чыслаў трэба браць заўсёды ў дужкі:

$$(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)=-24\,,$$
$$(-3)^3=-27 \text{ і. г. д.]}$$

Прыклады.

93. $(-3)\cdot(-4)$
94. $(+2)\cdot(-\frac{3}{5})$
95. $(-3)\cdot(-\frac{4}{5})$
96. $(-\frac{5}{3})\cdot(-6)$
97. $(-\frac{5}{7})\cdot(-\frac{21}{5})$
98. $(-1\frac{1}{3})\cdot(+1\frac{1}{2})$
99. $(+0{,}6)\cdot(-0{,}2)$
100. $(-1{,}5)\cdot(-0{,}2)$
101. $(+4)\cdot(-1)\cdot(-2)$
102. $(-7)\cdot(+3)\cdot(+5)$
103. $(-0{,}3)\cdot(+0{,}2)\cdot(-5)\cdot(+0{,}1)$
104. $[4-(-3)-5]\cdot(5-7)$
105. $[(-3)\cdot(-2)-(-2)]\cdot(-6)$
106. $(1\frac{1}{12}-2\frac{1}{3})\cdot[-3+(-2)]$
107. $(-7)\cdot[(+3)\cdot(-2)-(-8)]$
108. $(+5)\cdot(-m)\cdot(-2)\cdot(+3)\cdot(+p)$.

Дзяленьне адносных чыслаў.

§ 25. Дзялéньне ёсьць дзéяньне, адваротнае множаньню; дзеля гэтага, падзяліць адно чысло (дзéльнае) на другое (дзельнік) значыць знайсьці такое чысло, каб, памножыўшы яго на дзельнік, адтрымаць дзельнае.

З гэтага азначэньня бачым, што, калі дзе́льнае чысло й дзельнік — числы з аднолькавымі знакамі, тады рэзультат (дзель) мае́ знак $+$. Сапраўды:

$$(+18):(+6)=+3, \quad \text{бо} \quad (+3)\cdot(+6)=+18.$$
$$(-18):(-6)=+3, \quad \text{бо} \quad (+3)\cdot(-6)=-18.$$

Калі-ж дзельнае чысло й дзельнік маюць знакі супраційныя, тады рэзультат (дзель) будзе адымным:

$$(+18):(-6)=-3, \quad \text{бо} \quad (-3)\cdot(-6)=+18.$$
$$(-18):(+6)=-3, \quad \text{бо} \quad (-3)\cdot(+6)=-18.$$

Такім чынам, *каб падзяліць адно чысло (адноснае) на другое, трэба падзяліць іх абсолютныя вартасьці й дзель узяць са знакам +, калі дзельнае й дзельнік маюць аднолькавыя знакі, і са знакам —, калі знакі пры дзельным чысьле й дзельніку-розныя.*

Прыклады.

109. $(+6):(-3)$
110. $(-8):(+2)$
111. $(-18):(-9)$
112. $(-14):(-8)$
113. $(+\frac{5}{6}):(-\frac{3}{4})$
114. $(-\frac{10}{3}):(-\frac{5}{6})$
115. $(+2\frac{1}{2}):(-2\frac{1}{4})$
116. $(-3\frac{1}{3}):(+2\frac{1}{2})$
117. $(-0,5):(0,01)$
118. $(-0,08):(-0,4)$
119. $(-0,3):(-0,06)$
120. $[(-4,5):9]:[5:(-2)]$
121. $(2\frac{3}{5}-4):[2\frac{1}{5}+(-1\frac{7}{15})]$
122. $(-3):[-9,6+(-4,5)\cdot(+1,2)]$
123. $\{[(+7)\cdot(-8)]:(-14)\}:(-2)$.

Знайсьці лікавую вартасьць выразаў:

124. $[(a+3):a-2]\cdot 5$, пры $a=-2$
125. $[(a-3):a-2]\cdot a$, пры $a=-5$
126. $[(x-3):4-2]\cdot[(-x)\cdot(-4)]$, пры $x=7$.

III. ПЕРАРОБКА МНОГАЧЛЕ́НУ.

Падобныя чле́ны.

§ 26. *Чле́ны многачле́ну называюцца падобнымі тады, калі яны складаюцца з аднолькавых літарных сумножнікаў, паднятых на аднолькавую ступень; лікавыя-ж коэфіцыенты й знакі — падобныя чле́ны могуць мець розныя.*

Так, у многачле́не:

$$\underline{5a^2b} - 2b^3 - \underline{3ab^4} + \underline{2a^2b} - \underline{4ab^4} - \underline{\tfrac{1}{7}a^2b}$$

падобнымі чле́намі будуць пе́ршы, чацьве́рты й шосты, потым — трэці й пяты; другі член $-2b^3$ ня мае падобнаго.

Злучэньне падобных чле́наў.

§ 27. Калі многачле́н мае падобныя выразы, тады можна яго ўпросьціць, злучаючы падобныя чле́ны ў адзін член. Такое ўпрошчаньне многачле́ну называюцца *злучэньнем падобных чле́наў.* Тутака могуць здарыцца два выпадкі:

1. *Падобныя чле́ны маюць аднолькавыя знакі,* напрыклад:

$$6ax^2 + 3ax^2 + 2ax^2.$$

Выраз гэты азначае, што ax^2 сьпярша трэба ўзяць складанкаю 6 разоў, потым 3 разы й ўрэшці 2 разы, а разам:

$$6 + 3 + 2 = 11 \text{ разоў}$$

значыцца:

$$6ax^2 + 3ax^2 + 2ax^2 = 11ax^2.$$

Калі маем многачле́н зложаны з адных толькі адымных падобных чле́наў, дык так сама можам іх злучыць у адзін член, склаўшы лікавыя коэфіцые́нты й паставіўшы пе́рад рэзультатам знак —; сапраўды, выраз, напрыклад, такі:

$$-4b^3 - 3b^3 - 5b^3$$

азначае, што мы павінны ад якога-не́будзь числа адняць b^3 спачатку чатыры разы, потым 3 разы й яшчэ 5 разоў, ці разам 12 разоў, значыцца:

$$-4b^3 - 3b^3 - 5b^3 = -12b^3.$$

2. *Падобныя чле́ны маюць знакі розныя.*

Напрыклад, у выразе:

$$8ab^2c^3 - 6ab^2c^3$$

трэба ab^2c^3 дадаць 8 разоў і адняць 6 разоў, г. ё. у рэзультаце дадаць 2 разы; значыцца:

$$8ab^2c^3 - 6ab^2c^3 = 2ab^2c^3.$$

Разважаючы, як у апошнім выпадку, знойдзем:

$$7am^2 - 12am^2 = -5am^2.$$

З разгледжаных прыкладаў бачым, што, *калі падобныя члены маюць розныя знакі, дык пры злучэньні трэба ад большага лікавага коэфіцыента адняць меншы й перад рэзультатам паставіць знак большага коэфіцыента.*

Возьмем яшчэ дзеля прыкладу многачлён, зложаны з падобных членаў розных знакаў, і выканаем злучэньне:

$$2a^2b^3 + 9a^2b^3 - 4a^2b^3 + 6a^2b^3 - 5a^2b^3 - 7a^2b^3 - 3a^2b^3 .$$

Дзеля таго, што члёны: пёршы, другі й чацьвёрты — дадатныя, дык, злучаючы іх, адтрымаем:

$$2a^2b^3 + 9a^2b^3 + 6a^2b^3 = 17a^2b^3 .$$

Злучаючы потым адымныя члёны: трэці, пяты, шосты й сёмы, будзем мець:

$$-4a^2b^3 - 5a^2b^3 - 7a^2b^3 - 3a^2b^3 = -19a^2b^3 .$$

Бачым, што, пасьля зробленага ўпрошчаньня, наш многачлён складаецца цяпёр з двух члёнаў:

$$17a^2b^3 - 19a^2b^3 .$$

Калі мы злучым і гэтыя члёны, дык ўрэшці адтрымаем: $-2a^2b^3$ значыцца:

$$2a^2b^3 + 9a^2b^3 - 4a^2b^3 + 6a^2b^3 - 5a^2b^3 - 7a^2b^3 - 3a^2b^3 = -2a^2b^3 .$$

Сапастаўляючы нашыя довады й выснаўкі, можам цяпёр даць наступнае правіла злучэньня падобных члёнаў:

Калі падобныя члёны маюць знакі аднолькавыя, дык пры злучэньні трэба скласьці іх лікавыя коэфіцыёнты й пёрад сумаю напісаць супольны знак; калі-ж падобныя члёны маюць розныя знакі, дык трэба асобна скласьці дадатныя коэфіцыёнты й асобна адымныя, ад большае сумы адняць мёншую й пёрад рэзультатам паставіць знак большае сумы.

Зробім яшчэ злучэньне ў многачлёне:

$$\underline{5a^2b} - \underline{3a^2} + \underline{2a^2b} - 7m^2x - \underline{4a^2b} + \underline{3a^2} .$$

Для зручнасьці, падобныя члёны падчыркнём аднолькавымі рысамі; тады члёны: пёршы, трэці й пяты дадуць па злучэньні $3a^2b$; падобныя члёны: другі й шосты, якія маюць аднолькавыя лікавыя коэфіцыёнты й розныя знакі, ўзаімна зносяцца; а член чацьвёрты — $7m^2x$ ня мае падобнага, значыцца прыпісваем яго да рэзультату бяз зьмёны. Такім чынам, па злучэньні данага многачлёну, адтрымаем:

$$3a^2b - 7m^2x .$$

Прыклады.

Выканаць злучэньне ў наступных многачленах:

127. $9ab - 4ab$
128. $-7a^3 - 4a^3$
129. $6a^2bc - 3a^2bc + a^2bc$
130. $3a^3 - 3a^3 + 5a^3$
131. $-12a^2b^2 - 2a^2b^2 - 3a^2b^2 - 4a^2b^2$
132. $11a^3b - 7a^3b - 11a^3b$
133. $8a^3b - 5ab + 4ac^2 - 3ab - 6bc - 7a^3b + 8ab$

134. $3am^2 + 2a^2c^2 + 3ab - 7am^2 - ab - 2ab + 4am^2 + 2a^2c^2$

135. $\frac{5}{3}a^2bc - \frac{3}{4}abc^2 - \frac{3}{2}a^2bc - \frac{1}{2}abc^2 + abc^2 - 2a^2bc$

136. $5a^3 - 7a^2b + 7ab^2 + a^2b - 2a^3 - 8ab^2 + a^3 - 12ab^2 + 3a^2b$

137. $4{,}5x^2y^2 - 2{,}2x^2 + by^2 + 2{,}2x^2 + 3{,}2x^2y^2 - 7{,}7x^2y^2$

138. $2\frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{4}ax - 3\frac{1}{2}ax - 2\frac{3}{4}by - 6\frac{1}{2}bx^2 - 2\frac{1}{2}ax + 4bx^2$

139. $10a(x+y)^5 - 11a(x+y)^5 - 7a(x+y)^5 - a(x+y)^5 + 7a(x+y)^5$

140. $9b^2(x-y)^4 - 13b^2(x-y)^4 - 15b^2(x-y)^4 - b^2(x-y)^4 + 13b^2(x-y)^4$

141. $3a^5 - ab^2 - \frac{2}{3}a^7b - 3c^2 + \frac{1}{2}a^5 + 2a^7b + \frac{1}{3}c^2 - 4a^5 + 2ab^2 - 4c^2 -$
$- 3a^4 - \frac{10}{3}a^7b + 3a^4$

Упарадкаваньне многачлéну.

§ 28. Дзéля зручнасьці дзéяньняў, члéны многачлéну звычайна ўкладваюцца ў пэўным парадку, а ласьне: бяром адну якую-нéбудзь літару й вышісваем члéны так, каб паказчык ступéні гэтай літары паступова зьмяншаўся, або ўзрастаў.

Калі паказчык ступéні пры гэткай літары (яé тады называем галоўнаю) зьмяншаецца, тады многачлéн ёсьць — упарадкаваны водлуг *спадаючых ступéняў галоўнае літары*; наадварот, калі паказчык галоўнае літары ўзрастае, тады многачлéн — ўложаны водлуг *ўзрастаючых ступéняў* галоўнае літары; напрыклад, многачлéн:

$$4x^3 - 5x^2 - 2\tfrac{1}{2}x + 7$$

ёсьць уложаны водлуг спадаючых ступéняў літары x. Гэты самы многачлéн можа быць уложаны водлуг узрастаючых ступéняў літары x, калі члéны яго напішам у адваротным парадку, а ласьне:

$$7 - 2\tfrac{1}{2}x - 5x^2 + 4x^3.$$

Член, які зьмяшчае ў сабé найбольшую ступéнь галоўнае літары, называем *вышэйшым*, а член, які зьмяшчае ў сабé наймéншую ступéнь галоўнае літары называем *ніжэйшым*. Так, у нашым многачлéне вышэйшы член ёсьць $4x^3$, ніжэйшы 7.

Калі члéны многачлéну зьмяшчаюць па нéкалькі літараў, і ніякая з іх ня мае асаблівага для нас значэньня, тады можам браць за галоўную літару — якую хочам.

Напрыклад, у многачлéне:

$$3a^2b + a^3 + b^3 + 3ab^2$$

можам за галоўную літару ўзяць a, або b. Вось-жа, калі многачлéн гэты упарадкуем водлуг спадаючых ступéняў літары a, дык ён будзе адначасна ўпарадкаваны водлуг узрастаючых ступéняў літары b:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Парадкуючы многачлéн

$$4a^2x^3 - 2bx^4 + 3cx^2 - 2x + 5x^5$$

водлуг спадаючых ступéняў літары x, адтрымаем:

$$5x^5 - 2bx^4 + 4a^2x^3 + 3cx^2 - 2x.$$

Калі многачлéн складаецца з дадатных і адмных члéнаў, дык звычайна на пачатку пішам дадатны член.

IV. ПЕ́РШЫЯ ЧАТЫРЫ ДЗЕ́ЯНЬНІ.

Складаньне адначленаў.

§ 29. Вышэй мы ўжо бачылі, што скласьці чысло a з b, гэта значыць — напісаць: $a+b$, а скласьці a з $(-b)$, гэта значыць — напісаць $a-b$.

Такім чынам, *каб скласьці не́калькі адначле́наў з рознымі знакамі, — трэба напісаць іх адзін за другім з тымі знакамі, якія пры іх былі, а потым, калі магчыма, выканаць злучэньне падобных выразаў.*

Напрыклад:

$$2a^2b+(5ab^2)+(-4bc)=2a^2b+5ab^2-4bc;$$

$$3abx+(-2ab^2)+(-4bx^2)+(2bx^2)+(-abx)+(ab^2)+(-2abx)=$$
$$=3abx-2ab^2-4bx^2+2bx^2-abx+ab^2-2abx=-2bx^2-ab^2.$$

Складаньне многачленаў.

§ 30. Кожны многачле́н можам разглядаць, як альгэбрычную суму паасобных яго чле́наў. Побач з тым ве́даем, што дадаць суму — гэта значыць: папарадку дадаць кожную складанку; такім чынам, *каб дадаць многачле́н, — дадаем кожны член яго папарадку з тымі знакамі, якія стаяць пры чле́нах; а потым, калі гэта магчыма, робім злучэньне падобных выразаў.*

Напрыклад, каб дадаць $b+c$ да a, пішам:

$$a+(b+c)=a+b+c.$$

Так сама:

$$a+(b-c)=a+b-c.$$

$$5a^2c^3-2a^3c^2+(4bc+4a^3c^2-5a^2c^3-7)=$$
$$=5a^2c^3-2a^3c^2+4bc+4a^3c^2-5a^2c^3-7=2a^3c^2+4bc-7.$$

Прыклады.

142. $-10y+(+8y)$
143. $(+3ab^2)+(-5ab^2)+(-4ab^2)$
144. $\frac{13}{2}a^2+(-\frac{9}{5}a^2)$
145. $0{,}25a^3x+(-0{,}7a^3x)$
146. $(6b^2x)+(3bx^2)+(-2b^2x)+(-cx)+(-4bx^2)$
147. $-4{,}2mp+(-3{,}4am)+(-2{,}4bm)+(3{,}6mp)+(6{,}7bm)+(8mp)$
148. $3a^2b-5ab^2+(-3ab^2+2a^2b)$

149. Складсьці $13a+7b-2c+6d$ і $10a-6b+5c+8d$

150. „ $3a^4-4a^3b+7a^2b^2+b^3$, $-2a^4-6ab^3+a^3b+b^4$ і $3a^3b-6a^2b^2+5ab^3$

151. $8ab^4x-9ab^2+4bc-6b^3c+(12b^3c+15ab^4x-7ab^2-15bc)$

152. $12bm^3-14am^2-6cm-15+(5am^2-7cm+8)+11bm^3+$ $+(9am^2+3cm-11)$

153. $(\frac{2}{3}a^2-1\frac{1}{4}ab+\frac{5}{12}b^2)+(-\frac{3}{2}a^2-\frac{2}{5}ab+\frac{3}{4}b^2-\frac{2}{5}a^2b^2)$.

Адыманьне адначле́наў.

§ 31. Каб адняць ад чысла a дадатнае чысло b, пішам:

$$a-(+b),\quad \text{г. ё.}\quad a-b\quad (\S\, 22).$$

Каб адняць ад чысла a адымнае чысло $-b$, пішам:

$$a-(-b),\quad \text{г. ё.}\quad a+b.$$

З даных прыкладаў бачым, што *пры адыманьні адначленаў трэба зьмяніць знак адымніка на супрацiўны*, напрыклад:

$$5a^3b^2-(+4a^2c^3)=5a^3b^2-4a^2c^3,$$
$$2x^2y-(-3x^2y)=2x^2y+3x^2y=5x^2y.$$

Адыманьне многачле́наў.

§ 32. Няхай трэба адняць суму $9+5$ ад 16; ясна, што заме́ста сумы $(9+5)$ можам сьпярша ад 16 адняць 9, а потым ад рэшты адняць 5, адтрымаем:

$$16-(9+5)=16-9-5$$

і наагул:

$$a-(b+c)=a-b-c;$$
$$a-(b+c+d+e)=a-b-c-d-e\quad \text{і. г. д.}$$

Няхай цяпе́р трэба ад 16 адняць розьніцу $9-5$. Як і ў папярэдным выпадку, адымем спачатку 9, адтрымаем $16-9$; але рэзультат гэты ёсьць на 5 адзінак менш за сапраўдны, таму што мы ме́лі ад 16 адняць 9, зьме́ншанае на 5 $(9-5)$, а адня́лі ня зьменшанае 9; дзеля гэтага, каб рэзультат быў правільным, трэба да розьніцы $16-9$ дадаць 5; такім чынам, адтрымаем:

$$16-(9-5)=16-9+5$$

і наагул:

$$a-(b-c)=a-b+c.$$

Сапастаўляючы даныя два выпадкі, можам сказаць: *пры адыманьні многачленаў, — трэба да зьмяншанага чысла дапісаць усе члены адымніка са зьмененымі знакамі, і ў рэзультаце, калі магчыма, выканаць злучэньне падобных выразаў.*

Напрыклад:

$$5a^5bc-3a^3b+12ac-(8a^5bc-3a^3b)=$$
$$=5a^5bc-3a^3b+12ac-8a^5bc+3a^3b=12ac-3a^5bc.$$

Прыклады.

154. $-5a^2-(-7a^2)$

155. $-4b^2c-(+7b^2c)$

156. $5a^3b^4-(-4a^3b^4)-(-7a^3b^4)-(+3a^3b^4)$

157. $8n^2-(3n^2-5m^3)$

158. $(\frac{4}{5}x-\frac{3}{7}y)-(\frac{3}{7}y-\frac{4}{5}x)$

159. $(7{,}5a-5{,}6b)-(2{,}3b-0{,}5a)$

160. Ад $a^2+2ab+b^2$ адняць $a^2-2ab+b^2$

161. „ $4x^2+2xy-3y^2$ адняць $-x^2-xy+2y^2$

162. „ $a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$ адняць $a^4+4a^3b+6a^2b^2+$
$+4ab^3+b^4$

163. „ $\frac{5}{2}x^2+3ax-\frac{7}{3}a^2$ адняць $2x^2-\frac{1}{2}a^2-ax$

164. $6ax^3+9ax-2ax^2+6-(9ax-8ax^3-4ax^2-7)$

165. $5{,}65a+7\frac{2}{3}b-24\frac{3}{4}c-5{,}73d-(0{,}3a-9{,}35b-5\frac{3}{4}d)$.

Прыстасаваньне дужак пры складаньні й адыманьні.

§ 33. У альгэбрычных выразах часам спатыкаем многачле́н у дужках, якія трэба зьне́сьці (разамкнуць), г. ё. трэба выканаць дзе́яньні, паказаныя знакамі пе́рад дужкаю. Знак $+$ пе́рад дужкаю паказвае, што многачлен трэба дадаць, а знак — перад дужкаю паказвае, што многачле́н трэба адняць; дзеля гэтага: *калі перад дужкамі стаіць знак* $+$, *дык можам іх зьнесьці, не зьмяняючы знакаў пры членах; калі перад дужкамі стаіць —, дык, зносячы іх, трэба ўсе́ знакі пры членах зьмяніць на супраціўныя*; напрыклад:

$$6a^2b^4+(3a^3b-2abc-3a^2b^4)-(5abc-2a^2b^4+3a^3b)=$$
$$=6a^2b^4+3a^3b-2abc-3a^2b^4-5abc+2a^2b^4-3a^3b=5a^2b^4-7abc.$$

Калі выраз мае дужкі не́калькіх гатункаў, дык зносім іх па парадку, пачаўшы з унутраных.

Напрыклад:

$$2ac-5c-\{6a^2-5c+[2ac-3b^3-(6a^2-3b^3)]\}=$$
$$=2ac-5c-\{6a^2-5c+[2ac-3b^3-6a^2+3b^3]\}=$$
$$=2ac-5c-\{6a^2-5c+2ac-3b^3-6a^2+3b^3\}=$$
$$=2ac-5c-6a^2+5c-2ac+3b^3+6a^2-3b^3=0.$$

Наадварот, калі маем многачле́н бяз дужак, — можам іх уве́сьці, замыкаючы ў дужкі па не́калькі чле́наў; пры гэтым, калі ставім пе́рад дужкамі знак $+$, дык пры чле́нах у дужках знакі астаюцца тыя самыя, калі-ж пе́рад дужкамі ставім знак —, дык у дужках пры ўсіх чле́нах знакі трэба зьмяніць на супраўіцныя, напрыклад:

$$a+b-c-d+e-m=a+(b-c)-(d-e+m).$$

Прыклады.

Зьне́сьці дужкі ў наступных выразах:

166. $b+(cx-d)-(d-cx)$

167. $a-[bc-(d-a)]$

168. $a+[b-(c-d)]$
169. $a-\{b-[c-(d+k)]\}$
170. $2m-\{3m-[4m-(5m+6m)]\}$
171. $a-\{5b+[3c-3a-(a+b)]+2a-(b+3c)\}$
172. $a^2-\{-3b-[a+2b-(3a^2-3b^2)+2a^2]\}$
173. $x-\{2y+[3z-3x-(x+z)]\}-[2x-(y+3z)]$
174. $(3x^2+4y^2)+\{(x^2+2xy-y^2)+[2x^2+2xy-(-4xy+3y^2)]\}$
175. $6bx^2-\{cx+2y+[4cx+6bx^2-(3ax+4y+5cx)+3ax]\}.$

176. Не зьмяняючы вартасьці многачлéну

$$a-b+c-d-e+f,$$

замкнуць трэці й чацьвéрты яго члéны ў дужкі й паставіць пéрад імі $+$, а пяты й шосты члéны замкнуць ў дужкі й паставіць пéрад імі знак $-$.

177. Не зьмяняючы вартасьці многачлéну

$$5a^3+7a^2x+2ax^2+4x^3,$$

замкнуць сярэднія яго члéны ў дужкі са знакам $-$, а канцовыя члéны — ў дужкі са знакам $+$.

Множаньне адначлéнаў.

§ 34. Разглéдзім сьпярша множаньне ступéняў аднолькавых чыслаў. Хай, напрыклад, трэба памножыць a^3 на a^2.

Вéдаем, што:

$$a^3=a\cdot a\cdot a \qquad \text{і} \qquad a^2=a\cdot a,$$

значыцца:

$$a^3\cdot a^2=a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a=a^5=a^{3+2}.$$

І наагул:

$$a^m\cdot a^n=\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\ldots}^{m\text{ разоў}}\cdot\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\ldots}^{n\text{ разоў}}=a^{m+n}.$$

Такім чынам, *каб памножыць ступені аднолькавых чыслаў, трэба скласьці іх паказчыкі.*

Няхай цяпéр трэба памножыць

$$(3a^2b^3c) \qquad \text{на} \qquad (-5a^3b^4d^2).$$

Вéдаем, што множыва ня зьмéніцца, калі пераставім сумножнікі; на падставе гэтага закону, пішам:

$$(3a^2b^3c)\cdot(-5a^3b^4d^2)=(3)\cdot(-5)\cdot a^2\cdot a^3\cdot b^3\cdot b^4\cdot c\cdot d^2.$$

Множучы коэфіцыéнты й дадаючы паказчыкі аднолькавых літараў, адтрымаем:

$$-15a^5b^7cd^2.$$

Значыцца:

Каб памножыць адначлéны, трэба памножыць іх коэфіцыéнты, і скласьці паказчыкі аднолькавых літараў, а літары, якія ўходзяць у склад толькі аднаго з адначлéнаў, — перанéсьці ў множыва бяз зьмены.

Напрыклад:

$$\tfrac{2}{15}a^5b^2c^4\cdot(-5a^2b^3cd)=-\tfrac{2}{3}a^7b^5c^5d.$$

Прыклады.

178. $m^{10} \cdot m^3$
179. $x^{2n} \cdot x^{3n}$
180. $x \cdot x^3 \cdot x^5 \cdot x^2$
181. $(0{,}7a^3xy^2) \cdot (3a^4x^2)$
182. $(\frac{1}{2}mz^3)^2$
183. $(1{,}2a^4m^6) \cdot (\frac{3}{4}am)$.
184. $(-\frac{3}{8}a^3b^4x) \cdot (-\frac{5}{6}b^3x^5)$
185. $(-3{,}5x^2y) \cdot (\frac{3}{4}x^3)$
186. $(4a^nb^3) \cdot (-7ab^n)$
187. $-3a^mb^4 \cdot 4a^3b^p$
188. $2{,}5a^mb^n \cdot (-0{,}4a^pb^r)$
189. $0{,}5m^3p^4 \cdot (-0{,}8mp^2) \cdot (1{,}2m^2)$.

