

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК



ВЫПУСК

4

ТОМ ДЕВЯТЫЙ

1929

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

П. П. ЛАЗАРЕВА

И

Э. В. ШПОЛЬСКОГО

ГЛАВНАУКА
ГОСИЗДАТ



ПЕРИОДСЕКТОР
ГОСИЗДАТА

Москва
Ильинка, 3, тел. 4-87-19.

ПРОДОЛЖАЕТСЯ ПОДПИСКА

на 1929 год

НА ЖУРНАЛ

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

Под редакцией

П. П. Лазарева и Э. В. Шпольского

ДЕВЯТЫЙ ГОД ИЗДАНИЯ

ПЕЧАТАЕТСЯ И В БЛИЖАЙШЕЕ ВРЕМЯ
БУДЕТ РАЗОСЛАН ПОДПИСЧИКАМ

Вып. № 5

СОДЕРЖАНИЕ

1. Дискуссия об атомных ядрах под председательством Э. Резерфорда.
2. Л. В. Мысовский. Усовершенствование методов наблюдения α и β -частиц.
3. Б. М. Гессен. Теоретико-вероятностное обоснование эргодической гипотезы.
4. Р. Мекке. Полосатые спектры и их значение для химии.
5. И. Курчатов. Электрический пробой газов.
6. Библиография.

ПОДПИСКА ПРИНИМАЕТСЯ: Периодсектором Госиздата, [Москва, Ильинка, 3, тел. 4-87-19; Ленинград, пр. 25 Октября, 28, тел. 5-48-05; во всех магазинах и киосках Госиздата, в провинц. отделениях, филиалах, конторах, и у уполномоченных.

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУККАРТИНА МИРА СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКИ.¹*М. Планк, Берлин.*

I.

Этой зимой исполнилось двадцать лет с тех пор, как я имел честь и счастье здесь в Лейдене говорить о единстве физической картины мира. Я был приглашен тогда естественно-историческим отделением студенческой корпорации университета. Это приглашение было энергично поддержано письмом моего коллеги Генрика-Антоня Лоренца, который оказал мне в своем гостеприимном доме дружеский прием и впервые дал мне почувствовать обаяние своей личности. Именно поэтому мое тогдашнее посещение Лейдена сделалось одним из больших событий моей жизни и пробудило во мне чувство благодарности, которое я храню как сокровище. И если сегодня благодаря особой любезности моих коллег я снова должен говорить перед вами на ту же тему, то я не могу не выразить прежде всего чувства глубокой печали, которая охватывает меня при воспоминании о том времени. Среди нас уже нет нашего глубокопочтительного учителя Г. А. Лоренца, нет Камерлинг-Оннеса, нет многих других, которые присутствовали тогда. Но наука не останавливается на отдельных личностях; даже наиболее энергичный исследователь в конце концов бывает должен

¹ Расширенная речь, читанная в Физическом институте Лейденского университета. Напечатана отдельной книжкой. Изд. J. A. Barth, Leipzig, 1929. *Ред.*

передать начатую им работу более молодым, и обязанность каждого из них состоит в том, чтобы в меру отведенных ему сил участвовать в общей работе.

Я делаю сегодня попытку охарактеризовать развитие физической картины мира с тех пор, хотя я отчетливо сознаю, что мое изложение еще менее может претендовать на полноту и завершенность, нежели тогда, двадцать лет тому назад. Но я могу до некоторой степени утепиться тем, что задача с тех пор сделалась несравненно трудней. Ибо за истекший промежуток времени родились проблемы, которые пропикли в наше физическое мышление глубже, чем этого когда-нибудь можно было ожидать. Поэтому мне представляется целесообразным, в интересах отчетливости, начать несколько издаleка, рискуя даже останавливаться на давно известных вещах. Зато в последующем мне придется отказаться от изложения отдельных, быть может весьма интересных частных вопросов, так как иначе я должен был бы на слишком продолжительное время занять ваше внимание.

Во всяком случае я буду очень признателен за критику моих рассуждений. Тому, что даже самая острая критика по существу может быть соединена с благожелательностью,— этому сам Лоренц дал особенно яркий пример.

II.

Построение физической науки совершается на основе измерений. И так как каждое измерение связано с чувственным восприятием, то все понятия физики заимствованы из чувственного мира. Поэтому каждый физический закон в конце концов относится к событиям чувственного мира. Принимая во внимание это обстоятельство, некоторые естествоиспытатели и философы склоняются к воззрению, что физика в конечном счете имеет дело с чувственным миром,—и притом, разумеется, с чувственным миром человека; что так называемый „предмет“ в физическом отношении есть лишь комплекс различных связанных ощущений. Следует подчеркнуть, что такое воззрение ни в коем случае не может быть опровергнуто логическим путем. Ибо логика

одна не в состоянии изречь кого бы то ни было из его собственного чувственного мира; она не может принудить его признать самостоятельное существование „сочеловека“ (Mitmensch).

Но в физике, как и во всякой другой науке, господствует не только логический разум (Verstand), но также и здравый смысл (Vernunft). Не все, что оказывается лишеным логических противоречий, правильно с точки зрения рассудка (vernünftig). А рассудок говорит нам, что когда мы повернемся спиной к так называемому „предмету“ и отойдем от него, — все-таки что-нибудь от этого предмета да останется. Он говорит нам далее, что отдельный человек, что мы, люди, все вместе, с нашим чувственным миром, вместе со всей нашей планетой — лишь ничто в огромной природе, законы которой не определяются тем, что происходит в маленьком человеческом мозгу, но существовали еще до того как появилась жизнь на земле и будут существовать после того как последний физик исчезнет с ее лица.

Подобными обобщениями, основанными на „житейском опыте“, а не логическими умозаключениями мы выпуждены признать за чувственным миром второй, реальный мир, который ведет самостоятельное, независимое от человека существование, — мир, который мы не можем постигнуть непосредственно, но постигаем через посредство чувственного мира, через посредство известных знаков, которые он нам сообщает, совершенно так же, как если бы мы интересующий нас предмет могли рассматривать только через очки, оптические свойства которых нам совершенно неизвестны.

Кто не может следовать этому мысленному пути и видит во введении по существу непостижимого реального мира непреодолимую трудность, тому можно напомнить, что существует большая разница между законченными физическими теориями, содержание которых можно точно анализировать и при этом устанавливать, что для их формулировки совершенно достаточно понятий чувственного мира, и задачей построения физической теории из некоторого числа пока еще разрозненных измерений. История физики показывает нам,

что эта последняя, неизмеримо более трудная задача всегда разрешалась лишь на основании принятия реального, независимого от человеческих чувств мира, и не может быть никакого сомнения, что и в будущем это так и останется.

К этим двум мирам—чувственному миру и реальному миру—присоединяется еще третий мир, который, пожалуй, следует от них отличать: мир физической науки или физическая картина мира. Этот мир, в противоположность каждому из двух предыдущих, есть осознанное, служащее определенной цели создание человеческого духа и как таковое—изменчивое, подверженное известной эволюции. Задачу физической картины мира можно формулировать двояким образом, смотря по тому, с чем ставится в связь эта картина мира—с реальным или с чувственным миром. В первом случае задача состоит в том, чтобы возможно полнее познать реальный мир, во втором—чтобы возможно проще описать чувственный мир. Было бы бесполезно стремиться: отыскать более правильную из этих двух формулировок—каждая из них, взятая сама по себе, односторонняя и неувлечительна, ибо, с одной стороны, непосредственное познание реального мира вообще невозможно, а с другой стороны—нельзя и ответить на вопрос, какое описание нескольких связанных чувственных восприятий является наиболее простым. Не раз случалось в истории развития физики, что из двух различных описаний то, которое в течение известного промежутка времени считалось более сложным, впоследствии оказывалось более простым. Главное же в том, что обе названные формулировки задачи практически друг другу не противоречат, но, напротив, друг друга дополняют. Первая помогает ощупью стремящейся вперед фантазии исследователя, создающей совершенно необходимые для его работы оплодотворяющие идеи, вторая удерживает его на твердой почве фактов. Этому обстоятельству соответствует и то, что отдельные физики, в зависимости от своего более метафизического или, наоборот, более позитивного умонастроения, свою работу над физической картиной мира направляют в ту или другую сторону.

Но существует кроме метафизиков и позитивистов еще третья группа работников над физической картиной мира. Она характеризуется тем, что ее главный интерес направлен не на связь с реальным или чувственным миром, но на внутреннюю замкнутость и логическое построение физической картины мира. Это — аксиоматики. И их деятельность полезна и необходима. Но и здесь имеется серьезная опасность односторонности, которая лежит в том, что физическая картина мира теряет свое значение и вырождается в бессодержательный формализм. Ибо когда связь с действительностью разорвана, то физический закон представляется уже не соотношением между величинами, которые все измеряются независимо друг от друга, но определением, при посредстве которого одна из этих величин сводится к остальным. Такое истолкование особенно заманчиво потому, что ведь физическую величину можно определить уравнением гораздо точнее, нежели измерением; но оно означает, в конце концов, отказ от истинного значения величины, причем отягчающим обстоятельством является еще то, что так как самое название величины сохраняется, то это легко дает повод к неясностям и недоразумениям.

Итак, мы видим, как одновременно с различных сторон и с различных точек зрения работают над физической картиной мира, стремясь к одной цели — закономерно связать процессы чувственного мира между собой и с процессами реального мира. Понятно, что в различные эпохи исторического развития то одно, то другое направление выдвигается на первый план. Во времена, когда физическая картина мира обнаруживает устойчивый характер, как это было во второй половине прошлого столетия, приобретает большое значение метафизическое направление, — исследователям представляется, что они уже близки к познанию реального мира; зато во времена изменчивости и непостоянства, вроде переживаемого нами, на первый план выступают позитивисты, — исследователи склоняются даже к тому, чтобы сводить все к единственному прочному исходному пункту — к процессам чувственного мира.

Если мы оглянемся на различные изменяющиеся с течением времени и вытесняющие друг друга формы физической картины мира и попытаемся отыскать характеристические формы изменения, то мы должны прежде всего иметь в виду два факта. Во-первых, следует установить, что при всех видоизменениях картины мира, в целом происходит не ритмическое колебание в ту и другую сторону, но непрерывное поступательное развитие в определенном направлении, которое характеризуется тем, что содержание нашего чувственного мира все обогащается, наши знания о нем все углубляются, наше господство над ним все укрепляется. Об этом разительнее всего свидетельствуют практические применения физической науки. То, что мы ныне можем видеть и слышать на значительно больших расстояниях, то, что мы распоряжаемся гораздо большими силами и скоростями нежели предшествующие поколения — этого не могут отрицать даже самые непримиримые скептики, и тем не менее позволительно сомневаться в том, что этот прогресс означает устойчивое обогащение нашего познания, которое в будущем никогда не будет признано заблуждением.

Во-вторых, в высшей степени замечательно, что хотя толчок ко всякому улучшению и упрощению физической картины мира постоянно дается новыми наблюдениями, т. е. процессами чувственного мира, тем не менее физическая картина мира в своей структуре все более удаляется от чувственного мира. Она все более теряет свой наглядный, первоначально-антропоморфный характер, из нее все в большей степени исключаются чувственные восприятия, — стоит только вспомнить о физической оптике, в которой уже больше нет речи о человеческом глазе, — и вместе с тем она по существу своему все более перемещается в область абстрактного, причем чисто формальные математические операции играют все более значительную роль и качественные различия все более сводятся к количественным различиям.

Если сопоставить это второе обстоятельство с ранее названным первым, т. е. с усовершенствованием физической картины мира в отношении ее роли для чувственного мира, то для этого поразительного и, на первый взгляд, парадоксаль-

ного явления, по-моему, можно дать единственное объяснение. А именно — тот факт, что непрерывное усовершенствование связано в то же время с непрерывным удалением физической картины мира от чувственного мира, означает не что иное как приближение к реальному миру. О логическом обосновании этого утверждения, конечно, не может быть и речи, так как ведь и существование реального мира не может быть выведено логическим путем. Но в той же степени невозможно его логическим путем и опровергнуть. Отношение к нему есть скорее дело практического мировоззрения, и старая истина состоит в том, что наилучшее мировоззрение то, которое несет с собой наиболее богатые плоды. Физика представляла бы исключение среди других наук, если бы для нее не сохранял силу закон, согласно которому наиболее плодотворные и значительные результаты исследования получаются всегда на пути к принципиально недостижимой цели познания реальной действительности.

III.

Как изменилась физическая картина мира за последние двадцать лет? Каждый из нас знает, что сдвиг, происшедший за это время принадлежит к самым глубоким когда-либо происходившим в истории науки и что процесс преобразования не закончен полностью и по сию пору. Однако повидимому уже сейчас, в потоке развития, выкристаллизовываются известные характеристические формы структуры новой картины мира, и не напрасна будет попытка обрисовать эти характерные формы хотя бы только для того, чтобы побудить к улучшению этой попытки.

Если мы сопоставим старую и новую картину мира, то прежде всего обнаружится дальнейший значительный шаг вперед в направлении сведения всех качественных различий к количественным. Так, например, пестрое разнообразие химических явлений, повидимому, без остатка сведено к числовым и пространственным соотношениям. По современным воззрениям существует вообще только два первичных вещества: положительное электричество и отрицательное электричество.

Оба состоят из совершенно одинаковых крошечных частиц с противоположными и равными зарядами. Частица положительного электричества называется протон, частица отрицательного электричества — электрон. Всякий электрически нейтральный химический атом состоит из известного числа протонов, которые между собою прочно связаны, и такого же количества электронов, из которых часть прочно связана с протонами и вместе с ними образует ядро атома, тогда как остальные электроны обращаются вокруг ядра.

Так, наименьший атом, атом водорода, состоит из одного единственного протона, который является его ядром, и одного электрона, обращающегося около ядра. Наибольший атом, атом урана, состоит из 238 протонов и такого же количества электронов, из которых однако только 92 двигаются вокруг ядра, в то время как остальные сидят в ядре. Между этими двумя крайностями лежат атомы остальных элементов во всевозможных комбинациях. Химическая природа элементов определяется не полным числом его протонов или электронов, но числом его подвижных электронов, которые мы и называем порядковым номером элемента.

Помимо этого значительного успеха, который однако в конце концов является лишь удачным осуществлением старой мысли, имеющей возраст нескольких столетий, в современной картине мира поражают две новые идеи, которыми она отличается от прежней: принцип относительности и принцип квантов. Обе эти идеи в сущности и придают новой картине ее характеристическое отличие по сравнению со старой. То, что они возникли в науке почти одновременно, следует рассматривать в известном смысле как случайность. Ибо как по своему содержанию, так и по своему воздействию на физическую картину мира они совершенно отличаются друг от друга.

Теория относительности, которая первоначально, казалось, вносит в созданные ею воззрения на пространство и время известную путаницу, на самом деле оказалась завершением здания классической физики. Чтобы наглядно охарактеризовать одним словом положительное содержание специальной теории относительности, ее пожалуй можно назвать слиянием

пространства и времени в одно единственное понятие. Это не значит, что пространство и время сделались совершенно равнозначными, но они связаны между собой совершенно так же, как действительное число и мнимое число связываются в одно понятие комплексного числа; с этой точки зрения Эйнштейн совершил для физики то же самое, что в прошлом столетии Гаусс для математики. И если мы продолжим несколько сравнение, то мы можем сказать, что переход от специальной к общей теории относительности в физике означает нечто подобное переходу от линейных функций к общей теории функции в математике.

Если это сравнение, как и всякое другое, не вполне удовлетворительно, то все-таки оно дает правильное представление о том факте, что введение теории относительности в физическую картину мира означает один из важнейших шагов к объединению и завершению. Это сказывается в тех следствиях, которые она за собой повлекла,—прежде всего в слиянии импульса и энергии, в сведении понятия массы к понятию энергии, в отождествлении инертной и тяжелой массы, в сведении закона тяготения к геометрии Римана.

Насколько коротки эти эпитеты, настолько же необозримо их содержание. Их значение простирается на все процессы природы, начиная от радиоактивных атомов, испускающих волны и корпускулы, вплоть до движения небесных тел, удаленных на миллионы световых годов.

Теория относительности еще не сказала своего последнего слова. Возможно, что здесь еще ожидают нас неожиданности, если только вспомнить, что проблема слияния электродинамики и механики еще ждет своего окончательного разрешения. Равным образом и космологические следствия теории относительности, повидимому, еще не вполне выяснены хотя бы уже потому, что здесь все зависит от оставшегося еще открытым вопроса, обладает ли материя, находящаяся в мировом пространстве, конечной плотностью или нет. Как бы однако ни были разрешены эти вопросы, во всяком случае останется неизменным факт, что теория относительности возвела классическую теорию на высшую ступень завершения и что ее

физическая картина мира получила и в формальном отношении вполне удовлетворительную законченность.

Это обстоятельство, равно как и указание на многочисленные изложения теории относительности, предназначенные для читателей самой разнообразной подготовки, надеюсь, может служить достаточным оправданием того, что я не буду здесь больше задерживаться на ее рассмотрении.

IV.

В очерченную гармоническую картину мира, которая, казалось бы, удовлетворяет своей задаче почти идеальным образом, гипотеза квантов внесла совершенно неожиданные и яркие черты. Если бы мы и здесь попытались одним словом охарактеризовать центральную идею этой гипотезы, то мы могли бы отыскать эту основную идею во введении новой универсальной постоянной: элементарного кванта действия. Эта постоянная и есть тот таинственный посол из реального мира, который вновь и вновь появлялся на сцену при различнейших измерениях, который при этом все более и более настойчиво требовал себе места в физической картине мира, но вместе с тем так мало подходил к этой картине, что в конце концов сломал оказавшиеся слишком тесными рамки этой картины.

Было время, когда казалась не исключенной возможность даже полного крушения классической физики. Однако постепенно выяснилось, — впрочем для каждого, кто верит в непрерывный прогресс науки, это было очевидно с самого начала, — что речь и здесь идет, в конце концов, не о разрушении, но о весьма глубоком преобразовании, которое сводится к обобщению. Ибо если мы положим, что квант действия бесконечно мал, то квантовая физика переходит в классическую физику. Но даже и в общем случае основные устойчивые здания классической физики оказались не распавшимися, но благодаря внедрению новых идей они даже выиграли в прочности и солидности. Поэтому целесообразно будет первоначально рассмотреть эти основные устой.

Прежде всего следует назвать их. Универсальные постоянные — постоянная тяготения, скорость света, масса и заряд электронов и протонов — как наиболее осязательные вестники реального мира, неизменно сохранили свое значение и в новой картине мира. Далее — великие принципы сохранения энергии и импульса. Хотя в течение известного времени их справедливость подвергалась сомнению, однако в конце концов они победоносно утвердились во всех своих деталях. При этом, вопреки мнению многих аксиоматиков, вновь с полной ясностью обнаружилось, что эти принципы ни в коем случае не могут рассматриваться как простые определения. Далее следуют начала термодинамики, особенно второе начало, которое благодаря введению абсолютного значения энтропии получило даже более строгую формулировку, нежели в классической физике. Наконец — принцип относительности, который в новой области квантовой физики оказался надежным и осведомленным путеводителем.

Теперь естественно возникает вопрос: если все эти основы классической физики сохранились нетронутыми, то что же собственно изменилось в новой физике? Ответ на этот вопрос мы получим весьма легко, если рассмотрим несколько ближе, что означает элементарный квант действия. Он означает по существу эквивалентность между энергией и частотой: $E = h\nu$. Эта эквивалентность с точки зрения классической теории абсолютно непонятна. Непонятна прежде всего потому, что энергия и число колебаний обладают различной размерностью: энергия есть величина динамическая, число колебаний — кинематическая. Однако это еще не самое главное. Ибо если квантовый постулат непосредственно связывает между собой кинематику и динамику, сводя единицу энергии, а вместе с нею и массы — к единицам длины и времени, то это еще не означает противоречия, но, наоборот, знаменует собою пополнение и обогащение содержания классической теории. Абсолютно противоречивое и потому совершенно несовместимое с классической теорией обнаруживается следующим рассуждением. Число колебаний есть местная величина: она обладает определенным смыслом для некоторого данного места, о каких бы колебаниях ни шла речь — меха-

нических, электрических или магнитных; нужно только наблюдать это место достаточно долгое время. Энергия же есть аддитивная величина. Говорить об энергии в определенном месте, по классической теории, не имеет никакого смысла; нужно прежде всего указать тот физический образ, энергия которого имеется в виду,—совершенно так же как для того, чтобы иметь возможность говорить в определенном смысле о скорости, нужно указать систему координат. И так как физический образ может быть вообще выбран совершенно произвольно,—он может быть больше или меньше,—то в значении энергии всегда имеется известный произвол. И вот эта до некоторой степени произвольная энергия должна быть равна местной величине — числу колебаний! Мы видим, что между этими двумя понятиями обнаруживается вняющее расхождение. Чтобы прикрыть это расхождение, необходимо сделать важный шаг,—шаг, действительно означающий разрыв с воззрениями, которые для классической физики представляются самоочевидными.

До сих пор к предпосылкам всякого каузального физического мышления относилась та, согласно которой все процессы в физическом мире — под физическим миром я, как всегда, разумею физическую картину мира, а не реальный мир, — могут быть представлены состоящими из местных процессов в различных отдельных бесконечно малых элементах пространства, и что каждый из этих отдельных элементарных процессов в своем закономерном течении, вне связи со всеми остальными, однозначно определяется процессами, происходящими непосредственно по соседству в пространстве и во времени. Остановимся на конкретном, достаточно общем случае. Пусть рассматриваемый физический образ представляет собою систему материальных точек, которые двигаются в консервативном силовом поле с постоянной полной энергией. Тогда, по классической физике, каждая отдельная точка в каждый момент времени находится в определенном состоянии, т. е. она обладает определенным положением и определенной скоростью и ее движение может быть полностью вычислено, исходя из ее начального состояния и местных свойств силового поля в тех точках пространства, которые

она проходит во время своего движения. Если же последнее известно, то остальных свойств системы нам и не нужно знать.

В новой механике дело обстоит совсем иначе. По новой механике чисто местные соотношения столь же недостаточны для формулировки законов движения, как недостаточно для понимания значения какой-нибудь картины микроскопическое исследование ее отдельных частей. Как раз напротив, — тогда только и получается пригодная формулировка закономерности, когда физический образ рассматривается как целое. В соответствии с этим, по порою механике, каждая отдельная материальная точка системы в любой момент в известном смысле пребывает одновременно во всех местах пространства, занятого системой, и притом вовсе не силовым полем, которое она вокруг себя распространяет, — нет, пребывает со своей собственной массой и со своим собственным зарядом.

Мы видим, что речь идет не о чем ином, как о материальной точке — самом элементарном понятии классической механики. Приходится пожертвовать центральным значением этого понятия; его можно сохранить только в особых предельных случаях. При этом из дальнейшего хода рассуждения мы увидим, что должно быть поставлено на место материальной точки в общем случае.

Если квантовый постулат об эквивалентности энергии и числа колебаний должен иметь однозначный, т. е. не зависящий от системы референции смысл, то, по теории относительности, вектор импульса должен быть эквивалентен вектору волнового числа, т. е. абсолютное значение импульса должно быть эквивалентно обратной длине волны, нормаль к которой совпадает с направлением импульса. При этом волну следует представлять себе не в обычном трехмерном пространстве, но в так называемом „пространстве конфигурации“, число измерений которого равно числу степеней свободы системы и мероопределение которого дается удвоенной кинетической энергией или — что то же самое — квадратом полного импульса. Вместе с тем длина волны оказывается сведенной к кинетической энергии, т. е. к разности постоян-

ной полной энергии и потенциальной энергии, которую следует рассматривать как заданную функцию места.

Число колебаний, помноженное на длину волны, равняется скорости распространения или фазовой скорости некоторой волны в „пространстве конфигурации“ — так называемой волны материи. Подстановка соответствующих значений в известное классической механике волновое уравнение ведет к найденному Шрёдингером линейному однородному дифференциальному уравнению в частных производных, которое является наглядным фундаментом современной квантовой механики и, повидимому, играет в последней ту же роль, что и Ньютоновы или Лагранжевы или Гамильтоновы уравнения в классической механике. При этом, однако, уравнение Шрёдингера резко отличается от последних тем, что в нем координаты „точки конфигурации“ не являются функциями времени, но независимыми переменными. В соответствии с этим для данной системы — в противоположность более или менее значительному, равному числу степеней свободы, числу классических уравнений движения — существует только одно квантовое уравнение. Между тем как точка конфигурации классической теории описывает с течением времени совершенно определенную кривую, точка конфигурации волны материи в каждый данный момент заполняет все бесконечное пространство, даже и те места пространства, где потенциальная энергия больше, нежели полная энергия, так что кинетическая энергия там отрицательна, а импульс — мнимый. Это совершенно подобно случаю так называемого полного отражения, при котором лишь согласно геометрической оптике свет действительно полностью отражается, так как угол преломления становится мнимым, между тем как по волновой оптике свет проникает и во вторую среду, хотя и не в виде плоских волн.

Как бы то ни было, то обстоятельство, что существуют места в пространстве конфигурации, где потенциальная энергия превосходит полную энергию, — это обстоятельство имеет особое значение и для квантовой механики. Ибо вычисление показывает, что в каждом таком случае не всякому

значению константы энергии отвечает конечная волна, но только некоторым совершенно определенным так называемым характеристическим числам, которые приходится вычислять из волнового уравнения и которые — в зависимости от свойств заданной потенциальной энергии — оказываются различными.

Из дискретных значений энергии, отвечающих характеристическим числам, по квантовому постулату получаются дискретные значения периода колебания, — совершенно так же, как у натянутой и закрепленной на концах струны, только в последнем случае квантование обусловлено внешним обстоятельством — длиной струны, тогда как в первом случае — квантом действия, входящим уже в самое дифференциальное уравнение.

Каждому собственному колебанию отвечает особая волновая функция ψ — решение волнового уравнения, и все эти различные функции — фундаментальные функции — образуют элементы описания процесса движения по волновой механике.

Результат получается следующий: в то время как классическая физика совершает пространственное разделение рассматриваемого физического образа на его мельчайшие части и таким путем сводит движение любого материального тела к движениям его отдельных предполагаемых неизменяемыми материальных точек, квантовая физика разлагает каждый процесс движения на отдельные периодические волны материи. Последние отвечают собственным колебаниям и фундаментальным функциям данного образа и вследствие этого ведут к волновой механике. Поэтому по классической механике простейшее движение — движение отдельной материальной точки; по квантовой механике — движение простой периодической волны. И подобно тому как согласно первой наиболее общее движение тела рассматривается как совокупность движений его отдельных точек, по квантовой механике оно рассматривается как взаимодействие всех возможных видов периодических волн материи. Это различие в способе рассмотрения можно наглядно пояснить на примере натянутой струны. Действительно, с одной стороны, в качестве элементарного процесса можно рассматривать движение

отдельных точек струны. Каждая материальная частица струны движется независимо от всех остальных под влиянием действующей на нее силы, определяемой кривизной струны в данном месте. Но, с другой стороны, можно рассматривать в качестве элементов движения основной тон и обертоны струны, — каждый из них относится ко всей струне, и взаимодействие их опять-таки представляет собою наиболее общий тип движения.

Волновая механика позволяет также непосредственно понять одно, до сих пор остававшееся загадочным, обстоятельство. Согласно необычайно плодотворной теории Нильса Бора электроны двигаются вокруг ядра по законам, совершенно аналогичным законам движения планет вокруг солнца. Только вместо силы тяготения действует притяжение противоположно заряженных ядер и электронов. Своеобразное различие состоит однако в том, что электроны двигаются по совершенно определенным дискретным орбитам, между тем как в случае планет ни одна орбита не представляет никаких преимуществ перед другой.

Это первоначально непонятное обстоятельство находит себе в волновой теории электронов весьма наглядное объяснение. Действительно, если электронная орбита сама в себе замкнута, то ясно, что в ней всегда должно укладываться целое число длин волн, совершенно подобно тому как длина цепи замкнутой в кольцо и состоящей из одинаковых звеньев всегда должна быть равна целому числу звеньев. В соответствии с этим обращение электрона похоже не на движение планеты вокруг солнца, но на вращение совершенно симметричного кольца, так что кольцо все время занимает одно и то же положение в пространстве, и нет никакого физического смысла говорить о мгновенном месте электрона.

Но теперь можно задать следующий вопрос: если элементы движения не материальные точки, а волны материи, то как поступает волновая механика, когда ей нужно описать движение отдельной материальной точки, которая в определенный момент занимает определенное положение? Для того чтобы иметь возможность заняться рассмотрением этого вопроса, разрешение которого с особенной ясностью показы-

рает всю непримиримую противоположность обеих теорий, обратимся прежде всего к выяснению физического значения волновой функции ψ простой периодической волны материи. Этот смысл можно установить исходя из того, что энергия волны материи имеет двойное значение, ибо от того, что она определяет период колебания волны, ее первоначальное значение, вытекающее из принципа сохранения энергии, не исчезает. Но если принцип сохранения энергии остается и в волновой механике, то энергия волны материи должна представляться не только через посредство числа колебаний но также и при помощи интеграла, взятого по всему пространству конфигурации волны.

На самом деле, умножая волновое уравнение на $\bar{\psi}$ ¹ и интегрируя затем по всему пространству конфигурации, мы получаем определенное выражение для энергии, которое нагляднее всего можно интерпретировать следующим образом.

Представим себе рассматриваемую систему материальных точек в весьма большом числе экземпляров и каждый экземпляр в иной конфигурации, так что мы получаем весьма большое число точек в пространстве конфигурации. Каждой находящейся в бесконечно-малом элементе пространства точке конфигурации припишем определенную энергию, которая аддитивно складывается из заданного наперед значения местной потенциальной энергии и второго члена, пропорционального квадрату местного градиента ψ ; этот второй член мы можем истолковать как кинетическую энергию. Если мы затем пространственную плотность распределения точек конфигурации в некотором месте положим равной квадрату абсолютного значения ψ , которое мы можем принять сколь угодно большим, так как в ψ заключается постоянный фактор произвольной величины, то средняя энергия точек конфигурации представит энергию волны материи. В соответствии с этим абсолютное значение амплитуды волны не имеет вообще никакого физического значения. Если мы представим себе, что ψ нормировано таким образом, что квадрат

¹ Т. е. на комплексную величину, сопряженную с ψ . *Ред.*

абсолютного значения ψ , интегрированный по пространству конфигурации, дает значение 1, то мы можем этот квадрат коротко обозначить вероятностью того, что система материальных точек находится в определенном месте пространства конфигурации, и тем самым получим наглядное выражение для искомого физического смысла ψ .

При всех этих рассуждениях мы исходим от определенной фундаментальной функции ψ и ей соответствующей простой периодической волны. Но мы можем те же положения высказать и для общего случая суперпозиции волн с различными периодами. Тогда волновая функция ψ равна алгебраической сумме периодических фундаментальных функций, помноженных на некоторые амплитудные факторы, и квадрат абсолютного значения ψ снова означает вероятность соответствующего положения точки конфигурации.

