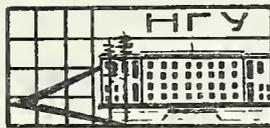




Digitized by the Internet Archive
in 2019 with funding from
Duke University Libraries

<https://archive.org/details/opytmodelirovani01unse>

1875



Новосибирский государственный университет

**НАУЧНЫЕ
ТРУДЫ**

СЕРИЯ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ

ВЫПУСК

5

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ
ЧЛ.-КОРР. АН СССР А. Г. АГАНБЕГЯНА

Новосибирский государственный университет

Novosibirsk. University.

ОПЫТ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПЛАНОВО - ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

НАУЧНЫЕ РЕДАКТОРЫ

КАНД. ФИЗ.-МАТ. НАУК
К. А. БАГРИНОВСКИЙ
и Б. Б. РОЗИН

НОВОСИБИРСК 1965.

330.8
N 945 N
УДР. 5

П Р Е Д И С Л О В И Е

Сборник посвящён вопросам применения математических методов и ЭВМ в решении некоторых задач экономики, а также проблем, возникающих в смежных областях. В

В первых четырёх статьях первого раздела рассматриваются методы оптимального решения отдельных задач и их реализации. В работе А.Б.Горстко и А.В. Финковской описывается реализация алгоритма динамического программирования Р.Беллмана. В.Л.Макаров даёт постановку производственно-транспортной задачи линейного программирования и предлагает алгоритм её решения. В статье К.А. Багриновского и Е.Л.Берлянда содержится постановка одной нелинейной задачи оптимизации, возникающей при управлении химическим производством, и предложен способ решения.

Способ применения линейного программирования к решению задачи оптимальной расстановки рыболовецких судов, с внесением поправок, приводящих к целочисленному плану, изложен в статье М. П.Москаленко и Н.С.Кощеевой.

А.Б.Горстко и Н.Б.Мироносецкий рассматривают вопросы совершенствования управления производством. В статье А.Б.Горстко делается попытка построения простой модели производства и применения для анализа этой модели принципа оптимальности Р.Беллмана. Н.Б.Мироносецкий даёт подробное описание алгоритма приближённо-

го решения задачи календарного планирования и реализации этого алгоритма на ЭВМ.

М.Л.Лукацкая посвящает свою работу изучению предельных распределений некоторых функционалов над совокупностью независимых случайных величин с распределениями, отличными от нормального распределения, но являющимися некоторыми обобщениями последнего.

Необходимость существенного уплотнения технико-экономической информации при её обработке на ЭВМ показана в статье И.М.Бобко. Автор даёт эффективные способы такого уплотнения.

Статья Е.М.Левицкого содержит описание одного из алгоритмов анализа сетевых графиков и его реализации для ЭВМ с использованием только оперативной памяти. Одной из важнейших задач анализа сетевых графиков, именно выделения элементарных контуров, посвящена работа В.А.Перепелицы, в которой дан эффективный алгоритм решения указанной задачи и даны оценки сложности алгоритма.

Второй раздел сборника посвящён вопросам применения математических методов и ЭВМ в экономической работе на промышленных и сельскохозяйственных предприятиях. Главным образом здесь уделено проблеме календарно-производственного планирования.

"Модели календарного планирования на машиностроительном заводе" — так называется коллективная статья И.П.Шубкиной, Э.В.Коробковой и Н.Б.Мироносенко. Авторы рассматривают постановку задачи составления календарного плана-графика загрузки оборудования в условиях машиностроительного завода, описывают алгоритм построения графиков на ЭВМ. Кроме того, решаются вопросы подготовки исходных данных и анализа графиков.

В цикле статей Б.Б.Розина, Г.А.Нарышева, Ю.П.Воронова и Ч.Б.Мироносенко рассмотрены различные аспекты проблемы календарного планирования и организации производства в сталеплавильных цехах металлургических предприятий.

Б.Б.Розин поднимает некоторые методические вопросы оптимального нормирования производительности металлургических агрегатов;

показывает, что установление технической нормы производительности представляет собой задачу нахождения оптимального режима эксплуатации. В работе сформулировано содержание критерия оптимальности, разработана классификация факторов производительности.

Во втором разделе излагается методика использования математико-статистических методов для установления нормативных коэффициентов в мартеновском производстве /ст. Б.Б.Розина и Г.А.Нарышева/, ставится вопрос о построении календарного графика работы мартеновских печей методом Монте-Карло и приводится блок-схема программы на ЭВМ /ст.Н.Б.Миросецкого/.

Задачи прогнозирования длительности мартеновской плавки решаются Б.Б.Розиным, Г.А.Нарышевым и Ю.П.Вороновым. На основе экономико-математического анализа причин вариации длительности плавки ими предложены две математико-статистические модели для прогнозирования.

Б.Б.Розин и Ю.П.Воронов исследуют принципы построения оптимальных суточных графиков сталеплавильных цехов. В работе формулируется ряд критериев и разработано несколько ручных алгоритмов построения графиков.

В статье М.К.Калмыка рассмотрен вопрос об определении трудоёмкости наклонных выработок в угольной промышленности и выведены аналитические формулы для установления объёмов работ по поддержанию наклонных выработок для самых разнообразных горногеологических и горно-технических условий. При выводе формул широко использованы методы теории корреляции.

М.И.Вирченко, В.П.Можин, В.А.Семёнова и В.Э.Шляпентох излагают опыт экономико-математического моделирования работы ряда сельскохозяйственных предприятий Новосибирской области при определении оптимальной структуры кормовой базы. Авторы ставят вопрос об оценках оптимального плана и их значении для экономико-математического анализа.

В сборник включена также статья Н.Н.Слакова, в которой рассматривается вопрос об экономической целесообразности повышения надежности электронных приборов. Показано, что с повы-

пением надежности увеличиваются затраты на изготовление приборов, снижаются эксплуатационные расходы и улучшаются качественные показатели работы объекта. Оптимальная надежность находится построением результирующей кривой.

По всем вопросам, поднятым в статьях сборника, исследования продолжаются.

Часть 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ НА
Э В М

Под редакцией кандидата
физико-математических наук К.А.Багриновского

А.Б.Горстко и А.В.Финковская

О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ЭВМ

Многие планово-экономические задачи и проблемы теории оптимальных процессов могут рассматриваться как многошаговые процессы принятия решения. Специальный аппарат, приспособленный для решения таких задач и получивший в дальнейшем название динамического программирования, был создан в 50-х годах американским математиком Р.Беллманом и его сотрудниками.

1. Постановка задачи

Если говорить о математической сути динамического программирования, то, по существу, она сводится к такому, на первый взгляд, очевидному положению.

Если некоторое свойство P выполняется на множестве S , то оно выполняется и на множестве всех подмножеств S . Решение каждой конкретной задачи динамического программирования состоит поэтому, как правило, из следующих этапов:

1. Отыскание свойства P , инвариантного относительно разбиения множества S .

2. Составление рекуррентных соотношений, которые связывают некоторую функцию φ , обладающую свойством P и определенную на подмножествах S , со значением этой функции на S .

3. Нахождение численного решения задачи.

Поясним эти рассуждения довольно общего характера на примере отыскания минимума функции $2N$ переменных. Итак, будем искать

$$Z_N(x) = \min_{\{s_i\}, \{q_i\}} \{g_1(x, s_1, q_1) + g_2(x_1, s_2, q_2) + \dots + g_N(x_{N-1}, s_N, q_N)\}$$

при условиях:

$$0 \leq s_1 \leq f(x) \quad 0 \leq s_2 \leq f(x_1) \dots \quad 0 \leq s_N \leq f(x_{N-1})$$

$$\varphi_1(s_1, x) \leq q_1 \leq \varphi_2(s_1, x) \quad \varphi_1(s_2, x_1) \leq q_2 \leq \varphi_2(s_2, x_1) \dots \quad \varphi_1(s_N, x_{N-1}) \leq q_N \leq \varphi_2(s_N, x_{N-1}),$$

где $x_i = T(x_{i-1}, s_i, q_i)$ и $x_0 = x$.

Заданные функции $\varphi_1(s, x), \varphi_2(s, x), f(x)$ и $T(x, s, q)$ таковы, что для них справедливы условия:

а) $\varphi_1(s_k, x_{k-1}) \geq \varphi_1(s_i, x)$ ($k = 1, 2, \dots, N$)

б) $\varphi_2(s_k, x_{k-1}) \leq \varphi_2(s_i, x)$ ($k = 1, 2, \dots, N$)

в) $f(x_k) \leq f(x)$ ($k = 1, 2, \dots, N-1$)

Функции $g_1(x, s, q), \dots, g_N(x, s, q)$ произвольны.

Таким образом, задача состоит в отыскании условного минимума функции $2N$ переменных. Существенным является то, что нас интересует не только (и не столько) величина минимума, но и множество пар (s_i, q_i) ($i = 1, 2, \dots, N$), на которых этот минимум достигается.

В дальнейшем будем называть это множество пар управлениями, а те управления, на которых достигается минимум, — оптимальными управлениями.

Перейдем теперь от решения задачи минимизации функции $2N$ переменных к решению N двумерных задач минимизации. Этот переход вызван тем, что уже при значениях N порядка 10 задача не может быть непосредственно решена даже на современных электронных вычислительных машинах.

Введем в рассмотрение последовательность функций

$$\{\varphi_i(x)\} \quad i = 1, 2, \dots, N, \text{ называемых в дальнейшем управляющи-}$$

ми функциями. Смысл их таков: $\Phi_i(x)$ есть величина минимума $Z_i(x)$ при условии, что $(s_t, q_t) t = 1, 2, \dots, i$ выбраны оптимальным образом и последовательность управлений состоит ровно из i пар. Для последовательности управляющих функций справедливости следующие рекуррентные соотношения:

$$\Phi_1(x) = \min_{0 \leq s \leq f(x)} \{ g_1(x, s, q) \}$$

$$\psi_1(x, s) \leq q \leq \psi_2(x, s)$$

.....

$$\Phi_N(x) = \min_{0 \leq s \leq f(x)} \{ g_N(x, s, q) + \Phi_{N-1}(T(x, s, q)) \}$$

$$\psi_1(x, s) \leq q \leq \psi_2(x, s)$$

Из этих соотношений может быть найдено численное решение исходной задачи.

Перейдем теперь к описанию соответствующего алгоритма.

II. Алгоритм метода динамического программирования

I. Выбор шага по x на $[\alpha, \beta]$. Будем считать для простоты $[\alpha, \beta] \sim S$. Естественно, что меньший шаг является более предпочтительным. В конечном счете он существенно зависит от размеров задачи.

II. Задание сетки по S и q .

III. Вычисление функции $\Phi_1(x)$.

1. При фиксированном x находится значение $f(x)$.

2. При фиксированных x и S вычисляются $\psi_1(x, s)$ и $\psi_2(x, s)$.

3. При фиксированном x для всевозможных пар s_i и q_i вычисляются значения $g_1(x, s_i, q_i)$.

4. Из множества значений $g_1(x, s_i, q_i)$, найденных в III-3, отыскивается минимальное.

5. III-1 - III-4 выполняются для всех заданных значений $x \in [\alpha, \beta]$

IV. Вычисление функции $\Phi_2(x)$.

1. При фиксированном x находится значение $f(x)$.
2. При фиксированных x и S вычисляются значения $\varphi_1(x, S)$ и $\varphi_2(x, S)$.
3. При фиксированном x для всевозможных пар S_i и q_i вычисляются значения $g_2(x, S_i, q_i)$ и $T(x, S_i, q_i)$.
4. Для каждого $X_i = T(x, S_i, q_i)$ ищется $\varphi_1(X_i)$:
 - а) если $X_i \leq \alpha$, то $\varphi_1(X_i) = \varphi_1(\alpha)$;
 - б) если $X_i \geq \beta$, то $\varphi_1(X_i) = \varphi_1(\beta)$;
 - в) если $x_k \leq X_i \leq x_{k+1}$, то

$$\varphi_1(X_i) = \frac{\varphi_1(x_{k+1}) - \varphi_1(x_k)}{x_{k+1} - x_k} (X_i - x_k) + \varphi_1(x_k)$$

5. Определяется $\varphi_1(X_i) + g_2(x, S_i, q_i)$.
6. Из множества значений $\{\varphi_1(X_i) + g_2(x, S_i, q_i)\}$, найденных в 1У-5, отыскивается минимальное.

7. 1У-1 - 1У-6 выполняются для всех заданных значений $x \in [\alpha, \beta]$.

У. Аналогично вычислению в 1У функции $\varphi_2(x)$ определяются $\varphi_3(x), \dots, \varphi_N(x)$. Значения $\varphi_N(x)$ равны $\min Z_N(x)$.

Пары (S_i^N, q_i^N) , определенные на N - м шаге, дают оптимальные управления на первом шаге.

У1. Определение оптимальных управлений на втором шаге.

1. При фиксированном x для пар (S_i^N, q_i^N) вычисляются

$$X_i^{N-1} = T(x, S_i^N, q_i^N)$$

2. Для каждого X_i^{N-1} ищется пара (S_i^{N-1}, q_i^{N-1}) :
 - а) если $X_i^{N-1} \leq \alpha$, то берется пара (S_i^{N-1}, q_i^{N-1}) ;
 - б) если $X_i^{N-1} \geq \beta$, то берется пара (S_i^{N-1}, q_i^{N-1}) ;
 - в) если $x_k \leq X_i^{N-1} \leq x_{k+1}$, то берется пара

$$\left(\frac{S_{k+1}^{N-1} - S_k^{N-1}}{x_{k+1} - x_k} (X_i^{N-1} - x_k) + S_k^{N-1}, \frac{q_{k+1}^{N-1} - q_k^{N-1}}{x_{k+1} - x_k} (X_i^{N-1} - x_k) + q_k^{N-1} \right)$$

3. У1-1, У1-2 выполняются для всех заданных значений $x \in [\alpha, \beta]$

УП. Аналогично определению в У1 оптимальных управлений на втором шаге находятся оптимальные управления на последующих

$(N-1)$ - х шагах.

Точность приведенного алгоритма определяется выбором шагов по x, S и q .

По данному алгоритму в Институте математики СО АН СССР одним из авторов этой работы была составлена программа для ЭВМ. На рис.1 приведена блок-схема программы.

III. Примеры

Рассмотрим несколько задач, которые были решены по приведенной выше программе.

1. Задача о построении шкалы индексов при линейном раскрое.

Из имеющейся заготовки длины L нужно выкроить детали. Задано n видов деталей. Каждый характеризуется длиной l_i и стоимостью c_i . Требуется изготовить такой набор деталей, суммарная стоимость которого была бы максимальна.

Введем произвольным образом нумерацию видов деталей. В качестве управляющих введем функции $\Phi_i(x)$ - максимальная стоимость, при выкраивании деталей первых i видов из заготовки длины x . Для этих функций верны соотношения:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= c_1 \left[\frac{x}{l_1} \right] \\ &\dots\dots\dots \\ \Phi_n(x) &= \max_{0 \leq S \leq \left[\frac{x}{l_n} \right]} \left\{ \Phi_{n-1}(x - Sl_n) + c_n S \right\} \end{aligned}$$

В рассмотренном модельном примере были взяты следующие данные:

$$\begin{array}{lll} n = 3, & L = 5000 & \\ l_1 = 1400, & l_2 = 950, & l_3 = 650 \\ c_1 = 3, & c_2 = 2, & c_3 = 1 \end{array}$$

Максимальная суммарная стоимость набора деталей равна 10. Один из наборов деталей, при котором она достигается, состоит из одной детали первого вида, трех - второго и одной - третьего.

Параллельно при решении были найдены оптимальные наборы и соответствующие им максимальные суммарные стоимости для заготовок длиной 650, 700, 750, ..., 5000.

2. Задача о выборе объема производства

Имеется группа из n типовых предприятий, на каждом из которых нужно выбрать один из возможных объемов производства α_i . С каждым объемом производства сопоставляются известные затраты β_i . Необходимо найти такие объемы производства, чтобы суммарное количество продукта было не меньше A , а соответствующие затраты минимальны, т.е. ищется $\min \sum_{i \in J} \beta_i$ при условии, что $\sum_{i \in J} \alpha_i \geq A$.

Аналогично предыдущему, введем последовательность управляющих функций $\varphi_i(x)$ - минимальные затраты при использовании первых i предприятий с суммарным объемом производства, равным x .

Для этих функций справедливы соотношения:

$$\varphi_1(x) = \varphi_1(x)$$

.....

$$\varphi_n(x) = \min_{0 \leq s \leq x} \{ \varphi_{n-1}(x-s) + \varphi_n(s) \},$$

где

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0 \\ \beta_i, & \text{если } x \leq \alpha_i \\ M, & \text{если } x > \alpha_i \end{cases} \quad (M - \text{большое положительное число}).$$

При решении конкретной задачи рассматривалась группа из 5 предприятий. Величины α_i и β_i имели следующие значения:
 $\alpha_1 = 3670$, $\alpha_2 = 1490$, $\alpha_3 = 1435$, $\alpha_4 = 3880$, $\alpha_5 = 6250$
 $\beta_1 = 30204$, $\beta_2 = 17866$, $\beta_3 = 9040$, $\beta_4 = 31079$, $\beta_5 = 37375$
 $A = 10250$.

Значение целевой функции оказалось равным 76619.

В оптимальном плане выбираются первый, третий и пятый объемы производства.

Приведенные примеры, конечно, могли бы быть решены и непосредственным просмотром всевозможных вариантов, однако мы решили их привести с целью более наглядной иллюстрации метода.

Л и т е р а т у р а

1. Р.Беллман. Динамическое программирование.
2. Л.В.Канторович и В.А.Залгаллер. Расчет рационального раскроя промышленных материалов.

В.Л. Макаров

ПРОИЗВОДСТВЕННО-ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА
ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. Формулировка производственно-транспортной задачи

Имеется m районов ($i = 1, \dots, m$), n транспортабельных продуктов ($j = 1, \dots, n$) и $\kappa = \sum \kappa^i$ нетранспортабельных продуктов (видов производственных мощностей и проч.). Производство и потребление в каждом районе $[i]$ описывается множеством технологических способов $\{a^{si}\}$ ($s_i = 1, \dots, s_i$). Начальное состояние производства и потребления каждого района задается вектором ограничений $b^i = (b_1^i, \dots, b_n^i, b_{n+1}^i, \dots, b_{n+\kappa^i}^i)$. Неравенство $b_j^i > 0$ или $b_\kappa^i > 0$ показывает, что в районе $[i]$ необходимо выдать для непроизводственного потребления продукты $[j]$ и $[\kappa]$ в количествах $|b_j^i|$ и $|b_\kappa^i|$. Соответственно, $b_j^i < 0$, $b_\kappa^i < 0$ означает, что в районе $[i]$ в начальный момент имеются ресурсы продуктов $[j]$ и $[\kappa]$ в количествах $|b_j^i|$ и $|b_\kappa^i|$. Транспортировка задается с помощью матрицы $\|c_{i', i}^j\|$, элементы которой показывают затраты на перевозку продукта $[j]$ из района $[i]$ в район $[i']$. На транспортные магистрали могут быть наложены ограничения по пропускной способности. Кроме того, в задаче могут присутствовать ограничения, относящиеся ко всем районам (например, ограничения на общую сумму капиталовложений). Требуется найти допустимые планы

производства и потребления внутри районов $[i] \bar{H}^i$ и допустимый план транспортировки H^{mp} такие, что суммарные затраты на производство и транспортировку имеют минимальное значение. Допустимость планов понимается в обычном смысле, т.е. $\{\bar{H}^i\}$ и \bar{H}^{mp} должны удовлетворять ограничениям $\{b^i\}$ и всем дополнительным ограничениям. Легко видеть, что сформулированная задача является наиболее общей производственно-транспортной задачей (в рамках линейного программирования). В ее формулировке нет никаких специфических ограничений. Правда, на первый взгляд может показаться, что неясно, как учитываются различные виды взаимозаменяемости продуктов, потому что при фиксированных планах производства и потребления районов в получающейся многопродуктовой транспортной задаче нет никакой взаимозаменяемости. Однако все дело в том, что потребность районов тоже величина переменная, и с ее помощью учитывается любой вид взаимозаменяемости продуктов. Например, если в некотором районе для производства одного и того же продукта могут использоваться два различных вида сырья, то это производство описывается различными технологическими способами в зависимости от того, какое сырье потребляется. В соответствии с этим потребность в том и другом сырье варьируется в зависимости от плана производства района.

Общая матрица технологических способов сформулированной задачи линейного программирования имеет вид:

	A	R_1				R_2				\dots	R_m	(1)
	D	B										
ограничения	min	d	b^1	b^2						b^m		

Здесь способы - строки матрицы (1). Последняя строка есть вектор ограничений. Матрицы A и D необходимы для записи дополнительных ограничений. $A = \|\alpha_p^s\|$. B - матрица транспортных способов, имеющих вид $(0, \dots, -1, \dots, +1, \dots, 0)$.

$$d = (d_1, \dots, d_p)$$

П. О методе решения производственно-транспортной задачи

Предлагаемый алгоритм решения основан на применении процедуры разложения Данцига и Вульфа [1]. Но благодаря специфической структуре матрицы задачи, операции нахождения о.о.оценок и включения нового вектора в базис координирующей программы осуществляются более просто. В частном случае (который часто встречается на практике), когда число нетранспортабельных продуктов в каждом районе равно единице, предлагаемый алгоритм совсем не использует процедуру разложения Данцига - Вульфа, т.к. решение всей задачи вырождается в решение координирующей программы. Основная идея, упрощающая операции симплексного шага, состоит в том, что большинство транспортабельных продуктов нет необходимости различать по районам. Причем то, какие продукты надо различать по районам, а какие не различать, определяется на каждом шаге планом транспортировки.

Более точно можно сказать так. На каждом шаге алгоритма получается план транспортировки всех продуктов. Не различается по районам $[i_1]$ и $[i_2]$ тот продукт, для которого можно указать цепочку транспортных способов, принадлежащих данному плану, соединяющую районы $[i_1]$ и $[i_2]$.

Описание алгоритма проводится в предположении, что матрица $D \equiv 0$.

Матрицу (1) с помощью перестановки столбцов представим в таком виде:

		\overline{I}				\overline{II}				
	A	$R_1^{(1)}$				$R_1^{(2)}$				
			$R_2^{(1)}$				$R_2^{(2)}$			
					$R_m^{(1)}$					
	O	B				O				
min	d	$\delta'_1 \dots \delta'_n$	$'$	$\delta_1^m \dots \delta_n^m$		$\delta_{n+1}^m \dots \delta_{n+m}^m$				

Здесь матрицы $R_1^{(1)} \dots R_m^{(1)}$ содержат столбцы, относящиеся

только к транспортабельным продуктам, $R_1^{(2)}, \dots, R_m^{(2)}$ - столбцы, относящиеся к нетранспортабельным продуктам.

Будем решать задачу с матрицей (2) методом разложения, причем к координирующей программе отнесем столбцы группы 1. Далее будем предполагать, что в задаче имеются все возможные способы транспортировки. Это предположение не является ограничением, потому что там, где в действительности нет связи, способ транспортировки имеет очень большие затраты.

Сначала опишем способ построения исходного плана координирующей задачи. Обозначим этот план через $H(0)$. $H(0)$ можно находить следующим образом.

1) Найти оптимальный производственный план $H^{np}(0)$ (без учета транспортировки). $H^{np}(0)$ является решением следующей задачи линейного программирования.

	A	$R_1^{(1)}$	$R_1^{(2)}$			
		$R_2^{(1)}$		$R_2^{(2)}$		
		\vdots				
		$R_m^{(1)}$				$R_m^{(2)}$
min	d	$\sum_i \beta_i^i$	$\beta_{n+1}^i \cdot \beta_{n+k}^i$			

(3)

Матрица (3) получается из матрицы (1) объединением транспортабельных продуктов. Т.е. в (3) транспортабельные продукты не различаются по районам. Решение задачи линейного программирования с матрицей (3) осуществляется с помощью алгоритма разложения Данцига и Вульфа. $H^{np}(0)$ есть вектор интенсивностей базисных способов координирующей программы, который получается на последнем шаге алгоритма.

2) Из $H^{np}(0)$ находим $x(0) = (x_1^i, \dots, x_m^i)$, где

$$x_i^i = \left(\sum_{S_i} \alpha_1^{S_i} h_o^{S_i} + \beta_1^i, \dots, \sum_{S_i} \alpha_n^{S_i} h_o^{S_i} + \beta_n^i \right).$$

3) Решить m транспортных задач с объемами производства и потребления $x(0)$ и способами транспортировки первоначаль -

ной задачи. Решение обозначим через $H^{mp}(0)$. Таким образом,

$$H(0) = (H^{np}(0), H^{mp}(0)).$$

Если планы $H^{np}(0)$ и $H^{mp}(0)$ невырожденные, то $H(0)$ есть базисный план для координирующей программы общей задачи с матрицей (2).

Итак, мы описали процесс построения начального базисного плана для координирующей программы и соответствующих этому плану оптимальных планов задач блоков, определяемых матрицами $R_1^{(2)}, \dots, R_m^{(2)}$

Теперь опишем процедуру нахождения о.о.оценок базисного плана координирующей программы, а также способ определения коэффициентов разложения нового вектора по текущему базису

Определение о.о.оценок для плана $H(0)$

Обозначим матрицу способов (без минимизирующей компоненты), вошедших в $H^{np}(0)$ через $A(0)$. Порядок этой матрицы $(p+n+m)^2$. Однако m последних столбцов имеют специальный вид. Разработаны алгоритмы, см., например, [2], где такие столбцы учитываются особым образом, так что все основные операции проводятся с матрицей порядка $(p+n) \times (p+n)$. О.о.оценки продукта $[j]$ в различных районах, определенные с точностью до постоянного слагаемого из плана $H^{mp}(0)$, обозначим через $r^j = (r_1^j, \dots, r_i^j, \dots, r_m^j)$.

Определение о.о.оценок, соответствующих плану $H(0)$, сводится в основном к отысканию значений этих постоянных слагаемых для каждого продукта. Обозначим эти неизвестные слагаемые через

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_n).$$

Пусть $\pi(0)$ - искомый вектор о.о.оценок. $\pi(0)$ имеет размерность $p+n(n+1)$, равную размерности координирующей программы исходной задачи. Обозначим через $\tilde{\pi}$ вектор $(\pi_1, \dots, \pi_p, \xi_1, \dots, \xi_n, \pi'_1, \dots, \pi'_m)$. Здесь π_1, \dots, π_p - о.о.оценки первых p ограничений, π'_1, \dots, π'_m - о.о.оценки особых m последних ограничений.

Вычислим вектор $f = (f_1, \dots, f_{p+n+m})$ следующим образом:
 $f_i = (a_i, \bar{r}_{i_0})$, где a_i - первая строка матрицы $A(0)$, r_i - столбец матрицы $\|r_i^j\|$, дополненный нулями сверху и снизу.

зу (сверху ρ нулей, снизу m нулей). Номер района i_0 подбирается таким образом, чтобы он совпал с номером района, в котором действует способ α_1 . Обозначим еще вектор затрат, соответствующий матрице $A(0)$ через C .

Теперь имеются все обозначения для того, чтобы записать формулу, вычисляющую $\tilde{\pi}$ и $\pi(0)$.

$$\tilde{\pi} = A^{-1}(0) (C - f).$$

У векторов $\tilde{\pi}$ и $\pi(0)$ первые ρ компонент и последние m компонент совпадают.

$$\pi_i^j(0) = \eta_i^j + \xi_j.$$

Для нахождения вектора, который может улучшить план $H(0)$, используется обычная процедура метода разложения. Т.е. решается m задач линейного программирования:

$$a) \sum_{s_i} \alpha_{\kappa}^{s_i} h^{s_i} \geq \theta_{\kappa}^i$$

$$b) \sum_{s_i} (\sum_{i_j} \alpha_{i_j}^{s_i} \pi_i^j(0)) h^{s_i} - \max.$$

Пусть найдется такой район $[i_0]$, что максимальное значение линейной формы $\sum_{s_i} (\sum_{i_j} \alpha_{i_j}^{s_i} \pi_i^j(0)) h^{s_i} > \pi_i^i$, где π_i^i - оценка особого ограничения в координирующей задаче.

Тогда способ $\hat{\chi}^{i_0}$, соответствующий данному решению, может улучшить план $H(0)$. Если для любого i максимальное значение линейной формы не превосходит π_i^i , то $H(0)$ - оптимальный план исходной задачи.

Опишем способ вычисления разложения $\hat{\chi}^{i_0}$ по базису координирующей задачи.

Обозначим вектор коэффициентов разложения $\hat{\chi}^{i_0}$ по производственным способам через $\lambda^{np} = (\lambda_1, \dots, \lambda_s, \dots, \lambda_{\rho+n+m})$, а по транспортным способам через $\lambda^{mp} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{(m-1)n})$.

$$\lambda^{np} = \hat{\chi}^{i_0} A^{-1}(0).$$

Каждому элементу $\lambda_s \alpha_j^s$ матрицы $\left\| \begin{matrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_{\rho+n+m} \end{matrix} \right\| \cdot A(0)$,

такому, что α_j^s относится к транспортабельному продукту $[j]$ в некотором районе $[i]$, сопоставим цепочку транспортных способов из плана $H^{mp}(0)$, соединяющую район $[i]$ с районом $[i_0]$ по продукту $[j]$. Интенсивность каждого способа, входящего в эту цепочку, принимается равной по абсолютной величине $\lambda_s \alpha_j^s$. Знак же этой интенсивности определяется по следующему правилу. Знак плюс ставится, если (1) способ направлен от района $[i]$ к району $[i_0]$ и $\lambda_s \alpha_j^s$ имеет знак плюс, (2) способ направлен от района $[i_0]$ к району $[i]$ и $\lambda_s \alpha_j^s$ имеет знак минус. Во всех остальных случаях ставится знак минус. Компоненты вектора λ^{mp} представляют собой алгебраическую сумму по всем рассмотренным цепочкам.

Итак, мы описали процедуру нахождения о.о.оценок и коэффициентов разложения для базиса координирующей программы, который характеризуется тем, что число производственных способов в нем $\rho + n + m$, а число транспортных $(m-1)n$. Ясно, что $(m-1)n$ - максимальное число транспортных способов, которое может входить в базис. Следовательно, требуется еще указать способ вычисления оценок и коэффициентов разложения для базиса, в котором число производственных способов больше.

Мы здесь ограничимся следующими замечаниями. Если после включения \hat{x}^{i_0} в базис число производственных способов оказалось равным $\rho + n + m + 1$, то, следовательно, транспортная задача для какого-нибудь продукта стала содержать $m - 2$ способа, т.е. сеть для этого плана задачи перестала быть связной (распалась на две связные подсети).

Поскольку продукт можно не различать по районам только в связной сети, то здесь придется ввести две компоненты для одного и того же продукта.

Матрица $A(0)$ перейдет в матрицу $A(1)$ на единицу большей размерности. $A^{-1}(1)$ может быть получена довольно простыми операциями при знании $A^{-1}(0)$ (некоторое усложнение метода окаймления, см. [3]).

Метод нахождения о.о.оценок и коэффициентов разложения почти ничем не отличается от изложенного для $A(0)$.

Процедура разложения способа транспортировки, захватывающего районы, принадлежащие разным подсетям, по $A(1)$ совпадает

с процедурой разложения производственного способа. Способ транспортировки внутри связанной сети раскладывается по базису соответствующей транспортной задачи.

Замечания

- 1) Здесь описана, вообще говоря только идейная сторона алгоритма. Технические реализации его могут быть различными.
- 2) Слабой стороной предлагаемого алгоритма является то, что размерность матрицы $A(t)$ не постоянна и, в принципе, может даже возрасти до размерности координирующей задачи.
- 3) Рассмотренный алгоритм может быть реализован так, что его отдельные части будут выполняться в различных местах (в районах). Это обстоятельство важно в практическом отношении.
- 4) Описанная процедура вычислений в координирующей программе может быть соединена с другим способом решения блочных задач (см. [2]), отличным от первоначального метода Данцига и Вульфа.

Л и т е р а т у р а

1. *Dantzig G, Wolfe P., "The decomposition algorithm for linear programs" Econometrica, vol 29 N 4, 1961.*
2. Р.А.Звягина. Задачи линейного программирования с блочно-диагональными матрицами. Оптимальное планирование, вып.П.
3. Д.К.Фаддеев, В.Н.Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз, 1960.

К.А.Багриновский, Е.Л.Берлянд

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С
УПРАВЛЕНИЕМ ХИМИЧЕСКИМ ПРОИЗВОДСТВОМ¹⁾

Одним из производств завода синтетического каучука является производство стирола из этилбензола. В результате формирования модели статистики производства стирола как объекта оперативной оптимизации получается математическая задача, которая может быть сформулирована следующим образом:

Требуется найти наибольшее значение линейной функции

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1)$$

на множестве R переменных x_1, x_2, \dots, x_n , определяемом следующими условиями:

$$0 \leq x_j \leq d_j \quad (2)$$

(для некоторых номеров j возможно $d_j = \infty$),

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, \ell), \quad (3)$$

$$f_i(x) = 0 \quad (i = \ell + 1, \dots, m). \quad (4)$$

Условия (1) - (2) образуют группу линейных условий задачи.

Функции $f_i(x)$, являющиеся левыми частями уравнений (3), суть

1) Задача поставлена Московским институтом автоматике и телемеханики.

нелинейные функции переменных x_j ($j=1,2,\dots,n$) специального вида

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j^2 + \sum_{j=1}^n B_{ij} x_j + C_i \quad (5)$$

(где хотя бы один из коэффициентов $A_{ij} \neq 0$ ($j=1,2,\dots,n$)). Очевидно, что частным случаем этой задачи при $\ell=m$, т.е. при отсутствии нелинейных условий, является задача линейного программирования. Однако существенное отличие задачи (1) - (4) в общем случае состоит в том, что множество R допустимых значений переменных не является выпуклым. Поэтому задача не может быть решена методами выпуклого программирования.

Пусть x' и x'' точки множества R и $f(x') < f(x'')$; в дальнейшем мы будем предполагать, что множество R таково, что для любого α , удовлетворяющего неравенству $f(x') < \alpha < f(x'')$, найдется по крайней мере одна точка $x \in R$ такая, что $f(x) = \alpha$. Очевидно, что если множество R связно, то это условие выполняется.

Основная идея предлагаемого метода состоит в построении последовательности

$$x^0, x^1, \dots, x^k, \dots \quad (6)$$

точек множества R , на которой функция $f(x)$ монотонно возрастает.

Пусть точка $x^k(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$ принадлежит последовательности (6). Обозначим через R' множество, определяемое условиями (2) - (3). Решим в точке x^k задачу выбора оптимального направления, иначе говоря, определим в точке x^k направление $S^k(s_1^k, s_2^k, \dots, s_n^k)$ как решение задачи линейного программирования:

$$\max \sum_{j=1}^n c_j s_j \quad (7)$$

при условиях:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} s_j &= 0 \quad (i=1,2,\dots,\ell) \\ -1 \leq s_j \leq 0, & \text{ если } x_j^k = d_j (d_j < \infty); \\ 0 \leq s_j \leq 1, & \text{ если } x_j^k = 0; \\ -1 \leq s_j \leq 1 & \text{ во всех остальных случаях.} \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть $m = \sum_{j=1}^n c_j s_j^{\kappa}$, где $\{s_j^{\kappa}\} (j=1, 2, \dots, n)$, есть решение задачи выбора направления (7) - (8). Если $m=0$, то $f(x^{\kappa}) = \max_{x \in R} f(x)$.

В самом деле, равенство $m=0$ означает, что функцию $f(x)$ нельзя увеличить на множество R' , а следовательно, и на R .

Если же $m > 0$, то вдоль избранного направления S^{κ} находим шаг

$$\lambda^{(\kappa)} = \min_j (\lambda_j, \lambda^*), \quad (9)$$

где

$$\lambda_j = \begin{cases} -\frac{x_j^{\kappa}}{s_j^{\kappa}}, & (s_j < 0) \\ \frac{d_j - x_j^{\kappa}}{s_j^{\kappa}}, & (s_j > 0, d_j < \infty), \end{cases} \quad (10)$$

а λ^* - некоторое заданное число.

Координаты точки y^{κ} вычислим по формуле:

$$y^{\kappa} = x^{\kappa} + \nu^{(\kappa)} S^{\kappa}, \quad (11)$$

где $\nu^{(\kappa)} = \lambda^{(\kappa)}$.

Очевидно

$$f(y^{\kappa}) = f(x^{\kappa}) + \nu^{(\kappa)} m.$$

Построенная таким образом точка y^{κ} принадлежит множеству R' в силу условий (8) - (10), и при этом $f(y^{\kappa}) > f(x^{\kappa})$.

Если для всех $i = \ell+1, \dots, m$ при подстановке координат точки y^{κ} выполнены равенства (4), то $y^{\kappa} \in R$, тогда положим

$$x^{\kappa+1} \equiv y^{\kappa}.$$

Если же $y^{\kappa} \notin R$, т.е. хотя бы для одного $i (i = \ell+1, \dots, m)$ $f_i(y^{\kappa}) \neq 0$, то переходим к этапу непосредственного построения точки $x^{\kappa+1}$.

Обозначим

$$\mathcal{F}(x) = - \sum_{i=\ell+1}^m f_i^2(x). \quad (12)$$

Рассмотрим множество R_{κ}'' , определяемое условиями (2) - (3) и неравенством

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \geq f(y^k). \quad (13)$$

Пусть $M_k = \max F(x)$ для $x \in R_k''$.

Если $M_k = 0$, то любая точка $\tilde{x}^k \in R_k''$, для которой $F(\tilde{x}^k) = 0$, очевидно, удовлетворяет уравнениям (4), и, следовательно, $\tilde{x}^k \in R$. В этом случае положим $x^{k+1} \equiv \tilde{x}^k$. Заметим, что при этом, в силу условия (13),

$$f(x^{k+1}) \geq f(y^k) > f(x^k).$$

Если $M_k < 0$, то это означает, что не существует ни одной точки $x \in R_k''$, для которой выполняются равенства (4), т.е. множества R и R_k'' не имеют общих точек.

В этом случае в равенстве (11) положим $v^{(k)} = \theta \lambda^{(k)}$ ($0 < \theta < 1$).

Вновь построенная точка $y^k(\theta)$, очевидно, также принадлежит множеству R' , но

$$f(y^k(\theta)) < f(y^k).$$

Из анализа возможных случаев, аналогичного приведенному выше, вытекает, что могут представиться два случая.

1. Существует число θ такое, что соответствующее значение $M_k(\theta) = 0$, тогда можно построить точку x^{k+1} , отличную от точки x^k и такую, что $f(x^{k+1}) > f(x^k)$.

2. При всех $\theta > 0$ получающееся значение $M_k(\theta) < 0$.

Так как

$$y^k(0) = x^k,$$

то процесс считается законченным и точка x^k - искомым решением задачи.

Переходя к описанию реализации изложенного выше способа, следует отметить, что в общей постановке решение задачи отыскания $M_k = \max F(x)$ на выпуклом множестве R_k'' наталкивается на весьма значительные трудности, связанные с наличием локальных экстремумов функции $F(x)$.

Однако результаты проведенных исследований специфики разбираемой в данной заметке задачи позволяют надеяться, что в этом случае функция $F(x)$ является такой, что при достаточно

малых $\nu^{(\kappa)}$ /см. (11)/метод градиентного спуска приводит к нахождению величин μ_κ .

Величины $\nu^{(\kappa)}$ регулируются соответствующим выбором числа λ^* . Начальная точка последовательности

$$x^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

определяется некоторым известным номинальным режимом работы установки.

Решение задачи выбора направления S^κ в каждой из точек последовательности $\{x^\kappa\}$, т.е. задачи линейного программирования (6) - (7), находится модифицированным симплексным методом.

После построения вспомогательной точки y^κ для нахождения величины μ_κ и соответствующего вектора \tilde{x}^κ используется метод градиентного спуска с конечным шагом. Возникающая на каждом этапе этого процесса задача линейного программирования, связанная с выбором направления /аналогичная задаче (6)-(7)/, также решается симплексным методом. Максимально допустимая длина шага $\mu_{\text{лин}}$ на каждом этапе определяется из требования принадлежности конечной точки множеству R''_κ . Кроме того, при выборе шага учитывается возможность существования на отрезке $[0, \mu_{\text{лин}}]$ вдоль избранного направления локальных максимумов функции $\mathcal{F}(x)$.

В заключение приводится пример решения задачи вида (1)-(4) изложенным выше способом.

Пример.

Пусть $f(x) = x_1 + x_2 + x_3 - x_4$.

Множество R определяется следующими условиями:

$$0 \leq x_1 \leq 2,$$

$$0 \leq x_2 \leq 3,$$

$$0 \leq x_3 \leq 3,$$

$$0 \leq x_4 \leq 3,$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4,$$

$$f_1(x) = x_1^2 - 3x_1 + x_2 = 0,$$

$$f_2(x) = x_3^2 + x_3 + x_4^2 - 3x_4 = 0$$

$$x^0 = (1, 2; 1, 2), \quad \lambda^* = \frac{1}{4}.$$

Задача выбора оптимального направления в точке x^0 имеет вид

$$\max (S_1 + S_2 + S_3 - S_4)$$

при условиях

$$S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = 0,$$

$$-1 \leq S_j \leq 1 \quad (j=1,2,3,4).$$

Решением этой задачи является вектор

$$S^0 = (1, 1, 1, -1).$$

Так как $m = \sum_{j=1}^4 c_j S_j^0 = 4 \neq 0$, то вдоль направления S^0 находим шаг $\lambda^{(0)}$

$$\lambda^{(0)} = \min (\lambda_j, \lambda^*) = \frac{1}{4},$$

$$y^0 = x^0 + \lambda^{(0)} S^0 = \left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right), \quad f(y^0) = 3.$$

Так как $y^0 \in R$, то переходим к построению точки x^1 .

$$F(x) = -(x_1^2 - 3x_1 + x_2)^2 - (x_3^2 + x_3 + x_4^2 - 3x_4)^2.$$

Множество R_0'' определяется условиями:

$$0 \leq x_1 \leq 2,$$

$$0 \leq x_2 \leq 3,$$

$$0 \leq x_3 \leq 3,$$

$$0 \leq x_4 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \geq 3.$$

Решением задачи $\max F(x)$, $x \in R_0''$ является вектор

$$\tilde{x}^0 = (1, 3; 2, 2; 1, 08; 1, 58).$$

При этом $M_0 = F(\tilde{x}^0) \approx 0$.

Таким образом, $x' \equiv \tilde{x}^0 = (1, 3; 2, 2; 1, 08; 1, 58), f(x') = 3$.

Аналогично находим

$$S^1 = (1, 1, 1, -1), \quad \lambda^{(1)} = 0, 25,$$

$$y^1 = (1, 55; 2, 45; 1, 33; 1, 33), \quad f(y^1) = 4.$$

Множество R_1'' определяется условиями:

$$0 \leq x_1 \leq 2,$$

$$0 \leq x_2 \leq 3,$$

$$0 \leq x_3 \leq 3,$$

$$0 \leq x_4 \leq 3,$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \geq 4.$$

Решением задачи $\max F(x)$, $x \in R_1''$ является вектор

$$\tilde{x}_1 = (2, 2, 1, 1), \text{ или } \tilde{x}_1 = (2, 2, 0, 0),$$

$$\mu_1 = F(\tilde{x}_1) = 0,$$

$$x^2 = \tilde{x}_1 = (2, 2, 1, 1), \quad f(x^2) = 4.$$

Далее имеем

$$s^2 = (0, 1, 0, -1), \quad \lambda^{(2)} = 0,25;$$

$$y^2 = (2; 2,25; 1; 0,75), \quad f(y^2) = 4,5.$$

Множество R_2'' определяется условиями:

$$0 \leq x_1 \leq 2,$$

$$0 \leq x_2 \leq 3,$$

$$0 \leq x_3 \leq 3,$$

$$0 \leq x_4 \leq 3,$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4,$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \geq 4,5$$

Решая задачу $\max F(x)$, $x \in R_2''$, убеждаемся в том, что

$$\mu_2 < 0.$$

Полагая $y^2(\theta) = x^2 + \theta \lambda^{(2)} s^{(2)}$, $0 < \theta < 1$, находим, что для любого $\theta > 0$

$$\mu_2(\theta) < 0.$$

Поэтому $x^2 = (2, 2, 1, 1)$ является искомым решением задачи.

Л и т е р а т у р а

Г.Зойтендейк, Методы возможных направлений. ИЛ, М., 1963.

М.И.Москаленко, Н.С.Коцеева

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ВАРИАНТА
РАССТАНОВКИ РЫБОЛОВЕЦКИХ СУДОВ ПО РАЙОНАМ
ПРОМЫСЛА В ТЕЧЕНИЕ ГОДА

Важным внутрипроизводственным резервом роста уловов рыбы и повышения производительности труда в рыбной промышленности является правильное, экономически обоснованное размещение судов по районам промысла.

Размещение рыболовного флота по районам промысла зависит от многих факторов. Прежде всего от производительности промысла, которая подвержена значительным колебаниям как между отдельными районами, так и в каждом из них по периодам.

Если при решении вопроса о расстановке судов иметь в виду только производительность, то для получения наилучших результатов работы флотилии следовало бы весь флот сосредоточить в одном каком-нибудь районе. Однако этого сделать нельзя, поскольку необходимо учитывать размер сырьевых запасов, участие в промысле флотилий других организаций и стран и возможность размещения в одном районе одновременно большого количества судов. Перенасыщение районов промысла флотом может привести к нарушению правил рыболовства и к снижению производительности. В связи с этим возникают ограничения по количеству судов, которые могут одновременно находиться в каждом районе.

Размещение судов по районам зависит и от видового состава уловов. Дальнейшее улучшение ассортимента рыбопродукции предполагает расширение видового состава уловов и пополнение его более ценными в пищевом отношении видами рыб.

Большое значение имеет географическое положение районов, в которых размещаются суда.

Не следует забывать и такие факторы, как периодичность ремонта, мощность и пропускную способность судоремонтных предприятий. Сроки ремонта и его продолжительность регламентируются правилами технической эксплуатации. Всякое отступление от установленных сроков может отразиться на техническом состоянии судов. В то же время ограниченные возможности судоремонтных предприятий не позволяют осуществлять одновременно ремонт большого количества судов, так как это может привести к нарушению ритмичности в работе самих предприятий и к простоям судов в ожидании постановки в ремонт или непосредственно в ремонте. По этим причинам нельзя на периоды спада производительности промысла планировать максимальное количество ремонтов и наоборот.

В силу этого возникает необходимость введения ограничений по количеству судов, которые могут одновременно находиться в ремонте.

И, наконец, одной из предпосылок размещения рыболовного флота по районам промысла является необходимость обеспечения потребности рыбообрабатывающих предприятий в сырье для наиболее полного использования производственных мощностей.

Неравноценность отдельных районов по их географическому положению (удаленность от береговых баз), по производительности и сезонности промысла, а также по видовому составу требует составления планов с таким сочетанием факторов, чтобы улов рыбы был максимальным. Для этого необходимо вручную перебрать множество графиков расстановки судов, что при существующей методике планирования оказывается невозможным.

В практике эффективность расстановки судов определяется на основании качественного анализа и очень редко — сравнения нескольких возможных вариантов. Поэтому принимаемые промышленностью планы не являются научно обоснованными и тем более оптимальными.

Построение оптимальных планов может быть осуществлено лишь с применением математических методов и электронно-вычислительных машин.

Первоначально в Лаборатории экономико-математических исследований (ЛЭМИ) Института экономики и организации промышленного производства Сибирского отделения АН СССР была разработана методика определения оптимального варианта размещения рыболовных судов по районам промысла вручную.

В соответствии с разработанной методикой охарактеризованы выше условия и факторы размещения судов по районам промысла позволяют сформулировать следующую задачу оптимального планирования.

Известны районы промысла, их производительность и видовой состав объектов промысла по месяцам. Задана продолжительность переходов из порта до районов промысла и обратно, период нахождения на промысле.

Известна расстановка судов на начало года.

Каждое судно в течение года может использоваться по одному из $A_h^3 + 3A_h^2 + A_h$ возможных вариантов расстановки, где

h - число районов промысла;

A_h^k - число возможных вариантов расстановки, при условии посещения судном k различных районов промысла и $k = (1, 2, 3)$.

В практических расчетах это число вариантов сокращается за счет того, что известна расстановка судов на начало года. Для определенных судов существуют запреты на лов рыбы в определенные периоды года в тех или иных районах.

Постановка задачи аналогична основной задаче линейного программирования.

В формализованном виде она может быть записана так.

Даны вещественные числа $a_{ij}^k, b_i,$

$i = (1, \dots, p, p+1, \dots, n); \quad j = (1, \dots, z_k),$

$k = (1, \dots, m).$

Определить $\bar{x} = \{x_j^k\} = \{x_i^0$

размерности $\sum_{\kappa=1}^m z_{\kappa}$ такой, что величина $\sum_{\kappa} \sum_j a_{ij}^{\kappa} x_j^{\kappa}$ достигает \max при условиях:

$$\sum_{\kappa} \sum_j a_{ij}^{\kappa} x_j^{\kappa} \geq b_i; \quad i = (2, \dots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{z_{\kappa}} x_j^{\kappa} \leq 1; \quad \kappa = (1, \dots, m)$$

Здесь $\kappa = (1, \dots, m)$ - количество судов;

$j = (1, \dots, z_{\kappa})$ - количество вариантов расстановок κ -го судна по районам промысла;

$i = (2, \dots, n)$ - число различных ограничений;

$i = (2, \dots, n)$ - число различных ограничений;

α_{ij}^{κ} - общий улов рыбы κ -го судна по j -му варианту расстановки;

α_{ij}^{κ} ($i = 2, \dots, \rho$) - улов i -го вида рыбы κ -м судном по j -му варианту;

α_{ij}^{κ} ($i = \rho + 1, \dots, n$) - интенсивность нахождения κ -го судна по j -му варианту в i -й запрещенной ситуации, $\alpha_{ij}^{\kappa} = 0$ или 1.

Под запрещенной ситуацией понимается такое положение, когда судно находится в некотором районе промысла в то время, когда там может вести лов не более определенного количества судов.

b_i ($i = 2, \dots, \rho$) - ограничения по вылову i -го вида рыбы,

b_i ($i = \rho + 1, \dots, n$) - ограничения на количество судов, которые одновременно могут находиться в запрещенной ситуации.

Следует заметить, что вещественные числа α_{ij}^{κ} экономический смысл которых разъясняется выше, не заданы. Известны лишь данные, по которым следует считать их величину.