Множаньне многачлéну на адначлéн, і яго геомэтрычнае прадстаўленьне.

§ 35. Няхай трэба памножыць многачлéн $a + b - c$ на які-небудзь альгэбрычны выраз. Абазначым гэты выраз аднэй літараю m, тады, значыцца, нам трэба знайсьці:

$$(a + b - c) \cdot m.$$

Вéдаем, што кожны многачлéн складаецца з сумы альгэбрычных чыслаў; з другога боку, вéдаем, што, каб памножыць суму — досыць памножыць кожную складанку асобна й рэзультаты скласьці; дзеля гэтага:

$$(a + b - c) \cdot m = [a + b + (-c)] \cdot m = am + bm + (-c)m.$$

Але

$$(-c)m = -cm, \quad \text{а} \quad + (-cm) = -cm,$$

значыцца:

$$(a + b - c)m = am + bm - cm.$$

Каб памножыць многачлéн на адначлéн, трэба ўсé члéны многачлéну па парадку памножыць на гэты адначлéн.

Напрыклад:

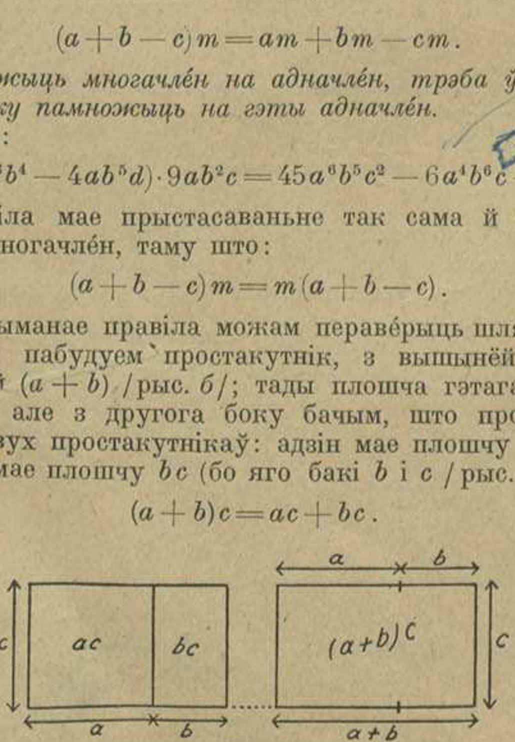
$$(5a^5b^3c - \frac{2}{3}a^3b^4 - 4ab^5d) \cdot 9ab^2c = 45a^6b^5c^2 - 6a^4b^6c - 36a^2b^7cd.$$

Гэтае правіла мае прыстасаваньне так сама й пры множаньні адначлéну на многачлéн, таму што:

$$(a + b - c)m = m(a + b - c).$$

§ 36. Адтрыманае правіла можам праверыць шляхам геомэтрычным, а ласьне: пабудуем простакутнік, з вышынёй роўнай c, і з асновай, роўнай $(a + b)$ /рыс. *б*/; тады плошча гэтага простакутніка будзе $(a + b)c$; але з другога боку бачым, што простакутнік гэты складаецца з двух простакутнікаў: адзін мае плошчу ac (бо яго бакі a і c), а другі мае плошчу bc (бо яго бакі b і c /рыс. *а*/; значыцца:

$$(a + b)c = ac + bc.$$



Прыклады.

190. $(2a - 4b + c)\cdot 3$

191. $(11a + 4b - 3c + d)\cdot 5k$

192. $(-2a^2b^2 + 5ab^3 - 7b^4)\cdot(-4ab)$

193. $-7a^4x^2\cdot(-2ax^2 - 5a^3x^4 + 4a^2x)$

194. $7x^3 + \frac{3}{4}ax - 0{,}3)\cdot(2{,}1a^2x)$

195. $(5x^{n-1} - 3x^{n-2} + 1)\cdot(-2x)$

196. $(3x^3 - 2ax^2 + 5a^2x - 1)\cdot(-4a^2x^3)$

197. $(3a^{m+2}x^p - 2a^mx + 5a^{m-2})\cdot(-4a^{m+2}x^3)$

198. $\frac{3}{5}a^3b^2c\cdot(5bc^2d^3 - \frac{5}{6}a^3cd^2 + a^2b^3d - 1{,}5ab^2c^3)$.

199. Памножыць $(ab^2 - 2b + 1)\cdot 5ab$ водлуг правіла і зрабіць, праве́рку, падстаўляючы $a = 3$, $b = 2$ у першапачатковы выраз, а потым у знойдзены.

Множаньне многачле́ну на многачле́н і яго геомэтрычнае прэдстаўленьне.

§ 37. Няхай патрэбна выканаць множаньне

$$(a + b - c)\cdot(d - e).$$

Разглядаючы множнае чысло, як адзін только альгэбрычны выраз (як бы адначле́н), зробім множаньне водлуг вышэй напісанага правіла:

$$\overline{(a + b - c)}\cdot(d - e) = \overline{(a + b - c)}\cdot d - \overline{(a + b - c)}\cdot e.$$

А цяпе́р, разглядаючы ўжо $(a + b - c)$, як многачле́н, ізноў выканаем множаньне, водлуг таго самага правіла:

$$(a + b - c)\cdot d - (a + b - c)\cdot e = ad + bd - cd - (ae + be - ce).$$

Урэшці, зносячы дужкі водлуг ве́дамага правіла адыманьня (§ 33), адтрымаем:

$$(a + b - c)\cdot(d - e) = ad + bd - cd - ae - be + ce\text{, г. ё.:}$$

Каб памножыць многачле́н на многачле́н, трэба кожны чле́н множнага чысла памножыць на кожны чле́н множніка, і адтрыманыя множывы злучыць.

Звычайна, пры множаньні многачле́ну на многачле́н, трэба трымацца аднаго якога-не́будзь парадку; а ласьне: сьпярша множым ўсе́ множнае чысло на пе́ршы член множніка, потым — на другі, трэці і г. д., альбо наадварот — множым ўсе́ чле́ны множніка папарадку на пе́ршы член множнага чысла, потым на другі, трэці і г. д. Урэшці трэба выканаць злучэньне падобных выразаў (калі яны ёсьць).

Прыклад:

$$(2ax^2 + 3a^3 - 7a^2x)(4a^2 - ax - 5x^2) =$$
$$= 8a^3x^2 + 12a^5 - 28a^4x - 2a^2x^3 - 3a^4x^2 + 7a^3x^2 - 10ax^4 - 15a^3x^2 +$$
$$+ 35a^2x^3 = 12a^5 - 31a^4x - 33a^2x^3 - 10ax^4.$$

§ 38. Куды зручне́й рабіць множаньне многачле́ну на многачле́н, калі абодва сумножнікі ўпарадкаваны водлуг спадаючых, або узрастаючых ступéняў галоўнае літары (§ 28). Гэткія многачлéны ставім адзін пад другім і множым, падпісваючы падобныя выразы пад падобнымі ў адным слупку, а ў канцы робім злучэньне гэтых выразаў.

Няхай, напрыклад, трэба памножыць

$$(3x-5+7x^2-x^3) \quad \text{на} \quad (2-8x^2+x).$$

Парадкуем гэты многачлéны водлуг, напр., спадаючых ступéняў літары x, і робім множаньне:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
 & & -x^3 & +7x^2 & +3x & -5 & \\
 & & & -8x^2 & +x & +2 & \\ \hline
8x^5 & -56x^4 & -24x^3 & +40x^2 & & & \text{. . . множыва множнага чысла на } -8x^2 \\
 & -x^4 & +7x^3 & +3x^2 & -5x & & \text{. ,, ,, ,, } +x \\
 & & -2x^3 & +14x^2 & +6x & -10 & \text{,, ,, ,, } +2 \\ \hline
8x^5 & -57x^4 & -19x^3 & +57x^2 & +x & -10 & \text{. . . . . . . поўнае множыва.}
\end{array}$$

(Замéста парадкаваньня многачлéну водлуг спадаючых ступéняў, — можна парадкаваць і водлуг узрастаючых ступéняў. — Рэзультат множаньня ад гэтага ня зьмéніцца.)

Калі ў якім-небудзь частковым множыве не хапае члéну з адпавéднаю ступéньню, дык пакідаем паміж сусéднімі члéнамі вольнае мейсца, дзеля зручнéйшага падпісаньня падобных выразаў.

Напрыклад:

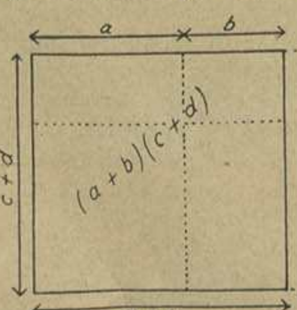
$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 5n^4 & +3n^3 & -2n \\
 & & & 4n^3 & -n^2 & -3n \\ \hline
20n^7 & +12n^6 & & -8n^4 & & \\
 & -5n^6 & -3n^5 & & +2n^3 & \\
 & & -15n^5 & -9n^4 & & +6n^2 \\ \hline
20n^7 & +7n^6 & -18n^5 & -17n^4 & +2n^3 & +6n^2.
\end{array}$$

§ 39. Каб праверыць правіла множаньня многачлéну на многачлéн геомэтрычным способам, зробім так сама, як у § 36. — Пабудуем простакутнік з асновай, роўнай $(a+b)$, і вышынёй, роўнай $(c+d)$ /рыс. a/; тады яго плошча будзе множыва

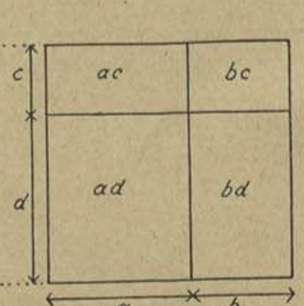
$$(a+b)\cdot(c+d).$$

Але з другога боку бачым /рыс. b/, што простакутнік гэты складаецца з чатырох простакутнікаў: ac, bc, ad і bd,

Рыс. a



Рыс. b



значыцца: $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd.$

Прыклады.

200. Памножыць $(a+4)(a-2)$ і зрабіць пераве́рку, падстаўляючы заме́ста a число 6, або 2,5.

201. $(3a-4b)\cdot(2c+5d)$

202. $(2a^2+3b^2)\cdot(3a^2-2b^2)$

203. $(3bc^2+5b^3-2b^2c-2c^3)\cdot(2b^2+c^2-bc)$

204. $(5a^3-2a^2x+ax^2)\cdot(2a^2-ax+x^2)$

205. $(8x^3-4x^2y+2xy^2-y^3)\cdot(2x-3y)$

206. $(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)\cdot(a+b)$

207. $(a^3+5a-3)\cdot(a^2+2a-1)$

208. $(2a^2-4ax+4x^2)\cdot(1{,}5a^2+3ax+3x^2)$

209. $(3x^4-2x+2x^3+4)\cdot(x+x^3-3x^2)$

210. $(a^2-2a+1)\cdot(a^4+2a^3+3a^2+2a+1)$.

211. $(x^4-7x^3y+6x^2y^2+8xy^3-2y^4)\cdot(x^2-3xy+2y^2)$

212. $(2a^5-b^3+1)\cdot(a^5-\frac{1}{2}b^3-\frac{1}{2})$.

213. $\left(\frac{x^3}{4}-\frac{x^2}{3}+\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}\right)$

214. $\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right)$

215. $(0{,}02a+2a^3-0{,}4a^5)\cdot(-0{,}1a^2+0{,}03a^4-0{,}5a^6)$

216. $(4a^4b^{3p+3}-0{,}2a^2b^{2p+1}+10b^{p-1})\cdot(0{,}15a^2b^{2p-1}+7{,}5b^{p-3})$.

Частныя выпадкі множаньня многачле́наў.

§ 40. Ве́льмі карысна зьвярнуць асаблівую ўвагу на наступныя 5 выпадкаў множаньня й запамятаваць іх формулы.

1. *Множыва сумы двух чыслаў на іх розьніцу раўняецца квадрату пе́ршага чысла мінус квадрат другога, г. ё.:*

$$\underline{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

І праўда

$$(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2.$$

Калі мы цяпер у формуле (I) паставім на мейсца a выраз $3an^2$, а на мейсца b выраз $3a^2n$, дык адтрымаем:

$$(2an^2+3a^2n)(2an^2-3a^2n)=4a^2n^4-9a^4n^2.$$

Адсюль вынікае, што за дапамогаю гэтай формулы (I) мы можам ве́льмі ўпросьціць вылічаньне, як альгэбрычных, так і арытмэтычных прыкладаў. — Хай, напрыклад, трэба знайсьці множыва $25\cdot15$. Пішам:

$$25\cdot15=(20+5)\cdot(20-5)=20^2-5^2=400-25=375,$$

або, наадварот, трэба знайсьці розьніцу 54^2-46^2, тады пішам:

$$54^2-46^2=(54+46)\cdot(54-46)=100\cdot8=800.$$

2. *Квадрат сумы двух чыслаў раўняецца квадрату пе́ршага чысла, плюс падвойнае множыва абодвух чыслаў, плюс квадрат другога чысла*, г. ё.:

$$\underline{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

І праўда,

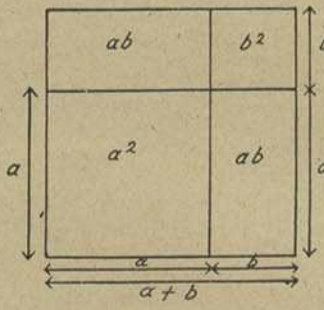
$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2.$$

Падстаўляючы, напрыклад, на ме́йсца a і b выразы: $2cx^2$ і $3cy$, адтрымаем:

$$(2cx^2+3cy)^2=(2cx^2)^2+2\cdot 2cx^2\cdot 3cy+(3cy)^2, \text{ г. ё.:}$$

$$(2cx^2+3cy)^2=4c^2x^4+12c^2x^2y+9c^2y^2.$$

Формулу (2) можам паказаць геомэтрычным спосабам, за дапамогаю плошчы квадрату, якога бок ёсьць роўны $(a+b)$:



Бачым, што плошча гэтага квадрату складаецца з наступных плошчаў: a^2, ab, ab і b^2, і значыцца, сапраўды:

$$(a+b)^2=a^2+ab+ab+b^2, \text{ г. ё.:}$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Гэта формула, так сама, як і (1) дае́ нам магчымасьць упросьціць шмат якія вылічэньні агульнага й арытмэтычнага характару; хай, напрыклад, трэба знайсьці вартасьць 67^2; пішам:

$$67^2=(60+7)^2=60^2+2.60\cdot 7+7^2=3600+840+49=4489.$$

3. *Квадрат розьніцы двух чыслаў раўняецца квадрату пе́ршага чысла мінус падвойная множыва абодвух чыслаў, плюс квадрат другога чысла*, г. ё.:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

І праўда:

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2.$$

Гэтая формула так сама дае́ магчымасьць прасьце́й вылічаць гэткія, напрыклад, выразы:

$$(5a^2b^3-4abc^2)^2=25a^4b^6-40a^3b^4c^2+16a^2b^2c^4;$$

$$49^2=(50-1)^2=2500-100+1=2401.$$

Так сама:

$$19^2=(20-1)^2=400-40+1=361.$$

4. *Куб сумы двух чыслаў раўняецца кубу пе́ршага чысла, плюс патройнае множыва квадрату пе́ршага чысла на другое, плюс патройнае*

множыва пéршага чысла на квадрат другога, плюс куб другога чысла, г. ё.:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

І праўда:

$$(a+b)^3 = (a+b)^2\cdot(a+b) = (a^2+2ab+b^2)\cdot(a+b) =$$
$$= a^2 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 =$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 .$$

Напрыклад:

$$(2a^2b^3 + 3a^3b)^3 = 8a^6b^9 + 36a^7b^7 + 54a^8b^5 + 27a^9b^3 .$$

Так сама:

$$12^3 = (10+2)^3 = 10^3 + 3.10^2\cdot 2 + 3.10\cdot 2^2 + 2^3 =$$
$$= 1000 + 600 + 120 + 8 = 1728 .$$

5. *Куб розьніцы двух чыслаў раўняецца кубу пéршага чысла, мінус патройнае множыва квадрату пéршага чысла на другое, плюс патройнае множыва пéршага чысла на квадрат другога, мінус куб другога чысла*, г. ё.:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

І праўда:

$$(a-b)^3 = (a-b)^2\cdot(a-b) = (a^2-2ab+b^2)(a-b) =$$
$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 =$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 .$$

Напрыклад:

$$(3xy - y^2)^3 = 27x^3y^3 - 27x^2y^4 + 9xy^5 - y^6 .$$

Так сама:

$$18^3 = (20-2)^3 = 20^3 - 3.20^2\cdot 2 + 3\cdot 20\cdot 2^2 - 2^3 =$$
$$= 8000 - 2400 + 240 - 8 = 5832 .$$

* * *

Вышэй пералічаныя формулы даюць магчымасьць вéльмі скараціць і ўпросьціць шмат якія вылічэньні; напрыклад, каб памножыць

$$(x+y+1) \qquad \text{на} \qquad (x-y+1),$$

робім так:

$$(x+y+1)(x-y+1) = [(x+1)+y]\cdot[(x+1)-y] = (x+1)^2 - y^2 =$$
$$= x^2 + 2x + 1 - y^2 .$$

Каб знайсьці множыва $(a-b+c)\cdot(a+b-c)$, злучаем паасобныя выразы падобным способам:

$$(a-b+c)(a+b-c) = [a-(b-c)][a+(b-c)] = a^2 - (b-c)^2 =$$
$$= a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = a^2 - b^2 + 2bc - c^2 .$$

Прыклады.

За дапамогаю формулаў упрошчанага множаньня, знайсьці наступныя рэзультаты:

217. $(3x+5y)^2$
218. $(7c-4d)^2$
219. $(1+a)(1-a)$
220. $(2x^2+5x)^2$
221. $(9m^3-5p^2n)^2$
222. $(5b^2n^6-\frac{2}{15})^2$

223. $(3ab - 1)(3ab + 1)$
224. $(6 + bx^4)(bx^4 - 6)$
225. $(\frac{3}{4}a^{n-2}b^p + \frac{2}{3}a^{2-n}b^{2-p})^2$
226. $(0{,}5a^{2r-2}b - 1\frac{2}{5}b^{p-3}c^2)$ памножыць на $(0{,}5a^{2r-2}b + 1\frac{2}{5}b^{p-3}c^2)$
227. $(a - x)(a + x)(a^2 + x^2)$
228. $(3 + x)(3 - x)(9 - x^2)$
229. $(x + y - z)(x + y + z)$
230. $(2y^2 + 3y + 4)(2y^2 - 3y - 4)$
231. $(a + 2)(a - 2)(a^2 + 4)$
232. $(2x - y + 3z)(2x + y - 3z)$
233. $(5 + a)^3$
234. $(a - 5)^3$
235. $(7d^2 - 2)^3$
236. $(m^2n + pn^2)^3$
237. $(3 + 10x^5)^3$
238. $(0{,}1a - 5n^3)^3$
239. $21^2 = (20 + 1)^2 = ?$
240. 87^2
241. 29^3
242. $47 \cdot 33 = (40 + 7)(40 - 7) = ?$
243. $24 \cdot 16$
244. $97 \cdot 103$.

Дзяленьне адначле́наў.

§ 41. Разгле́дзім сьпярша дзяле́ньне ступе́няў аднолькавых літараў. Хай, напрыклад, трэба падзяліць a^8 на a^5. Ве́даем, што дзе́льнае чысло раўняецца дзе́льніку, памножанаму на дзель, і што пры множаньні паказчыкі аднольковых літараў дадаюцца; дзеля гэтага:

$$a^8 : a^5 = a^{8-5} = a^3.$$

І праўда:

$$a^8 = a^5 \cdot a^3.$$

Значыцца, *пры дзяле́ньні ступе́няў аднолькавых літараў — паказчык дзельніка адымаецца ад паказчыка дзельнага чысла.*

Напрыклад:

$$x^9 : x^7 = x^{9-7} = x^2$$
$$x^8 : y^5 = y^3 \text{ і. г. д.}$$

§ 42. Пры дзяле́ньні можа здарыцца, што паказчыкі будуць роўнымі, напрыклад:

$$a^m : a^m.$$

З арытмэтыкі ве́даем, што чысло, падзе́льнае на самаго сябе́, дае́ ў выніку 1, значыцца:

$$a^m : a^m = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

І праўда: дзе́льнае $a^m = a^m \cdot 1$.

Стасуючы аднолька-ж папярэдняе правіла дзяле́ньня ступе́няў (адыманьне паказчыкаў), адтрымаем:

$$a^m : a^m = a^{m-m} = a^0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Бачым, што роўнасьці (1) і (2) маюць аднольковыя ле́выя староны (часткі), значыцца будуць роўнымі й правыя староны:

$$a^0 = 1.$$

ці-тое:

кожнае чысло з паказчыкам 0 есьць роўнае адзінцы.

На аснове гэтага пішам:

$$4^0 = 1$$
$$(\tfrac{2}{3}bm^3)^0 = 1$$
$$(a^2 + b^3)^0 = 1 \quad \text{і. г. д.}$$

Літару з паказчыкам 0 можам дапісаць да ўсялякага выразу ў выглядзе сумножніка, не зьмяняючы вартасьці гэтага выразу; напрыклад, калі маем многачлéн

$$2x^3 - 3x^2 + 4x + 5,$$

у якім ўсé члéны, апрача апошняга, маюць літару x, дык і да гэтага члéну можам дапісаць літару x з паказчыкам 0; адтрымаем тады:

$$2x^3 - 3x^2 + 4x + 5x^0.$$

§ 43. Хай цяпéр дадзена падзяліць $12a^7b^5c^2d^3$ на $4a^4b^3d^3$. Вéдаем, што дзель, памножаная на дзéльнік, дае ў выніку дзельнае число; значыцца, пры шуканай дзéлі коэфіцыéнтам будзе $12:4$, г. ё. 3, паказчыкі літараў a і b знойдзем за дапамогаю адыманьня паказчыкаў дзéльніка ад паказчыка дзельнага чысла; літара c, якой няма ў дзéльніку, павінна перайсьці ў дзéль са сваім паказчыкам, а літары d зусім ня будзе ў дзéлі, або яна ўвойдзе ў склад дзéлі з паказчыкам 0.

Такім чынам:

$$12a^7b^5c^2d^3 : 4a^4b^3d^3 = 3a^3b^2c^2d^0 = 3a^3b^2c^2.$$

І праўда, памнажаючы $3a^3b^2c^2$ на дзельнік $4a^4b^3d^3$ адтрымаем дзéльнае чысло.

Значыцца, *каб падзяліць адначлéн на адначлéн, трэба коэфіцыéнт дзéльнага падзяліць на коэфіцыент дзéльніка, ад паказчыкаў літараў дзéльнага адняць паказчыкі тых самых літараў дзéльніка, а літары ня ўходзячыя ў склад дзéльніка, перанесьці ў дзель бяз зьмены.*

Напрыклад:

1) $12a^5b^2c : 18a^3c = \frac{2}{3}a^2b^2$
2) $\frac{3}{4}b^{4m}c^{4p+2}x^3 : (-\frac{3}{8}b^mc^{p+1}x^3) = -2b^{3m}c^{3p+1}$
3) $7a^4m(x+y)^3 : 9a^3(x+y) = \frac{7}{9}am(x+y)^2.$

Чыслы з адымнымі паказчыкамі.

§ 44. Калі дзéльнік зьмяшчае ў сабé літару, якой няма ў дзéльным чысле, або паказчык ступéні якой-небудзь літары дзéльнага ёсьць меншы ад паказчыка ступéні гэтай самай літары ў дзéльніку, — тады дзялéньне ня можа быць выканана, і рэзультат яго пішам у кшталце альгэбрычнага дробу, напрыклад:

$$6a^3b : 2bc = \frac{3a^3}{c}$$

а так сама: $$a^3 : a^5 = \frac{a^3}{a^5}.$$

Пасьля скарочаньня (упрошчаньня) лічніка й назоўніка апошняга дробу на a^3, адтрымаем:

$$\frac{a^3}{a^5}=\frac{a^3}{a^3a^2}=\frac{1}{a^2},$$

г. ё.:

$$a^3:a^5=\frac{1}{a^2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

З другога боку, на аснове правіла адыманьня паказчыкаў пры дзяле́ньні аднолькавых літараў, маем:

$$a^3:a^5=a^{3-5}=a^{-2}\ \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Апошнія роўнасьці (1) і (2) маюць роўныя ле́выя староны, значыцца павінны быць роўнымі й правыя, ці-тое:

$$a^{-2}=\frac{1}{a^2}.$$

І наагул:

$$a^m:a^{m+p}=\frac{a^m}{a^{m+p}}=\frac{a^m}{a^m\cdot a^p}=\frac{1}{a^p}.$$

З другога боку:

$$a^m:a^{m+p}=a^{m-(m+p)}=a^{m-m-p}=a^{-p}.$$

Сапастаўляючы правыя староны апошніх дзьвёх роўнасьцяў, бачым, што

$$a^{-p}=\frac{1}{a^p}.$$

Такім парадкам, *число з адымным паказчыкам ёсьць роўнае адзінцы, падзе́ланай на гэтае самае число з дадатным паказчыкам.*

На аснове гэтага:

$$7^{-2}=\frac{1}{7^2}=\frac{1}{49}$$

$$\left(\tfrac{1}{3}\right)^{-3}=1:\left(\tfrac{1}{3}\right)^3=1:\tfrac{1}{27}=27 \text{ і. г. д.}$$

§ 45. Уводзячы чыслы з адымнымі паказчыкамі, можам кожны дроб напісаць у кшталці цэлага числа; дзеля гэтае мэты трэба ўсе́ сумножнікі назоўніка перане́сьці ў лічнік з адымнымі паказчыкамі.

Для прыкладу возьмем дроб

$$\frac{2ac^2}{5b^2x^3}$$

і напішам яго ў кшталці:

$$2ac^2\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{x^3},$$

дзеля таго, што:

$$\frac{1}{5}=5^{-1},\quad \frac{1}{b^2}=b^{-2},\quad \frac{1}{x^3}=x$$

дык

$$\frac{2ab^2}{5b^2x^3}=2\cdot5^{-1}ab^{-2}c^2x^{-3}$$

Наадварот, маючы адымныя ступéні ў лічніку, ці ў назоўніку дробу, можам іх замяніць ступéнямі дадатнымі; дзéля гэтае мэты трэба перанéсьці сумножнікі з адымнымі паказчыкамі з лічніка ў назоўнік (або наадворот), зьмяняючы знакі гэтых паказчыкаў.