В общем случае, конечно, уже нельзя говорить об одном определенном периоде колебания волн материи, но само собой разумеется, как и прежде, можно говорить об определенной энергии, так что здесь квантовое уравнение $E = h\nu$ теряет свой первоначальный смысл и ведет лишь к определению среднего числа колебаний ν . При этом заслуживает упоминания, что при суперпозиции сколь угодно большого числа различных простых периодических волн с почти одинаковыми числами колебаний, энергия волновой функции ни в коем случае не возрастает с числом членов суммы, — хотя самая эта волновая функция равна сумме отдельных волновых функций, — но сохраняет свое первоначальное среднее значение. Как энергия семейства простых периодических волн определяет среднее число колебаний, так импульс семейства определяет среднюю длину волны.

Амплитуды и фазы отдельных простых периодических волн первоначально произвольны. Но тем и исчерпывается многообразие доступных изображений волновой механики механических процессов. Это обстоятельство приобретает особую важность, когда мы обращаемся к поднятому выше вопросу об описании движения отдельной определенной материальной точки на основании волновой механики. Действительно, тотчас же обнаруживается, что такое описание в точ-

ном смысле вообще невозможно. Ибо уже для того чтобы определить положение материальной точки или, говоря вообще, чтобы определить положение известной точки в пространстве конфигурации, волновая механика дает только одно средство: нужно таким образом суперпозировать семейство простых периодических волн физического образа, чтобы их волновые функции всюду в пространстве конфигурации путем интерференции друг друга уничтожали и только в заданной точке — друг друга усиливали. В самом деле, тогда вероятность всех остальных точек конфигурации была бы равна нулю, и только для избранной точки она была бы равна единице. Но для того чтобы совершенно резко выделить эту точку, нужны были бы бесконечно малые длины волн, а следовательно бесконечно большие импульсы. Таким образом, для того чтобы получить по крайней мере приблизительно пригодный результат, нужно положить в основание вместо определенной точки конфигурации конечную, хотя и малую область пространства конфигурации, так называемый волновой пакет. Тем самым уже сказано, что определение положения точки конфигурации по волновой теории всегда связано с известной неопределенностью.

Далее, если нужно рассматриваемой системе материальных точек приписать кроме определенной конфигурации еще и определенную величину импульса, то по квантовому постулату нужно воспользоваться, строго говоря, одной только волной, с совершенно определенной длиной волны, и описание снова невозможно. Но если также и в величине импульса ставить известную небольшую неопределенность, то желаемая цель может быть достигнута, по меньшей мере, с известным приближением путем применения волн, лежащих в тесном интервале частот.

Таким образом, как положение, так и импульс системы материальных точек по волновой механике можно определить лишь с известной неточностью, и притом между обеими неточностями существует определенное соотношение. Это соотношение вытекает из того простого соображения, что примененные волны, если они должны путем интерференции тушить друг друга вне пределов малой области configura-

ции, на противоположных краях области, несмотря на их малую разность частот должны однако обнаруживать заметную разность хода. Если заменить разность хода по квантовому постулату разностью импульсов, то получается закон, формулированный Гейзенбергом: произведение неточности в определении положения и неточности в определении импульса по меньшей мере имеет порядок величины кванта действия. Чем точнее определено положение точки конфигурации, тем менее точно известно значение импульса. Обе неточности, таким образом, обнаруживают в известном смысле дополнительность, чему однако положен предел тем, что по волновой механике, при известных обстоятельствах, импульсы можно определить абсолютно точно, между тем как положение точки конфигурации всегда остается в пределах конечной области неопределенным.

Это „соотношение неопределенности“ Гейзенберга есть нечто для классической механики совершенно неслыханное. Конечно, всегда было известно, что всякое измерение сопряжено с неточностью; но всегда принималось, что путем соответствующего уточнения методов измерения точность может быть неограниченно повышена. И вот оказывается, что точность измерения подвержена принципиальному ограничению, и самое замечательное при этом то, что это ограничение относится не к одной величине — положению или скорости, но к их комбинации. Каждая величина, принципиально говоря, может быть измерена сколь угодно точно, но всегда за счет точности другой величины.

Как ни странно звучит такое утверждение, тем не менее оно явственно подтверждается различными фактами. Приведем один только пример. Наиболее непосредственное и наиболее тонкое определение положения точки производится оптически путем — либо путем непосредственного рассматривания простым или вооруженным глазом, либо путем фотографирования. Но для этого нужно точку осветить. В таком случае изображение будет тем резче, а следовательно, измерение — тем точнее, чем короче примененная длина волны. В соответствии с этим можно как угодно повышать точность. Но это повышение имеет и обратную сторону: измерени

скорости. При больших массах можно пренебречь воздействием света на освещаемый объект. Иначе обстоит дело, если объектом является очень малая масса — например отдельный электрон. Ибо каждый световой луч, который падает на электрон и от него отражается, сообщает ему заметный толчок и притом тем более сильный, чем короче длина волны. Поэтому, хотя с укорочением длины волны возрастает точность определения места, но в соответствующем отношении возрастает неточность определения скорости. И то же самое имеет место в аналогичных случаях.

В свете этого воззрения классическая механика, которая исходит от неизменных точно измеримых, движущихся с определенными скоростями корпускул, представляет лишь идеальный предельный случай. То же осуществляется и тогда, когда рассматриваемый образ обладает сравнительно большой энергией. В этом случае дискретные значения энергии лежат близко друг к другу, сравнительно малая область энергии содержит уже многочисленные высокие волновые частоты или — что то же — короткие длины волн, и их суперпозиция позволяет сравнительно резко ограничить в пространстве конфигурации маленький волновой пакет с определенным импульсом. Тогда волновая механика переходит в корпускулярную, дифференциальное уравнение Шрёдингера — в классическое дифференциальное уравнение Гамильтона - Якоби, и волновой пакет движется в пространстве конфигурации по тем же законам, которые управляют движением системы материальных точек в классической механике. Но это длится, вообще говоря, лишь известный промежуток времени. Ибо, так как отдельные волны материи не всегда интерферируют тем же самым образом, волновой пакет более или менее быстро расплывается, положение соответствующих точек конфигурации становится все менее резким, и в конце концов только волновая функция ψ остается точно определенной.

Совпадают ли все эти следствия с опытом? Исследование этого вопроса, вследствие малости кванта действия, может быть предпринято лишь в рамках атомной физики и требует поэтому всегда лишь в высшей степени тонких вспомогатель-

ных средств. Предварительно можно только сказать, что до сих пор еще неизвестно ни одного факта, который бы давал повод к сколько-нибудь основательному сомнению в физическом значении всех этих следствий.

Со времени установления волнового уравнения развитие и разработка теории пошло почти стремительным темпом. В рамках этого доклада невозможно изложить все те расширения и применения, которые испытала теория за последние годы. Из первых я только назову введение так называемого собственного вращения электронов и протонов, далее, релятивистическую формулировку квантовой механики, из последних — применение к проблеме молекулы и рассмотрение так называемой проблемы многих тел, т. е. применение к образам, состоящим из нескольких или многих совершенно одинаковых материальных точек. При этом последнем применении возникают в особенности вопросы статистического характера, которые относятся к числу возможных различных состояний в изолированном образе с заданной энергией и которые имеют значение также при расчете энтропии образа.

Наконец, я вынужден также отказаться от специального рассмотрения физики световых квантов, которая испытала развитие, в известном смысле противоположное физике материальной точки. Ибо в этой области первоначально господствовала в классической физике Максвеллова теория электромагнитных волн, и только позднее выяснилось, что принятие дискретных световых частиц неизбежно, т. е. что и электромагнитные волны, подобно волнам материи, можно толковать как волны вероятности.

Едва ли существует более яркое доказательство того, что чистая волновая теория так же мало может удовлетворить требованиям новой физики, как и чистая корпускулярная теория. Обе теории представляют предельные крайние случаи. Между тем как характерная для классической механики корпускулярная теория правильно передает положение образа, но оказывается непригодной при определении „собственных значений“ его энергии и импульса, волновая теория, характерная для классической электродинамики, хотя и дает энер-

гито и импульс, но чужда понятию о локализации световых частиц. Общий случай представляет промежуточная область, в которой обе теории играют практически равнозначную роль и к которой можно приблизиться либо с одной, либо с другой стороны, однако пока что — на небольшое расстояние. Здесь еще ждут своего разрешения очень многие темные вопросы, и следует подождать, какой из предложенных для их разрешения методов — первоначально изобретенное Гейзенбергом, Борном и Иорданом матричное исчисление, волновая теория, установленная де Бройлем и Шредингером, или введенная Дираком математика q -чисел — лучше всего приведет к цели.

V.

Если мы попытаемся суммировать предыдущее изложение и вместе с тем получить общий очерк характеристических признаков новой картины мира, то первое впечатление будет безусловно совершенно неудовлетворительное. Прежде всего должно неприятно удивлять, что волновая механика, которая ведь представляет резкую противоположность классической механике, просто пользуется такими заимствованными у последней понятиями, как понятие координат и импульса материальной точки или как понятие кинетической и потенциальной энергии системы точек. Вместе с тем она же утверждает, что совершенно невозможно одновременно точно определить положение и импульс точки. Тем не менее эти понятия совершенно необходимы для волновой механики, ибо без них невозможно построить пространство конфигурации и его мероопределение.

Другая трудность для понимания волновой теории, по-видимому, лежит в том, что волны материи не обладают той степенью наглядности, как, например, акустические или электромагнитные волны, так как волны материи распространяются не в обыкновенном пространстве, но в пространстве конфигурации, и их период колебания зависит от выбора физического образа, к которому они относятся. Чем

протяженнее выбран образ, тем больше его энергия, а вместе с нею и частота колебаний.

С такими возражениями нелегко справиться. Однако они были бы преодолены если бы содержание новой теории, во-первых, не обнаруживало внутренних противоречий, а во-вторых, в своих применениях эта теория давала бы однозначные и важные для эксперимента результаты. Однако даже и в том, насколько квантовая механика удовлетворяет этим требованиям, мнения в настоящее время еще несколько расходятся. Да будет мне позволено поэтому остановиться на этом пункте.

Часто с особым ударением указывают на то, что квантовая механика имеет дело лишь с принципиально наблюдаемыми величинами и лишь с проблемами, имеющими физический смысл. Это, конечно, так и есть, однако это не может быть отнесено на счет теории квантов в качестве ее особого преимущества перед другими теориями. Ибо решить вопрос о том, является ли данная величина принципиально наблюдаемой, или имеет ли известная проблема физический смысл, никогда не возможно а priori, но можно лишь с точки зрения определенной теории. Различие теорий лежит как раз в том, что по одной теории известная величина принципиально наблюдаема, известная проблема физически осмыслена, тогда как по другой теории этого нет. Так, абсолютная скорость земли по теории покоящегося светового эфира Френеля — Лоренца принципиально наблюдаема, по теории относительности — нет. Или абсолютное ускорение тела по Ньютоновской механике принципиально наблюдаемо, по релятивистической механике — нет. Равным образом, проблема построения *perpetuum mobile* до введения принципа сохранения энергии имела физический смысл, после установления принципа сохранения энергии она этот смысл потеряла. Выбор между этими противоречивыми утверждениями лежит не в природе самих теорий, — он дается опытом. Поэтому для характеристики превосходства квантовой механики над классической недостаточно сказать, что первая имеет дело только с принципиально наблюдаемыми величинами, — это в соответствующем смысле справедливо и в применении

к классической механике, — но нужно фиксировать те именно величины, которые по новой теории принципиально наблюдаемы — или же не наблюдаемы — и затем показать, что опыт это подтверждает.

На самом деле это доказательство, например для рассмотренного выше соотношения неопределенности Гейзенберга, проведено до тех пор, до каких это до настоящего времени было возможно, что и может считаться обоснованием превосходства волновой механики.

Несмотря на эти очевидные успехи, характерное для теории квантов соотношение неопределенности вызвало в широких кругах возражение — очевидно потому, что в согласии с этим соотношением определение величин, с которыми постоянно приходится иметь дело при вычислениях, становится принципиально неточным. При этом неприязненное отношение значительно усиливается тем, что, как мы видели выше, в интерпретацию уравнений квантовой механики вводится понятие вероятности. Ибо тем самым, повидимому, отменяется требование строгой причинности и вместо нее допускается известный индетерминизм. В самом деле, в настоящее время существуют весьма выдающиеся физики, которые считают необходимым в силу обстоятельств пожертвовать строгой причинностью в физической картине мира.

Если бы подобный шаг оказался действительно необходимым, то вместе с тем цель физического исследования весьма сильно проиграла бы, и нам приходилось бы считаться с огромным недостатком. Ибо, если вообще можно делать выбор, по моему мнению, при всех обстоятельствах детерминизм следует предпочесть индетерминизму, хотя бы просто потому, что определенный ответ на вопрос всегда имеет большую ценность нежели неопределенный.

Однако, насколько я понимаю, ничто нас вовсе не принуждает совершить этот акт отречения. Ибо невозможность дать определенный ответ на вопрос иногда зависит не от свойств теории, но от свойств поставленного вопроса. На физически недостаточно сформулированный вопрос и самая совершенная физическая теория не сможет дать определенный ответ. Это уже в рамках классической статистики общеизвестная и хорошо

освещенная истина. Если, например, для двух упругих шаров, сталкивающихся на плоскости, известны во всех деталях как скорости шаров до удара, так и законы удара, то мы все-таки не можем указать их скорости после удара. Действительно, для вычисления четырех неизвестных компонентов скорости обоих шаров после удара в нашем распоряжении имеются только три уравнения: уравнения сохранения энергии и двух компонентов импульса. Однако мы не говорим, что при ударе не имеется причинности, но мы говорим, что для полной детерминированности не хватает существенных данных.

Для того чтобы иметь возможность применить это рассуждение к проблемам квантовой физики, мы должны теперь, под конец, вернуться к тем мыслям, которые мы рассматривали во введении.

Если действительно справедливо, что структура физической картины мира в своей непрерывной эволюции все дальше удаляется от чувственного мира и в соответствующей мере все больше приближается к реальному, принципиально непознаваемому миру, то само собой разумеется, что картина мира все больше и больше должна освобождаться от всех антропоморфных элементов. Таким образом, совершенно невозможно вводить в физическую картину мира понятия, которые каким бы то ни было образом связаны с искусством человеческой техники измерений. Это и не делается никоим образом в соотношении неопределенности Гейзенберга. Ибо последнее непосредственно вытекает из того соображения, что элементы новой картины мира суть не материальные корпускулы, но простые периодические волны материи, соответствующие рассматриваемому физическому образу, и является следствием математического закона, согласно которому невозможно суперпозицией простых периодических волн конечной длины определить известную точку с известным импульсом. С измерениями этот закон ничего общего не имеет, и волны материи со своей стороны однозначно определены математической краевой проблемой, соответствующей рассматриваемому случаю. Об индетерминизме при этом нет и речи.

Однако другой вопрос — об отношении волн материи к чувственному миру, который один нам сообщает сведения о фи-

зических процессах. Ведь о совершенно замкнутом в себе образе мы вообще никогда ничего не узнали бы.

На первый взгляд кажется, что этот вопрос мало относится к физике, так как он отчасти вторгается в область физиологии и даже психологии. Тем не менее из этого возражения не возникают принципиальные затруднения. Ибо всегда можно себе представить, что человеческий орган чувств заменен соответственно сконструированным измерительным прибором, саморегистрирующим аппаратом, как например фотографическая пластинка, которая фиксирует возникающие во вне воздействия и таким образом дает нам сведения о процессах, совершающихся в окружающем. Если мы включим такие измерительные приборы в рассматриваемую физическую систему и удалим все остальные воздействия, то мы получим в таком случае замкнутый от внешнего мира физический образ, о котором мы можем кое-что узнать путем измерений, принимая, конечно, во внимание структуру прибора и его возможное воздействие на измеряемые процессы.

Если бы мы обладали таким измерительным прибором, который был бы в состоянии реагировать на отдельные волны материи так же, как, например, акустический резонатор на звуковую волну, то мы могли бы в таком случае измерять в отдельности волны материи и таким образом анализировать весь волновой процесс. Этого конечно нет; напротив, показания измерительного прибора, например фотографической пластинки, не позволяют сделать однозначного заключения о всех деталях исследуемого процесса.

Непосредственное обоснование для принятия индетерминизма можно было бы искать в том обстоятельстве, что, по волновой механике, процессы в замкнутой, изолированной от внешнего мира системе материальных точек ни в коем случае не детерминированы начальным состоянием системы, т. е. начальной конфигурацией и начальным импульсом, и даже не детерминированы приблизительно; ибо в самом деле волновой пакет, который соответствует начальному состоянию, с течением времени растекается и разлагается на отдельные волны вероятности.

Однако ближайшее рассмотрение показывает, что здесь индетерминизм обусловлен лишь постановкой вопроса. Последняя заимствована из корпускулярной механики, в которой действительно начальное состояние однозначно определяет процесс на будущие времена; но эта постановка вопроса не отвечает волновой механике уже потому, что в ней, в соответствии с соотношением неопределенности, фигурирует принципиальная неточность конечной величины.

Но уже со времен Лейбница и в классической механике известна другая постановка вопроса, которая в классической механике также ведет к определенному ответу. Процесс будет полностью детерминирован и притом на все времена, когда кроме конфигурации в известный момент задан не импульс, но конфигурация той же системы в другой момент. Для расчета процесса служит тогда вариационный принцип, принцип наименьшего действия. Так, в приведенном ранее примере плоского упругого удара двух шаров при заданном начальном и конечном положении шаров и заданном промежутке времени три неизвестные, а именно две координаты места и момент соударения, полностью определены тремя уравнениями сохранения.

Эту измененную формулировку проблемы, в противоположность предыдущей, можно перенести также и в волновую механику. Конечно, определенная конфигурация, как мы видели, волновой теорией никогда не может быть фиксирована совершенно точно, однако неточность можно принципиально уменьшить сколь угодно и потому детерминировать процесс с любой степенью точности. Что же касается расположения волнового пакета, то оно вовсе не является доказательством индетерминизма. Ибо волновой пакет может и вновь собраться. Знак времени в волновой теории так же не играет роли как и в корпускулярной. Всякий процесс движения может ведь также протекать и в обратном направлении.

Конечно, при указанной формулировке проблемы определенный волновой пакет, вообще говоря, существует только в обоих выбранных моментах времени. В промежутке, а также до и после, отдельные элементарные волны ведут отдельное существование. Но как бы мы их ни называли — волнами

материи или волнами вероятности — они во всяком случае полностью детерминированы. Таким образом объясняется кажущееся парадоксальным утверждение, что если физический образ из некоторой определенной конфигурации в некоторый определенный промежуток времени переходит в другую известную конфигурацию, то вопрос о конфигурации в промежуточные моменты времени не имеет физического смысла; по этому воззрению, совершенно так же не имеет никакого смысла задаваться вопросом о пути светового кванта, который испускается точечным источником света и поглощается в некоторой точке экрана, служащего для наблюдений.

Следует однако подчеркнуть, что при этом способе рассмотрения смысл детерминизма иной, нежели принятый в классической физике. Ибо там была детерминирована конфигурация, здесь — в квантовой физике — детерминирована волна материи. Разница — особенно важная потому, что конфигурация связана с чувственным миром гораздо более непосредственно, нежели волна материи. В этом смысле в новой физике связь физической картины мира с чувственным миром сделалась значительно менее тесной.

Это, разумеется, недостаток, но с ним приходится примириться, для того чтобы спасти детерминизм в картине мира. Кроме того, этот шаг повидимому делается в том направлении, которое, как уже несколько раз указывалось, является характерным для истинного развития науки. Ибо структура физической картины мира по мере своего усовершенствования все более удаляется от чувственного мира и принимает все более абстрактные формы. А с точки зрения принципа относительности такое представление как будто бы даже неизбежно. Действительно, так как по этому принципу время не обладает никаким преимуществом перед пространством, то отсюда следует с необходимостью, что если для каузального описания физического процесса необходимо рассмотрение конечной области пространства, то для этого также должен быть привлечен и конечный интервал времени.

Но может быть и предложенная здесь постановка вопроса еще слишком односторонняя, слишком антропоморфна, и потому непригодна для удовлетворительного построения новой физи-

ческой картины мира, и быть может следует искать иной постановки. Во всяком случае здесь еще нужно разрешить многие сложные проблемы и выяснить многие темные пункты.

Это своеобразное затруднительное положение, в которое попала в настоящее время теоретическая физика, естественно дает повод для сомнения в том, что теория с ее радикальными новшествами находится на правильном пути. Разрешение этого рокового вопроса зависит единственно от того, насколько при непрерывно прогрессирующей работе над физической картиной мира сохраняется необходимый контакт последней с чувственным миром. Без этого контакта даже наиболее законченная в отношении формы картина мира была бы лишь мыльным пузырем, который лопнул бы при первом дуновении ветра.

К счастью, в этом отношении, по крайней мере в данный момент, мы можем быть совершенно спокойны. Мы можем даже без преувеличения утверждать, что в истории физики не было эпохи, когда теория и опыт шли бы так дружно в ногу как в настоящее время. Ведь именно экспериментальные факты пошатнули и опрокинули классическую теорию. Всякая новая идея, всякий новый шаг был подготовлен и даже вынужден результатами опыта. Как появлению теории относительности предшествовал оптический интерференционный опыт Майкельсона, так теории квантов предшествовали измерения Луммера и Прингсгейма, Рубенса и Курльбаума о распределении энергии в спектре, опыты Ленарда о фотоэлектрическом эффекте, Франка и Герца об электронных толчках. Я зашел бы слишком далеко, если бы стал здесь напоминать те многочисленные, частью совершенно поразительные результаты опытов, которые все дальше сдвигали теорию с классической точки зрения и направляли ее по совершенно определенным путям. Но можно только желать и надеяться, чтобы в этой совместной работе, в которой в мирном соревновании участвуют все страны земли, никогда не наступало разобщенности. Ибо в постоянном взаимодействии экспериментального и теоретического исследования, — во взаимодействии, которое одновременно служит стимулом и контролем, — единственный залог непрерывного прогресса физической науки.

ВВЕДЕНИЕ В ВОЛНОВУЮ МЕХАНИКУ ШРЁДИНГЕРА. ¹

Карл К. Дарроу, Нью-Йорк.

В период, когда одна какая-либо область физических явлений вызывает особенно жгучий интерес и подвергается особенно интенсивной разработке, сосредоточивая на себе внимание многих блестящих представителей теоретической физики, чьей-либо гениальной интуиции иногда удается дать известным законам такое новое обоснование, представить их в таком новом свете, что этот новый аспект знакомых явлений с чрезвычайной быстротой вытесняет все прежние. При этом новая теория часто не дает даже большей согласованности с экспериментом, чем прежние; она может не вести к каким-либо новым предсказаниям; ее математические выводы могут быть тождественны с выводами старой теории; прежние символы могут повторяться в тех же по существу уравнениях, под новыми названиями. В других случаях теория может обладать всеми перечисленными достоинствами, которые обычно являются решающими при замене одной теории другой, и тем не менее быть обязанной своей победой отнюдь не им. Новая теория торжествует потому, что она кажется более естественной, более вразумительной или более красивой, — все эти слова обозначают, что теория удовлетворяет какому-то требованию (или не противоречит какому-то предубеждению), глубоко укоренившемуся в уме ее совре-

¹ Настоящая статья впервые была опубликована в „Bell System Technical Journal“ и вслед за тем появилась в немецком переводе отдельной книжкой с предисловием Э. Шрёдингера (изд. S. Hirzel, Leipzig 1929). Настоящий перевод сделан по первоначальному английскому тексту и сверен с немецким изданием, куда автор внес ряд поправок и изменений.

Ред.

менников. Позже волна успеха теории может спасти не потому, чтобы открылись какие-либо существенные недостатки ее, а просто потому, что следующее поколение физиков не разделяет более симпатий и предубеждений предыдущего. Кинетическая теория газов была встречена с восторгом поколением, которое хотело верить в существование атомов; электромагнитная теория Максвелла — поколением, не хотевшим признавать действия на расстоянии. Теория квантов всегда должна была бороться против скептицизма тех, кто не хотел примириться с отказом от непрерывности в явлениях природы. Теория, о которой будет идти речь в настоящей статье, завоевала себе в течение немногих месяцев широкое признание в научном мире потому, что она обещала исполнить долго подавлявшиеся, но неизгладимые желания большинства современных физиков.

Так как волновая механика де Бройля - Шрёдингера является новым способом объяснения широкой области известных уже явлений, то попытка полного обзора в одной статье всего, что эта теория может объяснить, является и бесполезной и едва ли выполнимой. Быть может, через несколько лет мы найдем наиболее убедительные доказательства в пользу справедливости новой теории в каких-либо новых или еще мало известных физических явлениях, вроде недавно открытой интерференции электронов; в настоящее время достаточным доказательством можно считать возможность объяснить с помощью волновой механики те основные факты, которые послужили материалом для создания Боровской модели атома. Я напомню, что важнейшие и наиболее существенные факты в области, которая интересует нас в настоящей статье, суть следующие: атомы существуют в особых так называемых стационарных состояниях; они излучают или поглощают лучистую энергию при переходе из одного стационарного состояния в другое; при этом частота колебаний определяется разностью между энергиями атома до и после процесса. Далее, между энергиями различных стационарных состояний у некоторых атомов и молекул существуют закономерные соотношения, выражаемые теми или иными эмпирическими формулами. Вот вкратце факты, подлежащие объяснению.

Бор показал, что значения энергии, которую обладает в различных стационарных состояниях атом водорода, могут быть объяснены теоретическим путем с помощью следующих допущений: во-первых, атом состоит из ядра и одного электрона, с известным соотношением масс, и с равными, но противоположными по знаку зарядами. Во-вторых, обе частицы — ядро и электрон — предполагаются обращающимися вокруг общего центра тяжести, согласно законам классической механики, но без излучения энергии. В-третьих, из бесконечного числа возможных по законам классической механики орбит выделяется группа эллипсов, удовлетворяющих известным требованиям, и эти эллипсы объявляются единственными „разрешенными“ для электрона орбитами; каждой такой орбите соответствует особое „стационарное состояние“ атома. Обратное, каждое стационарное состояние может быть рассматриваемо как соответствующее особой дозволенной орбите.

Первое из этих предположений со времени его появления не исчезало больше из представления физиков. Волновая механика также сохранила его, хотя и в несколько скрытой форме. Несколько менее прочны второе и третье из основных положений Бора. Эти утверждения по существу остаются — и всегда останутся — справедливыми в тех рамках, в которых они только и были справедливы с самого начала. Это значит: если мы примем первые два положения Бора, то можно с уверенностью сказать, что для каждого эмпирически установленного стационарного состояния атома можно будет подобрать подходящую, т. е. обладающую надлежащей энергией, эллиптическую орбиту. Однако существенно не это, а то, в состоянии ли мы указать простые и ясные критерии, позволяющие выделить семью разрешенных эллипсов из бесконечного множества возможных вообще орбит, и указать признаки, которым удовлетворяют все дозволенные орбиты — и никакие другие. С первого взгляда это кажется возможным. Однако ближайшее исследование показало, что характерные признаки, установленные было для отличия дозволенных орбит от всех прочих отнюдь не во всех случаях пригодны для этой цели. Prestиж дозволенных эллипсов таким образом несколько упал. Правда, введение вращающегося около соб-

ственной оси электрона (spinning electron) в значительной степени улучшило положение; однако и это улучшение модели не могло спасти ее от растущего недоверия — особенно со стороны тех, кто никогда не верил как следует в ее реальность.

Что касается других атомов и молекул, то и тут положение было аналогичным. Бор и его последователи рассматривали атомы как системы из большего или меньшего числа электронов, окружающих ядро. Двухатомные молекулы рассматривались как системы из двух ядер, связанных общими электронами, и способные, с одной стороны, обращаться вокруг общего центра тяжести, а с другой — колебаться, как два конца пружины, в направлении линии, связывающей центры обоих атомов друг с другом. Этот образ сохраняется и в волновой механике, но представления о разрешенных амплитудах колебания и скоростях обращения атомов и о дозволенных орбитах электронов в настоящее время так же сильно взяты под подозрение, как и представление о дозволенных эллиптических орбитах в атоме водорода.

Потеря уверенности в реальном существовании эллиптических орбит только обострила внимание к другому существенному недостатку первоначальной модели Бора. Модель эта не давала никакого объяснения тому факту, что при переходе атома из одного стационарного состояния с энергией E_i в другое, с энергией E_j , он поглощал (или излучал) волну света с частотой, в точности определяемой уравнением

$$\nu = \frac{1}{h} (E_i - E_j),$$

т. е. равной частному от деления разности энергий на постоянную П л а н к а. Ни в начальном, ни в конечном состоянии атома ничто не колеблется и не вращается в нем с частотой равной частоте испускаемой при переходе волны (исключения из этого правила не имеют принципиального значения). Таким образом, частота испускаемой атомом волны не имеет ничего общего с периодом обращения или колебания составных частей атома, — это представление нельзя было не назвать загадочным, так как оно расходилось со всеми наблюдениями в области как звуковых, так и электрических волн.

Если бы удалось ввести в атомную модель представление о каком-либо вибраторе или ротаторе, с частотой периодического движения, измеряющейся частным от деления энергии соответствующего стационарного состояния на постоянную Планка, тогда это „что-то“ колебалось бы до испускания волны с частотой E_j/h , а после испускания с частотой E_j/h , и частота испущенной волны равнялась бы частоте биений, получаемых при интерференции обоих колебаний. Это весьма соблазнительная возможность; и волновая механика открывает путь к практическому использованию ее. Если окажется возможным получить правильные значения для энергий стационарных состояний путем предъявления определенных требований к этому колеблющемуся „чему-то“ взамен электронных орбит, то мы получим представление об атоме, которое объясняет все, что в силах объяснить модель с эллиптическими орбитами, плюс еще упомянутое выше толкование частоты испускаемых атомом колебаний, а может быть и еще что-либо в придачу. Вот прогресс, который обещает нам развитие волновой механики.

Прежде чем перейти к самому изложению, я хотел бы закончить настоящее введение двумя предупреждениями. Во-первых, необходимо указать на то обстоятельство, что волновая механика имеет несколько различных аспектов, и к ней можно подойти с нескольких различных сторон. Путь, который я выбрал в настоящей статье, не вполне тождествен ни с путем, избранным де Бройлем, ни с таковым, примененным Шрёдингером в их оригинальных работах. Во-вторых, нужно заранее сказать, что волновая механика еще не полна. Она была с успехом применена к ряду важных проблем; но существует еще много явлений, требующих для своего объяснения расширения теории, которое до сих пор служит еще предметом споров между рядом теоретиков. Новая механика до сих пор не застыла еще в какой-либо окончательной форме; она остается эластичной, и понадобится еще работа многих теоретиков — а может быть и многих экспериментаторов — для того чтобы придать ей окончательную форму. — В настоящей статье я делаю попытку изложить лишь первое обоснование теории; очертить лишь основные рассуждения Шрёдингера и де Бройля.

КЛАССИЧЕСКАЯ И ВОЛНОВАЯ МЕХАНИКА.

Основные принципы классической Ньютоновой механики могут быть выражены в различной форме, каждая из которых особенно приспособлена для разрешения определенных проблем. Наиболее широко известна формулировка, данная самим Ньютоном. К сожалению, для проблем, интересующих нас в настоящей статье, наиболее удобной является не эта, а другая форма выражения основных принципов механики. Я выведу эту форму из Ньютоновой, воспользовавшись одним особенно простым примером и исходя из декартовых координат.