К ним относятся:

$C_{i'}^{\kappa}$ ($i' = 1, 2, 3$) - данные о κ -м судне;

C_i^{κ} - дата выхода из порта κ -го судна;

- C_2^K - дата начала ремонта K -го судна;
 C_3^K - продолжительность ремонта;
 $d_{j'e'}$ - географические данные о районе, $j' = (1, \dots, k)$
 $e' = (1, \dots, 5)$;
 $d_{j',1}$ - продолжительность перехода от порта до j' -го района промысла;
 $d_{j',2}$ - продолжительность лова в j' -м районе;
 $d_{j',3}$ - продолжительность разгрузок на плавбазах в j' -м районе;
 $d_{j',4}$ - продолжительность перехода от j' -го района до порта;
 $d_{j',5}$ - продолжительность нахождения в порту после посещения j' -го района;
 $f_{j',\kappa'}$ - данные о дневной производительности j' -го района по i' -му виду рыбы в κ' -м месяце;
 $i' = (2, \dots, \rho)$ $\kappa' = (1, \dots, 12)$ $j' = (1, \dots, k)$;
 $f_{j',\kappa'}^1$ - данные о дневной производительности по общему вылову рыбы;
 λ - продолжительность профилактического ремонта после каждого рейса.

Таким образом, на фоне основной задачи о нахождении оптимального плана расстановки судов ставится задача подсчета компонент векторов-способов a_{ij}^K

Постановка задачи о размещении судов аналогична основной задаче производственного планирования, кроме ограничений вида:

$$\sum_{j=1}^{2K} x_j^K \leq 1,$$

которые назовем ограничениями на интенсивность использования групп способов.

Подобные задачи решаются методом последовательного улучшения плана на ЭВМ по программе, составленной Р.А.Звягиной.

В соответствии с этой программой в память машины должны быть записаны все компоненты (способы-векторы) a_{ij}^K , из которых затем выбираются удовлетворяющие условиям оптимальности реше-

шения.

В задаче по расстановке судов компоненты a_{ij}^k рассчитываются по исходным данным. Для этого была составлена дополнительно программа-приставка (\mathcal{N}). Блок-схема этой программы приведена в приложении.

При большой размерности задачи количество компонент a_{ij}^k достигает нескольких тысяч, для подсчета и записи которых требуется много времени и места в памяти машины.

Поскольку при решении задач методом последовательного улучшения программа привлекает не все сразу компоненты, а в требуемой последовательности, то одновременное хранение всех способов в памяти машины необязательно. Это расширяет возможности использования данной программы при решении задач большой размерности.

Осуществляется это следующим образом: на каждом этапе работы основной программы мы обращаемся к программе-приставке для подсчета необходимых компонент для способа.

Как видно из постановки задачи, она носит целочисленный характер. Поэтому в результате решения должен получиться план с m равными единице компонентами. Смысл компонент заключается в том, что k -е судно используется только по одному из возможных вариантов, использование всех остальных вариантов для судна равно нулю.

По условию в задаче имеется $m + n$ ограничений, поэтому вектор - план должен содержать также $m + n$ ненулевых компонент. Все компоненты вектора - плана x_{ij}^k делятся на m групп, в каждую из которых входит z_k $k = (1, \dots, m)$ компонент. Из этих групп не более чем в n получаются дробные компоненты.

Так как мы решаем целочисленную задачу, т.е. $x_{ij}^k = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, то вектор \bar{x} должен содержать m не равных нулю целочисленных компонент, равных единице. Это позволяет судить, по какому варианту используется каждое судно.

Не менее чем в $m - n$ группах такие компоненты получают и будут иметь такой смысл. В остальных n группах доведение до целочисленности ведется вручную. Из отличных от нуля компонент в каждой группе выбирается наибольшая, и величина ее принимается равной 1, остальные компоненты приравниваются нулю.

Таким образом, получается вектор $\vec{x} = \{x_{ij}^k\}$, компоненты которого равны 0 или 1 и характеризуют интенсивность использования K -го судна по j -му варианту расстановки.

Полученный в результате решения оптимальный план дает лишь расстановку судов по районам промысла. Для того, чтобы иметь полное представление о происходящем процессе, необходимо рассмотреть результаты работы флотилии по окончательному плану.

Вспомогательная программа-приставка, осуществляющая эти расчеты, выдает:

- 1 сведения об общем улове флотилии за год,
- 2 видовой состав полученного объема добычи,
- 3 уловы каждого судна в течение года и по каждому месяцу.

Такие сведения необходимы в практической работе рыбодобывающих организаций.

Задача по расстановке судов рассматривалась на один год. Поэтому получаемый в результате решения план является оптимальным лишь с позиций одного года. Это в известной мере является недостатком такого подхода к решению, так как общий максимум при решении задачи на длительный период не совпадает с суммой частных максимумов.

Однако постановке такой задачи на более длительный период в настоящее время препятствует отсутствие удовлетворительной методики прогнозирования сырьевой базы на длительный срок.

При наличии данных о производительности промысла на 3-5-летний период в принципе возможно рассмотрение и постановка такой задачи в динамическом аспекте.

А.Б.Горстко

О КИБЕРНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВА

Современное высокоразвитое производство с каждым днем требует все более совершенного управления. Осуществить это оптимальное управление без применения точных математических методов уже не представляется возможным. В настоящей работе делается попытка построения весьма упрощенной модели, исследование которой тем не менее помогает понять некоторые особенности задач этого класса.

Итак, будем рассматривать задачу управления производством, производящим некоторый однородный продукт. Предполагается, что объем производства есть кусочно-линейная функция времени $y(t)$. Управление, т.е. выбор того или иного режима работы, и спрос на произведенный продукт осуществляются, соответственно, в моменты $t_0 < t_1 < \dots < t_N$ и $t^1 < t^2 < \dots < t^2$. Спрос в i -й момент удовлетворяется за счет продукта, производимого за время (t^{i-1}, t^i) . Неудовлетворение его приводит к издержкам, равным $\alpha_1 (x^i - \int_{t^{i-1}}^{t^i} y(t) dt)^2$, где x^i - величина спроса в момент t^i .

Избыток продукта над спросом ведет к издержкам $\alpha_2 (x^i - \int_{t^{i-1}}^{t^i} y(t) dt)^2$.

При заданном режиме работы затраты на изменение объема производства за единицу времени составляют $\alpha_3 / y'(t)$, переход же с одного режима на другой связан с фиксированными издержками α_4 .

Ставится задача об оптимальном управлении объемом производства, т.е. отыскивается кусочно-линейная функция $y(t)$, дающая

минимум функционалу

$$\sum_{i=1}^z \Phi(t^i) + \alpha_3 \int_{t_0}^{t_N} |y'| dt + \alpha_4 K, \quad (1)$$

где

$$\Phi(t^i) = \begin{cases} \alpha_1 (x^i - \int_{t^{i-1}}^{t^i} y(t) dt)^2, & \text{если } x^i \geq \int_{t^{i-1}}^{t^i} y(t) dt; \\ \alpha_2 (x^i - \int_{t^{i-1}}^{t^i} y(t) dt)^2, & \text{если } x^i < \int_{t^{i-1}}^{t^i} y(t) dt; \end{cases}$$

K - количество переходов с одного режима работы на другой, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ - заданные константы.

Прежде чем приступить к решению задачи, поясним функциональную роль параметров. Увеличение α_1 ведет к тому, что все большая часть ломаной будет находиться выше точек x^i (увеличение α_2 создает обратную тенденцию), увеличение α_3 делает ломаную линию более пологой.

Рост α_4 уменьшает количество переходов с одного режима на другой. Соответственно, уменьшение какого-нибудь параметра при фиксированных значениях остальных производит обратный эффект.

Охарактеризовав качественно влияние изменения параметров на вид искомой ломаной, перейдем к более точному количественному анализу.

Введем последовательность функций $\{F_K(T)\}$, называемых в дальнейшем управляющими функциями.

$F_K(T)$ - минимальные издержки за время T ($T = t_1, t_2, \dots, t_N$) при условии, что функция $y(t)$ имеет в точности K изломов.

Начнем с отыскания функции $F_0(T)$.

Соответствующее ей $y(t)$ имеет уравнение

$$y = (y_T - y_0) \frac{t}{T} + y_0, \quad (2)$$

где y_0 и y_T , соответственно, начальный и конечный объемы производства, предполагаемые заданными (t_0 полагаем равным 0). Для всех t^i определяем величины $x^i - y(t^i)$. Функция $F_0(T)$ определяется следующей формулой:

$$F_0(T) = \alpha_1 \sum_{i \in J_1} (x^i - \int_{t^{i-1}}^{t^i} y(t) dt)^2 + \alpha_2 \sum_{i \in J_2} (x^i - \int_{t^{i-1}}^{t^i} y(t) dt)^2 + \alpha_3 |y_T - y_0| \quad (3)$$

$$\left(\begin{array}{l} i \in J_1, \text{ если } x^i \geq \int_{t^{i-1}}^{t^i} y(t) dt \\ i \in J_2, \text{ если } x^i < \int_{t^{i-1}}^{t^i} y(t) dt \end{array} \right)$$

Перейдем теперь к определению $F_i(T)$. Это можно сделать на основании принципа оптимальности, сформулированного Р. Беллманом: "Оптимальное поведение обладает тем свойством, что, каковы бы ни были первоначальное состояние и решение в начальный момент, последующие решения должны составлять оптимальное поведение относительно состояния, получающегося в результате первого решения". Примененный к первым двум членам последовательности управляющих функций этот принцип позволяет записать следующее соотношение:

$$F_i(T) = \min_{\substack{\{x\} \\ \{y(x)\}}} \left\{ d_1 \sum_{i \in J_1} (x^i - \int_{t^{i-1}}^{t^i} y(t) dt)^2 + d_2 \sum_{i \in J_2} (x^i - \int_{t^{i-1}}^{t^i} y(t) dt)^2 + d_3 |y_T - y(x)| + d_4 + F_0(x) \right\} \quad (4)$$

Рассуждая аналогично, получим

$$F_k(T) = \min_{\substack{\{x\} \\ \{y(x)\}}} \left\{ d_1 \sum_{i \in J_1} (x^i - \int_{t^{i-1}}^{t^i} y(t) dt)^2 + d_2 \sum_{i \in J_2} (x^i - \int_{t^{i-1}}^{t^i} y(t) dt)^2 + d_3 |y_T - y(x)| + d_4 + F_{k-1}(x) \right\} \quad (5)$$

Обсудим теперь, как из рекуррентных соотношений (5) можно численно определить экстремаль функционала (1).

Из-за наличия в (5) слагаемого d_4 можно гарантировать, что, начиная с некоторого N , $F_k(T) > F_N(T)$ при $k > N$ (это означает, что искомая ломаная линия имеет лишь конечное число изломов). Управляющие функции вычисляются одна за другой вплоть до номера N при всех $T = t_1, t_2, \dots, t_N$. Для отыскания минимума строится двумерная \mathcal{E} -сеть, и значения функций в ее узлах сравниваются между собой. После того как вычислены все необходимые управляющие функции, осуществляется так называемый "обратный ход", во время которого отыскиваются точки $(t_i, y(t_i))$, соответствующие изломам искомой ломаной линии. Найдя все точки изломов и зная начало и конец ломаной, задачу можем считать решенной. Трудность состоит в том, что а priori нельзя указать область изменения $y(t_i)$. Зачастую здесь спасает лишь метод "проб и ошибок". Впрочем, иногда по величинам па-

параметров задачи можно установить примерные границы этой области.

До сих пор мы предполагали, что величины x^i детерминированы. Как правило же, спрос носит вероятностный характер. Будем считать, что в момент t^i величина спроса x есть случайная величина с плотностью вероятности $\varphi_i(x)$. Минимизируется теперь математическое ожидание издержек за время от 0 до t_N .

На этот раз в качестве управляющих введем функции $\tilde{F}_K(T)$ - минимум математического ожидания издержек за время T при условии, что график объема производства содержит точно K изломов.

Те же соображения, что и раньше, дают возможность вновь получить рекуррентные соотношения для управляющих функций

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{F}_0(T) = \alpha_1 \sum_{i=1}^z \int_{a_i}^{\infty} \int_{t^{i-1}}^{t^i} (x^i - \int y(t) dt)^2 \varphi_i(x) dx + \alpha_2 \sum_{i=1}^z \int_{-\infty}^{a_i} \int_{t^{i-1}}^{t^i} (x^i - \int y(t) dt)^2 \varphi_i(x) dx + \alpha_3 |y_T - y_0| \\ \dots\dots\dots (6) \\ \tilde{F}_K(T) = \min_{i > x} \left\{ \alpha_1 \sum_{i=1}^z \int_{a_i}^{\infty} \int_{t^{i-1}}^{t^i} (x^i - \int y(t) dt)^2 \varphi_i(x) dx + \alpha_2 \sum_{i > x}^z \int_{-\infty}^{a_i} \int_{t^{i-1}}^{t^i} (x^i - \int y(t) dt)^2 \varphi_i(x) dx + \right. \\ \left. + \alpha_3 |y_T - y(x)| + \alpha_4 + \tilde{F}_{K-1}(x) \right\}, \end{array} \right.$$

где $x = 0, t_1, \dots, t_N$; $a_i = \int_{t^{i-1}}^{t^i} y(t) dt$

Замечание. Для вычислительных целей плотности вероятности $\varphi_i(x)$ в (6) могут быть заменены дискретным набором вероятностей $P_1^i, P_2^i, \dots, P_K^i$. Интегралы заменяются тогда на суммы и вычислительная схема ничем, по сути, не отличается от детерминированного случая.

Рассмотрим теперь небольшой пример, иллюстрирующий метод решения поставленной задачи.

Пусть $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1$ и $\alpha_4 = 5$. $x^0 = 1$, $x^1 = 2$, $x^2 = 3$, $x^3 = 1$ и $x^4 = 2$. Предположим также, что моменты спроса и управления производством совпадают. Будем искать ломаную (для простоты с вершинами в целых точках) такую, которая доставляет минимум функционалу (1).

Следуя описанному алгоритму, вычисляем значения управляющих функций в точках 0, 1, 2, 3, 4. Эти вычисления могут быть пре-
кращены уже на функции $F_2(T)$, так как можно заметить, что при данных значениях параметров α_i искомая ломаная не может иметь более двух изломов. Точнее, оказывается, что она имеет в точности один излом в точке (1, 3). Экстремальная ломаная (в

классе ломаных с целыми вершинами) приведена на рис.1, где звездочками отмечены значения x^i .

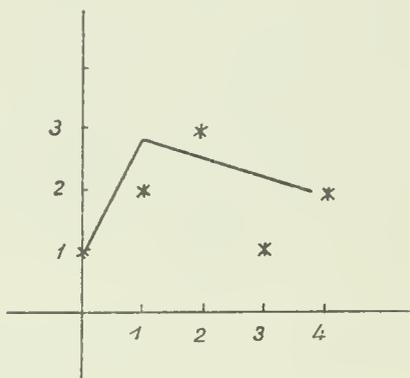


Рис. 1

Л и т е р а т у р а

1. Р.Беллман. Динамическое программирование.
2. Ст.Бир. Кибернетика и управление производством.
3. *R.Bellman and S.Dreyfus*
Applied Dynamic Programming.

Автор выражает благодарность В.А.Булавскому и Э.О.Рапопорту, советы которых способствовали выполнению данной работы.

Н.Б.Мироносецкий

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Ставится задача: над каждым объектом \mathcal{D}_i из множества $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_m$ выполнить последовательность операций $O_{\xi_i}^i, O_{\xi_i+1}^i, \dots, O_{\mathcal{H}_i}^i$ в заданные календарные сроки $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ так, чтобы выполнение всех операций $O_{\omega_i}^i$ на заданном множестве агрегатов S_1, S_2, \dots, S_n занимало минимальный интервал времени. Задача может решаться на интервале времени $[\mathcal{D}_0, \mathcal{D}]$, где \mathcal{D} сначала предполагается достаточно большим для того, чтобы заведомо над всеми объектами \mathcal{D}_i $i = 1(1)m$ были выполнены все операции $O_{\omega_i}^i$ $\omega_i = \xi_i(1)\mathcal{H}_i$ в интервале времени $[\mathcal{D}_0, \mathcal{D}]$

Введем некоторые определения.

Упорядоченную последовательность операций $O_1^i, O_2^i, \dots, O_{\xi_i}^i, \dots, O_{\mathcal{H}_i}^i$ объекта \mathcal{D}_i назовем технологической последовательностью объекта \mathcal{D}_i .

Пакетом деталей назовем совокупность одинаковых деталей, при обработке которых выполняется условие: если на агрегате S_k началось выполнение операции O_p^i хотя бы одной детали из пакета, то до момента окончания выполнения операции O_p^i всех деталей данного пакета агрегат S_k ничем занят быть не может.

В дальнейшем под объектом \mathcal{D}_i будем понимать пакет дета-

лей \mathcal{D}_i , и так как один пакет могут образовывать, по определению, только детали с одной и той же технологической последовательностью и с одной и той же очередной операцией, то можно говорить о технологической последовательности пакета. В необходимых случаях будет сделано различие между технологической последовательностью пакета и технологической последовательностью деталей, образующих пакет.

Каждая операция $O_{\omega_i}^i$, $\omega_i = 1(1)H_i$, $i = 1(1)m$ из технологической последовательности задается временем выполнения операции $t_{\omega_i}^i$ и технологическим номером агрегата \mathcal{N}_S , на котором по технологии должна происходить операция $O_{\omega_i}^i$. Очевидно, что задача имеет смысл только в том случае, если для каждой $O_{\omega_i}^i$, $i = 1(1)m$, при $\xi_i \leq \omega_i \leq H_i$ имеется хотя бы один агрегат с технологическим номером \mathcal{N}_S в списке агрегатов S_1, \dots, S_n .

Каждому агрегату S_κ , $\kappa = 1(1)n$ приписывается пятерка чисел: λ_κ , K_κ , A_κ , \mathcal{N}_S , \mathcal{N}_Z , где

λ_κ - сменность агрегата, $\lambda_\kappa = 1, 2, 3$ для односменных, двухсменных и трехсменных агрегатов соответственно;

$K_\kappa = \frac{F_\kappa}{F_\kappa^0}$ - коэффициент переработки норм, F_κ - фактическая производительность агрегата, F_κ^0 - производительность агрегата по норме;

A_κ - время освобождения агрегата от предыдущей операции. В начале планируемого периода $A_\kappa = A_\kappa^0 \geq \mathcal{D}^0$.
Правило подсчета A_κ в процессе решения задачи будет дано ниже;

\mathcal{N}_S - технологический номер агрегата. Взаимозаменяемые агрегаты имеют одинаковые технологические номера;

\mathcal{N}_Z - порядковый номер агрегата или номер рабочего места.

Каждому пакету \mathcal{D}_i , $i = 1(1)m$ приписывается шестерка чисел: τ_i , ν_i , ξ_i , $B_i^{\xi_i-1}$, \mathcal{N}_∂ , \mathcal{N}_n , где

τ_i - календарный срок выпуска пакета. Все операции технологической последовательности $O_{\xi_i}^i, \dots, O_{H_i}^i$ должны быть выполнены на интервале времени $[\mathcal{D}^0, \tau_i]$;

- ϱ_i - количество деталей образующих пакет \mathcal{D}_i , $\varrho_i \geq 1$;
- ξ_i - номер очередной операции из технологической последовательности. В начале планируемого периода $\xi_i = \xi_i^0$
 $1 \leq \xi_i^0 \leq \mathcal{H}_i$
- $B_i^{\xi_i-1}$ - календарное время окончания операции номер ξ_i-1 над последней деталью пакета \mathcal{D}_i . В начале планируемого периода $B_i^{\xi_i-1} = \max(\mathcal{D}_i^0, B_i^{\xi_i-1})$. Правило вычисления $B_i^{\xi_i-1}$, $\xi_i = \xi_i^0(1) [\mathcal{H}_i + 1]$ будет дано ниже;
- \mathcal{N}_n - порядковый номер пакета;
- \mathcal{N}_θ - технологический номер деталей, образующих пакет \mathcal{D}_i . Детали, имеющие одинаковые технологические номера \mathcal{N}_θ , имеют одинаковые технологические последовательности независимо от номеров пакетов \mathcal{N}_n , которые они образуют.

Заметим, что задача, сформулированная вначале, строго говоря, может не иметь решения, т.е. может случиться, что не существует последовательности обработки пакетов $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_m$ на агрегатах S_1, S_2, \dots, S_n , обеспечивающей выпуск пакетов в календарные сроки $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$. Будем понимать под решением задачи календарного планирования последовательность обработки пакетов на агрегатах, обеспечивающую, при соблюдении технологической последовательности,

$$\min \left[\sum_{i=1}^m L_i + \max_{i=1(1)m} B_i^{\mathcal{H}_i} \right],$$

где

$$L_i = \max(0, B_i^{\mathcal{H}_i} - \tau_i).$$

Последнее выражение можно изменить соответствующим образом, чтобы, например, назначать поощрение за досрочный выпуск пакета или штраф $R_i = f(\mathcal{D}_i)$ за опоздание с выпуском пакета \mathcal{D}_i .

Назовем нормированным циклом последовательной обработки пакета \mathcal{D}_i величину τ_i^H , определяемую формулой

$$\tau_i^H = e_i \frac{1}{7} \sum_{j=\xi_i^0}^{\xi_i} \frac{t_j^i}{\lambda_{\kappa} \kappa_{\kappa}}, \quad (1)$$

где t_j^i - время выполнения операции O_j^i . Операция O_j^i по технологии производится на агрегате S_{κ} .

Определим функцию приоритета $\Delta \tau_i$ пакета D_i .

$$\Delta \tau_i = \tau_i - \tau_i^H - B_i^{\xi_i^0 - 1} \quad (2)$$

В зависимости от функции приоритета $\Delta \tau_i$, пакетам D_1, D_2, \dots, D_m припишем индекс приоритета так, что для пакета с индексом ρ выполняется соотношение:

$$\Delta \tau_{\alpha}^{\rho} \leq \Delta \tau_{\beta}^{\rho + \mu} \quad (3)$$

α, β - любые из номеров $1, 2, \dots, m$.

$$\rho = 1(1)m, \quad \mu = 0(1)[m - \rho]$$

Агрегатам S_1, \dots, S_n также припишем индекс приоритета так, что агрегат с индексом ρ должен обладать свойством:

$$A_{\rho} \leq A_{\rho + \nu} \quad (4)$$

$$\rho = 1(1)n, \quad \nu = 0(1)[n - \rho]$$

Упорядочим множество пакетов D_1, D_2, \dots, D_m таким образом: $D_{\alpha_1}^1, D_{\alpha_2}^2, \dots, D_{\alpha_m}^m$, где верхние индексы являются индексами приоритета. Для удобства изложения в дальнейшем упорядоченное множество $D_{\alpha_1}^1, D_{\alpha_2}^2, \dots, D_{\alpha_m}^m$ будем обозначать D_1, D_2, \dots, D_m . Аналогично упорядочим по правилу (4) и переобозначим множество агрегатов S_1, S_2, \dots, S_n . Очевидно, что для любого агрегата S_{κ} из множества S_1, S_2, \dots, S_n выполняется хотя бы одно из четырех соотношений:

$$A_{\kappa} > D \quad (5)$$

$$A_{\kappa} \geq B_i^{\xi_i - 1} \text{ по крайней мере для одного } i \in C(N_S), \quad (6)$$

$$A_{\kappa} < B_i^{\xi_i - 1} \text{ для всех } i \in C(N_S), \quad (7)$$

$$C(N_S) \text{ пустое,} \quad (8)$$

где $[D^0, D]$ - календарный планируемый период ;

$C(N_S)$ - множество индексов пакетов с очередными операциями на агрегат S_K с технологическим номером N_S .

Процедура построения графика состоит в следующем. Для агрегата S_K $K = 1(1)n$ из упорядоченного множества S_1, S_2, \dots, S_n проверяется выполнение условий (5), (6), (7), (8), причем при каждом K индекс $i = 1(1)m$.

При выполнении хотя бы одного из условий (5), (8) для агрегата S_K , очевидно, необходимо переходить к аналогичной проверке условий (5), (6), (7), (8) для следующего S_{K+1} агрегата из S_1, S_2, \dots, S_n , что возможно, конечно, при условии $K \neq n$. Случай $K = n$ рассмотрен ниже. При выполнении условия (6) агрегат S_K загружается первым пакетом D_i ($i \in C(N_S)$) из упорядоченного по приоритету (3) множества D_1, D_2, \dots, D_m . Если выполняется условие (7), выбирается пакет $D_{\mu(K)}$, удовлетворяющий условию:

$$B_{\mu(K)}^{\xi_{\mu(K)}^{-1}} = \min_{p \in C(N_S)} (B_p^{\xi_p^{-1}}) \quad (9)$$

Затем выбирается пакет D_i со свойством:

$$B_{i(K)}^{\xi_{i(K)}^{-1}} = \min (B_{\mu(K)}^{\xi_{\mu(K)}^{-1}}, B_{\mu(K-1)}^{\xi_{\mu(K-1)}^{-1}}), \quad (10)$$

где $B_{i(1)}^{\xi_{i(1)}^{-1}} = B_{\mu(1)}^{\xi_{\mu(1)}^{-1}}$

Здесь индекс (K) означает, что пакет $D_{i(K)}$ выбран при попытке загрузить K станок, ниже для простоты изложения он опускается.

Пакет D_i , удовлетворяющий (10), становится на обработку на S_K агрегат, если выполняется хотя бы одно из соотношений:

$$\begin{cases} K = n \\ B_i^{\xi_i^{-1}} - A_{K+1} \leq 0 \end{cases} \quad (11)$$

При невыполнении соотношений (11) выбирается агрегат S_{k+1} для проверки условий (5), (6), (7), (8).

Предположим, что пакет D_i для обработки на агрегате S_k выбран.

Определим момент начала обработки T_H и момент конца обработки T_K .

Представим $t_H = \max(B_i^{\xi_i^{-1}}, \Delta_k)$ в виде:

$$t_H = \psi(t_H) + g(t_H), \quad (12)$$

где $\psi(t_H)$ - количество дней в календарной дате t_H ;

$g(t_H)$ - количество часов с дробными долями, до необходимой степени точности, в календарной дате t_H .

Аналогично представим:

$$T_H = \psi(T_H) + g(T_H),$$

где

$$\psi(T_H) = \begin{cases} \psi(T_H) & \text{при } g(t_H) < \lambda_k \cdot \psi(t_H) \\ \psi(T_H) + 1 & \text{при } g(t_H) \geq \lambda_k \cdot \psi(t_H) \end{cases}$$

$$g(T_H) = \begin{cases} g(t_H) & \text{при } g(t_H) < \lambda_k \cdot \psi(t_H) \\ 0 & \text{при } g(t_H) \geq \lambda_k \cdot \psi(t_H) \end{cases}$$

Тогда T_K - календарная дата окончания обработки последней детали пакета D_i на агрегате S_k в O_v^i операции находится по формуле

$$T_K = \psi(T_K') + g(T_K'), \quad (14)$$

в которой $g(T_K') = \{T_K'\} \cdot \lambda_k \cdot \psi(T_K')$, $\{T_K'\}$ - дробная часть T_K' .

Величина T_K' определяется из уравнения

$$\int_{T_H'}^{T_K'} \psi(t) dt = \frac{b_i t_v^i}{K_k \cdot \lambda_k}, \quad (15)$$

где
$$T_H' = \psi(T_H) + \frac{g(T_H)}{\lambda_K \cdot \psi(T_H)} ;$$

$\psi(t)$ - кусочно-постоянная функция, принимающая значения 7;6;0 на интервале $[\psi(t), \psi(t)+1]$ в зависимости от того, является ли день $\psi(t)$ рабочим, предпраздничным или нерабочим днем. Найдя T_K , полагаем новые значения A_K и $B_i^{\xi_i}$ равными $T_K = A_K = B_i^{\xi_i}$, оформляем график, пересчитываем индексы приоритета пакетов и агрегатов. Для пакета \mathcal{D}_i пересчитываем функцию приоритета:

$$\Delta \tau_i' = \Delta \tau_i - \frac{\tau_i^n}{21}, \quad (16)$$

где $\tau_i^n = T_H - B_i^{\xi_i^{-1}}$ выражено в часах, множитель $\frac{1}{21}$ выбран для нормировки.

Для пакетов, не поставленных на данном шаге на обработку, но очередные операции которых должны производиться на агрегатах с тем же технологическим номером \mathcal{N}_S ; что и у агрегата S_K , функция приоритета пересчитывается по формуле

$$\Delta \tau_j' = \Delta \tau_j - \frac{\tau_j^n}{21}, \quad (17)$$

где
$$\tau_j^n = A_{\mu} - B_j^{\xi_j^{-1}}$$

$$A_{\mu} = \min_{\nu \in \theta} (A_{\nu})$$

θ - множество индексов агрегатов из S_1, S_2, \dots, S_n с технологическим номером \mathcal{N}_S .

По новым значениям функции приоритета $\Delta \tau$ пересчитываем индекс приоритета. При пересчете индексов приоритета необходимо для экономии операций учитывать следующее: функция приоритета пакета увеличиться не может, и, следовательно, пакет при пересчете индекса приоритета не может переместиться назад в упорядоченном множестве $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_m$. Агрегат при пересчете индекса приоритета и упорядочении множества S_1, \dots, S_n не может переместиться вперед. Поскольку пересчет индексов приоритета необходимо выполнять после каждого акта загрузки агрегата, то использование упомянутого свойства дает существенную экономию

операций.

После пересчета индексов приоритета и упорядочения в соответствии с новыми индексами приоритета множеств $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_m$; S_1, \dots, S_n начинается новый такт загрузки проверкой соотношений (5) - (8) для агрегата $S_\kappa \quad \kappa = 1(1)n$.

График считается построенным, когда выполнено одно из условий:

$$\begin{aligned} & \text{I. } \xi_i = \mathcal{H}_i + 1 \quad \text{для всех } i = 1(1)m \\ & \text{II. } \min_{\xi_i < \mathcal{H}_i} (b_i^{\xi_i}) \geq \mathcal{D} \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим некоторые модификации алгоритма.

1. Пусть необходимо для агрегатов S_1, S_2, \dots, S_n в сроки $A_1^z, A_2^z, \dots, A_n^z, \mathcal{D}^0 \leq A_\kappa^z \leq \mathcal{D}$, $\kappa = 1(1)n$ предусмотреть плановый профилактический ремонт продолжительностью b_1, b_2, \dots, b_n дней. Для включения в график планового ремонта, после подсчета T_κ по формуле (14), необходимо проверить условие ремонта:

$$\begin{cases} A_\kappa \leq A_\kappa^z \\ T_\kappa > A_\kappa^z \end{cases} \quad (19)$$

Если условие (19) не выполнено, построение графика идет по описанному алгоритму. Если условие (19) выполнено, необходимо агрегат S_κ с момента времени T_H^z остановить на ремонт продолжительностью в b_κ дней.

Если $t_H \neq A_\kappa$, то

$$T_H^z = \begin{cases} A_\kappa^z & \text{при } A_\kappa^z + b_\kappa \leq T_H \\ \max(T_H - b_\kappa, A_\kappa) & \text{при } A_\kappa^z + b_\kappa > T_H \end{cases} \quad (20)$$

$$(21)$$

Если $t_H = A_\kappa$, то

$$T_H^z = \begin{cases} A_\kappa & \text{при } A_\kappa^z - A_\kappa < T_\kappa - A_\kappa^z \\ T_\kappa & \text{при } A_\kappa^z - A_\kappa \geq T_\kappa - A_\kappa^z \end{cases} \quad (22)$$

$$(23)$$

В том случае, если T_H^z получен по формуле (23) или по (20), то пакет \mathcal{D}_i , который был выбран для проведения операции, должен быть в этом же такте встроен в график, в противном случае необ-

ходимо пересчитать индекс приоритета агрегата, учитывая, что новый момент времени $A_K = T_K = T_H^z + \beta_K$, и начать новый такт загрузки. Если сроки $A_1^z, A_2^z, \dots, A_n^z$ заданы жестко и не допускают отклонений, то $T_H^z = A_K^z$ в любом случае. В график плановый профилактический ремонт агрегата удобно включать как обработку некоторой фиктивной операции.

2. Нестаночные операции, встречающиеся в технологической последовательности $O_1^i, O_2^i, \dots, O_{\xi_i}^i, \dots, O_{\eta_i}^i$, можно трактовать как операции на некоторых фиктивных агрегатах. Если характер операции таков, что ее можно начинать или она начинается сразу после окончания предыдущей операции, как, например, операция "старение", и начало операции не зависит от состояния фиктивного агрегата, на котором она должна совершаться, то "агрегат", на котором эта операция условно совершается, всегда имеет $A_K = A_K^0 = 0$. Это исключает пролеживание пакетов перед такими операциями. В остальных случаях для фиктивных агрегатов A_K пересчитывается обычным образом - по формуле (14).

3. По технологическим требованиям некоторые детали на определенных операциях должны обрабатываться совместно. Припишем каждой операции $O_{\omega_i}^i$ $\omega_i = 1(1) \eta_i$, $i = 1(1) m$, кроме времени выполнения операции $t_{\omega_i}^i$ и технологического номера агрегата N_S , на котором операция $O_{\omega_i}^i$ должна происходить, еще некоторое условное число N_C , означающее номер совместной обработки, и некоторое условное число n_C , означающее количество деталей с различными технологическими номерами N_D обрабатываемых в данную совместную обработку номер N_C . Номер совместной обработки N_C получается произвольной нумерацией всех случаев совместной обработки и присвоением $N_C = 0$ операциям, не обрабатываемым совместно. При проведении операции над пакетами необходимо учитывать, что в случае $N_C \neq 0$ для $O_{\omega_i}^i$ при любом $\omega_i = \xi_i^0(1) \eta_i$ операция $O_{\omega_i}^i$ не может быть начата до тех пор, пока не будут готовы для проведения операции с тем же номером совместной обработки N_C все n_C пакетов с различными технологическими номерами, но с одной и той же размерностью пакета ν_i . Все операции $O_{\omega_i}^i$ $\omega_i = 1(1) \eta_i$, $i = 1(1) m$ можно разбить на два класса: на операции, для которых $N_C = 0$, и на

операции, для которых $\mathcal{N}_c \neq 0$. При проверке условий (5) - (8) необходимо анализировать \mathcal{N}_c . При $\mathcal{N}_c = 0$ процедура загрузки агрегата \mathcal{S}_k продолжается по описанному алгоритму. Если $\mathcal{N}_c \neq 0$ для очередного пакета \mathcal{D}_ν , то $B_i^{\xi_i-1}$ для соотношений (6), (7) получается в результате выполнения следующей процедуры. Подсчитаем

$$\sum_{j=\nu}^m M(\mathcal{D}_j) = \gamma, \quad (24)$$

где

$$M(\mathcal{D}_j) = 1 \text{ если } (\varrho_j = \varrho_\nu) \wedge (\mathcal{N}_c(O_j^{\xi_j}) = \mathcal{N}_c(O_\nu^{\xi_\nu})) \wedge (\mathcal{N}_\alpha(j) \neq \mathcal{N}_\alpha(z))$$

при всех $z \in C(M(\mathcal{D}_\mu) = 1)$ (25)

$$M(\mathcal{D}_j) = 0 \text{ если } (\varrho_j \neq \varrho_\nu) \vee (\mathcal{N}_c(O_j^{\xi_j}) \neq \mathcal{N}_c(O_\nu^{\xi_\nu})) \vee (\mathcal{N}_\alpha(j) = \mathcal{N}_\alpha(z))$$

хотя бы при одном $z \in C(M(\mathcal{D}_\mu) = 1)$
 $z \neq \gamma$

$C(M(\mathcal{D}_z) = 1)$ - множество индексов пакетов, для которых $M(\mathcal{D}_z) = 1$ в соответствии с определением по условию (25);

\forall, \wedge - известные символы математической логики.

Если $\gamma = n_c$, то перед проверкой условий (6), (7) определяется

$$B_i^{\xi_i-1} = \max_{j \in C(M(\mathcal{D}_j) = 1)} B_j^{\xi_j-1} \quad (26)$$

При оформлении графика необходимо оформить данную совместную обработку всех деталей из $C(M(\mathcal{D}_j) = 1)$.

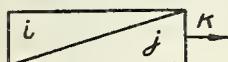
Если $\gamma \neq n_c$, то у пакета \mathcal{D}_ν не может начаться выполнение операции $O_\nu^{\xi_\nu}$, и необходимо переходить к $\mathcal{D}_{\nu+1}$ пакету для проверки условий (6), (7). Соотношение $\gamma > n_c$ говорит о том, что в исходной информации допущена ошибка. При $\gamma < n_c$ можно устроить процедуру "ускорения" необходимых пакетов, например, путем приписывания наибольшего приоритета из пакетов, индексы которых образуют множество $C(M(\mathcal{D}_j) = 1)$ пакетам, еще не подошедшим к данной совместной обработке. Но такое "ускорение" ведет к увеличению информации, так как возникает необходимость запоминать истинные индексы приоритета, которые должны быть восстановлены

после проведения данной совместной обработки.

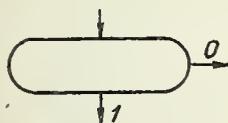
По данному алгоритму составлена программа на ЦВМ и производится составление календарных планов для некоторых машиностроительных цехов. Для облегчения чтения приводимой блок-схемы программы введены условные обозначения.



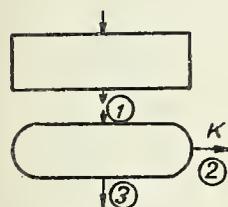
- блок останова. Комментарии описывают причину останова.



- стандартный блок передачи управления блоку номер $к$, с настройкой стандартного блока выхода номер i на передачу управления блоку номер j .



- логический блок. 0 - выход в случае ложности предложения, записанного в блоке; 1 - выход в случае истинности предложения.

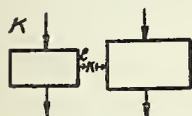


- функциональный блок. Назначение описано.

- блок организации цикла. ① - вход, ② - передача управления блоку номер $к$ в случае повторения цикла. ③ - выход по окончании цикла.



- стандартный блок выхода.



- передача управления из блока $к$ блоку $л$.

При составлении программы учитывалось то обстоятельство, что информация к задаче может быть разделена на а) постоянную информацию - информацию о технологических последовательностях и б) оперативную информацию - информацию о состоянии пакетов и агрегатов.

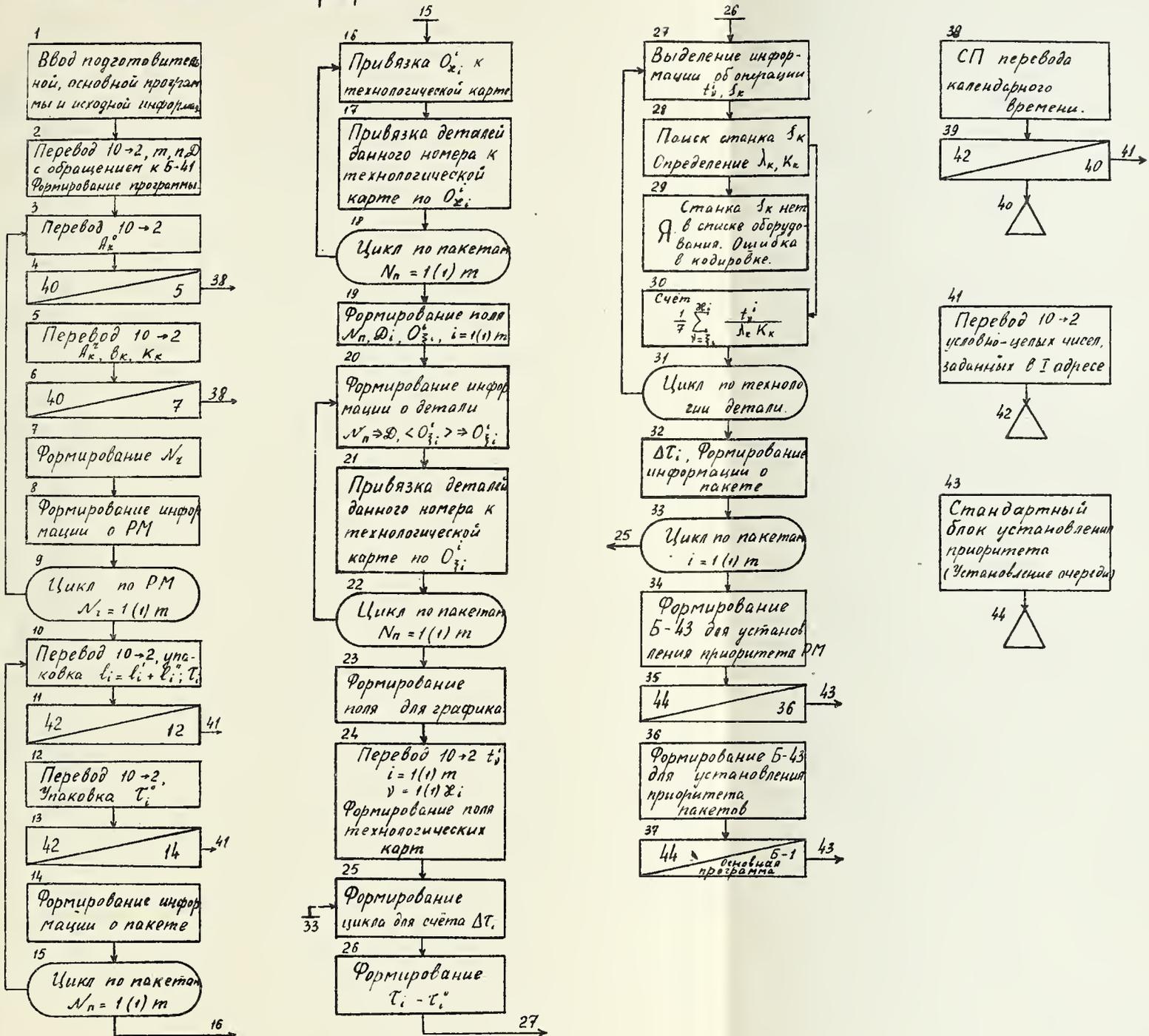
Такое разделение существенно уменьшает время подготовки задачи к решению, потому что обновлять обычно нужно только оперативную информацию. В случае изменения технологической последовательности деталей или появления новой технологической последовательности соответствующая корректура постоянной информации может быть произведена заранее. Все пакеты с одинаковой технологической последовательностью привязываются к одной технологической последовательности ради экономии памяти машины.

Программа состоит из трех последовательно работающих подпрограмм, блок-схемы которых приводятся под заголовками: "подготовительная подпрограмма", "основная подпрограмма", "подпрограмма вывода графика".

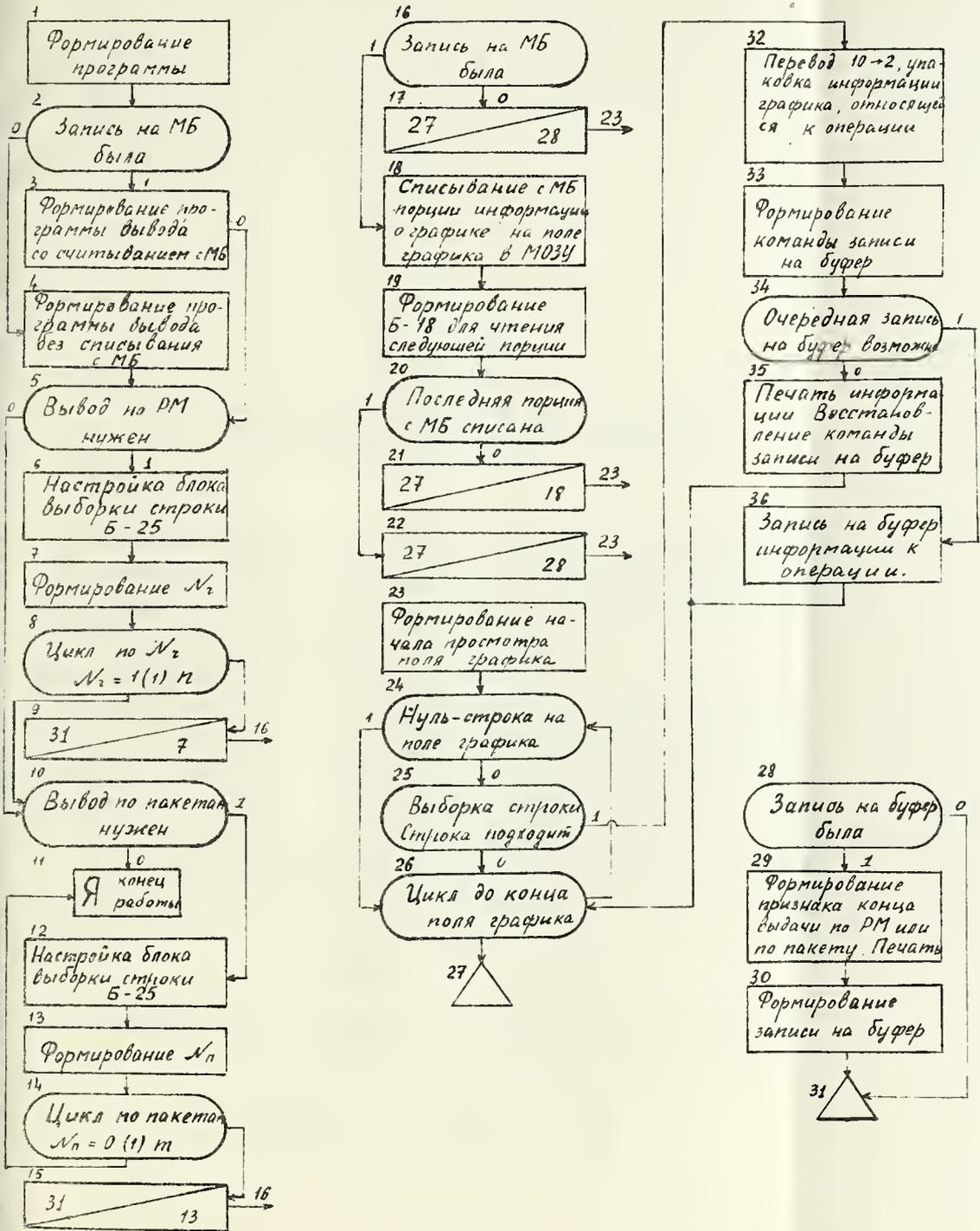
Подготовительная подпрограмма (рис.1) осуществляет присвоение пакетам номера пакета \mathcal{N}_n , агрегатам номера рабочего места \mathcal{N}_z , счет функции приоритета $\Delta \tau_i \quad i = 1(1)m$ и упорядочение множеств агрегатов S_1, S_2, \dots, S_n и пакетов $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_m$ в соответствии с условиями (3), (4). Основная подпрограмма (рис.2) состоит из двух подпрограмм: а) подпрограммы поиска детали и б) подпрограммы загрузки станка. Подпрограмма "а" выбирает в соответствии с критериями (5) - (11) пакет \mathcal{D}_i для обработки на агрегате S_k . В данной подпрограмме блоки 24-34 осуществляют выбор пакета в случае $\mathcal{N}_c \neq 0$. Подпрограмма "б" загружает агрегат S_k пакетом \mathcal{D}_i , пересчитывает индексы приоритета и готовит информацию для следующего такта загрузки. Подпрограмма вывода графика (рис.3) упорядочивает информацию о графике, приводит ее к виду, удобному для использования на рабочем месте, и выдает на внешние устройства машины.

По желанию информация может быть сгруппирована по агрегатам или по пакетам. При группировке информации по агрегатам выдается календарный план работы каждого агрегата из S_1, S_2, \dots, S_n на промежутке $[\mathcal{D}^0, \mathcal{D}]$. Если информация сгруппирована по пакетам, выдается информация о календарном плане обработки данного пакета.

Подготовительная подпрограмма



Подпрограмма вывода графика



М.Л. Лукацкая

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН,
РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ОБОЩЕННО-НОРМАЛЬНО

Математические методы статистики находят все более широкое применение в экономическом анализе. Эти методы достаточно полно разработаны лишь для изучения случайных величин, распределение которых подчиняется нормальному закону.

Однако в большинстве случаев распределение случайных величин, изучаемых в экономике и социологии, не является нормальным. Поэтому представляется целесообразным исследование поведения некоторых функционалов (выборочное среднее, сумма квадратов, выборочная дисперсия и др.) над множеством случайных величин, распределение которых отлично от нормального.

При изучении случайной величины, распределение которой приблизительно нормально, естественно записать функцию плотности в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}} + z(x)$$

и попытаться найти подходящее разложение остаточного члена. Одно из разложений, ряд Грама-Шарлье [1, гл.17/], имеет вид:

$$(1) \quad f(x) = \varphi(x) - \delta_1 \cdot \frac{\varphi^{(3)}(x)}{3!} + \delta_2 \frac{\varphi^{(4)}(x)}{4!}, \quad (1)$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $\varphi^{(3)}(x)$ и $\varphi^{(4)}(x)$ - третья и четвертая производные $\varphi(x)$.

Нетрудно проверить, что $\int f(x) dx = 1$.

Если $f(x) \geq 0$ ($-\infty < x < +\infty$), то функция $f(x)$ является плотностью случайной величины η , которую назовем обобщенно-нормальной и будем обозначать $\mathcal{N}(a, \sigma^2, \delta_1, \delta_2)$.

Плотность обобщенно-нормального распределения полностью характеризуется первыми 4 моментами ($m_1 = a$, $m_2 = \sigma^2$, $m_3 = \delta_1 \sigma^3$, $m_4 = (\delta_2 + 3) \sigma^4$).

Характеристикой асимметрии является $\delta_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}}$, эксцесса - $\delta_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3$.

Нормальное распределение - частный случай этого распределения при $\delta_1 = \delta_2 = 0$. В этой работе выводится необходимое и достаточное условие принадлежности случайной величины множеству

$\{\mathcal{N}(a, \sigma^2, \delta_1, \delta_2)\}$ (§1); находятся плотности распределения выборочного среднего случайной величины, принадлежащей

$\{\mathcal{N}\}$ (§2), суммы n независимых случайных величин из $\{\mathcal{N}\}$ (§3), суммы квадратов n независимых случайных величин (§4).

Дается оценка отклонения полученных плотностей от обобщенно-нормальной и нормальной плотностей (§2), от плотности χ^2 - распределения и нормальной плотности (§4).

§ 1.

Разложение (1) при $a = 0$, $\sigma^2 = 1$ запишется в виде:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} [1 + \delta_1 a_1(x) + \delta_2 a_2(x)], \quad (2)$$

где $a_1(x) = \frac{1}{6} x(x^2 - 3)$, $a_2(x) = \frac{1}{24} (x^4 - 6x^2 + 3)$.