Сапраўды, калі маем, напрыклад, дроб

$$\frac{a^5 \cdot b^{-3}}{3c^{-4}x},$$

дык, памнажаючы ў ім лічнік і назоўнік на b^3c^4, адтрымаем:

$$\frac{a^5 \cdot b^{-3} \cdot b^3 \cdot c^4}{3c^{-4}xb^3c^4} = \frac{a^5 \cdot \frac{1}{b^3} \cdot b^3 \cdot c^4}{3 \cdot \frac{1}{c^4} \cdot xb^3c^4} = \frac{a^5c^4}{3b^3x}.$$

Падобным спосабам знойдзем, што

$$\frac{2b^{-5}m^{-4}x}{5^{-2}ac^{-2}} = \frac{2 \cdot 5^2c^2x}{ab^5m^4}.$$

§ 46. Усé дзéяньні над чыслямі з адымнымі паказчыкамі робім так сама, як і над чыслямі з дадатнымі паказчыкамі:

Дзеля прыкладу памножым a^{-2} на a^{-3}

Вéдаем, што

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}, \quad \text{а} \quad a^{-3} = \frac{1}{a^3},$$

значыцца:

$$a^{-2} \cdot a^{-3} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^5} = a^{-5}.$$

Гэты самы рэзультат адтрымаем на аснове правіла проста складаючы паказчыкі ступéняў:

$$a^{-2} \cdot a^{-3} = a^{-2-3} = a^{-5}.$$

Падобным спосабам знойдзем:

$$a^7 : a^{-4} = a^{7-(-4)} = a^{7+4} = a^{11}$$

$$a^{-7} : a^{-4} = a^{-7-(-4)} = a^{-7+4} = a^{-3}.$$

(Пры складаньні і адыманьні чыслаў, паказчыкі іх не зьмяняюцца; дзеля гэтага разважаць гэных дзéяньняў над чыслямі з адымнымі паказчыкамі ня будзем.)

Прыклады.

Выканаць дзялéньне наступных адначлéнаў:

245. $2a^n : 2$
246. $-2a : 2$
247. $5(a+b) : (a+b)$
248. $9abc : (-3b)$
249. $-14cd : (-7cd)$
250. $-x^{10} : x^9$
251. $\frac{1}{2}n^4x : n^3$
252. $an^2x^8 : 4x^3$
253. $2b^3n^8z : \frac{1}{4}b^3n^2z$
254. $0{,}6am^2x^{11} : 3amx^3$
255. $3a^2n^3(x+y)^{12} : 0{,}3a^2(x+y)^7$
256. $6a^8b^mc^n : -4ab^5$

257. $-22ab^md^3:2\frac{3}{4}ab^2d$

258. $6a^{10}(x-1)^5(x+2)^{n+r}:$
$:8a^7(x-1)^5(x+2)^r$

259. $\frac{3}{4}c^8d^{r+4}h^{5n}:\frac{3}{8}c^2d^rh^{3n}$

260. $0{,}6b^7c^{m+1}:-3b^6c^{m-1}$

261. $10{,}8a^{2n+p}b^rc^xd^{2p-1}:$
$:1{,}2a^{p-n}c^xd^{p+2}$.

У наступных прыкладах азначыць дзяле́ньне за дапамогаю дробаў, і зрабіць магчымыя ўпрошчаньні:

262. $ab:cd$
263. $a^2b:a^3$
264. $an:bn^3$
265. $14x^2:7x^3$
266. $2ax^3:4abx$
267. $27a^7z^2:6a^5z^5$
268. $48a^9bc^3:64a^7b^2c^5$.

Выканаць дзяле́ньне наступных адначле́наў за дапамогаю адымных паказчыкаў:

269. $15a^5b^2c^n:27a^2b^3c^{3n}$
270. $35a^4nx^3:60a^5n^4x^3$
271. $15a^5b^8c^2:40a^5b^2c^6d^7$
272. $44a^2n^{12}x^5y^3:66a^{10}n^7y^3z^8$.

273. Падзяліць a^4n^2x на $\frac{1}{2}an^4x$ двома спосабамі: 1) За дапамогаю дробу, скараціўшы яго, 2) за дапамогаю адымных паказчыкаў, — і зрабіць праве́рку таго й другога рэзультату, прыняўшы $a=2$, $n=10$ і $x=0{,}1$.

Наступныя дробы прадставіць у кшталце цэлых чыслаў:

274. $\dfrac{4a^3m^4}{3b^2d^5}$; 275. $\dfrac{2}{a^2b^3c^m}$.

Скасаваць адымныя паказчыкі ў наступных выразах:

276. $5a^{-4}bc^{-2}$, 277. $\dfrac{6a^2b^{-1}}{c^{-3}x^{-4}}$, 278. $\dfrac{2b^{-5}x^{-m}}{3^{-3}a^2c^{-p}}$.

Вылічыць:

279. $4a^{-5}b^2x^{-2}\cdot3a^{-4}b^{-3}x^5$
280. $0{,}2b^{-3}c^md^{-4}\cdot(-\frac{1}{5}a^{-1}b^{-4}c^{-3}d^p)$
281. $(3^{-2}+4^0)\cdot(\frac{1}{3})^{-3}$
282. $(4^{-2}+2^{-4})\cdot(\frac{1}{2})^{-3}$
283. $\{[(\frac{2}{3})^{-2}-2^0]\cdot(-3)^{-2}\}:6^{-2}$.

Дзяле́ньне многачле́ну на адначле́н.

§ 47. Няхай патрэбна падзяліць многачле́н

$$36a^6b^4-24a^5b^3c+42a^2b^5c^3$$

на адначле́н $6a^2b^3$.

Ве́даем, што, каб памножыць многачле́н на адначле́н, трэба кожны член многачле́ну памножыць на гэты адначле́н; значыцца, ўсе́ чле́ны нашага дзе́льнага чысла — зложаны за дапамогаю множаньня аднаве́дных чле́наў шуканай дзе́лі на дзе́льнік $6a^2b^3$, дзеля гэтага, дзе́лючы папарадку кожны член дзе́льнага чысла на дзе́льнік, адтрымаем шуканую дзель:

$$(36a^6b^4-24a^5b^3c+42a^2b^5c^3):6a^2b^3=6a^4b-4a^3c+7b^2c^3.$$

Зрабіўшы цяпе́р праве́рку за дапамогаю множаньня адтрыманай дзе́лі на дзе́льнік $6a^2b^3$, адтрымаем дзе́льнае чысло.

Такім чынам, *каб падзяліць многачлéн на адначлéн трэба кожны член дзéльнага чысла падзяліць на дзéльнік, і адтрыманыя выразы злучыць.*

Напрыклад:

1) $(6a^5b^6c^3+\frac{4}{5}a^3b^5c^2-8ab^4c^2):(-4ab^4c^2)=-1\frac{1}{2}a^4b^2c-\frac{1}{5}a^2b+2$,

2) $(\frac{1}{2}x^3y^3-0{,}3x^2y^4+1):2x^2y^2=\frac{1}{4}xy-0{,}15y^2+\frac{1}{2x^2y^2}$.

Прыклады.

284. Давéсьці сапраўднасьць роўнасьці:

$$(2{,}874+1{,}866-1{,}14):0{,}3=(2{,}874:0{,}3)+(1{,}866:0{,}3)-(1{,}14:0{,}3).$$

285. $(8am^2-2a^2m):2am$
286. $(12a^4b^2-2a^3b^3+4ab^5):-4ab^2$
287. $(\frac{3}{5}a^3x^6-6a^2x^4+a^2b^2x^2):\frac{3}{4}a^2x^2$
288. $(a^2-2ab+b^2):ab$
289. $(-35x^3+15x^2y-x^2y^2):-5x^2y$
290. $(-4ab^2-6a^2b+12a^5b^3):-\frac{4}{3}ab$
291. $(2m^2n^3-3n^2p^3+4p^2q^3-5q^2r):-3m^2n^2p^2q^2$
292. $(0{,}8abcx^3-\frac{5}{12}b^2cnx^2+4bc^2n^2x):\frac{4}{9}bcn^2x^3$
293. $(-3a^3bc^7+18a^4b^2c^6-2b^4c^2+12ab^5c):-6a^2b^3c^4$.

Дзялéньне многачлéну на многачлéн.

§ 48. Пры дзялéньні многачлéну на многачлéн спачатку трэба абавязкова ўпарадкаваць дзéльнае чысло й дзельнік водлуг спадаючых, або ўзрастаючых ступеняў галоўнай літары.

Няхай, напрыклад, маем падзяліць многачлéн

$$15a^6m^4-34a^5m^5+56a^4m^6-47a^3m^7+28a^2m^8$$

на многачлéн

$$3a^4m^3-5a^3m^4+4a^2m^5$$

(ужо ўложаныя водлуг спадаючых ступéняў літары a).

Дзéяньне будзем рабіць так:

$$\begin{array}{r|l}
15a^6m^4-34a^5m^5+56a^4m^6-47a^3m^7+28a^2m^8 & 3a^4m^3-5a^3m^4+4a^2m^5 \\ \cline{2-2}
\underline{-15a^6m^4\pm25a^5m^5\mp20a^4m^6\qquad\qquad\qquad\qquad} & 5a^2m-3am^2+7m^3 \\
-9a^5m^5+36a^4m^6-47a^3m^7\qquad\qquad & \ldots\ldots\ldots\ \text{(перш. аст.)} \\
\underline{\pm9a^5m^5\mp15a^4m^6\pm12a^3m^7\qquad\qquad} & \\
21a^4m^6-35a^3m^7+28a^2m^8 & \ldots\ldots\ \text{(друг. аст.)} \\
\underline{-21a^4m^6\pm35a^3m^7\mp28a^2m^8}. & \\
0\qquad\qquad\qquad &
\end{array}$$

На аснове ўласьнасьці дзялéньня, дзéльнае чысло павінна зьмяшчаць у сабé: множыва дзéльніка на пéршы член дзелі, потым множыва дзéльніка на другі член дзéлі, на трэці і г. д.; значыцца, вышэйшы, г.ё. пéршы член дзéльнага чысла зьмяшчае ў сабé множыва вышэйшага, г. ё. пе́ршага чле́на дзе́льніка на вышэйшы, г. ё. пе́ршы член дзе́лі; адсюль вынікае, што дзе́лячы пе́ршы член дзе́льніка на пе́ршы член дзе́льнага, адтрымаем пе́ршы член дзе́лі $5a^2m$.

Калі цяпе́р мы памножым знойдзены пе́ршы член дзе́лі на дзе́льнік і адымем рэзультат ад дзе́льнага чысла, дык адтрымаем пе́ршую астачу, якая зьмяшчае ў сабе́: множыва дзе́льніка на другі член дзе́лі, потым множыва дзе́льніка на трэці член дзе́лі; значыцца вышэйшы, г. ё. пе́ршы член гэтай астачы зьмяшчае ў сабе́ множыва вышэйшага, г. ё. пе́ршага чле́на дзе́льніка на наступны, г. ё. другі член дзе́лі; адсюль вынікае, што, дзе́лячы пе́ршы член астачы на пе́ршы член дзе́льніка, адтрымаем другі член дзе́лі: $-3am^2$.

Калі мы цяпе́р ізноў памножым знойдзены другі член дзе́лі на дзе́льнік і адымем рэзультат ад дзе́льнага чысла, дык адтрымаем другую астачу. Дзе́лячы, як у папярэдным выпадку, пе́ршы член гэтай астачы на пе́ршы член дзе́льніка, адтрымаем трэці член дзелі $+7m^3$.

Множачы, ўрэшці, дзе́льнік на адтрыманы трэці член дзе́лі й адымаючы рэзультат ад другой астачы, адтрымліваем O, г. ё. дзяле́ньне — скончана.

Дзяле́ньне так сама можам выканаць, парадкуючы дзе́льнае й дзе́льнік водлуг узрастаючых ступе́няў галоўнай літары:

$$\begin{array}{l|l}
28a^2m^8-47a^3m^7+56a^4m^6-34a^5m^5+15a^6m^4 & 4a^2m^5-5a^3m^4+3a^4m^3 \\ \cline{2-2}
\underline{-28a^2m^8\pm35a^3m^7\mp21a^4m^6\qquad\qquad\qquad} & 7m^3-3am^2+5a^2m \\
\qquad\quad -12a^3m^7+35a^4m^6-34a^5m^5 & \\
\qquad\quad \pm12a^3m^7\mp15a^4m^6\pm9a^5m^5 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\qquad\quad 20a^4m^6-25a^5m^5+15a^6m^4} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-20a^4m^6\pm25a^5m^5\mp15a^6m^4} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Калі ў дзе́льным чысле́ ў радзе спадаючых ступе́няў галоўнай літары не стае́ якой-небудзь ступе́ні гэтай літары, дык паміж суседнымі чле́намі пакідаем вольнае ме́йсца, каб мець потым магчымасьць пісаць падобныя чле́ны ў адным слупку; напрыклад:

$$\begin{array}{l|l}
8a^4\qquad\quad -26a^2\qquad +2 & \\ \cline{2-2}
\underline{-8a^4\mp12a^3\pm\ 4a^2\qquad\quad} & 4a^2+6a-2 \\
\qquad -12a^3-22a^2\qquad +2 & 2a^2-3a-1 \\
\qquad \underline{\pm12a^3\pm18a^2\mp6a\quad} & \\
\qquad\qquad -\ 4a^2-6a+2 & \\
\qquad\qquad \underline{\pm\ 4a^2\pm6a\mp2} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

або:

$$\begin{array}{l|l}
a^3\qquad\qquad -b^3 & \\ \cline{2-2}
\underline{-a^3\pm a^2b\qquad\quad} & a-b \\
\quad a^2b\qquad -b^3 & a^2+ab+b^2 \\
\quad \underline{-a^2b\pm ab^2} & \\
\qquad\quad ab^2-b^3 & \\
\qquad\quad \underline{-ab^2\pm b^3} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Калі дзе́льнае й дзе́льнік упарадкаваны водлуг спадаючых ступе́няў галоўнае літары, дык ступе́ні яе́ ў пе́ршых чле́нах астачаў ступянёва спадаюць, і можа здарыцца, што вышэйшы член астачы зьмяшчае ў сабе́ ступе́нь галоўнай літары ме́ншую за ступе́нь вышэйшага чле́на дзельніка.

У такім разе дзяле́ньне ня можа быць выканана без астачы, напрыклад:

$$\begin{array}{l|l}
6a^3x - 13a^2x^2 + 16ax^3 + 16x^4 & 2a^2 - 3ax \\ \cline{2-2}
\underline{-6a^3x \pm 9a^2x^2} & 3ax - 2x^2 \\
\qquad -4a^2x^2 + 16ax^3 & \\
\qquad \underline{\pm 4a^2x^2 \mp 6ax^3} & \\
\qquad\qquad 10ax^3 + 16x^4. &
\end{array}$$

У даным прыкладзе пе́ршы член другой астачы $10ax^3$ ня можа падзяліцца на пе́ршы член дзе́льніка $2a^2$; дзеля гэтага дзяле́ньне ў гэтым ме́йсцы само па сабе́ перарываецца. У гэткіх выпадках можам, як і ў арытмэтыцы, дадаць да дзе́лі дроб, у якім лічнікам трэба зрабіць астачу, а назоўнікам — дзе́льнік; значыцца:

$$(6a^3x - 13a^2x^2 + 16ax^3 + 16x^4):(2a^2 - 3ax) = 3ax - 2x^2 + \frac{10ax^3 + 16x^4}{2a^2 - 3ax}$$

Сапастаўляючы даныя довады пры ўсіх разгле́джаных прыкладах можам вывесьці наступнае правіла:

Каб падзяліць многачле́н на многачле́н, — парадкуем дзе́льнае й дзе́льнік водлуг спадаючых або ўзрастаючых ступе́няў галоўнай літары дзе́лім пе́ршы член дзе́льнага на першы член дзельніка, адтрымліваем такім чынам пе́ршы член дзе́лі. Множым потым уве́сь дзе́льнік на пе́ршы член дзе́лі й множыва адымаем ад дзе́льнага. З адтрыманаю пе́ршаю астачаю робім тое самае, што з дзе́льным, г. ё. дзе́лім пе́ршы член яе́ на пе́ршы член дзе́льніка; знойдзем, такім спосабам, другі член дзе́лі, які множым на ўве́сь дзе́льнік і рэзультат адымаем ад пе́ршай астачы. — З другой астачаю робім так, як з пе́ршай і г. д. Дзе́яньне робім датуль, пакуль не адтрымаем у астачы нуля (тады дзяле́ньне, значыцца, выканалі без астачы), або пакуль ня выявіцца, што нуля ў астачы ня будзе) тады дзяле́ньне, значыцца, не магчыма.

Азнакі немагчымасьці дзяле́ньня многачле́наў.

§ 49. — 1) Вышэйшы член дзе́льнага чысла ёсьць множыва вышэйшага члена дзе́льніка на вышэйшы член дзе́лі, а ніжэйшы член дзе́льнага ёсьць множыва адпаве́дных чле́наў дзельніка й дзе́лі; значыцца, *дзяле́ньне ня можа быць выканана без астачы, калі вышэйшы або ніжэйшы член дзе́льнага — непадзе́льны на адпаведныя чле́ны дзе́льніка.*

Напрыклад, многачле́н

$$4a^3 - 2a^2x + 3ax^2.$$

ня можа быць падзе́лены без астачы на многачле́н

$$2a^2 - 3ax^2 + ax^3$$

бо $3ax^2$ ня дзе́ліцца на ax^3.

2) *Дзяле́ньне ня можа быць зроблена, калі дзе́льнік зьмяшчае ў сабе́ літары, якіх няма ў дзе́льным чысьле́.*

3) Памнажаючы многачле́н на многачле́н, — у рэзультаце адтрымліваем заўсёды многачле́н; значыцца, — *аднаеле́н ня можа быць падзе́ляны без астачы на многачле́н.*

Дзеля гэтае самае прычыны, *дзяле́ньне многачле́наў ня можа быць выканана, калі ў астачы адтрымаем аднаеле́н*; напрыклад:

$$\begin{array}{r|l}
3a^5x^2-4a^4x^3-21a^3x^4-6a^2x^5 & a^2x-3ax^2-2x^3 \\ \cline{2-2}
\underline{-3a^5x^2\pm 9a^4x^3\pm\ 6a^3x^4} & 3a^3x+5a^2x^2 \\
5a^4x^3-15a^3x^4-\ 6a^2x^5 & \\
\underline{-5a^4x^3\pm 15a^3x^4\pm 10a^2x^5} & \\
4a^2x^5. &
\end{array}$$

4) Калі абодва многачле́ны ўпарадкаваны водлуг спадаючых ступе́няў галоўнай літары, дык ступе́ні яе́ ў пе́ршых чле́нах астачаў ступянёва спадаюць, і *калі* здарыцца, што *вышэйшы член якой-не́будзь астачы мае ме́ншую ступе́нь галоўнай літары, як вышэйшы член дзе́льніка, тады дзяле́ньня ня можа быць выканана без астачы.*

Калі-ж многачле́ны упарадкаваны водлуг узрастаючых ступе́няў галоўнай літары, тады пе́ршыя чле́ны астачы заўсёды будуць мець большую ступе́нь галоўнай літары, як ступе́нь пе́ршага чле́на. Дзеля гэтага, каб даведацца, ці дзяле́ньне можа быць выканана без астачы, робім так: сьпярша знаходзім ступень галоўнай літары апошняга чле́ну дзе́лі за дапамогаю дзяле́ньня вышэйшага (г. ё. апошняга) чле́ну дзе́льнага на вышэйшы (г. ё. апошні) член дзе́льніка, а потым робім дзяле́ньне, пакуль не адтрымаем у дзелі чле́ну, які зьмяшчае ў сабе́ знойдзеную намі ступе́нь галоўнай літары. Вось-жа, калі пры гэтым будзе астача, значыцца дзяле́ньне ня можа быць зроблена без астачы, бо цэлая дзель ня можа мець ступе́нь большую за тую, якая адтрымліваецца пры дзяле́ньні вышэйшага чле́ну дзе́льнага на вышэйшы член дзе́льніка. — Хай, напрыклад, трэба падзяліць многачле́н

$$12x^3+5x^4-9x^5+4x^6 \text{ на многачле́н } 3x^2+5x^3-2x^4.$$

прычым абодва яны ўпарадкаваны водлуг узрастаючых ступе́няў літары x.

Сьпярша знойдзем ступе́нь x у апошнім цэлым чле́не дзе́лі; яна будзе x^2

$$(4x^6:-2x^4=-2x^2).$$

А потым выканаем дзеяньне:

$$\begin{array}{r|l}
12x^3+\ 5x^4-\ 9x^5+\ 4x^6 & 3x^2+5x^3-2x^4 \\ \cline{2-2}
\underline{-12x^3\mp 20x^4\pm\ 8x^5} & 4x-5x^2 \\
-15x^4-\ \ x^5+\ 4x^6 & \\
\underline{\pm 15x^4\pm 25x^5\mp 10x^6} & \\
24x^5-\ 6x^6. &
\end{array}$$

Бачым, што, пасьля адтрыманьня ў дзе́лі чле́ну з x^2, ёсьць яшчэ астача, — значыцца дзяле́ньне без астачы выканана быць ня можа.

Тэорэма Бэзу́1).

§ 50. *Калі многачлен:*

$$bx^n + cx^{n-1} + dx^{n-2} + \dots\dots + mx + p$$

падзéлім на $x - a$, дык астачу ад дзялéнян адтрымаем, падстаўляючы ў даным многачлéне a на мéйсца x.

Маем давéсьці, што пры дзялéньні многачлéну

$$bx^n + cx^{n-1} + dx^{n-2} + \dots\dots + mx + p$$

на $x - a$, адтрымаем астачу:

$$ba^n + ca^{n-1} + da^{n-2} + \dots\dots + ma + p.$$

Довад. — Абазначым дзель праз Q, а астачу праз R, — тады:

$$bx^n + cx^{n-1} + dx^{n-2} + \dots\dots + mx + p = (x - a)\,Q + R \;.\;.\;.\;.\; (I).$$

Лéвая старана гэтай роўнасьці раўняецца правай пры кожнай вартасьці x, а, значыцца, і пры $x = a$. Падставім у роўнасьці (1) a на мéйсца x; тады выраз $(x - a)Q$ стане роўны нулю й роўнасьць (1) прыйме выгляд:

$$ba^n + ca^{n-1} + da^{n-2} + \dots\dots + ma + p = R.$$

што трэба было давéсьці.

Напрыклад, астача ад дзялéньня

$$2x^3 - 3x^2 + x - 4$$

на $x - 2$ ёсьць: $2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 - 4 = 2$;

Астача ад дзялéньня

$$2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 5x - 7$$

на $x - 3$ ёсьць: $2 \cdot 3^4 - 4 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 7 = 35$.

Частныя выпадкі дзялéньня многачлéнаў.

§ 51. Разглéдзім цяпéр (як вынік з папярэдняй тэорэмы) наступныя частныя выпадкі дзялéньня многачлéнаў:

1. *Многачлéн, упарадкаваны водлуг спадаючых ступéняў літары x, дзéліцца без астачы на $x - 2$, калі пры $x = 2$ ён зьмяняецца на нуль.*

Напрыклад, многачлéн $x^3 - 5x^2 + 6x - 8$ дзéліцца без астачы на $x - 4$, бо пры $x = 4$ ён зьмяняецца на нуль.

Многачлéн

$$x^5 + 3x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 8x$$

дзéліцца без астачы на $x + 2$, бо пры $x = -2$ ён зьмяняецца на нуль. (Тутака выраз $x + 2$ разглядаем, як $x - (-2)$, і, значыцца, агульнай літары a адказвае вартасьць (-2).

2. *Розьніца аднолькавых няпарных ступéняў двух чыслаў дзéліцца без астачы на розьніцу гэтых чыслаў.*

Напрыклад:

$$(a^3 - b^3) : (a - b) = a^2 + ab + b^2$$
$$(a^5 - b^5) : (a - b) = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4.$$

---

1) Францускі матэматык 16-га сталéцьця (1730—1783).

І наагул: $(a^n - b^n)$, якое-б n ня было (парнае ці няпарнае) — дзеліцца на $(a - b)$, бо пры $a = b$ выраз $(a^n - b^n)$ зьмяняецца на нуль.

3. *Сума аднолькавых няпарных ступéняў двух чыслаў дзéліцца без астачы на суму гэтых чыслаў.*

Напрыклад:

$$(a^3 + b^3):(a + b) = a^2 - ab + b^2$$
$$(a^5 + b^5):(a + b) = a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4.$$

І наагул: $(a^n + b^n)$, калі n — няпарнае чысло, дзéліцца на $(a + b)$, бо выраз $(a + b)$ — гэта тое самае, што: $a - (-b)$, а пры $a = -b$, калі n — чысло няпарнае, выраз $(a^n + b^n)$ зьмяняецца на нуль. — Калі-ж чысло n — парнае, тады выраз $(a^n + b^n)$ ня дзеліцца на $(a + b)$.

4. — *Розьніца аднолькавых парных ступеняў двух чыслаў дзéліцца без астачы на суму й на розьніцу гэтых чыслаў.*

Напрыклад:

$$(a^2 - b^2):(a \mp b) = a \pm b$$
$$(a^4 - b^4):(a \mp b) = a^3 \pm a^2b + ab^2 \pm b^3.$$

У гэтых прыкладах вéрхнія знакі адказваюць сабé, а дольныя — сабé.

І наагул $(a^n - b^n)$, калі n — парнае чысло, дзеліцца на суму $(a + b)$ 1), бо выраз $(a + b)$ можам разглядаць, як $a - (-b)$, а пры $a = -b$, калі n — парнее чысло, выраз $(a^n - b^n)$ зьмяняецца на нуль.

5. *Сума аднолькавых парных ступéняў двух чыслаў ня дзéліцца без астачы ні на суму, ні на розьніцу гэтых чыслаў.*

Дзéлячы, напрыклад, $(a^4 + b^4)$ на $(a + b)$, адтрымаем астачу $2b^4$.

І праўда: выраз $(a^n + b^n)$ ня дзéліцца на $(a - b)$ 2), бо пры $a = b$ выраз $(a^n + b^n)$ ня зьмéніцца на нуль.

Прыклады.