Представим себе частицу с массой m и зарядом e , движущуюся в электростатическом поле, потенциал которого представляет собой функцию координат: $U(x, y, z)$.

Импульс (количество движения) частицы представляет собой вектор с компонентами mx , my и mz . Мы назовем их импульсами в направлении координат x , y и z и обозначим буквами p_x , p_y и p_z . Сила, действующая на частицу, равняется произведению заряда e на градиент потенциала, взятый с обратным знаком. Градиент потенциала есть вектор с компонентами dU/dx , dU/dy , dU/dz .

Ньютонова формулировка основного закона механики (сила есть производная по времени от импульса)¹ даст:²

$$\begin{aligned} -e \frac{dU}{dx} &= \frac{dp_x}{dt} & \dot{p}_x &= -e \frac{dU}{dx} \\ -e \frac{dU}{dy} &= \frac{dp_y}{dt} & \dot{p}_y &= -e \frac{dU}{dy} \\ -e \frac{dU}{dz} &= \frac{dp_z}{dt} & \dot{p}_z &= -e \frac{dU}{dz} \end{aligned} \quad (1)$$

¹ Формулировка „сила = масса \times ускорение“, как известно, не принадлежит самому Ньютону. Она однако тождественна с Ньютоновой формулировкой, когда масса постоянна; ибо для $K = \frac{d(mv)}{dt}$ при $m = \text{const}$ следует $K = m \frac{dv}{dt}$.

² Знаком $=$, как обычно, обозначается соотношение утверждаемое равенством; знаком \equiv обозначается само собою разумеющееся тождество, т. е. мы тем самым символизируем лишь иное обозначение той же величины.

Умножая обе стороны на \dot{x} ($\equiv \frac{dx}{dt}$), \dot{y} , \dot{z} и складывая все три уравнения, получим:

$$\dot{p}_x \dot{x} + \dot{p}_y \dot{y} + \dot{p}_z \dot{z} = -e \left(\frac{dU}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dU}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dU}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \right).$$

Или, так как $\dot{p}_x = m \frac{dx}{dt}$ и т. д.:

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = -e \left(\frac{dU}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dU}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dU}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \right) \quad (2)$$

В левой части этого равенства стоит скорость изменения кинетической энергии, которую мы, как обычно, назовем через T . Дадим теперь интерпретацию правой части.

С этой целью мы введем величину V . Этим символом мы обозначаем произведение из потенциала U в том месте, где находится частица в данный момент, на ее заряд e . Это произведение есть потенциальная энергия частицы, и правая часть уравнения (2) дает скорость изменения этой величины во времени. Таким образом все уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d(T + V)}{dt} = 0$$

или

$$T + V = \text{const} \equiv E. \quad (3)$$

Мы называем E полной энергией, и уравнение (3) выражает закон сохранения энергии в применении к замкнутой системе частиц + поле.

Для дальнейшего развития я воспользуюсь еще более частным случаем, именно предположу, что речь идет о движении частицы с массой m и зарядкой e в поле „ядра“, притягивающего частицу с силой обратно пропорциональной квадрату расстояния. Ядро мы представляем себе как неподвижный центр притяжения, несущий заряд, равный по величине и противоположный по знаку заряду частицы. Пользуясь декартовыми координатами, с началом совпадающим с ядром, мы имеем:

$$V = - \frac{e^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

В полярных координатах r , θ , φ (формулы преобразования $x = r \sin \theta \cos \varphi$; $y = r \sin \theta \sin \varphi$; $z = r \cos \theta$) потенциальная энергия выражается уравнением:

$$V = -\frac{\mu^2}{r}.$$

Ясно, что выражение для потенциальной энергии в полярных координатах в этом случае гораздо проще, чем в прямоугольных. Обратное справедливо в отношении кинетической энергии. Надлежащий выбор координат является при разрешении многих физических проблем вопросом первостепенной важности. Мы будем еще некоторое время вести рассуждение параллельно в обеих системах координат — прямоугольной и полярной. Основные уравнения (3) приобретают в рассматриваемом нами случае форму в прямоугольных координатах:

$$\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\mu^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = E, \quad (4a)$$

в полярных координатах:

$$\frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2) - \frac{\mu^2}{r} = E. \quad (4b)$$

В этих уравнениях потенциальная энергия выражена в функции координат (x , y , z или r , θ , φ). Кинетическая энергия представляется функцией координат и скоростей (\dot{x} , \dot{y} , \dot{z} или \dot{r} , $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$). Желательным для успеха дальнейших выводов является изображение кинетической энергии в функции координат и импульсов, взаимных скоростей. Мы уже познакомились с выражением импульсов в прямоугольной системе координат; это были количества $m\dot{x}$, $m\dot{y}$ и $m\dot{z}$. Легко заметить, что величины эти суть производные кинетической энергии

$\left[T = \frac{1}{2} (m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + m\dot{z}^2) \right]$ по скоростям:

$$p_x = \frac{dT}{dx} \quad p_y = \frac{dT}{dy} \quad p_z = \frac{dT}{dz}. \quad (5)$$

Аналогичным образом определяются импульсы и в других системах координат; кинетическая энергия выражается в виде

функции скоростей, и затем дифференцируется по последним. В полярных координатах мы получаем таким образом:

$$p_r \equiv \frac{dT}{dr} = m\dot{r} \quad p_\theta \equiv \frac{dT}{d\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}. \quad (6)$$

$$p_\varphi \equiv \frac{dT}{d\dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}. \quad (7)$$

Выражая в уравнениях (4a) и (4b) кинетическую энергию в виде функции координат и импульсов, мы приходим к уравнениям:

$$\frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{e^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = E \quad (7a)$$

$$\frac{1}{2m} (p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} p_\varphi^2) - \frac{e^2}{r} = E. \quad (7b)$$

Когда кинетическая и потенциальная энергия выражены как функции координат и импульсов, проблема рассматриваемого нами рода может считаться подготовленной к разрешению по интересующим нас методам классической механики.

Дабы сделать следующий шаг, мы перейдем к рассмотрению функции $L = T - V$, т. е. разности между кинетической и потенциальной энергией частицы во время ее движения в силовом поле:

$$L \equiv T - V = 2T - E. \quad (8)$$

В частности, нас интересует интеграл этой функции по времени:

$$W \equiv \int L dt = \int 2T dt - Et \quad (9)$$

(E не зависит от времени).

Мы вводим в формулу (9) выражение кинетической энергии в прямоугольных или полярных (или любых других) координатах и получаем:

$$W = m \int (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) dt - Et = \\ = m \int (\dot{x}dx + \dot{y}dy + \dot{z}dz) - Et \quad (10a)$$

$$W = m \int (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2) dt - Et = \\ = m \int (rdr + r^2\dot{\theta}d\theta + r^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}d\varphi) - Et. \quad (10b)$$

Из уравнений (10a) и (10b) видно, что

$$p_x = \frac{dW}{dx} \quad p_y = \frac{dW}{dy} \quad p_z = \frac{dW}{dz} \quad (11a)$$

$$p_r = \frac{dW}{dr} \quad p_\theta = \frac{dW}{d\theta} \quad p_\varphi = \frac{dW}{d\varphi}. \quad (11b)$$

Вообще импульсы, соответствующие той или иной системе координат, суть производные функции W по координатам.

При подстановке этих выражений для импульсов в основное уравнение (7) мы получаем:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{dW}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dW}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 \right] + V(x, y, z) = E. \quad (12)$$

Выражение

$$\sqrt{\left(\frac{dW}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dW}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dW}{dz} \right)^2}$$

представляет собой не что иное как абсолютную величину градиента функции W , которую мы, как это принято в векторном анализе обозначаем с помощью приставки grad перед символом функции. Мы можем таким образом написать взамен (12):

$$(\text{grad } W)^2 = 2m (E - V). \quad (13)$$

Это уравнение определяет собой поведение производных функций W по координатам; дополнением к нему служит вытекающее из (9) соотношение:¹

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -E, \quad (13a)$$

определяющее производную W по времени.

Мы дошли теперь до места, где пути волновой механики расходятся с путями классической механики.

Идя путем классической механики, мы должны были бы приступить теперь к интегрированию уравнений и некоторым другим преобразованиям, в результате которых мы получили бы уравнения, изображающие собой траектории или орбиты, по

¹ V есть функция только координат x, y, z .

которым должна двигаться рассматриваемая нами частица. В частном случае, который мы выбрали, т. е. в случае центральной силы, действующей обратно пропорционально квадрату расстояния, эти орбиты оказались бы эллипсами. В каждом отдельном случае величина [и форма эллипса определялась бы соответственно значению постоянной E , а также значениям, принятым для других постоянных, встречающихся в ходе интегрирования. Что касается функции W , то она, сыграв свою роль в качестве величины, облегчающей вычисление орбит, исчезла бы из конечного результата. В качестве физической реальности остался бы электрон, обращающийся по эллипсу вокруг ядра, или планета, обращающаяся вокруг солнца.

Волновая механика поступает иначе. Она основывается на наблюдении, что уравнения (13) и (13а) вместе изображают семейство волн, распространяющихся в пространстве со скоростью

$$u = \frac{E}{\sqrt{2m(E - V)}}.$$

Чтобы обнаружить этот скрытый смысл уравнений (13) и (13а), представим себе, что в заданный момент t_0 функция W имеет определенное заданное значение W_0 во всех точках какой-либо поверхности S_0 ; например значение $W_0=1$ в момент $t_0=1$ во всех точках шаровой поверхности с радиусом $r_0=1$ вокруг начала координат. Мы покажем, что спустя короткое время, в момент t_0+dt , опять существует поверхность, во всех точках которой W имеет значение W_0 ; только это больше не поверхность S_0 , а другая поверхность S_1 , расположенная таким образом, что кратчайшее расстояние от точки на первоначальной поверхности S_0 до новой поверхности S_1 равняется ¹

$$u dt = \frac{E}{\sqrt{2m(E - V)}} dt.$$

Доказать это утверждение можно без всякого труда. Представим себе, что мы находимся в момент t_0 в точке P_0 и

¹ Следует иметь в виду, что электрон, движение которого мы исследуем, хотя и движется нормально к поверхностям $W = \text{const}$, но с совершенно другой скоростью v ; о замечательном соотношении между скоростями v и u мы еще будем говорить в конце статьи.

двигаемся со скоростью u в направлении, перпендикулярном к поверхности S_0 . В момент времени $t_0 + dt$ мы будем находиться в точке, где значение W определяется из формулы:

$$\begin{aligned} W &= W_0 + dW = W_0 + \frac{\partial W}{\partial s} ds + \frac{\partial W}{\partial t} dt = \\ &= W_0 + \text{grad } W ds + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) dt = \\ &= W_0 + u \text{ grad } W dt - E dt, \end{aligned} \quad (14)$$

так как в течение промежутка времени dt мы продвинулись на расстояние $ds = u dt$ вдоль нормали к поверхности S_0 , т. е. в направлении, в котором W изменяется со скоростью $\text{grad } W$; в то же время по уравнению (13а) в каждой точке пространства W изменяется с течением времени со скоростью $-Et$; таким образом в общем к моменту нашего прибытия в S_1 W возрастает до значения, изображенного в уравнении (14).¹ Если мы позволим теперь, что скорость нашего движения

$$u = \frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}} \quad (15)$$

и подставим в уравнение (14) значение $\text{grad } W$ из уравнения (13), то $u \text{ grad } W - E$ в уравнении (14) окажется равным нулю; другими словами, во всех точках пространства, которые мы будем проходить, в момент нашего прихода будет господствовать одно и то же значение W_0 ; мы, так сказать, несем с собою это значение. То же самое можно выразить другими словами, сказав, что W распространяется в пространстве в виде волнового фронта, движущегося вперед со скоростью, указанной в уравнении (15).

¹ Более подробный вывод: W есть функция пространства и времени; поэтому

$$dW = \frac{\partial W}{\partial s} ds + \frac{\partial W}{\partial t} dt. \quad (a)$$

Но скорость изменения W в направлении нормали к „поверхности уровня“ S_0 , по определению, есть не что иное как градиент W . Далее $ds = u dt$, а по (13а) $\frac{\partial W}{\partial t} = -E$. Пользуясь этим, мы можем представить (а) в следующем виде

$$dW = u \text{ grad } W \cdot dt - E dt.$$

Читатель невольно задаст теперь — если он не сделал этого уже раньше — следующий естественный вопрос: что же такое представляет собой в действительности эта функция W которая первоначально играла только вспомогательную роль а теперь приобрела неожиданно такое центральное значение? Читатель оглядывается назад, пытается уловить наглядное значение величины W , составить себе конкретное представление о ней. К сожалению, я не могу много помочь ему в удовлетворении этого весьма естественного желания. Я могу только указать, что W есть та самая величина, которая под названием „действия“ играет столь существенную роль при формулировке механического принципа наименьшего действия. Это обстоятельство вряд ли делает наше представление об этой функции более наглядным, но по крайней мере наше уважение к ней и вера в ее важное значение несколько увеличивается. Я могу далее подчеркнуть, что так как никто никогда не видел частиц, которые движутся внутри атома, то представление о волнах, струящихся в недоступном для нашего наблюдения микроскопе вокруг ядра, ничем не менее „непосредственно“, чем представление о недоступных нашему непосредственному наблюдению электронах, обращающихся по эллипсам вокруг ядра. (Правда, на это можно возразить, что обращение планет вокруг солнца наглядно иллюстрирует представление об обращающихся вокруг ядра электронах, в то время как никто не видел еще на небе чего-либо подобного движущимся волновым фронтам функции W .) Я могу, наконец, отметить, что для многих практических применений — в частности для предсказания энергии стационарных состояний — не важно, что такое представляет собой „на самом деле“ функция W . Это столь же безразлично, как безразлично для решения квадратного уравнения, обозначена ли неизвестная величина буквой x или t и имел ли тот, кто составлял это уравнение, в виду расстояние или время. При практическом пользовании волновой механикой можно просто начать с уравнения (20), положить его в основу теории без дальнейшего объяснения или оправдания. Однако в действительности между новой и старой механикой должна быть глубокая внутренняя связь, которая

при таком механическом способе введения уравнения (20) останется совершенно незаметной. Я мог бы сослаться здесь на попытки самого Шрёдингера дать функции W реальное объяснение (попытки эти будут подробнее затронуты в последней части статьи). Однако я хотел бы, чтобы представление о функции W возникло у читателя самостоятельно, в ходе ознакомления с основами волновой механики.

Мы предложили читателю рассматривать уравнение (18) и (13а) как описание семейства волновых фронтов, двигающихся вперед со скоростью $\frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}}$. Легко заметить,

что данное таким образом описание волны является неполным. В уравнениях (13) и (13а) не заключается никаких указаний на „длину волны“ или на „частоту“ того неизвестного процесса, который обуславливает собой возникновение волны. Если бы мы каким-либо путем и определили эту частоту, в уравнениях типа (13) для нее не найдется места.

Эти уравнения отвечают примерно простому утверждению, что гребни волн, возникающих на поверхности воды вследствие падения камня, кругообразно распространяются с определенной скоростью; или что звуковые сигналы от весьма удаленного источника звука можно рассматривать как плоские волны, движущиеся со скоростью 340 м/сек. Но для того чтобы детальнее описать водяные или звуковые волны, нужно еще указать их частоту и интенсивность; следовательно, нужно отыскать более объемлющее волновое уравнение. То же самое относится и к волнам функции W .

При исследовании обычных колебательных явлений, как-то: колебаний натянутых струн, мембран и т. п., обычно пользуются волновым уравнением в следующей общей форме:

$$u^2 \left(\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{d^2\psi}{dz^2} \right) - u^2\Delta\psi = \frac{d^2\psi}{dt^2}. \quad (16)$$

В этом уравнении ψ означает величину, которая распространяется волнообразно, например в случае механических колебаний — elongацию, в случае электрических колебаний — напряжение поля, и т. д. Уравнение (16) утверждает, что ускорение, с которым эта величина изменяется в определен-

ном месте пространства (правая часть нашего уравнения), пропорционально „кривизне“ в данной точке (выражение в скобках в левой части);¹ например ускорение, с которым точка оттянутой струны стремится к своему положению равновесия пропорционально кривизне струны в этой точке, и т. д. Вычисление показывает далее, что множитель пропорциональности u^2 есть не что иное как скорость, с которой распространяется волна — напр. вдоль струны. В уравнении (16) мы пользуемся обычным сокращенным обозначением, согласно которому сумма вторых производных функций ψ по трем координатам обозначается символом $\Delta\psi$. Эту сумму называют „оператором Лапласа“ (не смешивать с градиентом, который представляет собою сумму квадратов первых производных).

При рассмотрении обычных механических колебательных процессов обычно к уравнению (16) присоединяют еще второе уравнение:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -4\pi^2\nu^2\psi, \quad (17)$$

где ν означает частоту колебания. (Это уравнение говорит, что ускорение пропорционально отклонению от положения равновесия; тем самым колебание трактуется как гармоническое, что для колебаний с малой амплитудой, вообще говоря, позволительно.)

Комбинируя (16) и (17), получаем:

$$\Delta\psi + \frac{4\pi^2\nu^2}{u^2}\psi = \Delta\psi + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\psi = \Delta\psi + k^2\psi = 0 \quad (18)$$

Здесь λ есть длина волны $\left(= \frac{u}{\nu} \right)$, и $k^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}$ введено для сокращения (k^2 , а не k — для того чтобы, как это обычно делается, показать, что коэффициент при ψ существенно положителен).

В следующей части статьи мы подробнее займемся применением уравнений (16), (17) и (18) к специальным меха-

¹ Как известно, первая производная измеряет вообще наклон; вторая производная — кривизну кривой или поверхности.

ническим проблемам. Сейчас же вернемся к волновому распространению функции W , которое мы частично — но только частично — описали уравнением (13). Мы допустим, что колебание, лежащее в основе этого волнового процесса, также подчинено законам (16) и (17) и что для него таким образом справедливо также уравнение (18). Скорость распространения волны u известна из уравнения (15); чтобы освободить волновое уравнение от неизвестных, нужно еще сделать допущение относительно частоты ν . Мы положим

$$\nu = \frac{E}{h}. \quad (19)$$

Это допущение не является ни неизбежным, ни самоочевидным. Наоборот, оно является оригинальной и в высшей степени смелой гипотезой, которой мы обязаны де Бройлю. Согласно этой гипотезе, всякому движению с энергией E — также и простому поступательному движению электрона — отвечает частота ν , определяемая соотношением $E = h\nu$.

Подставляя в (18) u из (15) и ν из (19), получим основное уравнение волновой механики:

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2m}{h^2} (E - V)\psi = 0. \quad (20)$$

Это и есть волновое уравнение де Бройля и Шрёдингера. В этой форме мы будем им пользоваться во всем дальнейшем изложении. Эта форма достаточна для вывода основных черт строения атома, например для общего объяснения структуры спектра водорода (без тонкой структуры), далее для объяснения опытов дифракции электронных лучей (Дэвиссон и Джермер, Г. П. Томсон). Коротко говоря, эта формула достаточна для введения в мир волновой механики. Однако нет сомнения в том, что она не может быть полной и окончательной формулой этой теории, так как она по меньшей мере в двух отношениях нуждается в дополнении.

Первый явный недостаток формулы (20) заключается в том, что она основана на классической Ньютоновской, а не на релятивистической механике. Таким образом мы должны

ожидать, что формула эта окажется справедливой только для движений со скоростью незначительной по сравнению со скоростью света; она должна представлять собой только предельную форму общего релятивистического уравнения для случая небольших скоростей. Подобная обобщенная релятивистическая формула была действительно выведена де Бройлем. Первоначальное развитие теории спектров заставляло предположить, что именно такое релятивистическое обобщение волнового уравнения позволит включить в теорию объяснение тонкой структуры спектра водорода. Однако новейшее развитие спектральных теорий показало, что простая замена уравнения (20) его релятивистическим обобщением не может быть достаточной для этой цели; необходимым представляется введение в теорию, в той или иной форме, представления о вращающемся вокруг собственной оси электропе. В этом направлении за последнее время уже сделаны значительные успехи; однако мы не можем здесь заниматься рассмотрением этого обобщенного волнового уравнения.

Второй недостаток формулы (20) заключается в ее связи с уравнением (13). Характерной чертой этого последнего уравнения является то, что в нем величина градиента функции W приравнена к определенной функции координат. Эта черта уравнения позволила вывести из него представление о „волнах“, флюктуирующих в пространстве. Между тем это соотношение могло быть получено только потому, что система, которой мы воспользовались в качестве примера — а именно одна частица в центральном силовом поле — обладала кинетической энергией, равной сумме квадратов импульсов (умноженных на постоянную). Но мы легко можем себе представить системы, не обладающие этим свойством. В качестве простого примера можно указать две частицы различной массы, движущиеся в силовом поле или твердое вращающееся тело неправильной формы. Если бы мы написали для первой из упомянутых систем кинетическую энергию и импульсы, то мы бы получили

$$T = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2)$$

и $p_{x_1} = m_1 \dot{x}_1$, $p_{x_2} = m_2 \dot{x}_2$ и т. д.; и только для $m_1 = m_2$ получается $T = \text{const} \times \sum p_i^2$. Поэтому, если бы мы взяли в качестве примера механическую систему более общего характера, то мы получили бы вместо (13) другое уравнение, которое нельзя было бы интерпретировать как выражение волны в трехмерном евклидовом пространстве. Представление о волне, связанной с движением системы, не могло бы возникнуть, и путь к уравнению (20) был бы закрыт. Преодоление этого затруднения оказывается возможным с помощью метода, который можно назвать „неевклидовой геометрией“. Эта математическая теория дает формулы общего характера, которые могут быть применены к любой системе, с каким угодно выражением для кинетической энергии. В случае одной единственной частицы в силовом поле эти уравнения оказываются тождественными с нашими уравнениями (13) и (20). В словупотреблении неевклидовой геометрии продолжают фигурировать понятия волны, скорости распространения ее, градиента и лапласовского оператора. Я не знаю однако, имеет ли смысл оперировать с этими обобщенными понятиями для тех, кто недостаточно знаком со всей этой областью. Поэтому я ограничусь указанием, что неевклидова геометрия дает общее волновое уравнение, которое содержит (20) в качестве частного случая.¹ Это общее уравнение уже успело оправдать себя при применении к некоторым моделям атомов и молекул, как например к твердому ротатору, который играет столь важную роль в теории полонитых спектров.

Однако вопрос о том, что же такое в конце концов эти „волны“, становится при переходе от евклидова пространства к отвлеченному конфигурационному пространству еще более темным и непонятным.

¹ Если кинетическая энергия системы дана в виде квадратичной формы скоростей $T = \sum_i \sum_j Q_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ и Δ — означает оператор Лапласа в неевклидовом пространстве конфигурации с метрикой $ds^2 = \sum \sum Q_{ij} dq_i dq_j$, то общее волновое уравнение де Бройля и Шрёдингера имеет вид: $h^2 \Delta \psi + 8\pi^2 (E - V) \psi = 0$.

Нам остается сделать еще один шаг, чтобы понять, каким образом волновая механика может привести к вычислению энергий стационарных состояний атома.

Широко известно, что в теле, способном служить средой для распространения волн и в то же время подверженном тем или иным ограничениям в своем движении, возникают так называемые стоячие волны. Воздух в замкнутом сосуде, струна, зажатая на концах, мембрана, закрепленная по периферии, могут служить примерами таких тел. Аналогично ведет себя электричество в настроенной на определенную частоту цепи, и т. д. В каждой из подобных систем при надлежащих условиях возникают стоячие волны, состоящие из характерного чередования узлов и пучностей. Для возникновения их необходимо, чтобы частота возбуждающего стоячие волны колебания соответствовала „собственной“ или „резонансной“ частоте данной системы. Каждой такой резонансной частоте отвечает особая картина распределения узлов и пучностей. Как только резонирующая система подверглась воздействию внешней волны надлежащей частоты, в ней немедленно возникает соответствующая стоячая волна; и если бы не внешнее и внутреннее трение, то, раз возникнув, стоячая волна должна была бы сохранить свое существование навеки. Если на резонатор действует внешняя волна с частотой не соответствующей собственному периоду резонатора, то возникает движение гораздо более сложного характера. Методы вычисления собственных частот различных систем и соответствующих им стоячих волн составляют существенную область теоретической акустики.

Возникает вопрос: не могут ли стационарные состояния естественных атомных систем быть рассматриваемы как стоячие волны, а соответствующие значения энергии атома—как произведения из частот собственных колебаний атома на постоянную Планка h . Не исключено ли, что проблемы атомной теории могут быть разрешены с помощью методов аналогичных тем, которые применяются при исследовании макроскопических вибраторов, как-то: акустических инструментов или колебательных электрических систем? Эта идея была разработана Э. Шрёдингером в ряде статей начиная с 1926 г.

ПРИМЕРЫ СТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ.

Для иллюстрации законов образования стоячих волн я приведу три примера: натянутую струну, мембрану и шар жидкости в твердой оболочке. Первый пример является наиболее простым и широко известным; все изложения теории колебаний всегда начинаются с исследования рояльной и скрипичной струны. С физической точки зрения проблема струны характеризуется как проблема одного измерения (расстояние вдоль струны), с математической точки зрения — как проблема с двумя переменными (упомянутое расстояние и время). Второй пример — натянутая мембрана — хорошо знаком тем, кому приходилось иметь дело с телефоном. Однако мембраны, применяемые на практике, по большей части не вполне соответствуют рассматриваемому нами идеальному случаю, так как они слишком толсты. Идеально-тонкая мембрана представляет собой пример колебательной системы с двумя измерениями и тремя переменными величинами. Пример мембраны покажет нам, как существен во многих случаях надлежащий выбор координат, и мы увидим, что происходит, если одна из избранных координат оказывается циклической, т. е. углом, который практически возвращается к своему первоначальному значению при каждом увеличении его на целое кратное 2π . В проблеме мембраны мы встретимся с функциями, не пользующимися такой широкой известностью как простые синусы и косинусы, которыми можно обойтись при разрешении проблемы натянутой струны. Третий выбранный нами пример — жидкий шар в твердом сосуде — менее часто встречается на практике. Он должен помочь нам перенести результаты, найденные при изучении струны и мембраны, на проблемы трех измерений и четырех переменных. Эта проблема послужит последней ступенью для перехода к волновым явлениям, изобретенным де Бройлем и Шрёдингером для иллюстрации поведения атомов. Дабы перейти к этим последним, достаточно будет вообразить себе струны и жидкости не с постоянной плотностью и эластичностью, а со свойствами особым образом меняющимися от точки к точке.

Натянутая струна. Представим себе бесконечно длинную натянутую струну, направление которой совпадает с осью x выбранной системы координат. Обозначим натяжение струны буквой T , ее линейную плотность (т. е. массу, приходящуюся на 1 см длины) буквой ρ . Чтобы вывести дифференциальное уравнение движения струны, представим себе ее состоящей из ряда прямолинейных отрезков (рис. 1). Когда струна отклонена от своего положения равновесия, отдельные прямолинейные отрезки уже не лежат больше на одной линии, но, как показывает рис. 1, образуют определенные углы между собой. На границе двух отрезков последние действуют друг на друга с силой, определяемой напряжением T . До тех пор пока струна прямолинейна, силы, которым подвергается каждый отрезок со стороны своих соседей с той и с другой стороны, равны по величине и противоположны по направлению; их результирующая равна нулю, каждый отрезок находится в равновесии. Но если струна оттянута, как на рис. 1 (причем предполагается, что струна остается в плоскости xy), то упомянутые силы хотя и будут попрежнему равны по величине, но по направлению уже не будут противоположны. Они имеют неравные компоненты по оси y ; последние и дают отличную от нуля силу, которая влечет отрезок к его нормальному положению. Точнее говоря, происходит следующее: если обозначить угол отрезка AB с осью x через θ (рис. 1), угол отрезка CD с той же осью — через $\theta + d\theta$, тогда силы, действующие на твердый отрезок BC , будут иметь компоненты:

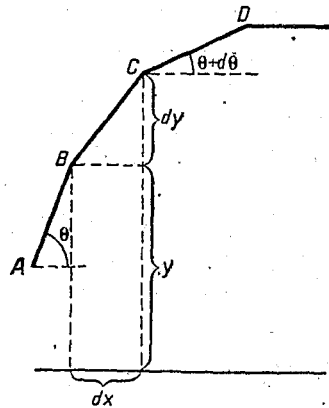


Рис. 1.

находящегося в равновесии. Но если струна оттянута, как на рис. 1 (причем предполагается, что струна остается в плоскости xy), то упомянутые силы хотя и будут попрежнему равны по величине, но по направлению уже не будут противоположны. Они имеют неравные компоненты по оси y ; последние и дают отличную от нуля силу, которая влечет отрезок к его нормальному положению. Точнее говоря, происходит следующее: если обозначить угол отрезка AB с осью x через θ (рис. 1), угол отрезка CD с той же осью — через $\theta + d\theta$, тогда силы, действующие на твердый отрезок BC , будут иметь компоненты:

$$\begin{aligned} X_1 &= -T \cos \theta; & Y_1 &= -T \sin \theta \\ X_2 &= -T \cos(\theta + d\theta); & Y_2 &= -T \sin(\theta + d\theta). \end{aligned}$$

Их равнодействующие будут:

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 = T [\cos(\theta + d\theta) - \cos \theta] \\ Y &= Y_1 + Y_2 = T [\sin(\theta + d\theta) - \sin \theta]. \end{aligned} \tag{21}$$

Если, кроме того, сам угол θ мал, т. е. если отклонение от положения равновесия незначительно, то, во-первых, компонента X результирующей силы исчезающе мала по сравнению с компонентой Y , — в этом легко убедиться из рассмотрения хода кривых \sin и \cos вблизи от нуля, — во-вторых, компонента Y может быть представлена:

$$Y = T [\operatorname{tg}(\theta + d\theta) - \operatorname{tg} \theta], \quad (21a)$$

так как для малых θ $\sin \theta = \operatorname{tg} \theta$. Далее $\operatorname{tg} \theta$ можно отождествить с наклоном BC относительно оси x , т. е. с $\frac{dy}{dx}$. Получаем:

$$Y = T \frac{\operatorname{tg}(\theta + d\theta) - \operatorname{tg} \theta}{dx} dx = T \frac{d(\operatorname{tg} \theta)}{dx} dx = T \frac{d^2 y}{dx^2} dx.$$

Приравняв силу к произведению массы на ускорение, мы получаем:

$$\rho \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = T \frac{d^2 y}{dx^2}. \quad (22)$$

Ниже мы покажем, что это уравнение, если положить $\frac{T}{\rho} = v^2$, представляет собою уравнение (16) предыдущего параграфа, выведенное для данного частного случая системы одного измерения. Мы видим, что это уравнение строго применимо к предельному случаю малых деформаций. Но элементарная теория колебаний занимается именно этими малыми колебаниями.

Обозначая дифференцирование по времени точками, а дифференцирование по пространственным координатам черточками, мы можем написать (22) в форме:

$$\ddot{y} = \frac{T}{\rho} y''. \quad (23)$$

Уравнение (23), выражающее собой факт линейной зависимости второй производной смещения по t от второй производной той же величины по x , представляет собой простейшее из волновых уравнений.