Условие $f(x) \geq 0$ равносильно условию

$$\delta_1 a_1(x) \geq -1 - \delta_2 a_2(x) \quad -\infty < x < +\infty. \quad (3)$$

Покажем, что δ_2 должно принадлежать сегменту $[0, 4]$. При $x \rightarrow \infty$ знак $f(x)$ (по (2)) совпадает со знаком δ_2 , следовательно, $\delta_2 \geq 0$. В точках $x = \pm \sqrt{3}$ многочлен $a_1(x)$ равен 0, многочлен $a_2(x) = 1 + \delta_2 a_2(x)$ принимает минимальное

значение, равное $1 - \frac{\delta_2}{4}$. Из (3) следует, что $\delta_2 \leq 4$. В дальнейшем, если не будет особо оговорено, будем считать $\delta_2 \in [0, 4]$. При $x = 0, \pm \sqrt{3}$ условие (3) выполняется для любого δ_2 . По-требуем выполнения его и на интервалах $\Delta_1 = (-\infty, -\sqrt{3})$, $\Delta_2 = (-\sqrt{3}, 0)$, $\Delta_3 = (0, \sqrt{3})$, $\Delta_4 = (\sqrt{3}, \infty)$. Условие (3) можно заменить системой неравенств:

$$\delta_1 \leq \frac{-a_3(x)}{a_1(x)}, x \in \Delta_1; \delta_1 \geq \frac{-a_3(x)}{a_1(x)}, x \in \Delta_2; \delta_1 \leq \frac{-a_3(x)}{a_1(x)}, x \in \Delta_3; \delta_1 \geq \frac{-a_3(x)}{a_1(x)}, x \in \Delta_4$$

так как для $a_1(x)$ справедливы соотношения

$$a_1(x) \begin{cases} < 0 & x \in \Delta_1, x \in \Delta_3 \\ > 0 & x \in \Delta_2, x \in \Delta_4. \end{cases}$$

Функция $\frac{a_3(x)}{a_1(x)}$ нечетная, поэтому вместо (3) имеем:

$$|\delta_1| \leq \min \left\{ \inf_{x \in \Delta_3} \left[\frac{-a_3(x)}{a_1(x)} \right], \inf_{x \in \Delta_4} \left[\frac{a_3(x)}{a_1(x)} \right] \right\} \quad (4)$$

Изучим поведение $z(x, \delta_2) = -\frac{a_3(x)}{a_1(x)}$ на интервалах Δ_3, Δ_4 при $\delta_2 = 0, \delta_2 = 4, \delta_2 \in (0, 4)$.

$$а) z(x, 0) = -\frac{6}{x(x^2-3)}, \min z(x, 0) = z(1, 0) = 3,$$

$$\inf_{x \in \Delta_4} [-z(x, 0)] = \lim_{x \rightarrow \infty} [-z(x, 0)] = 0.$$

Таким образом, при $\delta_2 = 0, \delta_1 = 0$.

$$б) z(x, 4) = \frac{3-x^2}{x}, \text{ убывающая функция, равная нулю, в точках } x = \pm \sqrt{3}.$$

$$\inf_{x \in \Delta_3} z(x, 4) = \inf_{x \in \Delta_4} [-z(x, 4)] = 0$$

при $\delta_2 = 4, \delta_1 = 0$.

$$в) 0 < \delta_2 < 4.$$

$$z(x, \delta_2) = \frac{\delta_2(x^4 - 6x^2 + 3) + 24}{-4x(x^2 - 3)}, \quad z'_x(x, \delta_2) = \frac{\delta_2 T(\delta_2, x^2)}{-4x^2(x^2 - 3)^2},$$

$$\text{где } T(\delta_2, t) = t^3 - 3t^2 - 9\left(\frac{\delta}{\delta_2} - 1\right)t + 9\left(\frac{\delta}{\delta_2} + 1\right).$$

Многочлен от t $T(\delta_2, t)$ имеет 2 положительных корня:

$$t_1 \in (1, 3) \quad \text{и} \quad t_2 \in (3, \infty)^1$$

1) В случае а) $t_1 = 1, t_2 = \infty$, в случае б) $t_1 = t_2 = 3$.

В точке $x_1 = \sqrt{t_1}$ функция $Z(x, \delta_2)$ имеет минимум, в точке $x_2 = \sqrt{t_2}$ - максимум, поэтому условие (4) равносильно условию:

$$\begin{cases} |\delta_1| \leq \min\{Z(\sqrt{t_1}, \delta_2), -Z(\sqrt{t_2}, \delta_2)\} & \delta_2 \in (0,4] \\ \delta_1 = 0 & \delta_2 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Между t_1 и t_2 , δ_2 и t_2 , δ_2 и t_1 существует взаимно-однозначное соответствие, выражаемое следующими формулами:

$$\delta_2 = \frac{72(t_2 - 1)}{t_2^3 - 3t_2^2 + 9t_2 + 9}, \quad \delta_2 = \frac{72(t_1 - 1)}{t_1^3 - 3t_1^2 + 9t_1 + 9} \quad (6)$$

$$t_1 = \frac{3 - t_2}{2} + \sqrt{\frac{(t_2 - 1)^3 + 64}{4(t_2 - 1)}} \quad (6')$$

Формулы (6) выводятся из условий $T(\delta_2, t_2) = T(\delta_2, t_1) = 0$, t_1 из (6') является положительным корнем многочлена

$T(\delta_2, t): (t - t_2) \cdot Z(\sqrt{t_1}, \delta_2), -Z(\sqrt{t_2}, \delta_2)$ являются функциями $\delta_2 \in (0,4]$, и, следовательно, функциями t_2 - большего корня $T(\delta_2, t)$. После несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} -Z(\sqrt{t_2}, \delta_2) &= A(t_2) = \frac{24\sqrt{t_2}(t_2 - 3)}{t_2^3 - 3t_2^2 + 9t_2 + 9}, \\ Z(\sqrt{t_1}, \delta_2) &= B(t_2) = \frac{24\sqrt{t_1}(t_1 - 3)}{t_1^3 - 3t_1^2 + 9t_1 + 9}, \end{aligned} \quad (7)$$

где t_1 из (6'), $t_2 \geq 3$. При $t_2 \rightarrow \infty$ $\delta_2 \rightarrow 0$, $A(t_2) \rightarrow 0$, $B(t_2) \rightarrow 3$, т.е. $\delta_1 = 0$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Для того, чтобы случайная величина была распределена обобщенно-нормально, необходимо и достаточно, чтобы ее плотность имела вид (1) и точка (δ_1, δ_2) принадлежала замкнутой области \mathcal{U} , ограниченной кривой

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \frac{72(t-1)}{t^3 - 3t^2 + 9t + 9} \\ \delta_1 &= \pm \min\{A(t), B(t)\} \end{aligned} \quad t \geq 3 \quad (8)$$

Для практических расчетов удобнее пользоваться уравнением кривой (8) в виде:

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \frac{72(t-1)}{t^3 - 3t^2 + 9t + 9} \\ \delta_1 &= \begin{cases} A(t) & 3 \leq t \leq 3,08, t \geq 3,12 \\ B(t) & 3,08 < t < 3,12. \end{cases} \end{aligned} \quad (8')$$

Изображение области \mathcal{U} дано на рисунке 1.

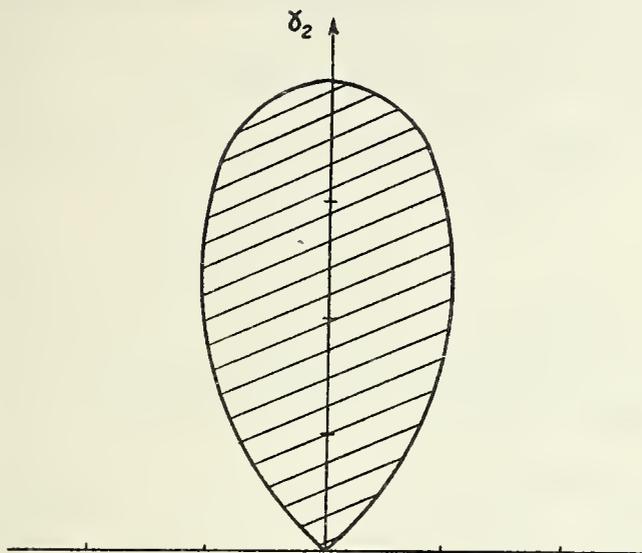


Рис. 1.

Легко показать, что справедлива и такая теорема.

Теорема П. Если случайная величина $\zeta \in \{N_x\}$, то $\delta_2 \in [0, 4]$, $\delta_1 \in [-1, 0518, +1, 0518]$.

§ 2.

В этом и в следующих параграфах будем широко использовать свойства характеристических функций /1, гл.10/ /2, гл.7/.

Если случайная величина $\zeta \in \{N\}$, то все условия для применения свойств характеристических функций выполняются: существуют абсолютные моменты любого порядка, производная плотности любого порядка, $\int |f^{(m)}(x)| dx$ для любого m , $\int |\psi(t)| dt$; $F(x)$ непрерывна на всей оси.

Пусть производится n независимых испытаний случайной величины $\xi = N(0, 1, \delta_1, \delta_2)$. Результат j -го испытания является случайной величиной ξ_j , плотность распределения кото-

рой равна (2) ($j = \overline{1, n}$). Вычислив характеристические функции случайных величин ξ_j , получим:

$$\psi_{\xi_j}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 - it^3 \cdot \frac{\delta_1}{3!} + t^4 \frac{\delta_2}{4!} \right) \quad (9)$$

Характеристическая функция выборочного среднего $\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_j \xi_j$ имеет вид:

$$\psi_{\bar{\xi}}(t) = e^{-\frac{t^2}{2n}} \left(1 - i \frac{t^3}{n^3} \cdot \frac{\delta_1}{3!} + \frac{t^4}{n^4} \cdot \frac{\delta_2}{4!} \right)^n \quad (10)$$

По формуле обращения плотность $\bar{\xi}$ равна

$$f_{\bar{\xi}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} e^{-\frac{t^2}{2n}} \left(1 - i \frac{t^3}{n^3} \cdot \frac{\delta_1}{3!} + \frac{t^4}{n^4} \cdot \frac{\delta_2}{4!} \right)^n dt.$$

После несложных вычислений получим

$$f_{\bar{\xi}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{n}} e^{-\frac{x^2}{2 \cdot \frac{1}{n}}} \mathcal{P}_{4n}(x), \quad (10')$$

где $\mathcal{P}_{4n}(x)$ - многочлен степени $4n$.

Естественно попытаться сравнить (10') с плотностями распределения случайных величин

$$\xi' = \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}, \frac{\delta_1}{\sqrt{n}}, \frac{\delta_2}{n}\right) \text{ и } \xi'' = \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}\right).$$

Первые 4 момента ξ' такие же, как и $\bar{\xi}$.

Случайная величина $\sqrt{n} \xi' = \mathcal{N}\left(0, 1, \frac{\delta_1}{\sqrt{n}}, \frac{\delta_2}{n}\right)$. По (9), ее характеристическая функция будет иметь вид

$$\psi_{\sqrt{n}\xi'}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 - it^3 \cdot \frac{\delta_1}{3! \sqrt{n}} + t^4 \frac{\delta_2}{4! n} \right),$$

а характеристическая функция ξ' такова (заменяем t на $\frac{t}{\sqrt{n}}$):

$$\psi_{\xi'}(t) = e^{-\frac{t^2}{2n}} \left(1 - i \frac{t^3}{n^2} \cdot \frac{\delta_1}{3!} + \frac{t^4}{n^3} \cdot \frac{\delta_2}{4!} \right) \quad (11)$$

Характеристическая функция ξ'' имеет следующий вид:

$$\psi_{\xi''}(t) = e^{-\frac{t^2}{2n}}. \quad (11')$$

Теорема III. Если $\xi_j = \mathcal{N}(0, 1, \delta_1, \delta_2)$, $\xi' = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_j$,

$\xi' = \mathcal{N}(0, \frac{1}{n}, \frac{\delta_1}{\sqrt{n}}, \frac{\delta_2}{n})$, $\xi'' = \mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$, то при $|t| \leq 1,5$ выполняются неравенства:

$$|\Psi_{\xi}(t) - \Psi_{\xi'}(t)| < \frac{0,264}{n^4} e^{\frac{0,726}{n^2}}, \quad (12)$$

$$|\Psi_{\xi}(t) - \Psi_{\xi''}(t)| < \frac{0,726}{n^2} e^{\frac{0,726}{n^2}} \quad (12')$$

Доказательство: Из (10) и (11) следует

$$\Psi_{\xi}(t) - \Psi_{\xi'}(t) = e^{-\frac{t^2}{2n}} \left[\left(1 + \frac{t^3 t_1}{n^3}\right)^n - \left(1 + \frac{t^3 t_1}{n^2}\right) \right], \text{ где } t_1 = \frac{t \delta_2}{4!n} - i \frac{\delta_1}{3!}$$

$$|\Psi_{\xi}(t) - \Psi_{\xi'}(t)| \leq \frac{C n^2 t^6 |t_1|^2}{n^6} \left| \sum_{k=0}^{n-2} \frac{C n^{k+2} t^{3k} t_1^k}{C n^2 n^{3k}} \right| < \frac{t^6 |t_1|^2}{2n^4} \left(1 + \frac{|t^3 t_1|}{n^3}\right)^{n-2}$$

По теореме 2 $0 \leq \delta_2 \leq 4$, $|\delta_1| < 1,052$, поэтому

$$\text{(при } |t| \leq 1,5) \quad |t_1| \leq \sqrt{\frac{1,5^2 \cdot 4^2}{(4!)^2 \cdot 2^2} + \frac{1,052^2}{(3!)^2}} < 0,216.$$

$$|\Psi_{\xi}(t) - \Psi_{\xi'}(t)| < \frac{1,5^6 \cdot 0,216^2}{2n^4} e^{\frac{1,5^3 \cdot 0,216}{n^2}} < \frac{0,264}{n^4} e^{\frac{0,726}{n^2}}$$

Неравенство (12) доказано. Таким же методом, сравнивая (10) и (11), доказывается неравенство (12').

Для оценки этих же разностей при $|t| > 1,5$ воспользуемся свойством характеристических функций:

$$|\Psi_{\xi}(t) - \Psi_{\xi'}(t)| < \frac{\alpha_1}{|t|^m}, \quad (13)$$

$$|\Psi_{\xi}(t) - \Psi_{\xi''}(t)| < \frac{\alpha_2}{|t|^m}, \quad (13')$$

m - любое натуральное число.

Теорема 1У. Если $\xi_j = \mathcal{N}(0, 1, \delta_1, \delta_2)$, $\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_j^n \xi_j$,

$\xi' = \mathcal{N}(0, \frac{1}{n}, \frac{\delta_1}{\sqrt{n}}, \frac{\delta_2}{n})$, $\xi'' = \mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$, то для любого $-\infty < x < +\infty$ справедливы неравенства:

$$|f_{\bar{\xi}}(x) - f_{\xi'}(x)| < \frac{0,132}{n^4} e^{\frac{0,726}{n^2}}, \quad (14)$$

$$|f_{\bar{\xi}}(x) - f_{\xi''}(x)| < \frac{0,363}{n^2} e^{\frac{0,726}{n^2}}. \quad (14')$$

По формуле обращения плотности $\bar{\xi}$, ξ' , ξ'' равны соответственно:

$$\begin{aligned} f_{\bar{\xi}}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \psi_{\bar{\xi}}(t) dt, \\ f_{\xi'}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \psi_{\xi'}(t) dt, \\ f_{\xi''}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \psi_{\xi''}(t) dt. \end{aligned}$$

Поэтому $|f_{\bar{\xi}}(x) - f_{\xi'}(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int |\psi_{\bar{\xi}}(t) - \psi_{\xi'}(t)| dt \leq$
 $\frac{1}{\pi} \int_0^{1,5} |\psi_{\bar{\xi}}(t) - \psi_{\xi'}(t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_{1,5}^{\infty} |\psi_{\bar{\xi}}(t) - \psi_{\xi'}(t)| dt.$

Для оценки первого интеграла воспользуемся неравенством (12), второго - (13).

$$\begin{aligned} |f_{\bar{\xi}}(x) - f_{\xi'}(x)| &< \frac{1,5 \cdot 0,264}{\pi \cdot n^4} e^{\frac{0,726}{n^2}} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2,1}{(m-1) \cdot 1,5^{m-1}} = \\ &= 0,478 \cdot \frac{0,264}{n^4} e^{\frac{0,726}{n^2}} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как m - любое натуральное число, то $|f_{\bar{\xi}}(x) - f_{\xi'}(x)| < \frac{0,132}{n^4} e^{\frac{0,726}{n^2}}$

Точно так же, с использованием оценок (12') и (13'), доказываем неравенство (14').

$$\text{Обозначим } \varepsilon_1 = \frac{0,132}{n^4} e^{\frac{0,726}{n^2}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{0,363}{n^2} e^{\frac{0,726}{n^2}}$$

и вычислим их значения при некоторых n .

$\varepsilon_1(3) = 0,00166$	$\varepsilon_2(4) = 0,0230$
$\varepsilon_1(4) = 0,000515$	$\varepsilon_2(6) = 0,0101$
	$\varepsilon_2(20) = 0,000916$
	$\varepsilon_2(30) = 0,000410$
	$\varepsilon_2(60) = 0,000101$

$\varepsilon_1(2) = 0,00982$, но иным способом можно оценить разность

$\left| \frac{f_{\xi_1 + \xi_2}(x) - f_{\xi_1}(x)}{2} \right|$, которая меньше $\varepsilon'_2 = 0,00412$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение: плотность распределения выборочного среднего при $n \geq 4$ практически равна плотности распределения обобщенно-нормальной величины, при $n \geq 30$ - плотности нормального распределения.

§ 3.

Множество случайных величин из $\{\mathcal{N}\}$ обозначим $\{\mathcal{N}(c)\}$, если дисперсии этих случайных величин не превосходят c .

Найдем ошибку, допускаемую в том случае, если считать, что сумма n независимых величин из $\{\mathcal{N}(c)\}$ принадлежит $\{\mathcal{N}\}$. Пусть $\xi_j \in \{\mathcal{N}(c)\}$. Характеристическая функция ξ_j

$$\psi_{\xi_j}(t) = e^{-\frac{\sigma_j^2 t^2}{2} + ita_j \left(1 - i \frac{\sigma_j^3 \delta_{1j} t^3}{3!} + \frac{\sigma_j^4 \delta_{2j} t^4}{4!}\right)},$$

а

$$\psi_{\xi}(t) = e^{-\frac{t^2 \sum \sigma_j^2}{2} + ita_j \prod \left(1 - i \frac{\sigma_j^3 \delta_{1j} t^3}{3!} + \frac{\sigma_j^4 \delta_{2j} t^4}{4!}\right)},$$

$$\text{где } \tilde{h} = \sum_{j=1}^n \xi_j \quad (15)$$

Найдем характеристическую функцию случайной величины

$\tilde{h} = \frac{h}{n}$ и ее 4 характеристики:

$$\psi_{\tilde{h}}(t) = e^{-\frac{t^2 \sum \sigma_j^2}{2n^2} + i \frac{t \sum a_j}{n} \prod \left(1 - i \frac{t^3 \sigma_j^3 \delta_{1j}}{n^3 3!} + \frac{t^4 \sigma_j^4 \delta_{2j}}{n^4 4!}\right)} \quad (15')$$

$$\mathcal{M}(\tilde{h}) = \frac{\sum a_j}{n}, \mathcal{D}(\tilde{h}) = \frac{\sum \sigma_j^2}{n^2}, \delta_1(\tilde{h}) = \frac{\sum \delta_{1j} \sigma_j^3}{(\sum \sigma_j^2)^{3/2}}, \delta_2(\tilde{h}) = \frac{\sum \delta_{2j} \sigma_j^4}{(\sum \sigma_j^2)^2}.$$

Рассмотрим случайную величину $\tilde{\eta} = \mathcal{N}[\mathcal{M}(\tilde{h}), \mathcal{D}(\tilde{h}), \delta_1(\tilde{h}), \delta_2(\tilde{h})]$,

характеристическая функция которой равна

$$\psi_{\tilde{\eta}}(t) = e^{-\frac{t^2 \sum \sigma_j^2}{2n^2} + \frac{it \sum a_j}{n} \left(1 - i \frac{t^3 \sum \delta_{1j} \sigma_j^3}{n^3 3!} + \frac{t^4 \sum \delta_{2j} \sigma_j^4}{n^4 4!}\right)}. \quad (16)$$

Из (15') и (16) получаем:

$$\left| \psi_{\tilde{h}}(t) - \psi_{\tilde{\eta}}(t) \right| \leq \left| \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{t^3 \sigma_j^3}{n^3}\right) - \left[1 + \frac{t^3}{n^3} \left(\frac{t \sum \delta_{2j} \sigma_j^4}{4! n} - i \frac{\sum \delta_{1j} \sigma_j^3}{3!}\right)\right] \right|,$$

где
$$t_j = \frac{t \sigma_j^4 \delta_{2j}}{4! n} - i \frac{\sigma_j^3 \delta_{4j}}{3!}$$

Оценим эту разность при $|t| \leq 1,5$.

Так как $\sigma_j^2 < C$, $\delta_{2j} \leq 4, |\delta_{4j}| < 1,052$, то $|t_j| < \begin{cases} 0,216 C^2 & C \geq 1 \\ 0,216 C^{3/2} & C \leq 1 \end{cases}$

(получено аналогично оценке $|t_i|$ в теореме 3).

$$|\Psi_{\tilde{h}}(t) - \Psi_{h_1}(t)| \leq \sum_{\kappa=2}^n \frac{1,5^{3\kappa} C_n^\kappa (\max t_j)^\kappa}{n^{3\kappa}} < \frac{1,5^6 (\max t_j)^2}{2n^4} e^{\frac{1,5^3 \cdot \max t_j}{n^2}}$$

Окончательно получаем, что при $|t| \leq 1,5$

$$|\Psi_{\tilde{h}}(t) - t \tilde{h}(t)| < \begin{cases} \frac{0,264 C^4}{n^4} e^{\frac{0,726 C^2}{n^2}} & C \geq 1 \\ \frac{0,264 C^3}{n^4} e^{\frac{0,726 C^{3/2}}{n^2}} & C \leq 1, \end{cases} \quad (17)$$

при всех остальных значениях t

$$|\Psi_{\tilde{h}}(t) - \Psi_{h_1}(t)| < \frac{\kappa}{|t|^m}, \quad (17')$$

где m - любое натуральное число.

Методом, аналогичным применяемому при доказательстве теоремы 4, легко показать, что

$$|f_{\tilde{h}}(x) - f_{h_1}(x)| < \begin{cases} \frac{0,132 C^4}{n^4} e^{\frac{0,726 C^2}{n^2}} & C \geq 1 \\ \frac{0,132 C^3}{n^4} e^{\frac{0,726 C^{3/2}}{n^2}} & C \leq 1 \end{cases} \quad (18)$$

Функции распределения случайных величин \tilde{h} и $h = n\tilde{h}$ связаны так: $F_{\tilde{h}}(x) = F_{\tilde{h}}(\frac{x}{n})$, поэтому $f_{\tilde{h}}(x) = \frac{1}{n} f_{\tilde{h}}(\frac{x}{n})$.

Точно так же $f_{h_1}(x) = \frac{1}{n} f_{h_1}(\frac{x}{n})$, где $h_1 = n\tilde{h}_1$,

Заметим, что $h_1 \in \{N\}$ и имеет первые четыре момента такие же, как и $h = \sum_{j=1}^n \xi_j$

Из (18) получим оценку разности плотностей случайных величин h и h_1 :

$$|f_{\eta}(x) - f_{\eta_1}(x)| < \begin{cases} \frac{0.132c^4}{n^5} e^{\frac{0.726c^2}{n^2}} & C \geq 1 \\ \frac{0.132c^3}{n^5} e^{\frac{0.726c^{3/2}}{n^2}} & C \leq 1. \end{cases} \quad (18')$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема У. Если первые четыре момента случайной величины

$\eta = \sum_{j=1}^n \xi_j$ ($\xi_j \in \{N(C)\}$ и независимы) совпадают с первыми четырьмя моментами $\eta_1 \in \{N\}$, то справедливо неравенство

$$|f_{\eta}(x) - f_{\eta_1}(x)| < \begin{cases} \frac{0.132c^4}{n^5} e^{\frac{0.726c^2}{n^2}} & C \geq 1 \\ \frac{0.132c^3}{n^5} e^{\frac{0.726c^{3/2}}{n^2}} & C \leq 1 \end{cases}$$

для любого действительного x .

§ 4.

Плотность распределения случайной величины ξ_j^2 равна

$$f_{\xi_j^2}(x) = \begin{cases} \frac{f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} & x > 0 \\ f(x) & x \leq 0 \end{cases}$$

где $f(x)$ - плотность распределения ξ_j . Характеристическая функция ξ_j^2 будет равна $\Psi_{\xi_j^2}(t) = M(e^{it\xi_j^2}) = \int e^{ity^2} f(y) dy$. Подставив значение $f(y)$ из (2), получим:

$$\Psi_{\xi_j^2}(t) = \frac{(1-2it)^2 - 0.5t^2\delta_2}{(1-2it)^{2.5}}$$

Видно, что при $\delta_2 = 0$ характеристическая функция, а следовательно, и плотность распределения ξ_j^2 ($\xi_j = N(0, 1, \delta_1, 0)$), совпадает с характеристической функцией (соответственно с плотностью распределения) квадрата случайной величины, распределенной нормально. Ясно, что справедлива теорема:

Теорема У1. Функция распределения суммы n квадратов независимых случайных величин из $\{N(0, 1, \delta_1, 0)\}$ совпадает с χ^2 - распределением с n степенями свободы.

Разложим характеристическую функцию случайной величины

$$\mu^2 = \sum_{j=1}^n \xi_j^2, \text{ которая равна}$$

$$\Psi_{\mu^2}(t) = \frac{1}{(1-2it)^{\frac{n}{2}}} \left[1 - \frac{0.5t^2\delta_2}{(1-2it)^2} \right]^n$$

по степеням $\frac{1}{z} = \frac{1}{1-2it}$.

$$\Psi_{\mu^2}(t) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \left[1 + (1 - \frac{1}{2})^2 \frac{\sigma_2^2}{8} \right]^n = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \left\{ 1 + \sum_{\kappa=1}^n C_n^\kappa (1 - \frac{1}{2})^{2\kappa} (\frac{\sigma_2^2}{8})^\kappa \right\} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \Phi(z).$$

Легко видеть, что $\Phi(z) = \sum_{j=0}^{2n} \frac{C_j}{z^j}$, где коэффициенты C_j отыскиваются по формуле:

$$C_j = (-1)^j \sum_{\kappa=\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor}^n C_n^\kappa (-\frac{\sigma_2^2}{8})^\kappa C_{2\kappa}^j \quad j = \overline{0, 2n}. \quad (19)$$

Таким образом, характеристическая функция μ_2 имеет вид:

$$\Psi_{\mu^2}(t) = \sum_{j=0}^{2n} \frac{C_j}{(1 - 2it)^{j+\frac{1}{2}}}, \quad (20)$$

C_j определяются по (19).

Характеристическую функцию χ^2 распределения с j - степенями свободы обозначим через $\Psi_j(t)$. Тогда (20) можно записать в виде

$$\Psi_{\mu^2}(t) = \sum_{j=0}^{2n} C_j \Psi_{n+2j}(t) \quad (20')$$

Таким образом, характеристическая функция μ^2 есть линейная комбинация характеристических функций Ψ_{n+2j} ($j = \overline{0, 2n}$). Плотность распределения χ^2 обозначается обычно $\kappa_n(x)$, где n - число степеней свободы. Обозначим плотность распределения $\mu^2 = \sum_1^n \xi_j^2$ через $\mu_n(x)$.

Теорема III. Плотность распределения $\mu^2 = \sum_1^n \xi_j^2$ ($\xi_j \in N(0, 1, \sigma_1, \sigma_2)$) вычисляется по формуле:

$$\mu_n(x) = \sum_{j=0}^{2n} C_j \kappa_{n+2j}(x),$$

где

$$C_j = (-1)^j \sum_{\kappa=\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor}^n C_n^\kappa (\frac{\sigma_2^2}{8})^\kappa C_{2\kappa}^j$$

По теореме обращения характеристических функций (нетрудно видеть, что условия для ее применения выполняются)

$$\mu_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int \Psi_{\mu^2}(t) e^{-itx} dt.$$

Подставив значение $\Psi_{\mu^2}(t)$ из (20'), получим:

$$\mu_n(x) = \sum_{j=0}^{2n} C_j \kappa_{n+2j}(x), \quad (21)$$

$$C_j - \text{из (19)}.$$

Теорема доказана. Таким образом, плотность M^2 - распределения является линейной комбинацией плотностей χ^2 распределения с разными степенями свободы.

Сравним плотности распределения случайных величин $\tilde{\mu}^2 = \frac{M^2}{n}$ и $\tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{n}$, чтобы показать при каких значениях n плотность распределения $M_n(x)$ практически равна плотности распределения $K_n(x)$, при каких n $M_n(x)$ можно заменить нормальной плотностью распределения.

$$f_{\tilde{\chi}^2}(x) = nK_n(nx) = \frac{n}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} (nx)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{nx}{2}}, \quad x > 0, \quad (22)$$

$$f_{\tilde{\mu}^2}(x) = \sum_{j=0}^{2n} n c_j K_{2j+n}(nx), \quad x > 0.$$

Функции $f_{\tilde{\chi}^2}(x)$ и $f_{\tilde{\mu}^2}(x)$ бесконечно дифференцируемы и соответствующие интегралы $\int |f^{(m)}(x)| dx$ сходятся. Поэтому к ним можно применять свойства характеристических функций.

Для любого $|t| \geq 1,5$ справедливо неравенство

$$|\Psi_{\tilde{\mu}^2}(t) - \Psi_{\tilde{\chi}^2}(t)| < \frac{K'}{|t|^m}, \quad (22')$$

где m - любое натуральное число.

Оценим разность характеристических функций

$$\Psi_{\tilde{\mu}^2}(t) = \frac{1}{(1 - 2i\frac{t}{n})^{\frac{n}{2}}} \left[1 - \frac{0,5t^2 \delta_2}{n^2(1 - 2i\frac{t}{n})^2} \right]^n \quad \text{и} \quad \Psi_{\tilde{\chi}^2}(t) = \frac{1}{(1 - 2i\frac{t}{n})^{\frac{n}{2}}}$$

при $|t| \leq 1,5$.

$$\begin{aligned} |\Psi_{\tilde{\mu}^2}(t) - \Psi_{\tilde{\chi}^2}(t)| &= \frac{1}{(1 + \frac{4t^2}{n^2})^{\frac{n}{4}}} \left| \left[1 - \frac{0,5t^2 \delta_2}{n^2(1 - 2i\frac{t}{n})^2} \right]^n - 1 \right| < \sum_{k=1}^n \left[\frac{0,5t^2 \delta_2}{n^2(1 + \frac{4t^2}{n^2})} \right] \cdot C_n^k < \\ &< \frac{0,5t^2 \delta_2}{n} \left[1 + \frac{0,5t^2 \delta_2}{n^2(1 + \frac{4t^2}{n^2})} \right]^n < \frac{1,125 \delta_2}{n} e^{\frac{1,125 \delta_2}{n}} \leq \frac{4,5}{n} e^{\frac{4,5}{n}} \end{aligned}$$

Получим, таким образом, неравенства

$$|\Psi_{\tilde{\mu}^2}(t) - \Psi_{\tilde{\chi}^2}(t)| < \frac{1,125 \delta_2}{n} e^{\frac{1,125 \delta_2}{n}} \leq \frac{4,5}{n} e^{\frac{4,5}{n}} \quad (23)$$

для $|t| \leq 1,5$.

Методом, аналогичным применяемому в теореме 4, легко доказать справедливость неравенства

$$|f_{\mu_2}(x) - f_{\bar{\chi}_2}(x)| < \frac{0,563 \delta_2}{n} e^{\frac{1,125 \delta_2}{n}} < \frac{2,25}{n} e^{\frac{4,5}{n}} \quad (23')$$

(Для этого нужно воспользоваться оценками (22') и (23)).

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 1X. Для любого действительного x справедливо неравенство

$$|M_n(x) - K_n(x)| < \frac{0,563 \delta_2}{n^2} e^{\frac{1,125 \delta_2}{n}} < \frac{2,25}{n^2} e^{\frac{4,5}{n}}, \quad (24)$$

где $M_n(x)$ - плотность распределения $\mu^2 = \sum_{j=1}^n \xi_j^2 (\xi_j \in \{N(0,1, \delta_1, \delta_2)\})$,
 $K_n(x)$ - плотность распределения $\chi^2 = \sum_{j=1}^n \eta_j^2 (\eta_j \in \{N(0,1)\})$.

Из (22) ясно, что $|M_n(x) - K_n(x)| = \frac{1}{n} |f_{\mu_2}(x) - f_{\bar{\chi}_2}(x)|$.

Поэтому $|M_n(x) - K_n(x)| < \frac{0,563 \delta_2}{n^2} e^{\frac{1,125 \delta_2}{n}} < \frac{2,25}{n^2} e^{\frac{4,5}{n}}$
 (по (23')).

Нетрудно подсчитать, что

$$|M_n(x) - K_n(x)| < \begin{cases} 0,00262 & n \geq 30 \\ 0,00091 & n \geq 50 \\ 0,000226 & n \geq 100 \\ 0,000100 & n \geq 150 \end{cases}$$

Теми же самыми методами можно получить неравенство $|K_n(x) - \varphi_n(x)| < \frac{2,3}{n^2}$, где

$\varphi_n(x)$ - плотность нормально распределенной величины $N(n, \nu)$

:

Подсчеты дают следующее:

$$|K_n(x) - \varphi_n(x)| < \begin{cases} 0,000085 & n \geq 30 \\ 0,000020 & n \geq 50 \\ 0,000001 & n \geq 100 \\ 0,0000001 & n \geq 150 \end{cases}$$

Поэтому ясно, что при $n \geq 30$ вместо неравенства (24) можно пользоваться неравенством

$$|M_n(x) - \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} e^{-\frac{(x-n)^2}{4n}}| < \frac{0,563 \delta_2}{n^2} e^{\frac{1,125 \delta_2}{n}} \quad (25)$$

При $n < 30$ нужно пользоваться формулой (21). Вычисления по этой формуле можно упростить, заменив в правой части равенства плотности $K_{n+2j}(x)$ (когда $n+2j > 30$) плотностями нормального распределения.

Л и т е р а т у р а :

1. Г.Крамер - Математические методы статистики, ГИИЛ, 1948.
2. Б.В.Гнеденко - Курс теории вероятностей, ГИТТЛ, 1950.

И.М.Бобко

ПРОГРАММА УПЛОТНЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ЕЕ ОБРАБОТКЕ НА Э В М

Современные методы управления народным хозяйством во всех звеньях требуют точных и полных данных о нем. В связи с этим возникает потребность тем или иным способом обрабатывать большие массивы информации. Эти массивы могут быть постоянными или такими, в которых элементы могут меняться (часто или редко).

Потоки технико-экономической информации настолько велики (и объем их постоянно растет), что естественно возникает задача, каким образом учитывать всю необходимую информацию. В одних случаях приходится обрабатывать часть информации и использовать только наиболее существенную, в других случаях такой возможности нет, т.к. вся используемая информация является необходимой и отсутствие любого из элементов существенно влияет на результат.

В тех случаях, когда мы имеем дело с массивами, элементы которых могут быть рассчитаны по определенным алгоритмам, целесообразно в памяти машины хранить программу этого алгоритма и для получения элемента массива каждый раз его рассчитывать. Это реализовано в виде библиотеки стандартных программ, которая является неотъемлемой частью программного хозяйства почти каждой ЭВМ.

Однако при обработке технико-экономической информации мы имеем дело с массивами, элементы которых рассчитать невозможно. В этом случае приходится хранить все массивы целиком.

Задача уплотнения массивов информации является актуальной, т.к. задачи автоматизации управления требуют экономии долговременной и оперативной памяти ЭВМ.

Ниже описывается программа, с помощью которой возможно уплотнение массивов информации в несколько раз.

Следует отметить, что при обработке информации на ЭВМ элементы любых массивов в памяти машины представляются в виде комбинаций двоичных кодов, над которыми легко производятся различные преобразования, такие, как сдвиг кода, перестановки, обращения и т.д. Это дает возможность ставить и решать задачи уплотнения массивов информации.

Одним из методов уплотнения является операция свертки и развертки массивов информации на основе повторений в старших разрядах между соседними элементами массива. Более старшим разрядом элемента будет разряд, расположенный левее, а младшим - правее, независимо от того, является ли элемент количественным выражением или кодообозначением.

Технико-экономическая информация может быть представлена в виде набора однородных массивов (векторов) или некоторой совокупности матриц, столбцами которых являются однородные массивы. Элементы многих из этих столбцов (массивов), как правило, расположены в возрастающем порядке, следовательно, в какой-то мере отражают закономерности натурального ряда чисел. А в ряде случаев имеется возможность их так расположить.

Если рассмотреть рядом стоящие (соседние) элементы массивов, то оказывается, что во многих случаях они отличаются друг от друга только младшими разрядами, а то или иное количество старших разрядов у них совпадает. Если при записи последующего элемента отбросить повторившиеся с предыдущим элементом старшие разряды, то длина элемента сократится на число повторившихся разрядов. На этом принципе и строится оператор свертки.

Так как длина повторения между соседними элементами при последовательном просмотре всего массива меняется, необходимо учитывать количество выброшенных разрядов. Для этого служит

знак раздела, который отделяет один элемент от другого в свернутом массиве.

Приведем пример.

Пусть массив (или столбец матрицы) состоит из следующих элементов:

```
9 5 7 0 1 2 4
9 5 7 0 1 2 5
9 5 7 0 3 8 6
9 5 7 0 3 9 0
1 2 3 4 5 6 7
1 2 3 4 6 9 1
1 2 3 4 6 9 3
```

Свернутый массив будет выглядеть так:

```
9 5 7 0 1 2 4
ρ 5 ρ 3 8 6 ρ 9 0
ρ 1 2 3 4 5 6
7 ρ 6 9 1 ρ 3
```

Буквой ρ обозначен знак раздела, который в машинной ячейке занимает два двоичных разряда.

В приведенном примере 49 десятичных разрядов исходного массива в свернутом виде заняли 27 разрядов.

Для того, чтобы по свернутому массиву восстановить исходный, т.е. осуществить операцию развертки, нужно последовательно рассматривать разряды до очередного знака раздела.

По количеству их определяется число недостающих повторившихся старших разрядов, которые и берутся из предыдущего элемента.

Программа свертки и программа развертки занимают около 70 ячеек каждая. При записи комбинации десятичных знаков в ячейку обычно один разряд остается свободным. В свернутом массиве этот разряд используется, тем самым повышается коэффициент уплотнения.

Коэффициент уплотнения тем больше, чем больше повторившихся старших разрядов соседних элементов в массиве. Коэффициент уплотнения увеличивается с ростом числа элементов массива.

Если зафиксировать длину массива $n = 100$, то максимальное значение коэффициента уплотнения будет равно 31.

В реальных задачах свернутый массив по объему меньше исходного (при $n = 100$) в несколько раз (при определенных условиях в 10 и более раз).

Программа свертки и развертки может обрабатывать любые массивы независимо от их длины, от значности элементов массива. Необходимо только, чтобы каждый элемент массива был записан в одну ячейку. Если элементы массива не вписываются в одну ячейку, нужно изменять в программах константы.

Программы свертки и развертки снабжены программой настройки. Эта программа настраивает исходные программы свертки и развертки на заданную длину массива, на место массива и программ в памяти машины, на систему массива (десятичную или восьмеричную).

При хранении большого числа больших массивов в долговременной памяти представляется эффективным предварительно свернуть эти массивы, а затем записать их на магнитный носитель. После считывания в оперативную память массивы разворачиваются и обрабатываются как обычные массивы. Таким образом, используя программы свертки и развертки, мы достигаем экономии долговременной памяти и времени на обращения к ней.

В случае необходимости хранения на магнитных лентах рабочих программ эти программы могут также сворачиваться. Но для повышения эффективности свертки программу следует разбить на четыре массива: команды операций, первые, вторые и третьи адреса в отдельности.

В случае, если обработка массива (вектора) или нескольких массивов (матрицы) происходит последовательно элемент за элементом (строка за строкой), их обработка на ЭВМ возможна на свернутых массивах, т.е. без разворачивания массивов в оперативной памяти.

В этом случае обработка может происходить в следующей последовательности: выборка из свернутых массивов первых элементов (первой строки матрицы) в рабочие ячейки, развертка их, обработка по рабочим программам, свертка и засылка в свернутый массив, затем переход к следующей строке.

Такой способ обработки экономит также и оперативную память. А все это позволит обрабатывать массивы больших объемов. Передача информации в свернутом виде из одной вычислительной машины в другую позволяет экономить каналы связи и время на передачу.

Постановка таких вопросов необходима при создании единой сети вычислительных центров.

Н.Б.Мироносецкий

ПРОГРАММА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ОБРАТНОЙ
МАТРИЦЫ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

При решении ряда инженерных и экономических задач возникает необходимость вычисления некоторых элементов a'_{ij} матрицы A^{-1} , обратной матрице A . Предлагаемая программа¹⁾ позволяет производить вычисления элементов обратной матрицы a'_{ij} без обращения матрицы A . Эксперименты на ЦВМ показали, что данную программу выгодно применять в том случае, если число элементов a'_{ij} не превосходит n - порядка матрицы A .

Идея стохастической модели заключается в следующем. Пусть матрица $B = E - A$ такова, что $\|B\| < 1$, тогда справедливо известное разложение:

$$A^{-1} = (E - B)^{-1} = E + B + B^2 + B^3 + \dots \quad (1)$$

Элементы b_{ij} матрицы B могут быть представлены в виде произведения:

$$b_{ij} = \rho_{ij} \cdot v_{ij}, \quad i = 1(1)n, \quad j = 1(1)n, \quad (2)$$

причем ρ_{ij} должны удовлетворять условиям:

$$\rho_{ij} \geq 0 \quad \text{для любого } b_{ij};$$

1) В работе принимала участие Л.В.Тюряева.

$$P_{ij} = 0 \text{ при } \delta_{ij} = 0, i = 1(1)n, j = 1(1)n; \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n P_{ij} < 1 \quad i = 1(1)n.$$

Положим

$$P_{i,n+1} = 1 - \sum_{j=1}^n P_{ij}, \quad i = 1(1)n; \quad (4)$$

$$P_{n+1,j} = 0, \quad j = 1(1)n;$$

$$P_{n+1,n+1} = 1.$$

В программе реализован некоторый марковский процесс с матрицей перехода:

$$M = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} & P_{1n+1} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} & P_{2n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} & P_{nn+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (5)$$

где P_{ij} - ранее введенные величины, удовлетворяющие условиям (3), (4).

С данным процессом может быть связана величина

$$\xi_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{k=1}^{i_k < n+1} \delta_{i_k j} \prod_{e=0}^{k-1} U_{i_e i_{e+1}}, \quad (6)$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases},$$

$U_{i_\mu i_{\mu+1}}$ определяется при реализации процесса в соответствии с $P_{i_\mu i_{\mu+1}}$,

$\sum_{k=1}^{i_k < n+1}$ - означает, что процесс прекращается при $i_k = n+1$

Легко видеть, что $M(\xi_{ij})$ - элементы a'_{ij} .

При реализации марковского процесса используются равномерно-распределенные в интервале $[0,1]$ псевдо-случайные числа. Величины U_{ij} можно представить в виде целых чисел и размещать в тех же ячейках, что и P_{ij} .

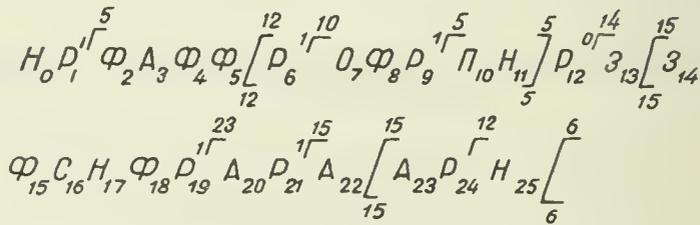
Точность метода характеризуется известной формулой:

$$\mathcal{N} = \frac{9\mathcal{D}(\xi)}{\varepsilon^2}$$

(с уровнем доверия 0,997),

где \mathcal{N} - количество испытаний.

Ниже приводится логическая схема программы.



Описание операторов:

H_0 - вход в программу;

D_1 - проверка метки матрицы B , матрица B сформирована;

Φ_2 - формирование программы по параметрам n , \mathcal{N}_0 , $\bar{\mathcal{N}}$, ε , где $n \times n$ - размерность матрицы A , \mathcal{N}_0 - начальное количество историй, $\bar{\mathcal{N}}$ - максимальное количество историй, ε - заданная точность;

A_3 - получение матриц B , M ;

Φ_4 - формирование метки матрицы B ;

Φ_5 - формирование обращения к подпрограмме счета $(a'_{ij})_{\mathcal{N}_\mu}$, где \mathcal{N}_μ - количество историй после μ обращения к подпрограмме вычисления $M(\xi_{ij})_{\mathcal{N}_\mu} = (a'_{ij})_{\mathcal{N}_\mu}$;

D_6 - проверка условия $|(a'_{ij})_{\mathcal{N}_{m+1}} - (a'_{ij})_{\mathcal{N}_m}| < \varepsilon$, $(a'_{ij})_0 = 0$;

O_7 - пересылка $(a'_{ij})_{\mathcal{N}_m} \implies (a'_{ij})_{\mathcal{N}_{m+1}}$;

Φ_8 - формирование \mathcal{N}_{m+1} ;

D_9 - проверка условия $\mathcal{N}_{m+1} > \bar{\mathcal{N}}$;

Π_{10} - выдача a'_{ij} и при необходимости $\mathcal{D}_{ij}(\xi)$;

- H_{11} - выход из программы;
 D_{12} - начало подпрограммы счета $M(\xi_{ij})_{N_{\mu}} = (a'_{ij})_{N_{\mu}}$,
 проверка условия $i = j$;
 Z_{13} - засылка $1 \Rightarrow \xi_{ij}$;
 Z_{14} - засылка $0 \Rightarrow \xi_{ij}$;
 Φ_{15} - формирование очередного блуждения;
 C_{16} - стандартная программа получения псевдослучайного
 числа;
 H_{17} - определение интервала попадания псевдослучайного числа,
 выбор D_{ij} ;
 Φ_{18} - формирование индекса i_{e+1} в выражении $U_{i_e i_{e+1}}$;
 D_{19} - проверка условия $i_{e+1} = n+1$;
 A_{20} - счет $\prod_{e=0}^{k-1} U_{i_e i_{e+1}}$;
 D_{21} - проверка условия $i_e = i_{e+1}$;
 A_{22} - счет ξ_{ij} по формуле (6) ;
 A_{23} - счет $M(\xi_{ij})$;
 D_{24} - счетчик историй ;
 H_{25} - выход из подпрограммы вычисления $M(\xi_{ij})_{N_{\mu}}$

В заключение выражаю глубокую благодарность В.Г.Сраговичу за внимание к работе.

Л и т е р а т у р а

1. Н.П.Бусленко, Ю.А.Шрейдер. Метод статистических испытаний, Физматгиз, 1961.
2. Forsythe G. Leibler R.
Matrix Inversion by a Monte Carlo Method
Math. Tab. VJV 31 (1950).
3. Bazley N. W. and Davis P. Y.
Accuracy of Monte Carlo Methods
in Computing Finite Markov Chains
J. Res. Nat. Bur. Standards
 1960. 64 B. N4

Е.М.Левицкий

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ АНАЛИЗА СЕТЕВОГО ГРАФИКА

Рассматриваем ориентированный граф $G = (X, u)$, множество X вершин которого содержит конечное число элементов [1].

Каждому элементу множества X может быть поставлено в соответствие некоторое число (его номер) из совокупности $J = \{i\}_0^n$. Каждая пара вершин x_i и x_j ($i \in J, j \in J = \{j\}_0^n$) может соединяться направленной дугой u_{ij} .

Без ограничения общности будем считать, что граф G имеет только две особые вершины – вход и выход – такие, что первая не имеет предшествующих, а вторая не имеет последующих вершин.

Дуге u_{ij} поставим в соответствие число y_{ij} – ее длину.

Если интерпретировать вершины x_i и дуги u_{ij} соответственно как события и работы, то y_{ij} будет выражать продолжительность работы u_{ij} [2].

Одной из основных задач анализа сетевого графика является определение пути наибольшей длительности (критического пути), соединяющего вход и выход сети.

Приступая к расчету критического пути, мы должны располагать следующей исходной информацией:

а) перечнем работ, в котором каждая работа обозначается двумя номерами (номер, стоящий слева, обозначает предшествующее событие; номер, стоящий справа, обозначает последующее событие);

б) длительностью каждой работы (например, в целых неделях).

Для удобства вычислений мы к имеющейся сети или перечню работ прибавляем еще одну работу (с нулевой длительностью) вида (n, L) , где n - номер выхода сети, а L не равно ни одному $i \in J$.

Длину критического пути между входом сети X_0 и событием X_i обозначим через $t_i^{(0)}$.

Критический путь между входом X_0 и выходом X_n сети называется главным. $t_i^{(0)}$ - наиболее раннее возможное время наступления события X_i .

Если событие X_i лежит на критическом пути от X_0 до X_n , то время до наступления этого события увеличить нельзя.

Если же вершина X_i не лежит на главном критическом пути, то время до наступления события X_i может быть больше величины $t_i^{(0)}$.

Наиболее позднее возможное время наступления события X_i обозначим $t_i^{(1)}$.

Таким образом, наибольший возможный резерв времени выполнения работы u_{ij} будет равен

$$\Delta T_{ij} = t_j^{(1)} - t_i^{(0)} - y_{ij}.$$

Признаком работы, лежащей на критическом пути, является равенство

$$\Delta T_{ij} = 0.$$

Предлагаемый нами алгоритм для вычисления критического пути состоит из следующих частей.

1. Частичное упорядочение работ

Группируем работы по номерам предшествующих событий. Для этого

- а) выписываем первую работу из нашего перечня;
- б) просматриваем номера предшествующих событий всех остальных работ;
- в) записываем в новый перечень те работы, номера предшествующих событий которых равны номеру предшествующего события ранее выписанной работы;
- г) вычеркиваем из старого перечня выписанные из него работы;

д) повторяем этот процесс последовательно для всех невычеркнутых работ старого перечня.

П. Логическое упорядочение списка работ

Логически упорядоченной мы будем называть такую совокупность работ, которая удовлетворяет условию: если номер j_1 последующего события какой-нибудь работы (i_1, j_1) равен номеру i_2 предшествующего события какой-нибудь другой работы (i_2, j_2) , то работа (i_1, j_1) предшествует работе (i_2, j_2) .