294. $(x^2 + 2ax - 8a^2):(x - 2a)$
295. $(6x^2 + ax - a^2):(2x + a)$
296. $(a^4 + a^3b - a^2b^2 - ab^3):(a^2 - b^2)$
297. $(3 + 8x + x^2 - 2x^3):(1 + 2x - x^2)$
298. $(6a^2b + 9a^3 - 6ab^2 - 4b^3):(3a + 2b)$
299. $(-6 + 13x - 2x^3 - 3x^2):(2 - x^2 - 3x)$
300. $(2x^3 + 5x^2 + 13x + 2):(x^2 + 2x + 3)$
301. $(1 - 5x + 11x^2 - 3x^3):(1 - 3x + 2x^2)$
302. $(\frac{8}{27}x^3 - \frac{27}{64}y^6):(\frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{9}{16}y^4)$
303. $(3a^4 - 8a^3 + 7a^2 - 2a):(3a^2 - 2a)$
304. $(6a^{2n-2} + a^{2n+4} - a^{2n}):(a^4 + 2a^2)$
305. $(a^{m+n} + a^{m+n-3}):(a^{n-1} + a^n)$
306. $(3x^4 - 8x^3 - 10x^2 + 10x - 2):(3x^2 - 2x + 1)$
307. $(1 - 4x - 4x^2 + 15x^3 - 6x^4 + x^5):(1 - 5x + 3x^2 + x^3)$

---

1) Дзялéньне на розьніцу разглéджана ў 2-гім выпадку.
2) Дзялéньне на суму разглéджана ў 3-цім выпадку.

308. $(x^5+3x^4+8x^3+10x^2+3x+6):(x^3+2x^2+5x+1)$

309. $(1-2m^4-m^2-m^5-m^3):(1-m^2-m)$

310. $(81m^4-16n^4):(3m+2n)$

311. $(16p^{12}-81q^8):(2p^3-3q^2)$

312. $(32x^{10}+y^5):(y+2x^2)$

313. $(6x^8+10\frac{1}{2}x^4y^4+36x^2y^6+16y^{10}-50xy^8-8x^5y^4):(4\frac{1}{2}xy^2-$
$-4y^4+3x^3)$.

Раскладаньне многачлéнаў на сумножнікі

§ 52. Часта бывае патрэбна раскласьці многачлéн на сумножнікі. Разгледзім дзéля гэтага нéкалькі спосабаў:

1. *Калі ўсе члéны многачлéну маюць супольны множнік, дык выносім яго за дужкі; а ў дужках пішам дзель ад дзялéньня многачлéну на гэты супольны множнік.*

Напрыклад:

$$ab+ac-ad=a(b+c-d)$$
$$4a^2bc-12a^4c^2+8a^3b^2c^3=4a^2c(b-3a^2c+2ab^2c^2)$$
$$2b^2(3a^2-x)+a\,(3a^2-x)=(3a^2-x)(2b^2+a).$$

2. *Калі даны двохчлéн складаецца з розьніцы аднолькавых парных ступеняў, або сумы ці розьніцы аднолькавых няпарных ступéняў, дык яго можам раскласьці на сумножнікі, дапасоўваючы правілы частных выпадкаў дзялéньня многачлéнаў.*

Напрыклад:

$$a^2-x^2=(a+x)(a-x)$$
$$a^3+x^3=(a+x)(a^2-ax+x^2)\,^{*)}$$
$$8a^3+27b^3=(2a)^3+(3b)^3=(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$$
$$a^4-a=a(a^3-1)=a(a^3-1^3)=a(a-1)(a^2+a+1)$$
$$a^4-x^4=(a^2)^2-(x^2)^2=(a^2+x^2)(a^2-x^2)=(a^2+x^2)(a+x)(a-x).$$

3. *Калі даны трохчлéн складаецца з сумы квадратаў двух чыслаў, плюс (або мінус) падвойнае множыва гэтых самых чыслаў, дык можам яго раскласьці на квадрат сумы (або розьніцы) гэтых чыслаў.*

Напрыклад:

$$a^2+2ax+x^2=(a+x)^2=(a+x)(a+x)$$
$$a^2-2ax+x^2=(a-x)^2=(x-a)^2$$
$$4a^2+12ab+9b^2=(2a)^2+2\cdot2a\cdot3b+(3b)^2=(2a+3b)^2$$
$$4x^4-4x^2y+y^2=(2x^2-y)^2,\ \text{або}\ =(y-2x^2)^2.$$

4. *Часта, каб раскласьці многачлéн на сумножнікі, злучаем паасобныя яго члéны ў групы й да кожнае групы прыстасоўваем папярэднія спосабы.*

Напрыклад:

$$1)\ ab+ac+bd+dc=(ab+ac)+(bd+dc)$$
$$=a(b+c)+d(b+c)=(b+c)(a+d)$$

---

*) дзелім a^3+x^3 на $a+x$.

$$2)\ a^3 - a^2 - a + 1 = a^2(a-1) - (a-1) = (a-1)(a^2-1)$$
$$= (a-1)(a+1)(a-1) = (a+1)(a-1)^2$$
$$3)\ x^2 - xy - 3x + 3y = x(x-y) - 3(x-y) = (x-3)(x-y)$$
$$4)\ x^2 - 2xy + y^2 - z^2 = (x^2 - 2xy + y^2) - z^2 =$$
$$= (x-y)^2 - z^2 = (x-y+z)(x-y-z).$$

5. *Часам, перад раскладаньнем многачлёну на сумножнікі, раскладаем які-небудзь яго член на альгэбрычную суму двух членаў.*

Напрыклад:

$$1)\ 2x^2 + 3xy + y^2 = 2x^2 + 2xy + xy + y^2 =$$
$$= 2x(x+y) + y(x+y) = (x+y)(2x+y).$$
$$2)\ 2a^4 - 11a^2b + 15b^2 = 2a^4 - 6a^2b - 5a^2b + 15b^2 =$$
$$= 2a^2(a^2-3b) - 5b(a^2-3b) = (a^2-3b)(2a^2-5b).$$

Прыклады.

Раскласьці на сумножнікі наступныя многачлёны:

314. $a^2b^2 + b^4$
315. $4ab - 2bc$
316. $10a^4x^2 + 35a^2x^4$
317. $12a^6x^4 - 4a^3x^2$
318. $a^{2n}b^n + a^{5n}b^{2n}$
319. $3ab - 6a^2b^2 + 9a^3b^3$
320. $8a^4c^3 - 6a^4c^2 + 16a^3c^4$
321. $42a^5b^4 - 35a^3b^5 + 56b^3c^4$
322. $2p(p-q) + 3q(p-q)$
323. $4m^2(n^2-2) - 2mn(n^2-2)$
324. $2b(x-1) + (x-1)$
325. $2a(y+1) - (y+1)$
326. $25 - a^2$
327. $a^2b^2 - 100$
328. $49x^2 - y^2$
329. $\frac{25}{36}p^2 - \frac{4}{49}q^2$
330. $a^3 - 8$
331. $(2p)^3 + q^3$
332. $x^5 - y^5$
333. $a^2 + 6a + 9$
334. $m^2 - 10m + 25$
335. $z^2 - 14z + 49$
336. $10a^4b^2 + 40a^2b^4$
337. $a^3b^4 + 4a^3b^2 + 4a^3b^3$
338. $m^2 + 2mn + n^2 - mp - np$
339. $x^6z^2 - 2x^4y^2z^2 + x^2y^4z^2$
340. $a^5 + a^2 - a^3 - 1$
341. $m^3 + 8 + 6m^2 + 12m.$

V. АЛЬГЭБРЫЧНЫЯ ДРОБЫ.

АГУЛЬНЫЯ ЎЛАСЬЦІВАСЬЦІ АЛЬГЭБРЫЧНЫХ ДРОБАЎ.

§ 53. *Альгэбрычным дробам называем такі дроб, які ў сваім назоўніку мае альгэбрычны выраз*; напрыклад, выразы:

$$\frac{4a^3c^4}{5b^2} \text{ і } \frac{3a-2b}{4b-c^2}$$

ёсьць альгэбрычныя дробы; выразы-ж

$$\frac{2a^2}{3} \text{ або } \frac{3}{4}a^5b$$

-ня дробы, дзеля таго, што ў склад іх назоўнікаў ня ўходзяць літары.

Альгэбрычны дроб ня зьмéніць сваéй вартасьці, калі лічнік і назоўнік памножым на аднолькавае чысло.

Няхай маем дроб $\frac{a}{b}$. Трэба давéсьці, што $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$, дзе c — адвольна выбранае чысло.

Абазначым вартасьць дробу $\frac{a}{b}$ праз m, а вартасьць дробу $\frac{ac}{bc}$ праз p. Тады:

$$\frac{a}{b}=m, \qquad \text{ці-тое} \qquad a=bm$$

(на аснове азначэньня дзялéньня)

$$\frac{ac}{bc}=p, \qquad \text{ці-тое} \qquad ac=bcp \; \ldots\ldots \; (1)$$

Памножым абéдзьве стараны роўнасьці $a=bm$ на c (ад гэтага роўнасьць ня зьмéніцца), адтрымаем:

$$ac=bcm \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (2)$$

Бачым, што роўнасьці (1) і (2) маюць роўныя лéвыя стараны, значыцца, павінны быць роўнымі й правыя, г. ё.:

$$bcp=bcm$$

Дзелячы абедзьве стараны гэтае роўнасьці на bc, адтрымаем:

$$p=m$$

але $p=\frac{ac}{bc}$, а $m=\frac{a}{b}$;

значыцца:

$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{ab},$$

што й трэба было давесьці.

Калі мы цяпер у апошняй роўнасьці пераставім левую старану ў права, і наадварот, дык адтрымаем:

$$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$$

адкуль вынікае, што *альгэбрычны дроб ня зьменіць сваё вартасьці, калі лічнік і назоўнік падзелім на аднолькавае чысло.*

§ 54. *Знак перад дробам ня зьменіцца, калі зьменім знакі і ў лічніку й ў назоўніку на супрацiўныя.*

І праўда, пры дзяленьні аднолькавыя знакі даюць $+$, а розныя $-$; значыцца:

$$\frac{a}{b}=\frac{+a}{+b}=\frac{-a}{-b}$$

$$-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}.$$

На гэтай падставе, можам напісаць:

$$\frac{x-1}{y-a}=\frac{1-x}{a-y},$$

а так сама:

$$\frac{3a^2-2a-1}{2ab-2c^2+d}=\frac{1+2a-3a^2}{2c^2-2ab-d}$$

Знак дробу зьменіцца, калі зьменім знак толькі ў адным лічніку, або толькі ў адным назоўніку.

І праўда, калі ў дробу $\frac{a}{b}$, зьменім знак у лічніку, дык адтрымаем:

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$$

Калі-ж у гэтым дробу $\frac{a}{b}$ зьменім знак у назоўніку, дык адтрымаем:

$$\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$$

Калі ў дробу $-\frac{a}{b}$ зьменім знак у лічніку, будзем мець:

$$-\frac{-a}{b}=-\left(-\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{b}$$

Зьмяняючы знак назоўніка, адтрымаем:

$$-\frac{a}{-b}=-\left(-\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{b}$$

На гэтай падставе, можам напісаць:

$$1)\quad \frac{4x-3}{6y-2a}=-\frac{3-4x}{6y-2a}=-\frac{4x-3}{2a-6y}$$

$$2)\quad -\frac{-2a-4bx}{3a-2b}=\frac{2a+4bx}{3a-2b}$$

$$3)\quad \frac{(x-4)(y-x)}{(5-a)(4-b)}=\frac{(4-x)(y-x)}{(a-5)(4-b)}=\frac{(4-x)(x-y)}{(a-5)(b-4)}\quad \text{і. г. д.}$$

Скарочаньне дробаў.

§ 55. Калі лічнік і назоўнік маюць супольны множнік, дык дроб можна скараціць на гэты сумножнік.

Напрыклад:

$$\frac{12a^4b^5c^2}{18a^2b^5c^4}\overset{6a^2b^5c^2}{\overset{\smile}{=}}\frac{2a^2}{3c^2}.$$

Калі лічнік і назоўнік — многачлены, дык, дзеля скарачаньня дробу, трэба сьпярша абавязкова раскласьці іх на сумножнікі.

Напрыклад:

$$1)\quad \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}=\frac{(x+y)\cancel{(x-y)}}{\cancel{(x-y)}(x^2+xy+y^2)}=\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$$

$$2)\quad \frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}=\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{(x^2-1)^2}=\frac{(x-1)\cancel{(x^2-1)}}{(x^2-1)\cancel{(x^2-1)}}=$$

$$=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x+1}$$

$$3)\quad \frac{n-m}{m^2-n^2}=\frac{-(m-n)}{(m+n)(m-n)}=\frac{-1}{m+n}=-\frac{1}{m+n}$$

$$4)\quad \frac{a^2b^2-bc-2a^2bc+2c^2}{3acd-3a^3bd+2c^2-2a^2bc}=\frac{b(a^2b-c)-2c(a^2b-c)}{3ad(c-a^2b)+2c(c-a^2b)}=$$

$$=\frac{(a^2b-c)(b-2c)}{(c-a^2b)(3ad+2c)}$$

Бачым, што множнік лічніка (a^2b-c) і множнік назоўніка $(c-a^2b)$ розьняцца толькі знакамі. Дзеля гэтага, для скарачаньня дробу, трэба пры адным з гэтых множнікаў, напрыклад, пры $c-a^2b$ зьмяніць знак; але, каб знак перад дробам астаўся той-самы, дык зьменім знак і пры другім множніку назоўніка. Дроб наш тады прыйме выгляд:

$$\frac{\cancel{(a^2b-c)}(b-2c)}{\cancel{(a^2b-c)}(-2c-3ad)}=\frac{-b-2c}{-2c-3ad}$$

Прыклады.

Скараціць наступныя дробы:

342. $\dfrac{9ax}{15a^2}$

343. $\dfrac{15ax^2}{35bx^3}$

344. $\frac{12a^4b^2x}{18a^2b^2y}$

345. $\frac{20a^3b^4c^8}{48a^4b^7c^6}$

346. $\frac{a^nb^{m-n}}{a^{m+n}b^n}$

347. $\frac{a^2-2ab}{ab-2b^2}$

348. $\frac{2x^2+4xy}{3xy+6y^2}$

349. $\frac{42a^3-30a^2b}{35ab^2-25b^3}$

350. $\frac{20a^3b+12a^2b-24a^2c}{25ab^2+15b^2-30bc}$

351. $\frac{4a^2-2ab}{12a^2-3b^2}$

352. $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$

353. $\frac{x^3+y^3}{2(x+y)^2}$

354. $\frac{16a^3-36ab^2}{6ab-9b^2}$

355. $\frac{x^3+x^2y}{x^2+2xy+y^2}$

356. $\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{a^2x+abx}$

357. $\frac{x-xy+z-zy}{1-3y+3y^2-y^3}$

358. $\frac{x^2+3x+2}{x^2+6x+5}$

359. $\frac{x^2-x-20}{x^2+x-30}$.

Прывядзéньне дробаў да супольнага назоўніку.

§ 56. Каб прывéсьці дробы да супольнага назоўніку, шукаем аймéншае кратнае ўсіх назоўнікаў, якое й будзе супольным назоўнікам; дзелім яго на кожны паасобны назоўнік і адтрыманыя дзéлі дадатковыя множнікі) множым на адпаведныя лічнікі.

Напрыклад, каб прывéсьці да супольнага назоўніку дробы:

$$\frac{3a^3c}{4b^4m^2},\quad \frac{5a^4c^5n^2}{12b^2x}\quad \text{і}\quad \frac{11cn^3}{24a^3m},$$

шукаем наймéншае кратнае ўсіх назоўнікаў, — яно будзе роўным $24a^3b^4m^2x$; дадатковы множнік першага дробу будзе $=6a^3x$, дадатковы множнік другога дробу будзе $=2a^3b^2m^2$ і дадатковы множнік трэцяга дробу будзе $=b^4mx$; пішам:

$$\frac{3a^3c\overset{6a^3x}{\smile}}{4b^4m^2},\quad \frac{5a^4c^5n^2\overset{2a^3b^2m^2}{\smile}}{12b^2x},\quad \frac{11cn^3\overset{b^4mx}{\smile}}{24a^3m}.$$

Цяпéр множым знойдзеныя дадатковыя множнікі на адпавéдныя лічнікі:

$$\frac{18a^6cx}{24a^3b^4m^2x},\quad \frac{10a^7b^2c^5m^2n^2}{24a^3b^4m^2x},\quad \frac{11b^4cmn^3x}{24a^3b^4m^2x}.$$

Такім чынам, дробы прывéдзены да супольнага назоўніку.

II-*гі прыклад.* — Прывесьці да супольнага назоўніку дробы:

$$\frac{1}{x^2+2x+1},\quad \frac{4}{x+2x^2+x^3}\quad \text{і}\quad \frac{5}{2x+2x^2}.$$

Раскладаем назоўнікі на сумножнікі:

$x^2+2x+1=(x+1)^2$	дадаткова множнік $=2x$
$x+2x^2+x^3=x(x+1)^2$	„ „ $=2$
$2x+2x^2=2x(x+1)$	„ „ $=(x+1)$

Супольны назоўнік $=2x(x+1)^2$.

Пасьля прывядзе́ньня, дробы будуць мець выгляд:

$$\frac{2x}{2x(x+1)^2},\quad \frac{8}{2x(x+1)^2},\quad \frac{5(x+1)}{2x(x+1)^2}.$$

Складаньне й адыманьне дробаў.

§ 57. *Пры складаньні й адыманьні дробаў з аднолькавымі назоўнікамі, трэба скласьці або адняць іх лічнікі, і пад сумаю падпісаць гэты самы назоўнік.*

Правіла гэтае вынікае беспасрэдна з правіла дзяле́ньня многачле́ну на аднаўле́н:

$$\frac{a+b-c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m},$$

а значыцца і наадварот:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}=\frac{a+b-c}{m}.$$

Напрыклад:

$$\frac{a}{b}+\frac{b-c}{b}-\frac{a-b}{b}=\frac{a+(b-c)-(a-b)}{b}=$$

$$=\frac{a+b-c-a+b}{b}=\frac{2b-c}{b}\;{}^{*)}.$$

Калі дробы маюць розныя назоўнікі, дык, пры складаньні ці адыманьні, трэба сьпярша прыве́сьці іх да супольнага назоўніку, а потым ужо скласьці лічнікі й падпісаць супольны назоўнік.

Прыклад I.

$$\frac{a^{\overset{a}{\smile}}}{bc}+\frac{b^{\overset{b}{\smile}}}{ac}-\frac{c^{\overset{c}{\smile}}}{ab}=\frac{a^2+b^2-c^2}{abc}.$$

Прыклад II.

$$\frac{a^{\overset{a-b}{\smile}}}{a+b}+\frac{b^{\overset{a+b}{\smile}}}{a-b}=\frac{a^2-ab+ab+b^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

---

*) Трэба памятаць, што знак — перад дробам адносіцца да ўсяго дробу, а ня толькі да першага выразу; дзеля гэтага будзе: $\frac{a}{p}-\frac{b-c}{p}$ ня роўна $\frac{a-b-c}{p}$. Праўдзівы рэзультат будзе:

$$\frac{a}{p}-\frac{b-c}{p}=\frac{a-(b-c)}{p}=\frac{a-b+c}{p}.$$

Прыклад III.

$$\frac{\overset{n+x}{\overbrace{x}}}{n-x}+\frac{\overset{n-x}{\overbrace{n}}}{n+x}-\frac{\overset{1}{\overbrace{x^2}}}{n^2-x^2}=\frac{nx+x^2+n^2-nx-x^2}{n^2-x^2}=\frac{n^2}{n^2-x^2}.$$

Прыклад IV.

$$\overset{ab}{\overbrace{3a^2}}-\frac{2x}{ab}=\frac{3a^3b-2x}{ab}.$$

Прыклады.

Выканаць наступныя дзéяньні над дробамі:

360. $\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}$

361. $\frac{x}{15a}+\frac{y}{3}$

362. $\frac{3c}{4a^3b}+\frac{5d}{6ab^4}$

363. $\frac{m}{a}+\frac{m}{b}+\frac{m}{c}$

364. $\frac{5a}{12y^3z^2}-\frac{b}{15yz^4}+\frac{3c}{10y^5}$

365. $\frac{a^{n-1}}{c^2x^{n-3}}-\frac{b^4z^n}{c^4x^{n-2}}-\frac{1}{acx^n}$

366. $\frac{15a+4b}{12}-\frac{3b-22a}{9}$

367. $\frac{3a+2b}{a}+\frac{2a-2b^2}{ab}$

368. $\frac{b^2+3ac}{bc}-\frac{ab+4bc}{ac}$

369. $\frac{4a-23b}{4}-\frac{4a-25b}{6}+$
$+\frac{19b-4a}{12}$

370. $\frac{3a-4b}{7}-\frac{2a-b-c}{3}+$
$+\frac{15a-4c}{12}-\frac{a-4b}{21}$

371. $\frac{5a^2-ab+c}{12}-\frac{2ab-a^2-3c}{18}-$
$-\frac{-2a+2ab}{24}$

372. $\frac{20a^2b+c}{10a^3b^2}+2ab^2-\frac{3}{2ab}$

373. $\frac{6-a^2}{6a}+\frac{a}{2}+\frac{2}{a}-\left(\frac{a}{3}+\frac{3}{a}\right)$

374. $\frac{5a-7b}{3b}+\frac{c-3a}{a}+\frac{a+5c}{5a}-$
$-\frac{11}{6b}$

375. $\frac{b}{a-b}+\frac{a}{a+b}$

376. $\frac{x}{1-a^2}-\frac{x}{a^2+1}$

377. $\frac{a^3}{2(a+1)^3}-\frac{a^2}{(a+1)^2}+\frac{a}{2(a+1)}$

378. $\frac{2}{2a+3}+\frac{3}{3-2a}+\frac{2a+15}{4a^2-9}$

379. $\frac{2}{4a-3}+\frac{3}{4a+3}-\frac{16a-6}{16a^2-9}$

380. $\frac{2}{a}+\frac{3}{b-2a}-\frac{2a-3b}{4a^2-b^2}$

381. $\frac{a(16-a)}{a^2-4}+\frac{3+2a}{2-a}-\frac{2-3a}{a+2}$

382. $\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+2}+\frac{2x}{(x+2)^2}$

383. $\frac{5}{2a+2}-\frac{1}{10a-10}-\frac{24}{10a+5}$

384. $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$

Множаньне дробаў.

§ 58. *Каб памножыць дробы, трэба множывы іх лічнікаў падзяліць на множывы назоўнікаў.*

Хай маем памножыць дроб $\frac{a}{b}$ на $\frac{c}{d}$. Трэба давесьці, што

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Абазначым дроб $\frac{a}{b}$ праз m, а дроб $\frac{c}{d}$ праз p. Тады:

$$\frac{a}{c}=m \quad \text{і} \quad \frac{c}{d}=p$$

$$\text{г. ё.:} \quad a=bm \quad \text{і} \quad c=dp.$$

Памнажаючы гэтыя роўнасьці адпаведнымі старанамі, адтрымаем: $ac=bm\cdot dp$.

Падзелім цяпер абедзьве староны апошняй роўнасьці на bd:

$$\frac{ac}{bd}=\frac{bmdp}{bd}.$$

Скараціўшы, адтрымаем:

$$\frac{ac}{bd}=mp, \quad \text{г. ё.:} \quad \frac{ac}{bd}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}.$$

Даведзенае правіла можам прыстасаваць і тады, калі маем некалькі дробавых множнікаў, напрыклад:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{k}{l}\cdot\frac{p}{r}=\frac{akp}{blr}.$$

Калі маем памножыць цэлае чысло на дроб, або наадварот, множым яго на лічнік і дзелім на назоўнік:

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$$

$$\frac{a}{c}\cdot d=\frac{a}{c}\cdot\frac{d}{1}=\frac{ad}{c}.$$

Прыклад I.

$$\frac{4a^2x^5}{5b^2c}\cdot\frac{a^4b^3}{12c^3x^2}=\frac{4a^6b^3x^5}{5\cdot12\cdot b^2c^4x^2}=\frac{a^6bx^3}{15c^4}.$$

Прыклад II.

$$\frac{a^2+ab}{a^3b+a^2b^2+ab^3}\cdot\frac{a^3-b^3}{a+b}=\frac{(a^2+ab)(a^3-b^3)}{(a^3b+a^2b^2+ab^3)(a+b)}=$$

$$=\frac{a(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)}{ab(a^2+ab+b^2)(a+b)}=\frac{a-b}{b}.$$

Дзяленьне дробаў.

§ 59. *Каб падзяліць дроб на дроб, трэба памножыць лічнік першага дробу на назоўнік другога; а назоўнік першага дробу* *памножыць на лічнік другога, і пéршае множыва падзяліць на другое, г. ё.:*

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

І праўда, памнажаючы дзель $\frac{ad}{bc}$ на дзéльнік $\frac{c}{d}$, адтрымаем дзéльнае:

$$\frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{adc}{bcd}=\frac{a}{b}.$$

Дзеля таго, што

$$\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c},$$

дык можам вывясьці яшчэ другое правіла:

Каб падзяліць дроб на дроб, трэба пéршы дроб памножыць на адваротнасьць другога дробу.

Прыклад I.

$$\frac{4b^3}{ax^2-a^3}:\frac{2b}{cx+ac}=\frac{4b^3(cx+ac)}{(ax^2-a^3)2b}=\frac{4b^3c(x+a)}{2ab(x^2-a^2)}=$$

$$=\frac{4b^3c(x+a)}{2ab(x+a)(x-a)}=\frac{2b^2c}{a(x-a)}.$$

Прыклад II.

$$\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}:\frac{x^3-xy^2}{x^3-x^2y+xy^2}=\frac{(x^3-y^3)(x^3-x^2y+xy^2)}{(x^3+y^3)(x^3-xy^2)}=$$

$$=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)\cdot x(x^2-xy+y^2)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)\cdot x(x+y)(x-y)}=$$

$$=\frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)^2}=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}.$$

Прыклад III на ўпрошчаньне дробу.

Няхай патрэбна ўпросьціць дроб:

$$\frac{1}{x+\frac{1}{1+\frac{x+1}{3-x}}}.$$

Дадаем 1 да дробу $\frac{x+1}{3-x}$:

$$1+\frac{x+1}{3-x}=\frac{3-x}{3-x}+\frac{x+1}{3-x}=\frac{3-x+x+1}{3-x}=\frac{4}{3-x}.$$

Дзелім 1 на дроб $\frac{4}{3-x}$:

$$1:\frac{4}{3-x}=\frac{3-x}{4}.$$

Складваем x з гэтым дробам

$$x+\frac{3-x}{4}=\frac{4x}{4}+\frac{3-x}{4}=\frac{4x+3-x}{4}=\frac{3x+3}{4}.$$

Урэшці, дзелім 1 на апошні дроб:

$$1:\frac{3x+3}{4}=\frac{4}{3x+3}=\frac{4}{3(x+1)}.$$

Прыклады.