Мы называем это уравнение „волновым“, потому что оно может (но не должно) представлять волну. Под волной

мы понимаем деформацию струны — кривую или „нечто“ иное, что перемещается вдоль бесконечной струны с постоянной скоростью.

Чтобы иллюстрировать это возможное содержание уравнения (23), представим себе, что в момент $t=0$ струна смещена таким образом, что она образует собой синусоидальную кривую с уравнением:

$$y = A \sin mx \quad (t = 0). \quad (24)$$

Предположим далее, что все точки струны движутся в этот момент со скоростью

$$\dot{y} = n A \cos mx \quad (t = 0) \quad (25)$$

параллельно оси y .

В какой-либо позднейший момент t конфигурация и движение струны изображаются уравнениями:

$$y = A \sin (nt + mx); \quad \dot{y} = n A \cos (nt + mx), \quad (26)$$

так как уравнения эти удовлетворяют общему дифференциальному уравнению (23) и начальным условиям, выраженным в уравнениях (24) и (25). Для того чтобы начальные условия были удовлетворены, необходимо только, чтобы между постоянными n и m , с одной стороны, и константами струны T и ρ с другой стороны, существовала зависимость, выражаемая формулой:

$$\frac{m}{n} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (27)$$

Если условие (27) удовлетворено, то состояние струны на все времена остается выраженным уравнением (26).

Рассматривая ближе это уравнение, мы замечаем, что согласно ему те значения смещения y и скорости \dot{y} , которые в данный момент существовали в какой-либо точке струны x_0 , могут быть по истечении времени t найдены

в точке x_1 , отстоящей от x_0 на $x_1 - x_0 = -\left(\frac{n}{m}\right) t$. Другими

словами, эти значения движутся вдоль струны с постоянной скоростью. Вся конфигурация струны, ее синусоидальная форма и распределение скоростей вдоль нее остаются неизменными и только скользят вдоль струны в направлении

уменьшающихся x . Форма струны передается в этом направлении наподобие волны, и отношение $\frac{n}{m}$ измеряет скорость движения этой волны:

$$u = \frac{n}{m} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (28)$$

Этот вывод оправдывает наименование уравнения (23) „волновым“ и коэффициента $\frac{T}{\rho}$ в этом уравнении — квадратом скорости волны.

Читатель наверное обратил внимание на то обстоятельство, что полученный нами результат мог быть достигнут только с помощью весьма узких специальных условий. Мы предположили струну бесконечно длинной, мы положили начальное смещение произведенным по синусоидальной кривой. Так же строго мы предписали и распределение поперечных скоростей вдоль струны в начальный момент. Если бы мы изменили эти последние условия, мы пришли бы к совсем иным результатам. Если бы мы, например, предположили, что в момент $t=0$ струна имеет синусоидальную форму и все точки ее находятся в покое, то дальнейшее движение струны не изображалось бы более уравнением (26). Мы вынуждены были бы прибегнуть в этом случае к общему решению дифференциального уравнения (23):

$$y = C \sin(nt + mx) + D \sin(nt - mx) \quad (29)$$

и выбрать постоянные C и D таким образом, чтобы они удовлетворяли избраным нами начальным условиям:

$$y = A \sin mx, \quad y = 0 \quad (\text{при } t = 0). \quad (30)$$

С этой целью мы полагаем:

$$C = D = \frac{1}{2}A$$

и получаем:

$$y = A \sin nt \cos mx. \quad (31)$$

Уравнение (30) изображает не волну, непрерывно движущуюся вдоль струны, а стоячее колебание наподобие тех,

которые возникают в надлежащим образом возбужденной скрипичной струне или в трубках Кундта. С первого взгляда вряд ли можно угадать, что эти стоячие волны являются результатом взаимного наложения двух волн, движущихся вдоль струны навстречу друг другу со скоростью $u = \frac{n}{m} =$

$= \sqrt{\frac{T}{\rho}}$. Однако исследование показывает, что стоячая волна всегда эквивалентна двум движущимся навстречу друг другу волнам. В уравнении (31) коэффициенты n и m связаны между собой через посредство характерной для данной струны скорости распространения волн, и уравнение это может быть переписано в виде:

$$y = A \sin u mt \cos mx, \quad u = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (32)$$

В то время как натяжение и плотность струны при данном m определяют однозначно n (или наоборот), ничто сказанное до сих пор не накладывает каких-либо ограничений на возможные значения коэффициентов n или m . Бесконечно длинная струна может давать колебания с любой длиной волны. Такая струна способна также одновременно принимать участие в любом количестве колебаний различных длин волн с любыми соотношениями между их амплитудами и фазами. На этом основано наше право предписывать какие угодно произвольные начальные условия касательно формы и скорости движения струны — разумеется, поскольку условия эти не противоречат основным требованиям непрерывности и конечности во всех точках струны. Для того чтобы удовлетворить требованию, согласно которому форма струны в начальный момент должна определяться любой произвольной функцией $f(x)$, а распределение поперечных скоростей ее движения — другой, тоже произвольной функцией $g(x)$, достаточно развернуть функции f и g в ряды Фурье (или, в случае надобности, в интеграл Фурье); каждый член в этом разложении будет соответствовать отдельному волновому уравнению типа (29) с особым значением m и со значениями C и D , определяемыми начальным состоянием струны. Конфигурация струны

в любой более поздний момент времени будет предопределена суммой всех этих волновых уравнений. Внешнее зрелище не будет соответствовать в этом случае ни неизменной волне, движущейся с постоянной скоростью вдоль струны, ни постоянному распределению узлов и пучностей. Все бросающиеся обычно в глаза характерные особенности волнового движения могут быть при этом замаскированы; и тем не менее математический анализ показывает, что вся сложная и изменчивая картина струны может быть истолкована как сумма синусоидальных волн, непрерывно бегущих в обоих направлениях с одной и той же постоянной скоростью.

Положение изменяется однако, как только мы вводим какие-либо пограничные условия; при введении таковых струна оказывается в состоянии принимать участие только в колебаниях определенной частоты.

В качестве наиболее обычных и элементарных пограничных условий, предположим, что струна закреплена в точках $x=0$ и $x=L$, и будем заниматься только движением струны на участке, заключенном между этими двумя точками.

Для подготовки дальнейших выводов необходимо вернуться к основному уравнению и решить его сначала. Это уравнение гласит:

$$\ddot{y} = u^2 y'', \quad (33)$$

где u обозначает скорость распространения синусоидальной волны вдоль бесконечной струны. Мы пробуем найти решение, которое имело бы форму произведения функции, зависящей только от аргумента x , на функцию, зависящую только от t :

$$y = g(t) \cdot f(x). \quad (34)$$

Из дифференциального уравнения (33) вытекает, что функции f и g должны удовлетворять следующему условию:

$$\frac{t''}{f} = \frac{\ddot{g}}{u^2 g}. \quad (35)$$

Так как левая часть уравнения (35) не зависит от t , а правая не зависит от x , то они могут быть равными между собой только при условии, что каждая [в отдельности является

постоянной. Постоянную мы обозначим символом m^2 (такое обозначение выбрано потому, что — как мы увидим ниже — определенное подобным образом m тождественно с m , встретившимся нам на стр. 460). Мы можем теперь вместо (35) написать:

$$\frac{f''}{f} = -m^2 \tag{35a}$$

и

$$\frac{\ddot{g}}{v^2 g} = -m^2. \tag{35b}$$

Таким образом мы разбили наше первоначальное уравнение (33) на два уравнения, из которых каждое содержит только одну неизвестную. Разрешение их поэтому затруднений не представляет и общие решения имеют вид:

$$\begin{aligned} f(x) &= A \cos mx + B \sin mx, \\ g(t) &= C \cos mut + D \sin mut. \end{aligned} \tag{36}$$

Величина m до сих пор еще ничем не ограничена.

Теперь мы переходим к пограничным условиям. Они формулируются следующим образом:

$$f(0) = f(L) = 0. \tag{37}$$

Мы подошли теперь на простейшем примере вплотную к наиболее характерной проблеме акустики, которая одновременно является решающей и для атомной теории в той ее форме, которую она приобретает в волновой механике, — именно к проблеме „характеристических чисел“.

Для того чтобы сделать функцию f соответствующей пограничным условиям (37), мы очевидно должны положить $A = 0$ и $\sin mL = 0$ [в этом случае $f(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = L$]. С этой целью мы должны выбрать для m значения:

$$m = \frac{k\pi}{L} \quad k = 1, 2, 3, 4... \tag{38}$$

Итак, введение пограничных условий повело к ограничению возможных значений коэффициента m определенным рядом чисел. Этим самым ограничивается и число возможных значений длины волны λ .

Дозволенные при данных пограничных условиях значения m называются „характеристическими числами“ (по-немецки *Eigenwerte*). Каждому „характеристическому числу“ соответствует отдельное значение длины волны и частоты колебаний $\nu = \frac{m u}{2\pi}$, так называемая „собственная частота“ струны (*Eigenfrequenz*).

Далее, каждому характеристическому числу отвечает особое решение дифференциального уравнения — особая „фундаментальная функция“ (*Eigenfunktion*). В нашем примере закрепленной на концах струны фундаментальные функции, соответствующие характеристическим числам $m = \frac{k\pi}{L}$, суть:

$$y_k = \sin \frac{k\pi}{L} x \left(C_k \cos \frac{k\pi u}{L} t + D_k \sin \frac{k\pi u}{L} t \right). \quad (39)$$

Каждая фундаментальная функция изображает в этом случае синусоидальное стоячее колебание, с узлами по концам струны и в $(k-1)$ равностоящих друг от друга точках в середине ее. Такого рода колебание может быть без труда реализовано на практике с помощью струны от скрипки, если k не слишком велико. Постоянные C и D определяют собой амплитуду колебания и фазу его в любой данный момент.

Разумеется, движение струны на практике отнюдь не должно обязательно соответствовать одной единственной фундаментальной функции. Наоборот, струна может одновременно участвовать в каком угодно числе различных собственных колебаний, каждое с особым значением постоянных C_k и D_k . Любое число фундаментальных функций (с различными дозволенными значениями m , т. е. различными целыми кратными k) может сосуществовать одновременно. Действительное смещение струны будет в любой данный момент определяться суммой значений всех этих фундаментальных функций. Для того чтобы движение струны оказалось ограниченным одной единственной фундаментальной функцией, необходимо с бесконечной точностью урегулировать начальные смещения и скорости струны. С другой стороны, при любом произвольном

выборе начальных условий дальнейшее движение струны будет представлять собой суперпозицию различных собственных колебаний, с характерными для данных начальных условий значениями постоянных C_k и D_k , которые при знании этих условий могут быть вычислены. Это вычисление аналогично вычислению в механике материальной точки траектории, по которой будет двигаться частица, чье положение и скорость в момент $t = 0$ известны. (Применение квантовых условий к орбитам частицы соответствует определению собственных частот; здесь лежит мост между атомными моделями с электронными орбитами и атомными моделями волновой механики.) Как в акустике, так и в волновой механике процесс определения амплитуд и фаз большей частью гораздо сложнее, чем процесс вычисления собственных частот; к счастью, он часто и менее существен, хотя во многих случаях необходим.

Пример натянутой мембраны. Дифференциальное уравнение натянутой мембраны имеет форму:

$$\Delta z \equiv \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{1}{u^2} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}. \tag{40}$$

При этом предполагается, что мембрана расположена в плоскости xy и что z обозначает смещение отдельных точек мембраны из их положений равновесия в этой плоскости в направлении перпендикулярном к ней. Буква u обозначает скорость распространения синусоидальной волны в бесконечнопротяженной мембране, с натяжением T , одинаковым во всех точках мембраны, и с постоянной поверхностной плотностью ρ . Эта скорость определяется из уравнения:

$$u^2 = \frac{T}{\rho}, \tag{41}$$

получаемого путем естественного обобщения уравнения (28). Действительное движение ограниченной мембраны может быть очень сложным, но его всегда можно разложить на некоторое число синусоидальных волн, движущихся в противоположных направлениях.

Символ Δ обозначает дифференциальный оператор Лапласа; в прямоугольных координатах он имеет вид

$\frac{d^2}{dx^2}$ (для одного измерения), $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}$ (для двух) или $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$ (для трех измерений). При пользовании другими системами координат, Лапласовский оператор, разумеется, приобретает другую форму. В системах с двумя и большим числом измерений проблема формулировки граничных условий неотделима от проблемы выбора координат. Если мембрана имеет квадратную форму и зажата по краям, то мы должны выбрать прямоугольные координаты; если мембрана — круглая и также закреплена по краю, то это условие можно просто формулировать только в полярных координатах. Первая из этих двух проблем (квадратная мембрана) отличается чрезвычайной простотой; читатель может сам легко разрешить ее по способу, аналогичному примененному нами при исследовании струны, и результаты, которые он при этом получит, будут также являться простым обобщением результатов, полученных в предыдущем параграфе. Большой интерес представляет для нас проблема кругообразной мембраны, к которой мы теперь и обратимся. При исследовании таковой мы должны воспользоваться полярными координатами, причем центр мембраны должен, разумеется, служить началом координат. Лапласовский оператор имеет в полярных координатах на плоскости следующий вид:

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{dt^2}. \quad (42)$$

Мы вводим это выражение Лапласовского оператора в основное уравнение (40) и получаем:

$$\frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dz}{dr} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{1}{u^2} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}. \quad (42a)$$

Решение этого дифференциального уравнения мы ищем в форме произведения функции $f(r)$, зависящей только от радиуса, на функцию $F(\theta)$, зависящую только от θ , и на функцию $g(t)$, зависящую только от t . Как и в предыдущем параграфе, мы легко замечаем, что каждая из этих трех функций определяется самостоятельным дифференциальным

уравнением, на которые мы можем разбить общее уравнение (40). Путь, который ведет к этому заключению, совершенно аналогичен тому, которым мы пользовались при исследовании натянутой струны. Прежде всего, вставляя $\varepsilon = f(r) \cdot F(\theta) \cdot g(t)$ в уравнение (42), мы имеем:

$$\frac{1}{f} \cdot \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{rf} \frac{df}{dr} + \frac{1}{r^2 F} \frac{d^2 F}{d\theta^2} = \frac{1}{u^2 g} \cdot \frac{d^2 g}{dt^2}. \quad (43)$$

Так как левая часть этого уравнения не зависит от t , а правая — от r и θ , то они могут быть равными друг другу только при условии, если каждый из них равняется постоянной. Эту постоянную мы обозначаем, как и в предыдущем параграфе, через $-m^2$ и получаем таким образом вместо уравнения (42а) два независимых дифференциальных уравнения:

$$\frac{1}{f} \cdot \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{rf} \frac{df}{dr} + \frac{1}{r^2 F} \cdot \frac{d^2 F}{d\theta^2} = -m^2 \quad (43а)$$

$$\frac{1}{u^2 g} \cdot \frac{d^2 g}{dt^2} = -m^2. \quad (43)$$

Первое уравнение содержит только пространственные координаты r и θ , второе — только время t . Это последнее уравнение имеет совершенно ту же форму, что и уравнение натянутой струны (35b), и мы можем теперь просто переписать решение (36b) этого уравнения:

$$g(t) = A \cos mut + B \sin mut. \quad (44)$$

Результат, полученный нами при рассмотрении натянутой между двумя точками струны, заставляет нас заранее ожидать, что для m возможны только определенные значения — характеристические числа проблемы, которые зависят от граничных условий. Это так и есть. Но прежде чем определять их, мы должны заняться дифференциальным уравнением (43а) для пространственных координат r и θ .

Решение уравнения (43а) производится по тому же методу разделения. Если мы обе части уравнения (43а) умножим на r^2 , то мы получим сумму трех членов, которые зависят только от r и члена, зависящего только от θ ; эта сумма должна быть равна нулю. Последнее возможно лишь в том

случае, когда сумма трех членов, зависящих от r , равна некоторой постоянной, и член, зависящий от θ , равен той же постоянной. Мы обозначим эту новую постоянную через λ^2 . Оба уравнения, на которые распадается (43а), будут тогда:

$$\frac{r^2}{f} \cdot \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{r}{f} \cdot \frac{df}{dr} + m^2 r^2 = \lambda^2, \quad (45a)$$

$$-\frac{1}{F} \cdot \frac{d^2 F}{d\theta^2} = \lambda^2. \quad (45b)$$

Мы разрешаем сначала (45b). Это уравнение совершенно аналогично уже решенным уравнениям (35а) и (43b), и его общее решение будет:

$$F(\theta) = C \cos \lambda \theta + D \sin \lambda \theta. \quad (46)$$

Коэффициент λ кажется с первого взгляда ничем не ограниченным. Но в действительности коэффициент этот несет известные ограничения в самом себе: ибо координата θ носит циклический характер, как географическая долгота. При изменении θ на целое кратное 2π мы возвращаемся на прежнее место, и функция $F(\theta)$ должна вернуться к своему первоначальному значению. Для удовлетворения этого условия необходимо, чтобы λ имело одно из значений ряда:

$$\lambda = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (46a)$$

Это суть характеристические числа λ , и функции $F(\theta)$, соответствующие каждому отдельному возможному значению коэффициента λ , являются фундаментальными функциями уравнения (45). В исследуемом случае мы получили характеристические значения коэффициента и фундаментальные функции не на основании каких-либо пограничных условий, а только на основании того факта, что координата носит циклический характер. Такого рода случаи встречаются и в волновой механике.

Мы переходим к третьей и последней части проблемы — к определению функции $f(r)$. Эта функция определяется уравнением:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \left(m^2 - \frac{\lambda^2}{r^2}\right) f = 0; \quad (47)$$

для каждого разрешенного значения λ мы имеем особое уравнение (47). В предыдущем отделе мы имели аналогичное уравнение (35); решением этого уравнения явилась синусная функция от mz . Уравнение (47) также ведет к функции аргумента mr ; но это функция более сложная, чем синус, а именно—так называемая Бесселева функция. Значениям $0, 1, 2, 3 \dots$ коэффициента λ соответствуют так называемые Бесселевы функции нулевого, 1, 2, 3-го и т. д. порядка. Мы обозначим их символами $J_0(mr), J_1(mr), J_2(mr)$ и т. д.

Бесселевы функции аналогичны синусам в том отношении, что они также осциллируют между положительными и отрицательными значениями при возрастании аргумента r от 0 до бесконечности. Для бесчисленного множества дискретных значений аргумента Бесселева функция проходит через 0. В отличие от нулевых точек функции $\sin mr$, нулевые точки функций $J(mr)$ не лежат на равном расстоянии друг от друга. Соответствующие значения аргумента r могут быть найдены в таблицах функций; мы обозначим их через b^1, b^2, b^3 , в порядке возрастающей величины. Верхние числа обозначают, разумеется, не степени, а порядковые номера; это обозначение принято для того, чтобы сохранить внизу свободное место для индекса, отличающего друг от друга Бесселевы функции различного порядка.

Итак, решение уравнения (40) имеет вид:

$$z = J_\lambda(mz) (C \cos \lambda\theta + D \sin \lambda\theta) (A \cos mut + B \sin mut). \quad (48)$$

Это уравнение изображает стоячее колебание бесконечно-протяженной мембраны, при котором λ линий, пересекающихся в начале координат, остаются неподвижными (узловые линии). Далее, неподвижным остается бесчисленное количество концентрических узловых кругов, с центром в начале координат. Части мембраны, расположенные между узловыми линиями и узловыми кругами, являются пучностями; они колеблются с частотой $\frac{m\omega}{2\pi}$; λ узловых линий расположены под одинаковыми углами друг к другу; радиусы последовательных узловых кругов r_1, r_2, r_3, \dots получаются путем деления на m нулевых мест b^1, b^2, b^3, \dots Бесселевой функции порядка λ .

В чем выражается изменение характера колебания, вызываемое закреплением мембраны по краям? Очевидно, что колебание, изображаемое уравнением (48), может быть реализовано в мембране с радиусом R , закрепленной неподвижно на периферии, только в том случае, если R совпадает с радиусом одного из узловых кругов. Итак, R должно равняться $\frac{b\lambda^i}{m}$. Правильнее будет выразиться наоборот: стоячее колебание (48) возможно в закрепленной по окружности мембране только в том случае, если коэффициент m удовлетворяет одному из уравнений:

$$m = \frac{b\lambda^1}{R} \text{ или } \frac{b\lambda^2}{R}, \text{ или } \frac{b\lambda^3}{R} \text{ и т. д.} \quad (49)$$

Эти уравнения определяют характеристические числа параметра m в дифференциальном уравнении натянутой мембраны. Имеется двойное бесконечное количество этих характеристических чисел: каждому из бесконечного числа характеристических чисел λ соответствует бесконечное количество характеристических чисел m . Каждому характеристическому числу m отвечает особая собственная частота мембраны и особая фундаментальная функция — именно функция (48) с соответствующим значением m , взятым из (49).

Постоянные A , B , C и D в фундаментальных функциях определяют собой амплитуды колебаний, фазу их в каждый данный момент, а также направление узловых линий по отношению к избранному направлению $\theta = 0$. Произвольное количество собственных колебаний может существовать в одно время. Действительное движение мембраны будет определяться взаимным положением этих фундаментальных функций.

Едва ли нужно подчеркивать, что все эти результаты, совершенно так же как и результаты, полученные для натянутой струны, строго справедливы лишь в предельном случае бесконечно-малых колебаний, а для практических целей — с достаточной точностью справедливы в случае малых колебаний.

Пример жидкого шара. Среди элементарных колебательных систем жидкий шар, заключенный в твердую оболочку, представляет наибольшее сходство с моделью атома

водорода в волновой механике. Распределение стоячих волн в обоих случаях является почти совершенно тождественным.

Волновое уравнение (16), написанное в полярных координатах для пространства трех измерений, приобретает несколько путающий свою сложностью вид:

$$\ddot{\psi} = u^2 \Delta \psi \equiv u^2 \frac{\operatorname{cosec} \theta}{r^2} \left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \sin \theta \frac{d\psi}{dr} \right) + \frac{d}{d\varphi} \left(\operatorname{cosec} \theta \frac{d\psi}{d\varphi} \right) + \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\psi}{d\theta} \right) \right]. \quad (50)$$

Величина ψ не может быть более рассматриваема в этом случае как смещение из положения равновесия, так как все три измерения уже использованы. Читатель может, если хочет, рассматривать для наглядности величину ψ , напр., как интенсивность сжатия или расширения среды в данной точке шара, по примеру звуковых волн. Быть может, лучшей подготовкой к волновой механике будет вообще не связывать с величиной ψ каких-либо наглядных представлений.

Мы пытаемся найти решение уравнения (50) по обычному способу, т. е. мы спрашиваем себя, нельзя ли решить его с помощью функции, представляющей собой произведение четырех самостоятельных функций: одной, зависящей только от времени t , другой — только от радиуса r , третьей — только от долготы φ и четвертой — только от угла θ :

$$\psi = g(t) \cdot f(r) \cdot \Phi(\varphi) \cdot \Theta(\theta).$$

Как и в предыдущих примерах, мы находим, что функции времени $g(t)$ должна иметь вид:

$$g(t) = A \cos mut + B \sin mut. \quad (51)$$

Пограничные условия, как и раньше, ограничивают коэффициент m и частоту $\frac{mu}{2\pi}$ некоторыми разрешенными значениями. Остающиеся функции пространственных координат должны удовлетворять уравнениям:

$$\frac{1}{f} \left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) + m^2 r^2 f \right] = -\frac{1}{Y} \operatorname{cosec} \theta \cdot \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\operatorname{cosec} \theta \frac{dY}{d\varphi} + \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dY}{d\theta} \right) \right) \right] = \lambda. \quad (52)$$

где Y обозначает произведение Θ на Φ , а λ — постоянную, которая с первого взгляда кажется произвольной, но в действительности ограничена определенными значениями, по совершенно той же причине что и в случае плоской мембраны. Ибо если географическая долгота изменяется на целое кратное 2π , а географическая широта на целое кратное π , то мы возвращаемся в прежнее место, и функции Y должны приобрести прежнее значение. Это возможно только при соблюдении условия:

$$\lambda = n(n+1) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (53)$$

Эти значения λ суть характеристические числа дифференциального уравнения (52) для угловых переменных φ и θ .¹

Отвечающие характеристическим числам (53) фундаментальные функции — решения второго из дифференциальных уравнений (52) — опять-таки функции нового типа, а именно так называемые „шаровые функции“. Каждому значению n в (53) соответствует „шаровая функция n -го порядка“. Такая функция состоит из $2n+1$ членов, причем каждый член содержит произвольно выбираемый коэффициент. Значения коэффициентов очевидно соответствуют различным начальным условиям, т. е. различным видам колебаний, которым отвечают одинаковые фундаментальные функции.

Какой вид имеет подобная шаровая функция? Каждый член ее является произведением функции синуса (или косинуса) φ на особую, так называемую Лежандрову функцию переменной θ .

¹ Это и последующие утверждения касательно функций Y_n могут быть доказаны путем изображения Y во втором из уравнений (52) в виде произведения функции переменной θ на функции переменной φ по способу, примененному уже пять или шесть раз в ходе изложения и ведущему к разбиению его на два самостоятельных уравнения. Значения параметра λ в уравнении (54) суть характеристические числа второго из последних уравнений. Я считал нежелательным затруднять изложение постоянным повторением одних и тех же процессов решения уравнений. В данном случае к этому присоединяется еще то обстоятельство, что разделение Y на две функции в атомной модели, к построению которой мы стремимся, не является существенным. Читателю предоставляется, однако, самому заполнить этот пробел.

Если обозначить Лежандровы функции через $P_{n,s}$, то фундаментальная функция примет следующий вид:

$$Y_n(\theta, \varphi) = a_{n,0} P_{n,0} \cos \theta + \sum_{s=1}^n a_{n,s} \cos(s\varphi) \cdot P_{n,s}(\cos \theta) + \sum_{s=1}^n b_{n,s} \sin(s\varphi) \cdot P_{n,s}(\cos \theta). \quad (54)$$

Каждый член этого уравнения изображает особый возможный род колебания. Сумма всех членов изображает движение результирующее от суперпозиции этих колебаний.

Если мы выделим одно какое-либо определенное колебание, дав n некоторое определенное значение n_1 , s некоторое определенное значение s_1 и в то же время предписав всем коэффициентам a и b в уравнении (54) исчезнуть, за исключением коэффициентов a_{n_1, s_1} и b_{n_1, s_1} , то мы пойдем, что в этом случае функция $Y = \Phi(\varphi) \cdot \Theta(\theta)$, а следовательно и функция $\psi = g(t) \cdot f(r) \cdot Y(\varphi, \theta)$ будет принимать значение 0 для s_1 различных значений аргумента φ и для $n_1 - s_1$ различных значений аргумента θ . Мы воображаем себе шар, описанный вокруг начала координат; легко сообразить, что поверхность этого шара будет нести на себе s_1 меридиональных узловых линий и $n_1 - s_1$ узловых широтных кругов; вдоль этих линий функция будет раз навсегда являться равной нулю. Если мы от одной, окружающей начало координат, сферической поверхности перейдем к совокупности всех таких поверхностей, другими словами — ко всей толще шара, то мы увидим, что колебание жидкости в шаре определяется выбором двух целых чисел (я чуть было не сказал — квантовых чисел!), при этом вся масса жидкости состоит из отделений, разграниченных s_1 узловыми плоскостями, пересекающимися вдоль оси $\theta = 0^\circ$, и $n_1 - s_1$ двойным узловым конусом, с вершиной в начале координат и с осью $\theta = 0$ в качестве высоты.

Мы оставили до сих пор без рассмотрения зависимость движения от радиуса r . Тесная аналогия со случаем натянутой мембраны делает разрешение этой проблемы весьма легким. Дифференциальное уравнение (52) для $f(r)$ напоми-

наст Бесселево уравнение (47) и имеет несколько похожее решение:

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2}(mr). \quad (55)$$

Функция (55) имеет значения $f = 0$ для бесконечного ряда дискретных значений переменной r , которые мы обозначим, в порядке возрастающей величины, буквами B_1, B_2, B_3, \dots . В этих же местах исчезает, разумеется, и функция ψ . В неограниченном пространственно паре жидкости, r может иметь любое значение; этому будет соответствовать бесконечный ряд концентрических узловых сфер с радиусами $\frac{B^1}{m}, \frac{B^2}{m}, \frac{B^3}{m}, \dots$. Если жидкость ограничена твердой шаровой поверхностью с радиусом R , то поверхность эта должна совпадать с одной из перечисленных узловых сфер. Это требование может быть удовлетворено только при помощи определенных дискретных собственных значений коэффициента m ; эти значения определяются выражением $m = \frac{B^i}{R}$. Соответствующие частоты колебаний суть „собственные частоты“ данного шара; они выражаются формулой $\nu = \frac{B^i u}{2\pi R}$. Фундаментальные функции колебания выражаются уравнением (55), в котором параметр m заменен последовательными дозволёнными значениями его $\frac{B^i}{R}$.

Таким образом фундаментальные функции колебания жидкого шара суть произведения функции радиуса r , выраженной уравнением (55), с одним из разрешенных значений постоянной m , на функцию (54) углов φ и θ , с разрешенными значениями постоянных n и s , обусловленными циклическим характером этих переменных, и на функцию (51) времени t , с разрешенной частотой, определяемой условиями на границах шара. Каждая фундаментальная функция с определенными значениями m , n и s соответствует колебанию, при котором шар разделен на отделения s меридианных плоскостей, $(n-s)$ двойных конусов и определенным количеством концентрических сфер, вдоль каждой из которых жидкость постоянно находится в покое. Внутри каждого отделения жидкость непрерывно колеблется с предписанной частотой.

АТОМНЫЕ МОДЕЛИ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ.

Случай „струны“, вдоль которой скорость волны меняется или даже становится мнимой. До сих пор я пользовался примером натянутой струны, мембраны и жидкого шара для иллюстрации свойств дифференциального уравнения:

$$u^2 \Delta \psi = \frac{d^2 \psi}{dt^2}, \quad (56)$$

при условии, что u^2 есть положительная постоянная. В этих случаях u^2 имело значение частного от деления одной существенно-положительной величины — натяжения (или давления) — на другую, также существенно положительную, — плотность. Постоянная эта оказывалась далее имеющей физическое значение квадрата скорости распространения синусоидальных волн в данной среде. В некоторых проблемах волновой механики нам приходится встречаться с совершенно аналогичным уравнением. В ряде наиболее важных применений механики Шредингера, однако, приходится иметь дело с уравнениями типа (56), отличающимися от разобранных нами выше в том отношении, что коэффициент u^2 зависит от координат и иногда принимает даже отрицательные значения! Такого рода уравнения с точки зрения легкости разрешения могут не отличаться существенно от разобранных нами; но образ волн в упругой среде, выбранный нами для наглядного объяснения, в этом случае оказывается непригодным. В проблеме одного измерения, пока u^2 остается положительным, мы можем вообразить себе в качестве примера струну, плотность которой меняется от точки к точке. Когда u^2 проходит через нуль и становится отрицательным, скорость распространения волн в нашем примере становится мнимой. Формально ничто не мешает говорить о струне с мнимой скоростью распространения волн; но при этом слова лишены уже почти всякого физического значения. С другой стороны, мы не знаем иных слов, которые могли бы оживить в этом случае монотонную процессию уравнений.