Короче: Для любых двух работ (i_1, j_1) и (i_2, j_2) если $j_1 = i_2$, то $(i_1, j_1) < (i_2, j_2)$

Логическая упорядоченность совокупности работ достигается применением определенных правил:

1. Номер предшествующего события первой работы из частично упорядоченной совокупности сравниваем с номерами последующих событий всех остальных работ. Здесь могут быть два случая:

а) сравниваемый номер совпадает с одним из просматриваемых номеров последующих событий. В этом случае переходим к номеру предшествующего события следующей работы и снова применяем правило 1;

б) ни один из номеров последующих событий не совпадает с номером предшествующего события первой работы. В таком случае эту работу заносим в новый перечень и вычеркиваем ее из старого перечня.

2. Применяем правило 1 последовательно ко всем работам из частично-упорядоченной совокупности.

3. Если после первого применения правил 1 и 2 в частично-упорядоченной совокупности еще остались невычеркнутые работы, применяем эти правила еще раз, и так до тех пор, пока все работы не будут переписаны в логически упорядоченную совокупность.

Ш. Вычисление наиболее раннего возможного времени наступления события

1. Начальному событию (входу сети) приписываем $t_0^{(0)} = 0$

2. Рассматриваем предшествующее событие с номером i , если значения наиболее раннего возможного времени наступления всех предшествующих событий мы уже вычислили.

3. Сравниваем номер i с номерами j последующих событий всех предыдущих работ. Среди них будут номера j_1, j_2, \dots, j_k , равные номеру i .

4. Вычисляем суммы $(t_{i_1}^{(0)} + y_{i_1, j_1}), \dots, (t_{i_k}^{(0)} + y_{i_k, j_k})$ и выбираем из них наибольшую. Это и будет значение $t_i^{(0)}$.

Применяем правила 2,3,4 последовательно ко всем событиям упорядоченной совокупности. В результате этого значение наиболее раннего возможного времени свершения конечного события (выхода сети) дает нам длину критического пути $t_n^{(0)} = t_n^{(1)} = \lambda$.

1У. Вычисление наиболее позднего возможного времени наступления события

1. Конечному событию (выходу сети) приписываем значение $t_n^{(1)} = t_n^{(0)}$.

2. Рассматриваем событие i , если величина $t_i^{(1)}$ вычислена для всех последующих событий. Событие i может быть началом нескольких работ

$$(i, j_1), (i, j_2), \dots, (i, j_k).$$

3. Находим разности:

$$(t_{j_1}^{(1)} - y_{ij_1}), (t_{j_2}^{(1)} - y_{ij_2}), \dots, (t_{j_k}^{(1)} - y_{ij_k}).$$

Наименьшая из этих разностей и будет равна величине $t_i^{(1)}$.

4. Правила 2,3 последовательно применяем ко всем событиям упорядоченной совокупности, начиная с последнего.

У. Вычисление резервов времени

1. Для каждой работы (ij) вычисляем величину

$$\Delta T_{ij} = t_j^{(1)} - t_i^{(0)} - y_{ij}.$$

2. Значения $\Delta T_{ij} = 0$ определяют работы, лежащие на критическом пути.

У1. Реализация алгоритма на машине

Рассматриваемый алгоритм реализован на трехадресной электронной вычислительной машине Сибирского отделения АН СССР.

Программа, реализующая данный алгоритм, использует только оперативную память машины (P ячеек). Таким образом, по этой программе могут анализироваться сетевые графики с числом работ $N \leq (P - P_1) : 2$, где P_1 - число ячеек оперативной памяти, занимаемое программой.

Программа содержит 145 команд. Информационная карта, на которую записываются исходные параметры программы, занимает 11 ячеек.

Вся исходная информация (номера предшествующего и последующего событий, шифр и длительность работы) представляется в восьмеричной системе счисления.

Данные, относящиеся к этой работе, записываются в одной ячейке. При этом для номеров предшествующего и последующего событий отводится по 12 двоичных разрядов (с 13 по 24 и с 1 по 12 соответственно).

Для шифра работы отводится 15 двоичных разрядов (с 25 по 39) и для длительности работы - 6 двоичных разрядов (с 40 по 45).

Логически упорядоченная совокупность работ записывается на место исходной информации, а выходная информация (наиболее раннее возможное, наиболее позднее возможное время и резерв времени) записывается в остальной части оперативной памяти. Величины $t_i^{(e)}$, $t_j^{(r)}$ и ΔT_{ij} для работы (i, j) записываются в одной ячейке в разрядах: 25 - 33, 13 - 21 и 1 - 9 соответственно.

Л и т е р а т у р а

1. К.Верж. Теория графов и ее применения. ИЛ, М, 1962.
2. Г.С.Поспелов, А.М.Тейман. Автоматизация процессов управления разработками больших систем или сложных комплексов.

Известия АН СССР, Техническая кибернетика, 4, 1963 .

В.А.Перепелица

АЛГОРИТМ ВЫДЕЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ КОНТУРОВ НА
ОРИЕНТИРОВАННОМ ГРАФЕ БЕЗ ПЕТЕЛЬ¹⁾

Рассматривается ориентированный граф $\Gamma(x, u)$ без петель; x_i - вершины графа; множество всех вершин графа $X = \bigcup_{i=1}^m x_i$. Предлагаемый алгоритм (обозначим его A) предполагает достаточным заданием графа в виде набора $[X]$ m множеств $[X_i]^\Delta = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Здесь $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ - это вершины, в которые входят дуги из вершины x_i в том случае, если $\Delta = +$ или же это все вершины, из которых исходят дуги в вершину x_i для случая $\Delta = -$. Причем для всего набора $[X] = \bigcup_{i=1}^m [X_i]^\Delta$ все Δ равны либо только $+$ либо только $-$.

1. Первая часть работы алгоритма A (обозначим ее A') - удаление из графа $\Gamma(X, u)$ таких вершин (а стало быть и дуг, инцидентных им), которые не удовлетворяют необходимому условию вхождения в контур.

Утверждение 1. Для того, чтобы вершина $x_i \in X$ входила в какой-либо контур $K \subseteq \Gamma(X, u)$, необходимо, чтобы множества $[X_i]^+ \neq \emptyset$, $[X_i]^- \neq \emptyset$.

1) Данная работа выполнена в поисковой социологической группе Совета молодых ученых СО АН СССР.

Условимся обозначать значком \emptyset - пустое множество, значком Λ - пустой граф.

Доказательство утверждения очевидно. Заметим лишь, что каждой вершине x_i , которая входит хоть в один контур, инциденты не менее двух дуг, из которых одна входит в x_i , а другая исходит из данной вершины.

Утверждение 2. Подграф $\Gamma'(x', u)$, полученный из графа $\Gamma(x, u)$ удалением из последнего всех вершин, не удовлетворяющим необходимому условию вхождения в контур, и дуг, инцидентных этим вершинам, содержит ровно столько же контуров, сколько их содержит исходный граф $\Gamma(x, u)$.

Действительно, если вершина $x_k \in X$ не входит ни в один контур $K \subset \Gamma(x, u)$, то ни одна из дуг, инцидентных x_k , также не входит ни в один контур. Причем, если нумерация вершин в множестве X' осталась без изменения, то существует взаимно-однозначное соответствие между контурами из $\Gamma'(x', u)$ и контурами из $\Gamma(x, u)$ с точностью до обозначения.

Опишем принцип работы алгоритма A' .

Наличие вершины $x_k \in X$ хоть в одном из множеств $[x_i]^\Delta$ условимся для краткости называть "вхождение x_k справа". Разобьем алгоритм A' на следующие шаги:

1°. Вычеркиваем все пустые множества $[x_i]^\Delta = \emptyset$ и все вхождения справа соответствующих вершин x_i в непустые множества $[x_j]^\Delta \subset [x]^\Delta$. Если после этого какое либо из множеств $[x_j]^\Delta$ окажется пустым, то вычеркиваем и это множество и вхождение соответствующей вершины x_j в оставшиеся непустые множества. Вычеркивание продолжаем до тех пор, пока набор $[x]^\Delta$ не будет состоять только из непустых множеств.

2°. Проверяем, для всех ли вершин x_j , $[x_j]^\Delta \neq \emptyset$ имеет место вхождение справа. Если для всех, то алгоритм A' заканчивает свою работу. В противном случае переходим к п.3°.

3°. Замечание: если какое-либо множество $[x_j]^\Delta \neq \emptyset$, но вершина x_j не имеет ни одного вхождения справа, тогда это означает, что для данной вершины x_j множество $[x_j]^\Delta = \emptyset$,

где $\bar{\Delta} = -$, если $\Delta = +$, и $\bar{\Delta} = +$,
если $\Delta = -$.

Вычеркиваем все множества, для которых справедливо замечание п.3^o, и возвращаемся к началу п.1^o.

Алгоритм A' заканчивает свою работу, если при повторном возвращении к п.1^o ни одно множество из набора $[X]^A$ не будет вычеркнуто. Оставшийся набор множества обозначим $[X']^A$.

Подграф $\Gamma'(X', u')$, полученный из $\Gamma(X, u)$ в результате работы алгоритма A' , будем называть неприводимым графом относительно алгоритма A , а набор $[X']^A$ - неприводимым набором.

Теорема 1. Для того чтобы граф $\Gamma(X, u)$ содержал хотя бы один контур, необходимо и достаточно, чтобы его неприводимый граф $\Gamma'(X', u')$ относительно алгоритма A был непустым.

Необходимость. Пусть граф $\Gamma(X, u)$ имеет хотя бы один контур

$K = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$, $k \leq m$, m - число вершин в исходном графе. Из утверждения 1 следует, что все множества $[x_{i_1}]^+, [x_{i_1}]^-, [x_{i_2}]^+, [x_{i_2}]^-, \dots, [x_{i_k}]^+, [x_{i_k}]^-$ непусты, причем в каждом из $[x_{i_s}]^+$, $1 \leq s \leq k$, содержится вершина из $[x_{i_{s-1}}]^-$ и наоборот: в каждом из $[x_{i_{s-1}}]^-$ содержится вершина из $[x_{i_s}]^+$. По определению алгоритм A' не может зачеркнуть хотя бы одну из таких вершин. Значит граф $\Gamma'(X', u')$ будет непустым.

Достаточность. Пусть неприводимый граф $\Gamma'(X', u') \subseteq \Gamma(X, u)$ не равен пустому графу. Это означает, что для всех вершин $x_i \in X'$ выполняется условие:

$[x_i]^+ \neq \emptyset, [x_i]^- \neq \emptyset$. Граф конечный.

Тогда, следуя из вершины в вершину (а это возможно, т.к. все $[x_i]^- \neq \emptyset \longrightarrow$), не более, чем через $(m+1)$ шагов, мы пройдем через одну из вершин $x_i \in X'$ дважды, что и означает наличие контура. Теорема доказана.

Следствие: Если граф $\Gamma(X, u)$ не содержит ни одного контура, то его неприводимый граф $\Gamma'(X', u')$ относительно алгоритма A' будет пустым графом.

П. Вполне возможно, что граф $\Gamma'(X', u')$ состоит из нескольких несвязанных между собой подграфов с единственной компонентой связности. Предлагается алгоритм (обозначим его \mathcal{A}'') разбиения графа на такие подграфы. Это позволит значительно сократить объем перебора при поиске соответствующих вершин, а также избавит оперативную память машины от ненужной информации.

Работу алгоритма \mathcal{A}'' удобно расчленить на несколько шагов.

1°. Берем любое множество $[X_i]^\Delta = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\kappa}\} [X_i]^\Delta \in [X]^\Delta$ неотмеченное значком β_t . Помечаем это множество значком α . Вершину x_i выписываем в множество S_t : $S_t = \{x_i\}$. Помечаем значком α все множества $[X_{i_1}]^\Delta, [X_{i_2}]^\Delta, \dots, [X_{i_\kappa}]^\Delta$, а все вершины $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\kappa}$ выписываем в множество S_t : $S_t = \{x_i, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\kappa}\}$. В исходном множестве $[X_i]^\Delta$ отметку α заменяем на β_t .

2°. Рассматриваем первое по порядку выписанное множество $[X_{i_1}]^\Delta = \{x'_{i_1}, x'_{i_2}, \dots, x'_{i_{\kappa_1}}\}$. Если все вершины множества $[X_{i_1}]^\Delta$ входят в множество S_t , то переходим к рассмотрению следующего множества $[X_{i_2}]^\Delta$, а в множестве $[X_{i_1}]^\Delta$ значек α заменяем на β_t .

Если же среди вершин множества $[X_{i_1}]^\Delta$ найдутся такие, которые не входят в множество S_t (пусть для определенности это будут вершины $x_{i_{s_1}}, x_{i_{s_2}}, \dots, x_{i_{s_e}}, s_e \leq \kappa_1$), тогда эти вершины выписываем в множество S_t ; множества $[X_{i_{s_1}}]^\Delta, [X_{i_{s_2}}]^\Delta, \dots, [X_{i_{s_e}}]^\Delta$ помечаем значком α ; в множестве $[X_{i_1}]^\Delta$ значек α заменяем на β_t и переходим к рассмотрению следующего множества $[X_{i_2}]^\Delta$.

3°. Пусть мы операцию п.2° проделали со всеми множествами $[X_{i_1}]^\Delta, [X_{i_2}]^\Delta, \dots, [X_{i_\kappa}]^\Delta$, т.е. все эти множества помечены значком β_t . Тогда среди множеств набора $[X']^\Delta$ ищем множества, отмеченные значком α , и с каждым из них проделываем операцию п.2°.

4°. Пусть после п.3° среди множеств набора $[X']^\Delta$ не осталось ни одного, которое было бы отмечено значком α . Тогда отмечаем значком α все множества $[X_j]^\Delta \in [X']^\Delta$, которые удовлетворяют следующим требованиям:

- а) множество $[X_j]^A$ не имеет отметки β_t , $t = 1, 2, \dots, T$;
 б) множеству $[X_j]^A$ принадлежит хоть одна вершина из множества S_t .

5°. Если среди множеств набора $[X]$ найдутся такие, которые удовлетворяют а) и б), то помечаем их значком α и возвращаемся к п.3°. Если же ни одно множество из $[X]^A$ не будет отмечено значком α , то переходим к началу п.1°, причем начинаем выписывать множество S_{t+1} , а вместо значка β_t ставим значок β_{t+1} . Вершины, помеченные значком β_t , представляют собой все множество X_t вершин односвязного подграфа

$$\Gamma_t(X_t, U_t) \subseteq \Gamma'(X', U')$$

Алгоритм A'' заканчивает свою работу, как только среди множеств набора $[X]^A$ не останется ни одного, которое бы не было отмечено значком β_t , $1 \leq t \leq T$. Промежуток работы алгоритма A от п.1° до повторного возвращения к п.1° называется этапом работы алгоритма A и обозначается E_t , $1 \leq t \leq T$, где T - число компонент связности исходного графа $\Gamma'(X', U')$.

III. Опишем работу алгоритма выделения элементарных контуров (обозначим его A) из неприводимого графа $\Gamma'(X', U')$. Для удобства описания работу алгоритма A будем расчленять на этапы E , шаги и пункты. Заметим, что алгоритм A может работать и без предварительного применения алгоритмов A' и A'' к исходному графу $\Gamma(X, U) \cong \Gamma'(X', U')$. В процессе работы алгоритма A мы будем помечать вершины $x_i \in X'$ и множества $[X_i]^A \in [X]^A$ двумя значками: промежуточным значком α и значком β . Причем множество, отмеченное значком β , никогда больше не рассматривается, а вершина, отмеченная значком β , никогда не приписывается к цепочке Z , о которой будет сказано ниже.

Начало работы алгоритма на каждом этапе

1°. Берем любую вершину $x_i \in X$, которая не имеет отметки β . Фиксируем начальную вершину цепочки Z : $Z = x_i$.

2°. Проверяем, содержит ли множество $[X_i]^A$ вершины, отмеченные значком β . Если содержит, то вычеркиваем их из множе-

ства $[X_i]^\Delta$. Проверяем в оставшемся множестве $[X_i]^\Delta = \{x_{i_1}', x_{i_2}', \dots, x_{i_{\ell_i}}'\}$ величину ℓ_i , т.е. количество вершин без отметки β . Если $\ell_i = 0$, то все вхождения вершины x_i в остальные множества $[X_j]^\Delta$, $j \neq i$ и само множество $[X_i]^\Delta$ помечаем значком β , цепочку Z зачеркиваем и возвращаемся к началу п.1⁰.

3⁰. Пусть $\ell_i = 1$, т.е. множество $[X_i]^\Delta$ содержит только одну вершину без отметки β . Тогда к цепочке $Z = x_i$ дописываем эту вершину (пусть для определенности это будет x_{i_1}'): $Z = x_i x_{i_1}'$. Далее берем множество $[X_{i_1}]^\Delta$ и с ним поступаем точно так же, как и с множеством $[X_i]^\Delta$ в начале п.2⁰.

Правило 1: после каждого приписывания очередной вершины (пусть это для определенности будет x_{i_1}') к цепочке Z попарно проверяем совпадение этой вершины x_{i_1}' со всеми предшествующими ей вершинами в цепочке Z .

Если последняя в цепочке Z вершина x_{i_1}' совпадает с одной из предшествующих вершин $x_{i_s}^s \in Z$, то выписываем контур $\kappa = x_{i_s}^s \dots x_{i_1}'$, а все вхождения тех вершин $x_{i_\kappa}^\kappa$, которые выписывались в цепочку Z , во все множества $[X_j]^\Delta \in [X]^\Delta$ и сами множества $[X_{i_\kappa}^\kappa]^\Delta$ помечаем значком β ; цепочку Z зачеркиваем и возвращаемся к началу п.1⁰.

4⁰. Пусть к цепочке Z впервые дописана такая вершина $x_{i_1}^\kappa$, у которой множество $[X_{i_1}^\kappa]^\Delta$ содержит вершины, не отмеченные значком β , в количестве $\ell_{\kappa+1} > 1$. Тогда переходим к началу первого шага (описание работы алгоритма A на первом шаге см. ниже).

Определение. Все вершины в начале цепочки $Z = x_i x_{i_1}', \dots, x_{i_1}^\kappa$ до первой $x_{i_1}^\kappa$ включительно такой, что соответствующее множество $[X_{i_1}^\kappa]^\Delta$ содержит больше, чем одну вершину, неотмеченную значком β , называются опорными на данном этапе E работы алгоритма A .

Условимся все опорные вершины помечать индексом \circ сверху:

$$Z \equiv \overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{x}_{i_1}' \dots \overset{\circ}{x}_{i_1}^\kappa.$$

Первый шаг

В начале первого шага имеем в конце цепочки $Z = \dot{x}_i \dot{x}_{i_1} \dots \dot{x}_{i_k}^k$ такую вершину $\dot{x}_{i_1}^k$, для которой соответствующее множество $[\dot{x}_{i_1}^k]^\Delta = \{x_{i_1}^{k+1}, x_{i_2}^{k+1}, \dots, x_{i_{e_{k+2}}}^{k+1}\}$ имеет $e_{k+2} > 1$, другими словами вершина $x_{i_1}^k$ представляет собой точку ветвления в исходном графе $r'(x, u)$. Тогда:

1⁰. Заносим вершину $x_{i_1}^k$ в множество U .

2⁰. Первую по порядку вершину $x_{i_1}^{k+1} \in [\dot{x}_{i_1}^k]^\Delta$ дописываем к цепочке Z .

3⁰. Проверяем, совпадает ли дописанная вершина $x_{i_1}^{k+1}$ с какой-либо из предшествующих ей вершин цепочки Z .

4⁰. Если совпадает, то переходим ко второму шагу (описание работы алгоритма A на втором шаге см. ниже).

Если же совпадения нет, то из множества $[\dot{x}_{i_1}^{k+1}]^\Delta$ вычеркиваем вершины с пометкой β . Пусть после вычеркивания из $[\dot{x}_{i_1}^{k+1}]^\Delta$ вершин с пометкой β имеем множество $[\dot{x}_{i_1}^{k+1}]^\Delta = \{x_{i_1}^{k+2}, x_{i_2}^{k+2}, \dots, x_{i_{e_{k+2}}}^{k+2}\}$, для которого возможен один из трех случаев:

а) $e_{k+2} > 1$; б) $e_{k+2} = 1$; в) $e_{k+2} = 0$.

5⁰. Пусть имеет место случай (а). Тогда рассматриваем вершину $x_{i_1}^{k+1}$, множество $[\dot{x}_{i_1}^{k+1}]^\Delta$ и возвращаемся к началу первого шага, т.е. с вершиной $x_{i_1}^{k+1}$ поступаем точно так же, как с вершиной $x_{i_1}^k$, начиная с п.1⁰.

В случае (б) вершину $x_{i_1}^{k+2} \in [\dot{x}_{i_1}^{k+1}]^\Delta$ дописываем к цепочке Z и возвращаемся к п.3⁰ первого шага.

В случае (в) переходим к п.2⁰ второго шага.

Второй шаг

В начале второго шага имеется совпадение последней вершины $x_{i_1}^{k+1} \in Z$ с какой-либо из предшествующих ей вершин. Пусть для определенности это будет $x_{i_s}^j \in Z$.

1⁰. Если $x_{i_s}^j \in \dot{Z}$, где \dot{Z} - последовательность опорных вершин, то выписываем контур $K = x_{i_s}^j \dots x_{i_1}^{k+1}$; если же $x_{i_s}^j \in \bar{Z}$, то см. п.6⁰ второго шага.

2°. В цепочке Z вычеркиваем последнюю вершину $x_{i_1}^{\kappa+1}$, отмечаем все ее вхождения во все множества набора $[X']^\Delta$ значком α и устанавливаем, входит ли последняя вершина $x_{i_1}^{\kappa}$ в оставшейся цепочке $Z = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_1}^{\kappa}$ в множество U .

3°. Если $x_{i_1}^{\kappa} \in U$, тогда возвращаемся к п.2°, т.е. вычеркиваем из Z эту вершину $x_{i_1}^{\kappa}$.

4°. Пусть $x_{i_1}^{\kappa} \in U, [X_{i_1}^{\kappa}]^\Delta = \{x_{i_1}^{\kappa+1}, x_{i_2}^{\kappa+1}, \dots, x_{i_{e_{\kappa+1}}}^{\kappa+1}\}$. Если мы в п.2° в цепочке Z вычеркивали вершину $x_{i_1}^{\kappa+1}$, то теперь в п.4° рассматриваем следующую по порядку после $x_{i_1}^{\kappa+1}$ вершину $x_{i_2}^{\kappa+1}$. Если окажется, что в п.2° мы вычеркнули вершину, которая оказалась последней в множестве $\{x_{i_1}^{\kappa+1}, x_{i_2}^{\kappa+1}, \dots, x_{i_{e_{\kappa+1}}}^{\kappa+1}\} = [X_{i_1}^{\kappa}]^\Delta$, т.е. вершину $x_{i_{e_{\kappa+1}}}^{\kappa+1}$, тогда возвращаемся к п.2°, т.е. снова вычеркиваем в оставшейся цепочке Z последнюю вершину.

5°. Пусть вычеркнутая в п.2° вершина $x_{i_1}^{\kappa+1}$ не является последней в множестве $\{x_{i_1}^{\kappa+1}, x_{i_2}^{\kappa+1}, \dots, x_{i_{e_{\kappa+1}}}^{\kappa+1}\}$, т.е. за ней в этом множестве следует, например, вершина $x_{i_2}^{\kappa+1}$. Тогда эту вершину $x_{i_2}^{\kappa+1}$, возвращаясь к п.2° первого шага, присписываем к цепочке на место $x_{i_1}^{\kappa+1}$.

6°. Пусть в начале второго шага $x_{i_s}^j \notin Z$. Если среди вершин последовательности $x_{i_s}^j \dots x_{i_1}^{\kappa+1} \subset Z$ найдется хоть одна, не отмеченная значком α , возвращаемся к п.1° второго шага, т.е. выписываем контур $\kappa = x_{i_s}^j \dots x_{i_1}^{\kappa+1}$. В противном случае возвращаемся к п.2° второго шага, т.е. вычеркиваем последнюю вершину $x_{i_1}^{\kappa+1}$ в цепочке Z .

Алгоритм A на данном этапе заканчивает свою работу, если в цепочке Z не останется элементов. Пусть на этапе E алгоритм A выписывает цепочку Z и хоть на одном шаге работы алгоритма вершина $x \in Z$ (*). Условимся говорить, что вершина x принадлежит области $E(X')$ работы алгоритма A на данном этапе E . Причем $E(X')$ состоит из таких и только таких вершин, которые удовлетворяют условию (*). Тогда $E_\nu(X') \cap E_\mu(X') = \emptyset$, если $\mu \neq \nu$. По окончании работы алгоритма A на данном этапе E все вершины $x_i \in E(X')$ помечаем значком β . Алгоритм заканчивает свою работу, как только все вершины из множества X' графа $\Gamma'(X', U)$ будут иметь отметку β .

1У. Очевидно, что предлагаемый алгоритм \mathcal{A} включает в себя элемент целенаправленного перебора. Интересно оценить его эффективность и сравнить сложность $L(\mathcal{A})$ алгоритма \mathcal{A} со сложностью L_p полного перебора всех возможных контуров $L_p = 2 \sum_{i=2}^m i \cdot C_m^i > 2^{m+1}$, где m - число вершин исходного графа $\Gamma(X, u)$.

За единицу сложности будем принимать очередное приписывание вершины $x_i \in X$ к цепочке Z . Если на каком-либо этапе вершина x_i выписывается k раз, предполагается, что имеет место случай k единиц сложности. Сначала докажем справедливость нескольких вспомогательных предложений.

Пусть задан ориентированный граф без петель $\Gamma(X, u)$ в виде набора $[X]^\Delta$ множеств $[X_i]^\Delta$, Δ равно только + либо только - для всего набора $[X]^\Delta$, $i = 1, 2, \dots, m$; m - количество вершин в множестве X . К исходному графу $\Gamma(X, u)$ последовательно применены алгоритмы \mathcal{A}' и \mathcal{A} , и получено множество контуров $\mathcal{O} = \{K\}$.

Лемма 1. Между всеми элементарными контурами графа $\Gamma(X, u)$ и контурами из множества \mathcal{O} существует взаимоднозначное соответствие.

Доказательство. Из утверждений 1 и 2 следует, что для доказательства леммы достаточно рассмотреть случай $\Gamma(X, u) = \Gamma'(X', u')$.

Установим однозначное соответствие в одну сторону. Действительно, то, что каждый контур $K_i \in \mathcal{O}$ является контуром графа $\Gamma(X, u)$ - очевидное следствие из определения алгоритма \mathcal{A} .

Докажем обратное утверждение: каждый элементарный контур из графа $\Gamma(X, u)$ можно найти среди контуров множества \mathcal{O} . Пусть контур $K = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_s}$, $K_i \in \Gamma'(X', u')$ и $K_i \notin \mathcal{O}$, т.е. доказательство будем вести от противного. Но алгоритм заканчивает свою работу только в том случае, если все вершины $x_i \in X = X'$, все вхождения этих вершин во все множества $[X_j]^\Delta$ из набора $[X]^\Delta$ будут отмечены значком β . Из определения алгоритма следует, что если на данном этапе E вершина $x_i \in E(\mathcal{A})$ отмечается значком β и через эту вершину проходят контуры $K_{j_1}, K_{j_2}, \dots, K_{j_z}$, то все вершины, через которые проходит хоть один из этих контуров, также будут

отмечены значком β . Это означает, что все вершины $x_{i_\kappa} \in K_i$, $x_{i_\kappa} \in X'$, $1 \leq \kappa \leq S$ были помечены значком β на одном и том же этапе E работы алгоритма A , т.е. $x_{i_\kappa} \in E(A)$. Но если $x_{i_\kappa} \in E(A)$, то x_{i_κ} принадлежала цепочке Z , выписываемой алгоритмом A на данном этапе E . Из определения алгоритма A следует, что вершина x_{i_κ} без отметки α может быть вычеркнута из цепочки Z прежде, чем будет выписан контур $K_i \ni x_{i_\kappa}$, только в том случае, если любое продолжение цепочки от вершины x_{i_κ} оканчивается вершинами x_{i_z} , $z \neq \kappa$, у которых множества $[x_{i_z}]^\Delta$ содержат только вершины, отмеченные значком β . Но так как одно из этих продолжений принадлежит контуру K_i , то мы приходим к противоречию, а именно: имеем контур K_i , у которого имеются вершины, отмеченные значком β , и вершины без отметки β . Остается доказать, что если два контура $K_i \in \mathcal{O}$, $K_j \in \mathcal{O}$, $i \neq j$, то $K_i \neq K_j$. Предположим обратное: $K_i \in \mathcal{O}$, $K_j \in \mathcal{O}$, $i \neq j$ и $K_i = K_j$. Заметим, что в этом случае K_i и K_j могут быть выписаны алгоритмом A только на одном этапе E . Пусть для определенности контур K_j выписан после контура K_i .

$$K_i = K_j = x_{e_1} x_{e_2} \dots x_{e_k}, [x_{e_1}]^\Delta = \{x_{e_2}, x'_{e_2}, \dots, x_{e_s}\}, S \geq 0.$$

Если $x_{e_1} \in \dot{Z}$, то равенство $K_i = K_j$ будет означать, что после выписывания контура $K_i = x_{e_1} x_{e_2} \dots x_{e_k}$ мы не осуществили в какой-то из точек x_{e_u} , $[x_{e_u}]^\Delta = \{x_{e_{u+1}}, x'_{e_{u+1}}, \dots, x'_{e_{u+\nu}}\}$ $1 \leq u < k$, $\nu > 1$ очередной замены $x_{e_{u+1}}$ на $x'_{e_{u+\mu}}$, $1 < \mu \leq \nu$ при выписывании цепочки $Z \ni x_{e_1} x_{e_2} \dots x_{e_k}$, что противоречит определению алгоритма A .

Пусть $x_{e_1} \notin \dot{Z}$. В таком случае при выписывании контура K_j (после контура K_i) все вершины последовательности $x_{e_1} x_{e_2} \dots x_{e_k}$ будут иметь отметку α , что также противоречит определению алгоритма A . Лемма доказана.

Условимся говорить, что между вершинами $x_o, x_p \in X$ графа $\Gamma(X, U)$ существует путь с пересечениями $P(x_o, x_p)$ в таких случаях:

а) из вершины x_o к вершине x_p имеется R простых путей: $P_1(x_1, u_1), P_2(x_2, u_2), \dots, P_R(x_R, u_R)$, $R \geq 2$, где x_i, u_i - множество вершин и ребер соответственно, из

которых состоит путь P_i , $1 \leq i \leq R$;

$$б) (X_\xi - X_0) \cap (X_\eta - X_0) \neq \emptyset, \xi \neq \eta, 1 \leq \xi, \eta \leq R;$$

в) нет ни одного контура $K \subseteq \Gamma(X, U)$, вершины которого принадлежали бы только множеству $X, UX_2U \dots UX_R$, а ребра - только множеству $U, UU_2U \dots UU_R$.

Число R будем называть сложностью пути с пересечениями $P(X_0, X_p)$. Из определения алгоритма A следует, что один и тот же контур $K \subseteq Z$, $K = x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_n}$, будет встречаться при выписывании цепочки Z больше одного раза только лишь в случае наличия между опорной последовательностью $\tilde{Z} \subset Z$ и вершиной x_{k_i} некоторого пути с пересечениями, количество которых равно R .

Рассмотрим класс Γ_m всех ориентированных графов без петель с m вершинами. Число $L(\Gamma_m)$ всех ориентированных графов без петель с n вершинами составит $L(\Gamma_m) = \sum_{n=1}^m \frac{M!}{(M-n)!}$,

где $M = m^2 - m$,

n - число ребер.

Говорят, что подкласс Γ'_m содержит почти все графы класса Γ_m , если

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{L(\Gamma'_m)}{L(\Gamma_m)} = 1,$$

где $L(\Gamma'_m)$ - число всех ориентированных петель из подкласса Γ'_m .

В качестве Γ'_m возьмем множество всех ориентированных графов без петель, каждый из которых не содержит ни одного пути с пересечениями. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Подкласс Γ'_m содержит почти все ориентированные графы без петель.

Для доказательства леммы нам удобно ввести понятие дополнения $C(\Gamma'_m)$ к множеству Γ'_m в классе всех графов Γ_m . Очевидно, необходимым условием существования пути с пересечениями является наличие в графе вершины x_i , такой, что из нее исходит хотя бы две дуги в некоторые вершины x_{i_2} и x_{i_3} ,

$i_2 \neq i_3$. Остальные дуги инциденты каким угодно вершинам

(в том числе $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}$) и в каком угодно порядке. Обозначим множество всех графов из Γ_m таких, что для них хоть одна вершина удовлетворяет этому условию, через $\mathcal{G}(\Gamma_m)$. Совершенно очевидно, что имеет место строгое включение $\mathcal{C}(\Gamma'_m) \subset \mathcal{G}(\Gamma_m)$. Лемма будет доказана, если мы покажем, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{L(\mathcal{G}(\Gamma_m))}{L(\Gamma_m)} = 0 \quad (*)$$

Действительно, вершину x_{i_1} мы можем выбрать m различными способами, а вершины x_{i_2} и x_{i_3} не более, чем $(m-1)$ и $(m-2)$ способами соответственно. Тогда мощность множества $\mathcal{G}(\Gamma_m)$ составит:

$$L(\mathcal{G}(\Gamma_m)) = \sum_{n=2}^M \frac{m(m-1)(m-2)(M-2)!}{(M-n)!}$$

Учтя (*), перейдем к пределу:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{L(\mathcal{G}(\Gamma_m))}{L(\Gamma_m)} &= \frac{m(m-1)(m-2)(M-2)! \sum_{n=2}^M \frac{1}{(M-n)!}}{M! \sum_{n=1}^M \frac{1}{(M-n)!}} = \\ &= \frac{m(m-1)(m-2)}{m(m-1) \cdot m \cdot (m-1 - \frac{1}{m})} < \frac{1}{m} = 0 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Обозначим $L(A)$ - сложность алгоритма A и докажем, что справедлива следующая

Теорема 2. Для почти всех ориентированных графов без петель

$$0 \leq L(A) \leq k(m+1),$$

где k - количество контуров в исходном графе

$$\Gamma(x, u),$$

m - число вершин.

Праведливость нижней оценки следует из следствия к теоре-

ме 1 и того факта, что существует весьма обширный подкласс графов без контуров. При доказательстве верхней оценки будем иметь в виду самый сложный случай, когда выписывание всех контуров совершается алгоритмом A в один этап $E : E(A) = X$ и граф $\Gamma(X, U)$ алгоритмом A' не упрощается. Действительно, алгоритм A выписывает только элементарные контуры, т.е. такие контуры, при обходе которых ни одна вершина не встречается дважды, кроме начальной. Элементарный контур содержит не более, чем все вершины графа плюс одна последняя вершина, совпадающая с начальной. Всего таких контуров k , причем каждый из них, согласно леммы 1 и леммы 2, выписывается не более одного раза. Теорема доказана.

Следствие. Пусть для исходного графа $\Gamma(X, U)$ его неприводимый граф $\Gamma'(X', U') \neq \Lambda$, $X' \neq \emptyset$.

Тогда $(m'+1) \leq L(A) \leq k(m'+1)$, где m' - число вершин в неприводимом множестве X' .

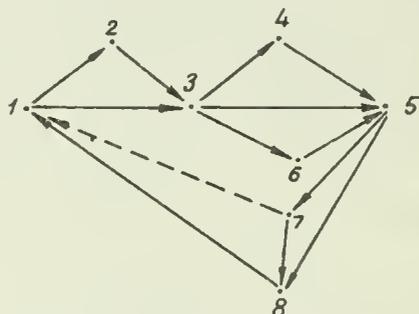
У. Несколько замечаний относительно алгоритма выписывания линейно-независимых контуров. Пусть число дуг в исходном графе $\Gamma(X, U)$ равно $n : u_1, u_2, \dots, u_n$. Условимся вектор (k^1, k^2, \dots, k^n) n -мерного евклидова пространства R^n называть вектор-контуром, соответствующим контуру $K \in \Gamma(X, U)$, и обозначать \vec{K} , где $k^i = 1$, $1 \leq i \leq n$, если $u_i \in K$, и $k^i = 0$, если $u_i \notin K$. Контуры K_1, K_2, \dots называются линейно-независимыми, если соответствующие им векторы $\vec{K}_1, \vec{K}_2, \dots$ линейно-независимы. Следует отметить, что алгоритм A выписывает все элементарные контуры, в том числе и все элементарные линейно-независимые контуры.

Теорема 3. В любом графе число μ линейно-независимых контуров меньше или равно числу k всех элементарных контуров.

Доказательство. Возьмем граф, состоящий из одних вершин, и, добавляя к нему ребро за ребром, построим данный граф $\Gamma(X, U)$. В силу известной теоремы о цикломатическом числе [1] с добавлением каждой дуги цикломатическое число, а стало быть и

число независимых контуров, может увеличиться не более, чем на единицу. Но если появляется один новый независимый контур, то обязательно появляется один или больше элементарных контуров.

В справедливости последнего замечания легко убедиться на следующем простом примере. Действительно, при добавлении дуги, обозначенной пунктиром, число элементарных контуров увеличится на 6.



Теорема доказана.

Обозначим \mathcal{A}^e - алгоритм выписывания линейно-независимых контуров; \mathcal{O}^e - множество линейно-независимых контуров, выписываемое алгоритмом \mathcal{A}^e . Согласно теореме 3 $\mathcal{O}^e \subseteq \mathcal{O}$. Работа алгоритма \mathcal{A}^e до первого шага включительно в точности совпадает с работой алгоритма \mathcal{A} и отличается от работы последнего только в п.1⁰ и п.6⁰ второго шага, а именно - вместо п.1⁰ следует выполнять следующие три пункта: 1⁰- В, 1⁰- С и 1⁰- Д. Причем, вводится дополнительное множество \mathcal{W} .

Второй шаг работы алгоритма \mathcal{A}^e . В начале второго шага имеется совпадение последней вершины x_{i_1} цепочки Z с какой-либо из предшествующих ей вершин: $\kappa = x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\kappa}, x_{i_1} \in Z$

1⁰-В. Выписываем множество \mathcal{U} пар, которым взаимнооднозначно соответствует множество дуг, образующих контур \mathcal{K} :

$$\mathcal{U} = \{(x_{i_1}, x_{i_2}), (x_{i_2}, x_{i_3}), \dots, (x_{i_\kappa}, x_{i_1})\}$$

1⁰-С. Проверяем, содержит ли множество \mathcal{U} хоть одну пару $(x_{i_j}, x_{i_{j+1}})$, $i_\kappa + 1 = i_1$, которой нет в множестве \mathcal{W} .

1⁰-Д. Если такая пара $(x_{i_j}, x_{i_{j+1}})$ найдется, то выписываем контур $\mathcal{K} = x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\kappa}$ в множество \mathcal{O}^e , множество \mathcal{U}

добавляем к множеству W и переходим к п.2⁰ второго шага.

Запишем п.6⁰ для алгоритма A^e на втором шаге.

6⁰. Пусть $u \in W$. Тогда выполняем предписание п.6⁰ второго шага для алгоритма A .

Алгоритм A^e просматривает множество \mathcal{C} всех элементарных контуров исходного графа $\Gamma(X, u)$ и из этого множества выбирает систему \mathcal{C}^e линейно-независимых контуров. Поэтому множество \mathcal{C}^e представляет собой максимальную систему линейно-независимых контуров для $\Gamma(X, u)$.

Л и т е р а т у р а

К.Б е р ж . Теория графов и ее приложения. Издательство ИЛ, 1962.

Дж. Р и о р д а н . Введение в комбинаторный анализ. Издательство ИЛ, 1963.

Часть П

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ
В ИНЖЕНЕРНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

Под редакцией Б.В.Розина

И.П.Шубкина, Н.Б.Мироносецкий, Э.В.Коробкова

МОДЕЛИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ
НА МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОМ ЗАВОДЕ

В в е д е н и е

Развитие и совершенствование методов математического программирования и электронно-вычислительной техники позволяют существенно улучшить качество текущего внутризаводского планирования. В настоящее время широко известны и применяются для целей оптимального планирования на промышленных предприятиях методы линейного программирования. Эти методы используются для решения таких, например, планово-производственных задач, как определение оптимальной специализации предприятий, цехов, участков; расчет оптимальной годовой программы производства комплектной продукции; оптимальное распределение производственной программы по плановым периодам года (кварталам, месяцам и пр.); выбор оптимального варианта загрузки оборудования; оптимизация материально-технического снабжения производства, раскрытия мате-риалов и некоторые другие.

Общая характерная особенность этих задач (или большинства из них) состоит в том, что их объектом являются процессы производства в статике, и сам метод построения оптимального плана

связан только с объемными, а не с календарными расчетами.

Наряду с задачами такого рода в системе плановых задач на промышленном предприятии имеют место задачи, объектом которых является процесс в динамике, во времени.

Среди этих задач наиболее сложной и характерной является задача составления календарного плана-графика загрузки оборудования, т.е. определения последовательности движения деталей в пространстве (по станкам) и во времени (календарно). Эта задача широко известна в литературе как "задача календарного планирования".

Задача составления календарного плана-графика загрузки оборудования является одним из важнейших звеньев оперативно-производственного планирования. Важность этого звена определяется тем, что именно порядок, последовательность обработки деталей на станках в рамках имеющегося парка оборудования обуславливает, в конечном счете, время производства продукции, эффективность использования производственных мощностей и трудовых ресурсов предприятия. Решение проблемы общей загрузки предприятия теснейшим образом связано с решением вопросов оптимизации последовательности запуска деталей в обработку.

Рассмотрим часть этой проблемы на небольшом примере. По плану на трех станках (I, II, III) должны быть обработаны три детали (А, Б, В). Для каждой из них задан технологический маршрут обработки и время обработки на каждом станке. Задана также пропускная способность, или полезный фонд времени работы оборудования. Необходимо сделать объемный расчет загрузки оборудования и проверить возможность выполнения плана календарно.

Объемный расчет показывает, что заданная программа производства деталей вполне может быть выполнена при наличном парке оборудования, и при этом программа не будет очень напряженной, поскольку оборудование располагает значительными резервами полезного фонда времени.

Следующим этапом плановой работы является оперативное руководство производственным процессом, т.е. построение календарного графика загрузки оборудования. По условиям задачи построение календарного графика может быть выполнено в любом варианте: детали могут следовать в порядке А, Б, В или Б, А, В или

Объемный расчет загрузки оборудования

Номера станков	Технологический маршрут и время обработки деталей			Потребное количество станкочасов	Полезный фонд времени работы оборудования
	А	Б	В		
1	7	4	3	14	20
II	3	8	4	15	20
III	2	3	5	10	20
Время технологического цикла	12	15	12	39	60
Плановый коэффициент загрузки оборудования				$\frac{39}{60} = 0,65$	

В, А, Б и т.д. в любом из шести возможных сочетаний. (См. график).

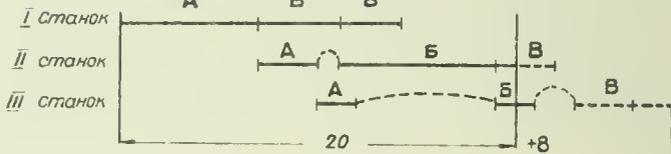
Из построенных календарных графиков загрузки оборудования заданным условиям отвечает только вариант В,Б,А, поскольку он позволяет выполнить план обработки деталей при имеющемся парке оборудования, тогда как все остальные варианты не обеспечивают выполнения плана из-за недостатка полезного фонда времени работы оборудования.

В приведенном выше примере, чтобы найти план, удовлетворяющий условиям задачи, пришлось перебрать всего шесть вариантов сочетаний последовательности запуска деталей в обработку, так как число деталей не превышало 3-х. В наиболее общем случае количество возможных перестановок определяется как $(n!)^M$, если допускается любая последовательность операций M и $n!$, если последовательность операций для каждой детали заранее установлена и порядок движения деталей друг за другом остается неизменным, как в нашем примере. Но и в этом случае, даже при небольшом увеличении количества деталей, число возможных перестановок таково, что выбор оптимального варианта представляется пока практически неосуществимым.

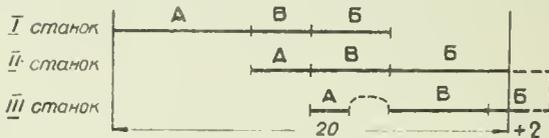
При построении плана запуска в обработку 10 изделий количество возможных порядков запуска будет $10! = 3628800$, 20 из-

ВАРИАНТЫ КАЛЕНДАРНОГО ГРАФИКА ЗАГРУЗКИ ОБОРУДОВАНИЯ

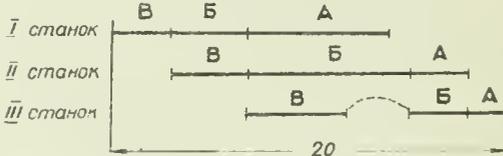
ВАРИАНТ АБВ



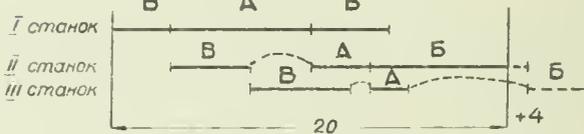
ВАРИАНТ АВБ



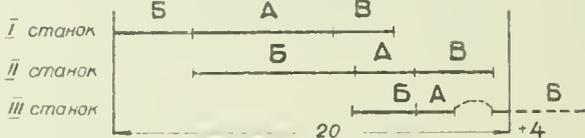
ВАРИАНТ ВБА



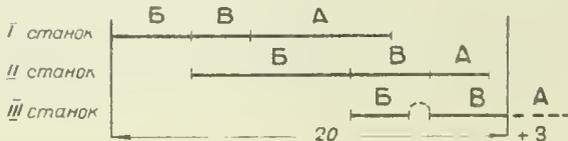
ВАРИАНТ ВАБ



ВАРИАНТ БАВ



ВАРИАНТ БВА



делий - $20! = 2432902008176640000$. При современных вычислительных средствах перебор всех этих вариантов и отыскание среди них оптимального невозможно. Это и вызывает необходимость разработки специальных математических методов, позволяющих найти оптимальный вариант, не осуществляя перебор всех вариантов.

Многие задачи оперативно-производственного планирования (и прежде всего, календарная задача) находятся в центре внимания математиков, экономистов и организаторов производства в СССР и за рубежом на протяжении уже не одного десятка лет.

Это внимание объясняется, повидимому, как острой потребностью промышленности в получении рациональных методов их решения, так и особой сложностью разработки самих методов. Дело в том, что решение подобного рода задач в большинстве случаев связано с необходимостью учета непропорционального изменения параметров рассматриваемых процессов во времени, в динамике, а также получения целочисленного результата решения.

Первые глубокие исследования в этой области были сделаны в 1954-1955 гг. *S. Johnson'ом и R. Bellman'ом*¹⁾. Ими же были получены первые результаты для простого случая постановки задачи календарного планирования. *R. Bellman* убедительно показывает, что возможности современной математики для решения подобных задач весьма ограничены и могут быть использованы лишь для отыскания оптимального варианта плана в том случае, если число стадий обработки не превышает трех при неограниченном числе обрабатываемых деталей.

Современный математический аппарат не имеет пока в своем распоряжении методов динамического программирования, которые могли бы быть использованы для решения задачи в более сложной постановке. Для использования же методов линейного, билинейного и целочисленного программирования (в том числе, если решение может быть сведено к этим методам)²⁾ нет средств вычислительной техники, располагающих необходимым объемом машинной памяти и быстродействием.

1) *Mathematical Aspects of Scheduling Theory*
» *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, v. 4, 1956.

2) А.Л. Лурье. О некоторых задачах календарного планирования "Проблемы кибернетики" вып. 7, 1962г. А.И. Каценелинбойген и А.И. Смоляр. Об одной экстремальной задаче оперативного планирования. "Математические методы в технико-экономических расчетах", 1961г.

Попытки в какой-то мере снять это противоречие привели к поиску приближенных методов решения, которые дали бы возможность получить (используя достигнутый уровень развития математических методов и вычислительных средств), если и не оптимальный, то хотя бы близкий к нему результат. Поэтому ряд авторов, занимающихся проблемой оптимизации последовательности запуска деталей в производство, высказывает мысль о необходимости разрабатывать модели и методы, "помогающие изучать ситуацию хотя бы интуитивно и найти, если не оптимальные, то такие последовательности, которые все же лучше, чем получаемые методом гадания на кофейной гуще, применяемым в промышленности в настоящее время"¹⁾.

В СССР и за рубежом предложен ряд методов приближенного решения календарной задачи. Каждый из них относится к какому-либо частному случаю постановки задачи: известны модели балансирования сборочных линий, модели определения последовательности обработки в механическом цехе с взаимозаменяемым оборудованием и без него, модели, учитывающие совместную обработку деталей на одном станке и не учитывающие ее, модели для определения последовательности на поточных линиях и в предметно-замкнутых участках и т.д. Почти все эти модели построены с учетом различных критериев оптимальности.

В СССР в области разработки моделей и методов решения календарной задачи известны работы по календарному планированию участков и цехов серийного и единичного производства²⁾, серийного³⁾, массового (поточные линии)⁴⁾ и некоторые другие. Еще более

1) R. E. Sisson. *Methods of Scheduling in Job Shops a Review*, "Operations Research", v. 7, n. 1, 1959.

2) С.А. Думлер. Применение методов моделирования и имитации в организационно-экономических исследованиях, АН СССР СО, Новосибирск 1962. Н.И. Сухоруков, В.А. Крбурский. Составление графика прохождения деталей по операциям и графика загрузки оборудования на машине Урал-1 для механического завода единичного и мелко-серийного машиностроения. "Применение математических методов и новейшей вычислительной техники в планировании машиностроительного производства", М. 1962, стр. 127-139.

3) В.А. Петров, С.А. Соколицин. Построение оптимального календарного плана обработки деталей на групповых поточных линиях упорядоченным математическим методом. "Математико-экономические проблемы", 1963, стр. 66-82.

4) Б.В. Шкурба, Т.П. Подчасова. Об одном подходе к организации и планированию работы предприятий массового производства. Материалы научных семинаров по теоретическим и прикладным вопросам кибернетики. Киев, 1963.

широк круг исследований, проводимых по этой задаче за рубежом. В США, например, этой проблемой занимаются не только экономисты и организаторы производства, но и большое число ученых-математиков.

Среди различных точек зрения на возможности и пути решения календарной задачи для ряда авторов характерен весьма широкий подход к ней.

R. Bellman в уже упоминавшейся работе рассматривает задачу календарного планирования в широком смысле слова, выходящем часто за рамки того, что вкладывается в это понятие экономистами и организаторами производства. Он справедливо указывает на отсутствие точного определения календарного планирования и подчеркивает, что для охвата всего спектра экономических и математических проблем это определение будет "неопределенным и непригодным для использования".