Выканаць паказаныя дзéяньні над дробамі:

385. $\frac{4a^2}{b^2}\cdot 3b^2c^3$

386. $2a^2b\cdot\frac{5c^2d}{a^2b}$

387. $\frac{4x^2y^2}{15p^4q^3}\cdot 45p^2q^2$

388. $4m^2x^3\cdot\frac{3a^2m^3}{8x^5}$

389. $\frac{12a^2}{5b^2}\cdot\frac{10ab}{9c^2}$

390. $\frac{y^2}{yz}\cdot\frac{x^2}{xz}\cdot\frac{z^2}{xy}$

391. $\frac{5a^2b}{3cd}\cdot\frac{4b^2c}{15a^2}\cdot\frac{9c^2d}{16b^3}$

392. $\frac{x}{y}:z$

393. $a^3:\frac{a^2}{c}$

394. $\frac{1}{b}:a$

395. $\frac{ab}{cd}:abc$

396. $\frac{9m^3n^2}{8pq}:8n^2$

397. $10a^2b^3:\frac{50a^3b^4}{7c^2}$

398. $49x^2y^3:\frac{7x^2y^2}{11pq}$

399. $\frac{7ab}{3mn}:\frac{5pq}{11xy}$

400. $\frac{14a^2b^3c}{36d^5}:\frac{35a^4b^5}{9d^7}$

401. $\frac{a+1}{b}\cdot\frac{4b^2}{a^2-1}$

402. $\frac{ab+ac}{bd-cd}\cdot\frac{ab-ac}{bd+cd}$

403. $\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}\cdot\frac{a-b}{a+b}$

404. $\frac{b^4-a^4}{a^2+2ab+b^2}\cdot\frac{a+b}{b^2-ab}$

405. $\frac{2a(p^2-q^2)^2}{bp}\cdot\frac{p^5}{(p-q)(p+q)^2}$

406. $(a+b)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

407. $\left(\frac{a+x}{2x}\right)^2-\left(\frac{a-x}{2x}\right)^2$

408. $\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\cdot\left(2+\frac{2b}{a-b}\right)$

409. $\left(\frac{a+x}{a}-\frac{x-y}{x}\right)\cdot\frac{a^2}{x^2+ay}$

410. $\frac{a+b}{a-b}:\frac{b+a}{b-a}$

411. $\frac{3p-3q}{5p+5q}:\frac{9q-9p}{10q+10p}$

412. $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}:\frac{3x^2+3y^2}{x+y}$

413. $\frac{6ab-6b^2}{a(a+b)}:\frac{2b^2}{a(a^2-b^2)}$

414. $\frac{y^2-4x^2}{y^2+4xy}:\frac{y^2-2xy}{xy+4x^2}$

415. $\frac{6p^3}{p^3-q^3}:\frac{2p^2}{p^2+pq+q^2}$

416. $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab+b^2}:\frac{a-b}{a^3+b^3}$

417. $\dfrac{\dfrac{a}{m}+\dfrac{b}{m}}{\dfrac{c}{m}}$ 418. $\dfrac{\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{b}{xy}}{\dfrac{c}{xy^2}}$

419. $\left(m+\dfrac{mn}{m-n}\right):\left(m-\dfrac{mn}{m+n}\right)$

420. $\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right):\left(\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}\right)$

421. $\left[\dfrac{9m^2-3n^2}{4mn}-\dfrac{m-4n}{5n}\right]:\left[\dfrac{2m+n}{3m}-\dfrac{5n^2-3m^2}{16m^2}\right]$

422. $\dfrac{1+\dfrac{1}{a-1}}{1-\dfrac{1}{a+1}}$ 423. $\dfrac{p+2-\dfrac{1}{p+2}}{p+2+\dfrac{p}{p+2}}$

424. $\left[\left(\dfrac{a^2+b^2}{b}-a\right):\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)\right]\cdot\dfrac{a^2-b^2}{a^3+b^3}$

425. $\dfrac{x+\dfrac{1}{y}}{x+\dfrac{z}{yz+1}}-\dfrac{1}{y(xyz+x+z)}$.

Бяскрайнасьць і неазначанасьць.

§ 60. Няхай маем дроб $\frac{a}{x}$, якога вартасьць ёсьць m. Разглéдзім, як будзе зьмяняцца гэтая вартасьць дробу пры ступянёвым зьмяншаньні x.

1. Калі x будзе больш за a, тады ўвéсь дроб, г. ё. $\frac{a}{x}=m$, будзе менш ад адзінкі (напр. $\frac{1}{10}$).

2. Калі x будзе роўнае a, тады $m=1$ (напр. $\frac{1}{1}$).

3. Калі-ж x будзе менш ад a, тады m будзе больш ад адзінкі (напр. $\frac{1}{0{,}1}=10$).

Цяпéр, няхай лічнік a будзе, як кажуць у альгэбры, *сталым* чыслом, г. ё. нязьмéнным (напр. $a=1$), а назоўнік x няхай усё больш і больш зьмяншаецца (напрыклад у 10 разоў); тады вартасьць m ўсяго дробу будзе паступова ўзрастаць:

так, пры $x=0{,}1$, $m=\dfrac{a}{x}=\dfrac{1}{0{,}1}=10$,

пры $x=0.01$, $m=\dfrac{a}{x}=\dfrac{1}{0{,}01}=100$,

пры $x=0{,}001$, $m=\dfrac{a}{x}=\dfrac{1}{0{,}001}=1000$,

$$\text{пры}\quad x=0{,}0001\,,\qquad m=\frac{a}{x}=\frac{1}{0{,}0001}=10000$$

пры надта малым

$$x=0{,}0000001\,,\qquad m=\frac{a}{x}=\frac{1}{0{,}0000001}=10000000\,.$$

і г.д.

Бачым, што, зьмяншаючы далей вартасьць x, будзем адтрымліваць яшчэ большыя вартасьці для m.

Вот-жа, калі назоўнік робіцца ме́ншым ад усякага, адвольна выбранага намі, малага чысла, дык, наадварот, — вартасьць усяго дробу робіцца больш за ўсялякае, адвольна выбранае намі, чысло.

У такіх выпадках у альгэбры кажуць: *калі, пры сталым лічніку, назоўнік імкне́цца да нуля, тады дроб робіцца вялічынёю бяскрайнавялікай, або бяскрайнасьцю*; *і пішуць*:

$$\frac{a}{0}=\infty\,.$$

Калі дроб $-\frac{a}{x}$ ёсьць адымны, дык, зьмяншаючы x, мы павялічываем абсолютную вартасьць дробу $-\frac{a}{x}$, і калі x робіцца вялічынёю бяскрайна-малою (якая імкнецца да нуля), — тады вартасьць дробу

$$-\frac{a}{x}=-\infty\,.$$

§ 61. Няхай цяпер маем дроб $\frac{x}{y}$, які ёсьць $=m$, тады

$$m=\frac{x}{y}\,,\qquad\text{або}\qquad my=x\,.$$

Уявім сабе́, што абе́дзьве вялічыні x і y паступова зьмяншаюцца й робяцца роўнымі нулю.

Тады:

$$m=\frac{0}{0}\qquad\text{або}\qquad m\cdot 0=0\,.$$

Ведаем, што кожнае чысло, памножанае на нуль, дае́ ў множыве нуль, значыцца m у даным выпадку можа мець адвольную вартасьць.

Выраз $\frac{0}{0}$ абазначае кожнае чысло, і называецца ў альгэбры *неазначанасьцю*.

Гэткую неазначанасьць часам адтрымліваем пры вылічэньні лікавай вартасьці альгэбрычнага дробу, падстаўляючы арытмэтычныя чыслы на ме́йсца літараў.

Напрыклад, дроб

$$\frac{4a-12}{a^2-4a+3}$$

пры $a=3$ зьмяняецца на неазначанасьць $\frac{0}{0}$.

Каб знайсьці *сапраўдную вартасьць* данага дробу пры $a=3$, або, як кажуць у альгэбры, каб *раскрыць неазначанасьць*, — раскладаем лічнік і назоўнік на сумножнікі, а потым скарочваем дроб на, так званы, *крытычны множнік*, у даным выпадку на $a-3$:

$$\frac{4a-12}{a^2-4a+3}=\frac{4(a-3)}{(a-1)(a-3)}=\frac{4}{a-1}.$$

Падстаўляючы цяпер 3 на мéйсца a, бачым, што сапраўдная вартасьць нашага дробу пры $a=3$ ёсьць

$$\frac{4}{3-1}=2.$$

Дроб $\frac{x^2+2x-8}{x^2-3x+2}$ пры $x=2$ зьмяняецца на $\frac{0}{0}$.

Дзеля таго, што лічнік пры $x=2$ зьмяняецца на 0, дык на аснове 1-га выніку тэорэмы Бэзу (§ 51) ён павінен падзяліцца на $x-2$; на гэтай самай падставе, павінен падзяліцца на $x-2$ і назоўнік.

І праўда, раскладаючы шляхам дзялéньня абодва выразы дробу на сумножнікі, адтрымаем:

$$\frac{x^2+2x-8}{x^2-3x+2}=\frac{(x+4)(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\frac{x+4}{x-1}.$$

Падстаўляючы цяпéр 2 на мéйсца x, знойдзем сапраўдную вартасьць дробу пры $x=2$:

$$\frac{2+4}{2-1}=6.$$

Прыклады.

Знайсьці сапраўдную вартасьць наступных дробаў:

426. $\frac{n^2-9}{n-3}$ пры $n=3$

427. $\frac{a^3-ax^2}{a-x}$ пры $x=a$

428. $\frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$ пры $x=2$ і $y=2$

429. $\frac{x^2-8x+16}{ax-4a}$ пры $x=4$

430. $\frac{3a^2-ab}{9a^2-6ab+b^2}$ пры $b=3a$.

VI. РАЎНАНЬНІ ПЕ́РШАЕ СТУПЕ́НІ.

Агульныя ўласьцівасьці раўнаньняў

§ 62. Два альгэбрычныя выразы, злучаныя знакам роўнасьці, называем роўнасьцю. Выраз, які знаходзіцца ўле́ва ад знаку роўнасьці, называем ле́вай стараной роўнасьці, выраз — ўправа ад знаку роўнасьці называем праваю старанаю.

Роўнасьць, у якой абе́дзьве староны — роўныя паміж сабою пры ўсялякіх вартасьцях літараў, называецца тожсамасьцю.

Так, напрыклад, тожсамасьцямі будуць наступныя роўнасьці:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \text{ і г. д.}$$

І праўда, калі мы, напрыклад, у пе́ршай роўнасьці на ме́йсца a падставім 4, а на ме́йсца b падставім 3, дык адтрымаем:

$$(4+3)^2=4^2+2\cdot4\cdot3+3^2$$

$$7^2=16+24+9$$

$$49=49.$$

Роўнасьць, у якой абе́дзьве староны — роўныя паміж сабой толькі пры некатарых частных вартасьцях літараў, — называецца раўнаньнем.

Напрыклад, роўнасьць

$$x+10=14$$

ёсьць раўнаньне, дзеля таго, што абе́дзьве яе́ староны будуць роўныя толькі тады, калі мы на ме́йсца x падставім 4; пры кожнай іншай лікавай вартасьці x, ле́вая старана ня будзе роўная правай старане́.

Роўнасьць

$$2(3y-4)=22$$

так сама ёсьць раўнаньне, таму што абе́дзьве яе́ староны будуць роўнымі толькі пры $y=5$.

Тое чысло, якому трэба даць пэўню вартасьць, каб абе́дзьве староны раўнаньня сталі роўнымі, называецца *няведамаю вялічынёю* й абазначаецца звычайна аднэй з апошніх літараў лацінскага альфабэту, а ласьне: x, y, z, t, u, v, w.

Вартасьць няве́дамай вялічыні, якая зьмяняе раўнаньне на тожсамасьць, называецца разьвязкам раўнаньня.

У даных прыкладах разьвязкамі раўнаньняў будуць чыслы 4 і 5.

Разьвязаць раўнаньне — гэта значыць: знайсьці яго разьвязак, або разьвязкі.

Раўнаньне, якое, апрача нявéдамых (x, y . . .), не зьмяшчае ў сабé іншых літараў, называецца *лікавым раўнаньнем*; напрыклад:

$$8x+5$$

ёсьць лікавае раўнаньне.

Раўнаньне, якое, апрача нявéдамых, мае ў сабé вéдамыя літары (a, b, c . . . k, l, m . . .), называецца *літарным раўнаньнем.*

Напрыклад, раўнаньні:

$$bx+a=20 \quad \text{і} \quad 2x-4b+5m=0$$

ёсьць літарныя.

Раўнаньне называецца *цэлым,* калі яно ня мае ў назоўніку нявéдамай літары, і — *дробавым,* калі нявéдамая літара ўходзіць у склад назоўніку.

Значыцца:

$$0{,}2x+2=0{,}3(x-1) \quad \text{і} \quad \frac{ac^2+x}{c}=\frac{ax+b^2}{b}$$

ёсьць цэлыя раўнаньні,

$$\text{а} \qquad \frac{13}{12x-18}=\frac{3}{12-8}\ .$$

ёсьць дробавае раўнаньне.

Раўнаньне называецца *вымерным,* калі яго нявéдамая вялічыня не знаходзіцца пад знакам корня, і — *нявымéрным,* калі яго нявéдамая вялічыня знаходзіцца пад знакам корня.

Ступéньню цэлага вымéрнага раўнаньня з аднэй нявéдамай называецца найвыэйшы паказчык ступені пры няведамай у гэтым раўнаньні.

На аснове гэтага:

$$7x-b=22-x \quad \text{і} \quad a^2x-b=10$$

ёсьць раўнаньні пéршае ступéні,

$$\text{а} \qquad 5x^2+x=10 \quad \text{і} \quad ax^2+b^3x=c$$

ёсьць раўнаньні другое ступéні, або квадратныя.

Разьвязваньне раўнаньняў пéршае ступéні з аднэй нявéдамай.

§ 63. Пры разьвязваньні раўнаньняў, трэба старацца прывéсьці іх да такога ўзору, з якога-б можна было адразу знайсьці вартасьць нявéдамай.

Усé пераробкі раўнаньняў, якія робяцца дзеля гэтае мэты, грунтуюцца на наступных дзьвёх аксіомах:

1. Да абéдзьвюх старонаў роўнасьці — можам дадаваць (і адымаць) ўсялякія, алé аднолькавыя вялічыні.
2. Абéдзьве староны роўнасьці можам памножыць, або падзяліць на адно й тое самае число (апрача нуля).

З пéршай аксіомы вынікаé:

1. *Кожны выраз раўнаньня можна перанесьці з аднэй стараны раўнаньня на другую са зьмененым знакам.*

Няхай маем раўнаньне:

$$3x+12=5x-2a \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (1)$$

Дадамо да абедзьвюх старонаў раўнаньня па $2a$ і ад абедзьвюх старонаў адымем па 12

$$3x+12+2a-12=5x-2a+2a-12$$

г. ё.
$$3x+2a=5x-12 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (2)$$

Бачым, што $+12$, якое было па лéвай старанé раўнаньня (1), цяпéр знаходзіцца па правай, але са зьмéненым знакам (-12).

Так сама, $-2a$, якое было па правай старанé (1) раўнаньня, цяпéр знаходзіцца па лéвай старане, але са зьмéненым знакам ($+2a$).

2. *Калі па абéдзьвюх старонах раўнаньня знаходзяцца аднолькавыя выразы з аднолькавымі знакамі, дык іх можна скасаваць.*

Сапраўды, калі да абéдзьвюх старонаў раўнаньня:

$$3x+2a+4bx=8+2a$$

дадамо па $-2a$, дык адтрымаем:

$$3x+2a+4bx-2a=8+2a-2a,$$

г. ё.
$$3x+4bx=8.$$

З другой аксіомы вынікаé:

3. *Калі ўсé выразы раўнаньня маюць супольны множнік (ня роўны нулю), дык можам іх падзяліць на гэты сумножнік, г. ё. скараціць раўнаньне.*

Калі, напрыклад, у раўнаньні

$$25x-20=15x$$

падзéлім абéдзьве староны на 5, дык адтрымаем прасьцéйшае раўнаньне.

$$5x-4=3x.$$

4. *Калі ў раўнаньні ёсьць дробавыя выразы, дык прыводзім дробы да супольнага назоўніку, множым ўсé выразы раўнаньня на адтрыманы супольны назоўнік, і такім спосабам пазбываемся дробавасьці.*

Хай, напрыклад, маем раўнаньне:

$$\frac{13x}{5}=\frac{7x}{2}+4.$$

Прыводзім ўсé выразы да супольнага назоўніку:

$$\frac{13x\overset{4}{\smile}}{15}=\frac{7x\overset{5}{\smile}}{2}+4\overset{60}{\smile}$$

г. ё.
$$\frac{52x}{60}=\frac{35x}{60}+\frac{240}{60}.$$

Цяпéр множым ўсé выразы раўнаньня на супольны назоўнік 60; адтрымаем:

$$52x=35x+240.$$

На практыцы, дзеля ўпрошчаньня дзéяньняў, звычайна не падпісваем супольнага назоўніку пад дробамі, а адкідаем яго, памнажаючы лічнікі дробаў на дадатковыя множнікі.

Прыклад.

$$\frac{4x}{9a}\overset{2b}{\smile}-\frac{3}{6b}\overset{3a}{\smile}=2ax\overset{18ab}{\smile}.$$

Памнажаючы лічнікі дробаў і цэлае чысло на дадатковыя множнікі, і адкідаючы супольны назоўнік $18ab$, адтрымліваем:

$$8bx-9a=36a^2bx.$$

5. *Знакі пры ўсіх выразах раўнаньня можам зьмяніць на супраціўныя, памнажаючы абедзьве староны раўнаньня на* —1.

Карыстаючы з вышэй пералічаных уласьцівасьцяў раўнаньняў, пры разьвязваньні іх будзем прытрымлівацца гэткага спосабу разьвязваньня:

Каб разьвязаць раўнаньне першае ступені з аднэй нявéдамай, трэба:

1. *пазбыцца дужак,*
2. *зьнесьці назоўнікі ў дробах,*
3. *перанесьці выразы, якія маюць нявéдамую вялічыню на лéвую старану, а выразы вéдамыя — на правую,*
4. *выканаць злучэньне падобных выразаў,*

і 5. *падзяліць абедзьве староны раўнаньня на коэфіцыéнт пры нявéдамай вялічыне.*

Застасуем дадзены спосаб да разьвязваньня раўнаньняў.

Прыклад 1.

$$8x-13=42-3x.$$

У даным раўнаньні няма дужак і дробаў, значыцца адразу пераносім нявéдамыя выразы на лéвую старану, а вéдамыя на правую.

$$8x+3x=42+13.$$

Злучаем падобныя выразы:

$$11x=55.$$

Цяпéр, падзяліўшы абедзьве староны на коэфіцыéнт пры нявéдамай, г. ё. на 11, адтрымліваем:

$$x=5.$$

Каб зрабіць пераверку, ці правільна разьвязана раўнаньне падставім у першапачатковае раўнаньне разьвязак 5 на мéйсца x:

$$8\cdot5-13=42-3\cdot5$$

$$40-13=42-15$$

$$27=27.$$

Прыклад 2.

$$\frac{3(2-x)}{2}-x=\frac{2(x-5)}{3}.$$

Зносім дужкі:

$$\frac{6-3x}{2}-x=\frac{2x-10}{3}.$$

Зносім назоўнікі:

$$\frac{6-3x}{2}\overset{3}{\smile}-x\overset{6}{\smile}=\frac{2x-10}{3}\overset{2}{\smile}$$

Адкуль:

$$18-9x-6x=4x-20.$$

Пераносім нявéдамыя члéны ў левую старану, а вéдамыя — ў правую:

$$-9x-6x-4x=-20-18.$$

Робім зл учэньне падобных члéнаў:

$$-19x=-38.$$

Каб адтрымаць дадатнае x, зьмяняем знакі:

$$19x=38.$$

Дзéлім абéдзьве староны раўнаньня на коэфіцыéнт пры нявéдамай, г. ё. на 19:

$$x=2.$$

Прыклад 3.

Няхай маем літарнае раўнаньне:

$$a(x-a^2)-b(x-b^2)=0.$$

Тады:

$$ax-a^3-bx+b^3=0$$

$$ax-bx=a^3-b^3.$$

У правай старанé раўнаньня вынясем за дужкі x, тады выраз у дужках будзем лічыць за коэфіцыéнт пры x:

$$(a-b)x=a^3-b^3.$$

Падзяліўшы абéдзьве стараны раўнаньня на $a-b$, адтрымаем:

$$x=\frac{a^3-b^3}{a-b}$$

$$x=a^2+ab+b^2.$$

§ 64. Пры разьвязваньні раўнаньняў, трэба памятаць яшчэ наступныя правілы адносна множаньня й дзялéньня раўнаньня на нявéдамыя выразы:

1. Калі раўнаньне — дробавае (г. ё. зьмяшчае ў назоўніку нявéдамую вялічыню), дык можам абéдзьве староны яго памножыць на супольны назоўнік, ня ўводзячы праз гэта новых (чужых) разьвязкаў.

Так, напрыклад, у раўнаньні:

$$\frac{3}{x+3}+\frac{x}{x-3}=\frac{x^2+3}{x^2-9},$$

якога разьвязак ёсьць 2, можам множыць абéдзьве яго староны на x^2-9, ня ўводзячы праз гэта новых (чужых) разьвязкаў.

2. Калі-ж маем раўнаньне цэлае, дык, памнажаючы абéдзьве яго староны на выразы, зьмяшчаючыя ў сабé нявéдамыя вялічыні, мы ўводзім чужыя для першапачатковага раўнаньня разьвязкі.

Хай, напрыклад, маем раўнаньне:

$$3x-5=15-x$$

якога разьвязак $x=5$. Калі мы памножым гэтае раўнаньне на $x-6$, дык адтрымаем раўнаньне квадратнае:

$$x^2-11x=-30,$$

якое мае два разьвязкі: 5 і 6.

Такім чынам, мы ўвялі новы разьвязак.

3. Пры дзяленьні раўнаньня на выраз, зьмяшчаючы ў сабé нявéдамую, мы трацім разьвязкі.

Калі, напрыклад, раўнаньне

$$(x-3)(x-2)=8(x-2),$$

якое мае два разьвязкі 11 і 2, падзелім на $(x-2)$, дык адтрымаем раўнаньне:

$$x-3=8$$

з адным толькі разьвязкам $x=11$.

Прыклады.

Знайсьці разьвязкі наступных раўнаньняў:

431. $4+x=10$
432. $18-x=6$
433. $3x=12$
434. $5x+3=28$
435. $28+3x=7x$
436. $3y+18=5y$
437. $19z-14=12z$
438. $7z-5=3z+3$
439. $16x+10-21x=35-10x-5$
440. $8(2y+5)=72$
441. $5(z-2)-9=11$
442. $5u+(7-2u)=11$
443. $8(10-x)=5(x+3)$
444. $4(5y+2)-7(1-2y)+5(8-y)=128$
445. $10(8-3y)+11(y-4)-3(4-3y)=4$
446. $2\frac{1}{2}x=5$
447. $x+\frac{1}{4}x=5$
448. $8y-\frac{5}{6}y=3y+25$
449. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x=10$
450. $\frac{z}{2}+\frac{z}{3}-\frac{z}{4}=7$
451. $5x-0{,}3x=4{,}5x+2$
452. $5(5x-1)-2{,}7x+0{,}2=6{,}6-0{,}5x$
453. $1{,}2x-5{,}375=0{,}125x-0{,}765x-5{,}425+1{,}85x$
454. $5{,}7x+7{,}2-0{,}855x=34{,}1885+3{,}45x-18{,}2$
455. $3-2x=\frac{1-3x}{5}$
456. $\frac{5-x}{8}=\frac{18-5x}{12}$
457. $2-\frac{3x-7}{4}=-\frac{x+17}{5}$
458. $\frac{x-3}{4}+\frac{x-4}{3}=\frac{x-5}{2}+\frac{x+1}{8}$
459. $\frac{3x-1}{5}-\frac{13-x}{2}=\frac{7x}{3}-\frac{11(x+3)}{6}$
460. $\frac{3x-11}{4}-\frac{28-9x}{8}=4x-14\frac{3}{4}$
461. $\frac{7+9x}{4}-\left(1-\frac{2-x}{9}\right)=7x$

462. $\frac{3(x-1)}{4}-\frac{3x-4}{3}=5\frac{1}{3}-\frac{27+4x}{9}$

463. $\frac{3x+4}{7}-\frac{9x+44}{5}+\frac{3(3x+10)}{4}=\frac{5x+12}{3}$

464. $\frac{26x-51}{52}-\frac{2(1-3x)}{13}=x-\frac{20x-(10-3x)}{156}$

465. $\frac{2\frac{1}{3}x-2}{4}-\frac{\frac{10x-1}{2}-\frac{1}{3}}{3}=\frac{\frac{x}{4}-2}{5}-3\frac{2}{9}$

466. $\frac{py}{q}-\frac{qy}{p}=a$

467. $(b+1)x+ab=b(a+x)+a$

468. $(p+2)(p-2)=2p(p+2)-z^2$

469. $\frac{a+bx}{a+b}=\frac{c+dx}{c+d}$

470. $7-\frac{2(x-3)}{x}=\frac{30x+x^2}{x^2}$

471. $\frac{10+7x}{6+7x}=\frac{5x+4}{5x}$

472. $\frac{x}{3}-\frac{2x}{3x}=\frac{x^2-5x}{3x-7}$

473. $\frac{5+8x}{3+2x}=\frac{45-8x}{13-2x}$

474. $\frac{3x}{x+2}+\frac{2x}{x+1}=5$

475. $\frac{2+x}{x-1}-\frac{5}{2x-2}=\frac{8}{3x-3}+\frac{5}{18}.$

Прыстасаваньне раўнаньняў пе́ршае ступе́ні з аднэй няве́дамай да разьвязваньня заданьняў.

§ 65. За дапамогаю раўнаньняў можам разьвязваць шмат-якія заданьні. Дзеля гэтае мэты з варункаў пэўнага заданьня ўкладваем адпаведнае раўнаньне, якое, ўласна кажучы, ёсьць сказ, у якім сказьнікам ёсьць дзеяслоў „раўняецца“. Каб улажыць раўнаньне, трэба варункі заданьня выказаць за дапамогаю сказу са сказьнікам „раўняецца“ і потым паасобныя часьціны гэтага сказу прадставіць матэматычнымі знакамі.

Заданьне 1.

Хай, напрыклад, маем гэткую задачу:

Два браты маюць разам 84 рублі, прычым старшы мае ў два разы больш за ме́ншага. Колькі мае кожны?