Дифференциальные уравнения типа (56) с постоянными или отрицательными значениями коэффициента n^2 относятся к числу легких. Ограничиваясь одним измерением, мы находим для решения этого уравнения в случае „струны“ с постоянной мнимой скоростью распространения волны формулу:

$$\psi = (A \cos m Ut + B \sin m Ut) (C e^{m^2 x} + D e^{-m^2 x}), \quad (57)$$

где U обозначает (реальный) квадратный корень из $-n^2$. С этой функцией обращаться гораздо менее удобно, чем с обычной синусоидальной функцией, получаемой в аналогичном случае с положительной постоянной n^2 . Так, например, в этом случае невозможно найти такие характеристические числа для коэффициента m , при которых функции раз навсегда равнялись бы нулю для определенных двух мест струны, т. е. выполнены были бы обычные пограничные условия. Вернее, вычисление дает только одно единственное значение $m = 0$, которое удовлетворяет этому условию, уничтожая раз навсегда функцию на всем протяжении струны. Далее, в этом случае невозможно заставить ψ оставаться конечным для любого значения переменной иначе как путем приравнения к нулю или коэффициента m , или обеих постоянных A и B , что опять-таки ведет к полному уничтожению функции. (Обращение в бесконечность в определенных точках струны с математической точки зрения не является препятствием к образованию колебаний, представляющихся синусоидальными функциями времени.)

Рассмотрим теперь более общее уравнение:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = (a - bx^2) \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad (58)$$

которое может быть истолковано как волновое уравнение для струны, в которой скорость распространения волны меняется от точки к точке согласно условию $n^2 = (a - bx^2)$. В средней части струны, для значений x , расположенных между $-\sqrt{\frac{a}{b}}$ и $+\sqrt{\frac{a}{b}}$, скорость n будет в этом случае иметь действительное значение; по обе стороны от этих двух точек она будет мнимой вплоть до $x = \pm \infty$. По обычным методам мы получаем из (58) уравнения:

$$y = f(x) g(t); \quad g = A \cos vt + B \sin vt$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + v^2 (a - bx^2) f = \frac{d^2 f}{dx^2} + (C - x^2) f = 0 \quad (59)$$

[Постоянную $v^2 b$ в (59) мы полагаем равной 1, что не вредит общности вывода.]

Мы должны заняться теперь решением уравнения для $f(x)$. Мы пытаемся найти решение для $f(x)$ в виде степенного ряда, умноженного на $e^{-\frac{x^2}{2}}$ (прием, часто применяемый в теории дифференциальных уравнений):

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (60)$$

Мы подставляем это выражение в дифференциальное уравнение (59), сокращаем на $e^{-\frac{x^2}{2}}$ и собираем вместе все члены с одинаковым показателем степени. Каждая такая группа членов имеет вид:

$$a_{n+2} (n+1)(n+2) x^n - a_n (2n+1-C) x^n. \quad (61)$$

Уравнение (59) будет удовлетворено, если все эти множители равны нулю. Полагая каждую группу отдельно равной 0, мы получаем:

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{(2n+1-C)}{(n+1)(n+2)}. \quad (62)$$

Положим теперь $a_0 = 0$, заставляя таким образом исчезнуть все четные коэффициенты; одновременно придадим коэффициенту a_2 какое-либо произвольное значение и вычислим на основании этого допущения, при помощи (62), значения всех дальнейших нечетных коэффициентов a_3, a_5, a_7 и т. д. Мы можем также поступить наоборот — положить a_1 равным 0, уничтожив таким образом все нечетные коэффициенты, придать какое-либо произвольное значение a_0 и вычислить все четные коэффициенты a_2, a_4 и т. д. По обоим способам мы получим решения уравнения (59) при любом значении параметра C . Однако легко установить, что для некоторых значений параметра C решения будут обладать особыми свойствами.

Действительно, из (62) можно заключить, что мы получим совершенно различные результаты, в зависимости от того, будет ли параметр C равняться одному из нечетных целых чисел 1, 2, 5..., или же он будет иметь любое другое значение. Ибо если C равняется нечетному целому числу, то цепь коэффициентов обрывается на члене с соответствующим значением n ; этот и все последующие коэффициенты оказываются равными нулю. Таким образом, степенной ряд, который мы выбрали для решения нашего дифференциального уравнения, окажется состоящим из конечного числа членов. Если C не будет равняться нечетному целому числу, то этот степенной ряд будет бесконечным.

Мы имеем перед собой новый род „характеристических чисел“. Если параметр C в дифференциальном уравнении движения своеобразной „струны“, которую мы рассматриваем, имеет одно из значений:

$$C = 2n + 1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \quad (63)$$

то решения носят особый характер.

Рассмотрим, в чем заключается особенность этих решений. Если параметр C имеет какое-либо иное значение, отличное от (63), то ряд $\sum a_n x^n$ является бесконечным. Когда x увеличивается до бесконечности, сумма ряда растет с такой быстротой, что пересиливает одновременно постоянное уменьшение множителя $e^{-\frac{x^2}{2}}$; таким образом функция $f(x)$ на обоих концах интервала $-\infty < x < +\infty$ становится бесконечно большой. Если, наоборот, C равно одному из „характеристических чисел“ (63), то ряд $\sum a_n x^n$ обрывается; при возрастании x до бесконечности падение множителя $e^{-\frac{x^2}{2}}$ пересиливает в этом случае рост суммы степенного ряда, и функция $f(x)$ остается конечной даже при $x = \infty$. Итак, „характеристические числа“ коэффициента C , и только они одни, позволяют дать для дифференциального уравнения (59) решения, которые остаются конечными для любого значения независимой переменной от плюс до минус бесконечности. Это условие конечности заменяет в данном случае обычные пограничные условия натянутой струны.

Фундаментальные функции уравнения (59), соответствующие этим характеристическим числам, суть:

$$f_m(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x) \quad (61)$$

Символ $H_m(x)$ обозначает конечный ряд $\sum a_n x^n$, построенный по описанным выше способам, и оканчивающийся m -м членом. Эти ряды известны под названием полиномов Эрмита.

Интерпретация линейного гармонического осциллятора в волновой механике. Предыдущий параграф содержит все, что необходимо для Шрёдингеровской теории линейного гармонического осциллятора. Простейший линейный гармонический осциллятор, — т. е. материальная точка, которая связана упругой силой с положением равновесия и может колебаться около этого положения равновесия, — как известно, сыграл чрезвычайно важную роль в истории теории квантов. Это была первая система, для которой П л а н к предположил, что она обладает свойством поглощать и отдавать энергию не иначе как в виде квантов определенного конечного размера. Как известно, при помощи этого предположения П л а н к у удалось разрешить проблему излучения черного тела, и оно послужило основанием всей теории квантов.

Представим себе частицу с массой m , могущую двигаться только вдоль оси x и притягиваемую к началу координат с силой пропорциональной расстоянию от него ($-k^2x$). Известно, что если подобным образом связанную частицу удалить от положения равновесия и затем вповь предоставить самой себе, то она будет совершать упругие колебания около центра равновесия с частотой $\nu_0 = \frac{k}{2\pi\sqrt{m}}$. Ее потенциальная энергия определяется следующей функцией координаты x :

$$V = \frac{1}{2} k^2 x^2 = 2\pi^2 m \nu_0^2 x^2. \quad (65)$$

Волновое уравнение (20) приобретает вид:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - 2\pi^2 m \nu_0^2 x^2) \psi = 0. \quad (66)$$

Простая замена переменной $q = x \cdot 2\pi \sqrt{\frac{m\nu_0}{h}}$ придает этому уравнению вид:

$$\frac{d^2\psi}{dq^2} + (C - q^2)\psi = 0, \quad \text{где } C = \frac{2E}{h\nu_0}. \quad (67)$$

т. е. вид соответствующий формально уравнению (59).

Согласно теории Шрёдингера, стационарные состояния линейного осциллятора определяются такими значениями параметра E , т. е. энергии осциллятора, при которых уравнение (67) имеет решения, остающиеся конечными при любом значении независимой переменной x , включая $x = \infty$.

Эти значения энергии соответствуют значениям параметра C , которые были названы нами в предыдущем параграфе характеристическими числами и определены уравнением (63).

Энергия линейного осциллятора в его стационарных состояниях определяется таким образом по уравнению:

$$E_n = \frac{h\nu_0}{2} (2n + 1) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно,

$$E_n = \frac{1}{2} h\nu_0, \quad \frac{3}{2} h\nu_0, \quad \frac{5}{2} h\nu_0, \dots \quad (68)$$

Итак, квантовая механика приводит к значениям энергии гармонического осциллятора с частотой ν_0 , которые являются произведениями основного фактора $h\nu_0$ на последовательные „полуцелые“ числа $1/2, 3/2, 5/2$ и т. д.

Таким образом, гармонический осциллятор есть пример системы с половинными квантовыми числами. В большинстве прежних теорий было принято (или молчаливо допущено), что энергия Планковского осциллятора в стационарных состояниях определяется целыми кратными произведения $h\nu_0$. Однако уже при толковании некоторых полосатых спектров было замечено, что лучшее соответствие теории с экспериментом получается при допущении половинных квантовых чисел для колебаний атомов в двухатомной молекуле (каковые в первом приближении могут быть рассматриваемы как гармонические осцилляторы).

Фундаментальные функции, соответствующие отдельным стационарным состояниям гармонического вибратора, суть:

$$\psi_n(x) = \text{const} \cdot e^{-2\pi^2 m \nu_0 \frac{x^2}{h}} H_n \left(2\pi x \sqrt{\frac{m \nu_0}{h}} \right). \quad (69)$$

Первые пять из этих функций изображены графически на рис. 2.¹ Эти кривые читатель может, если хочет, рассматривать как системы „пучностей“ и „узлов“, которые образуются на пяти колеблющихся струнах, скорость распространения колебаний в коих изменяется по пяти различным

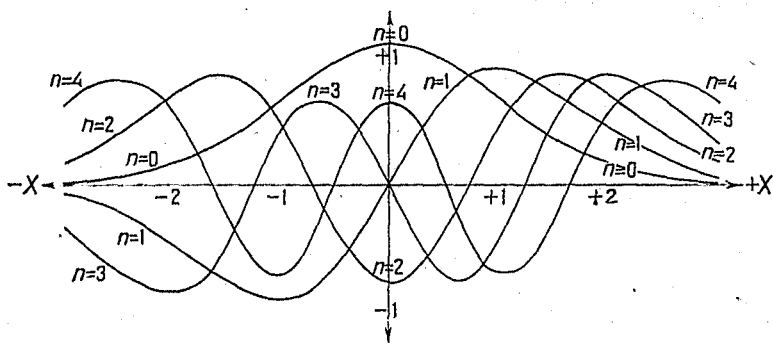


Рис. 2.

законам, получаемым путем подстановки первых пяти значений энергии E [из ряда (69)] в уравнение:

$$n = \frac{E}{\sqrt{2m(E - 2\pi^2 m \nu_0^2 x^2)}}. \quad (70)$$

Таким образом, различные стационарные состояния линейного осциллятора представляются по Шрёдингеру не основным

¹ В (69) и во всех последующих уравнениях ψ представлена только как функция координат $f(x, y \dots)$ и зависимость от t оставлена без внимания. Но функция времени всегда есть простая синусоидальная функция; ее наибольшее значение, таким образом, равно 1. Истинная „элонгация“ выражается произведением $f(x, y \dots) \cdot g(t)$; следовательно, f есть наибольшее значение „элонгации“ или амплитуда. Все последующие уравнения ограничиваются, таким образом, описанием пространственного распределения амплитуд колебания. Это суть „амплитудные уравнения“, которые лишь после умножения на $g(t)$ становятся „волновыми уравнениями“.

колебанием и обертонами одной струны, а основными (и единственными) колебаниями ряда различных струн. [Быть может, некоторым будет более удобно представить себе, как предлагает д-р Фрай (Fry), вместо нескольких струн одну, но с различной скоростью распространения для волн различной частоты.]

Интерпретация атома водорода в волновой механике. Атому водорода приписывается в волновой механике, как и в модели Бора, потенциальная энергия $V = -\frac{e^2}{r}$. Я напоминаю, что эта формула для потенциальной энергии получается на основе представления об ядре и электроне, как точечных частицах, с зарядами $+e$ и $-e$, находящихся на расстоянии r друг от друга. Между тем электрон и ядро, как точечные частицы, не входят в открытом виде в новую теорию, и тем не менее потенциальная энергия, выведенная из Боровской модели, кладется в основу Шрёдингеровской модели атома водорода.

Потенциальная энергия такой формы указывает на необходимость воспользоваться полярными координатами при формулировке проблемы. Волновое уравнение (16) при посредстве (15) напишется в таком случае в форме:

$$\frac{E^2}{2m \left(E + \frac{e^2}{r} \right)} \Delta \psi = \frac{d^2 \psi}{dt^2}. \quad (71)$$

Заменяя частоту колебаний ν выражением $\frac{E}{h}$, мы получаем:

$$\Delta \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) \psi = 0. \quad (72)$$

Сходство этого уравнения с таковым, выведенным выше для колебаний жидкого шара, бросается в глаза; аналогия здесь та же, что и между гармоническим осциллятором и натянутой струной. Мы имеем в атоме водорода как бы пример жидкого шара, скорость распространения колебаний в котором изменяется от точки к точке, согласно формуле:

$$u^2 = \frac{E^2}{2m \left(E + \frac{e^2}{r} \right)} \quad (73)$$

Нам необходимо найти теперь соответствующие стоячие колебания.

Если E является положительной постоянной, то скорость распространения волн по всей массе пара действительна. В этом случае могут быть предписаны пограничные условия обычного типа (напр. условие, согласно которому пар должен быть ограничен твердой сферой известного радиуса). Мы можем вычислить, при данных пограничных условиях, „характеристические числа“ параметра E и соответствующие этим характеристическим числам распределения стоячих колебаний в жидкости и их частоты. При отсутствии каких-либо пограничных условий, уравнение (72) может быть разрешено для любого значения параметра E .

Но если мы придадим E отрицательные значения, то положение изменится. Теперь u , скорость распространения волн, является действительной только в границах сферы с радиусом $-\frac{ic^2}{E}$; на поверхности этой сферы она становится равной 0, а вовне ее — мнимой. Это напоминает нам осциллятор и струну, которой мы воспользовались для иллюстрации его. В последней скорость распространения колебаний была действительной в средней части и мнимой на обоих концах. Между обоими случаями есть существенные различия: в случае водородного атома переменная r имеет только положительные значения, и в точке $r=0$ скорость является хотя и бесконечно большой, но действительной.

Рассматривая струну с переменной l в известной области мнимой скоростью распространения колебаний, мы нашли, что закон изменения скорости может быть подобран таким образом, чтобы в струне образовались стоячие колебания с постоянным распределением узлов и пучностей и с определенными собственными периодами колебаний. С этой целью необходимо было выбрать для параметра одно из значений определенного ряда. То же самое мы должны будем сделать и в случае атома водорода.

Мы пытаемся найти для уравнения (72), как и раньше, решение в форме произведения функции углов φ и θ на функцию радиуса r . Идя этим знакомым путем, мы приходим к уравнению:

$$\operatorname{cosec} \theta \left[\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dY}{d\theta} \right) - \frac{d}{dz} \left(\operatorname{cosec} \theta \frac{dY}{dz} \right) \right] = -\lambda Y \quad (74)$$

и

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) + \frac{8\pi^2 m r^2}{h^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) f = -\lambda f. \quad (75)$$

Уравнение (75) тождественно с тем, которое нам пришлось встретить при обсуждении жидкого шара (52). Здесь, как и там, из циклического характера переменных φ и θ вытекает, что постоянная λ может принимать только определенные значения — «характеристические числа».

$$\lambda = l(l+1), \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (76)$$

Уравнение (75), наоборот, несколько отличается от соответствующего уравнения (52) в предыдущем разделе. Здесь выступает различие между свойствами действительных жидкостей и свойствами той искусственно созданной «воображаемой» жидкости, которая служит материалом для создания модели водородного атома в волновой механике.

Если в уравнении (75) мы придадим параметру E произвольное отрицательное значение, то в общем случае получится уравнение, не имеющее решений, которые оставались бы конечными как в начале координат, так и при росте r до бесконечности. В этом случае мы имеем полную аналогию с тем, что мы видели на примере линейного осциллятора. И там произвольный выбор параметра, обозначенного буквой C , вел к невозможности найти решение, при котором амплитуды остались бы конечными на обоих концах струны.

Шрёдингер показывал однако, что имеется ряд значений параметра E — характеристических чисел, — которые позволяют дать однозначные, непрерывные и конечные решения для любого значения переменной r .

Эти характеристические числа суть следующие:

$$E_n = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2 n^2}; \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (77)$$

Последовательные возможные значения энергии в системе с потенциальной энергией $-\frac{e^2}{r}$, т. е. энергии стационарных состояний

атома водорода. определяются волновой механикой, как частные от деления основного множителя — $\frac{2m^2m^4}{h^2}$ на квадраты последовательных целых чисел 1, 2, 3, 4.

Этот вывод совпадает с результатами опыта. Формула (77) представляется не чем иным как повторением формулы Бора, на которой основывается вся современная теория спектров. Эта формула так блестяще оправдалась на практике, что вряд ли какая-либо новая теория строения атомов могла бы рассчитывать на признание, если бы она со своей стороны также не приводила к ней.

Если мы пожелаем наглядно представить себе Шрёдингеровский атом водорода, то мы должны вообразить для каждого атома особую жидкость, заполняющую все бесконечное пространство, скорость распространения колебаний в которой для каждого стационарного состояния иначе зависит от радиуса. Закон изменения этой скорости получается в каждом отдельном случае путем подстановки в (73) соответствующего значения параметра E , избранного из ряда (77). Если мы подставим в (73) какое-либо другое наугад выбранное значение E , то мы также можем представить себе полученное уравнение как выражающее движение воображаемой жидкости; но жидкость эта не будет в состоянии поддерживать в себе стоячее и непрерывное колебание с повсеместно конечными амплитудами. Только при Боровских значениях энергии мы получаем системы, способные резонировать наподобие шаров из реальной жидкости.

Следующая наша задача состоит в уяснении характера тех стоячих колебаний, которые соответствуют отдельным стационарным состояниям. Это проблема гораздо более сложная, чем в случае воображаемых струн, соответствующих различным стационарным состояниям гармонического осциллятора. Затруднения связаны не только с переходом от одного измерения к трем, но и с фактом математической „дегенерации“, характерной для данной проблемы. Эта дегенерация обуславливает собой неоднозначность решений: каждому дозволённому значению энергии E (кроме первого)

соответствует не одно, а несколько различных колебаний. Для уяснения этого факта необходимо вернуться к обоим уравнениям (74) и (75).

Так как уравнение (74) тождественно с уравнением, введённым нами для шара из реальной жидкости, то распределение стоячих волн в водородном атоме Шрёдингера ничем не отличается от такового в жидком шаре, поскольку речь идет о зависимости амплитуды от угловых переменных φ и θ . Воображаемая жидкость так же, как и реальная, делится на отделения, ограниченные узловыми плоскостями, узловыми двойными конусами и узловыми сферами, и распределение узловых плоскостей и двойных конусов тождественно с таковым в случае реальной жидкости при одинаковых характеристических числах. Только распределение узловых сфер, которые соответствуют нулевым значениям функции $f(r)$ в случае Н-атома, иное, так как уравнение (75) для $f(r)$ существенно отличается от уравнения (52).

Первому значению характеристического числа для параметра E соответствует только одна фундаментальная функция уравнения (75). Второму характеристическому числу отвечают две фундаментальные функции, третьему — три, и т. д. Это ограничение множественности фундаментальных функций связано с ограничением, которому подвержены значения параметра. Если в выражении функции ψ в виде произведения двух функций —

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R^l(r) \cdot Y_l(\theta, \varphi) \quad (78)$$

мы придадим параметру E в первом множителе какое-либо из разрешенных для него значений, то у нас еще останется свободный выбор между различными возможными значениями параметра l во втором множителе. Однако этот выбор ограничен одним условием. Мы не имеем права взять для l значение равное или большее, чем избранное нами значение n ; в противном случае E_n не будет характеристическим числом уравнения (75) в принятом нами смысле. Таким образом, для $n=1$ мы ограничены значением $l=0$; для $n=2$ — значениями $l=0$ и 1 , и т. д. Каждому характеристическому

числу E_n соответствует $(n - 1)$ различных шаровых функций $Y_1(\theta, \varphi), Y_2(\theta, \varphi) \dots Y_{n-1}(\theta, \varphi)$ в качестве возможных решений уравнения (74). Каждое из этих решений дает особую фундаментальную функцию $F_{n,l}(r)$ уравнения (75). Если мы введем новую переменную

$$\rho = \frac{2\pi\sqrt{-2mE_n}}{h} r = \frac{4\pi^2 m e^2}{n h^2} r = \frac{1}{n a_0} r$$

вместо r ($a_0 = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2}$ есть радиус первого „Боровского круга“), то фундаментальные функции, о которых идет речь, примут следующую сравнительно простую форму¹:

$$X_{n,l}(\rho) = \text{const } \rho^{+l} \sum_{k=0}^{n-l-1} \frac{(-2\rho)^k}{k!} \binom{n+l}{n-l-1-k}; \quad (79)$$

функция $X_{n,l}$ имеет $(n - l - 1)$ корней, так что соответствующее колебание должно характеризоваться $(n - l - 1)$ узловых сфер. Каждому разрешенному значению E_n соответствуют, таким образом, n разных решений общего уравнения (72), которые отличаются друг от друга по числу узловых сфер:

$$\psi_{n,l}(r, \theta, \varphi) = X_{n,l}(\rho) Y_l(\theta, \varphi); \quad l = 0, 1, 2 \dots (n-1). \quad (80)$$

Каждое из этих уравнений изображает разрешенный класс колебаний, отвечающих каждое в отдельности одному из членов, из которых складывается шаровая функция, согласно уравнению (54).

Благодаря подразделению шаровых функций, для n -го разрешенного значения параметра E имеется $(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{n(n+1)}{2}$ различных способов колебания.

Уравнение (80) изображает различные колебания, в которых может участвовать воображаемое жидкое образование, которое служит для нас моделью атома водорода. Мы могли бы попытаться подробно и возможно наглядно описать характер

¹ Множитель в скобках в уравнении (79) изображает собой „число сочетаний из $(n + l)$ по $(n - l - 1 - k)$ “, т. е. $(n - l - 1 - k)$ -тый коэффициент бинома $(a + b)^{l+n}$.

² Успехи физических наук, Т. IX, Вып. 4.

колебания в каждом отдельном случае. Однако я сомневаюсь, имеет ли это начинание смысл. В свое время много энергии и искусства было положено на описание и изображение различных электронных орбит, которые теперь так быстро „устарели“. Кто осмелится утверждать, что та же судьба не постигнет через несколько лет и картины, которые мы можем себе сейчас представить с помощью воображаемой колеблющейся жидкости? Однако можно считать вероятным, что по крайней мере в течение нескольких ближайших лет образ колеблющейся жидкости при интерпретации опытных данных в области теории строения атома будет наиболее адекватным. Поэтому я все же позволяю себе указать несколько деталей характера колебательных процессов, соответствующих трем наиболее „глубоким“ (т. е. богатым энергией) состояниям атома водорода.

Нормальное состояние, $n=1$. Одна фундаментальная функция; одна экспоненциальная функция от r , уменьшающаяся от начала координат до бесконечности без узловых сфер. Соответствующая шаровая функция $Y_0(\theta, \varphi)$ представляет собой постоянную. Колебание изображается уравнением:

$$\psi(r) = \text{const.} \cdot e^{-\frac{r}{a_0}}; \quad a_0 = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2} \quad (81)$$

и обладает совершенной сферической симметрией.

Первое возбужденное состояние, $n=2$ (конечное состояние после испускания линий серии Бальмера). Две фундаментальные функции, $X_{2,0}$ и $X_{2,1}$. Первая изображает собой колебание с одной узловой сферой; вторая вообще не имеет узловых сфер, и амплитуда колебания падает экспоненциально при перемещении от центра до бесконечности. Первая фундаментальная функция должна быть для получения общей формулы движения умножена на $Y_0(\theta, \varphi)$. Так как Y_0 есть постоянная, то это колебание отличается полной сферической симметрией. Вторая фундаментальная функция подлежит умножению на Y_1 ; этот последний множитель состоит из членов, выписанных полностью в уравнении (54); получаемые в результате умножения различные системы

колебаний характеризуются наличием узловых плоскостей и конусов и не могут обладать поэтому сферической симметрией. Читатель может сам уяснить себе на основании уравнения (55) расположение узловых поверхностей в этих случаях.

Второе возбужденное состояние, $n = 3$ (исходное состояние атома при испускании линии $H\alpha$). Три фундаментальные функции $X_{3,0}$, $X_{3,1}$ и $X_{3,2}$. Первая отвечает колебанию с двумя узловыми сферами и с совершенной сферической симметрией. Вторая и третья изображают колебания с одной узловой сферой и совсем без таковой. Будучи умножены на шаровые функции Y_1 и Y_2 , колебания эти приобретают узловые плоскости и конусы и лишаются сферической симметрии.

Вообще стационарное состояние, характеризуемое значением параметра E_n , обладает n фундаментальных функций, соответствующих колебаниям с 0, 1, 2, 3... $(n-1)$ узловых сфер; фундаментальной функции с максимальным числом узловых сфер соответствует только один род колебаний, отличающийся полной сферической симметрией. Другие фундаментальные функции соответствуют нескольким родам колебаний каждая, с различным количеством узловых плоскостей и конусов.

Если приведенные нами примеры должны явиться образцами языка для описания атомных явлений, то необходимо составить словарь, с помощью которого можно было бы переводить на этот язык выражения, к которым мы привыкли прибегать, объясняясь на языке настоящего, т. е. на языке атомной теории Бора и Зоммерфельда. Этот словарь должен будет содержать определения в роде следующих: число n есть так называемое главное квантовое число электронной орбиты; число l на 1 меньше так называемого азимутального или „побочного“ квантового числа (l) в Борвской модели; число $(n-l-1)$, определяющее собой число узловых сфер, соответствует радиальному квантовому числу электронной орбиты. Дабы сделать смысл этих определений более ясным, я напомню, что модель атома водорода, предложенная Бором и Зоммерфельдом, приписывала атому в n -ом энергетическом состоянии n различных орбит, из коих одна круговая, а остальные $(n-1)$ — эллиптические с различным эксцентриситетом. (Введение в эту модель представления о вра-

щающемся электроме несколько видоизменило ее, так что с этой точки зрения наш словарь относится не к языку настоящего, а к языку „глубокой древности“, т. е. приблизительно 1925 г.) „Эллиптические орбиты избираются в модели Бора и Зоммерфельда с помощью квантового условия, согласно которому интеграл $\int p_\varphi d\varphi$ момента вращения p_φ , взятый вдоль всей замкнутой орбиты, должен равняться произведению из h на целое число k , меньшее или равное главному квантовому числу n . В то же время интеграл $\int p_r dr$ радиального момента p_r , должен равняться произведению h на целое число $(n - k)$, так что сумма интегралов $\int p_\varphi d\varphi + \int p_r dr$ будет равняться n . Числа n , k и $(n - k)$ назывались в модели Бора главным, азимутальным и радиальным квантовыми числами. (Определения в роде данных выше должны позволить переход от различных орбит в прежних атомных моделях к различным видам колебаний в моделях нового типа.

Возмущения.

Согласно изложенному выше, волновая механика приводит к заключению, что каждому дозволённому значению энергии E_n соответствуют n различных способов колебания, отличающихся друг от друга количеством узловых сфер (не говоря уже о различных распределениях узловых плоскостей и конусов). Естественно возникает вопрос: можно ли на практике отличить эти колебания друг от друга и установить, какому из них или какой комбинации их отвечает данное конкретное состояние атома водорода?

Переводя этот вопрос на язык модели Бора-Зоммерфельда, мы получаем следующую формулировку его: можно ли в каждом конкретном случае сказать, на какой именно из разрешённых эллиптических орбит находится электрон?

На этот вопрос теория Бора отвечала, что электрон в действительности находится не в строго-кулоновском поле, так что сила, действующая на него, не в точности обратно пропорциональна квадрату его расстояния от ядра. К кулоновской силе притяжения электрона ядром должна быть при точном вычислении присоединена ещё некоторая возмущающая сила. Вычисление показывает, что при наличии

возмущающей силы энергия различных электронных орбит с одинаковым квантовым числом n перестает быть тождественной. Представим себе, например, атом, состоящий из ядра с зарядом $11e$ и с 10 электронами, группирующимися вблизи него, в то время как одиннадцатый электрон находится на орбите со значительно большей осью (обычная модель атома натрия). В этом случае, в первом приближении, на внешний электрон будет действовать такая же сила, как если бы он находился в поле ядра с зарядом $1e$. Однако при более точном вычислении необходимо будет принять во внимание, что внутренние электроны не вполне совпадают с ядром; этот факт может быть учтен путем введения в вычисление особой возмущающей силы. При наличии таковой те n электронных орбит, которые возможны для внешнего электрона при энергии, равной в первом приближении E_n , не будут более тождественны между собой; n -ое стационарное состояние атома распадется на n различных стационарных состояний, немного отличающихся друг от друга. Даже в атоме водорода, несмотря на отсутствие внутренних электронов, нельзя обойтись без введения возмущающей силы; источником ее служит требуемая теорией относительности зависимость массы электрона от его скорости. Это обстоятельство вызывает распад стационарных состояний водорода на отдельные, лежащие тесно друг возле друга ступени; в спектре этот распад обнаруживается появлением так называемой тонкой структуры линий.

Аналогичное наблюдается и при более точном выводе стационарных состояний по методам волновой механики. Если ввести „возмущающий член“ в выражение, изображающее собой потенциальную энергию атома в волновом уравнении, то можно надеяться, что эта поправка позволит отличить друг от друга различные фундаментальные функции, первоначально отвечавшие одному и тому же характеристическому числу, и установить, какая из дозволенных колебательных систем отвечает действительности. (На языке математики можно сказать, что введение возмущающих сил уничтожает дегенерацию проблемы; это уничтожение может быть полным или только частичным.)

В этой области волновая механика даст совершенно те же результаты, что и первоначальная атомная теория Бора и Зоммерфельда. Этот результат не очень утешителен, ибо несколько лет тому назад выяснилось, что теория Бора-Зоммерфельда нуждается в расширении, для того чтобы она могла успешно объяснить детали тонкой структуры спектров. Это усовершенствование заключалось в введении представления о вращающемся вокруг собственной оси электроны. Нечто аналогичное должно быть, очевидно сделано, и в волновой механике, в противном случае она будет обнаруживать те же недостатки, что и первоначальная теория электронных орбит, которая не принимала во внимание собственного вращения электрона—например эта теория не могла полностью объяснить аналогию между спектрами водорода и щелочных металлов.

Есть один случай возмущающих сил, в котором выводы теории Бора-Зоммерфельда совпадают в первом приближении с выводами волновой механики и в то же время согласуются с данными эксперимента, без того чтобы необходимо было прибегнуть к помощи вращающегося электрона. Это — область так называемого эффекта Штарка, т. е. тот случай, когда возмущающая сила исходит от внешнего электрического поля. Так как этот пример может послужить удобным переходом к вопросу, которому будет посвящена последняя часть настоящей статьи, то я остановлюсь на нем несколько подробнее.