R. Bellman, а вслед за ним и ряд других авторов, пользуясь этим неточным определением, рассматривают задачи подчас различного экономического содержания, но сходные по математической постановке и методам решения. Так, *R. Bellman* рассматривает, наряду с различными вариантами задачи определения последовательности запуска деталей в производство, задачу о поставщике, задачу оптимизации запасов на складе, транспортные задачи в связи с определением пропускной способности сети и др. В этой связи упоминаются задачи о распределении стадий обработки, распределении рабочих по станкам при многостаночном обслуживании, распределении денежных средств на приобретение оборудования и оплату рабочих и т.д.

Рассмотрение задачи календарного планирования в таком широком плане очерчивает скорее круг общих математических, нежели экономических проблем. Этот подход может оказаться несколько непривычным для экономистов, но тем не менее он обеспечивает, по видимому, больше возможностей для отыскания математических методов решения задачи как в широком, так и в собственном значении этого определения на основе теории расписаний.

При рассмотрении модели собственно календарной задачи обычно имеются в виду следующие условия, характерные для работы механических цехов: имеется P деталей и M станков, при этом

группа станков одного и того же типа рассматривается как один станок. При запуске деталей в обработку выполняются следующие условия: а) для всех деталей соблюдаются технологические маршруты и время их обработки на станках; б) на станке не может обрабатываться одновременно более одной детали; в) размеры оптимальной транспортной партии определены заранее. Необходимо найти наилучший вариант распределения деталей по станкам во времени.

Такая постановка задачи отражает существо моделируемого процесса, но при этом абстрагируется от многих обстоятельств и условий, в которых протекают реальные производственные процессы. Разработка приближенных методов решения задачи связана с ее конкретной постановкой и необходимостью учитывать те или иные существенные для данного реального случая условия. Очевидно, что методы окажутся тем эффективнее, чем более будут учтены в модели реальные условия производства. Такими условиями могут быть как заранее известные регламентированные обстоятельства работы цеха, так и случайные отклонения, нарушения процесса и т.д.

К первым могут быть отнесены такие факторы: детали одной партии могут обрабатываться одновременно на нескольких взаимозаменяемых видах оборудования; возможен параллельно-последовательный вид движения деталей в производство и расчленение транспортной партии; возможна совместная обработка некоторых деталей на одном станке; имеются альтернативные технологические маршруты для одних и тех же деталей и т.д.

Столь же необходимым может оказаться учет таких факторов, как колеблемость оперативного времени обработки или времени транспортировки деталей; возможность простоев оборудования; возможность брака в производстве; случаи нехватки сырья и инструмента и т.п. Тщательный анализ конкретных условий при постановке задачи должен выявить наиболее характерные и преобладающие в данном производстве факторы. В соответствии с результатами такого анализа может быть построена математическая модель и разработаны методы ее реализации с помощью электронно-вычислительной техники.

Ряд исследований за рубежом направлен на выяснение сравнительной эффективности решения задачи так называемыми расчетно-аналитическими методами и стохастическими. Один из ведущих ис -

следователей в этой области, *R. Sisson* ¹⁾, в соответствии с разными подходами к решению, используемыми разными авторами, рассматривает разработанные ими модели, как "механические", если они носят детерминистический характер, переменные, с помощью которых описан процесс, строго определены и предпринимается попытка детального планирования процесса обработки каждой детали во времени и, как "термодинамические" модели, если при моделировании не предпринимается попытка определить состояние детали в каждый данный момент, а вместо этого задаются вероятности обна- ружения детали на различных рабочих местах и т.д.

"Механическая" модель отражает условия, при которых время обработки детали, время ее транспортировки и готовности фикси- ровано и не подвержено случайным колебаниям. В действительности в реальных условиях работы механического цеха все эти параметры процесса нередко носят вероятностный характер, что делает более обоснованным применение "термодинамической" модели. "Интуитивно кажется, что механические модели совершенно нереальны, поскольку действие большинства факторов, влияющих на работу цеха, не- возможно предсказать в силу их ярко выраженного стохастического характера"¹⁾. Однако надо учитывать, что механические модели будут находить все более широкое применение по мере развития ав- томатизации производства.

Проверка эффективности тех и других моделей в реальном про- изводстве часто затруднена вследствие организационных трудностей прямого эксперимента, связанных с ним затрат, а так же из-за отсутствия необходимых данных о процессе, о их вероятностном распределении. Поэтому некоторые исследователи обратились к ме- тодам имитации процесса календарного планирования на электронно- вычислительной машине. Результаты экспериментов по имитации вы- явили ряд новых теоретических проблем и показали возможность практического использования отдельных моделей.

A. Rowe ²⁾ раскрывает смысл имитации как попытку модели- рования поведения системы с целью изучения ее реакций на специ- фические изменения. При этом к модели, в которой формализовано поведение системы, предъявляются требования, чтобы параметры,

1) *R. Z Sisson* , см. сноску на стр. 108

2) *Toward a Theory of Scheduling* „ *The Journal of Industrial Engineering*“, V, XI, №2, 1960.

переменные и целевая функция соответствовали моделируемой системе, в том числе параметры охватывали бы существенные свойства системы, а переменные описывали поведение системы для данного множества параметров.

Описания экспериментов по имитации календарного планирования в работах *R. Sisson'a* , *A. Rowe* , а также частично С.А.Думлера свидетельствуют о том, что в процессе имитации раскрываются многие еще неиспользованные возможности уточнения самой модели путем введения в нее дополнительных условий, отражающих реальные факторы производства, и могут быть экспериментально проверены различные алгоритмы нахождения оптимальных или близких к ним последовательностей запуска деталей в производство.

Результаты имитации¹⁾ на ЭВМ 3-х месячной работы механического цеха, в котором находилось 100 станков, обрабатывалось в каждый данный момент 200-300 деталей, а над каждой деталью производилось 40-50 операций, показали, что процесс календарного планирования в цехе может быть усовершенствован и это даст сокращение издержек на 7%, а простоев оборудования и рабочих - на 16%, по сравнению с существующим положением.

Многочисленные эксперименты по имитации²⁾ были проведены на основе модели механического цеха, в котором было 17 групп оборудования. Цех выполнял различные заказы, количество и размеры партий деталей по которым колебались, стоимость деталей также была различной. Длительность операций колебалась от долей часа до нескольких недель. Была построена модель цеха с некоторым упрощением реальных условий. Применяя различные алгоритмы в каждом из "проигрываний" модели, получили ряд результатов для оценки эффективности того или иного из алгоритмов.

Например, при сравнении результатов 4-х экспериментов было установлено, что коэффициент загрузки оборудования колеблется в зависимости от используемого алгоритма от 0,12 до 0,84; время пролеживания дорогих деталей - от 0,21 до 0,72; удельный вес стоимости незавершенного производства - от 83,9 до 90,0; удельный вес деталей, выпускаемых в срок, - от 68,7 до 100,0 и т.д.

1) *R. Z Sisson* , см.сноску на стр. 108

2) *A. Rowe* , см.сноску на стр. 111

В результате анализа этих данных был выбран наиболее рациональный алгоритм решения задачи для данных конкретных условий производства.

Поскольку отсутствуют точные численные методы отыскания оптимального решения для задач календарного планирования и алгоритмы в силу необходимости являются логическими, большое значение при их разработке имеют правила направленного перебора вариантов с целью сокращения, насколько это возможно, самого перебора и подчинения его определенной системе. В настоящее время для этого широко используются методы, основанные на построении различных функций "предпочтения".

Использование функции предпочтения предполагает приписывание, например, каждой детали определенного уровня, индекса предпочтения, в соответствии с которым она поступает на очередную операцию обработки. Смысл расчета такого индекса состоит в том, чтобы учесть, насколько это возможно, время запаздывания каждой детали относительно сроков предполагаемого окончания ее обработки, и, найдя среди всех деталей такие, у которых время запаздывания наибольшее, а индекс предпочтения, соответственно, выше, быстрее продвигать именно эти, потенциально запаздывающие детали в процессе обработки. Индекс предпочтения в этом случае будет рассчитываться каждый раз, когда станок заканчивает очередную операцию. Деталь с наиболее высоким индексом становится в очередь к данному станку первой.

Существует весьма много формул для расчета функций предпочтения. При этом фактор предпочтения может быть использован как для деталей, так и для станков. Он может быть представлен как функция времени обработки или стоимости обработки детали и т.п. Функция предпочтения может быть построена на основе вероятностных характеристик процесса.

Предпочтение определяется как функция от тех факторов, которые оказывают наиболее существенное влияние на предполагаемый результат решения задачи. Выбор функции предпочтения часто зависит от основной цели задачи и от критерия оптимальности, который устанавливается в соответствии с этой целью.

Наиболее общей целью оптимизации последовательностей запуска деталей, а также целью, которая теснее всего связана с зада -

чей увеличения загрузки производственных мощностей предприятия, является сокращение длительности общего цикла изготовления заданной программы деталей или изделий. В этом случае критерием оптимальности является минимизация времени обработки всех деталей. В зависимости от конкретных условий и целей календарного планирования критерием эффективности могут быть: максимизация загрузки оборудования, минимизация суммарных отклонений от плановых сроков изготовления деталей или минимизация максимальных отклонений от плановых сроков, минимизация стоимости незавершенного производства, минимизация потерь от опоздания с поставками и др.

Таким образом, мы рассмотрели в основных чертах ряд достижений в области моделирования и поисков приближенных методов решения задачи календарного планирования. На некоторые из них опирались авторы настоящей работы, предпринимая попытку разрабатывать модель и найти методы приближенного решения задачи на заводе "Тяжстанкогидропресс" им.Эфремова.

В настоящей работе рассматриваются модели календарного планирования в одном из пролетов механического цеха завода. Модели носят строго детерминированный характер без непосредственного учета случайных отклонений в процессе производства. Известно в то же время, что работа пролета подвержена некоторым случайным колебаниям. Однако информация об этих колебаниях оказалась недостаточной, чтобы построить модель стохастического характера или хотя бы с элементами стохастического подхода. Решение задачи для практического использования должно предусматривать факт нестабильной работы пролета. Поэтому при постановке задачи было сформулировано требование, чтобы при разработке алгоритма и программы на ЭВМ были найдены правила корректировки или пересоставления графика при случайных нарушениях процесса.

Специфические условия работы пролета и требования, предъявляемые к условиям выполнения плана выпуска деталей, вызвали необходимость использовать методы предпочтения при разработке одного из алгоритмов. Выбор и построение функции предпочтения определялись характером критериальной функции и факторами, оказывающими наибольшее влияние на процесс производства.

1. Постановка задачи календарного планирования в пролете уникальных базовых деталей механического цеха № 1

Завод изготавливает тяжелые станки и гидропрессы. Каждое изделие насчитывает до 1200 наименований деталей, из них 10-15 уникальных базовых деталей. Механическая обработка базовых деталей осуществляется в отдельном пролете механического цеха. Производство этих деталей носит единичный и мелкосерийный характер, после каждого цикла обработки программа пролета обновляется примерно на 30-40%. Детали имеют различный цикл обработки (он колеблется от 30 до 900 часов), как правило, длительный.

Пролет насчитывает 27 рабочих мест, из них 25-станочных. Технологический маршрут одной детали может содержать до 30 операций. В течение месяца в пролете проходят обработку до 100 деталей. При этом все или почти все детали имеют различную последовательность обработки на станках: в ряде случаев одна и та же деталь проходит два или три раза обработку на одном и том же станке, "возвращается"; некоторые детали на отдельных операциях проходят совместную обработку (иногда 2-3 детали в течение всего цикла обработки несколько раз соединяются для совместной обработки на одном станке, затем снова обрабатываются отдельно и т.д.); процесс обработки в пролете прерывается операциями "старения", малярными и др., требующими выхода деталей из цеха на месяц и более с последующим их возвращением в цех; между станочными операциями детали, как правило, проходят нестаночные операции, выполняемые в том же цехе (слесарная обработка, разметка, контрольные операции).

В этих условиях оперативное планирование и управление производством встречают большие трудности. Они возникают на всех этапах, начиная от разработки плана-графика календарного движения деталей по станкам и кончая текущим руководством производственным процессом.

При разработке графика должны быть учтены сроки подачи некоторых деталей на сборку (если они заранее определены и являются директивными), необходимость создания задела деталей для работы в следующих плановых периодах и максимальной загрузки тех

единиц оборудования, которые по тем или иным причинам лимитируют выполнение производственной программы пролета.

На заводе составлением графика вручную (см. график) для этого пролета заняты ежемесячно в течение 3-5 дней 2-3 квалифицированных работника цеха и производственного отдела завода. В процессе составления графика на каждый следующий месяц они в первую очередь проверяют, может ли заранее известный лимитирующий станок "пропустить" полностью предложенную цеху программу обработки и выпуска деталей; если необходимое время обработки заданной группы деталей на этом станке оказывается больше планового фонда времени его работы, становится сразу очевидным, что состав задания должен быть каким-то образом приведен в соответствие с имеющимися возможностями оборудования. Если задание таково, что указанный станок может "пропустить" все необходимые детали, то они в некотором порядке запускаются (на графике) на этот станок. Затем детали распределяются по остальным станкам и работа их планируется таким образом, чтобы обеспечить своевременное поступление деталей на лимитирующий станок.

Определение порядка запуска деталей на станки, в том числе на лимитирующий станок, требует перебора множества вариантов. Работники, занятые составлением графика, не могут практически выполнить этот объем работы в необходимые сроки и поэтому неизбежно ограничиваются нахождением первого более или менее удачного варианта. Если учесть все отдельные исправления и перестановки, которые они вносят в график в процессе его составления, и рассматривать каждое такое исправление и перестановку как переход к другому варианту, то можно считать, что перебирается не больше двух-трех десятков вариантов запуска деталей на станки.

Этот практически возможный перебор (если учитывать большой производственный опыт и квалификацию работников, занятых составлением графика) позволяет в максимальной степени загрузить лимитирующий станок. Однако это еще не дает оснований считать составленный график наилучшим и обеспечивающим нормальную работу пролета. Дело в том, что в зависимости от порядка запуска деталей другие станки, не лимитирующие, оказываются загруженными в весьма различной степени. Не находя путей к тому, чтобы загрузить имеющийся парк станков и соответствующих рабочих-станочников ра-

ботой по изготовлению тех деталей, которые в ближайшем плановом периоде должны пойти на сборку, работники цеха "дотруживают" станки другими деталями, непосредственно в данный момент и в ближайшем будущем не нужными.

Это же заставляет всегда иметь в цехе большие "запасы" литья. В связи с этим создается громадный задел незавершенного производства.

После составления графика для работников цеха (начальника пролета, диспетчера, мастеров участков) наступает очень напряженный период оперативного руководства календарным выполнением графика. Для работы пролета весьма характерны частые нарушения производственного процесса, связанные со скрытым браком литья, который обнаруживается на самых различных стадиях обработки детали, с нестабильной работой отдельных видов оборудования, неупорядоченной работой крана, нехваткой рабочих нужной специальности и т.д. Подобные нарушения вызывают необходимость в корректировке графика и приведении его в соответствие с новыми условиями производства. Очень важно отметить, что при этом нарушаются директивные сроки выпуска деталей, подачи их на сборку. Поэтому возникает потребность в оперативном принятии решений или об изменении этих сроков, или о создании особых условий для выполнения этих сроков ценой нарушения нормального хода работы цеха.

В результате этих нарушений через весьма непродолжительное время составленный график перестает быть, по существу, инструментом оперативного руководства производственным процессом и становится лишь примерным ориентиром движения деталей в производстве на весь оставшийся плановый период. Этот период иногда достигает 15-20 дней из 30 дней месяца.

Таким образом, существующая практика составления графика имеет два основных недостатка: во-первых, невозможность отыскания наилучшего (оптимального или близкого к нему) варианта запуска деталей в производство и, во-вторых, отсутствие оперативности при составлении и корректировке графика.

В этих условиях возникает необходимость в разработке такой методики составления и корректировки графика, которая бы давала возможность быстро составлять и пересоставлять (при нарушениях) план-график, получая всякий раз оптимальный или близкий к опти-

мальному вариант.

Задача составления такой методики в соответствии с конкретными условиями работы пролета сводится к разработке алгоритма и программы на ЭВМ для определения оптимальной (или близкой к ней) последовательности обработки деталей в производстве по заранее заданной программе производства и при наличном парке оборудования. При этом должны быть выполнены следующие требования:

- а) обеспечена технологическая последовательность движения всех деталей по станкам;
- б) любая деталь может проходить через один и тот же станок столько раз, сколько это требуется в соответствии с технологическим маршрутом ее обработки (т.е. с любым числом "возвратов");
- в) время обработки на некоторых станках может быть "нулевым", т.е. деталь не обрабатывается на этом станке;
- г) обработка деталей ведется партиями;
- д) детали некоторых видов на отдельных операциях обрабатываются совместно;
- е) наличие взаимозаменяемого оборудования;
- ж) разносменность работы оборудования;
- з) соблюдение заранее заданных сроков выпуска отдельных деталей.

При соблюдении этих требований может быть построено множество различных графиков с различной последовательностью запуска и обработки деталей на станках. В каждом графике, в зависимости от избранного порядка запуска деталей в обработку, может быть различным время простоев оборудования по отдельным видам станков и в целом по цеху, время межоперационного пролеживания деталей и, наконец, длительность общего цикла обработки заданной программы производства деталей.

Поэтому для выбора оптимального (или близкого к нему) плана из множества различных вариантов построения графика нужно выбрать такой, который отвечает критерию оптимальности.

Наиболее целесообразным критерием оптимальности графика в данных условиях может служить максимизация загрузки оборудова -

ния.

В соответствии с заданными ограничениями и избранным критерием оптимальности плана-графика разработаны алгоритмы решения задачи и составлены программы на ЭВМ. Алгоритмы и программа 1 на ЭВМ составлены З.В.Коробковой, алгоритм и программа II - Н.Б.Мироносцевым¹⁾.

II. Описание алгоритма и программы 1

§ 1. Постановка задачи

Имеется m деталей и n станков. Детали характеризуются следующими данными: заданы матрицы (a_{ij}) и (b_{ij}) , где a_{ij} - время выполнения j -й операции i -й детали, b_{ij} - тип станка, на котором выполняется j -я операция i -й детали. Детали, относящиеся к незавершенному производству, характеризуются аналогичным образом, но только начиная с той операции, которая должна производиться в планируемый период. Задается характеристика работы парка оборудования:

c_1, c_2, \dots, c_n - типы станков (все оборудование цеха разбито на группы-типы, причем в один тип включаются взаимозаменяемые станки, которым присваивается один общий номер, т.е. предполагается полная взаимозаменяемость станков одного типа).

d_1, d_2, \dots, d_n - сменность работы станков. Т.е. в алгоритме учитывается разносменная работа станков; $d_k = 1; 2; 3$ соответственно для станков, работающих одну, две и три смены.

z_1, z_2, \dots, z_n - коэффициент перевыполнения норм рабочим на каждом станке.

Кроме того, заданное планом количество деталей разбито на три группы:

- 1) детали, идущие на дефицит сборки,
- 2) детали, идущие на задел сборки,
- 3) детали, идущие на запуск сборки следующего месяца.

В дальнейшем мы их будем называть деталями I, II и III-го сроков и соответственно обозначать q_1, q_2, q_3 .

1) В работе по решению задачи активное участие принимала Л.Н.Куприянова, в частности, ею выполнена подготовка исходных данных для просчета на ЭВМ, а также расчет данных для анализа результатов решения.

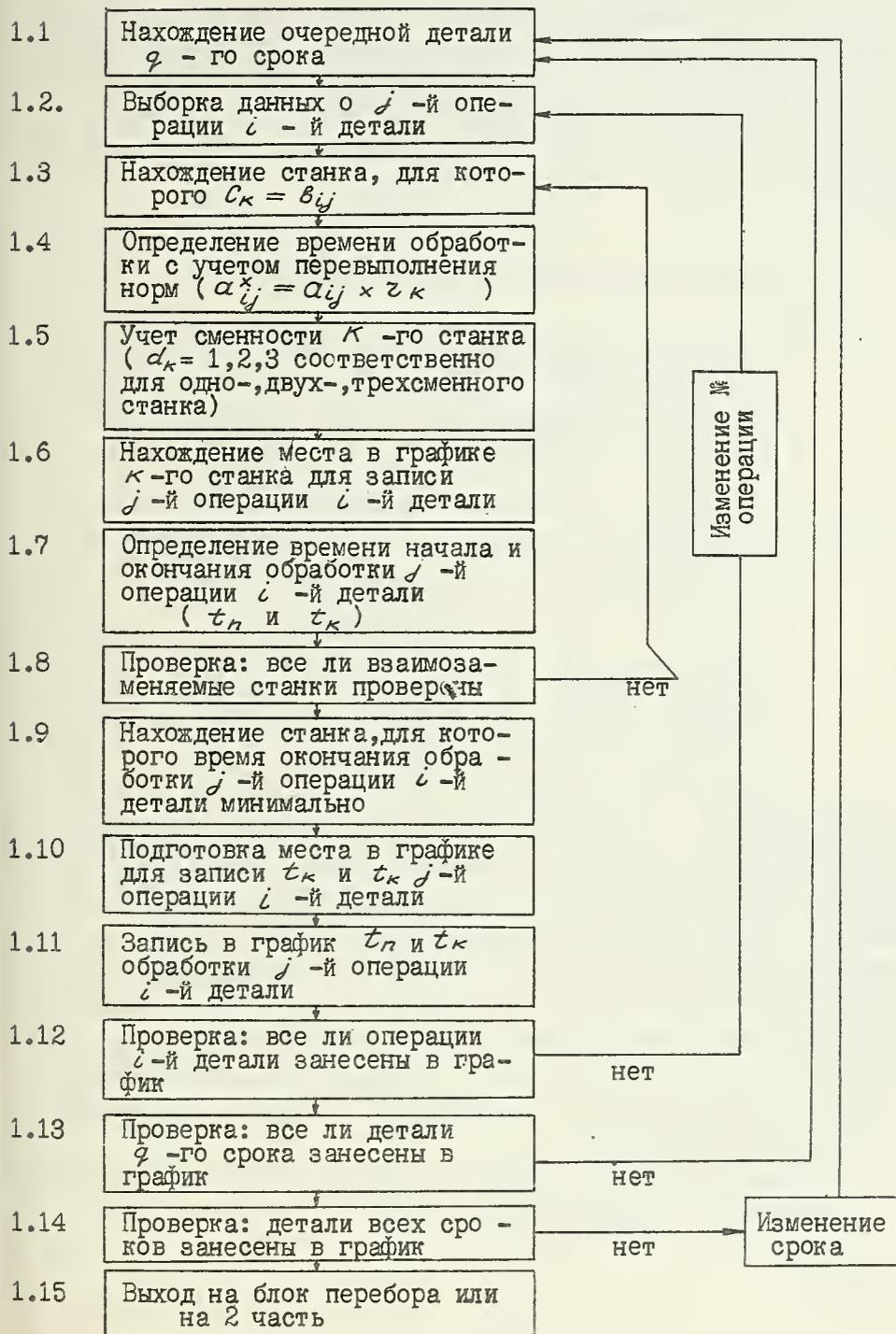
Требуется построить график загрузки оборудования, который обеспечил бы выпуск заданного количества деталей в заданные сроки с минимальной суммой внутренних простоев станков и минимальным общим циклом обработки деталей. Под внутренним простоем станка понимается каждый простой станка до выпуска последней детали в планируемом периоде.

§ 2. Описание алгоритма

Так как в настоящее время не существует численных методов отыскания оптимального варианта для задач данного типа, то в качестве первой модели был предложен следующий алгоритм построения графика: построение первоначального допустимого графика и последовательное его улучшение методом локальных преобразований, направленных на сокращение внутренних простоев станков (или общего цикла обработки деталей, что в данной задаче совпадает). Таким образом, алгоритм состоит из двух частей: 1) построение первоначального графика, 2) улучшение первоначального графика методом локальных преобразований.

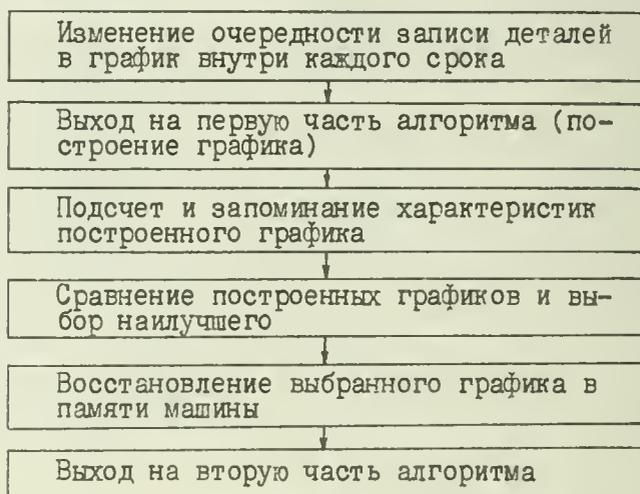
Построение первоначального графика может быть осуществлено любым способом. В данном алгоритме первая часть, т.е. построение первоначального допустимого графика, в известной степени имитирует работу экономиста цеха.

§ 3. Логическая схема первой части алгоритма



Блоки 1.8 и 1.9 логической схемы решают вопрос о взаимозаменяемости оборудования: если j - я операция i - й детали может выполняться на нескольких станках, то выбирается тот, на котором обработка данной операции заканчивается раньше. Блок 1.15 предусматривает либо выход на вторую часть алгоритма - улучшение полученного графика - либо на блок частичного перебора вариантов.

Схема блока частичного перебора вариантов:



Замечание: В программе нет отдельного блока "совместной обработки деталей", поэтому в случае совместной обработки на отдельных операциях какой-то группы деталей (2-3 штуки) составляется обобщенная технологическая карта. В нее включаются все операции данной группы деталей. Эта карта составляется следующим образом. Перечисляются (не нарушая технологического маршрута каждой детали) операции всех деталей данной группы, выполняемые до начала совместной обработки. Затем записывается совместная операция, после нее снова в произвольном порядке переписываются все оставшиеся операции.

В целях экономии однородные операции необходимо объединить. Рассмотрим пример (см. след. стр.)

№ 57. Шифр изделия Н-302 номер детали 4412					
№ операции	Инвентарный № станка	Время на операцию	Совместная обработка		
			№ детали	№ опера- ции	Кол-во деталей
1	107021	17,07	4416	Ш	
II	размет.	3,70	4414	П	
III	105023	6,74			
IV	слесарн.	3,00			
V	о.к.	0,20			

№ 68. Шифр изделия Н - 302 номер детали 4414					
№ операции	Инвентарный номер станка	Время на операцию	№ детали	№ операции	
				№ операции	Кол-во деталей
1	107021	17,07	4416 4414	Ш 1	
II	размет.	3,70	4412	П	
III	105023	6,74			
IV	слесарн.	3,00			
V	о.к.	0,20			

№ 59. Шифр изделия Н-302 номер изделия 4416					
№ операции	Инвентарный № станка	Время на операцию	Совместная обработка		
			№ детали	№ операции	Кол-во деталей
1	размет.	2,80			
II	105023	3,83			
III	107021	17,07	4414 4412	1 1	
IV	размет.	3,70			
V	105023	6,84			
VI	слесарн.	3,00			
VII	малярн.	1,10			
VIII	о.к.	0,10			

№ 67-68-69. Обобщенная норма- тивная карта			
№ операции	Инвентарный номер станка	Время на операцию	
1	размет.	2,80	операции детали № 69
II	105023	3,83	
III	107021	17,07	
IV	размет.	3,70	совместная операц. дет. № 67, 68, 69
V	размет	3,70	совместная операц. дет. № 67, 68
VI	105023	20,32	операцион. дет. № 69
VII	слесарн.	9,00	6,74+6,74+ + 6,84
VIII	малярн.	1,10	3,00+3,00+ + 3,00
IX	о.к.	0,50	0,20+0,20+ + 0,10

В приведенном примере III операция детали № 67, III операция детали № 68 и У операция детали № 69 выполняются на одном и том же станке, но совместными не являются. Эти операции можно объединить, не нарушая технологии. В этом случае в обобщенную нормативную карту вписывается одна VI операция на станок IO5023, полученная путем объединения 3-х указанных операций с суммарным временем обработки.

Таким же образом получают:

УП операция обобщенной нормативной карты, включающая в себя IV операцию детали № 68 и УТ операцию детали № 69;

IX операция обобщенной нормативной карты, включающая У операцию детали № 67, У операцию детали № 68, УIII операцию детали № 69.

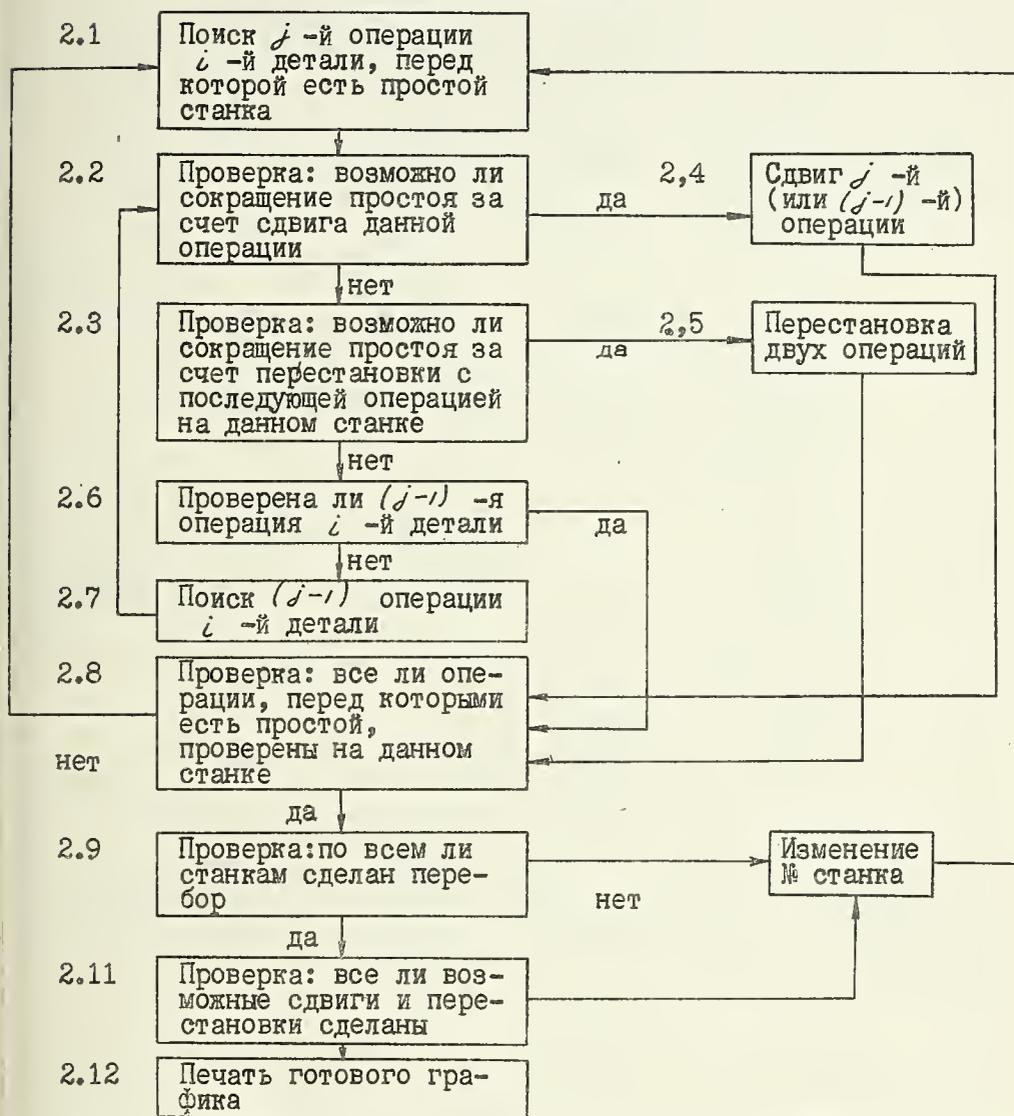
В случае, если операции нельзя объединить, не нарушая технологии, их вписывают в обобщенную карту каждую в отдельности.

§ 4. Вторая часть алгоритма

Локальные преобразования первоначального графика сводятся к следующему: ищется в графике операция обработки некоторой детали, перед которой станок простаивает, и исследуется возможность уменьшения этого простоя либо за счет перестановки данной операции с операцией, которая должна производиться вслед за данной на этом же станке, либо проверяется возможность изменения сроков обработки предыдущей операции исследуемой детали (последнее также за счет перестановки операций на некотором станке).

(См. схему).

Схема второй части алгоритма



Вторая часть алгоритма может быть несколько усложнена:

- 1) можно проверить возможность перестановки операции, перед которой есть простой, с любой другой на данном станке;
- 2) вести перебор только по лимитирующему оборудованию.

§ 5. Общая схема работы алгоритма на ЭВМ

Данный алгоритм запрограммирован на ЭВМ Вычислительного центра Сибирского отделения АН СССР. Программа состоит из отдельных блоков, причем, так как программа в основном строилась с целью проведения экспериментов, предусмотрена возможность выключения отдельных блоков и их замена. Общая схема работы алгоритма состоит из следующих блоков:

1. перевод данных $10 \longrightarrow 2$;
2. формирование программы и данных в удобный для счета вид;
3. составление первоначального графика (первая часть алгоритма);
4. улучшение построенного графика (вторая часть алгоритма);
5. частичный перебор возможных вариантов построения графика;
6. получение графика движения по операциям;
7. перевод $2 \longrightarrow 10$;
8. печать: а) графика загрузки оборудования, б) графика движения деталей по операциям.

Блок 5 общей схемы работы алгоритма может работать в зависимости от имеющихся возможностей и требований (машинного времени, допустимого отклонения полученного графика от оптимального).

Очевидно, что вводиться информация может в любом виде, но для уменьшения длительности ввода в программе предусмотрено такое расположение данных, которое максимально способствует этому. Заполнение матриц входных данных может производиться непосредственно с технологических карт.

Форма ввода исходной информации

К О П	1-й адрес	2-й адрес	3-й адрес	Примечание
			005	Количество деталей 5
			010	Количество станков 10

Информация о деталях

Срок выполнения	Кол-во операций	Размер партии	№ 1 операции	
01	012	005	008	1-я деталь по очереди
11 строк			.	2-я деталь по очереди
			.	
			.	

П. Время на операцию			Шифр станка	
порядок числа				
02	204	500	013	Операция на станке
			.	13 время = 20,45 час.
			.	1-я деталь
			.	2-я деталь
			.	3-я деталь

Информация о станках

Ш.	Сменность станка	Шифр станка	
01	300	001	1-й станок 3-х сменный
11 строк		.	
		.	
		.	

IV. Коэффициент переработки норм

01	125	000	000	1-й станок, коэффициент переработки норм 1,25
11 строк			.	
			.	
			.	

Размер входной информации определяется следующей формулой (в программе есть ограничение на размер входной информации):

$$m + 2n + 3e \leq 3580,$$

где m - количество партий деталей, n - количество станков и рабочих мест, e - количество операций по всем партиям деталей.

График загрузки оборудования
(выдача по станкам)

- ++- 00 000000012 - под 1-й станок занято 12 ячеек
 - ++- 00 000000020 - под 2-й станок занято 20 ячеек
 - ++- 00 000000016 и т.д.
 - ++- 00 000000010 -
 - ++- 00 000000018
 - ++- 00 000000006
 - ++- 00 000000080
 - ++- 00 000000040
 - ++- 00 000000008
- и т.д.

Начало операции числа 10 час.05 мин.	3-го	дни		часы	мин	шифр детали
		+++	00 03	1005		
Окончание операции						010
5-го 6 час.15 мин.	+++	00 05		0615		003 № операции
	+++	00 05		0615		010 } следующая операция
	+++	00 06		0707		004
	+++	00 06		0707		018
	+++	00 10		1520		004
	+++	00 10		2045		020
	+++	00 15		2430		004
	+++	00 15		2430		037
	+++	00 18		2000		009
	+++	00 18		2030		041
2-й станок	+++	00 30		0900		010
	+++	00 01		0900		013
	+++	00 07		0830		006
	+++	00 07		0830		011
	+++	00 10		1015		003
	+++	00 10		2015		026
	+++	00 15		1100		006
	+++	00 16		1100		027
	+++	00 16		2240		003
	+++	00 18		0900		002
	+++	00 18		0900		015
	+++	00 19		1030		004
	+++	00 19		1030		015
	+++	00 21		0830		005

и т.д.

График движения деталей по станкам
(выдача по деталям)

Начало операции:	++-	00	000000010	← шифр детали
3-го 10 час.05 мин.	+++	00	031005001	← шифр станка
Конец операции:				
5-го 6 час.15 мин.	+++	00	050615003	← № операции
	+++	00	050615001	
	+++	00	060707004	
	+++	00	120530012	
	+++	00	131045005	
	+++	00	131500030	
	+++	00	160900006	
	+++	00	180830010	
	+++	00	181500007	
	+++	00	181730011	окончание обработки 10-й детали
15-я деталь	++-	00	000000015	
	+++	00	010930005	
	+++	00	011545001	
	+++	00	011545005	
	+++	00	021030002	
	+++	00	031720014	
	+++	00	040000003	
	+++	00	041210002	
8-я деталь	+++	00	041845004	
	++-	00	000000008	
	+++	00	020830002	
	+++	00	041210005	
	+++	00	041210013	
	+++	00	050900006	
	+++	00	051230002	
	+++	00	060800007	
	+++	00	070830040	
	+++	00	071830008	
	+++	00	071830040	
	+++	00	091010009	
	+++	00	092000024	
	+++	00	100730010	

и т.д.

Ш. Идея алгоритма и программы П

Для каждой детали из заданного множества D_1, D_2, \dots, D_m вычисляются значения $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ некоторой функции приоритета φ . В зависимости от значения φ_i функции φ детали D_i приписывается некоторое натуральное число ρ_i , называемое индексом приоритета, так что при $\varphi_i \leq \varphi_j$ $\rho_i \leq \rho_j$ для $1 \leq i, j \leq m$.

Множество агрегатов S_1, S_2, \dots, S_m упорядочивается так, что на K месте, $K = 1(1)m$, в упорядоченном множестве агрегатов S_1, S_2, \dots, S_m стоит агрегат, освобождающийся не позже агрегата, стоящего на $K+1$ месте.

Загрузка агрегатов ведется по принципу двойного приоритета. Обозначим через \mathcal{U}_K множество деталей из списка D_1, D_2, \dots, D_m которые могут поступить для обработки на агрегате S_K без простоя агрегата S_K , через Q_K обозначим множество деталей, поступающих на агрегат S_K с простоем последнего.

Каждый такт загрузки состоит в следующем. Из множества \mathcal{U}_K выбирается деталь D_i с наименьшим ρ_i . Оформляется график. Пересчитываются φ_i и индексы приоритета деталей $D_v, v=1(1)m$. Переупорядочивается множество агрегатов. Такт загрузки на этом заканчивается. Однако если \mathcal{U}_K пусто, то принцип поиска детали под загрузку меняется. Из множества деталей Q_K запоминается ранее других освобождающаяся деталь D_i^* и предпринимается попытка загрузить $K+1$ агрегат при условии, что он освободился ранее детали D_i . Если \mathcal{U}_{K+1} пусто, то запоминается деталь D_i^* , освобождающаяся ранее всех деталей из множества $Q_K + Q_{K+1}$, и продолжают попытки загрузить агрегат, стоящий за данным агрегатом в упорядоченном множестве $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$.

Если агрегат S_j освобождается позже детали D_i , то деталь D_i ставится на обработку на соответствующий станок. Производится процедура оформления графика и подготовки к следующему такту загрузки.

График считается построенным¹⁾, когда либо обработаны все детали, либо агрегаты исчерпали плановый фонд времени.

График выводится на печать в следующей форме:

1) Подробное изложение алгоритма см. Н.Б.Мироносецкий "Об одном алгоритме приближенного решения задачи календарного планирования". Настоящий сборник.

График загрузки оборудования
(Выдача по станкам)

Шифр станка

Шифр детали 208
№ операции 2
001 условный номер станка
017 условный номер детали

1-й станок

Начало операции 2 числа 13 час.36 мин.

Конец операции 19 числа 19 час.38 мин.

Следующая операция на данном станке

+	+	0	0	1	2	0	8	0	0	2	+	0	0
+	+	0	2	1	3	3	3	0	0	1	+	0	0
+	+	1	9	1	9	3	8	0	1	7			
+	+	0	0	1	2	1	3	0	1	2	+	0	0
+	+	1	9	1	9	3	8	0	0	1	+	0	0
+	+	2	7	0	5	1	7	0	3	1	+	0	0
+	+	0	0	1	2	1	3	0	1	2	+	0	0
+	+	3	7	0	5	1	7	0	0	1	+	0	0
+	+	0	4	1	5	6	0	0	3	0	+	0	0
+	+	0	0	1	2	0	0	0	0	3	+	0	0
+	+	3	4	1	5	6	0	0	0	1	+	0	0
+	+	3	9	0	4	8	0	2	0	0	+	0	0
+	+	0	0	1	2	2	1	0	0	2	+	0	0
+	+	3	9	0	4	8	0	0	1	0	+	0	0
+	+	4	5	0	3	4	0	0	1	0	+	0	0
-	-	9	9	9	9	9	9	9	9	9	-	1	9
+	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0
+	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0
+	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0
+	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0
+	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0
+	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0
+	+	0	2	0	0	0	0	0	0	3	+	0	0
+	+	1	0	2	3	9	0	0	1	4	+	0	0
+	+	1	0	1	9	3	5	0	0	2	+	0	0
+	+	1	7	1	6	3	5	0	1	8	+	0	0
+	+	1	7	1	6	3	5	0	0	2	+	0	0
+	+	2	1	2	2	4	0	0	0	4	+	0	0
+	+	2	1	2	2	4	0	0	0	0	+	0	0
+	+	2	1	2	3	0	0	0	0	0	+	0	0
+	+	2	1	2	3	0	0	0	0	5	+	0	0

Конец работы станка

2-й станок

И т.д.

1V. Подготовка исходных данных для решения задачи на ЭВМ

Практическое использование программ предусматривает осуществление ряда последовательных организационных мероприятий. Перечислим основные из них.

1. Исходные данные должны быть представлены за 3 дня до начала планируемого периода¹⁾. Состав исходных данных и формы их представления следующие.

Форма 1

1. "Задание уникальному пролету цеха № 1 на _____ месяцы, состояние незавершенного производства на начало планируемого периода и календарная дата выпуска отдельных деталей"

№ детали	Наименование детали	Количество на машину	Унификации	Обеспечено на начало планируемого периода	Задано на	В т.ч. товар завода	Состояние незавершенного производства	Календарная дата выпуска деталей
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Форма 2

2. "Характеристика оборудования уникального пролета"

Наименование станка	Инвентарный номер станка	Сменность	Плановый фонд рабочего времени	% переработки НОРМ		Взаимозаемное оборудование
				план	фактически	
1	2	3	4	5	6	7

1) Работа по представлению исходных данных выполняется работниками завода.

3. "Нормативная карта детали для составления
пооперационного графика на ЭВМ"

Форма 3

1	И з д е л и е	Деталь	Нормативны х производствен- ных процессов	Продолжитель- ность операции в танко-часах	Продолжительность операций, не учитываемых в трудоем- кости	Совместная обработка
2	№ чертежа					
3	Вид заготовки					
4	В е с в тоннах					
5	№ операции					
6	Цех-исполнитель					
7	Инвентарный номер станка или другого рабочего места, на котором выполняется операция					
8	Норма обслуживания (человек)					
9	Количество одновременно обрабатываемых на станке деталей					
10	Подготовительно-заключительное время на производственную партию					
11	штучное время на установочную партию					
12	в том числе машинное время					
13	Естественные процессы (в днях) (старение, сушка,)					
14	Операции, выполненные в дру- гих цехах (в днях)					
15	Транспорт перед операциями (в часах)					
16	Контроль (в часах)					
17	Дополнительные работы, удлиняющие пролеживание данной операции (в часах)					
18	№ детали, с которой данная деталь обрабатывается сов- местно					
19	№ операции					
20	Количество совместно обрабо- танных деталей					

П. Зашифровываются рабочие места, детали и нормативные карты¹⁾.

1. Шифры станков и прочих рабочих мест:

Шифр станка	Инвентарный номер станка
1	2
1	101163
2	101078
3	105021
	и т.д.

2. Шифры деталей:

Заводской шифр изделия	№ детали	№ шифра на ЭВМ
1	2	3

3. Нормативные карты деталей представляются следующим образом:

№ карты (шифр детали на ЭВМ)			шифр изделия ²⁾ № детали ²⁾		
№ операции	Инвентарный № станка	Время на операцию	Совместная обработка:		
			№ детали, с которой данная деталь обрабатывается совместно	№ операции	Количество совместно обрабатываемых деталей
1	2	3	4	5	6

1) Выполняется работниками организации, осуществляющей просчет на ЭВМ.

2) Записываются заводские шифры, изделия и номер детали.

Время на операцию (графа 3) на данном станке складывается из:

- а) подготовительно-заключительного времени на производственную партию;
- б) штучного времени на установочную партию;
- в) времени транспортировки перед операцией в часах;
- г) времени контроля в часах.

Для так называемых "естественных процессов" (старение, сушка) и операций, выполняемых в других цехах, время в днях было взято из соответствующих граф исходных нормативных карт и пересчитано в часах.

Замечание. В случае совместной обработки на станке одноименных деталей (2,3... штук) при составлении графика по программе П необходимо иметь соответственно 2,3 одинаковые технологические карты, зашифрованные разными номерами, т.е. рассматривать их как разные детали (на совместную обработку могут попасть только детали, имеющие разные шифры).

Ш. В случаях нарушения нормального хода производства и необходимости корректировки графика, последний момент может быть пересоставлен в течение 1 дня с момента представления новых исходных данных.

Новые исходные данные представляются по состоянию незавершенного производства на начало вновь планируемого периода, а также по оборудованию и деталям в соответствии с изменениями в поддетальном плане, характеристик оборудования, сроков выпуска деталей, технологии обработки и т.д.

У. Анализ графиков, составленных на ЭВМ по программе 1 и П

По данным, представленным заводом на декабрь 1963г. и январь 1964 г., были составлены графики.

Рассмотрим графики, составленные по программе 1.

По плану планово-диспетчерского отдела (ПДО) завода на декабрь в "Задании уникальному пролету механического цеха № 1" предусматривалось производство 184 штук деталей общей трудоемкостью 53865 нормо-часов. По плану на январь 1964

предусматривалось производство 161 детали общей трудоемкостью 44677 нормо-часов. Составление графика по данным на декабрь месяца заняло 20 мин. машинного времени, на январь - 18 мин.

Проанализируем составленные графики с точки зрения выполнения плана ЦДО, коэффициента загрузки оборудования, сроков выпуска деталей и некоторых других позиций.

Прежде всего необходимо отметить почти полную несопоставимость графиков, составленных на ЭВМ, и графиков, составленных в цехе. Особенно это относится к графику на январь. Так, например, в декабре в график цеха вошли детали, которых не было в плане ЦДО, что существенно изменило уровень загрузки некоторых станков, в том числе лимитирующих. Что касается данных за январь, то они совершенно несопоставимы, так как фактический план цеха и план ЦДО, представленный в ЛЭМИ, отличаются еще в большей степени, чем в предыдущем месяце. С учетом этого момента рассмотрим загрузку оборудования по табл.1.

Как видно из таблицы, загрузка большинства станков находится на уровне 0,7 - 0,8, особенно в январе. Высокий коэффициент загрузки в обоих графиках имеет наиболее лимитирующий станок - 107020.

Вместе с тем ряд станков имеет большие простои. Это - 105022, 107021 (в декабре), 105023, 105045. Для некоторых станков, например, 105023, это объясняется отсутствием работы по плану ЦДО, что отчетливо видно, если сравнить плановый фонд времени работы этого станка и необходимый. То же характерно для станка 105045. При этом надо отметить, что станки, плохо загруженные по графику ЭВМ, в ряде случаев значительно лучше загружены по графику цеха, например, станки 105045, 107021, 105022.

Сопоставление загрузки станков в графиках ЭВМ и цеха показало, что основная причина этого заключается в том, что указанные станки в графике цеха догружены деталями, которых нет в плане ЦДО и информацией о которых не располагала ЛЭМИ при составлении графика на ЭВМ. О том, насколько существенно это вообще изменяет картину загрузки оборудования, можно судить по следующим примерам из графика за декабрь.

Станок 107021: в графике ЭВМ простои составляют 270 часов,

Таблица 1

Таблица загрузки оборудования
уникального пролета¹⁾

Инвентар- ный номер станка	Становый фонд време- ни работы оборудования	Д е к а б р ь		Я н в а р ь		Необходимый фонд времени работы обору- дования	
		простой	коэффици- ент за- грузки оборудов.	простой	коэффици- ент за- грузки оборудов.	Декабрь	Январь
107020	513	24	0,95	51	0,90		
107017	513	21	0,96	14	0,97		
107021	513	270	0,47	17	0,96		
105024	513	274	0,46	192	0,62	1080	1821
105052	513	305	0,40	148	0,71		
105021	513	21	0,96	182	0,66	-	1671
105046	325	-	-	137	0,53		
105037	513	8	0,97	50	0,90		
101163	513	25	0,95	53	0,89		
105022	513	280	0,44	128	0,77	567	1104,65
105023	513	430	0,16	193	0,62	399	774
105045	513	373	0,27	383	0,25	498	546,5
101079	513	74	0,85	46	0,91		
101078	325	80	0,75	66	0,79		

1) Таблица составлена для наиболее загруженных станков.

в графике цеха - простоев нет. Это произошло потому, что станок в течение 373 часов был загружен деталями, которых не было в плане ЦДО. По графику ЭВМ, не нарушая графика, могли бы быть обработаны те же детали в следующие конкретные сроки: 01315 (В101) - 2 шт. с 11 по 18 декабря; 2 шт. с 26 по 30; 3101/2 680 - с 20 по 23. В этом случае коэффициент загрузки станка повысился бы примерно в 2 раза и был бы не хуже, чем в цехе.

Станок 105022: в графике ЭВМ простои составляют 280 часов, в графике цеха - 105 часов. Это произошло потому, что в течение 324 часов на станке обрабатывалось 3 детали 3715 (2660), для которых эта операция в плане ЦДО была указана, как уже выполненная. Если включить эти детали в график ЭВМ, станок будет работать без простоев.

То же для станка 105045: простои по графику ЭВМ - 373 часа, по графику цеха - 273 часа. При этом станок по графику цеха загружен на 177 часов деталями 02402 и 03401 (Ни130).