Разьвязаньне. — Абазначым колькасьць рублёў ме́ншага брата праз x, тады старшы будзе мець $2x$ рублёў, а дзеля таго, што разам яны маюць 84 рублі, дык, значыцца:

$$x+2x=84$$
$$3x=84$$
$$x=28.$$

З адтрыманага рэзультату вынікае, што ме́ншы брат мае 28 рублёў, а старшы $28\cdot 2=56$ рублёў.

Заданьне 2.

За 30 аршынаў чырвонага й чорнага сукна заплацілі 128 рублёў. Колькі куплена аршынаў кожнага гатунку, калі аршын чырвонага сукна каштуе $4\frac{1}{2}$ рублі, а аршын чорнага 4 р.

Разьвязаньне. — Хай чырвонага сукна куплена x аршынаў. Тады, значыцца, чорнага сукна было куплена $(30-x)$ аршынаў (бо ўсяго разам было 30 аршынаў).

1 аршын чырвонага сукна каштуе $4\frac{1}{2}$ рублі, значыцца, x аршынаў гэтага сукна каштуюць $4\frac{1}{2}\ x$ рублёў; на гэтай самай аснове, $(30-x)$ аршынаў чорнага сукна каштуюць $4(30-x)$ р.

Адсюль вынікае, што абодва гатункі каштуюць:

$$4\tfrac{1}{2}x+4(30-x).$$

Але з другога боку ве́даем, што за ўсё сукно заплачана 128 рубл., значыцца:

$$\begin{gathered}4\tfrac{1}{2}x+4(30-x)=128\\ \frac{9x}{2}+120-4x=128\\ 9x+240-8x=256\\ 9x-8x=256-240\\ x=16.\end{gathered}$$

Такім чынам, чырвонага сукна куплена 16 аршынаў, а чорнага $30-16=14$ аршынаў.

Заданьне 3.

Сын на 20 гадоў маладзей за бацьку, і на 5 гадоў старэй за дачку. Колькі гадоў мае кожны, калі сума гадоў усіх ёсьць 60?

Разьвязаньне. Абазначым колькасьць гадоў сына праз x, тады бацька будзе мець $(x+20)$ гадоў, а дачка $(x-5)$ гадоў. Дзеля таго, што сума гадоў бацькі, сына й дачкі ёсьць 60, значыцца:

$$\begin{gathered}x+(x+20)+(x-5)=60\\ x+x+20+x-5=60\\ x+x+x=60-20+5\\ 3x=45\\ x=15.\end{gathered}$$

Сын мае 15 гадоў, бацька $15+20=35$ гадоў, дачка: $15-5=10$ гадоў.

Заданьне 4.

Раскласьці чысло 1542 на два чыслы так, каб дзевятая частка аднаго была на 18 адзінак больш за чатырнаццатую частку другога чысла.

Разьвязаньне. — Хай адно чысло будзе x, тады другое будзе: $1542-x$ У заданьні кажацца, што $\frac{1}{9}$ частка пе́ршага чысла „раўняецца“ $\frac{1}{14}$ часткі другога $+$ 18, г. ё.:

$$\begin{gathered}\frac{x}{9}=\frac{1542-x}{14}+18\\ 14x=9(1542-x)+2268\\ 14x=13878-9x+2268\\ 23x=16146\\ x=\frac{16146}{23}=702\end{gathered}$$

г. ё. пе́ршае чысло будзе 702, а другое: $1542-702=840$.

Заданьне 5.

Праз адну помпу можна выліць усю ваду з басэйну ў 3 гадзіны, а праз другую — ў 5 гадзінаў. За колькі часу можна выліць усю ваду, калі пусьціць у работу абедзьве помпы?

Разьвязаньне. Абазначым шуканую калькасьць гадзінаў праз x. Праз пéршую помпу ў працягу 1 гадзіны можна выліць $\frac{1}{3}$ частку басэйну, а ў працягу x гадзінаў $\frac{x}{3}$ часткі басэйну.

Праз другую помпу ў працягу 1 гадзіны можна выліць $\frac{1}{5}$ частку басэйну, а ў працягу x гадзінаў $\frac{x}{5}$ часткі басэйну.

Дзеля таго, што ў працягу x гадзінаў абéдзьве помпы выльюць усю ваду з басэйну, дык:

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=1$$

$$5x+3x=15$$

$$8x=15$$

$$x=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$$

г. ё. абéдзьве помпы выльюць усю ваду ў працягу $1\frac{7}{8}$ гадзіны.

Заданьні.

476. Дзьве асобы маюць разам 38 рублёў, прычым пéршае мае на 6 рублёў больш за другую. Колькі рублёў мае кожная асоба?

477. Падарожны за 2 дні праéхаў 87 вёрст. Колькі вёрст праéхаў падарожны ў пéршы дзень, калі вéдама, што на другі дзень ён праéхаў у 2 разы меней, як у пéршы?

478. У дзьвюх клясах было 72 вучні. У пéршай клясе вучняў было ў 5 разоў меней, як у другой. Колькі вучняў было ў кожнай клясе?

479. У трох кошыках знаходзяцца 110 яблыкаў, прычым у пéршым і ў трэцім пароўну, а ў другім на 4 яблыкі меней, як у кожным з папярэдніх кошыкаў. Колькі яблыкаў у кожным кошыку?

480. Тры фаскі масла важуць разам 33 фунты. Пéршая лягчэй за другую на 5 фунтаў, а трэцяя лягчэй за пéршую на 2 фунты. Колькі важыць кожная фаска?

481. На трох паліцах ляжыць усяго 66 кніжак, прычым на дольнай у 3 разы больш, а на сярэдняй у 2 разы больш, як на вéрхняй. Колькі кніжак знаходзіцца на кожнай паліцы?

482. У адным басэйне вады ў 2 разы больш, як у другім; калі-ж з пéршага басэйну пераліць 16 вядзёр вады ў другі, дык вады будзе ў абодвух басэйнах пароўну. Колькі вады ў кожным?

483. Хтось мае ў правай кішэні ў 4 разы больш рублёў, як у лéвай. Калі-ж ён пераложыць з правай кішэні ў лéвую 6 рублёў, дык у правай будзе толькі ў 3 разы больш, як у лéвай. Колькі рублёў ў кожнай кішэні?

484. Адзін гаспадар мае кароў у 4 разы больш за другога. Калі-б абодва яны дакупілі па 9 кароў, дык у пéршага тады было-б кароў у 3 разы больш за другога. Колькі кароў мае кожны?

485. У адным басэйне 48 вядз. вады, а ў другім 22 вядры. З пéршага адлілі вады ў 2 разы больш, як з другога, і тады ў пéршым стала вады ў 3 разы больш, як у другім. Колькі вядзёр адлілі з кожнага?

486. Нéкалькі наймітаў адтрымалі 120 рублёў. Калі-б іх было на 4 меней, дык кожны адтрымаў-бы ў 3 разы больш. Колькі было наймітаў?

487. Меднік прадаў у пéршы раз $\frac{2}{7}$ колькасьці сваіх скварод, а ў другі раз $\frac{3}{5}$ гэтай самай колькасьці; пасьля чаго асталося 8 скварод. Колькі ён меў усіх скварод?

488. З басэйну адлілі спачатку $\frac{1}{3}$ ўсяé вады, потым $\frac{5}{6}$ рэшты, і тады асталося 6 вядзёр. Колькі было вады ў басэйне?

489. Купéц прадаў 38 фунтаў кавы двух гатункаў: па 3 руб. і па 1 р. 60 кап. за фунт, і зарабіў на пéршым гатунку на 22 рублі больш, як на другім. Колькі прадаў ён кавы пéршага і колькі другога гатунку?

490. Куплены сшыткі для вучняў. Калі кожнаму даць па 9 сшыткаў, дык ня хопіць 7 сшыткаў; калі-ж даць па 8 сшыткаў, тады застанецца яшчэ 16 сшыткаў. Колькі было куплена сшыткаў і колькі было вучняў у клясе?

491. Купéц зьмяшаў два гатункі гарбаты: па 3 р. 60 кап. і па 2 р. 80 кап. за фунт, усяго 100 фунтаў. Колькі ўзяў ён фунтаў пéршага й другога гатунку, калі вéдама, што фунт мяшанай гарбаты каштуе 3 р. 25 кап.?

492. Двум наймітам даручылі пэўную работу. Адзін узяўся выканаць яé ў 5 гадз., а другі ў $7\frac{1}{2}$ гадз. У колькі гадзінаў выканаюць яны гэтую работу, калі будуць працаваць разам?

493. З дзьвёх станцый, паложаных на адлéгласьці 900 вёрст, выйшлі аб аднэй пары два поезды, і йдуць адзін другому на сустрэчу. Пéршы праходзіць у гадзіну 36 вёрст., а другі 39 вёрст. Калі яны сустрэліся?

494. З дзьвёх станцый, паложаных на адлéгласьці 77 вёрст, выйшлі аб аднэй пары два цягнікі, і йдуць у адным кірунку. Пéршы праходзіць у гадзіну $31\frac{1}{2}$ вярсты, а другі $18\frac{2}{3}$ вярсты, прычым пéршы йдзе ззаду другога. Калі ён дагоніць?

495. Купéц прадаў тавар за 299 рублёў, і адтрымаў зыску 15%. Колькі яму самому каштуе гэты тавар?

496. У басэйн правéдзены 3 трубы: праз пéршыя дзьве трубы вада ўліваецца, а праз трэцюю выліваецца. Праз пéршую трубу можна напоўніць басэйн у 3 гадзіны, праз другую — ў 2 гадзіны, а праз трэцюю вада можа выліцца ў 6 гадзін. За колькі гадз. напоўніцца пусты басэйн, калі адчыніць ўсé 3 трубы?

497. Сума трох чыслаў раўняецца 70. Другое чысло, пры дзялéньні на пéршае, даé ў дзéлі 2 і ў астачы 1; а трэцяе, пры дзяленьні на другое, даé ў дзéлі 3 і ў астачы 3. Знайсьці гэтыя чыслы.

498. Знайсьці чысло, якое, пры дзялéньні на 5, даé 2 ў астачы а пры дзялéньні на 8, даé ў астачы 5, вéдаючы прытым, што пéршая дзель на 3 адзінкі больш за другую.

499. За 46 пудоў цукру заплачана на 195 рублёў больш, як за 73 фунты гарбаты; 9 пудоў цукру каштуюць на 30 рублёў таней за 37 фунтаў гарбаты. Колькі рублёў каштуе фунт гарбаты і пуд цукру?

500. Бацька даў 4 сынам 5040 рублёў. Трэцяму сыну ён даў 720 рублёў, другому толькі, колькі трэцяму й чацьвéртаму разам, а пéршаму — ў 2 разы больш, як другому. Колькі адтрымаў кожны?

501. З басэйну вылілі спачатку палову ўсяé вады і $\frac{1}{2}$ вядра, потым палову рэшты і $\frac{1}{2}$ вядра; ўрэшці яшчэ палову астачы і $\frac{1}{2}$ вядра. Пасьля гэтага, у басэйне асталося 6 вядзёр. Колькі было ў ім вады спачатку?

Уклад азначаных раўнаньняў пéршае ступéні.

§ 66. Раўнаньне пéршае ступéні з дзьвёма нявéдамымі можам заўсёды прывéсьці да ўзору

$$ax+by=c$$

у якім a і b ёсьць коэфіцыéнты пры x і y, а c — выраз, незалéжны ад нявéдамых.

Гэткае раўнаньне называецца неазначаным, дзеля таго, што мае бяскрайна-вялікую колькасьць разьвязкаў.

Сапраўды, калі, напрыклад, у раўнаньні

$$3x+2y=13$$

будзем даваць нявéдамый x розныя адвольныя вартасьці, дык будзем адпавéдна адтрымліваць розныя вартасьці і для другой нявéдамай. — Вот-жа, калі $x=1$, дык, падстаўляючы ў наша раўнаньне 1 на мéйсца x, адтрымаем $y=5$; калі $x=2$, тады $y=3\frac{1}{2}$, калі $x=3$, тады $y=2$ і г. д.

Падобным чынам, у раўнаньні:

$$5x-2y=11,$$

падстаўляючы на мéйсца x вартасьці 1, 2, 3, 4 . . ., будзем адтрымліваць для y вартасьці: -3, $-\frac{1}{2}$, 2 . . . . і г. д.

Калі-б мы, аднак-жа, хацéлі знайсьці вартасьці, адначасна адказваючыя абодвум гэтым раўнаньням, дык убачылі-б, што для кожнай нявéдамай існуе толькі адна гэткая вартасьць.

У даных раўнаньнях гэткаю вартасьцю для x ёсьць 3 і для $y=2$.

Гэтыя вартасьці зьмяняюць адначасна абодва раўнаньні на тожсамасьць. Сапраўды, падстаўляючы 3 на мéйсца x і 2 на мéйсца y у пéршае раўнаньне, адтрымаем:

$$3\cdot 3+2\cdot 2=13$$

г. ё.

$$13=13.$$

Падстаўляючы гэтыя самыя вартасьці на мéйсца x і y у другое раўнаньне, адтрымаем:

$$3\cdot 5-2\cdot 2=11$$

г. ё.

$$11=11.$$

Усé іншыя вартасьці нявéдамых не зьмяняюць адначасна або двух раўнаньняў на тожсамасьці.

Раўнаньні, якія маюць аднолькавыя разьвязкі, прадстаўляюць *уклад (або сыстэму) адначасных раўнаньняў.*

Разглéдзім спачатку разьвязваньне ўкладу, які складаецце з двух адначасных раўнаньняў. Дзеля разьвязаньня двух раўнаньняў з дзьвёма нявéдамымі, выключаем адну нявéдамую і такім чынам прыводзім іх да аднаго раўнаньня з аднэй нявéдамай.

Спосабаў разьвязваньня двух адначасных раўнаньняў з дзьвёма нявéдамымі існуе нéкалькі.

1. *Спосаб зраўнаньня лікавых коэфіцыентаў*, ці, інакш званы, *спосаб складаньня або адыманьня*, грунтуецца на зраўнаньні лікавых коэфіцые́нтаў пры аднэй няве́дамай у абодвух раўнаньнях, за дапамогаю множаньня раўнаньняў на адпаве́дныя дадатковыя множнікі. Гэткім спосабам пераробленыя раўнаньні складаем або адымаем, зале́жна ад таго, ці знакі пры зраўнаных коэфіцые́нтах розныя, ці аднолькавыя.

Хай, напрыклад, маем адначасныя раўнаньні:

$$6x+5y=18 \quad \text{і} \quad 4x+5y=2$$

Дзеля таго, што абодва раўнаньні маюць пры няве́дамай y аднолькавыя коэфіцые́нты з аднолькавымі знакамі, дык, каб выключыць няве́дамую y, проста адымаем другое раўнаньне ад пе́ршага:

$$\begin{array}{r} 6x+5y=18 \\ \underline{-4x\mp 5y=-2} \\ 2x=16 \end{array}$$

г. ё.

$$x=8.$$

Каб цяпе́р знайсьці вартасьць y, падстаўляем знойдзеную вартасьць x у якое-небудзь раўнаньне, напрыклад, у пе́ршае:

$$\begin{array}{r} 6\cdot 8+5y=18 \\ 5y=18-48 \\ y=-6. \end{array}$$

Другі прыклад:

Маем адначасныя раўнаньні:

$$7x-3y=-41 \quad \text{і} \quad 4x+11y=+2.$$

Зраўнаем у гэтых раўнаньнях лікавыя коэфіцые́нты, напрыклад, пры няве́дамай x.

Дзеля гэтае мэты, множым пе́ршае раўнаньне на 4, а другое на 7, і потым, каб выключыць x, адымаем другое раўнаньне ад пе́ршага. Тады адтрымаем:

$$\begin{array}{r|l} 7x-3y=-41 & 4 \\ \underline{4x+11y=2} & \underline{7} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28x-12y=-164 \\ \underline{-28x\mp 77y=-14} \\ -89y=-178 \\ 89y=178 \\ y=2. \end{array}$$

Знойдзеную вартасьць падставім у другое раўнаньне (прасьце́йшае):

$$\begin{array}{r} 4x+11\cdot 2=2 \\ 4x=2-22 \\ 4x=-20 \\ x=-5. \end{array}$$

Калі-б мы хаце́лі з гэтых раўнаньняў спачатку выключыць няве́дамую y, тады трэба было-б пе́ршае раўнаньне памножыць на 11, а другое на 3, і потым пераробленыя раўнаньні скласьці; такім чынам адтрымалі-б:

$$\begin{array}{r} 77x-33y=-451 \\ 12x+33y=6 \\ \hline 89x=-445 \\ x=-5. \end{array}$$

Падстаўляючы знойдзеную вартасьць x у другое раўнаньне, адтрымаем:

$$\begin{aligned} 4(-5)+11y&=2 \\ 11y&=2+20 \\ y&=2. \end{aligned}$$

2. *Спосаб падстаноўкі* грунтуецца на тым, што адну якую-небудзь нявéдамую з аднаго раўнаньня выражаем цéраз другую нявéдамую, і знойдзеную вартасьць падстаўляем у другое раўнаньне; адтрымліваем тады адно раўнаньне з аднэю нявéдамаю.

Так, напрыклад, калі маем адначасныя раўнаньні:

$$4x-5y=3$$
$$\text{і } 5x+7y=17$$

дык, выражаючы нявéдамую x з пéршага раўнаньня цéраз y, маем

$$x=\frac{3+5y}{4}.$$

Адтрыманую вартасьць x падстаўляем потым у другое раўнаньне:

$$\frac{5(3+5y)}{4}+7y=17.$$

Разьвязваючы гэтае раўнаньне з аднэй нявéдамай, знойдзем вартасьць y:

$$\begin{aligned} 15+25y+28y&=68 \\ 25y+28y&=68-15 \\ 53y&=53 \\ y&=1. \end{aligned}$$

Каб знайсьці вартасьць x, падставім знойдзеную вартасьць у пéршае раўнаньне:

$$\begin{aligned} 4x-5&=3 \\ 4x&=8 \\ x&=2. \end{aligned}$$

3. *Спосаб параўнаньня нявeдамых* грунтуецца на тым, што адну і тую самую нявéдамую з абодвух раўнаньняў выражаем за дапамогаю другой нявéдамай, і адтрыманыя вырази злучаем знакам роўнасьці.

Разьвяжам гэтым спосабам папярэдні ўклад раўнаньняў:

$$4x-5y=3 \quad \text{і} \quad 5x+7y=17.$$

Выразім спачатку нявéдамую x з пéршага раўнаньня цéраз y:

$$x=\frac{3+5y}{4},$$

а потым з другога раўнаньня:

$$x = \frac{17 - 7y}{5}.$$

Злучыўшы цяпе́р правыя староны гэтых раўнаньняў знакам роўнасьці, адтрымаем адно раўнаньне з аднэю няве́дамаю:

$$\frac{3 + 5y}{4} = \frac{17 - 7y}{5}$$

$$(3 + 5y)5 = (17 - 7y)4$$

$$15 + 25y = 68 - 28y$$

$$25y + 28y = 68 - 15$$

$$53y = 53$$

$$y = 1.$$

Вартасьць x можам адтрымаць, падстаўляючы знойдзены развязак y у адно з дадзеных раўнаньняў, або выражаючы вартасьць y з абодвух раўнаньняў це́раз x. Абодва спосабы дадуць аднолькавы рэзультат, а ласьне:

$$x = 2.$$

§ 67. Пры разьвязваньні адначасных раўнаньняў, можам карыстаць яшчэ з агульных формулаў, якія адтрымаем, калі разьвяжам уклад раўнаньняў з літарнымі коэфіцые́нтамі пры няве́дамых.

Разьвяжам уклад двух агульных раўнаньняў:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$\text{і} \quad a_2x + b_2y = c_2,$$

спосабам зраўнаньня коэфіцые́нтаў.

Множым пе́ршае раўнаньне на b_2, а другое на b_1; тады адтрымаем:

$$a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2$$

$$a_2b_1x + b_1b_2y = c_2b_1.$$

Цяпе́р адымем другое раўнаньне ад пе́ршага:

$$\begin{array}{c} a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \\ \underline{-a_2b_1x \mp b_1b_2y = -c_2b_1} \\ a_1b_2x - a_2b_1x = c_1b_2 - c_2b_1 \\ (a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1. \end{array}$$

Адкуль:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Каб знайсьці вартасьць y, множым пе́ршае раўнаньне на a_2, а другое — на a_1. Адтрымаем:

$$a_1a_2x + a_2b_1y = a_2c_1$$

$$a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2$$

Цяпе́р адымаем пе́ршае раўнаньне ад другога:

$$\begin{array}{c} -a_1a_2x \mp a_2b_1y = -a_2c_1 \\ \underline{a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2} \\ a_1b_2y - a_2b_1y = a_1c_2 - a_2c_1 \\ (a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1. \end{array}$$

Адкуль:

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Разважаючы склад дробаў, выражаючых вартасьці нявéдамых x і y, бачым, што абодва яны маюць аднолькавыя назоўнікі: $a_1 b_2 - a_2 b_1$, уложаныя з коэфіцыéнтаў пры x і y; лічнік вартасьці x (формула 1) адтрымаем з супольнага назоўніку цéраз замéну ў ім a_1 і a_2 на c_1 і c_2; лічнік вартасьці y (формула 2) адтрымаем, замяняючы ў супольным назоўніку b_2 і b_1 на c_2 і c_1.

(Лічнікі і назоўнікі ў абéдзьвюх формулах называюцца *вызначнікамі, або дэтэрмінантамі.* Тэорыя вызначнікаў мае вéльмі важнае значэньне ў матэматыцы і творыць спэцыяльны аддзéл вышэйшае альгэбры.)

Маючы агульныя формулы вартасьцяў нявéдамых, можам адразу падстаўляць у іх лікавыя вартасьці розных раўнаньняў і адтрымліваць разьвязкі.

Хай, напрыклад, трэба знайсьці разьвязкі адначасных раўнаньняў:

$$11x - 2y = 5$$
$$6x + 3y = 15.$$

Дзеля зручнасьці надпішам над кожным вéдамым чыслом адпавéдную літару:

$$\overset{a_1}{11}x - \overset{b_1}{2}y = \overset{c_1}{5}$$
$$\overset{a_2}{6}x + \overset{b_2}{3}y = \overset{c_2}{15}.$$

Падстаўляючы цяпéр у формулу

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

чыслы на мéйсца літараў, адтрымаем:

$$x = \frac{5 \cdot 3 - 15(-2)}{11 \cdot 3 - 6(-2)}$$
$$x = \frac{15 + 30}{33 + 12}$$
$$x = \frac{45}{45}$$
$$x = 1.$$

Падстаўляючы чыслы на мейсца літараў у формулу

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$

адтрымаем:

$$y = \frac{11 \cdot 15 - 6 \cdot 5}{11 \cdot 3 - 6 \cdot (-2)}$$
$$y = \frac{165 - 30}{33 + 12}$$
$$y = \frac{135}{45}; \quad y = 3.$$

Адначасныя раўнаньні пе́ршае ступе́ні з не́калькімі няведамымі.

§ 68. Агульны спосаб разьвязваньня ўкладу адначасных раўнаньняў з не́калькімі няве́дамымі грунтуецца на тым, што, паступова выключаючы з усіх раўнаньняў адну няве́дамую, потым другую і г. д., адтрымліваем уклады што-раз прасьце́йшыя і ўрэшці адно раўнаньне з аднэй няве́дамай, якое разьвязваем ве́дамым ужо нам спосабам.

Хай, напрыклад, маем уклад трох адначасных раўнаньняў:

$$3x+2y-4z=-1$$
$$4x-3y+3z=21$$
$$\text{і } 5x+4y-5z=1.$$

Разьвяжам яго спосабам зраўнаньня коэфіцые́нтаў (спосаб гэты найчасьцей ужываецца); бачым, што, найпрасьце́йшыя коэфіцые́нты — пры няве́дамай y; дзеля гэтага выключаем яе́ сьпярша з раўнаньня 1-га і 2-га; множым 1-е раўнаньне на 3, а 2-е на 2, і дадае́м іх адпаве́днымі старонамі:

$$\begin{array}{r}9x+6y-12z=-3\\ \underline{8x-6y+6z=42}\\ 17x \qquad -6z=39.\end{array}$$

Потым выключаем гэтую самую няве́дамую y з 1-га і 3-га раўнаньняў, памнажаючы 1-е на 2, і адымаючы ад яго 3-е раўнаньне:

$$\begin{array}{r}6x+4y-8z=-2\\ \underline{-5x\mp 4y\pm 5z=-1}\\ x \qquad -3z=-3.\end{array}$$

Такім чынам, адтрымалі два раўнаньні з дзьвёма няве́дамымі:

$$17x-6z=39$$
$$x-3z=-3.$$

Каб знайсьці вартасьць x, множым 2-е раўнаньне на 2 і адымаем яго ад пе́ршага раўнаньня:

$$\begin{array}{r}17x-6z=39\\ \underline{-2x\pm 6z=\pm 6}\\ 15x=45\\ x=3.\end{array}$$

Знойдвеную вартасьць x падстаўляем у раўнаньне $x-3z=-3$, адтрымаем:

$$\begin{array}{r}3-3z=-3\\ -3z=-6\\ 3z=6\\ z=2.\end{array}$$

Урэшці, падстаўляючы, напрыклад, у пе́ршае раўнаньне

$$3x+2y-4z=-1$$

знойдзеныя вартасьці x і z, будзем мець:

$$3\cdot 3+2y-4\cdot 2=-1$$
$$2y=-1-9+8$$
$$2y=-2$$
$$y=-1.$$

Гэты самы ўклад раўнаньняў можна разьвязваць і способам падстаноўкі, а так сама — способам параўнаньня нявéдамых.

Вылічэньні бываюць шмат прасьцéйшымі, калі ў якім-небудзь раўнаньні не хапае аднэй нявéдамай. Разьвязваньне пачынаем тады ад выключэньня гэтай нявéдамай з іншых раўнаньняў. Маючы, напрыклад, уклад:

$$4x-6y-2z=6$$
$$x+3y-2z=12$$
$$5x+4z=16,$$

выключаем y з раўнаньня 1-га й 2-га; адтрымліваем тады раўнаньне

$$x-z=5,$$

якое разам з раўнаньнем 3-ім дае ўклад двух раўнаньняў з дзьвёма нявéдамымі; разьвязваючы гэты новы ўклад, знойдзем: $x=4$, $z=-1$, а потым і $y=2$.

Калі маем уклад наступнай постаці:

$$\frac{3}{x}+\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=7$$
$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=12$$
$$\frac{3}{y}+\frac{2}{z}=12$$

дык, разьвязваючы яго звычайным способам, г. ё. зносячы назоўнікі, адтрымаем раўнаньні, якія налéжаць да вышэйшых ступéняў, бо складаюцца з множываў нявéдамых.