Эффект Штарка. Представим себе атом водорода, который находится во внешнем электрическом поле произвольного направления. Мы совместим с этим направлением ось z нашей системы координат. Благодаря наличию этого поля электроны в положении (x, y, z) , помимо потенциальной энергии $-\frac{e^2}{r}$, обусловленной притяжением к ядру (расположенному в начале координат), приобретает добавочную потенциальную энергию $+eFz$. (Мы продолжаем, таким образом, пользоваться представлением о точечном ядре и точечном электроны.)

Общая потенциальная энергия системы состоит, таким образом, из обычного члена $-\frac{e^2}{r}$ и „члена возмущения“ $+eFz$.

Волновое уравнение приобретает вид:

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(E + \frac{e^2}{r} - eFz \right) \psi = 0. \quad (82)$$

Проблема требует в этом случае для своего успешного разрешения применения параболических координат. Вместо плоскостей, двойных конусов и сфер, которыми мы пользовались раньше, желательнее ввести теперь плоскости и два семейства параболоидов вращения. Плоскости должны пересекать друг друга вдоль линии, параллельной направлению поля, т. е. вдоль оси z . Оба семейства параболоидов имеют общий фокус, расположенный в центре координат, т. е. совпадающий с ядром; перигелии их расположены на оси z , в двух противоположных направлениях от центра. Переход от прямоугольных координат к параболическим совершается с помощью уравнений:

$$x = \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi \quad y = \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi \quad z = \frac{1}{2} (\xi - \eta). \quad (83)$$

Волновое уравнение приобретает в новых координатах форму:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\psi}{d\xi} \right) + \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\psi}{d\eta} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta} \right) \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} + \frac{2\pi^2 m}{h^2} \left[E (\xi + \eta) + 2e^2 - \frac{1}{2} eF (\xi^2 - \eta^2) \right] \psi = 0. \quad (84)$$

Пытаясь разложить это дифференциальное уравнение на уравнения, в каждое из которых входит только одна из переменных, по способу, которым мы уже многократно пользовались, мы получаем три уравнения, содержащие кроме E еще два параметра. Для всех трех параметров допускаются только определенные значения — характеристические числа, выбор которых обуславливается с одной стороны циклическим характером переменной φ , а с другой стороны тем обстоятельством, что только при определенных значениях параметров решения уравнений остаются конечными при любом значении независимой переменной.

Положим $E = 0$; найдем соответствующие характеристические числа и подставим их в уравнения. Мы получим опреде-

ленное распределение стоячих волн в нашей воображаемой жидкости; ближайшее рассмотрение показывает, что жидкость будет в этом случае разделена на отделения узловыми поверхностями, имеющими форму плоскостей и параболоидов, с осью параллельной направлению поля, смотрящих в две противоположные стороны. Каждому дозволению значению энергии E соответствует $(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n)$ различных систем стоячих волн, каждая из которых характеризуется особым числом k_1 узловых параболоидов одного направления, числом k_2 узловых параболоидов другого направления и, наконец, особым числом узловых плоскостей s . Возможные значения чисел k_1 , k_2 и s ограничены условием, согласно которому они должны быть целыми числами, не меньшими 0 и не большими n , и что их сумма должна равняться $(n-1)$, — другими словами, они должны удовлетворять уравнению:

$$k_1 + k_2 + s + 1 = n. \quad (85)$$

(Переводя эти утверждения на язык электронных орбит, мы называем s экваториальным квантовым числом, определяющим момент вращения электрона вокруг направления поля, измеренный в единицах $\frac{h}{2\pi}$; k_1 и k_2 суть параболические квантовые числа.)

Вводя теперь в вычисление внешнее поле F , мы находим, что между $(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n)$ различных колебаний, соответствующих одному значению E_n , те, которые характеризуются соотношением $k_1 = k_2$, сохраняют свою энергию неизменной, в то время как остальные смещаются в различно сильной степени, согласно известной формуле Эйнштейна:

$$\Delta E = \frac{3}{8} \frac{Fh^2n}{8\pi^2me} (k_1 - k_2). \quad (86)$$

Таким образом, n -е стационарное состояние распадается или разлагается на несколько отдельных стационарных состояний; однако это разложение не представляется полным: некоторые из общего числа $(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n)$ колебаний остаются и при наличии внешнего электрического поля энергетически тождественными (нецелое уничтожение деге-

перации). Спектральная линия, соответствующая переходу из состояния E_i в состояние E_j , должна, таким образом, распадаться в электрическом поле на ряд отдельных линий, лежащих близко друг от друга. Этот так называемый эффект Штарка наглядно показывает самостоятельное существование различных колебаний, которые при отсутствии внешнего поля дают одинаковую энергию и не могут быть поэтому отличены друг от друга.

Перед тем как перейти к дальнейшему изложению, я хотел бы коснуться одного маленького парадокса, который, быть может, уже обратил на себя внимание читателя. Выше было сказано, что в отсутствии внешнего поля колебания нашей воображаемой жидкости характеризуются распределением узловых плоскостей и узловых параболоидов, между тем как в предыдущем параграфе мы вывели для невозмущенного атома водорода распределение стоячих волн, определяемое узловыми плоскостями, двойными конусами и сферами. Однако ближайшее рассмотрение показывает, что эти два утверждения не противоречат друг другу. Ибо колебание одного рода может быть получено как сумма нескольких колебаний другого рода. Возьмем для примера первое возбужденное состояние атома водорода ($n=2$). С помощью процедуры, описанной в предыдущем параграфе, мы находим три системы колебаний: 1) систему с одной только узловой сферой, 2) систему с одним двойным узловым конусом и 3) систему с одной узловой плоскостью. По второму способу, принятому нами при изучении эффекта Штарка, мы получаем также три различные системы колебаний: 1) с одним узловым параболоидом, направленным в одну сторону, 2) с одним узловым параболоидом, направленным в другую сторону, и 3) с одной узловой плоскостью. Последние способы колебания в обеих группах очевидно тождественны. Колебания 1) и 2) второй группы могут быть воспроизведены путем взаимного наложения — с надлежащей интенсивностью — колебаний 1), 2) и 3) первой группы. Если поле, действующее на атом водорода, постепенно ослабляется и в конце концов сводится к нулю, то атом остается колеблющимся по способам 1), 2) или 3) второй группы; эти виды колебания доступны, однако, аналитическому

изображению, как определенные комбинации колебаний 1), 2) и 3) первого типа.

Предположим теперь, что мы имеем перед собой невозмущенный атом водорода (опять-таки в первом возбужденном состоянии). Мы прилагаем к нему некоторое весьма слабое поле F . Перед приложением поля атом может характеризоваться любой комбинацией колебаний 1), 2) и 3) первого рода. В качестве колебаний второго рода, к которым атом должен теперь перейти, годится не всякая комбинация колебаний первого рода, а только определенные, специально подобранные по амплитуде сочетания их. Если в атоме до приложения поля этого сочетания не было, — спрашивается, каким образом весьма слабое — в пределе бесконечно-слабое — внешнее поле F может вызвать соответствующую перегруппировку колебаний? (Аналогичный парадокс возникает и при рассмотрении проблемы с точки зрения теории электронных орбит.)

Интерпретация ротатора в волновой механике. Ротатор, т. е. твердое тело, способное вращаться вокруг неподвижной или свободной оси, является одним из важнейших элементов в арсенале физиков, которые занимаются конструкцией атомных и молекулярных моделей. Это — обычная модель, которой физика пользуется при объяснении явлений электрической и магнитной поляризации газов, а также при толковании полосатых спектров двух- и многоатомных молекул. Большинство моделей, которыми пользуются в этом последнем случае, правда, соединяют с представлением о ротаторе еще и представление об осцилляторе; другими словами, они рассматривают ротатор не как твердое тело, а как эластическую систему, способную колебаться. В настоящей статье мы ограничимся примером твердого ротатора неизменной формы.

Трактовка ротатора по методу волновой механики необычайно проста; однако в общем случае для ее проведения необходимо воспользоваться волновым уравнением в обобщенной форме, в конфигурационном пространстве многих измерений. Этого осложнения можно избежать, если ограничиться рассмотрением того простого идеализованного ротатора, который был введен в науку около пятидесяти лет назад для

объяснения удельной теплоты двухатомных газов, в роде водорода. Модель эта состоит из двух шаров, неподвижно соединенных друг с другом, в роде гимнастической гири. При этом предполагается, что вся система может вращаться только вокруг осей перпендикулярных к линии, соединяющей между собой центры обоих шаров, а не вокруг оси параллельной этой линии (фигурной оси). Расположение этой модели определяется углами θ и φ , которые характеризуют собой (в полярной системе координат) направление фигурной оси в пространстве. Энергия системы состоит исключительно из живой силы вращения. Поэтому член V исчезает в этом случае из волнового уравнения. Это обстоятельство сильно упрощает проблему. Мы обозначаем через I момент инерции модели по отношению к оси вращения и находим для волнового уравнения форму:

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 EA}{h^2} \psi = 0. \quad (87)$$

В этом уравнении оператор Лапласа Δ должен быть выражен в полярных координатах, как уже было сделано в уравнении (50). Члены, содержащие отсутствующую в данном случае координату r , могут быть опущены. Таким образом, мы получаем для нашей проблемы снова второе уравнение (52), со специальным значением постоянной, обозначенной в упомянутом уравнении буквой λ :

$$-\operatorname{cosec} \theta \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\operatorname{cosec} \theta \frac{d\psi}{d\varphi} \right) + \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\psi}{d\theta} \right) \right] = \frac{8\pi^2 EA}{h^2} \psi. \quad (88)$$

И в настоящем примере функция ψ должна возвращаться к своему первоначальному значению при увеличении φ на целое кратное 2π , а θ на целое кратное π , ибо такое изменение обеих координат ведет к возвращению модели в первоначальное положение. Мы опять должны заключить, что для коэффициента правой части уравнения возможны только определенные значения — характеристические числа; условия, которым этот коэффициент должен удовлетворять, равносильны следующему условию для энергии ротатора E :

$$E = n(n+1) \frac{h^2}{8\pi^2 A} = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{h^2}{8\pi^2 A} + \text{const}; n = 0, 1, 2, 3. \quad (89)$$

Таким образом, вследствие циклического характера переменных, энергия ротатора оказывается квантованной согласно уравнению (89). Это уравнение дает нам второй (после гармонического осциллятора) пример полудельных квантовых чисел.

Таким образом, собственные значения энергии ротатора определяются особенно простым и ясным способом. Однако осложнение, ведущее к необходимости перехода к неэвклидовому конфигурационному пространству, уже выступает на горизонте. Уравнение (87) отличается от волновых уравнений, которые мы применяли до сих пор, заменой массы m моментом инерции A . Эта замена является в достаточной степени естественной, и, производя ее, можно сослаться на „читунцию“. Но, строго говоря, для оправдания этой подстановки необходимо было бы сослаться на форму, которую приобретает в этом случае выражение кинетической энергии в общем волновом уравнении. Если мы откажемся от ограничения, введенного нами выше, и позволим ротатору вращаться также и вокруг фигурной оси, то кинетическая энергия примет другую форму, и в этом общем случае твердого ротатора со свободной осью мы не сможем обойтись без написания волнового уравнения в его общей, неэвклидовой форме. Эта проблема была разрешена несколькими исследователями, и применение полученной таким образом формулы к некоторым проблемам молекулярных спектров показало, что форма общего волнового уравнения, выведенная де Бройлем и Шрёдингером, хорошо оправдывается на практике.

Поляризация газов в магнитном или электрическом поле может быть рассматриваема с помощью представления о молекулах, как магнитных или электрических диполях. Вычисление является наиболее простым при предположении, что направление магнитного (или электрического) момента совпадает с направлением фигурной оси молекулы, которая не может вращаться вокруг этой оси. Пусть M обозначает (магнитный или электрический) момент такой молекулы. Пусть, далее, поле, в котором находится молекула, направлено параллельно оси z (т. е. тому направлению, от которого считается угол θ). Поле обуславливает появление потенциа-

ной энергии, которая должна быть прибавлена к левому члену уравнения (88). Этот прибавочный член имеет форму:

$$- V\psi = (MH \cos \theta) \psi. \quad (90)$$

Легко вывести, что волновое уравнение имеет в этом случае характеристические числа, которые ограничивают возможности ориентации молекулы по отношению к полю. Это заключение, которое было сделано уже первоначальной атомной механикой Бора и Зоммерфельда, было подтверждено на практике опытами Герлаха и Штерна. Вычислить действительную поляризацию газа в электрическом или магнитном поле можно, только сделав какое-либо дополнительное допущение касательно вероятности различных ориентаций молекулы по отношению к полю при различных температурах. Сделав такое допущение, мы получаем формулу для диэлектрической постоянной и для магнитной восприимчивости газа, в виде функции приложенного поля и температуры. Обычно в этих случаях допущение (одинаковая вероятность всех разрешенных случаев) ведет к формуле, которая при высоких температурах асимптотически переходит в известную эмпирическую формулу Ланжевена:

$$\text{Восприимчивость} = \frac{Y}{H} = \frac{NM^2}{3kT}. \quad (91)$$

Интерпретация свободного электрона в волновой механике. Мы оставляем теперь вычисления характеристических чисел и стационарных состояний и возвращаемся к первоначальным идеям де Бройля.

Волновое уравнение электрона, движущегося со скоростью V в пространстве, лишенном каких-либо электрических или магнитных сил (или для любой другой частицы, летящей с постоянной скоростью вдоль оси x), в своей классической (т. е. не релятивистической) форме имеет следующий вид:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2mE}{h^2} \psi = 0 \quad \left(E = \frac{1}{2}mv^2\right) \quad (92)$$

Это уравнение имеет решение в виде синусоидальной функции при любом значении параметра E и, следовательно, не требует никаких ограничений энергии определенными дискрет-

ными значениями (противоположный результат был бы слишком парадоксальным!) Приписывая колебанию частоту, определяемую уравнением (19), $\nu = \frac{E}{h}$ и скорость распространения, согласно (15), выражаемую формулой:

$$u = \frac{E}{\sqrt{2mE}},$$

мы получаем для длины волны, связанной с движением электрона (или другой свободной частицы с массой m), выражение:

$$\lambda = \frac{E}{\sqrt{2mE}} \cdot \frac{h}{E} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{mv}. \quad (98)$$

Если мы вычислим абсолютное значение λ для электронов, летящих со скоростью в несколько сот или тысяч вольт, т. е. для обыкновенных катодных лучей, то мы получим волны, длина коих приблизительно соответствует длине рентгеновских волн. Так, например, электрону в 150 вольт соответствует длина волны почти точно в 1 (Онгстрём).

Это совпадение невольно наводит на мысль о возможности диффракции электронных лучей при падении их на кристаллические решетки, вызывающие, как известно, диффракцию рентгеновских лучей той же длины волны. Ничто сказанное нами до сих пор касательно волн, связанных с материальными частицами, не обязывает нас к этому заключению. Наоборот, скептик мог бы с некоторым основанием утверждать, что надежда увидеть когда-либо наглядно распространение описанных волн в нашем трехмерном пространстве так же необоснована, как надежда увидеть когда-либо воочию другие математические фикции, применяемые при вычислении, например, x и y из какого-нибудь алгебраического уравнения. При теоретическом обсуждении этой возможности невольно приходит в голову, что только в отдельных простейших случаях, например в случае свободного электрона или атома водорода волновая механика ведет к представлению о волнах в трехмерном евклидовом пространстве. В других случаях — примером может служить свободный ротатор — „волны“ необходимо рассматривать лишь в неевклидовом

многомерном пространстве. Несмотря на это, как упомянуто ранее, в обоих случаях мы можем представить процессы совершенно аналогично построенными „волновыми уравнениями“. Сказать, что волны существуют только в неевклидовом „пространстве конфигурации“ практически означает почти то же самое, что сказать, что в физическом смысле они не существуют вообще. Почему же в частном случае, который приводит к волнам в трехмерном пространстве, эти волны должны быть более реальны нежели в общем случае? Таким образом а priori вопрос остается открытым, однако эксперимент дает совершенно однозначный ответ: диффракция электронных волн в кристаллических решетках действительно существует. Она была предсказана Эльзасером и открыта Дэвиссоном и Джермером и, в другой форме, Г. П. Томсоном.¹ На основании диффракционной картины можно известным образом, зная постоянную решетки, вычислить длину волны. Таким путем, из опыта, получаются для длин волн де Бройля величины, совершенно совпадающие с вычисленными на основании соотношения $\frac{1}{2} m v^2 = h\nu$.

Необходимо еще раз отметить, что скорость распространения волн материи отнюдь не совпадает со скоростью движения материальной частицы, к которой эти волны „приписаны“. Скорость волны равняется $u = \frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}}$, скорость частицы $v = \sqrt{\frac{2T}{m}} = \sqrt{\frac{2(E-V)}{m}}$. То, что мы измеряем при исследовании диффракции, есть длина волны, а не скорость распространения ее и не частота колебаний. Это обстоятельство весьма существенно, ибо длина волны, как мы сейчас увидим, есть величина, не зависящая от абсолютного значения энергии, которая — по крайней мере в классической механике — всегда известна только со включением неопределенной аддитивной постоянной. Если мы прибавим к измеренной нами по отношению к какой-либо произвольно выбранной системе координат кинетической энергии частицы

¹ Ср. статьи П. С. Тартаковского, Успехи физич. наук, 8, 338, 1928 г. и В. Л. Грановского, Успехи физич. наук, 9, 308, 1929 г.

какую-либо наугад выбранную постоянную и назовем сумму энергией системы E , то мы изменим этим соответствующую данной частице частоту колебаний. Но так как одновременно в том же отношении изменится и скорость распространения волны, то длина волны останется неизменной. Длина волны, на основании соотношений $\lambda\nu = u$ и $h\nu = E$, определяется всегда уравнением

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E-V)}},$$

где V обозначает собой потенциальную энергию. Всякое увеличение энергии при неизменной скорости частицы в одинаковой степени увеличивает оба члена под знаком корня — E и V , и таким образом разность $E - V$ остается неизменной. Возвращаясь к предыдущим отделам нашей статьи, мы видим, что произведенное Шрёдингером вычисление стационарных состояний основывалось на предъявлении известных требований к длинам волн, а не к частотам; ибо распределение стоячих волн в пространстве зависит только от длины волны, а не от частоты колебаний. Частота колебаний, доступных непосредственному измерению, — именно частота колебаний световых волн, испускаемых атомом при переходе из одного стационарного состояния в другое, — зависит исключительно от разности энергий этих двух состояний и ни в какой степени не предопределяет абсолютной величины их. В релятивистической механике энергия определяется абсолютно, как произведение из массы частицы на квадрат скорости света. Если с самого начала пользоваться релятивистической механикой, то затронутый нами вопрос вообще не может возникнуть. Стоит однако отметить, что неполнота определения энергии в классической механике ни в какой степени не отзывается на практических выводах волновой механики, так что предсказания ее в этой области не могут служить аргументами ни за, ни против релятивистических формул.

В релятивистической механике волновая формула летящего свободно в пространстве электрона приобретает вид:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{4\pi^2}{h^2c^2} (E - m_0^2c^4) = 0; \quad E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (94)$$

Длина соответствующей волны определяется выражением

$$h \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{1}{m_0 v} = \frac{h}{m v}, \text{ частота колебаний — выражением}$$

$$m_0 c^2 \frac{1}{h \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \text{ Волны распространяются со скоростью } \frac{c^2}{v}, \text{ пре-}$$

ходящей скоростью света.

Я должен ограничиться только упоминанием того важного факта, что скорость частицы связана в волновой механике со скоростью волны совершенно тем же соотношением, какое связывает в оптике скорость распространения фазы с так называемой групповой скоростью.

ПОПЫТКА ДАТЬ ФИЗИЧЕСКОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ ВЕЛИЧИНЕ ψ .

Прошло тридцать три года с того дня, когда выдающийся английский государственный деятель лорд Сэллсбери, избранный президентом Британского Общества содействия развитию наук, произнес в своей вступительной речи, богатой перлами остроумия, следующие достопамятные слова, вызванные многочисленными попытками физиков того времени дать наглядное объяснение свойствам эфира: „Главная, если не единственная функция эфира, как кажется, состоит в том, чтобы быть подлежащим к глаголу колебаться“. То же самое мы можем сказать в настоящее время относительно величины ψ . Эта величина позволяет нам определять энергию стационарных состояний атома. Когда эта цель достигнута, функция ψ исчезает из нашего поля зрения. Подобно тому как переменная под знаком определенного интеграла исчезает после окончания интеграции, величина ψ теряет для нас свой интерес, когда цель, для достижения которой она была введена, является достигнутой. Можно даже вообще не давать этой величине особенного обозначения: многие математики предпочитают просто говорить о дифференциальном операторе:

$$\Delta - 8\pi^2 m (E - V) \cdot \frac{1}{h^2}.$$

Шрёдингер сделал однако смелую попытку — без сомнения, не полную и не окончательную, но тем более интересную — придать величине ψ , соответственно ее значению в теории, определенное физическое значение. Предположение Шрёдингера заключалось в том, что он положил квадрат амплитуды ψ пропорциональным квадрату плотности электричества в данной точке, „размазав“ таким образом электрон на сравнительно большое практически (теоретически — на бесконечное) пространство.

Приемотримся ближе к этой теории и к ее последствиям.

Дабы избежать, насколько возможно, всяческих осложнений, я возьму наиболее простой возможный пример — именно гармонический линейный осциллятор. Мы заменяем этот осциллятор воображаемой струной, натянутой вдоль оси x ; скорость распространения волны в подобной струне, как мы знаем, определяется уравнением $\sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}}$ и является таким образом действительной по обе стороны от начала координат вплоть до точек $x = \pm L$ и мнимой вне этого интервала. Я буду пользоваться при изложении также и еще более простым примером, который послужил нам предварительной ступенью к изучению осциллятора — именно реальной натянутой вдоль оси x -ов и зажатой в точках $x = \pm L$ струной, с постоянной скоростью распространения волны вдоль нее.

В обоих случаях — при исследовании реальной и воображаемой струны — поиски характеристических чисел и фундаментальных функций привели нас к установлению определенной системы естественных или собственных колебаний, с определенными частотами $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots$, каждому из коих отвечает определенное пространственное распределение стоячих волн с их узлами и пучностями, изображаемыми аналитически фундаментальными функциями:

$$y_i = f_i(x) (A_i \cos 2\pi\nu_i t + B_i \sin 2\pi\nu_i t); \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (95)$$

Для реальной струны функции $f_i(x)$ суть обыкновенные синусоидальные функции; для воображаемой струны, символизирующей собой линейный осциллятор, эти функции выражаются уравнением (60). Я напоминаю, что в этом последнем случае мы

должны были рассматривать не одну струну с различными колебаниями, а столько различных по свойствам струн, сколько различных колебаний мы должны были приписать осциллятору.

Если реальная струна выполняет i -е колебание, или если мы обращаем внимание на колебание i -й струны, из числа символизирующих гармонический осциллятор, то функция $f_i(x)$ пропорциональна амплитуде этого колебания. Форма уравнения (95) показывает, что в каждом данном пункте амплитуда эта не зависит от времени.

Если мы будем рассматривать квадрат амплитуды колебаний как плотность электричества в данной точке, то на основании предыдущих рассуждений мы должны будем заключить, что распределение электричества вдоль воображаемой струны, которой мы для наглядности заменяем линейный осциллятор, постоянно во времени. Для каждого данного стационарного состояния существует определенное постоянное распределение амплитуд, т. е., согласно нашему толкованию, постоянное распределение электрической плотности вдоль струны. Это означает, что пока струна (а следовательно — линейный осциллятор) характеризуется одной фундаментальной функцией, собственное колебание не сопровождается движением электрических зарядов, и потому нет основания ожидать излучения электромагнитной энергии в окружающее пространство.

Представим себе теперь, что реальная струна колеблется сразу по двум разрешенным способам, соответствующим числам i и j , или же что i -я и j -я воображаемая струна одновременно выполняют свои колебания. В этом случае колебание изображается уравнением (96) (в этом уравнении для простоты положено $A_i = A_j = 1$, и $B_i = B_j = 0$, что не влияет на общности выводов):

$$y = y_i + y_j = f_i(x) \cos 2\pi\nu_i t + f_j(x) \cos 2\pi\nu_j t \quad (96)$$

Уравнение (96) легко приводится к форме:

$$y = C \cos (2\pi\nu t - \alpha), \quad (97)$$

где

$$C^2 = f_i^2 + f_j^2 + 2f_i f_j \cos 2\pi(\nu_i - \nu_j)t, \quad (98)$$

а α есть постоянная, не имеющая для нас особенного значения.

В уравнении (97) мы имеем перед собой пример колебания с амплитудой, меняющейся в каждой данной точке с течением времени. Квадрат амплитуды состоит в этом случае из постоянного члена $f_i^2 + f_j^2$ плюс член, меняющийся в зависимости от времени по синусоидальной функции. При этом частота изменения квадрата амплитуды (период синусоидального члена) определяется разностью частот обеих сосуществующих систем колебаний.¹

Идентифицируя опять квадрат амплитуды с плотностью электричества, мы видим, что плотность эта уже не будет постоянна во времени, но меняется в каждой точке периодически с частотой $(\nu_i - \nu_j)$. Таким образом, по законам классической электродинамики, следует ожидать излучения энергии частоты $\nu = \nu_i - \nu_j$.

Мы вспоминаем, что частоты ν_i и ν_j определяются энергиями стационарных состояний E_i и E_j , по уравнению $\nu h = E$.

Если бы мы были в праве сделать несколько смутное, но соблазнительное предположение, что осциллятор может одновременно находиться в обоих стационарных состояниях, с энергиями E_i и E_j , то наглядным образом такого осциллятора могла бы служить воображаемая струна, у которой в каждой точке квадрат амплитуды ψ флюктуирует с частотой $(\nu_i - \nu_j)$; и если мы этот квадрат амплитуды ψ отождествим с плотностью электричества, то мы можем ожидать, что подобная система будет давать излучение с частотой $\frac{E_i - E_j}{h}$.

То, что раньше обозначалось как переход от одного стационарного состояния в другое, согласно описанной гипотезе должно называться сосуществованием этих двух

¹ Преобразование (96) в (97) сводится к хорошо известному из теории колебаний сложению двух гармонических колебаний различной частоты ν_i и ν_j в некоторое результирующее колебание, амплитуда которого уже не постоянна, но периодически изменяется с частотой $(\nu_i - \nu_j)$, т. е. возникают бeнeния.

состояний. (Я еще раз раз напоминаю, что речь идет не о сосуществовании двух возможных колебаний одной и той же струны, а о сосуществовании как бы двух самостоятельных струн, с одним единственным основным колебанием на каждой).

Мы делаем теперь еще один шаг вперед в развитии принятой гипотезы, и вычисляем с этой целью интеграл:

$$M \int_{-\infty}^{+\infty} x C^2 dx - \int_{-\infty}^{+\infty} x f_i^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} x f_j^2 dx + \left. 2 \int_{-\infty}^{+\infty} x f_i f_j dx \right\} \cos 2\pi (\nu_i - \nu_j) t. \quad (99)$$

Этот интеграл измеряет собой электрический момент предполагаемого распределения электроного заряда вдоль струны, по отношению к центру ее. Действительно, подинтегральная функция есть произведение $C^2 dx$ — заряда элемента длины воображаемой струны на расстояние x этого элемента от центра, т. е. электрический момент элемента по отношению к началу координат, а следовательно интеграл представляет собой электрический момент всей струны по отношению к началу координат. Если интеграл этот будет равен 0, то это означает, что на обеих половинах струны — правой или левой — находится одно и то же количество электричества. Если интеграл будет иметь положительное или отрицательное значение, то мы должны будем заключить, что заряд расположен на струне несимметрично по отношению к середине ее. Если величина интеграла окажется периодически изменяющейся, например если коэффициент при косинусе будет отличаться от 0, то это будет равносильно колебанию заряда вдоль струны.

Функция $f_i(x)$ была выписана полностью в уравнении (60). Мы показали в свое время, что $f_i(x)$ носит поочередно четный и нечетный характер. Так, функции $f_0, f_2, f_4 \dots$ суть четные, функции $f_1, f_3, f_5 \dots$ — нечетные функции x . Квадраты $f(x)$ всегда носят четный характер, а произведения этих квадратов на x суть всегда нечетные функции x . Поэтому два

первые интеграла в формуле (99) исчезают. Что касается интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_i f_j dx$, то его подынтегральная функция представляет собой нечетную функцию в тех случаях, если i и j оба четные или оба нечетные числа; в обоих этих случаях и этот интеграл оказывается равным 0. Таким образом при одновременном сосуществовании двух нечетных или двух четных стационарных состояний не наблюдается колебаний электрического заряда, и электрический момент системы остается постоянным. В случае четного i и нечетного j (а также в обратном случае) вывод не так прост. Однако математическое исследование показывает, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_i f_j dx$ и тут оказывается равным нулю, за исключением случаев, когда i отличается от j на 1. Это ведет нас к закону:

При сосуществовании двух колебаний гармонического вибратора только при условии $j = i \pm 1$ электрический момент воображаемой струны, изображающей в нашей модели вибратор, меняется с течением времени по синусоидальному закону, с частотой $(\nu_i - \nu_j)$; во всех других случаях электрический момент остается все время равным нулю.

Физический вывод из этой теоремы заключается в том, что только сосуществование двух соседних стационарных состояний осциллятора ведет к излучению энергии. Переходя на язык прежней теории, мы получаем известное правило: спектральные переходы разрешены только между двумя состояниями осциллятора, отличающимися друг от друга по своим квантовым числам на ± 1 . Это „правило отбора“, выведенное в старой теории квантов при помощи „принципа соответствия“, подтверждается, как известно, опытом на некоторых молекулярных спектрах, именно в тех случаях, когда мы в праве рассматривать колебания атомов в молекуле как гармонические.

Таким образом, в случае гармонического осциллятора интерпретация величины ϕ^2 , как электрической плотности,

ведет к двойному успеху: 1) распределение электричества в каждом отдельном из стационарных состояний оказывается статическим; при сосуществовании двух состояний электричество флюктуирует вдоль воображаемой струны с той самой частотой, которой характеризуется, согласно теории Бора (подтвержденной на опыте), испускаемое при переходе из одного из этих состояний в другое излучение, — это первый успех; 2) второй заключается в теоретическом выводе правила, согласно которому только комбинация двух соседних состояний осциллятора ведет к испусканию лучистой энергии. При этом процессе, происходящий в атоме, приобретает наглядный вид: он заключается в колебании электрического заряда около центра равновесия. (Шрёдингер показал, что если мы рассмотрим большое количество стационарных состояний, с высокими значениями l и произвольно избранными относительными „амплитудами“, т. е. значениями A_i и B_i в уравнении (95), и представим себе все соответствующие собственные колебания сосуществующими одновременно, то в результате весь электрический заряд электрона окажется сконцентрированным на небольшом пространстве. Таким образом „расплывшийся“ электрон вновь соберется в одной точке, которая окажется колеблющейся взад и вперед около центра равновесия, с частотой ν_0 . Амплитуда ее колебания будет приблизительно равна амплитуде колебания материальной частицы, с которой мы начали в свое время свое рассуждение, т. е. частицы с массой m , находящейся под влиянием упругой силы — $4\pi^2 m \nu_0^2 x$; при этом энергия колебаний та же, что и для стационарного состояния, которое при суммировании проявляется наибольшей амплитудой. Этот результат показывает, таким образом, что при рассмотрении большого числа процессов колебания с высокими значениями l можно непрерывно перейти от картины, даваемой волновой механикой, к обычной картине пространственно ограниченных колеблющихся частиц; высоко возбужденным состояниям может быть свойственно такое распределение зарядов, при котором можно по праву говорить о точечных зарядах, описывающих определенные орбиты, между тем как при состояниях с малыми квантовыми чис-

лами заряд „расплывается“ до тех пор, пока остается только одно сплошное облако заряда — флюктуирующее или остающееся в покое).