Следующим моментом, характеризующим качество графика, является степень выполнения планового задания по количеству, номенклатуре и трудоемкости выпуска товарной продукции.

Таблица 2

Сравнительный выпуск деталей по количеству и трудоемкости в графике ЭВМ и цеха в декабре 1963 года

Показатели	План ЦДО	График ЭВМ	График цеха	Отклонение от плана	
				по графику ЭВМ	по графику цеха
Количество деталей	184	76	60	108	124
Трудоемкость выпуска (в тыс. нормо-часов)	53,9	19,9	17,4	34	36,5

Из таблицы видно, что при составлении графика на ЭВМ может быть достигнуто планирование более трудоемкой программы, чем при составлении графика вручную. В график ЭВМ вошло также большее количество деталей из тех, что были предусмотрены пла-

ном ПДО. При этом надо отметить, что некоторые детали, выпущенные по графику цеха, обрабатывались в действительности вне цеха, на оборудовании другого пролета (например, деталь 29101 (2а660Т)).

Следует отметить совершенно неудовлетворительное качество информации, представленной заводом для составления графиков. Например, в графике за декабрь XV1 и XVП операции над деталями 1103 - 1104 (2А660) на станке 107020 по цеховому графику выполняются одна за другой без перерыва, тогда как по технологической карте между ними должна быть слесарная обработка. В графике ЭВМ соблюдена технология, но это отодвинуло срок выполнения этих деталей. Кроме того, в цеховом графике на две эти операции отводится 105 нормо-часов, тогда как по технологии - 190. В графике ЭВМ, естественно, указано 190 нормо-часов.

Аналогичные ошибки имеются на станке 107021: 1У операция детали 371 (2660) - 2 шт. - занимает по технологии и в графике ЭВМ 216 нормо-часов, в графике цеха - всего 85 нормо-часов; 1У операция детали 01303 (Д0140) - 2 шт. - занимает соответственно 64 и 36 нормо-часов и т.д.

Одним из вопросов, которые не удалось разрешить при просчетах в декабре и январе, является вопрос о гарантировании календарных сроков выпуска деталей. В этом отношении программа 1 на ЭВМ нуждается в более серьезной переработке.

Анализ графиков, составленных на ЭВМ с учетом сделанных выше замечаний о качестве информации, позволяет сделать некоторые выводы относительно возможности практического использования программы 1 на ЭВМ для оперативного-календарного планирования работы пролета.

Прежде всего необходимо отметить, что составление графиков на ЭВМ по этой программе обеспечивает вполне удовлетворительную загрузку станочного парка пролета, а также высокий процент выполнения плана по товарной продукции.

Учитывая, что график выдается на печать из ЭВМ в форме, пригодной для использования в заводских условиях, можно сделать вывод о том, что программа 1 в ее настоящем виде может быть использована в повседневной оперативно-календарной работе на заводе.

Эта программа может быть использована для составления ра -

бочих графиков, несмотря на то, что в ней не разрешен вопрос о гарантировании заранее установленных календарных сроков выпуска отдельных деталей. Дело в том, что на протяжении всех проводимых в ЛЭМИ просчетов по исходным данным за различные месяцы, заводом не были представлены обоснованные сроки выпуска хотя бы по отдельным деталям.

Даже то, что в "Задании уникальному пролету" планировалось как "дефицит сборки", настолько превышает реальные возможности оборудования (плановый фонд времени работы), что заведомо значительная часть деталей должна выйти за пределы сроков, установленных потребностями сборки. Следовательно, эти сроки устанавливаются без должного обоснования и не могут быть учтены при работе программы 1.

В этих условиях единственно правильным решением было бы определение сроков выпуска деталей из самого графика.

Для того чтобы эти сроки не были неожиданными, впервые возникающими при формировании графика текущей работы пролета (а рассматриваемый график и является текущим), на заводе должен быть изменен самый порядок составления плана — "Задание уникальному пролету". Не рассматривая подробно этот вопрос, следует отметить, что до составления этого плана и формирования на его основе текущего графика, повидимому, было бы целесообразным составить обоснованный укрупненный календарный план загрузки имеющихся производственных мощностей на длительный (возможно, годовой) период в соответствии со сроками выпуска изделий в целом. При этом сроки выпуска изделий в свою очередь могут быть дополнительно скорректированы, изменены, если окажется, что этого требует объем производственных мощностей. Для некоторых деталей могут быть определены предпочтительные сроки выпуска.

Вместе с тем надо признать, что такой подход к решению проблемы календарного планирования работы пролета не является исчерпывающим. Проблема гарантирования сроков выпуска отдельных деталей при том условии, что эти сроки будут обоснованными, так или иначе должна быть решена при дальнейшей работе над усовершенствованием программы 1. В свою очередь, на заводе должна быть несколько изменена система подготовки исходных данных.

В исходных данных должна быть заложена дифференцированная информация о сроках выпуска конкретных деталей, причем величина

технологического цикла обработки этих деталей заведомо не должна превышать установленных сроков выпуска, а необходимый фонд времени работы оборудования не должен превышать плановый фонд времени. Очевидно, что попытка уложиться в заданные сроки выпуска может привести к некоторому ухудшению загрузки оборудования, в том числе лимитирующих станков, и в целом к увеличению общего времени обработки всех деталей.

Учитывая, что такая постановка задачи также может быть полезна для планирующих подразделений завода, в ЛЭМИ разработан новый алгоритм и отлажена программа 2 с учетом возможности гарантировать заданные сроки выпуска отдельных деталей.

По программе II был составлен график по исходным данным завода за январь 1964 г.

Рассмотрим основные моменты, характеризующие качество составленного графика, в том числе сравнительно с графиком, составленным по программе 1.

1) Основная отличительная особенность нового графика состоит в том, что в нем соблюдены заранее заданные календарные сроки выпуска отдельных деталей. Для пробного просчета было взято ограниченное количество деталей - 10 штук. При этом для 2-х деталей 13101 (2A660) срок выпуска был задан на 10 января, для оставшихся 8-ми - 25 января. В графике детали распределились по срокам выпуска следующим образом:

Таблица 3

Распределение деталей по срокам выпуска

Шифр детали	Дата выпуска (числа января месяца)	
	по графику цеха	по графику ЭВМ
7A288 1174	11	12
7A288 2112	14	1
HP-3 3101	13	10
Д-6242 03401	15	18
Д-6246 03302	25	22
7A278 1311	20	18
7A278 1312	17	17
7A278 1313	18	17
2A660 13101	15	11
2A660 13101	15	10

Из таблицы видно, что все детали, кроме одной, запоздавшей на один день, были выпущены к назначенному сроку.

2) Выполнение планового задания по количеству и трудоемкости выпуска товарной продукции.

Таблица 4

Сравнительный выпуск деталей по количеству и трудоемкости в графиках, составленных по программе 1 и программе II на ЭВМ

Наименование показателей	План ЦДО (товар цеха)	График, составленный по программе		Отклонения от плана ЦДО по программе	
		1	II	1	II
Количество деталей	161	71	87	90	74
Трудоемкость выпуска в тыс. нормо-часов	44,7	17,6	21,2	27,0	23,5

Расчет, приведенный в таблице, показывает, что план ЦДО выполнен почти на 50% по трудоемкости товарного выпуска продукции и более, чем на 50%, по количеству готовых деталей. Значительная часть оставшихся необработанными деталей и не могла быть выпущена как товар цеха, поскольку цикл их обработки превышает месячный срок, на который составлялся график.

3) Загрузка оборудования.

Табл.5 показывает, что лимитирующие станки загружены полностью, коэффициент загрузки остальных станков в основном 0,65 - 0,90. В целом загрузка станков по графику, составленному по программе II, выше, чем по программе 1.

Просчет исходных данных и вывод графика на печать заняли 43 минуты работы ЭВМ. За это время составлен график на 112 дней и выведена на печать информация "по станкам" и "по деталям". При составлении графика только на 30 дней и выводе на печать информации какого-либо одного вида затраты машинного времени сокращаются примерно до 25 минут.

Таблица 5

Загрузка оборудования
(январь 1964 г.)

Инвентар- ный номер станка	Плановый фонд вре- мени ра- боты обо- рудова- ния	Просчет по програм- ме 1		Просчет по програм- ме II	
		про- стои	коэффициент загрузки оборудова- ния	про- стои	коэффициент загрузки оборудова- ния
101163	513	0	1,00	0	1,00
101079	513	46	0,91	0	1,00
105021 ¹⁾	513	182	0,66	100	0,81
105046	513	137	0,53	130	0,75
105024 ¹⁾	513	192	0,62	179	0,65
105052	513	148	0,71	184	0,64
105037	513	50	0,90	0	1,00
105045	513	383	0,25	296	0,42
107017	513	14	0,97	0	1,00
107020	513	51	0,90	0	1,00
107021	513	17	0,96	0	1,00
101078	325	66	0,79	21	0,93
105023	513	193	0,62	275	0,46

1) Взаимозаменяемое оборудование.

4) Величина общего цикла обработки всех деталей в графике, составленном по программе 1, - 138 дней, по программе II - 112 дней.

Постановка и решение задач календарного планирования, в том числе задачи составления графика загрузки оборудования на заводе "Тяжстанкогидропресс" им.Ефремова, имеет значение как с точки зрения решения общей проблемы улучшения использования производственных мощностей предприятия, так и с точки зрения совершенствования других звеньев оперативно-производственного планирования.

Только в результате решения задачи календарной загрузки оборудования может быть проверена правильность ранее принятых решений, касающихся таких моментов плана предприятия, как формирование годовой производственной программы и ее распределение по плановым периодам года календарно. Несоответствие запланированного и распределенного в течение года объема производственной программы возможностям календарной загрузки оборудования является одной из главных причин неритмичности и штурмовщины в работе предприятий.

Чтобы избежать этого противоречия в планировании, повидимому, целесообразно одновременно решать вопросы формирования и распределения годовой производственной программы и календарной загрузки оборудования.

Вместе с тем, решение этой задачи облегчает поиск методов для решения других задач оперативно-производственного планирования, объектом которых также является процесс во времени, в динамике. Таковы задачи расчета межоперационных заделов незавершенного производства, построение сборочных сеток и графиков циклов сборки и комплектации изделий, сроков опережения выпуска продукции по цехам (календарный график межцеховых подач), составления графиков конструкторской и технологической подготовки производства и т.д.

Моделирование этих процессов и разработка единой системы моделей оперативно-производственного планирования как части более общей системы моделей внутривзаводского плана позволит с помощью средств автоматизации решить проблему оптимизации планирования и управления на предприятиях промышленности.

Работа, проведенная на заводе "Тяжстанкогидропресс" им.Ефремова по моделированию процесса составления календарного гра-

фика загрузки оборудования является одним из этапов решения этой проблемы.

Б.В.Розин

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ОПТИМАЛЬНОГО НОРМИРОВАНИЯ В МЕТАЛЛУРГИИ

Для основных металлургических цехов характерно наличие небольшого числа высокопроизводительных дорогостоящих агрегатов. Эти агрегаты - доменные и сталеплавильные печи, прокатные станы - определяют производительность цеха в целом, объем и темп работы на всех производственных участках. При таком характере производственного процесса уровень норм определяется возможной производительностью основного оборудования, т.е. агрегатов.

Агрегатные нормы, действующие на металлургических предприятиях, являются, по сути дела, не нормой трудовых затрат, а нормой производительности оборудования. Численность персонала устанавливается из расчета обеспечения бесперебойной работы основного оборудования. В этих условиях норма трудовых затрат - величина не самостоятельная, а производная от норм производительности агрегатов и нормативной численности персонала.

В работе по техническому нормированию в основных металлургических цехах можно выделить три основных направления:

1. нормирование производительности основных металлургических агрегатов;
2. разработка нормативов времени на ручные и машинно-руч -

ные операции, выполняемые на вспомогательных участках и при обслуживании основного оборудования;

3. изучение использования рабочего времени и нормирование численности персонала.

Эти направления технико-нормировочной работы различаются характером объектов и процессов, подлежащих изучению, а следовательно, и методикой проведения исследований.

Из перечисленных направлений наиболее важным и в то же время наиболее трудным с методической точки зрения является нормирование производительности агрегатов.

1. Общая постановка задачи по установлению норм

Прежде чем переходить к постановке задачи по определению технических норм производительности агрегатов, необходимо коротко остановиться на самом понятии. В литературе по техническому нормированию обычно под технической нормой производительности¹⁾ понимается максимально возможная в данный период производительность действующих металлургических агрегатов.

В частности, такие определения дают авторы ряда работ по техническому нормированию в черной металлургии. По нашему мнению, в этих определениях имеется одна общая неточность. Она заключается в том, что в нормировании ориентируются исключительно на максимально возможную производительность агрегата. Между тем не всегда в конкретных производственных условиях максимальная производительность агрегата является наиболее экономически целесообразной, оптимальной.

Дело в том, что оптимумы отдельных технико-экономических показателей работы металлургических агрегатов, как правило, не совпадают, т.е. режим, обеспечивающий максимум производительности агрегата в единицу времени, обычно не будет обеспечивать минимума затрат, максимума общего производства, наилучшего качества продукции и т.д.

Например, в электросталеплавильном производстве минималь-

1) В дальнейшем изложении вместо "технических норм производительности" будем употреблять "нормы производительности."

ный удельный расход электроэнергии достигается при мощностях меньших, чем необходимо для максимума производительности печей.

Следовательно, режим, обеспечивающий минимум общих затрат, будет некоторым промежуточным между режимом, соответствующим минимуму удельного расхода электроэнергии, и режимом, соответствующим максимуму производительности.

Такое же положение имеет место и в мартеновском производстве. Наименьший удельный расход топлива соответствует тепловым нагрузкам более низким, чем для минимальной продолжительности плавки.

Так для 180-тонной мартеновской печи, работающей на мазуте, наименьший удельный расход топлива достигался при средних тепловых нагрузках 2820 кг/час., а минимальная длительность — при нагрузках — 3180 кг/час. После выполнения соответствующих расчетов было установлено, что минимальный уровень затрат обеспечивается при среднем расходе мазута 3060 кг/час.

Число подобных примеров можно было бы увеличить.

Какой из технико-экономических показателей является наиболее важным и должен быть принят за критерий оптимальности, зависит от конкретной производственной обстановки. Ориентировка на максимум производительности верна в тех случаях, когда задача увеличения выпуска продукции на данном агрегате, участке является главной.

В других случаях экономически целесообразной может являться производительность агрегата, которая обеспечивает оптимум другого, более важного для данных производственных условий показателя, например, затрат на производство или качество продукции.

Следовательно, понятие нормы производительности следует расширить и трактовать ее как оптимальную для данных условий и периода времени производительности агрегата.

Поскольку по определению норма производительности — величина оптимальная (предельная), то ее количественное значение есть результат решения экстремальной задачи. Отсюда необходимость в математической постановке задачи и в использовании экономико-математических методов в техническом нормировании. Постановка задачи по определению норм производительности будет

зависеть от того, какой уровень производительности принимается за норму.

В тех случаях, когда в качестве нормы производительности следует принимать максимально возможную производительность, в общем виде процесс установления нормы можно представить следующей схемой.

Обозначим:

D - производительность агрегата;

N - норма производительности;

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ - определяемые факторы, оказывающие влияние на производительность агрегата.

Пусть известна некоторая функция, связывающая значения факторов с величиной производительности:

$$D = f_1(x_1, x_2, x_3 \dots x_n). \quad (1)$$

Тогда для нахождения нормы производительности необходимо найти максимум этой функции при допустимых значениях факторов $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$. Ограничения, накладываемые на изменение факторов $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, определяются техническими возможностями агрегата, установленной технологией и необходимостью получения продукции заданного качества.

В тех случаях, когда за норму принимается производительность, обеспечивающая оптимум какого-нибудь другого критерия S (затрат, качества продукции и т.д.), процесс нахождения нормы потребует выполнения следующих действий: кроме функции f_1 , связывающей производительность агрегата с величиной факторов $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, строится вторая функция f_2 , дающая зависимость S от тех же факторов,

$$S = f_2(x_1, x_2, x_3, \dots x_n) \quad (2)$$

Вторую задачу решают на оптимум S . При этом определяют значения $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$, обеспечивающие этот оптимум. Подставляя полученные значения $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ в первое уравнение, устанавливают значение D_0 , обеспечивающее

достижение оптимума S . Это значение P_0 принимают за норму производительности агрегата.

При этом следует подчеркнуть, что главным в процессе нормирования является не установление самой величины нормы, а определение значения факторов, при которых величина нормы достигается.

Таким образом, процесс нормирования смыкается с процессом выбора оптимальных режимов эксплуатации металлургических агрегатов, превращается в процесс установления и регламентации экономически выгодной технологии. Сами нормы лишь - конечный результат решения экономико-математической задачи.

Для построения экономико-математической модели при нормировании производительности металлургических агрегатов часто используются методы математической статистики. Применение этих методов обуславливает необходимость анализа вариации производительности металлургических агрегатов и факторов, вызывающих эту вариацию.

2. Вариация производительности металлургических агрегатов

Производительность металлургических агрегатов в единицу времени подвержена значительной изменчивости, колеблемости.

Наибольшей вариацией, изменчивостью отличаются показатели работы средней стадии полного металлургического цикла - стале - плавильного производства.

В анализе и нормировании следует различать вариацию производительности между различными агрегатами одного вида (разными доменными и сталеплавильными печами, разными прокатными станами одного назначения, например листовыми и т.д.) - межагрегатную и вариацию производительности данного агрегата, которую можно назвать внутриагрегатной.

Принципиальное отличие этих видов вариации заключается в том, что первая, "межагрегатная", имеет место в определенный момент времени и является территориальной, пространственной, вторая, "внутриагрегатная" вариация производительности, имеет место на одном и том же агрегате и происходит во времени (по -

следовательные плавки с одной и той же печи, последовательность смен на прокатном стане и т.д.). Так, например, производительность 180-тонной мартеновской печи в процессе работы при средней производительности 16,4 т/час колебалась от 12 до 19 т/час. Среднеквадратичное отклонение составило 1,0 т/час, а коэффициент вариации 6,3%.

При проведении работ по организации производства на предприятии наибольший интерес представляет изучение внутриагрегатной вариации производительности (трудоемкости и длительности операций). Но при решении отдельных вопросов (таких, например, как соотношение норм между агрегатами) необходимо анализировать и межагрегатную изменчивость показателей работы.

Изменчивость показателей работы одного и того же агрегата во времени, т.е. между последовательными циклами, можно подразделить на две части: первая часть, являющаяся следствием совокупного влияния определимых, поддающихся учету условий и факторов, и вторая — остаточная часть вариации, возникающая под воздействием не подконтрольных, случайных и, частично, даже неизвестных факторов.

Характер учета этих двух видов вариации показателей работы агрегатов в технико-нормировочной работе различен.

В ходе технико-нормировочного исследования должно быть установлено количественное влияние определимых факторов и на этой основе разработаны нормы процесса. Что касается случайной вариации, то она будет определять величину неустраимых, неизбежных (на данном уровне технологии и организации) отклонений от установленных нормалей и должна учитываться в оперативном планировании и управлении работой агрегатов. Из факта наличия значительной случайной вариации показателей работы металлургических агрегатов (особенно сталеплавильных) следует, что нормали не могут быть заданы одним числом, одной величиной, как это обычно принято, их следует задавать либо пределами, либо средней величиной (математическим ожиданием) с указанием допустимых отклонений. Особое внимание остаточной вариации необходимо уделять при разработке нормативов для оперативного планирования и управления производством. Для нормативов длительного действия

Отклонения взаимопогашаются, и величина остаточной вариации уменьшается. Этого не происходит для нормативов, используемых для планирования работы на короткие промежутки времени - смену, сутки.

Подразделение вариации на вызываемую определенными причинами и случайную в известной мере условно, оно зависит от достигнутого уровня изученности процесса, техники измерения и учета параметров и других обстоятельств. Например, влияние температуры жидкого металла в процессе плавки на показатели процесса до последнего времени не учитывалось, и этот фактор относился к категории случайных. После того, как были разработаны методы измерения температуры металла по ходу плавки, появилась необходимость учитывать его влияние при построении нормалей процесса.

3. Классификация факторов

По характеру учета в нормировании "определимые" факторы в свою очередь могут быть подразделены на ряд групп. Эта классификация основана на следующих различиях "определимых факторов":

- а) различии темпов вариации факторов во времени;
- б) различной возможности регулирования, изменения значения фактора на том или ином уровне управления тем или иным конкретным исполнителем. При этом под "конкретным исполнителем" в зависимости от уровня управления может пониматься рабочий, бригада рабочих, участок, цех, завод.

На основе учета указанных различий все "определимые" факторы $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ могут быть распределены на три группы.

К первой группе относятся те, которые для данных условий производства и уровня управления, являются строго заданными, не подлежащими изменению. Факторы, относящиеся к этой группе, отличаются также сравнительно медленным темпом изменения во времени. При нормировании их количественное влияние учитывается градацией, дифференциацией норм. Обозначим эту группу факторов

$$x_k \quad (k = 1, 2, \dots, n_1)$$

Ко второй группе относятся факторы, влияние которых учитывается уровнем, величиной норм. Эти факторы в условиях данного исследуемого подразделения могут изменяться исполнителем в тех

или иных пределах. Оптимальные значения этих переменных должны быть определены и регламентированы при установлении уровня нормы - x_p ($p = n_1 + 1, \dots, n_2$).

Третья группа - переменные факторы, значения которых не поддаются регламентации при установлении уровня норм производительности x_f ($f = n_2 + 1, \dots, n$).

Рассмотрим эту классификацию факторов на конкретных примерах.

Пример 1. Разрабатывается система норм производительности дуговой электросталеплавильной печи. Под конкретным исполнителем понимается печная бригада. На величину производительности оказывает влияние целый ряд факторов. Основные из них следующие: сортament выплаваемых марок стали, способ выплавки, вес садки, порядок завалки шихтовых материалов в печь, величина подводимой мощности и характер ее изменения по ходу плавки, основность шлака и т.д.

Из этого перечня факторов первые два - марка стали и способ выплавки - являются для сталевара заданными, они не могут быть изменены по его желанию, значения этих факторов определяются на более высоких уровнях управления (планирования) и заданы заранее для каждой плавки. Влияние изменения этих факторов должно быть учтено системой градаций нормативов и их соотношениями.

Что касается остальных перечисленных факторов - веса садки, порядка завалки шихтовых материалов, энергетического режима и т.д. - то они могут регулироваться печной бригадой в известных пределах.

При разработке системы нормативов должны быть определены оптимальные для данных условий значения этих факторов и на основе их регламентации установлены уровни норм.

Действительно, на производительность дуговой электросталеплавильной печи оказывает влияние и заданная марка стали, и характер использования мощности трансформатора. В ходе технорегулирующего исследования необходимо установить количественное влияние на производительность и того и другого фактора.

Однако цель и способы различны. Влияние изменения марки

стали устанавливается для того, чтобы учесть ее при дифференциации норм и расценок. Для одной группы марок нормы и расценки будут одни, для другой - другие.

Что касается влияния характера энергетического режима, то здесь цель состоит в том, чтобы на основе зависимости между подводимой мощностью и производительностью агрегата выбрать оптимальное значение этого параметра, регламентировать его и учесть это регламентированное значение при определении уровня нормы. Явно в системе норм этот фактор не выступает, его влияние наряду с влиянием других поддающихся изменению параметров учитывается принятой величиной нормы.

Пример 2. Устанавливается система норм производительности обжимного стана, которая должна быть использована для оплаты бригад рабочих, обслуживающих стан.

Основные факторы, оказывающие влияние на производительность стана: форма и развес слитков, удельный вес отдельных типоразмеров слитков, марочный сортамент металла, профилиразмеры прокатываемых на стане блюмсов, режим обжатий и скоростной режим при прокатке данного профилиразмера, температура нагрева слитков, равномерность их подачи и т.д.

Здесь к заданным условиям, которые могут изменяться на более высоких уровнях управления и в более длительные сроки, следует отнести сортамент стали по типоразмерам слитков, маркам стали и профилиразмерам блюмсов. Эти три фактора следует положить в основу дифференциации норм.

Остальные из приведенных факторов необходимо регламентировать для каждой разновидности условий и установить на этой основе уровни отдельных норм.

Следует отметить еще и такой момент. Не все определимые факторы, оказывающие влияние на производительность агрегата, поддаются регламентации. Более легко могут быть регламентированы факторы, сравнительно устойчивые во времени, периодически повторяющиеся.

Так, во втором примере при нормировании производительности прокатного стана к таким факторам относятся режим обжатий и скоростной режим прокатки отдельных профилиразмеров.

Число разновидностей режимов не столь велико, однажды раз-

работанный оптимальный режим для того или иного профиля размера может использоваться длительное время. Если же взять, например, такой фактор, как размещение поступающих плавок по колодцам, то он значительно труднее поддается регламентации.

Дело в том, что характер размещения зависит от обстановки, сложившейся в каждый данный момент, от характера поступления металла и ряда других обстоятельств.

Все эти условия меняются практически непрерывно и поэтому непрерывно будут изменяться и оптимальные варианты решения. Поэтому влияние такого рода факторов должно учитываться в процессе оперативного управления работой агрегата. При расчете норм производительности принимается их средний сложившийся уровень.

В соответствии с классификацией факторов в системе норм, характеризующих производительность металлургического агрегата, могут быть выделены два основных элемента - абсолютный уровень норм и их соотношения. Второй элемент - соотношение норм - представляет собой так называемые коэффициенты трудности.

Коэффициенты трудности представляют собой систему относительных величин, характеризующих влияние факторов, положенных в основу дифференциации норм, на норму производительности. Они исчисляются как отношение нормы производительности в условиях, принятых за основание (базисные), к остальным нормам. Например, производительность молота свободнойковки характеризуется следующей системой норм:

1 - 585 кг/час ; П - 680 кг/час ;

Ш - 700 кг/час ; 1У - 760 кг/час.

Это означает, что в данном условном примере для характеристики производительности молота оказалось достаточно 4 градаций норм.

Для определения коэффициентов трудности примем, например, П норму за основную с коэффициентом единица. Тогда коэффициенты трудности будут:

$$\text{для } 1 - \frac{680}{585} = 1,16 ;$$

$$\text{П} - \frac{680}{680} = 1,0 ;$$

$$\text{Ш} - \frac{680}{700} = 0,97 ;$$

$$1У - \frac{680}{760} = 0,90 .$$

Таким образом, вместо системы норм мы можем использовать систему, состоящую из одной основной нормы и системы коэффициентов трудности.

Последний способ представления системы норм гораздо удобнее для различного рода нормировочных, плановых и других расчетов.

Кроме того, сами коэффициенты трудности представляют большой самостоятельный интерес.

Во многих расчетах (например, при использовании методов линейного программирования, при расчете влияния изменения сортамента и т.д.) достаточно знания самих значений коэффициентов трудности и нет необходимости использовать абсолютные значения норм.

4. Два метода построения системы норм

Учитывая принятую нами классификацию "определимых" факторов, целевую функцию можно представить в виде:

$$D = f_1(x_1, \dots, x_{n_1}, x_{n_1+1}, \dots, x_{n_2}, x_{n_2+1}, \dots, x_n) \quad (3)$$

Либо, если вводится критерий оптимальности нормы S , как

$$S = f_2(x_1, \dots, x_{n_1}, x_{n_1+1}, \dots, x_{n_2}, x_{n_2+1}, \dots, x_n) \quad (4)$$

Обычно принятую схему разработки системы норм (нормативов) можно представить следующим образом¹⁾.

1. Каким-либо способом (на основе значения теории процесса, экспериментальными или статистическими методами) строится целевая функция и накладываются ограничения на переменные.

2. Определяются сочетания факторов x_k , т.е. необходимые градации норм.

3. Для каждого заданного сочетания задача решается на оптимум по x_p при сложившихся в данных условиях средних значениях x_f .

4. Для удобства использования и работы с системой норм

1) Используя введенные нами обозначения и терминологию.

(нормативов) исчисляются так называемые коэффициенты трудности.

Использование изложенного способа разработки системы норм в металлургическом производстве связано с известными трудностями.

Это трудности двоякого рода. Во-первых, во многих случаях число необходимых градаций велико и, следовательно, для разработки системы норм потребуется большое число решений оптимальной задачи.

Так, например, при нормировании производительности блюминга к числу факторов, по которым производится дифференциация норм, отнесены: группа марок стали, типоразмер слитков и профилируемые размеры блюмсов. Пусть в данных конкретных условиях на стане прокатываются 20 профилируемых размеров блюмсов из 5 типоразмеров слитков.

Все прокатываемые марки стали могут быть объединены в четыре группы. Тогда возможное число сочетаний факторов группировки норм будет $20 \times 5 \times 4 = 400$. Необходимо, следовательно, решить 400 экстремальных задач, что, естественно, потребует больших затрат труда и времени.

Вторая трудность методического характера. Дело в том, что в отдельных случаях построение полной целевой функции, дающей зависимость производительности (либо критерия оптимальности производительности) от всех определенных факторов на данном уровне знания природы процесса, не представляется возможным.

Эти трудности приводят к тому, что часто величины коэффициентов трудностей (т.е. соотношения норм) на практике оказываются недостаточно обоснованными, не точными. Последнее является причиной разной "жесткости" норм, возникновения "выгодных" и "невыгодных" работ, значительных скачков в уровне выполнения норм выработки и производственных планов.

С целью преодоления этих методических трудностей и снижения трудоемкости работ по разработке системы нормативов был разработан и широко использован в практике технико-нормировочной работы новый упрощенный метод нормирования.

Процесс нормирования при этом складывается из двух основных этапов: на первом на основе анализа фактической информации мето-

дами математической статистики устанавливаются коэффициенты трудности, на втором - методами технического нормирования с применением математических приемов определяется абсолютная величина одной нормы производительности в условиях, принятых за основные, базисные.

Поясним этот метод нормирования на следующем схематическом примере.

Допустим, что в дуговой электросталеплавильной печи выплавляется 5 групп марок стали. В результате статистического анализа установлены следующие соотношения в средней фактической производительности при их выплавке:

группы марок	1	II	III	IV	V
коэффициент трудности	1,0	0,9	1,1	1,15	0,25

Установив затем норму производительности для одной из групп, легко можно определить величину норм для всех остальных, используя полученные соотношения. Пусть, например, норма производительности 1 группы составляет 3,0 т/час. Тогда нормы производительности печи при выплавке других групп марок будут:

II группа	$3,0 : 0,9 = 3,33$ т/час
III группа	$3,0 : 1,1 = 2,72$ т/час
IV группа	$3,0 : 1,15 = 2,60$ т/час
V группа	$3,0 : 0,25 = 12,00$ т/час

То же рассуждение можно применить к установлению нормативов длительности. Таким образом, изложенный метод нормирования предусматривает следующую последовательность действий:

а) статистическое определение влияния заданных факторов и разработку на основе данных анализа системы коэффициентов трудности;

б) детальное обоснование уровня норм для одного базисного сочетания заданных условий производства;

в) установление норм или нормативов при любых других сочетаниях заданных условий путем учета влияния изменения этих условий системой коэффициентов.

В качестве базисных условий обычно принимаются наиболее распространенные, типичные для данного участка сочетания факто-

ров группировки (x_k). За основную норму принимается: в доменных цехах - производительность печей при выплавке передельного чугуна, в мартеновских - при выплавке ходовой группы марок, в электросталеплавильных - при выплавке ходовой группы марок наиболее распространенным способом.

Следует подчеркнуть, что изложенный метод нормирования не имеет ничего общего с так называемым опытно-статистическим. В данном случае статистические методы используются лишь для установления соотношений норм производительности, абсолютная величина базисной, основной, нормы является технически обоснованной и устанавливается методами технического нормирования с применением математики как вспомогательного инструмента анализа. Поскольку норма производительности (или норма времени) для основной группы условий является технически обоснованной, то и все производные нормы, полученные на ее основе, также будут являться технически обоснованными.

Математически изложенный порядок нормирования можно представить следующей схемой:

1. В целевой функции

$$P = f(x_1, \dots, x_{n_1}, x_{n_1+1}, \dots, x_{n_2}, x_{n_2+1}, \dots, x_n)$$

полагают влияние группы факторов x_k и x_p независимыми друг от друга. Переменные факторы x_p и x_f считают постоянными и принимают их значения на уровне фактически сложившихся в данной производственной обстановке, т.е. $x_p = \bar{x}_p$ и $x_f = \bar{x}_f$.

Статистическими методами по данным текущего производственного учета устанавливается величина \bar{P}_i , соответствующая практически возможным и необходимым сочетаниям x_k . Затем одно из сочетаний x_k и соответствующее ему \bar{P}_i принимают за условную единицу и рассчитывают систему коэффициентов трудности.

II. Для сочетания условий x_k , принятых за базисные, решают соответствующую задачу на оптимум и определяют базисную, основную норму - N_0 .

III. При необходимости на основе системы коэффициентов трудности и N_0 восстанавливают всю систему норм.

Следует отметить, что для выполнения некоторых технико-

экономических расчетов можно ограничиться первым этапом работы - установлением системы коэффициентов.

При разработке изложенного метода нормирования возможная взаимосвязь заданных условий (X_k) и регламентируемых факторов (X_p) не учитывалась. При этом отношение норм производительности (N_i) к средней фактической производительности (\bar{P}_i) будет одинаковым для всех норм, входящих в систему норм, т.е. принято

$$\frac{N_i}{\bar{P}_i} = const.$$

Практика технико-нормировочной работы показывает, что это допущение достаточно близко к действительности и упрощенный метод обеспечивает получение достаточной точности норм.

Так, например, выполненные Гликманом и Старосельским¹⁾ расчеты показали, что с достаточной для практики точностью можно считать, что влияние изменения скоростного режима прокатки и развеса слитков сказывается относительно одинаково для всех профилиразмеров блюмсов, прокатываемых на стане.

Применение такой позатальной методики построения системы норм (нормативов) позволяет очень широко использовать в технико-нормировочной работе массовые данные текущего производственного учета и тем самым при улучшении качества и обоснованности норм резко снизить трудоемкость работ.

1) "Социалистический труд" № 6, 1960 г.

Б.Б.Розин, Г.А.Нарышев

МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ УСТАНОВЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТРУДНОСТИ В МАРТЕНОВСКОМ ПРОИЗВОДСТВЕ

Среди используемых на металлургическом предприятии в плано-экономической работе нормативов одно из центральных мест занимают нормативы длительности плавов. Особенно важное значение они имеют в производственном планировании. От того, насколько правильны эти нормативы, зависит точность составления графика выпусков плавов сталеплавильными печами, а следовательно, и организация дальнейшего потока движения металла.

В настоящее время нет строгих способов установления таких нормативов. Длительность плавки оценивается очень приблизительно, что видно хотя бы по тому факту, что график выпусков плавов на большинстве металлургических заводов СССР выполняется на 40-50%. Отсюда возникают затруднения в работе цеха подготовки составов, стрипперного отделения и обжимного стана.

В настоящей статье авторы предлагают методику установления нормативов длительности плавов в мартеновских печах, основанную на анализе различных причин, влияющих на эту длительность, с помощью аналитических методов.

1. Характеристика сортамента мартеновских цехов КМК

В мартеновских печах Кузнецкого металлургического комбината за период январь - июнь 1963 года было выплавлено 79 марок стали. По назначению и химсоставу в соответствии с действующими ГОСТами эти марки стали могут быть объединены в 4 группы:

1. сталь углеродистая общего назначения;
2. сталь низколегированная;
3. сталь конструкционная качественная и высококачественная;
4. инструментальная сталь.

Стали 1-й и 3-й групп могут быть подразделены по способу выплавки на кипящие, полуспокойные и спокойные.

Из анализа данных об удельном весе отдельных марок стали в общем объеме производства следует:

1. Имеется специализация отдельных типов печей на выплавке определенных марок стали.

2. Небольшое число ходовых марок стали выплавляется систематически, и они занимают большой удельный вес в общем объеме производства. Остальные марки стали выплавляются редко, в не больших количествах. Следует подчеркнуть, что эта характерная черта свойственна сортаменту большинства сталеплавильных цехов металлургических предприятий.

О степени специализации отдельных типов печей дают представление данные, приведенные в табл.1.

Таблица 1

Типы печей	Количество выплаваемой стали по группам марок (%)				Всего (%)	Доля печей в общем объеме производства
	1	II	III	IV		
200 - Т	19,3	30,9	46,2	3,6	100	14,0
400 - Т	83,2	2,3	14,5	-	100	86,0
Всего	74,2	6,4	18,9	0,5	100	100

Как следует из таблицы, 200-тонные печи специализированы на производстве низколегированной и конструкционной стали

(77,1%), а 400-тонные - на производстве стали общего назначения. Всего в производстве на 12-ти 400-тонных печах за рассматриваемый период находилось 48 марок стали, а на 3-х 200-тонных - 60.

В табл.2 показана доля наиболее часто выплавляемых марок стали в общем объеме производства.

Таблица 2

№ групп	Марки стали	Количество марок в группе	Удельный вес группы (%)	Накопленный итог
1.	М-76, М-75, М-71, Ст3сп, Ст3пс, Ст3кп	6	56,07	56,07
2.	Ст5сп, Ст5пс, 45, 09Г2, осевая, 40х	6	14,17	70,24
3.	20кп, 35ГС, РРпс, 20сп, Ст4сп, Ст4кп, Ст6сп, М-53, 36Г2С, 08кп, 15кп, 18ЛГТ	12	16,05	86,29
4.	Прочие марки стали	55	13,71	100,0

Из общего объема, только 6 наиболее ходовых марок стали (рельсовые и ст 3) составляют более половины общего производства мартеновской стали; 12 ходовых марок стали дают более 2/3 общей выплавки. На долю оставшихся 55 сравнительно редко выплавляемых марок стали приходится менее 14%.

Для характеристики сортамента мартеновских цехов КМК представляет интерес рассмотрение различных способов выплавки стали.

Мартеновские стали, выплавляемые на КМК, по способу выплавки могут быть разделены на 3 вида:

1. спокойные;
2. полуспокойные;
3. кипящие.

В табл.3 показан удельный вес марок стали, выплавляемых различными способами.

Таблица 3

Марки стали	%
1. Спокойные	70,67
2. Полуспокойные	7,85
3. Кипящие	21,48
----- И т о г о	----- 100,00

При установлении влияния марочного сортамента на длительность плавки были рассмотрены два различных математико-статистических подхода к решению вопроса:

1. метод комбинационной группировки;
2. методы множественной корреляции.

П. Применение метода комбинационной группировки

Этот метод является наиболее простым для установления влияния марочного сортамента и способов выплавки на длительность плавки.

Задача комбинационной группировки заключается в установлении соотношений между средней длительностью плавки марки стали, применяемой за основную, и длительностями плавки остальных марок стали. При этом группировочными признаками служат: типы печей, способы выплавки, марка стали.

Для того, чтобы выяснить "чистое" влияние этих признаков, нужно исключить влияние фактора времени и индивидуальных различий плавки. Исключение фактора времени достигнуто с помощью специального метода группировки: отношение длительности плавки по маркам стали определялось внутри групп, состоящих из 10-ти последовательных плавки. Тем самым фактор времени рассматривался как четвертый группировочный признак. Для определения коэффициентов трудности внутри каждого десятка за "базовые" были приняты следующие марки стали: СтЗкп, СтЗсп и рельсовые. Затем производилось приведение коэффициентов к одной "базовой" марке-рельсовой. Для этого все коэффициенты, определенные для СтЗсп, умножались на отношение длительностей $\frac{\text{СтЗсп}}{\text{Рс}} = 1,08$, для СтЗкп-

на отношение $\frac{СтЗкп}{Рс} = 1,05$.

Например, в группе из 10 последовательных плавов были получены следующие средние длительности и коэффициенты трудности.

Таблица 4

Марки стали	Число плавов	Средняя длительность плавок(мин.)	Коэффициент трудности внутри десятка
Ст6сп	2	700	0,98
СтЗкп	4	716	1,0
СтЗпс	1	670	0,94
Ст5пс	2	712	0,99
СтЗсп	1	785	1,09

В данном примере в качестве "базовой" принята СтЗкп, поэтому для приведения остальных марок к общей базе рельсовой стали необходимо все коэффициенты умножить на 1,05. При этом получим следующие приведенные коэффициенты трудности:

- Ст6сп - 1,03 ;
- СтЗкп - 1,05 ;
- СтЗпс - 0,97 ;
- Ст5пс - 1,04 ;
- СтЗсп - 1,13.

Исключение влияния индивидуальных различий плавов может быть осуществлено только лишь рассмотрением достаточно большого числа плавов по каждой марке стали. При достаточном числе случаев индивидуальные и случайные отклонения будут взаимопогашаться, и мы сможем выявить "чистое" влияние марочного сортамента.

Основная особенность, которую необходимо при этом учитывать, заключается в том, что объект группировки - длительность плавок колеблется, как было показано ранее, в значительных пределах.

Вследствие этого, при группировке возникает вопрос, какое количество плавов должно быть принято в анализ, чтобы результат группировки был статистически достоверен. Определение средней длительности плавов для данной марки стали можно рассматривать как выборочное определение средней.

Поскольку производственный процесс идет непрерывно, можно считать, что производится бесповторная выборка из очень большого числа плавов. Ошибка определения выборочной средней в этом случае рассчитывается по формуле:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \quad , \text{ где}$$

μ - средняя ошибка выборки;

σ - среднеквадратичное отклонение длительности плавов по одной и той же марке стали;

n - объем выборки (число плавов).

В табл.5 приведен расчет ошибки выборочного определения средней длительности плавов для отдельных марок стали.

Таблица 5

Марки стали	Количество плавов	Средняя длительность (мин.) \bar{x}_i	σ (мин.)	Средняя ошибка μ (мин.)	Средняя ошибка τ (%)
08кп	12	762	65,5	18,9	5,00
15кп	13	705	46,5	16,4	3,66
Со3кп и пс	206	702	55,5	3,78	0,93
Ст3сп	213	724	47,9	3,29	1,04
20сп	17	701	39,7	9,5	2,76
20кп	5	687	66,5	29,7	8,66
Ст4кп	20	693	52,5	11,7	3,40
Ст4сп	26	699	51,5	10,1	2,89
Ст5пс	45	691	54,2	8,1	2,33
Ст5сп	29	696	54,5	10,2	2,90
35ГС	18	699	38,2	9,0	2,58
Ст6сп	33	693	49,8	8,5	2,50
45	50	719	50,5	7,1	1,98
Л-53	32	668	47,5	8,4	2,52
Р-43	111	665	43,7	4,1	1,25
Р-50	122	662	35,3	3,2	0,97
Р-65	139	673	43,4	3,7	1,10
РРпс	19	648	63,5	14,5	4,48

Как следует из таблицы, по маркам стали, выплававшимся в небольших количествах (5-15 плавов за полгода), ошибка в определении средней может достигать значительных размеров, около 20-30 минут. Естественно, что такая величина ошибки делает величины коэффициентов статистически недостоверными, так как ошибка превышает разницу в средней длительности плавов отдельных марок.

Для целей оперативного планирования можно считать допустимой ошибку в определении средней не более, чем 10 минут, тогда минимально необходимое число плавов в выборке должно быть не менее 17-20. По маркам стали, которые выплавливались в анализируемый период в меньших количествах, достоверная величина коэффициентов трудности методом комбинационной группировки установлена быть не может. При этом набрать большее число плавов для расчета средних путем увеличения периода выборки зачастую не представляется возможным, так как будет нарушен принцип сопоставимости. Ниже приведены результаты определения средних коэффициентов трудности по отдельным маркам стали для 400-тонных печей (табл.6) и для 200-тонных печей (табл.7).

Таблица 6

№ п/п	Марки стали	Число плавов	Средний коэффициент трудности
Статистически-достоверные коэффициенты			
1.	Рельсовые (М-71, М-75, М-76)	560	1,00
2.	Ст4кп	31	1,03
3.	Ст4сп	39	1,06
4.	Ст5пс	121	1,02
5.	Ст5сп	29	1,01
и т.д.			
Статистически-недостоверные коэффициенты			
1.	Ст2кп	2	0,96
2.	М16С	11	1,13
3.	08пс	16	1,12
4.	15кп	13	1,01
5.	20кп	11	1,04

и т.д.

Таблица 7

Таблица коэффициентов трудности
по маркам стали (200-тонные печи)

№ п/п	Марки стали	Число плавов	Средний коэффициент трудности
	Статистически-достоверные коэффициенты		
1.	20X	19	1,11
2.	09Г2	98	1,04
3.	18ХГТ	33	1,12
4.	40X	49	1,10
5.	Осевая	233	1,00
	Статистически-недостоверные коэффициенты		
1.	Ст 1-2 кп	2	0,92
2.	Ст2кп	2	1,05
3.	Ст3кп	5	1,06
4.	Ст3сп	3	1,25
5.	Ст4сп	1	1,13
	и т.д.		

Из 45 марок стали, выплавленных на 400-тонных печах, обоснованные коэффициенты трудности могут быть установлены по 23-м маркам, на 200-тонных печах из 69 марок - по 5-ти маркам.

Общее число коэффициентов трудности достаточно велико (113). Использовать такое количество коэффициентов в плано-экономической работе неудобно. Кроме того, величина коэффициентов изменяется в сравнительно небольших пределах. Поэтому возникает необходимость на 2-м этапе анализа - во вторичной группировке марок стали по величине коэффициентов.

При этом за центры групп приняты средние величины коэффициентов трудности по маркам стали, выплаваемым в больших количествах, по которым ошибка измерения средней мала.

На 400-тонных печах в качестве центров такой вторичной группировки были приняты рельсовые стали со средней длительностью 668 мин. ($K = 1,0$), Ст3кп - 702 мин. ($K = 1,05$), Ст3сп -

724 мин. ($\kappa = 1,08$). Выбор этих марок за центры группировок определяет целесообразную ширину интервала. По 400-тонным печам она составляет 0,05 - 30 минут.

При этом могут быть образованы 4 группы марок:

- 1 - со средней длительностью плавки
менее 680 мин. ($\kappa < 1,02$),
- II - со средней длительностью плавки
680 - 710 мин. ($\kappa = 1,02 \div 1,07$),
- III - со средней длительностью плавки
710- 740 мин. ($\kappa = 1,07 + 1,12$),
- IV - со средней длительностью плавки
более 740 мин. ($\kappa > 1,12$).

Отнесение определенной марки стали в данную группу стати - стически правомерно в том случае, если доказана существенность ее различия с центром ближайшей группы, что равносильно доказательству существенности различия двух средних. Например, средняя длительность плавки по Ст5сп равна 696 мин. При нашей группировке эта марка должна быть отнесена ко II группе. Поскольку длительность 696 мин. есть средняя из случайных величин, необходимо доказать, что различие ее с длительностью соседней группы (рельсовой) существенно, т.е. доказать, что разница 696-668 не случайна.

В теории статистики доказывается, что различие между двумя выборочными средними является статистически достоверным, если ошибка разности средних в 2 - 2,5 раза меньше самой разности. Математически условие существенности различий может быть представлено следующим выражением:

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\mu_p} \gg 2 \div 2,5 \quad , \text{ где}$$

\bar{x}_1 и \bar{x}_2 - соответственно сравниваемые выборочные средние;
 μ_p - средняя ошибка разности.

В случае некоррелированных признаков ошибка разности рассчитывается по формуле:

$$\mu_p = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2} \quad , \text{ где}$$

μ_1 и μ_2 - соответственно ошибки выборочных средних по сравнительным маркам стали.

Приведенное выражение позволяет нам определить минимально необходимую численность выборки для обоснованного разнесения марок стали в группы. За центры группировки по 400-тонным печам были приняты рельсовые стали (М-71, М-75, М-76), СтЗкп и СтЗсп. Ошибки определения средних по этим маркам (μ_1) были соответственно 3,2 - 3,8 мин. Для расчета принимаем ошибку определения средней $\mu_1 = 3,8$ мин. Минимально необходимую численность выборки по сравниваемой с центрами группировки марки стали можно определить, исходя из условия существенности различия.

В выражение $\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\mu_p} \geq 2 \div 2,5$ подставим значения μ_p :

$$\frac{\Delta \bar{x}}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}} \geq 2 \div 2,5 \quad , \text{ где } \Delta \bar{x} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$$

но $\mu_1 = 3,8$, а $\mu_2 = \sqrt{\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$, откуда после преобразования получаем:

$$n_2 = \frac{6,25 \sigma_2^2}{\Delta \bar{x}^2 - 90} ;$$

Внутримарочная колеблемость (σ_2) по прочим маркам стали, как показывают расчеты, равна 48 мин. Результаты расчета минимально-необходимой численности выборки для обоснованного разнесения марок стали в группы при различных величинах отклонений приведены в табл.8.

Таблица 8

Величина разности в длительности между сравниваемой и основной марками стали	В долях коэффициента трудности	0,03	0,05	0,06	0,08
	в мин.	20	30	40	50
Минимально-необходимое число плавов для достоверности суждения		39	17	10	5

Таким образом, для статистического доказательства отклонений средней длительности какой-либо марки стали от основной на 20 мин. средняя должна быть рассчитана не менее, чем по 39 плавкам, а для доказательства различий в средней длительности на 40-50 мин. в расчете можно принять всего 5-10 плавков. Результаты вторичной группировки приведены для 400-тонных печей в табл.9, для 200-тонных-в табл.10.

Таблица 9

Группа марок	Марки стали	Число плавков	Средне взвешенный коэффициент трудности
1	а) Р-65, Р-50, Р-43, Л-53, Ст5пс	597	1,00
II	а) Ст3кп, Ст3пс, 50, 30Г, 45	337	1,05
	б) Ст4ск, Ст5сп, Ст6ск, 25, 30, 35, 40, 60, 15кп, Ст4кп, 20кп, 40Г, 50Г, 70Г, Д	257	
III	а) Ст3сп, 65Г, 10кп, 10сп, 20сп, 25ГС, 35ГС, 15сп	421	1,10
	б) М16С, Ст1-2кп, 35Х, 45Х	22	
1У	а) 08кп, 08пс, 36Г2С, 14Г2, 40Х	104	1,15
	б) 45Г2, 15Х, 20Х, 40ХН	18	

Примечание:

- а) Марки стали, по которым коэффициенты трудности статистически достоверны;
- б) Марки стали, по которым коэффициенты трудности статистически недостоверны.

Методом комбинационной группировки не представляется возможным обоснованно отнести в ту или иную группу марки стали, выделенные в подгруппу б) в каждой группе. Данные марки распределены в группы по принципу аналогии и близости их по химическому составу с марками стали в подгруппе а).