У гэткіх выпадках трэба стасаваць спэцыяльны способ, так званы, — *способ уводу дапаможных нявéдамых*:

Абазначым у даных раўнаньнях $\frac{1}{x}$ праз x, $\frac{1}{y}$ праз y і $\frac{1}{z}$ праз z; тады нашыя раўнаньні прыймуць выгляд:

$$3x_1+2y_1-4z_1=7$$
$$2x_1+y_1=12$$
$$3y_1+2z_1=12.$$

Разьвязваючы адтрыманыя раўнаньні, знойдзем:

$$x_1=5, \quad y_1=2 \quad \text{і} \quad z_1=3.$$

Значыцца:

$$\frac{1}{x}=5, \quad \text{г. е.} \quad x=\frac{1}{5}; \quad \frac{1}{y}=2, \quad \text{ці} \quad y=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{z}=3, \quad \text{ці} \quad z=\frac{1}{3}.$$

Уклад раўнаньняў:

$$x+y=a$$
$$y+z=b$$
$$x+z=c$$

найлягчэй разьвязваецца за дапамогаю складаньня ўсіх раўнаньняў; і праўда, склаўшы іх, адтрымаем:

$$2x+2y+2z=a+b+c$$
$$2(x+y+z)=a+b+c.$$

Адкуль:

$$x+y+z=\frac{a+b+c}{2}.$$

Адымаючы цяпе́р кожнае паасобнае раўнаньне ад адтрыманага, будзем мець:

$$z=\frac{a+b+c}{2}-a$$
$$x=\frac{a+b+c}{2}-b$$
$$y=\frac{a+b+c}{2}-c.$$

Прыклады.

Разьвязаць наступныя ўклады раўнаньняў:

502. $x+5y=47,\quad x+y=15$

503. $x+5y=35,\quad 3x+2y=27$

504. $14x-9y=24,\quad 7x-2y=17$

505. $3x-5y=13,\quad 2x+7y=81$

506. $12x+15y=8,\quad 16x+9y=7$

507. $\frac{x-y}{2}+y=15,\quad x-\frac{y+x}{3}=10$

508. $\frac{x+y}{3}+x=15,\quad y-\frac{y-x}{5}=6$

509. $\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=8;\quad \frac{x+y}{3}+\frac{x-y}{4}=11$

510. $x+2-\frac{5x+3y}{7}=y-\frac{9y+11}{14},\quad y+2-\frac{4y-2x}{2}=\frac{2y-5}{5}$

511. $\frac{3x-5y}{2}+3=\frac{2x+y}{5},\quad 8-\frac{x-2y}{4}=\frac{x}{2}+\frac{y}{3}$

512. $\frac{5}{x+4}=\frac{2}{y-1},\quad \frac{3}{x+2}=\frac{4}{y+1}$

513. $\frac{x}{y-2}=\frac{x+8}{y+1},\quad 5x-6y=10$

514. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{11}{30},\quad \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{30}$

515. $\frac{3}{x}+\frac{8}{y}=3, \quad \frac{15}{x}-\frac{4}{y}=4$

516. $\frac{18}{x-y}+\frac{20}{x+y}=5, \quad \frac{24}{x-y}-\frac{30}{x+y}=1$

517. $\frac{18}{3x-2y}+\frac{11}{2x-3y}=13, \quad \frac{27}{3x-2y}-\frac{2}{2x-3y}=1$

518. $2x+y=5, \quad x+3z=16, \quad 5y-z=10$

519. $x+y-z=17, \quad x+z-y=13, \quad y+z-x=7$

520. $x+2y+z=4, \quad 3x-5y+3z=1, \quad 2x+7y-z=8$

521. $2x-4y+9z=28, \quad 7x+3y-6z=-1, \quad 7x+9y-9z=5$

522. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=12, \quad \frac{1}{5}z-\frac{1}{6}y=4, \quad \frac{1}{12}x+\frac{1}{7}z=6$

523. $0{,}25x+0{,}125y=3{,}25; \quad 0{,}9z-0{,}3y=7{,}5; \quad 1{,}4x+1{,}2z=25{,}8$

524. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z=23; \quad \frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z=29; \quad \frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z=28$

525. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1\frac{2}{3}; \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=2\frac{2}{15}; \quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\frac{2}{15}$

526. $2xz=3(x-z); \quad 5xy=6(x-y); \quad 17yz=6(z+y).$

Разьвязваньне заданьняў за дапамогаю ўкладу раўнаньняў пе́ршае ступе́ні.

§ 69. *Прыклад I.*

Няхай маем наступную задачу:

Куплена 4 аршыны паркалю й 5 аршынаў сукна за 23 рублі. Пачом плацілі за аршын паркалю й за аршын сукна, калі 8 аршынаў паркалю цэняцца на 7 рублёў даражэй за 3 аршыны сукна?

Разбор. — Хай 1 аршын паркалю каштуе x рублёў, а 1 аршын сукна y рублёў; у такім разе 4 аршыны паркалю будуць каштаваць $4x$ рублёў, а 5 аршынаў сукна $5y$ рублёў, але разам яны каштуюць 23 рублі, значыцца:

$$4x+5y=23.$$

З другога боку: 8 аршынаў паркалю каштуюць $8x$ рублёў і 3 аршыны сукна $3y$ рублёў, а ве́даем, што гэтыя 8 аршынаў паркалю даражэй за 3 аршыны сукна на 7 рублёў, значыцца:

$$8x-3y=7.$$

Разьвязваючы ўклад адтрыманых раўнаньняў, знойдзем: $x=2$, $y=3$, г. ё. 1 аршын паркалю каштуе 2 рублі, а 1 аршын сукна 3 рублі.

Прыклад II.

Зробім яшчэ гэткую задачу:

Тры мяшкі кавы важуць разам 250 фунтаў. Пе́ршы мяшок з другім на 10 фунтаў лягчэй за трэці, а другі мяшок з трэцім на 110 фунтаў цяжэй за пе́ршы. Колькі важыць кожны мяшок кавы?

Разбор. — Хай пе́ршы мяшок важыць x фунтаў, другі y фунтаў і трэці z фунтаў. Тады:

$$x+y+z=250\ .$$

(бо ўсе́ мяшкі разам, як ве́дама з задачы, важуць 250 фунтаў.)

Пе́ршы мяшок з другім лягчэй за трэці на 10 фунтаў, значыцца:

$$x+y=z-10.$$

Урэшці, ве́даем, што другі мяшок з трэцім цяжэй за пе́ршы на 110 фунтаў, значыцца:

$$y+z=x+110.$$

Адтрымалі такім чынам тры раўнаньні з трома няве́дамымі:

$$x+y+z=250$$

$$x+y-z=-10$$

$$\text{і}\quad y+z-x=110.$$

Разьвязаўшы іх, знойдзем: $x=70$, $y=50$, $z=130$, г. ё. пе́ршы мяшок важыць 70 фунтаў, другі — 50 фунтаў й трэці — 130 ф.

Заданьні.

527. Два чле́ны ў суме даюць 47. Калі пе́ршае падзелім на другое дык у дзе́лі адтрымаем 2, а ў астачы 5. Знайсьці гэтыя чыслы.

528. У дзьвюх кішэнях знаходзіцца 140 рублёў. Калі з пе́ршай кішэні пераложым у другую 15 рублёў, тады ў абе́дзьвюх кішэнях будзе пароўну. Колькі рублёў у кожнай?

529. У двух чопах знаходзіцца піва. Калі з аднаго пераліём у другі 6 вядзёр, тады ў абаіх чопах піва будзе пароўну; калі пераліём 4 вядры з другога ў пе́ршы, тады пе́ршы чоп будзе зьмяшчаць піва ў 2 разы больш за другі. Колькі піва ў кожным?

530. За 2 аршыны чырвонага сукна і 3 аршыны чорнага сукна заплачана 27 рублёў; а калі купім 4 аршыны чырвонага і 5 аршынаў чорнага сукна, дык трэба будзе заплаціць 49 рублёў. Колькі каштуе 1 аршын чырвонага й 1 аршын чорнага сукна?

531. Знайсьці дроб, які будзе роўным $\frac{1}{2}$, калі да яго лічніку й назоўніку дададзём па 3, і які будзе роўным $\frac{1}{3}$, калі ад яго назоўніку адымем 1.

532. За пуд цукру і фунт гарбаты заплачана 9 р. 20 к. Калі-ж цана цукру ўзрасла на 5%, а цана гарбаты зьме́ншылася на 10%, дык за такую самую колькасьць тавару заплачана было на 1 капе́йку больш. Колькі каштаваў спачатку 1 пуд цукру й 1 фунт гарбаты?

533. Калі купе́ц прадасьць свой тавар па 1 р. 80 к. за пуд, дык адтрымае зыску 8%; калі-ж прадасьць пуд па 1 р. 50 к., дык будзе мець страты 25 рублёў. Колькі было пудоў тавару і колькі купе́ц заплаціў сам за ўве́сь свой тавар?

534. Знайсьці чысло, якое, пры дзяленьні на 3 і на 5, дае́ ў астачы 2 і 4; прычым, калі да пе́ршай дзе́лі (ад гэтага дзяле́ньня) дададзём адзінку, дык сума будзе ў 2 разы больш за другую дзель.

535. Сума цыфраў двохзначнага чысла раўняецца 9. Калі-ж пераставім цыфры гэтага чысла, дык адтрыманае чысло будзе роўным $\frac{4}{7}$ першапачатковага чысла. Знайсьці гэтае чысло.

536. Зьмяшалі 2 гатункі гарбаты; ўсяго выйшла 8 фунтаў па 3 р. 50 к. за фунт. Колькі ўзялі фунтаў кожнага гатунку, калі 7 фунтаў першага й 10 фунтаў другога гатунку каштуюць 60 рублёў, а $\frac{1}{2}$ фунта пе́ршага й $\frac{1}{4}$ фунта другога гатунку каштуюць 2 р. 80 к?

537. У двух басэйнах знаходзіцца вада. Каб у абодвух басэйнах было вады пароўну, трэба пераліць з пе́ршага ў другі толькі, колькі там было; потым з другога пераліць у першы толькі, колькі там асталося, і, ўрэшці, ізноў з пе́ршага ў другі толькі, колькі ў другім асталося. Тады ў кожным басэйне будзе па 64 вядры. Колькі было ў іх спачатку?

538. Падарожны выбраўся з аднаго мейсца ў другое. Калі-б ён праходзіў у гадзіну на 1 вярсту менш, тады-б яму трэба было йсьці на 6 гадз. больш, як звычайна; а калі-б ён праходзіў у гадзіну на 2 вярсты больш, дык прайшоў-бы ўсю дарогу ў $\frac{2}{3}$ гэтага часу. У які час падарожны праходзіць усю дарогу і па колькі вёрст у гадзіну?

539. Не́калькім наймітам даручылі пэўную работу. Калі-б іх было на 3 менш, тады-б ім трэба было працаваць на 2 дні больш; а калі-б іх было на 4 чалаве́кі больш, дык яны працавалі-б на 2 дні менш. Колькі было наймітаў й колькі дзён яны працавалі?

540. Два цягнікі знаходзяцца на адле́гласьці 340 вёрст. Калі пе́ршы выйдзе на 5 гадз. раней за другі, тады яны сустрэнуцца праз 3 гадз. пасьля выхаду другога. Калі-ж другі цягнік выйдзе на 5 гадз. раней за пе́ршага, дык яны сустрэнуцца праз 3 гадз. 20 мін. пасьля выхаду пе́ршага. Колькі вёрст у гадзіну праходзіць кожны цягнік?

541. Падзяліць чысло 226 на такія тры часткі, каб другая частка была на 7 больш за пе́ршую і на 22 больш за трэцюю.

542. Знайсьці тры чыслы, калі ве́дама, што пе́ршае чысло разам з $\frac{1}{2}$ другога, другое разам з $\frac{1}{3}$ трэцяга й трэцяе разам з $\frac{1}{4}$ пе́ршага даюць па 1000.

543. У трох кошыках знаходзяцца яблыкі. У пе́ршым на 2 ябл. больш, як у другім, у другім у 3 разы, а ў трэцім на 4 менш, як у двух іншых разам. Колькі яблыкаў у кожным кошыку?

544. Знайсьці чысло, якое, пры дзяленьні на 4, 7 і 11, дае́ астачы 2, 1 і 6; пры гэтым сума дзеляў на 2 адзінкі ме́ншая ад паловы няве́дамага чысла.

545. Тры бабы ме́лі разам 90 яе́ц, якія яны прадавалі па аднальковай цане́. Пе́ршая прадала на 98 кап., другая на 56 кап. і трэцяя на 14 кап., пасьля чаго ў кожнай асталося яшчэ па 2 яйцы. Колькі яе́ц ме́ла кожная?

546. Сума цыфраў трохзначнага чысла раўняецца 17. Цыфра сотняў у 2 разы больш за цыфру адзінак. Калі ад шуканага чысла адняць 396, дык адтрымаем чысло, якое складаецца з тых самых цыфраў, толькі напісаных у адваротным парадку. Знайсьці гэтае чысло.

Дасьле́даваньне раўнаньнаў пе́ршае ступе́ні з аднэй няве́дамай.

§ 70. Дасьле́даваньне раўнаньняў мае мэтай разгле́джаньне варункаў, пры якіх разьвязваньне заданьня ёсьць магчымым ці немагчымым, а так сама — азначэньне ўсіх вартасьцяў няве́дамых чыслаў у зале́жнасьці ад зьме́ны ў раўнаньні ве́дамых чыслаў.

Дзеля прыкладу возьмем наступную задачу аб двух капіталах:

Два капіталы аддадзены на працэнты. Першы капітал зьмяшчае a *рублёў і дае́ ў год* b *рублёў даходу; другі капітал зьмяшчае* c *рублёў* *і дае ў год d рублёў даходу. За колькі гадоў абодва капіталы будуць роўнымі?*

Дасьле́даваньне. — Калі абазначым шуканую колькасьць гадоў праз x, тады даход з пе́ршага капіталу за гэтыя x гадоў будзе bx рублёў і пе́ршы капітал, разам з зыскам, будзе зьмяшчаць $a+bx$ рублёў; за гэты час даход з другога капіталу будзе dx рублёў і другі капітал, разам з зыскам, будзе зьмяшчаць $c+dx$ рублёў.

Дзеля таго, што абодва капіталы зраўняюцца, дык:

$$a+bx=c+dx,$$

разьвязваючы гэтае раўнаньне, адтрымаем:

$$x=\frac{c-a}{b-d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

Даючы ў гэтай формуле чыслам c, a, b і d адвольныя (якія-хочаш) вартасьці, — будзем адтрымліваць адпаве́дныя вартасьці няве́дамай x, прычым могуць быць наступныя выпадкі:

1) Калі $c>a$ і $b>d$, або $c<a$ і $b<d$, тады x ёсьць вялічыня *дадатная* (цэлая або дробавая, ў залежнасьці ад таго, ці лічнік дзе́ліцца без астачы на назоўнік, ці не).

І праўда, няхай, напрыклад, пе́ршы капітал ёсьць роўны 11000 руб. і дае́ ў год даходу 2500 рублёў, а другі капітал = 17000 руб. і дае́ ў год даходу 2000 рублёў.

Падстаўляючы гэтыя лікавыя вартасьці на ме́йсца літараў у раўнаньне (А), адтрымаем:

$$x=\frac{17000-11000}{2500-2000}, \qquad \text{ці-тое:} \qquad x=12.$$

Адсюль вынікае, што капіталы зраўняюцца праз 12 гадоў.

Не заўсёды, аднолька-ж, дадатная вартасьць няве́дамай адказвае варункам заданьня:

Прыклад.

На пе́ршай станцыі выйшла з вагону $\frac{2}{5}$ усяе́ колькасьці падарожных, на другой 3 асобы а рэшта, ў ліку 8 асоб, пае́хала дале́й. Колькі падарожных было спачатку?

Дасьледаваньне.

Абазначым першапачатковую колькасьць падарожных у вагоне праз x, адтрымаем раўнаньне:

$$\tfrac{2}{5}x+3+8=x,$$

якога разьвязак $x=18\frac{1}{3}$.

Ня гле́дзячы на тое, што адтрымалі адказ дадатны, разьвязаньне, аднолька-ж, не адказвае варункам заданьня, дзеля таго, што чысло асобаў павінна быць цэлым. — Пры ўкладаньні задачы на гэта не зьвярнулі ўвагі.

2) Калі ў раўнаньні (А) $c>a$, але $b<d$, або $c<a$, але $b>d$, тады x мае *адымную* вартасьць.

Калі, напрыклад, у задачы аб двух капіталах пе́ршы капітал ёсьць 23000 руб. і дае́ ў год даходу 5000 руб., а другі капітал ёсьць 15000 руб.

і дае́ ў год даходу 3000 руб., тады, падстаўляючы даныя вартасьці ў раўнаньне (A), будзем мець:

$$x=\frac{15000-23000}{5000-3000}$$

адкуль:

$$x=-4.$$

Адымная вартасьць няве́дамай даводзіць, што дадзеная задача кепска ўложана. — Сапраўды, з самага заданьня бачым, што пе́ршы капітал — больш за другі і, апрача таго, дае́ й зыску больш, значыцца ён ніколі не зраўняецца з другім капіталам:

Адымнае чысло гадоў паказвае, што трэба зьмяніць задачу й запытаць: колькі гадоў *назад* капіталы былі роўнымі?

За дапамогаю вылічэньняў лёгка можам пераканацца, што гэта было 4 гады назад, бо тады абодва капіталы зьмяшчалі па 3000 рублёў.

Разьвяжам яшчэ наступнае заданьне:

Бацька мае 55 гадоў, а сын 23 гады; за колькі гадоў бацька будзе ў 3 разы старэйшы за сына?

Дасьледаваньне.

Хай гэта будзе за x гадоў, тады бацька будзе мець: $(55+x)$ гадоў, а сын $(23+x)$ гадоў. Дзеля таго, што колькасьць гадоў бацькі павінна быць у тры разы больш за колькасьць гадоў сына, значыцца:

$$55+x=(23+x)3$$

адкуль:

$$x=-7.$$

Адымная вартасьць няве́дамай ізноў паказвае, што заданьне трэба зьмяніць і запытаць: колькі гадоў *назад* бацька быў у 3 разы старэйшы за сына? Лікавая вартасьць шуканага числа 7 паказвае, што гэта было 7 гадоў назад; і праўда, бацька тады меў 46 гадоў, а сын 16 гадоў.

3) Калі ў раўнаньні

$$x=\frac{c-a}{b-d}$$

$c=a$, але $b\neq d$, тады $x=\frac{0}{b-d}$

ці-тое:

$$x=0.$$

Ве́рнемся йзноў да нашага заданьня аб двух капіталах. Хай кожны капітал зьмяшчае па 12000 рублёў, але пе́ршы дае́ ў год 3000 рублёў зыску, а другі 2000 рублёў. На пытаньне, за колькі гадоў капіталы будуць роўнымі, ўложым папярэднім спосабам раўнаньне, з якога знойдзем, што

$$x=\frac{12000-12000}{3000-2000}$$

адкуль:

$$x=\frac{0}{1000},$$

ці-тое:

$$x=0.$$

Вартасьць нявéдамай O паказвае, што капіталы ёсьць роўныя ў даны момант, а ў кожным іншым часе будуць розныя, бо зыскі ад капіталаў — розныя.

Прыклад.

Зьмяшалі гарбату двух гатункаў: па 6 рублёў за фунт і па 5 рублёў за фунт. Колькі трэба ўзяць фунтаў кожнага гатунку, каб адтрымаць 14 фунтаў мяшанае гарбаты, ўсяго на 70 рублёў?

Дасьледаваньне.

Хай пéршага гатунку ўзялі x фунтаў, тады другога будзе $(14-x)$ фунтаў; гарбата пéршага гатунку будзе каштаваць $6x$ рублёў, а гарбата другога гатунку $(14-x)5$ рублёў. Цана ўсяé мяшанае гарбаты будзе $6x+(14-x)5$; гэтая цана, згодна задачы, павінна быць роўная 70 руб., значыцца:

$$6x+(14-x)5=70$$
$$6x+70-5x=70$$

адкуль: $x=0$.

Разьвязак гэты паказвае, што ў склад мешаніны гарбата пéршага гатунку зусім ня ўвойдзе, бо 14 фунтаў самога толькі другога гатунку каштуюць 70 рублёў.

4) Калі ў раўнаньні:

$$x=\frac{c-a}{b-d}$$

$$c=a \quad \text{і} \quad b=d, \quad \text{тады} \quad x=\frac{0}{0}.$$

Неазначаная вартасьць нявéдамай паказвае, што гэтае нявéдамая ў задачы можа быць усялякім чыслом, якое толькі захочам (адвольным чыслом).

І праўда, калі ў задачы аб двух капіталах — і капіталы і даходы будуць роўнымі паміж сабой, напр., кожны капітал будзе зьмяшчаць па 8000 рублёў, і зыск ад кожнага капіталу ў год будзе роўны 1500 руб., тады:

$$x=\frac{8000-8000}{1500-1500}, \quad \text{ці-тое:} \quad x=\frac{0}{0}.$$

Рэзультат гэты можна-б знайсьці й за дапамогаю звычайнага разважаньня, бо, калі ў даны момант капіталы — роўныя й даюць аднолькавыя даходы, дык і за два, за тры гады і г. д. — так сама будуць роўнымі.

Прыклад.

Бацька мае 40 гадоў, а сын 10 гадоў. За колькі гадоў бацька будзе старэйшы за сына на 30 гадоў?

Дасьледаваньне.

Хай гэта будзе за x гадоў. Тады бацьку будзе $(40+x)$ гадоў, а сыну $(10+x)$ гадоў, і значыцца:

$$(40+x)=(10+x)+30$$
$$40+x=10+x+30$$
$$-x=10+30-40$$
$$x(1-1)=0.$$

адкуль:

$$x=\frac{0}{0}.$$

Адтрыманая вартасьць нявéдамай паказвае, што разьвязкам задачы можа быць усялякае чысло.

5) Калі, ўрэшці, ў раўнаньні

$$x = \frac{c - a}{b - d}$$

$$c \neq a, \qquad \text{але} \qquad b = d$$

тады: $$x = \frac{c - a}{0}, \qquad \text{ці-тое:} \qquad x = \infty.$$

Бяскрайная вартасьць нявéдамай паказвае, што варункі задачы немагчымы для разьвязваньня.

Хай, напрыклад, у заданьні аб двух капіталах пéршы капітал зьмяшчае 15000 рублёў, а другі 20000 рублёў, даходы-ж ад абодвух капіталаў хай будуць роўныя, напрыклад, па 4000 рубл. ў год.

Тады:

$$x = \frac{20000 - 15000}{4000 - 4000}$$

г. ё.: $$x = \frac{5000}{0}, \qquad \text{або} \qquad x = \infty.$$

Адтрыманая вартасьць нявéдамай даводзіць, што капіталы ніколі ня будуць роўнымі.

Прыклад.

Якое чысло трэба дадаць да лічніку й назоўніку дробу $\frac{5}{8}$, каб адтрымаць 1?

Дасьледаваньне.

Хай шуканае чысло будзе x.

Тады:

$$\frac{5 + x}{8 + x} = 1$$

$$5 + x = 8 + x$$

$$x - x = 8 - 5$$

$$x(1 - 1) = 3$$

$$0 \cdot x = 3$$

$$x = \frac{3}{0}, \qquad \text{або} \qquad x = \infty.$$

Разьвязак гэты паказвае, што цéраз дадаваньне аднальковага чысла да лічніка й назоўніка дробу $\frac{5}{8}$, ня можам яго зьмяніць на 1, бо няма чысла, якое-б адказвала варункам заданьня.

Заданьні.

У наступных заданьнях азначыць вартасьць нявéдамай:

547. Знайсьці двохзначнае чысло, ў якім цыфра дзесяткаў у 3 разы больш за цыфру адзінак, а розьніца паміж цыфрамі ёсьць 5.

548. Бацька мае 40 гадоў, а сын 10 гадоў. За колькі гадоў бацька будзе ў 7 разоў старэйшы за сына?

549. Бацька мае 52 гады, а сын 13 гадоў. За колькі гадоў бацька будзе ў 4 разы старэйшы за сына?

550. Калі няве́дамае чысло памножым на 3, ад множыва адымем 6 і астачу падзе́лім на 3, дык адтрымаем чысло, на 2 адзінкі ме́ншае ад няве́дамага. Знайсьці няве́дамае чысло.

551. У колькі гадоў даўжнік выплаціць 2500 рублёў, пазычаныя па 6%, калі што-год будзе плаціць па 150 рублёў (Працэнты звычайныя).

Дасьле́даваньне ўкладу двух раўнаньняў I-е ступе́ні з дзьвёма няве́дамымі.

§ 71. Разьвязваючы ўклад двух адначасных раўнаньняў 1-е ступе́ні з дзьвёма няве́дамымі:

$$a_1x + b_1y = c^1$$

$$\text{і} \quad a_2x + b^2y = c_2.$$

адтрымліваем: (§ 67).

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Пры дасьле́даваньні гэтага ўкладу разгле́дзім наступныя 3 выпадкі:

1) *Супольны назоўнік*: $a_1b_2 - a_2b_1$ *ня ёсьць роўны нулю.* У гэтым выпадку кожны разьвязак мае вартасьць дадатную адымную, або роўную нулю:

а) дадатная вартасьць дае́ найчасьце́й беспасьрэдні адказ на пытаньне ў задачы:

б) адымная вартасьць азначае немагчымасьць разьвязаньня задачы, або паказвае, што варункі заданьня няве́дамай з супраціўным значэньнем,

в) вартасьць нуль адтрымаем тады, калі лічнік дробу, выражаючага вартасьць адпаве́днай няве́дамай, ёсьць роўны нулю. Абодва разьвязкі x і y могуць быць роўнымі нулю толькі пад тым варункам, калі $c_1 = 0$ і $c_2 = 0$: бо тады

$$x = \frac{0}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad \text{г. ё.:} \quad x = 0$$

$$y = \frac{0}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad \text{г. ё.:} \quad y = 0.$$

2) *Супольны назоўнік* $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ але *лічнікі ня ёсьць роўныя нулю*:

Тады:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{0}, \quad \text{г. ё.:} \quad x = \infty$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{0}, \quad \text{г. ё.:} \quad y = \infty.$$

Каб уявіць сабе прыроду гэтых разьвязкаў зраўнаем у раўнаньнях (1) і (2) лікавыя коэфіцыенты пры аднэй нявéдамай, напрыклад, пры x, памнажаючы пéршае раўнаньне праз b_2, а другое раўнаньне праз b_1, адтрымаем тады:

$$a_1b_2x+b_1b_2y=c_1b_2$$
$$a_2b_1x+b_1b_2y=b_1c_2.$$

У даны момант мы разглядаем выпадак, калі $a_1b_2-a_2b_1=0$, г. ё., калі $a_1b_2=a_2b_1$; значыцца, лéвыя староны апошніх раўнаньняў — роўныя паміж сабой; але правыя староны: c_1b_2 і b_1c_2 — ня роўныя, бо $c_1b_2-c_2b_1\neq 0$.