Еще одна выгода от идентифицирования величины ρ^2 с плотностью электричества обнаруживается при переходе от одного измерения к двум и трем. В качестве примера я возьму атом водорода в электрическом поле. Мы представили себе этот атом в виде жидкого образования, совершающего стоячие колебания. Если одновременно существуют две системы колебаний возмущенного атома, то их сосуществование приводит к реальному колебанию электрического заряда в атоме, с частотой равной разности обеих собственных частот. Эта частота ближе соответствует частоте при переходе от одного из этих стационарных состояний к другому, согласно законам прежней теории квантов. Если в частном случае оба стационарных состояния будут соответствовать одному и тому же значению квантового числа s [экваториального квантового числа, встречающегося в уравнении (85)], то колебания электрического заряда будут происходить, как это можно показать, параллельно направлению внешнего поля. Таким образом движение заряда не будет иметь компоненты в направлении перпендикулярном к направлению поля. Этот результат соответствует эмпирическому правилу, согласно которому свет, испускаемый атомами при переходах, отвечающих изменению только квантовых чисел k_1 и k_2 , при сохранении неизменной величины экваториального квантового числа s , отличается тем, что он линейно поляризован с электрическим вектором параллельным направлению внешнего поля. Если же числа s для обоих сосуществующих стационарных состояний различаются на единицу, то вычисление приводит к колебанию электрического заряда, перпендикулярному к направлению электрического поля. Опыт подтверждает, что получаемый при подобных переходах свет поляризован в плоскости перпендикулярной к направлению поля. Если числа s обоих состояний отличаются друг от друга больше чем на 1, то соответствующие смещения заряда оказываются вообще незначительными, и в соответствии с этим линии, обусловленные переходами, при которых s

меняется больше чем на 1, в спектре вообще не выступают с заметной интенсивностью.

Мы имеем таким образом три пункта, в которых отождествление величины $|\psi|^2$ с плотностью электричества ведет к успешным результатам. В наглядной картине, изображающей атом с помощью воображаемой упругой жидкости, электричество оказывается неподвижно распределенным в пространстве до тех пор, пока атом находится в стационарном состоянии; таким образом становится понятным отсутствие излучения в стационарном состоянии. При одновременном наличии двух стационарных состояний заряд колеблется с частотой, определяемой разностью их энергий; колебание это оказывается заметным только в том случае, если между обоими стационарными состояниями по законам прежней атомной механики (принципу соответствия Б о р а) возможны спектральные переходы; направление, вдоль которого происходит колебание заряда, оказывается соответствующим наблюдаемой поляризации испускаемых при данном переходе лучей; в случаях, которые отвечают „запрещенным“ переходам сколько-нибудь значительного колебания заряда, как целого, вообще не существует. Как набросок возможной теории прохождения испускаемого атомом света, гипотеза Шрёдингера отличается несравненными достоинствами. В прежних теориях строения атома не удавалось удовлетворить даже самого элементарного требования наличия закономерной связи между периодами движения частиц, составляющих атом, и периодами излучения, испускаемого им. В теории Шрёдингера такого рода соотношение впервые было установлено, и если мы видим теперь в разрядной трубке водород, испускающий красную Бальмеровскую линию с частотой колебаний равной $4,57 \cdot 10^{14}$, то, согласно этой гипотезе, мы по крайней мере в праве утверждать, что в каждом атоме водорода действительно происходит какой-то колебательный процесс, характеризующийся той же частотой.

Даже относительные интенсивности различных спектральных линий доступны теоретическому вычислению с помощью только-что развитого представления волновой механики. Мы видели, что в примере гармонического осциллятора исчезно-

геше интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_i f_j dx$ для всех комбинаций i и j , за

исключением тех, при которых i отличалось от j на 1, повело к бесконечности из спектра линий, соответствующих переходам, при которых квантовое число n меняется больше чем на 1. Нельзя ли предположить, что при любой комбинации двух стационарных состояний интенсивность излучения, поляризованного параллельно какому-либо направлению x , опре-

деляется величиной интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} x \psi_i \psi_j dx$, составленного из

фундаментальных функций обоих состояний ψ_i и ψ_j ? Для развития этой идеи необходимо сделать какие-либо добавочные предположения, ибо фундаментальные функции в том виде, в каком мы писали их до сих пор, могут быть помножены на любой коэффициент, оставаясь при этом попрежнему фундаментальными функциями. Если интеграл должен обращаться в нуль (т. е. при выводе правил отбора), эти постоянные множители не имеют значения; если же интеграл не равен нулю (т. е. при выводе правил интенсивности), его абсолютная величина существенным образом зависит от выбора этих постоянных, и потому необходимо определенное допущение относительно значения этих постоянных. Шрёдингер сделал простое и естественное допущение касательно упомянутых коэффициентов при вычислении интенсивности компонентов эффекта Штарка для Бальмеровых линий. Результаты опыта подтвердили его предположения.

Я не могу останавливаться здесь подробнее на этих вопросах; упомяну только, что именно в этой области находится точка соприкосновения волновой механики Шрёдингера с матричной механикой Гейзенберга. Интересующие нас интегралы входят в теорию Гейзенберга в виде матричных элементов. Теория Гейзенберга на практике оказывается другим способом получения тех же выводов, к каким ведет и волновая механика.

Изыскное и наглядное представление Шрёдингера, которое мы развивали в этом отделе, встречается однако

много затруднений. Укажем некоторые из них. Мы можем представить себе, что при одновременном наличии двух стационарных колебаний атом должен испускать в окружающее пространство излучение. Но этот поток энергии не может течь без конца; рано или поздно одно из стационарных состояний должно „отмереть“ и излучение приостановиться. Между тем мы до сих пор не можем составить себе с помощью волновой механики какого-либо представления о механизме этого отмирания. Быть может, возможно было бы ввести в теорию какое-либо объяснение этого явления, в роде допущения взаимодействия между волнами ψ и электромагнитными волнами, выходящими из атома. Гораздо труднее представить себе, однако, выход из другой дилеммы, перед которой стоят нас идентификация квадрата ψ с плотностью электричества. Наша волновая формула позволила вывести для атома водорода правильные значения энергии стационарных состояний только потому, что мы приняли для потенциальной энергии выражение $V = -\frac{e^2}{r}$, вытекающее из представления о точечном электропе. Если мы приходим теперь к гипотезе „расплывшегося“ электропа, занимающего собой все пространство вокруг ядра, то чем мы можем оправдать введение в наши формулы выражения потенциальной энергии, несовместимого с этой гипотезой? Какое право мы имеем определять распределение электрического заряда двумя различными способами для двух целей и совмещать эти два представления в одной формуле?

Волновая механика, дающая столь соблазнительно-наглядные объяснения многих атомных процессов, все еще богата подобными принципиальными затруднениями. Таким образом, поклонники Мессинга, который говорил, что большее наслаждение заключается в приближении к истине, чем в обладании ей, могут опять иметь полное удовлетворение от занятия физикой. Волновая механика — это еще только попытка, а не окончательное достижение. Это план кампашни, скорее чем завосаппе. Нельзя еще предвидеть, чем эта попытка кончится. Однако мы должны в заключение напомнить: двадцать пять лет назад никто не подозревал о каких-либо

других свойствах света, кроме связанных с его волновой природой. С тех пор опыт показал, что свет во многих отношениях ведет себя как поток дискретных частиц.

В настоящее время опыты один за другим показывают, что материя во многих отношениях ведет себя как волновое явление. Двойственная природа, которая нас так тревожила в случае света, со времени появления теории квантов оказалась свойственной также и материи. Дуализм частицы-волны сделался таким образом всеобщим принципом. Не существует частиц без волновых свойств и не существует волн без корпускулярных свойств. Обобщение этого дуализма быть может укажет путь к высшему единству.

ПРИРОДА ХИМИЧЕСКОГО СРОДСТВА.

Я. П. Френкель, Ленинград.

1. Природа междуатомных сил.

Еще Берцелиус высказал мысль о том, что силы химического сродства сводятся к электрическому притяжению между противоположно заряженными атомами. В настоящее время, когда мы знаем, что атомы состоят из положительных ядер и электронов, электрическая природа не только химических сил, но всякого рода сил сцепления как между атомами, так и между молекулами („ван дер Ваальсовы силы“) не может вызывать никаких сомнений. При этом легко себе представить возникновение силы притяжения не только между двумя противоположно-заряженными атомами (ионами), но и между двумя нейтральными атомами (или молекулами). Каждый из них действует противоположным образом на противоположно заряженные частицы, образующие другой. Так как притягиваемые частицы при этом приближаются, а отталкиваемые удаляются, то силы притяжения получают в среднем перевес над силами отталкивания. Этот перевес и представляет собой силу химического сродства между обоими атомами, поскольку последние соединяются друг с другом в молекулу, или же ван дер Ваальсову силу в случае, если подобное соединение не происходит.

Какова бы ни была сила притяжения или сродства между двумя атомами, при достаточно малом расстоянии между последними ее превосходит сила отталкивания, обуславливающая непроницаемость атомов друг для друга. Эта сила отталкивания, возрастающая с уменьшением рас-

стояния гораздо быстрее чем сила притяжения, обычно характеризуется чисто геометрическим образом при помощи определенных „размеров“, приписываемых атому. Сила отталкивания непосредственно связана с движением электронов. Эта связь „твердости“ атомов с внутренним движением может быть иллюстрирована твердостью, приобретаемой струей жидкости, бьющей под большим давлением, или, еще лучше, взаимной непроницаемостью вихревых колец в жидкости или газе. Именно таким образом объясняя твердость атомов лорд Кельвин в своей когда-то весьма популярной вихревой теории атомов. Ныне мы должны лишь заменить „эфирные вихри“ Кельвина „электронными вихрями“, образованными умножительно быстрым обращением электронов вокруг положительных ядер.

2. Вычисление энергии взаимодействия в классической механике.

Изложенные соображения о происхождении сил между атомным притяжением и отталкиванием имеют чисто качественный характер. Для того чтобы облечь их в количественную форму, нужно уметь вычислить взаимную энергию двух атомов, т. е. дополнительную энергию U' , зависящую от их взаимодействия.

В классической механике этот вопрос приближенно решается следующим образом. Составляется выражение взаимной потенциальной энергии U частиц, образующих атом A по отношению к частицам, образующим атом B в функции их взаимных расстояний. Далее это выражение усредняется во времени, в предположении, что движение частиц остается таким же как и при отсутствии взаимодействия („невозмущенным“), и что относительное положение систем A и B в целом — т. е. расстояние между центрами их R , наклон электронных орбит к прямой Z и т. д. — остается неизменным.

Полученное среднее значение $U - U'$ представляет собой искомую энергию взаимодействия в первом приближении.

При более точном расчете необходимо принять во внимание искажение („возмущение“), вызываемое взаимодей-

ствием и сводящееся обычно к „поляризации“ обоих атомов, т. е. некоторому смещению электронных орбит по отношению к ядрам. Однако соответствующей дополнительной энергией W'' можно в большинстве случаев пренебречь по сравнению с „первичной“ энергией взаимодействия W' и характеризовать это взаимодействие зависимостью W' от расстояния между обоими атомами R .

Сила взаимодействия определяется формулой

$$F = - \frac{dW'}{dR}, \quad (1)$$

представляя собой отталкивание при $F > 0$ и притяжение при $F < 0$. Если энергия W' имеет (отрицательный) минимум при некотором значении $R = R_0$, то атомы могут образовать молекулу AB , покоясь на расстоянии R_0 друг от друга. Это состояние молекулы можно рассматривать как н о р м а л ь н о е; наряду с ним, однако, возможен ряд других состояний, при которых оба атома колеблются по отношению друг к другу или вращаются около общего центра тяжести. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением одного лишь нормального состояния, так как переход от него к остальным не представляет существенных затруднений.

3. Вычисление энергии взаимодействия в волновой механике.

„Старая“ теория квантов, т. е. теория Бора, не вносила никаких изменений в указанный расчет энергии W' , фиксируя лишь невозмущенные состояния обоих атомов, являющиеся исходными при их соединении в молекулу. Она меняла существенным образом расчет возмущения („взаимной поляризации“) и вычисление „поляризационной“ энергии W'' : однако при малости W'' по сравнению с W' это обстоятельство не могло иметь существенного значения для теории межатомных сил.

Новая теория квантов или волновая механика радикальным образом изменила наши представления о „поведении“ электронов в атомах и соответственно этому привела к совершенно новым результатам в вопросе о взаимодействии последних.

Мы не будем вдаваться здесь в изложение основ и методов волновой механики и рассмотрим их лишь постольку, поскольку они имеют значение для интересующего нас вопроса.

В противоположность классической механике, волновая механика не дает точного описания движения частиц, образующих атом A . Все положения последних допускаются ею как возможные, причем задача ее сводится к вычислению вероятности тех или иных — произвольно выбранных — положений, или, другими словами, вероятности той или иной конфигурации системы. Конфигурация эта задается элементами объема $dV_A^{(1)}, dV_A^{(2)}, \dots$, в которых находятся отдельные электроны, или элементом объема координатного пространства, образованного совокупностью координат всех этих электронов:

$$dV_A = dV_A^{(1)} \cdot dV_A^{(2)} \dots \quad (2)$$

Вероятность конфигурации, характеризуемой элементом объема dV_A , определяется произведением dV_A на квадрат абсолютного значения (модуля) некоторой функции ψ_A , удовлетворяющей особому „волновому“ уравнению, открытому Шрёдингером и содержащему в качестве функции, характеризующей рассматриваемую систему, ее потенциальную энергию U_A .

Среднему по времени какой-либо величины f , зависящей от конфигурации A , соответствует в волновой механике выражение

$$f = \int f |\psi_A|^2 dV_A, \quad (3)$$

которое можно определить как „математическое ожидание“ этой величины (в смысле теории вероятности) или как „среднее статистическое“ значение f . Интеграл в (3) берется по всему координатному пространству, причем предполагается, что при $f=1$ он обращается в 1 (т. е. что вероятность любой конфигурации A равна 1).

Взаимодействие двух систем A и B определяется в волновой механике — поскольку дело касается первого приближения — в простейшем случае совершенно так же

как и в механике классической, т. е. средним значением взаимной потенциальной энергии U для обеих систем при отсутствии взаимодействия между ними. Та или иная конфигурация A представляет собой при этом „событие“, совершенно не зависящее от конфигурации системы B . Вероятность того, что система A находится в конфигурации dV_A , в то время как система B находится в конфигурации dV_B , равна, следовательно (по теореме о вероятности независимых событий), произведению вероятностей $|\psi_A|^2 dV_A$ и $|\psi_B|^2 dV_B$. Среднее значение потенциальной энергии U , равное в первом приближении энергии взаимодействия, определяется, таким образом, по формуле:

$$\bar{W} = \bar{U} = \int \int U |\psi_A \psi_B|^2 dV_A dV_B. \quad (4)$$

Необходимо однако отметить, что эта формула (так же, впрочем, как и соответствующая формула классической механики) является справедливой лишь в том простейшем случае, когда выполнено одно из следующих двух условий:

а) помимо состояния системы AB , характеризуемого функциями ψ_A, ψ_B (при отсутствии взаимодействия) или произведением этих функций $\psi'_A \cdot \psi'_B$, не существует никакого другого состояния $\psi'_A \psi'_B$ с той же самой суммарной энергией $W'_A + W'_B = W_A + W_B$;

б) при наличии подобных состояний имеют место равенства:

$$\int \int U(\psi_A \psi_B) (\psi'_A \psi'_B) dV_A dV_B = 0. \quad (5)$$

Заметим, что интеграл, стоящий в левой части, характеризует вероятность „самопроизвольного“ перехода системы AB из состояния $\psi_A \psi_B$ в состояние $\psi'_A \psi'_B$ (или обратно). Переходы такого рода могут происходить практически лишь при одинаковости энергии обоих состояний; в случае неодинаковости сумм $W'_A + W'_B$ и $W_A + W_B$ эти переходы если не принципиально, то практически исключаются, так что в этом случае условия (5) утрачивают значение.

Заметим далее, во избежание недоразумений, что состояние какой-либо системы определяется в волновой механике

не конфигурацией ее, но соответствующей „волновой функции“ или „амплитудой вероятности“ ψ . При одном и том же состоянии система может находиться в любых конфигурациях; и, наоборот, при разных состояниях ψ и ψ' в одной и той же конфигурации dV , причем вероятность последней равна в одном случае $|\psi|^2 dV$, а в другом — $|\psi'|^2 dV$.

4. Простейшие гетерополярные молекулы.

Изложенные в предыдущем параграфе результаты мы применим прежде всего к системе, состоящей из положительного и отрицательного иона водорода, т. е. из протона ($A = H^+$) и из гелиобразного иона $H^- (= B)$. Другими словами, мы попробуем трактовать молекулу водорода H_2 как молекулу гетерополярную, не смущаясь тем обстоятельством, что эта точка зрения не соответствует действительности. Результаты, которые мы при этом получим, могут быть легко применимы к типично гетерополярным молекулам.

Ион H^+ мы будем рассматривать как точечный заряд, возмущающий своим электрическим полем поведение обоих электронов в ионе H^- . Взаимная потенциальная энергия обоих ионов равна

$$U = \frac{\epsilon^2}{R} - \epsilon^2 \left(\frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r'_2} \right), \quad (6)$$

где R — расстояние между обоими ядрами („центрами“ H^+ и H^-), а r_1 и r_2 — расстояние H^+ от обоих электронов. Взаимодействие H^+ и H^- при данном значении R определяется согласно предыдущему в первом приближении статистическим средним значением U , т. е.

$$U = \frac{\epsilon^2}{R} - 2\epsilon^2 \overline{\frac{1}{r'_1}}, \quad (7)$$

где

$$\overline{\frac{1}{r'_1}} = \int \frac{1}{r'_1} |\psi|^2 dV \quad (dV = dV_1 dV_2) \quad (7a)$$

«среднее значение» обратного расстояния одного из электронов

H^- от H^+ $\left(\overline{\frac{1}{r'_1}} = \overline{\frac{1}{r'_2}} \right)$, а ψ — волновая функция, характери-

зующая поведение этих электронов в рассматриваемом нормальном состоянии H^- . Мы предполагаем при этом, что оба электрона ведут себя в среднем совершенно одинаково (т. е. с точки зрения обычной механики движутся по одинаковым орбитам), и что состояние H^- , характеризуемое функцией ψ , является единственным обладающим данной (минимальной) энергией W^0 .

Точная зависимость ψ от координат обоих электронов может быть найдена лишь по методу последовательных приближений, исходным пунктом которого является функция $\psi^0 = \psi^1 \cdot \psi_2$, характеризующая поведение электронов, связанных с протоном, при отсутствии взаимодействия между ними. Здесь ψ_1 и ψ_2 функции, характеризующие нормальное состояние атома водорода и имеющие следующий вид:

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r_1}{a}}, \quad \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r_2}{a}}, \quad (8)$$

где a — постоянная, совпадающая с радиусом одноквантовой орбиты в теории Бора, а r_1 и r_2 — расстояния соответствующих электронов от центра ядра H^- . Коэффициенты пропорциональности $\left(\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\right)$ подобраны таким образом, чтобы инте-

$$\begin{aligned} \text{гралы } \int |\psi_1|^2 dV_1 &= 4\pi \int_0^\infty |\psi_1|^2 r_1^2 dr_1 \quad \text{и} \quad \int |\psi_2|^2 dV_2 = \\ &= 4\pi \int_0^\infty |\psi_2|^2 r_2^2 dr_2 \quad \text{равнялись 1.} \end{aligned}$$

В теории Бора взаимодействие обоих электронов учитывается приближенно с помощью „экранирующей постоянной“, определяющей долю положительного заряда ядра, компенсируемую другими электронами. Тот же самый метод применим и в волновой механике, причем изменение эффективного заряда ядра сводится практически к изменению параметра a в формуле (8). Подразумевая под a это измененное значение его, мы можем охарактеризовать нормальное состояние иона H^- функцией

$$\psi = \psi_1 \psi_2 = \frac{1}{\pi a^3} e^{-\frac{r_1 + r_2}{a}}. \quad (8a)$$

При этом получается согласно (7а):

$$\frac{1}{r'} = \int \int \frac{1}{r'} \psi_1^2 \psi_2^2 dV_1 dV_2 = \int \frac{1}{r'} \psi_1^2 dV_1 \cdot \int \psi_2^2 dV_2,$$

т. е.

$$\frac{1}{r'} = \int \frac{1}{r'} \psi^2 dV_{11}.$$

Это выражение можно трактовать как потенциал, создаваемый в точке H^+ электрическим зарядом, распределенным вокруг иона H^+ с объемной плотностью ψ_1^2 . Так как последняя зависит только от расстояния r_1 от центра H^+ , и так как потенциал шарового слоя радиуса r_1 и толщины dr_1 равен заряду его $\psi_1^2 4\pi r_1^2 dr_1$, деленному на расстояние R его центра до рассматриваемой точки (H^+) при $r_1 < R$ и на его радиус r_1 при $r_1 > R$, то предыдущее выражение приводится к виду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r'} &= \frac{1}{R} \int_0^R \psi_1^2 4\pi r_1^2 dr_1 + \int_R^\infty \psi_1^2 4\pi r_1 dr_1 = \\ &= \frac{4}{a^3} \left[\frac{1}{R} \int_0^R e^{-2\frac{r}{a}} r^2 dr + \int_R^\infty e^{-2\frac{r}{a}} r dr \right] = \\ &= \frac{1}{R} - \frac{e^{-\frac{2R}{a}}}{R} \left(\frac{R}{a} + 1 \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, согласно (7):

$$U = -\frac{e^2}{R} + \frac{2e^2}{R} e^{-\frac{2R}{a}} \left(\frac{R}{a} + 1 \right). \quad (8b)$$

При больших значениях расстояния R ($R \gg a$) энергии U сводится к первому члену $-\frac{e^2}{R}$, характеризующему притяжение обоих ионов как точечных зарядов. Наоборот, в случае $R \ll a$ мы получаем $U = \frac{e^2}{R}$, т. е. энергию взаимного отталкивания обоих положительных ядер при отсутствии электронов. Таким образом роль последних сводится к экранированию ядра отрицательного иона H^+ , тем более полному, чем больше расстояние R , и совершенно исчезающему при $R = 0$.

5. ОБОБЩЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ ПРЕДЫДУЩИХ РЕЗУЛЬТАТОВ.

Результат, выражаемый формулой (8b), совпадает с тем, который мы получили бы, заменив оба электрона непрерывным распределением отрицательного заряда с объемной плотностью $\rho = -2e |\psi_1|^2$, т. е. рассматривая ион H^- как центральный точечный заряд $-e$, окруженный радиально симметричной отрицательной атмосферой (электронное „облако“). Аналогичным образом можно трактовать и общий случай более сложного отрицательного иона. Обозначая заряд последнего через $z'e$ и рассматривая все наружные электроны как одинаковые, мы получаем при этом вместо (8b)

$$\bar{U} = -\frac{z'e^2}{R} + \frac{N\epsilon^2}{R} e^{-\frac{2R}{a}} f\left(\frac{R}{a}\right), \quad (9)$$

где N обозначает число наружных электронов, а $f\left(\frac{R}{a}\right)$ полином, степень которого зависит от характеризующей их функции ψ . Если последняя соответствует, с точки зрения старых представлений теории Бора, электронным орбитам с главным квантовым числом n , то степень полинома f должна равняться $2n$. При $R \rightarrow 0$ мы должны при этом иметь $f=1$, т. е.

$$U = +\frac{N-z'}{R} \epsilon'^2.$$

Формула (9) остается приблизительно верной и в том случае, если положительным ионом является не ион водорода, но какой-нибудь более сложный ион, обладающий электронной оболочкой достаточно малых размеров. Эти размеры, с точки зрения волновой механики, определяются параметром a в выражении волновой функции ψ , которая всегда сводится к произведению некоторого целого многочлена на показательный множитель вида $e^{-\frac{r}{a}}$, причем a играет ту же роль как и радиус электронной орбиты в теории Бора. Размеры положительных ионов в большинстве случаев настолько малы в сравнении с размерами ионов отрицательных, что ими можно пренебречь.

Приравнявая производную U по R нулю, мы можем определить, согласно предыдущим формулам, нормальные размеры молекулы, т. е. расстояние между обоими ядрами R_0 и энергию ее диссоциации $U_0 = U(R_0)$. Так, например, в случае формулы (Sb) для R_0 получается следующее уравнение:

$$\left(\frac{R^2}{a^2} + \frac{R}{a} + \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{2R}{a}} = \frac{1}{4}, \quad (10)$$

причем \bar{U} выражается через R_0 формулой

$$\bar{U}_0 = -\frac{\varepsilon^2}{a} \frac{\frac{R_0}{a} + \frac{1}{2}}{\left(\frac{R_0}{a}\right)^2 + \frac{R_0}{a} + \frac{1}{2}}. \quad (11)$$

В теории гетерополярных кристаллов, разработанной Бором, энергия взаимодействия двух противоположных ионов выражалась двучленной формулой вида

$$U = -\frac{\varepsilon^2}{R} + \frac{b}{R^n}$$

с двумя неопределенными параметрами b и n , которые подбирались эмпирически. В действительности, как мы видим, энергия силы отталкивания выражается членом вида

$$\frac{1}{R} e^{-\frac{2R}{a}} f\left(\frac{R}{a}\right),$$

который может быть аппроксимирован функцией $\frac{b}{R^n}$ лишь в более или менее тесных границах.

Изложенная теория гетерополярной связи была разработана Унзельдом: ¹ применение ее к теории гетерополярных кристаллов ² дает гораздо лучшее согласие с опытом, чем в случае теории Бора. Преимущество новой теоретической формулы (для энергии U) заключается, между прочим, также и в том обстоятельстве, что она содержит всего лишь одну

¹ A. Unsöld, Ann. d. Physik, 1927.

² См. напр. Brücke, Z. Physik, 1928.

эмпирическую постоянную a , характеризующую размеры отрицательных ионов. В принципе и эту постоянную можно вычислить, что однако представляет большие практические затруднения.

Изложенная теория гетерополярной связи в принципе совпадает с классической теорией, основанной на представлении об определенных электронных орбитах. Усреднение по времени, дающее приближенное значение энергии W , так же как и статистическое усреднение волновой механики, эквивалентно замене движущихся электронов некоторым непрерывным распределением электрического заряда с постоянной во времени плотностью ρ вокруг соответствующего ядра. Существенная разница между новой (волновой) и старой (корпускулярной) механикой заключается при этом в следующих двух обстоятельствах.

1. В виде функции ρ . В случае теории Бора ρ имеет отличное от нуля значение в шаровом слое конечных размеров, внутренний радиус которого равен наименьшему (перигелиальному), а внешний — наибольшему (афелиальному) расстоянию рассматриваемого электрона от ядра. В волновой механике ρ оказывается отличным от нуля во всем пространстве, причем экспоненциальное убывание ρ с увеличением расстояния (r) является непосредственной причиной сил отталкивания, определяемых вторым членом формулы (9).

2. В применимости метода усреднения по невозмущенному движению для весьма малых расстояний R . С точки зрения корпускулярной механики проникновение положительного иона (напр. ядра H^+) в область, занятую электронами отрицательного иона, должно было бы существенным образом искажать движение последних, между тем как в волновой механике это искажение можно игнорировать при значениях R того же порядка и даже меньших нежели эффективный радиус иона a . Заметим для сравнения, что при радиально-симметричном распределении ρ действие электронов отрицательного иона на положительный ион должно было бы сводиться в области применимости корпускулярной механики ($R \gg a$) к уменьшению заряда ядра отрицательного иона на постоянную величину, соответствующую полному

числу этих электронов. То уменьшение экранирования, которое связано с внедрением положительного иона в электронную оболочку отрицательного и которым обуславливается смена сил притяжения силами отталкивания, не может быть трактовано в корпускулярной механике по изложенному выше методу (усреднение по невозмущенному движению).

6. Гомополярная связь (молекула водорода).

Если в случае гетерополярной связи старая и новая теория отличаются друг от друга скорее лишь в количественном, чем в качественном отношении, то в случае связи гомополярной, прототипом которой является связь между двумя атомами водорода в молекуле H_2 , между обеими теориями обнаруживается глубокое принципиальное различие: при этом старая теория оказывается совершенно беспомощной, между тем как новая позволяет непосредственно решить эту оставшуюся доселе неразрешимой задачей.

Своеобразное отличие задачи о гомополярной молекуле H_2 от рассмотренной выше задачи о молекуле гетерополярной $(\overset{+}{H} \overset{-}{H})$ заключается в том, что оба электрона (1) и (2) „приписываются“ — если можно так выразиться — к двум разным ядрам (A) и (B), т. е., следовательно, могут характеризоваться в нулевом приближении (при отсутствии взаимодействия между обоими атомами H) двумя разными парами функций:

$$\psi_{A_1} = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r_{A_1}}{a}}, \quad \psi_{B_2} = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r_{B_2}}{a}}. \quad (12)$$

$$\psi_{A_2} = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r_{A_2}}{a}}, \quad \psi_{B_1} = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r_{B_1}}{a}}, \quad (12a)$$

где величины r_{A_1} и т. д. обозначают расстояния между соответствующими частицами.

Состояние системы, образованной совокупностью обоих атомов (независимо от того, связаны ли они друг с другом или нет), характеризуется при этом в первом случае функцией $\psi_{12} = \psi_{A_1} \psi_{B_2}$, а во втором — функцией $\psi_{21} = \psi_{A_2} \psi_{B_1}$. Эти два

состояния, отличающиеся друг от друга лишь перестановкой одного электрона на место другого, являются как бы двумя близнецами, совершенно сходными друг с другом в физическом отношении и различаемыми лишь по наименованию. Они имеют, в частности, одну и ту же энергию $W^0 = W_{A_1} + W_{B_2} = W_{A_2} + W_{B_1}$ (речь идет, конечно, о нулевом приближении). При таких условиях вычисление добавочной энергии, другими словами энергии взаимодействия обоих атомов по формуле (4), т. е. по формуле

$$W' = \int \int U_{12} |\psi_{12}|^2 dV_1 dV_2, \quad U_{12} = \frac{\varepsilon^2}{r_{AB}} + \frac{\varepsilon^2}{r_{12}} - \frac{\varepsilon^2}{r_{B_1}} - \frac{\varepsilon^2}{r_{A_2}} \quad (13)$$

в случае (12) или

$$W' = \int \int U_{21} |\psi_{21}|^2 dV_1 dV_2, \quad U_{21} = \frac{\varepsilon^2}{r_{AB}} + \frac{\varepsilon^2}{r_{12}} - \frac{\varepsilon^2}{r_{A_1}} - \frac{\varepsilon^2}{r_{B_2}} \quad (13a)$$

в случае (12a), возможно лишь при условии равенства нулю выражения

$$S' = \int \int U_{12} \psi_{12} \psi_{21} dV_1 dV_2 = \int \int U_{21} \psi_{12} \psi_{21} dV_1 dV_2, \quad (14)$$

характеризующего вероятность самопроизвольных переходов типа $\psi_{12} \longleftrightarrow \psi_{21}$, т. е. вероятность „обмена электронами“ между обоими атомами (см. ниже).