Полученные коэффициенты трудности могут быть использованы

Таблица 10

Группа марок	Марки стали	Количество плавов	Средне взвешенный коэффициент трудности
1	а) Осевая, СтЗсп	116	1,00
	б) Ст1-2кп, Ст5кп, 15кп, 20кп, 20 сп, 25, 30, 35, 40, 50, 70, Ст6сп, М16С	33	
П	а) 09Г2, 45Г2, 20Х, 35Х, 40Х,	188	1,06
	б) 14Г2, 30Г2, 20Г2, 30Г, 40Г, 65Г, У7, У8, У8А, 45Х, 08кп, 10сп, 85	46	
Ш	а) 18ХГТ, 16ГТ, 36Г2С, 10ХСНД	73	1,14
	б) 15ХСНД, 30ХГТ, 38ХС, 30ХГСА, 35ХГ2, 20ХГНР, У8ГА, 15Х	23	
1У	а) 20ХНЗА, 40ХН	26	1,26
	б) 45ХН, 12ХНЗА, 17ХН2, СХЛ-45, 18ХН2	9	

не только для прогнозирования длительности плавов в оперативном планировании, но и для технико-экономического планирования, технического нормирования и при анализе работы печей.

Ш. Применение методов множественной корреляции

Необходимость применения более сложных статистических методов для установления влияния марочного сортамента на длительность плавки обуславливается следующими двумя обстоятельствами:

а) По редко выплавляемым маркам стали комбинационная группировка не дает возможности определить достоверное значение коэффициента трудности.

б) Комбинационная группировка не позволяет оценивать длительность плавов и, соответственно, коэффициентов трудности вновь осваиваемых марок стали.

При использовании методов корреляционного анализа мы по-

лагаем, что основное влияние марочного сортамента на длительность плавки проявляется через посредство заданного химического состава готовой стали. В конечном счете для данного типа печей и данного способа выплавки химический состав стали определяет и характер шихтовки, и характер ведения технологического процесса.

Некоторое влияние на длительность плавки марка стали оказывает тем, насколько часто она выплавливается. По редко выплавливаемым маркам при прочих равных условиях длительность плавки будет больше, чем по ходовым маркам стали аналогичного состава. Но, поскольку выплавливаемые в мартеновских печах КМК марки довольно однотипны, влиянием этого фактора можно пренебречь.

С целью устранения влияния способа ведения технологического процесса, корреляционный анализ проводился по следующим группам марок стали:

- а) углеродистые спокойные;
- б) углеродистые кипящие и полуспокойные;
- в) хромистые и хромоникелевые;
- г) марганцовистые.

Исследование влияния химического состава готовой стали на длительность плавки проводилось по каждой группе марок в отдельности.

Рассмотрим результаты множественного корреляционного анализа по каждой из этих групп марок стали.

Углеродистые спокойные марки стали (400-тонные печи)

В ходе анализа устанавливалось влияние содержания следующих пяти химических элементов: C , Mn , Si , S и P . При этом под содержанием химического элемента в стали понималось его фактическое содержание в готовой стали. Всего в анализ было принято 509 плавов следующих марок стали: 3сп, 4сп, 5сп, 6сп, М16С, Л-53, Р-65, Р-50, Р-43, 15сп, 20сп, 10сп, 25, 35, 40, 45, 50, 60, 70.

Расчеты были выполнены по программе, разработанной Лабораторией экономико-математических исследований на электронно-вычислительной машине СО АН СССР.

Средние значения и среднеквадратичные отклонения принятых в анализ факторов приведены в табл.11.

Таблица 11

№ п/п	Наименование факторов	\bar{x}	σ	Коэффициент вариации ν (%)
1	Содержание углерода (C)	0,48	0,25	52,0
2	Содержание марганца (Mn)	0,65	0,14	21,6
3	Содержание кремния (Si)	0,21	0,04	19,0
4	Содержание фосфора (P)	0,019	0,005	26,3
5	Содержание серы (S)	0,035	0,003	8,6
6	Длительность плавки (t)	676	51,8	7,8

Из таблицы следует, что наибольшую колеблемость из рассматриваемых элементов по данной группе марок имеет содержание углерода, а наименьшую - содержание серы.

В табл.12 приведены парные коэффициенты корреляции.

Таблица 12

	$C(x_2)$	$Mn(x_3)$	$Si(x_4)$	$P(x_5)$	$S(x_6)$	$t(x_1)$
$C(x_2)$	/	0,91	-0,08	-0,21	-0,28	-0,34
$Mn(x_3)$	0,91	/	-0,02	-0,15	-0,26	-0,32
$Si(x_4)$	-0,08	-0,02	/	0,16	-0,01	0,06
$P(x_5)$	-0,21	-0,15	0,16	/	0,22	0,14
$S(x_6)$	-0,28	-0,26	-0,01	0,22	/	0,12
$t(x_1)$						/

В последней колонке таблицы приведены парные коэффициенты корреляции, характеризующие степень влияния отдельных химических элементов на длительность плавки t .

Из этих данных следует, что наиболее сильное влияние оказывает содержание C ($r_{21} = -0,34$) и Mn ($r_{31} = -0,32$). Отрицательные значения этих коэффициентов означают, что с увеличением содержания C и Mn в готовой стали длительность

плавки уменьшается. Значительно меньшее влияние оказывают другие 3 элемента и особенно содержание S_i ($r_{41} = 0,06$). При этом увеличение содержания этих элементов увеличивает длительность плавки.

Полученные коэффициенты корреляции характеризуют тесноту связи между содержанием элементов и длительностью плавки без учета взаимосвязи содержания элементов между собой.

В действительности содержание отдельных химических элементов довольно тесно взаимосвязано, и поэтому влияние каждого отдельного параметра на длительность плавки может искажаться в результате неявного влияния связанного с ним параметра.

Так, например, из табл.12 следует, что очень тесно связано в сталях этой группы марок содержание углерода и марганца ($r_{23} = 0,91$). Такой высокий парный коэффициент корреляции означает, что имеется почти функциональная зависимость между содержанием этих двух элементов в стали. Увеличению содержания углерода всегда сопутствует увеличение содержания марганца и наоборот. Поэтому возникает задача выяснения "чистого" влияния каждого из этих факторов в отдельности.

Оценить "чистое" влияние принятых в анализ элементов позволяет метод множественной корреляции.

В результате выполненных на ЭВМ расчетов было получено следующее уравнение множественной корреляции в натуральном виде:

$$t = 689 - 51,3 C - 30,3 M_n - 47,5 S_i + 638 P + 250,3 S \dots \quad (1)$$

где t - длительность плавки в минутах,

C, M_n, S_i, P, S - содержание соответствующих химических элементов в стали (в процентах).

Совокупный коэффициент корреляции между содержанием принятых в анализ элементов (C, M_n, S_i, P, S) и длительностью плавки равен $R_0 = 0,353$.

Было получено также уравнение множественной корреляции в квадратичной форме, так как предполагалось, что влияние отдельных элементов может иметь нелинейный характер. В этом случае уравнение множественной корреляции будет иметь следующий вид:

$$t = 622 - 266,9 C + 261 C^2 + 39,2 M_n - 72,6 M_n^2 + \\ + 189,3 S_i - 184,7 S_i^2 + 356,6 \rho - 54896 \rho^2 + \quad (2) \\ + 136,9 S - 11329,8 S^2 \dots$$

Совокупный коэффициент корреляции $R_{0(\kappa\delta)} = 0,384$. Поскольку $R_{0(\text{лин})}$ и $R_{0(\kappa\delta)}$ близки, то расчеты можно вести по более простой, линейной форме.

Получены следующие значения частных коэффициентов корреляции:

Влияние углерода при постоянном содержании M_n , S_i , ρ и S :

$$r_{21(3,4,5,6)} = - 0,107 ;$$

$$\text{Влияние } M_n - r_{31(2,4,5,6)} = - 0,037 ;$$

$$\text{Влияние } S_i - r_{41(2,3,5,6)} = - 0,034 ;$$

$$\text{Влияние } \rho - r_{51(2,3,4,6)} = - 0,064 ;$$

$$\text{Влияние } S - r_{61(2,3,4,5)} = - 0,016 .$$

Приведенные данные также свидетельствуют о том, что наиболее сильно действует содержание углерода.

Для упрощенных расчетов можно содержание S_i , ρ и S из уравнения исключить, так как среднее содержание этих элементов по рассматриваемым маркам различается незначительно. В этом случае уравнение множественной корреляции для углеродистых споконных марок стали примет вид:

$$t = 718 - 68 C - 22 M_n \dots \quad (3)$$

Обозначив содержание C и M_n в базовой марке за $C_{(0)}$ и $M_{n(0)}$ и в сравниваемых марках за $C_{(i)}$ и $M_{n(i)}$, получим следующее выражение для коэффициентов трудности:

$$K_i = \frac{t_i}{t_0} = \frac{718 - 68 C_{(i)} - 22 M_{n(i)} \dots}{718 - 68 C_{(0)} - 22 M_{n(0)}} \dots \quad (4)$$

В нашем случае за базовую приняты рельсовые марки стали, имеющие среднее содержание $C_{(0)} = 0,72\%$ и $M_{n(0)} = 0,80\%$. Тогда уравнение (4) примет вид:

$$K_i = 1,11 - 0,1 C_{(i)} - 0,03 M_{n(i)} \dots \quad (5)$$

Выполним по уравнению (5) расчеты коэффициентов трудности для марок, входящих в рассматриваемую группу. Результаты расчетов приведены в табл.13.

Таблица 13

№ п/п	Марки стали	Среднее содержание элементов в марке		Величина коэффициентов трудности		
		<i>C</i>	<i>M_n</i>	расчетный	по комбинационной группе - ровке	принятый
1.	Ст3сп	0,18	0,48	1,08	1,08	1,08
2.	Ст4сп	0,20	0,51	1,08	1,06	1,07
3.	Ст5сп	0,33	0,64	1,06	1,01	1,05
4.	Ст6сп	0,53	0,61	1,04	0,99	1,03
5.	M16C	0,16	0,53	1,08	1,13	1,08
6.	Л-53	0,52	0,60	1,04	0,99	1,02
7.	P-65	0,74	0,81	0,99	1,00	1,00
8.	P-50	0,72	0,79	1,00	1,00	1,00
9.	P-43	0,70	0,74	1,00	1,00	1,00
10.	15сп	0,15	0,51	1,08	1,16	1,09
11.	20сп	0,20	0,51	1,08	1,12	1,08
12.	10сп	0,11	0,50	1,09	1,09	1,10
13.	25	0,24	0,60	1,07	1,04	1,07
14.	30	0,30	0,61	1,07	1,01	1,07
15.	35	0,35	0,67	1,06	1,08	1,06
16.	40	0,39	0,63	1,05	1,10	1,05
17.	45	0,45	0,64	1,05	1,06	1,05
18.	50	0,51	0,66	1,04	1,05	1,05
19.	60	0,59	0,56	1,03	1,18	1,03

Углеродистые кипящие марки стали (400-тонные печи)

В ходе анализа устанавливалось влияние на длительность плавки содержания 4-х химических элементов: *C*, *M_n*, *P* и *S*.

Всего в анализ было принято 243 плавки следующих марок стали: 08кп, 08пс, 10кп, 15кп, Ст3кп, Ст3пс, Ст4кп, Ст5пс, 20кп, РРпс, Ст1-2кп.

Средние значения и среднеквадратичные отклонения принятых в анализ факторов приведены в табл.14.

Таблица 14

№ п/п	Наименование факторов	\bar{x}	σ	ν (%)
1.	Содержание C	0,22	0,10	45,5
2.	Содержание Mn	0,50	0,08	16,0
3.	Содержание P	0,021	0,006	28,5
4.	Содержание S	0,038	0,004	10,5
5.	Длительность плавки t	689	60,3	8,8

Из таблицы следует, что наибольшую колеблемость из рассматриваемых элементов, как и для углеродистых спокойных марок, имеет содержание углерода, а наименьшую - содержание серы.

В табл.15 приведены парные коэффициенты корреляции между факторами и показателями, принятыми в анализ.

Таблица 15

	$C(x_2)$	$Mn(x_3)$	$P(x_4)$	$S(x_5)$	$t(x_1)$
$C(x_2)$	/	0,73	0,26	0,20	-0,17
$Mn(x_3)$	0,73	/	0,17	0,18	-0,17
$P(x_4)$	0,26	0,17	/	0,10	-0,04
$S(x_5)$	0,20	0,18	0,10	/	0,09
$t(x_1)$					/

Рассмотрим парные коэффициенты корреляции между содержанием элементов и длительностью плавки t .

Как и в предшествующем случае, наиболее сильное влияние оказывает содержание в стали углерода ($r_{21} = -0,17$) и марганца

($z_{31} = - 0,17$) , однако по абсолютному значению эти коэффициенты вдвое меньше ранее полученных. Это, вероятно, объясняется меньшей вариацией содержания C и M_n в рассматриваемой группе марок стали (к кипящим относятся только мало- и среднеуглеродистые марки стали).

Содержание фосфора практически не оказывает влияния на длительность плавки ($z_{41} = - 0,04$), а серы оказывает, но слабое ($z_{51} = 0,09$).

Что касается взаимосвязи между элементами, то наиболее тесно связаны C и M_n ($z_{23} = 0,73$). Взаимосвязь содержания других элементов значительно более слабая ($z = 0,1 + 0,26$).

В результате выполнения необходимых расчетов получено следующее уравнение множественной корреляции:

$$t = 674,8 - 71,5 C - 85,1 M_n - 11,8 P + 1891,5 S \dots (6)$$

Совокупный коэффициент корреляции между содержанием C , M_n , P , S и длительностью плавки t $R_0 = 0,229$, т.е. связь сравнительно слабая. Для оценки степени влияния отдельных элементов были вычислены частные коэффициенты корреляции, дающие связь каждого данного элемента с длительностью плавки при исключении влияния прочих элементов.

Получены следующие значения частных коэффициентов корреляции:

влияние углерода при постоянном содержании M_n , P и S -
 $z_{21(3,4,5)} = - 0,083$;

влияние марганца при постоянном содержании C , P и S -
 $z_{31(2,4,5)} = - 0,077$;

влияние фосфора при постоянном содержании C , M_n и S -
 $z_{41(2,3,5)} = - 0,001$;

влияние серы при постоянном содержании C , M_n и P -
 $z_{51(2,3,4)} = 0,135$.

Анализ величин частных коэффициентов корреляции показывает, что без значительного снижения точности можно пренебречь влиянием фосфора. Содержание серы в разных марках стали различается незначительно. Тогда уравнение (6) примет вид:

$$t = 743 - 64 C - 80 M_n \dots \quad (7)$$

А выражение для коэффициентов трудности будет:

$$K_i = \frac{t_i}{t_0} = \frac{743 - 64 C_{(i)} - 80 M_{n(i)}}{743 - 64 C_{(0)} - 80 M_{n(0)}} \dots \quad (8)$$

Принимая за базовую марку СтЗкп, имеющую среднее содержание углерода $C_{(0)} = 0,18\%$ и марганца $M_{n(0)} = 0,47$, имеем:

$$K_i = 1,07 - 0,09 C_{(i)} - 0,11 M_{n(i)} \dots \quad (9)$$

Результаты расчетов по уравнению (9) приведены в табл.16.

Таблица 16

№ п/п	Марки стали	Среднее содержание		Величина коэффициентов трудности			Принятый коэффициент трудности
		C	Mn	расчетный	приведенный к рельсовым	по комбинационной группировке	
1.	08кп	0,09	0,35	1,03	1,08	1,15	1,13
2.	08пс	0,1	0,43	1,02	1,07	1,12	1,13
3.	10кп	0,1	0,4	1,02	1,07	1,10	1,10
4.	15кп	0,15	0,43	1,01	1,06	1,01	1,06
5.	СтЗкп	0,18	0,47	1,00	1,05	1,05	1,05
6.	СтЗпс	0,18	0,48	1,00	1,05	1,02	1,05
7.	Ст4кп	0,23	0,53	0,99	1,04	1,03	1,04
8.	Ст5пс	0,34	0,59	0,97	1,02	1,02	1,02
9.	20кп	0,18	0,40	1,01	1,06	1,04	1,05
10.	РРпс	0,58	0,63	0,95	1,00	1,00	1,00
11.	Ст1-2кп	0,11	0,34	1,03	1,08	1,08	1,08

Хромистые и хромоникелевые стали (200-точные печи)

Методами множественной корреляции устанавливалось влияние на длительность плавки 7-ми химических элементов. Всего в анализ было принято 228 плавок следующих марок стали: 10ХСНД, 15ХСНД,

15X, 20X, 35X, 40X, 45X, 38XC, 40XH, 45XH, 18XГТ, 12ХНЗА, 30ХГСА, 35ХГ2, 20ХГНР, 30ХГТ, СХЛ-45, 17ХН2.

Средние значения и среднеквадратичные отклонения принятых в анализ факторов приведены в табл.17.

Таблица 17

№ п/п	Наименование факторов	\bar{x}	σ	ν (%)
1.	Содержание C	0,31	0,18	58
2.	Содержание M_n	0,67	0,23	34,4
3.	Содержание S_i	0,35	0,26	74,4
4.	Содержание P	0,03	0,006	20,0
5.	Содержание S	0,025	0,004	16,0
6.	Содержание C_z	0,92	0,23	25,0
7.	Содержание Ni	0,50	0,87	174,0
8.	Длительность плавки	551	65,0	11,8

Из таблицы следует, что в рассматриваемой группе марок значительной изменчивостью отличается содержание никеля, кремния, углерода.

В табл.18 приведены парные коэффициенты корреляции между принятыми в анализ факторами.

Таблица 18

	$C(x_2)$	$M_n(x_3)$	$S_i(x_4)$	$P(x_5)$	$S(x_6)$	$C_z(x_7)$	$Ni(x_8)$	$t(x_1)$
$C(x_2)$	/	-0,24	-0,21	-0,05	-0,25	-0,10	-0,31	-0,17
$M_n(x_3)$	-0,24	/	-0,11	0,023	0,18	0,11	-0,33	-0,28
$S_i(x_4)$	-0,21	-0,11	/	-0,03	-0,11	0,21	-0,02	0,007
$P(x_5)$	-0,05	0,023	-0,03	/	-0,08	-0,06	0,03	0,03
$S(x_6)$	-0,25	0,18	-0,11	-0,08	/	0,15	-0,26	-0,06
$C_z(x_7)$	-0,10	0,11	0,21	-0,06	0,15	/	-0,40	-0,25
$Ni(x_8)$	-0,31	-0,33	-0,02	0,03	-0,26	-0,40	/	0,62
$t(x_1)$								/

Из данных таблицы следует, что наиболее сильное влияние на длительность плавки (t) оказывает содержание в стали никеля ($Z_{31} = 0,62$), хрома ($Z_{71} = -0,25$), марганца ($Z_{31} = -0,28$) и углерода ($Z_{21} = -0,17$). Характер влияния углерода и марганца примерно такой же, как и в ранее рассмотренных группах марок стали.

Из возможных взаимосвязей между этими четырьмя элементами наиболее сильными являются связи между хромом и никелем ($Z_{78} = -0,40$), никелем и марганцем ($Z_{38} = -0,33$), никелем и углеродом ($Z_{28} = -0,31$), углеродом и марганцем ($Z_{23} = -0,24$).

В результате расчетов на ЭВМ получено следующее уравнение множественной корреляции в натуральном виде:

$$t = 496 - 10 C - 23,7 M_r + 16,8 S_i + 13,4 P + 2080 S - 7 C_z + 46 N_i \dots \quad (10)$$

Совокупный коэффициент корреляции $R_0 = 0,64$, что указывает на существенную связь между длительностью плавки и содержанием элементов, принятых в анализ.

В пределах изменчивости их содержания влияние отдельных элементов характеризуется следующими данными.

Содержание углерода изменяется от 0,1 до 0,5%. Следовательно, длительность плавки за счет этого фактора может измениться максимум на 4 минуты.

Содержание марганца изменяется от 0,30 до 1,80%. Длительность плавки может измениться максимум на 35 минут.

Содержание кремния колеблется от 0,20 до 1,0%. Длительность плавки может колебаться максимум на 14 минут.

Содержание фосфора может колебаться в пределах 0,01%. Следовательно, длительность плавки за счет этого элемента изменится максимум на 1 минуту.

Содержание серы изменяется также в пределах 0,01%, что соответствует максимальному изменению длительности плавки на 20 минут.

Содержание хрома изменяется в пределах 1,2%, что соответствует восьми минутам длительности плавки.

Содержание никеля изменяется в пределах 3%, что соответствует более чем 2-м часам в изменении длительности плавки.

Принимая за основную по этой группе марок марку стали

18ХГТ, получим следующее выражение для вычисления внутригрупповых коэффициентов трудности:

$$K_{(i)} = \frac{\tau_i}{\tau_0} = \frac{496 - 10 C_{(i)} - 23,7 M_{n(i)} + 16,8 Si_{(i)} + 13,4 P_{(i)} + 2080 S_{(i)} - 7 C_z(i) + 46 Ni_{(i)}}{496 - 10 C_{(0)} - 23,7 M_{n(0)} + 16,8 Si_{(0)} + 13,4 P_{(0)} + 2080 S_{(0)} - 7 C_z(0) + 46 Ni_{(0)}} \quad (11)$$

При $C_{(0)} = 0,20$; $M_{n(0)} = 1,0$; $Si_{(0)} = 0,30$; $P_{(0)} = 0,035$;
 $S_{(0)} = 0,035$; $C_z(0) = 1,20$; $Ni_{(0)} = 0,08$

$$K_{(i)} = 0,91 - 0,018 C_{(i)} - 0,044 M_{n(i)} + 0,031 Si_{(i)} + 0,025 P_{(i)} + 3,83 S_{(i)} - 0,013 C_z(i) + 0,08 Ni_{(i)} \quad (12)$$

Исключая слабо влияющие углерод и фосфор, получим:

$$K_i = 0,90 - 0,044 M_{n(i)} + 0,031 Si_{(i)} + 3,83 S_{(i)} - 0,013 C_z(i) + 0,085 Ni_{(i)} \dots \quad (13)$$

Результаты расчетов по уравнению (13) приведены в табл.19.

Марганцовые марки стали (200-тонные печи)

В эту группу были отнесены следующие марки стали: 09Г2, 36Г2С, 45Г2, 30Г2, 14Г2, 20Г, 30Г, 40Г, 14Г, 65Г, 16ГТ, У8ГА.

Всего было исследовано 157 плавок. Устанавливалось влияние на длительность плавки содержания следующих химических элементов: углерода, марганца, кремния, фосфора, серы, хрома, никеля и меди.

Средние содержания этих элементов в готовой стали и их среднеквадратичные отклонения приведены в табл.20

Парные коэффициенты корреляции между принятыми в анализ факторами и показателями приведены в табл.21.

В результате расчетов получено следующее уравнение множественной корреляции в натуральном виде:

$$\tau = 454,9 - 10,2 C - 61,2 M_n + 229,5 Si + 306 P + 612 S + 357 C_z + 237,2 Ni + 12,75 Cu \dots \quad (14)$$

Таблица 19

№ п/п	Марки стали	Среднее содержание элементов					Величина коэффициентов трудности				
		μ_{H}	S_i	S	C_2	λ_i	расчетный	приведенный к осевой стали	по комбинационной группировке	принятый	
1.	10XCHД	0,65	0,95	0,025	0,75	0,60	1,04	1,16	1,30	1,16	
2.	15XCHД	0,55	0,55	0,025	0,75	0,40	1,03	1,15	1,20	1,15	
3.	15X	0,45	0,25	0,025	0,85	0,07	0,98	1,10	1,30	1,10	
4.	20X	0,65	0,25	0,026	0,85	0,07	0,97	1,09	1,11	1,09	
5.	35X	0,65	0,25	0,026	0,95	0,07	0,97	1,09	1,11	1,09	
6.	40X	0,65	0,25	0,028	0,95	0,07	0,97	1,09	1,10	1,09	
7.	45X	0,65	0,25	0,027	0,95	0,07	0,98	1,10	1,13	1,09	
8.	38XC	0,45	1,15	0,024	1,45	0,08	1,00	1,12	1,15	1,12	
9.	40XH	0,55	0,25	0,025	0,60	1,16	1,08	1,21	1,19	1,20	
10.	45XH	0,55	0,25	0,028	0,60	1,15	1,08	1,21	1,04	1,20	
11.	18XIT	1,00	0,3	0,024	1,20	0,08	1,00	1,12	1,12	1,12	
12.	12XHEA	0,45	0,25	0,020	0,70	2,90	1,80	1,35	1,41	1,35	
13.	20XHEA	0,45	0,25	0,020	0,70	2,90	1,80	1,35	1,34	1,35	
14.	30XГСА	0,95	1,10	0,025	1,05	0,07	0,98	1,10	1,20	1,12	
15.	35XГ2	1,75	0,25	0,023	0,60	0,06	0,92	1,03	1,12	1,10	
16.	17XH2	0,45	0,25	0,025	0,75	1,60	1,11	1,23	1,25	1,23	
17.	20XГР	0,85	0,25	0,022	0,90	0,90	1,02	1,14	1,20	1,15	
18.	30XIT	0,95	0,25	0,025	1,15	0,06	0,98	1,10	1,07	1,10	
19.	СХЛ-45	0,80	0,25	0,020	0,60	1,50	1,07	1,20	1,13	1,18	

Таблица 20

№ п/п	Факторы	\bar{x}	σ	ν (%)
1.	Содержание C	0,19	0,15	78,9
2.	Содержание Mn	1,46	0,45	30,8
3.	Содержание Si	0,35	0,14	40,0
4.	Содержание P	0,021	0,005	23,8
5.	Содержание S	0,029	0,005	17,2
6.	Содержание Cz	0,05	0,02	40,0
7.	Содержание Ni	0,06	0,02	33,3
8.	Содержание Cu	0,14	0,02	14,3
9.	Длительность плавки	502	51	10,2

Таблица 21

	$C(x_2)$	$Mn(x_3)$	$Si(x_4)$	$P(x_5)$	$S(x_6)$	$Cz(x_7)$	$Ni(x_8)$	$Cu(x_9)$	$t(x_{10})$
$C(x_2)$	/	-0,26	0,14	0,34	-0,44	0,02	-0,06	0,02	0,16
$Mn(x_3)$	-0,26	/	0,03	-0,08	0,22	0,15	0,09	0,03	-0,04
$Si(x_4)$	0,14	0,03	/	0,46	-0,25	0,11	0,01	0,31	0,09
$P(x_5)$	0,34	-0,08	0,46	/	-0,34	0,12	0,01	0,12	0,09
$S(x_6)$	-0,44	0,22	-0,25	-0,34	/	0,06	-0,01	-0,12	0,07
$Cz(x_7)$	0,02	0,15	-0,11	0,12	0,06	/	0,11	-0,02	0,15
$Ni(x_8)$	-0,06	0,09	0,01	0,01	-0,01	0,11	/	0,08	0,05
$Cu(x_9)$	0,02	0,09	0,01	0,12	-0,12	-0,02	0,08	/	0,04
$t(x_{10})$									/

Поскольку марки стали этой группы специально не легируются хромом, никелем и медью и содержание их в сталях различается мало, то их значение можно принять в уравнении на среднем уровне. Тогда уравнение множественной корреляции примет вид:

$$t = 493,8 - 10,2 C - 61,2 M_n + 229,5 S_i + 306 P + 612 S \quad (15)$$

Принимая за основную марку стали для этой группы 09Г2, получим следующее выражение для коэффициентов трудности:

$$K_i = 1,00 - 0,02 C_{(i)} - 0,12 M_{n(i)} + 0,47 S_{i(i)} + 0,62 P_{(i)} + 1,24 S_{(i)} \dots \quad (16)$$

Результаты расчета величин коэффициентов трудности приведены в табл.22.

Таблица 22

№ п/п	Марки стали	Среднее содержание элементов					Коэффициент трудности			
		C	M _n	S _i	P	S	расчет- ный	приведен- ный	по комби- национной группиров.	принятый
1.	09Г2	0,10	1,54	0,3	0,018	0,032	1,00	1,04	1,04	1,04
2.	36Г2С	0,37	1,60	0,57	0,026	0,025	1,12	1,16	1,13	1,15
3.	45Г2	0,46	1,50	0,28	0,024	0,025	0,99	1,03	1,06	1,03
4.	16ГТ	0,16	1,11	0,55	0,020	0,024	1,15	1,20	1,06	1,12
5.	14Г2	0,15	1,42	0,28	0,025	0,029	1,00	1,04	1,10	1,04
6.	20Г	0,18	0,74	0,24	0,020	0,027	1,06	1,10	1,04	1,10
7.	30Г	0,32	0,88	0,25	0,022	0,029	1,05	1,09	1,01	1,09
8.	40Г	0,40	0,86	0,24	0,017	0,025	1,04	1,08	0,98	1,05
9.	65Г	0,64	1,05	0,28	0,021	0,024	1,03	1,07	1,01	1,04
10.	30Г2	0,31	1,54	0,28	0,026	0,024	0,99	1,03	1,00	1,03
11.	У8ГА	0,82	0,42	0,29	0,020	0,014	1,10	1,14	1,25	1,15

Расчитанные с помощью методов множественной корреляции коэффициенты трудности из каждой группы марок стали сводятся в одну общую таблицу. Объединение различных марок стали в группы (по коэффициентам трудности) осуществляется в соответствии с принципами, изложенными ранее. Расчеты выполнены отдельно для 400-тонных и 200-тонных печей.

Выводы

Сопоставляя два изложенных способа установления коэффициентов трудности, можно сделать следующие выводы:

1. Метод комбинационной группировки более прост и допускает систематическую корректировку коэффициентов трудности по мере накопления данных. Однако он не позволяет обоснованно устанавливать коэффициенты трудности по редко выплаваемым и вновь осваиваемым маркам стали.

2. Метод множественной корреляции значительно более сложен, корректировка уравнений по мере накопления информации связана с определенными трудностями. К преимуществам метода можно отнести то, что он дает возможность количественно оценивать влияние изменения химического состава стали на длительность плавки.

Эти два метода хорошо дополняют друг друга. Метод комбинационной группировки можно применять для систематического установления коэффициентов трудности и их корректировки. Метод множественной корреляции может применяться при более детальных периодических исследованиях для получения коэффициентов трудности по тем маркам стали, по которым информации мало или же ее нет совсем.

Б.Б. Розин, Г.А. Нарышев, Ю.П. Воронов

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РАБОТЫ СТАЛЕПЛАВИЛЬНЫХ АГРЕГАТОВ

Нормативы длительности плавки занимают одно из центральных мест среди всех нормативов, используемых в работе по оперативному планированию и управлению производством на металлургическом предприятии. Они являются основой для составления недельных и суточных графиков производства. От того, насколько точны эти нормативы, зависит точность составления и выполнения графиков выпусков плавов, а следовательно, и ритмичность движения потока горячего металла.

На металлургическом заводе оперативные планы-графики составляются на месяц, неделю и сутки. Поэтому возникает необходимость в соответствующих нормативах длительности плавки (месячных, недельных и суточных).

Общим для всех этих нормативов является следующее:

- а) каждый из этих нормативов является плановым заданием, основанным на прогнозе возможностей работы агрегата в планируемый период;
- б) прогноз возможностей основывается на анализе предшествующих данных о работе и на учете планируемых изменений;
- в) во всяком прогнозировании есть элемент неопределенности,

так как при установлении нормативов нет полной информации о будущей работе агрегата;

г) плановые нормативы длительности плавов, используемые в оперативном планировании, представляют собой не индивидуальное задание для отдельных плавов, а задание средней длительности плавов в планируемом периоде.

Различие между нормативами разного срока действия (месячными, недельными, суточными) сводится, во-первых, к различию числа плавов, средним заданием для которых является соответствующий норматив, и, во-вторых, к различию объема информации, известной в момент установления норматива. Чем продолжительнее срок действия норматива, тем большее число плавов осредняется им, больше факторов может быть учтено по их среднему уровню. Поэтому, принципиально, нормативы для планирования работы агрегатов на различные сроки должны быть разными.

Действительно, если месячный норматив длительности плавов представляет собой на крупных мартеновских печах среднее задание для 50-60 плавов, то суточный норматив представляет собой среднее задание только для 2-3 плавов. Соответственно этому и различие среднесуточных длительностей друг от друга в 6-8 раз больше, чем различие среднемесячных данных.

Следует различать прогнозирование длительности всей плавки до ее начала и прогнозирование отдельных периодов текущей плавки. Первый вопрос представляет наибольший интерес в оперативном планировании, второй - при корректировке графиков и управлении производственным процессом в сталеплавильных цехах. В обоих случаях объект анализа и моделирования один - совокупность последовательных плавов на определенном сталеплавильном агрегате.

Характеристика объекта моделирования

Процесс выплавки стали - прерывный, периодический процесс, повторяющийся для каждой реализации процесса плавки.

Помимо цикличности процесса от плавки к плавке имеет место еще и "большая" цикличность - от одной кампании работы печи к другой, от одного межремонтного периода к другому.

Таким образом, при анализе работы мартеновских печей необходимо различать три цикла:

1. циклы между холодными ремонтами;
2. циклы между холодными и большими горячими (или между двумя горячими) ремонтами;
3. плавки, как повторяющиеся реализации одного процесса. Этот циклический характер процессов обуславливает ряд требований, которые необходимо соблюдать при отборе данных для анализа. Каковы же главные из них?

Во-первых, единицей наблюдения следует считать отдельную плавку.

Совокупность плавков, принятых для анализа, должна охватывать целые кампании. Минимальный объем совокупности не может быть меньше, чем одна кампания.

Обязательным является учет временной последовательности плавков.

Каждая единица наблюдения, каждая плавка сама по себе является весьма сложным, многофакторным динамическим процессом. В процессе плавки имеет место сложное сочетание разнохарактерных процессов - трудовых (заправка печи, завалка шихты и добавочных); теплотехнических (подвод и сжигание топлива); физических (нагрев и расплавление шихты); химико-металлургических (придание стали заданного состава и качества). Вследствие воздействия многообразных изменяющихся условий каждая последующая плавка отличается от предшествующей. Имеется значительная вариация параметров и состояний процесса для синхронных моментов различных плавков. В результате имеет место значительная изменчивость технико-экономических показателей работы печи от плавки к плавке.

Основной задачей экономико-математического анализа при прогнозе показателей работы печей является выявление факторов, вызывающих изменчивость длительности плавков и установление количественного влияния этих факторов.

Общая изменчивость длительности плавки на мартеновских и электро-сталеплавильных печах достигает значительных размеров. Так, например, на 400-тонных мартеновских печах размах колебаний длительности плавков достигает 5-6 часов.

Количественной мерой отклонений длительности плавки от средней за кампанию является среднеквадратическое отклонение (σ) и коэффициент вариации (ν_0).

Представление о величине этих статистик для отдельных типов печей и видов технологических процессов могут дать данные, приведенные в таблице 1.

Таблица 1

	мин	%
А. Мартеновские печи, скрап - рудный процесс, печи отапливаются газом		
1. 400-тонные	45-66	6,2-9,9
2. 200-тонные	45-60	9,1-12,5
Б. Мартеновские печи, скрап-процесс, печи отапливаются мазутом		
1. 180-тонные	41-52	6,4- 8,2
2. 130-тонные	35-45	7,8- 9,5
3. 60-тонные	32-38	8,5- 9,8
В. Дуговые электросталеплавильные печи:		
1. 20-тонные, плавка на свежей шихте с окислением	25-34	8,5- 9,2
2. 20-тонные, переплав легированных отходов	20-34	6,3- 7,6
3. 10-тонные, плавка на свежей шихте с окислением	24-30	8,7-11,2
4. 10-тонные, переплав легированных отходов	23-27	8,1- 9,4
5. 5-тонные, плавка на свежей шихте с окислением	22-27	9,2-11,5
6. 5-тонные, переплав легированных отходов	22-25	8,4-10,1

Расчеты коэффициента вариации длительности плавки, выполненные на Златоустовском металлургическом заводе в течение ряда лет, а также данные опубликованной¹⁾ литературы позволяют сделать

¹⁾ См., например, Статистический анализ производительности мартеновской печи " № 9, 1949 г. " *Journal of the Iron and Steel Institute* 1949.

следующий вывод:

Относительная колеблемость длительности плавки для данного типа печей и способа выплавки – величина сравнительно устойчивая. Она мало изменяется во времени и при переходе от одной печи данного типа к другой. Наибольшее расхождение в величине

между отдельными однотипными печами или периодами времени не превышает 2-3%. Величина коэффициента вариации увеличивается с уменьшением емкости печей.

Устойчивость величины коэффициента вариации позволяет ориентироваться на ранее полученные значения при выполнении различного рода математико-статистических расчетов в сталеплавильном производстве, например, при определении необходимого объема выборки и т.п.

Изменчивость длительности плавки – явление сложное по своему составу. Оно возникает под воздействием различного рода факторов и условий.

Для целей анализа и моделирования процесса плавки значительный интерес представляет классификация источников возникновения колеблемости и разложение общей изменчивости на части, вызываемые различными группами причин. С точки зрения прогноза длительности плавки все источники вариации можно подразделить на следующие 4 группы:

1. влияние заданных условий производства – различие марок стали и способов их выплавки;
2. действие фактора времени;
3. индивидуальные отличия параметров отдельных плавки данного вида;
4. неточности в измерениях, ошибки при записи и т.п.

Влияние видовых различий последовательных плавки (марки стали и способа выплавки) на длительность плавки легко объяснимо.

Смысл же колеблемости под воздействием фактора времени следует уточнить. Дело в том, что поскольку изучению подлежит совокупность плавки, образованных как поток единиц, следующих друг за другом во времени, то вся колеблемость длительности плавки возникает во времени. В выше рассматриваемой классификации имеется в виду выделение фактора времени, а точнее факторов, стоящих за

временем, в качестве непосредственного источника вариации, т.е. здесь имеются в виду систематические изменения длительности плавки во времени (время — как параметр процесса). Сюда не относятся протекающие во времени, но не обусловленные им изменения параметров плавки.

В этом более узком смысле под хронологической колеблемостью следует понимать изменчивость показателей, связанную со "старением" печи в течение кампании и с локальными систематическими изменениями во времени, возникающими под воздействием общих конъюнктурных факторов, действующих более короткое промежутки времени.

Например, проведение ремонтных работ в цехе, изменение условий подачи материалов к печам, метеорологические факторы и т.п.

Индивидуальная колеблемость возникает под воздействием факторов, не связанных со временем.

Например, на одной плавке может быть применена одна схема заправки составляющих шихты, на другой — другая. Плавки могут различаться характером теплового режима, составом шлака и т.п.

Следует отметить, что между хронологической и индивидуальной вариацией нет резкой границы. Так, различие тепловых нагрузок может вызываться индивидуальными особенностями плавки, а может быть вызвано и "старением" печи. Тем не менее возможное разграничение источников колеблемости является весьма целесообразным, так как они в различной степени поддаются учету и регулированию.

Вариация, возникающая вследствие неточностей замеров и записей, не является специфической для сталеплавильного производства. Она присуща любым экспериментам и исследованиям. Запись длительности плавки обычно ведется с округлением до 5 минут. При общей колеблемости длительности плавки на 400-тонных мартеновских печах до 5 часов такой ошибкой измерения можно пренебречь.

При изучении длительности плавки (с достаточной для практических целей точностью) можно полагать выделенные нами источники общей изменчивости, независимыми друг от друга.

Поэтому для выявления их удельного влияния можно воспользоваться правилом разложений дисперсий. Соответствующая теорема гласит: дисперсия суммы нескольких независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

Введем обозначения:

- σ_0^2 - общая дисперсия длительности плавки;
 σ_1^2 - дисперсия, возникающая вследствие изменчивости способов выплавки и марочного сортамента;
 σ_2^2 - дисперсия, вызванная воздействием фактора времени;
 σ_3^2 - дисперсия, вызываемая индивидуальными и случайными различиями отдельных плавов, тогда

$$\sigma_0^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \quad (1)$$

Разложение общей изменчивости на составляющие позволяет оценить влияние каждой группы факторов и тем самым оценить возможность предвидения хода процесса плавки и управления им.

Проследить влияние марочного сортамента и способов выплавки можно путем сопоставления общей дисперсии (σ_0^2) с внутримарочной дисперсией длительности плавов. Соответствующие данные по 1086 плавке на 400-тонной мартеновской печи приведены в табл.2.

Таблица 2

Сопоставление внутримарочной и общей дисперсий

№№ пп	Наименование марок	Количество плавов	Среднеквадратичное отклонение (мин)	Коэффициент вариации (%)
1.	Ст. 3 КП и ПС	266	55	7,8
2.	Ст. 3 СП	213	48	6,6
3.	Ст.4 КП	20	53	7,6
4.	Ст. 4 СП	26	52	7,4
5.	Ст. 5 ПС	45	54	7,8
6.	Ст. 5 СП	29	55	7,9
7.	Ст.6 СП	33	50	7,2
8.	45	50	51	7,1
9.	Л-53	32	48	7,2
10.	М-71 (Р-43)	111	44	6,6
11.	М-75 (Р-50)	122	35	5,5
12.	М-76 (Р-65)	139	43	6,4
	Средневзвешенная внутримарочная дисперсия		2304	
	Общая дисперсия- σ_0^2		2916	

Таким образом, общую дисперсию длительности плавки ($\sigma_0^2 = 2916$ мин) можно разложить на две составляющих - $\sigma_1^2 = 612$ и $\sigma_2^2 + \sigma_3^2 = 2304$; $\sigma_1 = \sqrt{612} = \pm 24,7$.

Т.е. изменчивость марочного сортамента и способов выплавки обуславливает около 20% общей дисперсии длительности плавки, и при исключении влияния этой группы факторов среднее квадратичное отклонение длительности плавки уменьшается на 11%.

При выполнении расчетов по другим типам мартеновских печей были получены аналогичные результаты с тем отличием, что доля влияния 1-ой группы факторов возрастает с уменьшением емкости печей. Это объясняется тем, что печи малой емкости обычно выплавляют более разнообразный сортмент марок стали.

В частности, по 60-тонным мартеновским печам различие в марках стали и способах выплавки обуславливало 28,5% общей дисперсии длительности плавки.

Еще более существенно влияние этого источника вариации на дуговых электросталеплавильных печах, выплавляющих большое число легированных и высоколегированных марок стали. Так, например, для 10-тонных электросталеплавильных печей отношение $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}$ колебалось в пределах 31,6 - 35,2%.

После элиминирования влияния 1 группы факторов остаточная колеблемость возникает под совокупным влиянием фактора времени и индивидуальных различий параметров плавки.

В рассматриваемом нами примере по 400-тонным мартеновским печам величина этой остаточной дисперсии равна 2304 мин, а величина среднее квадратичного отклонения - 48 мин. Для разграничения влияния фактора времени и индивидуальных особенностей плавки применили следующий статистический прием. Длительность всех последовательных плавки на определенной мартеновской печи была приведена к одной (основной) марке стали. Этим самым было элиминировано влияние 1 группы факторов. Затем рассчитывали дисперсию (среднее квадратичное отклонение) из разностей длительности двух последовательных плавки. Полученную величину принимали за количественную меру колеблемости длительности плавки под воздействием индивидуальных различий, полагая, что две последовательные плавки находятся в одинаковых временных условиях, т.е. что действием фактора времени в течение одних суток можно пренебречь.

В табл.3 приведено распределение разницы в длительности следующих друг за другом плавков по 400-тонной мартеновской печи.

Таблица 3

Абсолютная величина разницы мин.	до 15	15-30	30-45	45-60	60-75	75-90	90-105	105-120	Итого
Число случаев	70	57	48	38	18	17	4	2	254

$$\Delta \bar{x} = \pm 37,3 \text{ мин}, \sigma_3^2 = 656 \text{ мин}, \sigma_3 = \pm 25,4 \text{ мин.}$$

Таким образом, в рассматриваемом примере влияние отдельных источников вариации характеризуется следующими среднеквадратичными отклонениями:

1. Общая изменчивость, возникающая под совокупным воздействием всех источников вариации - $\sigma_0 = 54$ мин.

2. Вариация, обусловленная изменением способов выплавки и марок стали - $\sigma_1 = 24,7$ мин.

3. Колеблемость, вызываемая действием фактора времени - $\sigma_2 = 40,5$ мин.

4. Изменчивость, являющаяся результатом индивидуальных и случайных различий параметров плавков $\sigma_3 = 25,4$ мин.

В данном случае (400-тонные мартеновские печи) наибольшее влияние на изменчивость длительности плавки оказывает фактор времени (вернее факторы, систематически изменяющиеся во времени), меньшее и примерно равное значение имеют I и III группы факторов.

Как было ранее показано, на мартеновских печах меньшей емкости и особенно на электропечах, вследствие большого разнообразия сортамента, значение I группы факторов возрастает, и, соответственно, меньшее удельное значение имеет фактор времени.

Итак, несколько упрощая, можно сказать, что длительность каждой конкретной плавки определяется следующими тремя обстоятельствами:

- что задано к производству (марка стали и вид технологического передела);

- при каких условиях производится выплавка стали (состояние печи и конъюнктурная обстановка в цехе);
- как ведется процесс плавки исполнителями (индивидуальные значения параметров).

Это рассуждение может быть распространено и на уровень других поплавочных технико-экономических показателей работы печей (производительность, выход годного, расход топлива и т.д.).

Модели для прогнозирования длительности плавки

Как было показано ранее, длительность плавки включает случайный компонент и носит вероятностный характер. Наиболее эффективным средством исследования и моделирования такого рода процессов являются методы математической статистики. Эти методы позволяют определить некоторые усредненные вероятностные характеристики процесса. При этом, чем короче интервал времени, чем меньше плавки осредняются, тем менее предсказуемым является поведение величины.

Очень сложно предсказать длительность каждой конкретной плавки, в то же время мы в состоянии с вполне удовлетворительной точностью предсказать среднюю длительность плавки в течение будущей недели и особенно месяца. Вместе с тем наиболее важными для оперативного планирования являются суточные нормативы длительности плавки.

Поэтому в настоящей работе наибольшее внимание уделяется именно этому вопросу.

Содержание задачи по прогнозированию может быть сформулировано следующим образом: имеется информация о длительности плавки и условиях их выплавки до момента составления графика, известно также, какие марки стали должны быть выплавлены, необходимо оценить наиболее вероятную длительность плавки в следующие сутки. Задача эта, по существу, сводится к оценке наиболее вероятного различия между средней длительностью будущих и прошедших плавки.

Различие в длительности отдельных плавки (а следовательно, и различие в средней длительности плавки) обуславливается тремя группами факторов: различием марочного сортамента, действием фак-

тора времени и индивидуальными различиями параметров плавки.

При разработке методики прогноза необходимо выяснить возможность и найти приемы учета влияния этих групп факторов.

Влияние марочного сортамента может быть учтено путем при- ведения фактической и проектируемой длительности плавки к одной, основной, марке стали. Приведение длительности плавки к условной осуществляется при помощи системы переводных коэффициентов¹⁾.

При прогнозировании длительности плавки переводные коэффициенты применяются дважды. Первый раз для приведения длительности выпущенных плавки к условной и оценке условной длительности будущих плавки и второй - для обратного перехода от условной длительности будущих плавки к продолжительности плавки конкретных марок стали, запланированных к выпуску.

После исключения влияния марочного сортамента совокупность данных о длительности выпущенных плавки представляет собой временной ряд (ряд динамики). При изучении подобной статистической совокупности нас интересует не только числовое значение продолжительности плавки, но и порядок, в котором они встречаются. Значит, со статистической точки зрения, прогнозирование длительности плавки представляет собой задачу экстраполяции имеющейся части динамического ряда на несколько плавки вперед.

Приняв за единицу измерения времени число плавки от холодного или большого горячего ремонта, мы можем записать значения длительности последовательных плавки в виде t_1, t_2, t_3 и т.д.; значение в момент j будет t_j .

Значение длительности плавки t_j может быть представлено в виде суммы двух компонент: систематической, или уровня, значение которого определяется состоянием печи и другими систематически действующими во времени факторами, и случайной компоненты (ε), вызываемой индивидуальными различиями плавки.

Наличие случайной компоненты ε означает, что есть предел для точности, с которой может быть предсказано поведение ряда

1) Методика разработки такой системы коэффициентов изложена в работе: Б.В.Розин, Р.С.Гейфман " Математические методы и счетная техника в организации металлургического производства" Металлургия, 1962 г.

длительности плавов. С той или иной степенью точности может быть учтено систематическое движение ряда. Т.е., если известна длительность предшествующих плавов, то могут быть предсказаны длительности ближайших будущих плавов, за исключением случайной компоненты. Последняя не поддается прогнозу, хотя может быть установлен закон ее распределения и оценена дисперсия.

Это позволяет оценить возможную ошибку прогнозов.

Таким образом, в любом предсказании будущего на основе накопленной информации всегда будет иметь место существенный элемент неопределенности. Задача разработки методики прогноза сводится к выработке приемов определения уровня в данный момент времени и изучению закона распределения случайной компоненты.

Для решения первого вопроса необходимо исследовать закономерность изменения длительности плавки в течение кампании работы печей.

Общий характер влияния изменения состояния мартеновской печи по ходу кампании на технико-экономические показатели (в том числе и на длительность плавки) достаточно хорошо изучен.

Общезвестно, что длительность плавки в течение кампании не остается постоянной. Как правило, в течение первых двадцати - тридцати плавов после холодных и горячих ремонтов длительность их сокращается. Затем происходит более медленное сокращение продолжительности плавов. После достижения минимальной длительности плавки начинается процесс постепенного удлинения плавов, причем наиболее резко они удлиняются перед остановкой печи на ремонт.

В табл.4 приведена характеристика изменений продолжительности плавов в различные периоды работы мартеновских печей металлургических предприятий¹⁾.

1) Таблица заимствована из брошюры: Г.Х.Исхаков, Н.С.Редин, Рациональные сроки остановки мартеновских печей на ремонты. Металлургиядат, 1963 г.

Таблица 4

Предприятия	Вид применяемого топлива.	Количество кампаний	Продолжительность плавки в % к средней за кампанию			
			1-я четверть	II-я четверть	III-я четверть	IV-я четверть
Печи большой емкости						
Н Т М К	коксодоменная смесь	24	97,0	98,0	99,6	101,2
Запорож-сталь	"-	5	102,5	98,5	99,0	100,0
Ч М Э	"-	9	99,3	99,5	99,2	101,5
Макеевский	"-	19	99,5	99,5	101,6	102,9
Н М К	"-	55	96,7	99,7	101,2	102,3
	попутный газ	32	97,9	99,5	99,7	102,7
Печи средней емкости						
Запорож-сталь	коксодоменная смесь	5	100,3	99,3	99,9	100,5
	природный газ	5	100,2	100,9	98,5	100,4
ЧМЭ	коксодоменная смесь	7	97,1	102,6	100,8	99,5

Таким образом, тенденция в изменении длительности плавки довольно ясно выражена. Но средняя скорость изменения длительности плавки вследствие "старения" печи сравнительно невелика. Действительно, наибольшее изменение длительности плавки при переходе от одной четверти к другой для 400-тонных печей составляет 3-4% или 20 + 30 мин. Поскольку на одну четверть кампании на печах подобного типа приходится порядка 100 плавки, то средняя скорость изменения длительности каждой последовательной плавки за счет "старения" печи составляет всего лишь 0,2 - 0,3 минуты. Приведенная величина скорости изменения длительности плавки в результате "старения" печи является средней величиной, характеризующей тенденцию за длительный период. Фактически скорость изменения длительности плавки по ходу кампании изменяется. Наибольшей величины она достигает в предремонтный и послеремонтный

период.