Адтрыманая недарэчнасьць паказвае, што раўнаньні нашыя — не адначасныя.

Значыцца, калі пры разьвязваньні ўкладу двух раўнаньняў з дзьвёма нявéдамымі, адтрымаем бяскрайна-вялікія разьвязкі, дык можам сказаць, што варункі заданьняў — немагчымы для разьвязаньня.

3. *Супольны назоўнік*: $a_1b_2-a_2b_1$ і *адзін з лічнікаў ёсьць роўны нулю*, напрыклад,

$$c_1b_2-c_2b_1=0 \qquad \text{або} \qquad c_1b_2=c_2b_1.$$

Адкуль:

$$x=\tfrac{0}{0}.$$

Падзяліўшы роўнасьць: $a_1b_2=a_2b_1$ на роўнасьць $c_1b_2=c_2b_1$ адпавéднымі старонамі, адтрымаем:

$$\frac{a_1b_2}{c_1b_2}=\frac{a_2b_1}{c_2b_1} \qquad \text{ці-тое} \qquad \frac{a_1}{c_1}=\frac{a_2}{c_2};$$

адкуль $a_1c_2=c_1a_2$, а, значыцца, $a_1c_2-c_1a_2=0$, г. : ё. лічнік дробу, выражаючага вартасьць нявéдамай y так сама ёсьць роўны нулю, дзеля чаго:

$$y=\tfrac{0}{0}.$$

Адкуль вынікае, што *калі адзін з разьвязкаў укладу двух раўнаньняў з дзьвёма нявéдамымі ёсьць неазначаны, дык і другі разьвязак мае неазначаную вартасьць.*

Адказы.

1. $x=a-b;\ x=228$
2. $x=a+(a-b);\ x=909$
3. $x=ab=936$
4. $x=(b-a)c=928$
5. $x=\dfrac{a-bc}{12-b}=76$
6. $x=\dfrac{a\cdot b}{c}=20$
7. $x=\dfrac{a\cdot d}{b+c+d}=425$
8. $x=\dfrac{a\cdot b+c\cdot d}{b+d}=2\frac{1}{4}$
9. $3ab-2cd$
10. a^2b+ab^2
11. $4a^2b^3$
12. $\dfrac{a^3-b^2}{4c^3}$
13. $2ab^2c-\frac{3}{2}bc$
14. m^a
15. $3y^2+\frac{2}{3}yx$

16. $\frac{3x^2y}{2z^2}$
17. $\frac{3m^4}{4f^3}$
18. $ab+ab+ab+ab$
19. $b+b+b+c+c$
20. $a^2+a^2-bc-bc-bc$
21. $\frac{a^2b}{3}+\frac{a^2b}{3}$
22. $a^3b^2+a^3b^2-a^5b^3-a^5b^3-a^5b^3$
23. $aab+aab+aab$
24. $aaabbc+aaabbc$
25. $\frac{aaaccc}{7}+\frac{aaaccc}{7}+\frac{aaaccc}{7}+$
$+\frac{aaaccc}{7}$
26. $aaa+aaa+bb$
27. $\frac{aab}{5}+\frac{aab}{5}+\frac{aab}{5}+\frac{aab}{5}-$
$-\frac{abb}{3}-\frac{abb}{3}$
28. $\frac{xxx+xxx+xxx-yyy-yyy-yyy}{aa+aa+bb+bb+bb+bb}$
29. $2n$
30. $2n\pm1$
31. $2n+1$
32. $100c+10b+a$
33. $100a+b$
34. a^2-b^2
35. p^3+q^3
36. $3a^2b^3$
37. $a^m+b^m+c^m+d^m$
38. $a^2-b^2=x^3+y^3$
39. $a+b^2=c^3-d$
40. $a+b>a-b$
41. $a^5+b^5>a^3+b^3$
42. $a(b+c)$
43. $(a+b)(a-b)$
44. $(a+b)^2$
45. $2(a-b)^2$
46. $\frac{q+r}{q-r}$
47. $3(ab)^2$
48. $3(a-b)^3$
49. $[3(x+y)]^3$
50. $(3ab)^2$
51. $(p+q)^2\cdot(p^2+q^2)$
52. 2
53. -15
54. $-1\frac{1}{4}$
55. $\frac{2}{5}$
56. $-1\frac{3}{13}$
57. $\frac{1}{9}$
58. $-1\frac{7}{24}$
59. $0{,}303$
60. $0{,}145$
61. 5
62. -4
63. $1\frac{1}{3}$
64. -16
65. 16
66. -54
67. 19
68. 31
69. -19
70. -103
71. 25
72. -21
73. -91
74. -123
75. -137
76. -5
77. 7
78. 2
79. -14
80. -6
81. $10{,}4$
82. $-5{,}8$
83. $0{,}087$
84. $-2\frac{3}{10}$
85. $1{,}23$
86. 6
87. -24
88. 1

89. 13
90. $1\frac{3}{4}$
91. 1
92. $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$
93. $+12$
94. $-1\frac{1}{5}$
95. $+2\frac{2}{5}$
96. $+10$
97. $+3$
98. -2
99. $-0{,}12$
100. $+0{,}3$
101. $+8$
102. -105
103. $+0{,}03$
104. -4
105. -48
106. $+6\frac{1}{4}$
107. -14
108. $30mp$
109. -2
110. -4
111. $+2$
112. $+1\frac{3}{4}$
113. $-1\frac{1}{9}$
114. $+4$
115. $-1\frac{1}{9}$
116. $-1\frac{1}{3}$
117. -50
118. $0{,}2$
119. 5
120. $0{,}2$
121. $-1\frac{10}{11}$
122. $0{,}2$
123. -2
124. $-12\frac{1}{2}$
125. 2
126. 28
127. $5ab$
128. $-11a^3$
129. $4a^2bc$
130. $5a^3$
131. $-21a^2b^2$
132. $-7a^3b$
133. $a^3b + 4ac^2 - 6bc$
134. 0
135. $-\frac{11}{6}a^2bc - \frac{1}{4}abc^2$
136. $4a^3 - 3a^2b - 13ab^2$
137. by^2
138. $-6\frac{1}{4}ax - 2\frac{3}{4}by$
139. $-2a(x+y)^5$
140. $-7b^2(x-y)^4$
141. $-\frac{1}{2}a^5 + ab^2 - 2a^7b - 6\frac{2}{8}c^2$
142. $-2y$
143. $-6ab^2$
144. $4\frac{7}{10}a^2$
145. $-0{,}45a^3x$
146. $4b^2x - bx^2 - cx$
147. $7{,}4mp - 3{,}4am + 4{,}3bm$
148. $5a^2b - 8ab^2$
149. $23a + b + 3c + 14d$
150. $a^4 + a^2b^2 + b^4 + b^3 - ab^3$
151. $23ab^4x + 6b^3c - 16ab^2 - 11bc$
152. $23bm^3 - 10cm - 16$
153. $-\frac{5}{6}a^2 - 1\frac{13}{20}ab + 1\frac{1}{6}b^2 - \frac{2}{5}a^2b^2$
154. $2a^2$
155. $-11b^2c$
156. $13a^3b^4$
157. $5n^2 + 5m^3$
158. $1\frac{3}{5}x - \frac{6}{7}y$
159. $8a - 7{,}9b$
160. $4ab$
161. $5x^2 + 3xy - 5y^2$
162. $-8a^3b - 8ab^3$
163. $\frac{1}{2}x^2 + 4ax - \frac{11}{6}a^2$
164. $14ax^3 + 2ax^2 + 13$
165. $5{,}35a + 17\frac{1}{60}b - 24\frac{3}{4}c + 0{,}02d$
166. $b + 2cx - 2d$
167. $d - bc$
168. $a + b - c + d$
169. $a - b + c - d - k$
170. $-8m$
171. $7a - 5b - 6c$
172. $5b + a + 3b^2$

173. $3x - y + z$
174. $6x^2 + 8xy$
175. $2y$
176. $a - b + (c - d) - (e - f)$
177. $+(5a^3) - (7a^2x + 2ax^2) +$
$+(-4x^3)$
178. m^{13}
179. x^{5n}
180. x^{11}
181. $2{,}1a^7x^3y^2$
182. $\frac{1}{4}m^2z^6$
183. $0{,}9a^5m^7$
184. $\frac{5}{16}a^3b^7x^6$
185. $-\frac{21}{8}x^5y$
186. $-28a^{n+1}b^{n+3}$
187. $-12a^{m+3}b^{4+p}$
188. $-a^{m+p}b^{n+r}$
189. $-0{,}48m^6p^6$
190. $6a - 12b + 3c$
191. $55ak + 20bk - 15ck + 5dk$
192. $8a^3b^3 - 20a^2b^4 + 28ab^5$
193. $14a^5x^4 + 35a^7x^6 - 28a^6x^3$
194. $14{,}7a^2x^4 + 1{,}575a^3x^2 - 0{,}63a^2x$
195. $-10x^n + 6x^{n-1} - 2x$
196. $-12a^2x^6 + 8a^3x^5 - 20a^4x^4 +$
$+4a^2x^3$
197. $-12a^{2m+4}x^{p+3} + 8a^{2m+2}x^4 -$
$-20a^{2m}x^3$
198. $3a^3b^3c^3d^3 - \frac{1}{2}a^6b^2c^2d^2 +$
$+\frac{3}{5}a^5b^5cd - \frac{9}{10}a^4b^4c^4$
199. $5a^2b^3 - 10ab^2 + 5ab$
200. $a^2 + 2a - 8$
201. $6ac - 8bc + 15ad - 20bd$
202. $6a^4 + 5a^2b^2 - 6b^4$
203. $10b^5 - 9b^4c - 9b^2c^3 - 13b^3c^2 +$
$+10bc^4 - 2c^5$
204. $10a^5 - 9a^4x + 9a^3x^2 - 3a^2x^3 +$
$+ax^4$
205. $16x^4 - 32x^3y + 16x^2y^2 -$
$-8xy^3 + 3y^4$
206. $a^5 + b^5$
207. $a^5 + 2a^4 + 4a^3 + 7a^2 - 11a +$
$+3$
208. $3a^4 + 12x^4$
209. $3x^7 - 7x^6 - 3x^5 + 10x^3 - 14x^2$
$+4x$
210. $a^6 - 2a^3 + 1$
211. $x^6 - 10x^5y + 29x^4y^2 -$
$-24x^3y^3 - 12x^2y^4 +$
$+22xy^5 - 4y^6$
212. $2a^{10} - 2a^5b^3 + \frac{1}{2}b^6 - \frac{1}{2}$
213. $\dfrac{x^6}{16} - \dfrac{x^4}{9} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{4}$
214. $1 + \dfrac{5x^2}{12} - \dfrac{5x^4}{36} - \dfrac{x^6}{16}$
215. $0{,}002a^3 - 0{,}1994a^5 + 0{,}09a^7 -$
$-1{,}012a^9 + 0{,}2a^{11}$
216. $0{,}6a^6b^{5p+2} + 29{,}97a^4b^{4p} +$
$+75b^{2p-4}$
217. $9x^2 + 30xy + 25y^2$
218. $49c^2 - 56cd + 16d^2$
219. $1 - a^2$
220. $4x^4 + 20x^3 + 25x^2$
221. $81m^6 - 90m^3p^2n + 25p^4n^2$
222. $25b^4n^{12} - \frac{4}{3}b^2n^6 + \frac{4}{225}$
223. $9a^2b^2 - 1$
224. $b^2x^8 - 36$
225. $\frac{9}{16}a^{2n-4}b^{2p} + b^2 +$
$+\frac{4}{9}a^{4-2n}b^{4-2p}$
226. $0{,}25a^{4r-4}b^2 - 1\frac{24}{25}b^{2p-6}c^4$
227. $a^4 - x^4$
228. $81 - 18x^2 + x^4$
229. $x^2 + 2xy + y^2 - z^2$
230. $4y^4 - 9y^2 - 24y - 16$
231. $a^4 - 16$
232. $4x^2 - y^2 + 6xyz - 9z^2$
233. $125 + 75a + 15a^2 + a^3$
234. $a^3 - 15a^2 + 75a - 125$
235. $343d^6 - 294d^4 + 84d^2 - 8$
236. $m^6n^3 + 3m^4n^4p + 3m^2n^5p^2 +$
$+p^3n^6$
237. $27 + 270x^5 + 900x^{10} + 1000x^{15}$
238. $0{,}001a^3 - 0{,}15a^2n^3 + 7{,}5an^6 -$
$-125n^9$
239. 441

240. 7569.
241. 24 389
242. 1551
243. 384
244. 9991
245. a^n
246. $-a$
247. 5
248. $-3ac$
249. 2
250. $-x$
251. $\frac{1}{2}nx$
252. $\frac{1}{4}an^2x^5$
253. $8n^6$
254. $0{,}2mx^8$
255. $10n^3(x+y)^5$
256. $-\frac{3}{2}a^7b^{m-5}c^n$
257. $-8b^{m-2}d^2$
258. $\frac{3}{4}a^3(x+2)^n$
259. $2c^6d^4h^{2n}$
260. $-0{,}2bc^2$
261. $9a^{3n}b^rd^{p-3}$
262. $\frac{ab}{cd}$
263. $\frac{b}{a}$
264. $\frac{a}{bn^2}$
265. $\frac{2}{x}$
266. $\frac{x^2}{2b}$
267. $\frac{9a^2}{2z^3}$
268. $\frac{3a^2}{4bc^2}$
269. $\frac{5a^3}{9bc^{2n}}$
270. $\frac{7}{12an^3}$
271. $\frac{3b^6}{8c^4d^7}$
272. $\frac{2n^5x^5}{3a^8z^8}$
273. $\frac{2a^3}{n^2}$, або $2a^3n^{-2}x^0$, лікавы рэзульт. 0,16
274. $\frac{4}{3}a^3b^{-2}d^{-5}m^4$
275. $2a^{-2}b^{-3}c^{-m}$
276. $\frac{5b}{a^4c^2}$
277. $\frac{6a^2c^3x^4}{b}$
278. $\frac{54c^p}{a^2b^5x^m}$
279. $12a^{-9}b^{-1}x^3$
280. $-\frac{1}{25}a^{-1}b^{-7}c^{m-3}d^{-4+p}$
281. 3
282. 1
283. 5
284. і левы і правы бок $=12$
285. $4m-a$
286. $-3a^3+\frac{1}{2}a^2b-b^3$
287. $\frac{4}{5}ax^4-8x^2+\frac{4}{3}b^2$
288. $\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}$
289. $\frac{7x}{y}-3+\frac{1}{5}y$
290. $3b+\frac{9}{2}a-9a^4b^2$
291. $-\frac{2n}{3p^2q^2}+\frac{p}{m^2q^2}+\frac{4q}{3m^2n^2}+\frac{5r}{3m^2n^2p^2}$
292. $\frac{9a}{5n^2}-\frac{15b}{16nx}+\frac{9c}{x^2}$
293. $\frac{ac^3}{2b^2}-\frac{3a^2c^2}{b}+\frac{b}{3a^2c^2}-\frac{2b^2}{ac^3}$
294. $x+4a$
295. $3x-a$
296. a^2+ab
297. $3+2x$
298. $3a^2-2b^2$
299. $-3+2x$

300. $2x+1+\dfrac{5x-1}{x^2+2x+3}$

301. $1-2x+\dfrac{3x^2+x^3}{1-3x+2x^2}$

302. $\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}y^2$

303. a^2-2a+1

304. $a^{2n}-2a^{2n-2}+3a^{2n-4}$

305. $a^m-a^{m-1}+a^{m-2}$

306. $x^2-2x-5+\dfrac{2x+3}{3x^2-2x+1}$

307. $1+x-2x^2+\dfrac{x^3-x^4+3x^5}{1-5x+3x^2-x^3}$

308. $x^2+x+1+\dfrac{2x^2-3x+5}{x^3+2x^2+5x+1}$

309. $1+m+m^2+m^3$

310. $27m^3-18m^2n+12mn^2-8n^3$

311. $8p^9+12p^6q^2+18p^3q^4+27q^6$

312. $16x^8-8x^6y+4x^4y^2$

313. $2x^5-3x^2y^2+8xy^4-4y^6$

314. $b^2(a^2+b^2)$

315. $2b(2a-c)$

316. $5a^2x^2(2a^2+7x^2)$

317. $4a^3x^2(3a^3x^2-1)$

318. $a^{2n}b^n(1-a^{3n}b^n)$

319. $3ab(1-2ab+3a^2b^2)$

320. $2a^3c^2(4ac-3a+8c^2)$

321. $7b^3(6a^5b-5a^3b^2+8c^4)$

322. $(p-q)(2p+3q)$

323. $2m(n^2-2)(2m-n)$

324. $(x-1)(2b+1)$

325. $(y+1)(2a+1)$

326. $(5+a)(5-a)$

327. $(ab+10)(ab-10)$

328. $(7x+y)(7x-y)$

329. $\left(\dfrac{5}{6}p+\dfrac{2}{7}q\right)\left(\dfrac{5}{6}p-\dfrac{2}{7}q\right)$

330. $(a-2)(a^2+2a+4)$

331. $(2p+q)(4p^2-2pq+q^2)$

332. $(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$

333. $(a+3)(a+3)$

334. $(m-5)(m-5)$

335. $(z+7)(z+7)$

336. $10a^2b^2(a+2b)(a-2b)$

337. $a^3b^2(b+2)(b+2)$

338. $(m+n)(m+n-p)$

339. $x^2z^2(x+y)(x+y)(x-y)(x-y)$

340. $(a+1)(a+1)(a-1)(a-a+1)$

341. $(m+2)(m^2+4m+4)$

342. $\dfrac{3x}{5a}$

343. $\dfrac{3a}{7bx}$

344. $\dfrac{2a^2x}{3y}$

345. $\dfrac{5c^2}{12ab^3}$

346. $\dfrac{b^{m-2n}}{a^m}$

347. $\dfrac{a}{b}$

348. $\dfrac{2x}{3y}$

349. $\dfrac{6a^2}{5b^2}$

350. $\dfrac{4a^2}{5b}$

351. $\dfrac{2a}{3(2a+b)}$

352. $\dfrac{a-b}{a+b}$

353. $\dfrac{x^2-xy+y^2}{2(x+y)}$

354. $\dfrac{4a(2a+3b)}{3b}$

355. $\dfrac{x^2}{x+y}$

356. $\dfrac{(a+b)^2}{ax}$

357. $\dfrac{x+z}{1-2y+y^2}$

358. $\dfrac{x+2}{x+5}$

359. $\dfrac{x+4}{x+6}$

360. $\frac{3}{2a}$

361. $\frac{x+5ay}{15a}$

362. $\frac{9b^3c+10a^2d}{12a^3b^4}$

363. $\frac{m(ab+ac+bd)}{abc}$

364. $\frac{25ay^2z^2-4by^4+18cz^4}{60y^5z^4}$

365. $\frac{a^nc^2x^3-ab^4x^2z^n-c^3}{ac^4x^n}$

366. $\frac{133a}{36}$

367. $\frac{2a+3b}{b}$

368. $\frac{3a^2-4b^2}{ab}$

369. 0

370. $\frac{81a-4b}{84}$

371. $\frac{200a^2-10ab+9c}{3b}$

372. $\frac{5a^2b+20a^4b^4+c^2}{10a^3b^2}$

373. 0

374. $\frac{26b-5a}{30b}$

375. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

376. $\frac{2a^2x}{1-a^4}$

377. $\frac{a}{2(a+1)^3}$

378. 0

379. $\frac{1}{4a-3}$

380. $\frac{2b^2}{a(b^2-4a^2)}$

381. $\frac{1}{a+2}$

382. $\frac{6x^2-8}{(x+2)^2(x-2)}$

383. $\frac{2a-3}{(a^2-1)(2a+3)}$

384. $\frac{a^4+6a^2b^2+b^4}{a^4-b^4}$

385. $12a^2c^3$

386. $-10c^2d$

387. $\frac{12x^2y^2}{p^2q}$

388. $-\frac{3a^2m^5}{2x^2}$

389. $\frac{8a^3}{3bc^2}$

390. 1

391. $\frac{1}{4}c^2$

392. $\frac{x}{yz}$

393. ac

394. $\frac{1}{ab}$

395. $\frac{1}{c^2d}$

396. $\frac{9m^3}{64pq}$

397. $\frac{7c^2}{5ab}$

398. $77ypq$

399. $\frac{77abxy}{15mnpq}$

400. $\frac{cd^2}{10a^2b^2}$

401. $\frac{4b}{a-1}$

402. $\frac{a^2}{d^2}$

403. $\frac{a}{a+b}$

404. $\frac{a^2+b^2}{b}$

405. $\frac{2ap^3(p-q)}{b}$

406. $\frac{(a+b)^2}{ab}$

407. $\frac{a}{x}$
408. $\frac{4ab}{a^2-b^2}$
409. $\frac{a}{x}$
410. -1
411. $-\frac{2}{3}$
412. $\frac{1}{3(x-y)}$
413. $\frac{3(a-b)^2}{b}$
414. $\frac{x(2x+y)}{y^2}$
415. $\frac{3p}{p-q}$
416. a^2-b^2
417. $\frac{a+b}{c}$
418. $\frac{(ay-bx)y}{cx}$
419. $\frac{m+n}{m-n}$
420. $\frac{2xy}{x^2+y^2}$
421. $\frac{16m}{5n}$
422. $\frac{a+1}{a-1}$
423. $\frac{p+3}{p+4}$
424. a
425. 1
426. $\frac{0}{0}$
427. $\frac{0}{0}$
428. $\frac{0}{0}$
429. ∞
430. $\frac{0}{0}$
431. 6
432. 12
433. 4
434. 5
435. 7
436. 9
437. 2
438. 2
439. 4
440. 2
441. 6
442. $\frac{4}{3}$
443. 5
444. 3
445. 2
446. 2
447. 4
448. 6
449. 12
450. 12
451. 10
452. $\frac{1}{2}$
453. 5
454. 6,3
455. 2
456. 3
457. 13
458. 7
459. 2
460. 4
461. $\frac{1}{5}$
462. 9
463. -6
464. 11
465. 3
466. $\frac{apq}{p^2-q^2}$
467. a
468. $-\frac{p}{2}$
469. 1
470. 6
471. -3
472. -7
473. $\frac{5}{2}$
474. $-\frac{5}{4}$

475. 4
476. 22; 16
477. 58
478. 12; 60
479. 38; 34; 38
480. 10; 15; 8
481. 11; 22; 33
482. 64; 32
483. 96; 24
484. 72; 18
485. 36; 18
486. 6
487. 70
488. 54
489. 18; 20
490. 23 вуч. і 200 сш.
491. $56\frac{1}{4}$; $43\frac{3}{4}$
492. 3
493. 12
494. 6
495. 260
496. $1\frac{1}{2}$
497. 7; 15; 48
498. 37
499. 3; 9
500. 2520; 1260; 720; 540
501. 55
502. 7; 8
503. 5; 6
504. 3; 2
505. 16; 7
506. $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$
507. 20; 10
508. 10; 5
509. 18; 6
510. 4; 5
511. 12; 6
512. 1; 3
513. 8; 5
514. 5; 6
515. 3; 4
516. 8; 2
517. 5; 3
518. 1; 3; 5
519. 15; 12; 10
520. 1; 1; 1
521. 2, 3, 4
522. 12; 18; 35
523. 9; 8; 11
524. 12; 24; 36
525. $\frac{3}{4}$; 3; $\frac{5}{4}$
526. $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$
527. 33; 14
528. 85; 55
529. 36; 24
530. 6; 5
531. $\frac{2}{7}$
532. 6р. 20к. і. 3р.
533. 150 п.; 250 р.
534. 29
535. 63
536. 3 і 5
537. 88; 40
538. 18; 4
539. 24; 14
540. 32; 28
541. 78; 85; 63
542. 640; 720; 840
543. 9; 7; 12
544. 50
545. 51; 30; 9
546. 854
547. $7\frac{1}{2}$ і $2\frac{1}{2}$ — заданьне кепска уложана, бо цыфры могуць быць толькі цэлыя.
548. — 5, г. ё., бацька быў старэйшы за сына ў 7 разоў 5 гадоў *назад*.
549. 0, г. ё., бацька *цяпер* старэйшы за сына ў 4 разы.
550. $\frac{0}{0}$ г. ё., кожнае чысло адказвае варункам заданьня.
551. ∞, г., ё. ён ніколі ня выплаціць доўгу.

СЛОЎНІК ТЭРМІНАЎ.

Абазначэньне	Обозначение
Абсолютная вартасьць	Абсолютное значение
Агульны	Общий
Адваротнасьць	Обратная величина
Адваротная вялічыня	
Адвольны	Произвольный
Адзінка	Единица
Адказ	Ответ
Адказваць	Соответствовать
Адначаснае раўнаньне	Одновременное уравнение
Адначле́н	Одночлен
Адносныя чыслы	Относительные числа
Адпаве́дны	Соответственный
Адцінак	Отрезок
Адыманьне	Вычитание
Адымнае чысло	Отрицательное число
Азнакі	Признаки
Азначаны	Определенный
Азначыць	Определить
Азначэньне	Определение
Альгэбрычны	Алгебраический
Аснова	Основание
Астача	Остаток
Бяскрайна-вялікі	Бесконечно-большой
Бяскрайнаьць	Бесконечность
Вартасьць	Значение
Ве́дамы	Известный
Вялічыня	Величина
Вобраз (геомэтр.).	Изображение (геометр.).
Вызначнік	Определитель, детерминант
Выканаць	Выполнить
Выключыць	Исключить
Вылічэньне	Вычисление
Выме́рны	Рациональный, соизмеримый
Вынік	Следствие
Выпадак	Случай
Выраз	Выражение
Выцягваньне корняў	Извлечение корней
Выцягваць корань	Извлекать корень
Вышэйшы член многачле́ну	Высший член многочлена
Вышыня	Высота

ДРУКАРСКІЯ АБМЫЛКІ

Стр.	Радкі	Надрукавана	Павінна быць
3	8 зьнізу	няухільная	няўхільная
38	12 ,,	падзельнае	падзелянае
42	7 ,,	аднаведных	адпаведных
42	8 ,,	дзелючы	дзелячы
44	18 ,,	суседнымі	суседнімі
83	9 ,,	раўнаньнаў	раўнаньняў