Легко однако убедиться, что это выражение на самом деле отл и ч но от нуля, и что, следовательно, предыдущие формулы для энергии взаимодействия в рассматриваемом случае неприменимы.

Чем же заменить их?

На этот вопрос волновая механика дает следующий весьма простой ответ. Состояния ψ_{12} и ψ_{21} могут осуществляться одновременно, так сказать, налагаясь друг на друга или интерферируя друг с другом, подобно тому как происходит наложение (интерференция) двух разных типов волн с одинаковой частотой колебаний (напомним, что частота колебаний измеряется соответствующей энергией по формуле $\nu^0 = \frac{W^0}{h}$). Мы можем поэтому для характеристики невозмущенной системы, образованной совокупностью обоих

атомов водорода, заменить исходные функции ψ_{12} и ψ_{21} двумя линейными комбинациями последних:

$$\begin{cases} \psi_I = \gamma_{I1} \psi_{12} + \gamma_{I2} \psi_{21} \\ \psi_{II} = \gamma_{II1} \psi_{12} + \gamma_{II2} \psi_{21} \end{cases} \quad (15)$$

подобрав коэффициенты γ таким образом, чтобы функции ψ и ψ_{II} удовлетворяли обычным условиям „нормальности“

$$\int \int \psi_I^2 dV_1 dV_2 = \int \int \psi_{II}^2 dV_1 dV_2 = 1$$

и ортогональности

$$\int \int \psi_I \psi_{II} dV_1 dV_2 = 0$$

и, кроме того, условие

$$\int \int U \psi_I \psi_{II} dV_1 dV_2 = 0, \quad (15a)$$

где U обозначает энергию взаимодействия.

Определенные в соответствии с этими условиями функции ψ_I и ψ_{II} имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \psi_I = \frac{1}{\sqrt{1+Y}} (\psi_{12} + \psi_{21}) \\ \psi_{II} = \frac{1}{\sqrt{1-Y}} (\psi_{12} - \psi_{21}), \end{cases} \quad (16)$$

где

$$Y = \int \int \psi_{11} \psi_{21} dV_1 dV_2. \quad (16a)$$

Первая из них является симметричной относительно обоих электронов или точнее их координат, а вторая — антисимметричной (в том смысле, что она меняет знак при перестановке электронов одного на место другого). Соответственно этому характеризующие ими состояния системы H + H называются симметрическим и антисимметрическим.

Оба эти состояния обладают при отсутствии взаимодействия между атомами одной и той же энергией, а именно той же самой энергией W^0 , как и исходные состояния. При учете этого взаимодействия энергия первого из них изменяется согласно (4) на

$$W'_I = \int \int U \psi_I^2 dV_1 dV_2.$$

а второго на

$$W'_{II} = \int \int U \psi_{II}^2 dV_1 dV_2.$$

Здесь, так же как и в (15а), под U оказывается необходимым понимать разные величины в зависимости от того множителя при U , который получается, если развернуть ψ_I^2 и ψ_{II}^2 в сумму квадратов и произведений исходных функций ψ_{12} и ψ_{21} . Это объясняется тем обстоятельством, что взаимная потенциальная энергия двух атомов водорода поддается недвусмысленному определению лишь в том случае, если оба электрона „приспосаиваются“ к определенным ядрам. Соответственно этому мы должны положить $U = U_{12}$ при множителе ψ_{12}^2 и U_{21} при ψ_{21}^2 ; в случае же множителя $\psi_{12} \psi_{21}$ можно выбрать как то, так и другое определение U (ибо они оказываются эквивалентными). Я не имею возможности останавливаться здесь на более подробном обосновании этого (не претендующего на большую точность) метода расчета W' . Замечу лишь, что связанная с ним ошибка тем меньше, чем меньше интеграл (16а).

В результате для дополнительной энергии симметрического и антисимметрического состояния получаются следующие приближенные выражения:

$$\begin{aligned} W'_I &= \frac{H' + S'}{1 + Y} \\ W'_{II} &= \frac{W' - S'}{1 - Y}. \end{aligned} \tag{17}$$

При подстановке сюда выражений (14), (13) и (12) получаются после довольно кропотливых вычислений формулы следующего вида:

$$W'_{I,II} = \frac{\varepsilon^2}{R} + \frac{\varepsilon^2}{R} e^{-\frac{2R}{a}} \frac{f\left(\frac{R}{a}\right)}{1 + e^{-\frac{2R}{a}} \varphi\left(\frac{R}{a}\right)}, \tag{17a}$$

где $f\left(\frac{R}{a}\right)$ и $\varphi\left(\frac{R}{a}\right)$ полиномы 4-й степени, имеющие разные коэффициенты в случае W'_I и W'_{II} . Заметим, что первый член в (17а) представляет собой потенциальную энергию обоих положительных ядер по отношению друг к другу, а второй —

(усредненную) потенциальную энергию электронов по отношению друг к другу и к „чужим“ ядрам.

Вид функций $W'_I(R)$, $W'_{II}(R)$, а также $W'(R)$ представлен графически на рис. 1.

Из последнего известно, что в случае антисимметричного состояния системы $\text{H} + \text{H}$, между обоими атомами происходит отталкивание, монотонно возрастающее по мере уменьшения расстояния R ; в случае же симметричного состояния отталкивание преобладает лишь на малых расстояниях ($R < \frac{3}{2}a$), тогда как при больших оно сменяется притяжением.

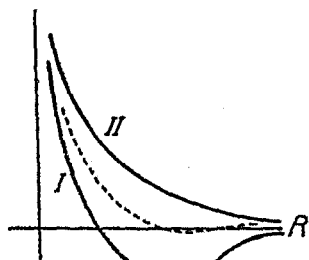


Рис. 1.

При расстоянии $R = \frac{3}{2}a$ между обоими ядрами, сила взаимодействия обращается в нуль.

Соответствующее минимальное значение энергии W'_I равно $-2,5$ вольт. Мы получаем, таким образом, размеры и энергию диссоциации устойчивой системы $\text{H} + \text{H}$, т. е. молекулы водорода в нормальном состоянии.

Эти результаты — в особенности энергия диссоциации — находятся в удовлетворительном согласии с опытными данными.

7. ОБСУЖДЕНИЕ ПРЕДЫДУЩЕЙ ТЕОРИИ ГОМОПОЛЯРНОЙ СВЯЗИ.

Соображения, изложенные в предыдущем параграфе и принадлежащие Гейтлеру и Лондону, имеют чисто формальный характер. Вопрос об их физическом смысле представляется в совершенно различном свете в зависимости от того, оперируем ли мы волновыми или корпускулярными представлениями.

С волновой точки зрения теория взаимодействия двух одинаковых атомов (или каких-либо других систем) совершенно аналогична теории колебаний двух связанных маятников или двух индуктивно связанных электрических контуров. Каждый из этих тождественных маятников (или контуров) соответствует одному из двух состояний-близнецов ψ_{12}

и ψ_{21} . При отсутствии связи между маятниками каждый из них может колебаться независимо от другого с определенной частотой ω^0 . При наличии связи, хотя бы самой минимальной, получается следующая картина. Если в некоторый начальный момент времени колебался лишь один маятник, а второй находился в покое, то с течением времени колебания первого должны постепенно передаваться второму до тех пор, пока они не обменяются местами, т. е. пока первый маятник не остановится, а второй не получит всю его энергию. Затем процесс повторится в обратном порядке. Существенным обстоятельством при этом является совпадение периодов обоих маятников (при отсутствии связи между ними), т. е., другими словами, наличие резонанса. В случае двух маятников с различными периодами передача энергии от одного к другому происходит при слабой связи лишь в очень малой степени — тем меньшей, чем слабее эта связь. При наличии же резонанса величина связи не играет роли, определяя лишь время (а не степень) передачи энергии от одного маятника к другому.

Простая теория показывает, что колебания двух связанных резонирующих маятников остаются стационарными лишь в том случае, если в начальный момент оба они колебались с одинаковыми амплитудами и притом с одинаковыми или с противоположными фазами. Этим двум типам стационарных колебаний, из которых первый может быть назван симметрическим, а второй антисимметрическим, соответствуют две определенные, слегка отличные друг от друга частоты ω_1 и ω_2 . Всякое иное нестационарное колебание обоих маятников может быть представлено как сумма симметрического и антисимметрического с надлежаще выбранными амплитудами и фазами. Нестационарность обусловливается интерференцией двух колебаний разной частоты ω_1 и ω_2 . При этом в амплитуде колебаний каждого маятника наблюдаются периодические усиления и ослабления, или биения, число которых в единицу времени равно разности $\omega_1 - \omega_2$.

Аналогичные явления происходят в двух электрических контурах, способных колебаться с одинаковой частотой, при наличии слабой связи между ними, а также в двух атомах

водорода. В последнем случае, однако, роль отдельных маятников играют, как уже упоминалось выше, не отдельные атомы, но то или иное распределение электронов между ними. Каждому из этих распределений соответствует с волновой точки зрения особый колебательный процесс. Взаимодействие между атомами проявляется в том, что эти процессы не могут происходить независимо друг от друга, но что они периодически усиливаются один за счет другого. Исключения составляют лишь случаи симметрического и антисимметрического сочетания обоих процессов (с равными амплитудами и с одинаковыми или противоположными фазами). Эти комбинационные процессы обладают определенными частотами

$$\nu_1 = \frac{W_I}{h} \text{ и } \nu_{II} = \frac{W_{II}}{h},$$

которые соответствуют вполне определенным энергиям $W_I = W^0 + W'_I$ и $W_{II} = W^0 + W'_{II}$. Все остальные процессы этого рода, не будучи стационарными, не обладают определенной частотой и, следовательно, определенной энергией. Они связаны с „биениями“, т. е. с периодическими усилениями одного из составляющих процессов ψ_{12} или ψ_{21} за счет другого, причем частота биений равна

$$\nu_1 - \nu_{II} = \frac{W'_{II} - W'_{I}}{h}.$$

С корпускулярной точки зрения эти результаты не допускают простой и ясной интерпретации прежде всего потому, что она исключает возможность совмещения двух различных состояний в одной и той же системе. Так, например, согласно корпускулярной механике, атом водорода не может находиться одновременно в нормальном состоянии и в одном из возбужденных. С волновой же точки зрения подобное совмещение — или интерференция — представляется вполне естественным — подобно напр. одновременному звучанию основного тона струны и одного из обертонов ее. В этом обстоятельстве заключается основная трудность корпускулярной теории и основное отличие ее от волновой. В рассматриваемом нами случае двух атомов водорода оба электрона должны либо периодически $\nu_1 - \nu_{II}$ раз в секунду меняться местами (Elektronenaustausch), либо же должны одновре-

менно находиться как в том, так и в другом положении. Последнее, конечно, невозможно себе представить, так же точно как невозможно себе представить разницу между симметрическим и антисимметрическим состоянием — поскольку дело касается мгновенного положения обоих электронов. Следует однако иметь в виду, что волновая механика принципиально исключает возможность точного определения положения каких-либо частиц и перемещение их в пространстве. Она допускает все мыслимые положения, довольствуясь определенным вероятности различных положений, или среднего (статистического) распределения плотности, характеризуемого квадратом (модуля) функции ψ . Поэтому с точки зрения корпускулярной интерпретации волновой механики электрон, приписываемый определенному атому, может находиться в сколь угодно большом от него расстоянии. При таких условиях нетрудно себе представить, что один и тот же электрон может быть одновременно приписан двум различным атомам.

Что касается среднего распределения электрического заряда электронов, определяемого функциями ψ_I и ψ_{II} , то оно отличается тем, что во втором случае (антисимметрическое состояние) средняя плотность заряда исчезает в точках плоскости, симметрично расположенной между обоими ядрами, между тем как в первом случае (симметричное состояние) подобной „узловой“ плоскости не существует.

8. Обобщение волновой теории гомополярной связи и соотношение последней со связью гетерополярной.

Вышеизложенная теория гомополярной связи может быть распространена с молекулы водорода на более сложные молекулы того же рода. Это обобщение было сделано главным образом Лондоном. Руководящим принципом является здесь, как и в случае H_2 , соединение двух электронов, принадлежащих к разным атомам, в симметрическую пару, т. е. введение таких состояний результирующей системы, которые характеризуются симметрией Шрёдингерской функции ψ по отношению к координатам этих электронов. Эти состояния,

так же как и соответствующие им антисимметричные, являются прежде всего стационарными, т. е. обладают вполне определенной энергией (чего нельзя сказать об остальных): при этом энергия симметрических состояний при уменьшении расстояния между атомами проходит через отрицательный минимум, характеризующий средство обоих атомов по отношению друг к другу. Таким образом единицы средства, давно уже введенные химиками, впервые получают свое теоретическое истолкование — как энергии взаимодействия отдельных пар электронов, принадлежащих этим атомам. Заметим, что аналогичное представление давно уже вводилось в теорию химической связи Бором, Дебаем, Косселем и др. Однако в этой примитивной теории оба электрона трактовались как „кольцо“, вращающееся вокруг прямой, соединяющей оба атома. Современная теория Гейтлера и Лондона не имеет ничего общего с представлением о подобных кольцах, помимо того обстоятельства, что оба электрона симметричным образом определяют состояние результирующей системы.

Предыдущее представление о симметричных электронных парах нуждается, однако, в одном весьма существенном коррективе. Необходимость последнего явствует из следующих соображений. Если бы каждый электрон одного атома мог соединяться в пару с одним из электронов другого, то максимальное число единиц средства какого-нибудь атома равнялось бы общему числу электронов в нем. В действительности оно, вообще говоря, гораздо меньше, определяясь числом так называемых валентных электронов. Чем же „валентные“ электроны отличаются от остальных?

Далее, в случае трех или более атомов электроны можно было бы соединять в симметричные тройки, четверки и т. д., причем подобные симметрические электронные группы должны были бы соответствовать стационарным состояниям с еще меньшей энергией, чем отдельные пары. В результате наряду с бинарными молекулами H_2 должны были бы существовать тройные H_3 , четверные H_4 и т. д., еще более прочные чем H_2 . Почему же таких молекул не существует, и почему симметрия ограничивается отдельными парами электронов?

На этот вопрос волновая механика, как таковая, не дает ответа. Он решается особым принципом, называемым запретом эквивалентности (или симметрии) или же принципом Паули, впервые отчетливо сформулировавшим его в 1925 г. в связи с квантовой (Боровской) теорией строения сложных атомов.

В сложных атомах электроны располагаются вокруг ядра в виде ряда слоев или групп, причем внутренняя ближайшая к ядру группа содержит, как известно, всего лишь два электрона. Энергия атома уменьшилась бы, если бы все электроны распределились в виде одной внутренней группы (или „кольца“). Подобное расположение оказывается, однако, невозможным. Более детальное исследование наружных групп показывает, что и там мы имеем подгруппы по 2 электрона, с одинаковыми орбитами (эквивалентные электроны).

Не пытаясь объяснить этого обстоятельства, Паули возвел его в общий принцип, утверждающий, что в любой атомной или молекулярной системе не может существовать более двух эквивалентных электронов. Физический смысл этой двойки заключается в том, что электроны обладают магнитным моментом, обычно приписываемым их вращению вокруг собственной оси, и что последняя при данных условиях может принимать лишь два противоположных направления. У эквивалентных электронов магнитные оси должны иметь разные, т. е. противоположные направления. В этом заключается более точная формулировка принципа Паули, который в сущности означает, что в одной и той же атомной или молекулярной системе вполне эквивалентных электронов, т. е. электронов не только с одинаковыми квантовыми орбитами, но и с одинаковым направлением осей, не существует вовсе.

В волновой механике эквивалентность двух электронов выражается в простейшем случае симметрией функции ψ по отношению к их координатам. В этом случае принцип Паули сводится к исключению таких состояний, которые характеризовались бы волновыми функциями, симметричными по отношению к трем или более электронам.¹ Этот принцип, как уже упоминалось выше, не вытекает из основных прин-

ципов волновой механики, но вполне согласуется с ними в том смысле, что состояния, исключенные в некоторый момент $t=0$, не могут, согласно основному уравнению волновой механики, возникнуть с течением времени.

С помощью принципа Паули непосредственно решаются поставленные выше вопросы о числе валентных электронов в атоме и о невозможности существования тройных, четверных и т. д. симметрических групп электронов. Второго вопроса сам собой отпадает. Что же касается первого, то он сводится ко второму. А именно, в сложных атомах большинство электронов, в особенности все внутренние электроны, образуют симметричные пары (в роде напр. двух электронов внутренней электронной группы). При рассмотрении взаимодействия двух различных атомов эти, так сказать, „поженившиеся“ электроны можно (в первом приближении) не принимать во внимание. Связь между атомами может быть осуществлена лишь путем попарного сочетания тех электронов, которые находились в них на „холостом положении“ (принцип моногамии!). Эти

¹ Наиболее общая и точная формулировка принципа Паули в волновой механике была дана Дираком в виде ограничения всех мыслимых функций ψ функциями антисимметричными в расширенном смысле этого слова, связанном не только с учетом координат электронов, но и их ориентаций. Эти функции могут быть построены путем присоединения к трем координатам каждого электрона еще четвертой переменной, характеризующей его ориентацию и могущей принимать всего лишь два значения $\left(+\frac{1}{2} \text{ и } -\frac{1}{2}\right)$, соответственно двум его возможным ориентациям. Антисимметричные (в смысле Дирака) функции должны менять свой знак при перестановке двух четверок аргументов, характеризующих два разных электрона. В случае полной эквивалентности последних эта перестановка не должна была бы очевидно влиять на величину функции ψ , что в случае антисимметричных функций возможно лишь при $\psi=0$ ($\psi'=-\psi$). Таким образом, вводя эти функции, мы автоматически исключаем возможность эквивалентности двух электронов.

Следует заметить, что если учитывать одни лишь координаты (назовем четвертой „осевой переменной“), то „антисимметричные“ функции Дирака приобретают большую или меньшую степень симметрии. Существенным является то обстоятельство, что каждой подобной функции соответствует вполне определенная степень ориентированности электронов и, наоборот, каждой степени ориентированности — одна определенная функция.

„холостые“ электроны и являются валентными электронами, причем число их представляет собой максимальное число единиц сродства данного атома.

Заметим, что в электронной химии положительная или отрицательная валентность какого-нибудь атома определяется обычно числом электронов, которые он может при надлежащих условиях потерять или захватить. Легко отделимыми электронами являются большей частью именно „холостые“ электроны, так что „положительная валентность“ практически совпадает с валентностью в вышеприведенном смысле слова.

Далее следует заметить, что образование гетерополярной молекулы, напр. молекулы NaCl , связано не только с переходом валентного электрона Na на Cl , но и сочетанием этого электрона с одним из электронов Cl в симметрическую пару. В этом сочетании можно видеть самую сущность химического соединения между обоими атомами, ибо оно представляет собой общий признак всякого химического соединения как гомополярного, так и гетерополярного. Что же касается „гетерополярности“, то ее следует рассматривать, с этой точки зрения, не как антитезу „гомополярности“, но скорее как дополнение последней. Центр тяжести электронного облака, образованного двумя „вступившими в брак“ электронами, может лежать ближе к одному из атомов, чем к другому. Этим обстоятельством обуславливается „полярность“ образующейся молекулы, т. е. наличие у нее большего или меньшего электрического момента. Суть дела, однако, не в эксцентрическом положении связующей пары электронов, а в наличии этой пары.

Б И Б Л И О Г Р А Ф И Я

LOUIS DE BROGLIE. Einführung in die wellenmechanik Übersetzt von R. P e f e r i s. Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig. 1929. IV + 222 стр.
ЛУИ ДЕ БРОЙЛЬ. Введение в волновую механику.

Волновая механика насчитывает 4 года отроду; понятно поэтому, что все многочисленные книги, ей посвященные, называются „Введением“. Рассматриваемая монография может быть названа введением еще и потому, что в ней разбираются только принципиальные вопросы волновой механики и изложение кончается на кратком рассмотрении теории водородного атома.

Книга написана творцом основной идеи волновой механики — идеи о материальных волнах и неразрывной связи понятия корпускулы с понятием волны. Естественно поэтому, что изложение носит вполне оригинальный характер, существенно отличающий данную книгу от многих других, появившихся в иностранной литературе за последнее время. Идеи о материальных волнах выводятся из формул преобразования Лорентца и затем уже обобщаются в форму Шрёдингера. Отдельная глава посвящена волновой механике световых квантов, причем некоторые прежние выводы автора (напр. о собственной „пленочной“ массе светового кванта) исправлены.

Книга начинается изложением принципов классической механики и учения о волнах, затем, в указанной форме, перебрасывается мост от классической механики к волновой, даются различные варианты интерпретации ψ волн, в частности теория Бора-Гейзенберга (принцип неопределенности) и в конце рассматриваются специальные задачи: волновая механика системы точек, устойчивость периодических движений и простейшие примеры квантования.

Изложение очень ясное, выкладки не требуют от читателя сугубо напряженного внимания; применяемый математический аппарат будет вполне понятен студенту физики и математику старших курсов. С. Вавилов.

A. SOMMERFELD. *Atombau und Spektrallinien. Wellenmechanischer. Ergänzungsband.* Fr. Vieweg, Braunschweig, 1929. Pp. X + 351. RM. 14. 50.

А. ЗОММЕРФЕЛЬД. Строение атома и спектры. Дополнительный том — Волновая механика.

Назначение и характер этой книги столь ясно формулированы самим автором, что целесообразнее всего будет привести здесь нижеследующую обширную выдержку из предисловия:

„Я назвал этот дополнительный том „волновым“, так как методы Шрёдингера при практическом обращении с ними обладают преимуществами перед специфическими методами „квантовой механики“. Однако для меня не подлежит сомнению, что общие идеи, которые привели Гейзенберга к установлению квантовой механики, необходимы также для механики волновой.

Первоначальная точка зрения Шрёдингера, согласно которой переходы должны происходить только между сосуществующими состояниями, очевидно слишком узка; поэтому я перенес в волновую механику столь же допустимое рассмотрение состояний и переходов, как это было предусмотрено Гейзенбергом уже с самого начала. Но это означает отказ от широких целей, которые поставили себе Шрёдингер и де-Бройль, и отказ от наглядности в пользу формальности. Электрон остается и в волновой механике в конце концов точечным зарядом, а световой квант — точечным центром энергии. Но дуализм между световым квантом и световой волной распространяется и на корпускулы: рядом с электроном-корпускулой мы встречаемся с электроном-волной, существование которой подтверждается ежедневно умножающимися экспериментами.

В течение нескольких семестров я пытался в своих университетских лекциях представить для себя и для своих слушателей главные результаты волновой механики в возможно простой форме. Оказалось, что во всех случаях, которые допускают полную интеграцию, достаточен метод множителей, который без особой помощи со стороны теории функций ведет к окончательным аналитическим выражениям. С другой стороны метод „производящих функций“, который часто является весьма изящным, но всегда дает несколько искусственным путем интегралы интегральности, — этот метод может быть заменен непосредственным применением условий ортогональности. В виду этого я и поместил в основание настоящего изложения эти хотя и неглубокие, но единообразные и упрощающие точки зрения. Гораздо существеннее то упрощение, которое таким путем достигается в теории электрона, развитой Дираком. Здесь примененный мною метод почти полностью вытесняет четырехмерные матрицы и сводит дело к двумерным матрицам, допускающим геометрическое истолкование.

В качестве читателя я имел в виду, как и в прежних изданиях, в такой же мере физиков-экспериментаторов, как и теоретиков. Поэтому я главным образом ограничился теми проблемами, которые представляют не-

посредственный физический интерес. Общие спекуляции теории трансформации относительно вероятностей рассматриваются весьма кратко, равно как и принципиальные вопросы о неточности и наблюдаемости. Этим общим вопросам, как я слышал, вскоре будут посвящены книги другими компетентными лицами. Я хотел придерживаться прежнего характера моей книги и вследствие этого останавливаться по возможности на конкретных вопросах“.

Нам остается добавить к этому лишь чисто внешние сведения о новой книге Зоммерфельда. Книга разделяется на две обширные главы, из которых первая (стр. 1—169) посвящена основам волновой механики и некоторым ее простейшим применениям (осциллятор и ротатор, проблема атома водорода, простейшие проблемы теории молекул). Глава вторая (стр. 169—340) посвящена более трудным задачам и носит название „Проблема возмущения и диффракции. Вращающийся электрон“. Она содержит изложение следующих вопросов: 1) теория возмущений Шрёдингера; 2) теория эффекта Штарка; 3) теория дисперсии; 4) фотоэффект; 5) проблемы соударения двух частиц; 6) диффракция электронных волн; 7) эффект Комптона; 8) проблема гелия; 9) истолкование классических величин с точки зрения волновой механики; 10) природа электрона.

Книга написана с присущим Зоммерфельду мастерством: выукло, сжато и ясно. Наравне с основным томом, этот дополнительный том „Строения атома“ будет, конечно, служить настоящей книгой для всех физиков, интересующихся проблемами современной атомной теории.

Э. III.

П. И. ЛУКИРСКИЙ. Основы электронной теории. Гиз. Москва—Ленинград, 1929, стр. 339, ц. 4 р. 60 к.

„Основы электронной теории“ П. И. Лукирского представляют курс университетских лекций. Как указывает сам автор, он ограничивается изложением вопросов, где можно обойтись „классической“ электронной теорией, намереваясь посвятить особую книгу явлениям, требующим введения квантов. При некоторой неуклюжести такого деления в его пользу говорит возможность обстоятельно развить теорию некоторых важных явлений. При этом однако следовало бы подчеркнуть недостаточность приводимых теорий несколько более сильно, чем это делает автор. Так „классической“ электронной теории металлов посвящено около 40 страниц и только на последней отмечены ее слабые стороны. Несколько более отчетливо оттенена недостаточность классических представлений в главе об оптических явлениях; к сожалению вся эта глава, пожалуй, слишком коротка.

Со стороны изложения книга подробно освещает целый ряд вопросов, особенно связанных с экспериментальными проблемами. По описанию эксперимента и изложению его теории книга далеко превосходит содержание общего курса физики, над которым она и стоит по замыслу

автора. При теоретическом освещении принципиальных вопросов, однако, автор видел себя вынужденным иногда жертвовать полнотой изложения, ограничиваясь сообщением готовых формул. Так в вопросе о массе электрона он проводит элементарный вывод массы электрона при малых скоростях, но формулы Абрагама и Лорентца, дающие зависимость массы от скорости, сообщает как готовые. Он сохраняет также несколько устарелое обозначение продольной и поперечной массы и проявляет на мой взгляд излишнюю осторожность в вопросе об электромагнитной природе массы. В вопросе о роли электронов в диэлектриках и проводниках без вывода приводятся формулы Дебая и Лорентца.

Можно было бы пожелать усиления теоретической стороны. Однако в рамках, поставленных себе автором, он дал обстоятельное и богатое содержанием изложение основ электронной теории. В книге отсутствуют библиографические указания. Для учебников это общепринято, но книга Лукирского иногда касается настолько специальных вопросов, что по крайней мере некоторые ссылки были бы не лишними. Жаль также, что отсутствует алфавитный указатель.

Гр. Ландсберг.

Техника физического эксперимента. Под редакцией акад. А. И. Иоффе. Гиз. Москва—Ленинград, 1929, стр. 363, ц. 6 р. 80 к.

В наше время более чем когда бы то ни было ощущается нужда в книге, подобной рецензируемой. Число лиц, занятых физическим экспериментом, необычайно возросло. При этом работа такого типа идет не только в больших физических лабораториях, где есть не мало накопленного опыта и можно найти помощь у товарищей по работе; сплошь и рядом с физическим экспериментом приходится сталкиваться и в лабораториях иного типа (химических, биологических, медицинских) и в многочисленных заводских лабораториях, где число работников ограничено и где нередко (особенно в провинции) не к кому обратиться за советом. Но даже и в больших лабораториях книга подобного рода—желанный помощник, ибо при современном быстром прогрессе экспериментальной техники вряд ли найдется лаборатория, не нуждающаяся в чужом опыте.

Само собою понятно, что всякая книга рецептов и практических сведений крайне индивидуальна. Поэтому наиболее желательны коллективные произведения такого рода, где каждый вопрос освещен лицом, имеющим в нем личный опыт. Невозможная пестрота и неравномерность частой уже не столь большое зло. Приходится мириться конечно и с неполнотой подобного рода книг, особенно когда мы имеем дело с первой попыткой такого рода. И по содержанию и по описанию наиболее рекомендуемых приборов и приемов „Техника физического эксперимента“ несет на себе печать Физико-технического института и Лаборатории, возглавляемых акад. А. Иоффе — одной из лучших физических лабораторий на-

шей страны. Применительно к характеру ведущихся там работ составилась и эта книга.

Рецензенту трудно высказаться по поводу отдельных глав и пунктов. Каждый из нас имеет собственный опыт в той или иной группе вопросов и склонен считать лучшим прием, который в его руках дал наилучший результат. Поскольку „Техника физического эксперимента“ есть собрание сведений и советов не книжного характера, а целиком проверена опытом составителей, постольку нет никаких оснований сожалеть, что здесь описаны именно эти, а не другие приемы.

На книгу надо смотреть как на прекрасный почин и пожелать дальнейшего развития этого дела, конечно, не только силами работников указанных лабораторий. Оптический институт в Ленинграде мог бы дать ценнейшие пополнения к подобной книге описанием оптических измерений, которым мало уделено места в рецензируемой книге. Да и другие лаборатории и отдельные работники могли бы быть полезными соавторами. Я бы считал наоборот вредным попытку создать „Технику“ силами одного автора, которому поневоле три четверти книги придется писать „с чужих слов“. Но было бы может быть очень желательным, если бы Ленинградская Физико-техническая лаборатория сочла возможным привлечь к сотрудничеству для следующего издания возможно более широкий круг работников и за пределами своих стен. По условиям нашего книжного рынка выпуск двух самостоятельных книг подобного типа с неизбежным перекрыванием содержания вряд ли возможен. Поэтому труд коллектива, расширенного указанным образом, мог бы оказаться наиболее продуктивным.

Гр. Ландсберг.

• Ответственные редакторы: *И. И. Лазурев* и *Э. В. Шпольский*.

Ленинградский Областлит 14911. П. 21. Гиз. № 35511. Зак. № 2294. 8½ л. | Тираж 2000.

Типография «Коминтерн» Центрдагата Пародов СССР, Красная ул. 1.