Так, например, на 400-тонных печах в 1-ю неделю после холодного или большого горячего ремонта скорость изменения длительности плавки составляла $0,2 + 0,4$ мин/плавку, во 2,3,4-ю - $0,1 + 0,2$, в 5-ю и 6-ю $-0,3 + 0,5$, а в недели, предшествующие ремонту - $0,7 + 1,0$.

Для выявления тенденции изменения длительности плавки при исследовании работы конкретных печей могут быть использованы различные статистические приемы.

Наиболее простой и доступный из них метод скользящих средних. Суть этого метода заключается в следующем. Для первых $(2m+1)$ последовательных плавки определяется средняя длительность и эта величина относится к $(m+1)$ плавке. Затем ряд сдвигается на одну плавку и расчет повторяется. Точность в выяснении влияния тенденции зависит от того, насколько удачно подобрана величина m , т.е. протяженность средней. В математической статистике нет точного правила для выбора этой величины. Однако при установлении влияния "возраста" печи протяженность средней $(2m+1)$ должна быть достаточно большой, так как это влияние в межремонтный период на отдельных плавках сказывается слабо ($\sim 0,2$ минуты на плавку). Исходя из этих соображений, при выполнении анализа приняли скользящую среднюю, равную 51 плавке ($m = 25$).

В ряде случаев выравнивание по методу скользящих средних может оказаться недостаточным. Это связано с тем, что скользящие средние не позволяют оценивать значение уровня на концах ряда (в нашем примере на первых и последних 25-ти плавках) и не дают общего аналитического выражения зависимости. Последнее особенно важно при имитации процесса формирования длительности плавки на ЭВМ.

В таких случаях может быть произведено выравнивание ряда по полиному, в котором переменной является время (номер плавки X), т.е. необходимо построить уравнение регрессии вида:

$$y_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_r x^r$$

Рассмотрение характера эмпирических рядов и тенденции, выявленной методом скользящих средних, показывает, что в качестве

уравнения связи для каждого межремонтного периода (между холодным и большим горячим ремонтом или между двумя горячими ремонтами) может быть принята парабола второго порядка. Действительно, скорость изменения длительности плавки изменяется по ходу кампании, кривая имеет один минимум.

Тенденция за всю кампанию характеризуется несколькими параболоми. В моменты проведения больших горячих ремонтов имеет место разрыв функции.

Уравнения регрессии для одной из 400-тонных мартеновских печей приведены ниже (в мин.).

1-й межремонтный период

$$y_x = 637,9 - 1,068x + 0,009x^2 \quad (2)$$

II-й межремонтный период

$$y_x = 702,8 - 0,831x + 0,006x^2 \quad (3)$$

Анализ показал хорошее совпадение уравнений, выявленных методом скользящих средних и рассчитанных по уравнениям регрессии. Обобщение результатов анализа тенденции по многим мартеновским печам позволяет сделать следующие выводы.

Общий характер изменения длительности плавки по ходу кампании для разных печей и кампаний примерно одинаков.

Тенденция в течение кампании представляет собой несколько смещенных плавных кривых. В 1-й межремонтный период кампании они имеют ясно выраженный минимум (примерно на половине периода), во II-ой межремонтный период этот минимум сдвинут ближе к началу, а в последний период длительность плавки обычно начинает возрастать сразу после ремонта и минимальная длительность достигается на первых плавках после ремонта.

Однако параметры этих кривых для каждой печи и каждого периода различны. Тенденция, выявленная для определенной печи и определенного периода, не может быть использована для оценки суточного уровня в другие периоды и на других печах. Следовательно, при краткосрочном прогнозировании длительности плавки не представляется возможным воспользоваться постоянными зависимостями или коэффициентами.

Уровень необходимо выявлять систематически на всех печах

цеха по мере накопления информации.

Для целей анализа и прогнозирования значительный интерес представляет изучение характера отклонений, остающихся после исключения тенденции. Эти отклонения могут включать либо две компоненты - кратковременную систематическую и случайную - либо только одну случайную. Способ учета их различен. Поэтому возникает задача оценки вида полученных отклонений.

Эта оценка основана на сопоставлении вычисленных статистик со статистиками совершенно случайного, беспорядочного ряда. В качестве критерия отхода от случайного ряда может быть использован коэффициент автокорреляции 1-го порядка, т.е. коэффициент корреляции между парами отклонений последовательных плавов.

Вполне понятно, что для совершенно случайных рядов последовательные значения величины будут независимы друг от друга и теоретическое значение коэффициента автокорреляции будет равно нулю. Чем больше влияние систематических факторов, тем связь между последовательными членами ряда должна быть сильнее, а величина коэффициента автокорреляции выше.

Для рассматриваемой нами в качестве примера печи $Z_k = 0,01$.

Для случайного ряда ошибка определения Z_k рассчитывается по формуле:

$$\sigma_{z_k} = \sqrt{\frac{1}{n-k}}, \quad (4)$$

где:

σ_{z_k} - ошибка измерения коэффициента автокорреляции;

n - число членов ряда (93);

k - порядок коэффициента автокорреляции;

(в данном случае $k = 1$).

$$\sigma_{z_k} = \sqrt{\frac{1}{93-1}} \approx 0,1,$$

Т.е. при случайных значениях величин Z_k может колебаться в пределах $\pm 0,3$. Следовательно, ряд, образованный отклонениями, случаен. Подобный же результат был получен и при анализе отклонений по другим печам.

Отсюда следует, что остаточные отклонения от тенденции возникают под воздействием только одной компоненты - индивидуальных (случайных) различий параметров плавки. Величина этих откло-

нений подчиняется нормальному закону распределения¹⁾.

Выполненный анализ позволяет сделать заключение, что могут быть предложены две модели формирования длительности плавки в динамическом ряду.

В первой модели длительность X -й плавки от ближайшего холодного или горячего ремонта является функцией номера плавки $f(x)$ плюс случайные отклонения (ε).

$$t_x = f(x) + \varepsilon \quad (5)$$

В формуле $f_1(x)$ представляет собой уровень в X -й момент. Как было показано ранее, он может быть достаточно хорошо отражен параболой вида

$$f_1(x) = y_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

ε - числа, случайно отобранные из нормально распределенной совокупности с границами $\pm 3 \sigma_3$.

Во второй модели длительность плавки в момент $j + 1$ (t_{j+1}) может быть представлена как функция длительности предшествующих плавок ($t_j, t_{j-1}, t_{j-2}, \dots, t_{j-n}$) плюс случайное отклонение ε .

$$t_{j+1} = f_2(t_j, t_{j-1}, t_{j-2}, \dots, t_{j-n}) + \varepsilon. \quad (6)$$

Поскольку нормальное распределение ε имеет характеристики $\bar{\varepsilon} = 0$ и $\sigma = \sigma_3$, то наиболее вероятное отклонение равняется нулю, и следовательно, наиболее вероятная длительность будущей плавки t_j равна уровню y_j .

Из изложенного следует, что задача установления нормативов длительности плавки на следующие сутки сводится к оценке среднего значения уровня. Для этой цели предпочтительнее использовать модель (6), в которой уровень определяется как функция длительности предшествующих плавок. Использование полинома вида $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ связано с серьезными затруднениями, так как каждый раз по мере выпуска новых плавки вся работа с подбором кривой должна начинаться сызнова. Т.е., практически, необходимо будет каждые 2-3 суток для каждой печи производить подбор полинома, что представляет довольно трудоемкую задачу.

1) Проверка подтвердила хорошее совпадение эмпирических рядов с нормальным распределением.

Оценка длительности плавков на следующие сутки обычно производится накануне.

Обозначим момент времени¹⁾, в который производится оценка, через j , тогда номера плавков, длительность которых подлежит оценке, будут $j + 1, j + 2, \dots, j + n$, а номера плавков, выпущенных до момента оценки, $-j - 1, j - 2, \dots, j - n_2$.

На мартеновских печах большой емкости в сутки выпускается обычно около 2-х плавков, а на печах средней емкости - 3 плавки.

Следовательно, оценке подлежат на печах большой емкости значения уровней Y_{j+1} и Y_{j+2} , а на печах средней емкости - $Y_{j+1}, Y_{j+2}, Y_{j+3}$.

Дальнейшее изложение будем вести для печей большой емкости значения уровней Y_{j+1} и Y_{j+2} , а на печах средней емкости - $Y_{j+1}, Y_{j+2}, Y_{j+3}$.

Дальнейшее изложение будем вести для печей большой емкости. Поскольку на сутки для определенной печи устанавливается один норматив длительности, то прогнозу подлежит средний уровень в следующие сутки.

$$\bar{Y}_{j+1,2} = \frac{Y_{j+1} + Y_{j+2}}{2}.$$

Здесь возможны два варианта решения.

Первый, более простой вариант, основывается на том обстоятельстве, что скорость изменения длительности плавков по ходу кампании невелика. Действительно, при средней скорости изменения длительности плавков 0,2 - 0,3 мин/плавку изменение уровня для 10 + 20 последовательных плавков будет всего 3 + 6 минут. Поэтому в пределах такой группы плавков значение уровня можно считать стабильным и приравнять значение уровня в следующие сутки к среднему значению уровня, сложившемуся за несколько предшествующих дней, т.е. принять

$$\bar{Y}(j+1,2) = \bar{Y}(j-1,2 \dots n_2) \quad (7)$$

Величину $\bar{Y}(j-1,2 \dots n_2)$ можно определить как среднюю длительность

1) Момент времени в данном случае является и номером плавки, во время которой производится оценка выплавки.

предшествующих плавков:

$$\bar{y}_{(j-1,2 \dots n_2)} = \frac{t_{j-1} + t_{j-2} + \dots + t_{j-n_2}}{n_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} t_{j-i}}{n_2} \quad (8)$$

Таким образом, здесь также используется метод подвижных средних, но не для выравнивания существующего ряда, а для прогнозирования уровня ближайших будущих членов.

Одним из важных вопросов при этом является установление оптимальной протяженности подвижной средней n_2 . Наличие оптимума значения n_2 обусловлено ее противоречивым воздействием на точность прогноза.

Дело в том, что с точки зрения исключения влияния случайной компоненты \mathcal{E} протяженность средней должна быть больше. С другой стороны, увеличение протяженности средней увеличивает ее инерционность и величину систематической ошибки из-за неучета тенденции.

Для определения оптимальной протяженности средней в условиях мартеновского производства была проведена серия расчетов на ЭВМ. В расчетах были использованы данные о длительности более 2000 плавков. Оптимальным считали значение n_2 , обеспечивающее наилучшую среднюю точность прогноза, т.е. наилучшее среднее совпадение предсказанной и фактической длительности плавков.

Было использовано два метода оценки точности прогнозов при различных значениях n_2 :

1. Расчет коэффициента корреляции между предсказанной и фактической длительностью плавков.
2. Расчет среднеквадратичного отклонения предсказанной длительности от фактической (среднеквадратичная ошибка прогноза).

Точность прогноза тем выше, чем больше коэффициент корреляции и меньше величина среднеквадратичного отклонения.

Величина коэффициента корреляции для средних равной протяженности по мартеновской печи большой емкости приведена ниже:

протяженность средней (n_2)	2	5	10	15
коэффициент корреляции между предсказанной и фактической длительностями плавков	0,34	0,58	0,62	0,64

На величину коэффициента корреляции оказывает влияние величина интервала группировки, поэтому более точным критерием является расчет среднеквадратичной ошибки прогноза (σ_{n_2}). При расчете величины σ_{n_2} был принят суточный шаг сдвига средних (для печей большой емкости), равный двум плавкам.

Общая формула расчета σ_{n_2} приведена ниже:

$$\sigma_{n_2} = \sqrt{\frac{\sum_{j=n_2+1, n_2+3 \dots N-2} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n_2} t_{j-i}}{n_2} - \frac{t_{j+1} + t_{j+2}}{2} \right)^2}{\frac{N - (n_2 + 1)}{2}}} \quad (9),$$

где:

n_2 - протяженность средней;

j - моменты прогнозирования;

t_{j-i} - длительность плавов, на основе которых производится прогноз;

t_{j+1}, t_{j+2} - фактическая длительность плавов, на которые распространялся прогноз;

K - общее число плавов, принятых для анализа;

$N = \begin{cases} K, & \text{если } K \text{ и } n_2 \text{ разной четности,} \\ K-1, & \text{если } K \text{ и } n_2 \text{ одинаковой четности} \end{cases}$

Расчеты показали, что зависимость σ_{n_2} от n_2 имеет минимум. Оптимальная протяженность средней для всех печей большой емкости находится в пределах 15-21 плавки.

Полученная величина σ_{n_2} является измерителем точности прогнозов. Поскольку распределение отклонений приближается к нормальному, то возможная ошибка прогноза в 68,3% случаев не превысит $\pm \sigma_{n_2}$ и в 95,5% $\pm 2\sigma_{n_2}$.

Изложенный способ прогнозирования дает некоторую, хотя и небольшую, систематическую ошибку в оценке будущего уровня.

При тенденции к понижению длительности плавов он несколько завышает оценку, а при противоположной тенденции - несколько понижает.

Величина систематической ошибки при длине подвижной средней для суточного прогнозирования 10-20 плавов составляет в разные

периоды кампании 2 + 7 минут. Для устранения этой ошибки можно использовать второй более точный способ оценки будущего уровня.

Сущность этого способа заключается в том, что при определении прогнозируемого уровня $y_{(j+1,2)}$ в величину прошлого уровня $y_{(j-1,2) \dots n_2}$ вносится поправка Δy на учет тенденции:

$$\bar{y}_{(j+1,2)} = \bar{y}_{(j-1,2) \dots n_2} + \Delta y.$$

Величина поправки Δy рассчитывается по формуле:

$$\Delta y = b \frac{n_2 + 3}{2}, \quad (10), \quad \text{где}$$

b - средняя скорость изменения длительности плавки на участке подвижной средней (от $j - n_2$ до j).

Использование метода наименьших квадратов в том случае, когда за начало отсчета принята средняя плавка в подвижной средней¹⁾, ($j - \frac{n_2 + 1}{2}$) приводит к следующей формуле для расчета b .

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{\pm \frac{n_2-1}{2}} t_i i}{\sum_{i=1}^{\pm \frac{n_2-1}{2}} i^2} \quad (11), \quad \text{где}$$

i - ряд натуральных чисел от 1 до $\frac{n_2-1}{2}$;

t_i - длительность выпущенных плавов в порядке отсчета от срединной плавки в подвижной средней.

Рассмотрим пример.

Пусть прогнозирование ведется в момент выплавки 130-й плавки ($j = 130$). Длина используемой подвижной средней $n_2 = 15$, тогда за центр отсчета будет принята 122-я плавка ($130 - \frac{15+1}{2}$). Все дальнейшие расчеты приведены в табл. 5.

1) Во всех расчетах удобнее оперировать с нечетной величиной n_2 .

$$\bar{y}_{(j-1,2...n_2)} = \frac{124}{15} \cdot 5 + 645 = 686,3 \text{ мин.}$$

$$b = \frac{199}{280^1)} = 0,71 \text{ мин/плавку,}$$

$$\Delta y = 0,71 \cdot \frac{15 + 3}{2} = 6,4 \text{ мин.}$$

$$\bar{y}_{(j+1,2)} = 686,3 + 6,4 = 592,7 \text{ мин.}$$

Поправка Δy получилась сравнительно заметной в связи с тем, что для примера нами взяты последние плавки перед большими горячим ремонтом, когда скорость изменения длительности плавки максимальная. Обычно Δy при суточном планировании составляет 2-3 мин.

Таблица 5

Номера плавков от ремонта	Номера плавков от середины подвижной средней (i)	Длительность выпущенных плавков		
		t_i	$t_i = \frac{t_i - 645}{5}$	$t_i' \cdot i$
115	- 7	675	6	- 42
116	- 6	645	0	0
117	- 5	650	1	- 5
118	- 4	690	9	- 36
119	- 3	675	6	- 18
120	- 2	645	0	0
121	- 1	720	15	- 15
122	0	695	10	0
123	1	665	4	4
124	2	710	13	26
125	3	705	12	36
126	4	735	18	72
127	5	695	10	50

1) $\sum_{i=1}^{i=\pm \frac{n_2-1}{2}} i^2$ - величина постоянная для данной протяженности средней. При $n_2 = 15$ она равна 280.

Подолжение таблицы 5

Номера плавков от ремонта	Номера плавков от середины подвижной средней (i)	Длительность выпущенных плавков		
		t_i	$t_i = \frac{t_i - 645}{5}$	$t_i' \cdot i$
128	6	710	13	78
129	7	680	7	49
=130				
Итого			124	199

Недельные нормативы длительности плавков. При прогнозировании средней длительности плавков на неделю единственно приемлемым является второй способ прогнозирования, поскольку поправки Δy становятся существенными. Техника расчета та же.

Единственное отличие здесь то, что прогнозу подлежит средний уровень на неделю, т.е. для большегрузных мартеновских печей средняя длительность 12 + 15 будущих плавков. Расчет выполняется в конце недели, протяженность средней может быть принята больше. Методика определения оптимальной протяженности средней такая же, как и для суточного прогнозирования.

Расчетные формулы:

$$\bar{y}_{(j+1,2...n)} = \bar{y}_{(j-1,2...n_2)} + \Delta y. \quad (12)$$

$$\Delta y \begin{cases} \beta \cdot \frac{n_2 + n_1}{2}, & \text{если } n_2 + n_1 = \text{четная величина,} \\ \beta \cdot \frac{n_2 + n_1 + 1}{2}, & \text{если } n_2 + n_1 = \text{нечетная величина.} \end{cases}$$

Месячные нормативы длительности плавков. Здесь следует базироваться на анализе тенденции печей за весь период от ближайшего ремонта до начала планируемого периода. Выравнивание может производиться либо методом подвижных средних, либо по параболе. Для расчета величины поправки можно пользоваться постоянными коэффициентами, установленными на основе анализа прошлых кампаний. При этом следует учитывать, на какой ветви кривой будет идти работа печи в следующий месяц, т.е. примерно оценить положение минимума длительности плавки и на основе этого определить знак

поправки.

Моментные поправки длительности мартеновской плавки

Кроме поправок длительности, связанных с действием временных факторов, иногда требуется делать поправки, учитывающие единовременные резкие изменения в работе печи.

Вот примеры причин таких изменений:

1) Резко возросло содержание серы в чугуна. Из-за этого должна растянуться выплавка марок стали с пониженным содержанием серы.

2) Воскресный или праздничный день. По городу и заводу уменьшается потребление различных производственных реагентов (электроэнергия, вода, газ и т.п.). Улучшается работа непрерывного производства вообще и мартеновского в частности.

3) Одна или две из мартеновских печи останавливаются на ремонт. Уменьшается напряжение в работе вспомогательного оборудования, повышается доля генераторного газа на каждую печь.

4) Уменьшен вес плавки. Чаще всего это делается сознательно, чтобы по тем или иным причинам сократить длительность плавки. Целесообразность такого приема требует всестороннего технико-экономического исследования.

Все приведенные факторы могут быть учтены простой группировкой по двум (или более) состояниям работы печей.

Рассмотрим для примера как влияет число работающих печей на длительность плавки по маркам стали. Для установления влияния этого фактора рассчитываются средние длительности плавки при различном числе работающих печей по нескольким состояниям. Так для одного мартеновского цеха в соответствии с объемом годной к обработке информации можно было выделить два состояния:

1. Все печи работают;
2. одна из 400-тонных печей остановлена на ремонт.

Расчет приведен в табл.6

Таблица 6

Средняя длительность плавов по 400-тонным печам
мартеновского цеха КМК (мин)

Марки стали	При работе всех печей		При остановке 1-ой 400-тонной печи на ремонт	
	объем выборки	средняя длительность плавки	Объем выборки	ср. длительность плав.
сталь рельсовая	115	664	80	648
3 сп	77	712	27	699
3 кп и 3 пс	119	698	27	690

При обработке материала о длительностях плавов в другом мартеновском цехе можно было выделить уже 3 состояния:

1. все мартеновские печи работают;
 2. одна из 200-тонных печей остановлена на ремонт;
 3. одна из 400-тонных печей остановлена на ремонт.
- Расчет - в табл.7.

Таблица 7

Средняя длительность плавов по 400-тонным печам
П-го мартеновского цеха (мин)

Марки стали	При работе всех печей		На ремонте одна 200-тонн. печь		На ремонте одна 400-тонная печь	
	объем выборки	средняя длительность	объем выборки	средняя длительность	объем выборки	средняя длительность
Рельсовая сталь	345	682	83	672	143	672
Л-53	24	674	9	666	13	669
3 сп	98	730	18	725	58	726
3 кп и 3 пс	170	694	29	688	80	698

По этим расчетам можно найти поправочные коэффициенты на длительности плавов; необходимы два вида коэффициентов: 1) для характеристики работы печей при остановке одной из них на ремонт

2) для характеристик работы печей при выходе одной из них из ремонта.

Прогнозирование длительности отдельных периодов
текущей плавки

Оценка длительности будущих плавов и оценка времени выпуска уже идущих плавов (длительности отдельных периодов) представляют собой по характеру одну и ту же задачу, но с различным объемом информации, с различной степенью детализации. По уже идущей плавке объем известной информации, конечно, больше. Принципиальное различие этих двух моделей заключается в том, что при прогнозировании длительности оставшихся периодов уже идущей плавки фактические значения ряда индивидуальных параметров плавки уже известны.

Значит, помимо учета влияния марочного сортамента и фактора времени, возникает дополнительная задача учета влияния уже известных в момент прогноза индивидуальных параметров плавки.

Рассмотрим методику решения этой дополнительной задачи применительно к скрап-рудному мартеновскому процессу.

Процесс плавки в этом случае состоит из следующих операций:

заправка	t_1 ;
завалка сыпучих	t_2 ,
прогрев сыпучих	t_3 ,
завалка скрапа	t_4 ,
прогрев скрапа	t_5 ,
завалка чугуна	t_6 ,
плавление	t_7 ,
дефосфорация	t_8 ,
наводка шлака	t_9 ,
чистый КИП	t_{10} ,
раскисление и легирование	t_{11} ,
в ы п у с к	t_{12} .

Операции $t_2 - t_6$ представляют собой в сумме процесс загрузки шихты, а операции $t_8 - t_{12}$ - период доводки.

Задача заключается в возможно более точной оценке времени выпуска уже идущей плавки.

По мере выполнения отдельных операций плавки появляется дополнительная информация о характере их проведения, и прогноз момента выпуска может корректироваться. Теоретически такая корректировка может осуществляться непрерывно по ходу плавки. Задача может быть решена путем использования электронно-вычислительных машин, моделирующих работу каждой мартеновской печи в реальном масштабе времени. В этом случае могла бы быть осуществлена непрерывная корректировка прогноза времени выпуска плавки.

Однако этот метод требует наличия ЭВМ на предприятиях и значительных материальных затрат, а главное, - для целей оперативного планирования в условиях современного металлургического комбината нет необходимости в такой точной оценке времени выпуска плавки. Поэтому может быть использован более простой и доступный метод ступенчатой корректировки прогноза времени выпуска плавки. Сущность его заключается в том, что оценка времени выпуска плавки корректируется периодически, по мере прохождения процесса плавки через определенные критические точки.

В качестве таких критических точек целесообразно принять время окончания отдельных периодов плавки, когда происходит резкое увеличение объема известной информации.

Для скрап-рудного процесса могут быть выделены следующие критические точки:

τ_0 - начало плавки,

τ_4 - момент окончания завалки скрапа,

τ_6 - момент окончания завалки чугуна,

τ_7 - момент окончания плавления,

τ_{12} - выпуск плавки.

Принятие такой системы критических точек обуславливает наличие следующих четырех видов оценок времени выпуска плавки.

Периоды предсказанияОценка времени выпуска

1. $\bar{\tau}_0 < \tau_i \leq \tau_4$

$$\bar{\tau}_{12} = \tau_0 + \bar{y}_{j+1,2}$$

2. $\tau_4 < \tau_i \leq \tau_6$

$$\bar{\tau}_{12} = \tau_4 + \sum_{i=5}^{12} t_i$$

3. $\tau_6 < \tau_i \leq \tau_7$

$$\bar{\tau}_{12} = \tau_6 + \sum_{i=7}^{12} t_i$$

4. $\tau_7 < \tau_i \leq \tau_7 + a$

$$\bar{\tau}_{12} = \tau_7 + \sum_{i=8}^{12} t_i$$

где: τ_i - текущее время в момент прогноза;
 $\bar{y}_{j+1,2}$ - оценка всей длительности плавки, полученная до ее начала;
 t_i - оценка длительности отдельных операций плавки;
 a - время, в течение которого еще является целесообразным осуществлять корректировку предшествующего прогноза.

Для мартеновских печей большой и средней емкости его можно принять равным 1 + 1,5 часа.

Таким образом, задача сводится к построению моделей для оценки суммарной длительности периодов, оставшихся до выпуска плавки после перехода данной критической точки. При этом модели должны включать всю дополнительную информацию, появившуюся за этот период. Для решения этой задачи были использованы методы множественной корреляции.

Методику построения подобных моделей покажем на следующем примере.

Необходимо построить модель для прогнозирования времени выпуска плавки для 400-тонных мартеновских печей при выплавке рельсовых сталей в период, $\bar{\tau}_6 < \tau_i \leq \tau_7$, т.е. в период плавления.

Подлежит оценке $\sum_{i=7}^{12} t_i$ - суммарная длительность плавления и доводки.

Методами множественной корреляции необходимо установить количественную зависимость этого показателя от всей известной информации. К этой информации в первую очередь относится заданная марка стали, состояние печи, значения факторов, систематически изменяющихся во времени. В качестве сводной количественной характеристики влияния этих факторов может быть принята оценка уровня длительности плавки в данные сутки ($\bar{y}_{(j+1,2)}$). Порядок уста-

новления значения этой характеристики был нами рассмотрен ранее.

Дополнительная информация, появившаяся по ходу плавки, выступает в двух формах; во-первых, как длительность уже выполненных операций плавки и, во-вторых, как количественные характеристики условий их протекания. К моменту начала плавления уже выполнено 6 операций плавки.

В модель были включены длительности только тех операций плавки, которые могут оказать существенное влияние на длительность плавления и доводки. К ним в первую очередь относится продолжительность завалки скрапа и его прогрева. Кроме того, было предположено, что некоторое влияние могут оказать длительность завалки и прогрев сыпучих. Однако, поскольку это сравнительно короткие операции, рассматривалась их суммарная длительность.

В качестве количественных параметров проведения этих периодов были приняты: общий вес садки (Q_c), количество чугуна в завалку (Q_z), содержание в нем Mn, Si и S . Всего, следовательно, в модель было включено 10 факторов. Что касается формы связи, то решено было использовать линейную модель. Возможность использования для прогнозирования линейной модели обусловлена сравнительно узкими пределами изменчивости отдельных параметров. Результаты расчета по этой модели приведены в табл.8-9.

Таблица 8

Средние и среднеквадратичные отклонения по принятым в анализ факторам

Наименование факторов	\bar{x}	σ
Уровень (X_2)	653,8	22,3
Содержание Mn в чугуне (X_3)	0,33	0,033
Содержание Si в чугуне (X_4)	0,76	0,114
Содержание S в чугуне (X_5)	0,039	0,0077
Количество чугуна в завалку (X_6)	257,3	9,7
Вес садки (X_7)	431,1	15,3
Продолжительность завалки (X_8) и перегрева сыпучих	51,6	10,3
Продолжительность завалки скрапа (X_9)	87,2	24,9
Продолжительность прогрева скрапа (X_{10})	105,1	20,1
Суммарная длительность плавления и доводки (X_1)	396,4	49,3

Матрица парных коэффициентов корреляции

Таблица 9

	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_1
X_2	X	0,233	0,0074	0,210	0,134	0,163	0,094	0,145	0,388	0,272
X_3	0,233	X	0,178	-0,139	-0,007	0,051	0,017	0,14	0,031	0,061
X_4	0,074	0,0178	X	-0,356	-0,255	-0,229	0,0074	-0,0125	-0,001	-0,044
X_5	0,210	-0,139	-0,356	X	0,185	0,136	0,0007	0,10	0,112	0,135
X_6	0,134	-0,007	-0,255	0,185	X	0,559	0,065	0,096	0,05	0,038
X_7	0,163	0,051	-0,229	0,136	0,559	X	0,146	0,271	0,033	0,122
X_8	0,094	0,017	0,0074	0,0007	0,065	0,146	X	0,081	-0,013	-0,023
X_9	0,145	0,14	-0,0125	0,10	0,096	0,271	0,081	X	-0,350	0,032
X_{10}	0,388	0,031	-0,001	0,112	0,050	0,093	-0,013	-0,350	X	0,123

Уравнение множественной корреляции в натуральном масштабе:

$$X_1(2,3,4,5,6,7,8,9,10) = -256 + 0,91X_2 + 44,9X_3 + 4,8X_4 + 661,5X_5 - 0,607X_6 + 0,505X_7 - 0,286X_8 - 0,097X_9 - 0,06X_{10}. \quad (14)$$

Проанализируем количественное влияние отдельных факторов на суммарную длительность плавления и доводки (X_1).

Факторы	Уровень (X_2)	Содержание в чугунае			Количество		Длительность		
		Mn (X_3)	Si (X_4)	S (X_5)	чугуна (X_6)	всего метал. садки (X_7)	завалка и прогрева сыпучих (X_8)	завалки скрапа (X_9)	Прогрев скрапа (X_{10})
Изменение X_1 в мин. при изменении каждого фактора на одну б	20,0	1,5	0,5	5,1	5,9	7,8	2,9	2,4	1,2

Таким образом, факторы по степени их влияния на величину X_1 можно разбить на три группы: наиболее значительное влияние оказывает величина уровня, заметное и примерно равное влияние оказывают вес металлической садки, количество чугуна и содержание S в чугунае, и сравнительно слабое влияние оказывают длительности предшествующих периодов плавки и содержание в чугунае Mn и Si.

Для практического использования в прогнозе можно последнюю группу факторов опустить, приняв их значения на среднем уровне. Тогда уравнение примет следующий вид:

$$X_{1,(2,5,6,7)} = -268 + 0,91X_2 + 661,5X_5 - 0,607X_6 + 0,505X_7. \quad (15)$$

Снижение трудоемкости прогноза может быть достигнуто путем решения уравнения (15) для наиболее часто встречающихся значений факторов и составления специальных вспомогательных таблиц.

В отдельных случаях более удобным является составление таблиц для определения разницы между прогнозируемой длительностью и средней. Для этого уравнение (15) необходимо преобразовать

$$X_1 - \bar{X}_1 = 0,91(X_2 - \bar{X}_2) + 661,5(X_5 - \bar{X}_5) - 0,607(X_6 - \bar{X}_6) + 0,505(X_7 - \bar{X}_7). \quad (16).$$

Б.Б.Розин, Ю.П.Воронов

ВОПРОСЫ СОСТАВЛЕНИЯ СУТОЧНОГО ГРАФИКА РАБОТЫ СТАЛЕПЛАВИЛЬНЫХ ЦЕХОВ

На большинстве металлургических предприятий наиболее напряженной из всех внутризаводских связей является связь "сталепла - вильные цеха - блюминг". Нормальное прохождение потока металла из сталеплавильных цехов до нагревательных колодцев блюминга, а следовательно, и бесперебойная работа самого блюминга зависят во многом от того, насколько умело составлен суточный график выпусков плавок стали. Такие графики в настоящее время составляются опытными практическими работниками, которые в своей работе руководствуются многочисленными интуитивными соображениями.

Несмотря на важность вопроса и уделяемое, в связи с этим, большое внимание налаживанию четкой связи "сталь-прокат", работа этого участка на многих металлургических заводах должна быть во многом улучшена.

Все нарушения в работе внутризаводской связи "сталь-прокат" можно разделить на две группы:

1. нарушения, связанные с неудачным составлением графика;
2. нарушения, имеющие своей характеристикой невыполнение составленного графика.

Вторая группа нарушений не входит непосредственно в сферу

деятельности составителя графика, но тесная связь обеих групп нарушений указывает, что умело составленный график и выполняется с большим успехом.

Так, например, чем меньше вариация интервалов между двумя соседними по времени выпусками плавов, тем вероятнее получение более благоприятных условий для выполнения составленного графика. В то же время по данным о распределении величин интервалов между соседними выпусками плавов, приведенным в табл.1, можно судить, насколько велика эта вариация.

Таблица 1

Распределение интервалов между
выпусками мартеновских плавов
(по материалам Кузнецкого комбината)

Значения интервалов (мин.)	Число случаев	значения интервалов(мин.)	число случаев	значения интервалов(мин.)	число случаев
0	37	65	38	130	13
5	69	70	46	135	16
10	72	75	43	140	15
15	77	80	37	145	15
20	71	85	31	150	10
25	61	90	24	155	9
30	70	95	27	160	5
35	43	100	26	165	10
40	45	105	25	170	5
45	58	110	14	175	7
50	43	115	28	180	8
55	60	120	23	свыше 180	18
60	52	125	16	Итого	1268

Но в то же время множество статистического материала, которым располагает любой металлургический завод, и множество числовых характеристик исследуемого участка технологического процесса сами собой наталкивают на мысль о математической постановке задачи.

Постановка задачи и критерии качества графика

Первоначально задача может быть сформулирована так. На сталеплавильные печи R_i ($i = 1, \dots, m$) требуется запланировать выплавку различных марок стали¹⁾ S_j ($j = 1, \dots, n$) при заданном времени освобождения каждой печи от текущей плавки T_{oi} . Поскольку длительность плавки каждой марки стали D_j ($j = 1, \dots, n$), то, прикрепляя в каком-либо порядке марки стали к печам ($S_j \rightarrow R_i$), можно получить ту или иную последовательность новых времен выпусков $T_{i\alpha} = T_{oi} + D_j$.

Пусть далее на сутки требуется запланировать Q плавков ($Q \geq n$) так, что все плавки практически можно произвести за сутки. Общее число плавков может быть разбито на группы ℓ_j так, что ($j = 1, \dots, n$); ($\ell_j = 1, \dots, \psi_j$), а $\sum_{j=1}^n \psi_j = Q$. Очевидно, что ψ_j - число плавков данной марки стали, которое необходимо выплавить за сутки.

Следовательно, каждый выпуск может быть охарактеризован:

1. Своим временем $T_{ik_i}^{\alpha \ell_j}$, где α - номер плавки по порядку ($\alpha = 1, \dots, Q$); ℓ_j - внутригрупповой номер плавки ($\ell_j = 1, \dots, \psi_j$); i - номер печи ($i = 1, \dots, m$);

$j = (1, \dots, n)$ - условный номер марки стали, а

$k_i = (1, \dots, \psi)$ - порядковый номер плавки на i -й печи за данные сутки.

2. Выплавляемой маркой стали S_{ij} .

Итак, в задаче требуется из всех возможных времен выпусков $T_{ik_i}^{\alpha \ell_j}$ выбрать Q времен выпусков с тем, чтобы полученная последовательность времен выпусков

$$T = [T_{ik_i}^{\ell_j} \dots T_{ik_i}^{\alpha \ell_j} \dots T_{ik_i}^{Q \ell_j}];$$

а также и соответствующая ей последовательность марок

$$S = [S_{ij}^1 \dots S_{ij}^{\alpha} \dots S_{ij}^Q];$$

1) Под "маркой" стали может пониматься и группа марок стали, с приблизительно одинаковым временем их выплавки.

удовлетворяли выбранным критериям.

При выборе критериев оптимальности следует учитывать требования различных участков планируемого потока металла. Приводимые ниже критерии представляют собой не только учет этих требований, но и направления, по которым может идти решение задачи.

Перейдем к рассмотрению различных критериев.

1. M - критерий. Этот критерий требует максимального повышения равномерности выпусков плавок стали. Данный локальный критерий есть своеобразная объективная цель, к которой стремятся работники сталеплавильных цехов. Появление этого критерия связано с тем, что более равномерное распределение времен выпусков в течение суток позволяет нормализовать работу вспомогательного оборудования сталеплавильных цехов как на входе (шихтовый двор, завалочные машины и т.д.), так и на выходе (разливочные краны, составы с изложницами и т.п.).

M - критерий может быть усложнен в связи с тем, что особенно важно не допустить сближения времен выпусков на рядом стоящих печах. Усложненный M - критерий должен различать не только порядковый номер выпуска α , но также и номер печи i , т.е., если $|i_1 - i_2| = 1$, то для

$$T_{i_1 k_{i_1}}^{\alpha l_j} \text{ и } T_{i_2 k_{i_2}}^{\alpha+1, l_j}$$

устанавливаются более жесткие требования. Это обусловлено, в основном, тем, что на некоторых заводах практически невозможно проводить одновременную завалку на двух рядом стоящих печах.

2. S - критерий. Это критерий равномерного поступления составов с металлом на нагревательные колодцы блюминга. Со строго формальной точки зрения этот критерий равноценен M - критерию, так как вопрос сводится лишь к пересмотру нормативов длительности D_j . S - критерий появляется из требования наиболее равномерной загрузки блюминга. Для выполнения этого требования необходимо учитывать не только длительности плавок D_j , но также и время, необходимое для прохождения металла от сталеплавильных печей до нагревательных колодцев блюминга.

Для подсчета $T_{i k_i}^{\alpha l_j}$, что в данном случае будет обозна -

чать времена поступления составов с металлом на нагревательные колодцы блюминга, время плавки D_j увеличивается на время прохождения, и, следовательно, $T_{ik_i}^{\alpha l_j}$ для решения задачи с S - критерием в целевой функции подсчитывается по формуле:

$$T_{i(k-1)i}^{\alpha_1 l_j} + D_j + \Delta_j = T_{ik_i}^{\alpha_2 l_j},$$

где $\alpha \geq \alpha_2$, а Δ_j - норматив времени на прохождение. Ясно, что к полученным временам поступления применимы любые приемы, если эти приемы применимы для времен выпусков. Т.е. в смысле принципа решения задача с S - критерием равнозначна задаче с M - критерием в целевой функции.

H - критерий - критерий наиболее равномерного распределения металла по направлениям после блюминга. Этот критерий со всех точек зрения уже существенно отличается от первых двух. Если решается задача с каким-нибудь из предыдущих критериев в целевой функции, то можно обращать внимание только на распределение времен выпусков, не учитывая того, какая марка стали выплавлена в это время. Когда же в целевую функцию подставляется в той или иной форме H - критерий, то вектор T должен быть разбит на n векторов (последовательностей):

$$\begin{aligned} T_1 &= [T_{ik_i}'' \dots T_{ik_i}^{\alpha l_1} \dots T_{ik_i}^{\psi_1 \psi_1}] \\ T_j &= [T_{ik_i}^{j_1} \dots T_{ik_i}^{\alpha l_j} \dots T_{ik_i}^{j-1+\psi_j \psi_j}] \\ T_n &= [T_{ik_i}^{\alpha - \psi_{n1}} \dots T_{ik_i}^{\alpha l_n} \dots T_{ik_i}^{\alpha \psi_n}] \end{aligned}$$

К каждой из этих последовательностей применим один из возможных подходов, которые использовались бы при существовании лишь одного вектора T 1).

1) В данном случае предполагается, что группировки (или различия) марок по длительности выплавки и направлениям после блюминга однотипны. В некоторых практических задачах может потребоваться и более сложное деление.

Здесь возникает новая задача: каким способом увязать различные виды равномерности по разным маркам стали? Или: какой марке отдавать предпочтение по равномерности? Эта задача решается с учетом практических соображений, смотря по тому, какое направление после блюминга является наиболее жестким. На КМК, например, предпочтение следует отдавать равномерности тех марок стали, которые идут на рельсобалочный стан.

Задачу с H - критерием в целевой функции условимся называть задачей на множественную равномерность.

L - критерий. Решение общей задачи моделирования производственного процесса на металлургическом заводе может быть начато и с прокатных цехов. После составления модели прокатного цикла получается требуемый вход, признанный оптимальным для локальной модели прокатки. Для суточного графика плавок стали это означает предъявление определенного потока требований, т.е. задание некоторой последовательности марок и определенного порядка поступления составов с металлом на нагревательные колодцы блюминга.

Иными словами, нам заданы некоторый вектор T^0 и последовательность S^0 , и все возможные сочетания времен выпусков T и последовательности марок S приобретают ту или иную оценку в зависимости от близости полученных T и S к заданным T^0 и S^0 . Эта оценка и называется L - критерием. В настоящее время задача с такой сложной оценкой оптимальности может быть решена только методом Монте-Карло, хотя вполне вероятно, что в недалеком будущем появятся детерминированные методы решения подобных задач.

Все вышеперечисленные критерии¹⁾ могут входить в целевую функцию решаемой задачи в различных конкретных формах. Эти конкретные формы выражения критериев представляют собой количественную оценку оптимальности рассматриваемого графика:

1. Сумма отклонений от среднего интервала или сумма квадратов отклонений от среднего интервала, т.е.

$$\sum_{\alpha=1}^q (\bar{t}_{\alpha} - \bar{t}), \quad \text{где } \bar{t}_{\alpha} = T_{ik_i}^{\alpha+1, l_j} - T_{ik_i}^{\alpha, l_j},$$

1) За исключением, конечно, L - критерия, который отличен и по форме и в принципе от прочих.

$$a \quad \bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^a T_{ik_i}^{0e_j} - T_{ik}^{1e_j}}{a-1} \quad \text{или} \quad \sum_{\alpha=1}^a (\bar{c}_\alpha - \bar{c})^2$$

2. Число интервалов, больших (или меньших) некоторого, на - перед заданного интервала;

3. максимальное отклонение от среднего интервала:

$\max |\bar{c}_\alpha - \bar{c}|$ (по ходу решения задачи α , очевидно, не будет постоянным, т.е. придется последовательно рассматривать различные интервалы \bar{c}_α);

4. сумма отклонений каждого интервала от предшествующего (или последующего)

$$\sum_{\alpha=1}^a |\bar{c}_{\alpha-1} - \bar{c}_\alpha|, \quad \text{или} \quad \sum_{\alpha=1}^a (\bar{c}_{\alpha-1} - \bar{c}_\alpha)^2$$

5. максимальное отклонение каждого интервала от предшествующего (или последующего):

$$\max |\bar{c}_{\alpha-1} - \bar{c}_\alpha|;$$

6. сумма отклонений интервалов от их математических ожиданий

$$\sum_{\alpha=1}^a |\bar{c}_\alpha - m\bar{c}_\alpha|$$

Очевидно, что использование той или иной формы критериев равномерности обусловлено конкретным видом потока составов со сталью.

Основные направления проверки вида потока - на стационарность, ординарность и последствие - требуют довольно сложного анализа и в заводских условиях вряд ли применимы.

Требование практической применимости новых методов как анализа, так и составления суточного графика, и наталкивает на следующий методический принцип решения.

а) Каким-либо несложным ручным алгоритмом строится условно-оптимальный план.

В дальнейшем под условно-оптимальным планом будет пониматься график с максимально-возможной равномерностью, но составлен - ный без учета ограничений по заданному на сутки ассортименту.

б) Полученный условно-оптимальный план "ухудшается" так, чтобы получилось несколько приемлемых вариантов графика, из которых опытным специалистом и выбирается окончательно график, подлежащий исполнению.

Алгоритмы составления условно-оптимального графика

1. Алгоритм расстановки. Покажем этот алгоритм на конкретном примере. Исходные данные и возможные времена выпусков приведены в табл.2.

Таблица 2.

α номера плавки по рядку	i номера работающих печи	Время окончания текущей плавки	D _j Длительности плавки				T _{i1} ^{αβj} Время выпуска будущей плавки			
			D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	T _{i1} ^{αβ1}	T _{i1} ^{αβ2}	T _{i1} ^{αβ3}	T _{i1} ^{αβ4}
1	1	13.50	10.30	11.00	11.30	12.00	0.20	0.50	1.20	1.50
2	13	14.20	11.10	11.40	12.10	12.40	1.30	2.00	2.30	3.00
3	4	15.20	11.50	12.20	12.50	13.20	3.10	3.40	4.10	4.40
4	15	15.20	11.30	12.00	12.30	13.00	2.50	3.20	3.50	4.20
5	11	15.50	10.50	11.20	11.50	12.20	2.40	3.10	3.40	4.10
6	14	18.20	11.20	11.50	12.20	12.50	5.40	6.10	6.40	7.10
7	10	19.50	11.30	12.00	12.30	13.00	7.20	7.50	8.20	8.50
8	3	20.00	10.10	10.40	11.10	11.40	6.10	6.40	7.10	7.40
9	6	21.30	10.40	11.10	11.40	12.10	8.10	8.40	9.10	9.40
10	5	21.50	11.00	11.30	12.00	12.30	8.50	9.20	9.50	10.20
11	12	22.40	10.50	11.20	11.50	12.20	9.30	10.00	10.30	11.00

Как видно из таблицы, принят следующий порядок расположения по строкам возможных сроков окончания будущей плавки:

$$T_{i1}^{\alpha\beta_1} = T_{i0}^{\alpha\beta_0} + \min D_j \dots T_{i1}^{\alpha\beta_n} = T_{i0}^{\alpha\beta_0} + \max D_j$$

т.е. $\min D_j = D_1$, и $\max D_j = D_n$

По столбцам, поскольку нам придется оперировать с временами выпусков будущих, а не текущих плавок, лучше расположить данные так, что если

$$T_{i_1}^{\alpha_1 l_j} < T_{i_1}^{\alpha_2 l_j}, \text{ то } \alpha_1 < \alpha_2$$

Учитывая это требование, для работы по данному алгоритму необходимо составить таблицу аналогичную таблице 3.

Таблица 3

α номера плавок по порядку	i номера работающих печей	Времена выпусков				Номера печей, соответствующих интервалам	Интервалы		
		$T_{i_1}^{\alpha l_1}$	$T_{i_1}^{\alpha l_2}$	$T_{i_1}^{\alpha l_3}$	$T_{i_1}^{\alpha l_4}$		минимальные	средние	максимальные
1	1	0.20	0.50	1.20	1.50	12-1	1.40	1.40	3.10
2	13	1.30	2.00	2.30	3.00	1-13	0.10	1.10	2.40
3	11	2.40	3.10	3.40	4.10	13-11	0.10	1.10	2.40
4	15	2.50	3.20	3.50	4.20	11-15	0.20	0.10	1.40
5	4	3.10	3.40	4.10	4.40	15-4	0.10	0.20	2.00
6	14	5.40	6.10	6.40	7.10	4-14	0.50	2.30	4.00
7	3	6.10	6.40	7.10	7.40	14-3	0.00	0.30	2.00
8	10	7.20	7.50	8.20	8.50	3-10	0.10	1.10	2.40
9	6	8.10	8.40	9.10	9.40	10-6	0.10	0.50	2.20
10	5	8.50	9.20	9.50	10.20	6-5	0.10	0.40	2.10
11	12	9.30	10.00	10.30	11.00	5-12	0.10	0.40	2.10

Порядок работы с такой таблицей следующий:

1. Подсчитывается диапазон среднего интервала. Для этого разница между временем выпуска самой последней плавки в составляемом куске графика и временем выпуска самой последней из текущих плавок делится на число работающих печей. В нашем примере время выпуска последней плавки в составляемой части графика

ка колеблется от 9.30 до 11.0, следовательно, диапазон среднего интервала будет в пределах:

$$\text{от } \frac{9.30 - 22.40}{11} = \frac{10.50}{11} \approx 59 \text{ мин}$$

$$\text{до } \frac{11.00 - 22.40}{11} = \frac{12.20}{11} \approx 67 \text{ мин}$$

Значит, средний интервал в нашем примере будет

$$59 \text{ мин} \leq \bar{\tau} \leq 67 \text{ мин}$$

2. В таблице (см. табл. 3) определяются максимальные, средние и минимальные интервалы между временами двух соседних выпусков:

$$\tau_{\min}^{\alpha} = T_{i1}^{\alpha, l_i} - T_{i1}^{\alpha-1, l_n}; \quad \bar{\tau}^{\alpha} = T_{i1}^{\alpha, l_i} - T_{i1}^{\alpha-1, l_i};$$

$$\tau_{\max}^{\alpha} = T_{i1}^{\alpha, l_n} - T_{i1}^{\alpha-1, l_i}$$

3. Сравнивается диапазон среднего интервала с полученными в таблице:

$$\tau_{\min}^{\alpha}, \quad \bar{\tau}^{\alpha} \quad \text{и} \quad \tau_{\max}^{\alpha}$$

При сравнении могут быть три случая:

а) $\bar{\tau}$ попадает в область возможных интервалов:

$$\tau_{\min}^{\alpha} \leq \bar{\tau} \leq \tau_{\max}^{\alpha}$$

Тогда конец последней из текущих плавок считается началом отсчета, и сроки выпусков расставляются по величине среднего интервала;

б) $\tau_{\min}^{\alpha} > \bar{\tau}$, т.е. наименьший интервал τ^{α} получился больше среднего.

В этом случае требуется сужать разрыв и ставить времена выпусков по краям полученного большого интервала - "разрыва";

в) $\tau_{\max}^{\alpha} < \bar{\tau}$. Это означает, что получилось скопление времен выпусков, и, следовательно, эти времена должны ставиться как можно дальше друг от друга.

Если такое скопление идет подряд на несколько интервалов, то к этому отрезку времени применим тот же общий прием, только с новым (пересчитанным) диапазоном среднего интервала.

Окончательный вариант условно-оптимального графика для пер-

вой половины суток, который должен получиться в нашем примере, приведен в табл.4.

Таблица 4

α номера плавков	i номера работа- ющих печей	Времена выпусков			
		$T_{i1}^{\alpha \ell_1}$	$T_{i1}^{\alpha \ell_2}$	$T_{i1}^{\alpha \ell_3}$	$T_{i1}^{\alpha \ell_4}$
1	1	0.20			
2	13	1.30			
3	11	2.40			
4	15			3.50	
5	4				4.50
6	14	5.40			
7	3		6.40		
8	10		7.50		
9	6		8.40		
10	5			9.50	
11	12				11.00

После того, как составлен график на какую-то часть суток, т.е. закреплена некоторая доля всех Q плавков, можно перейти к составлению графика на следующую часть суток, считая

$T_{i1}^{\alpha \ell_1}$ уже закреплёнными.

Введем понятие слоя графика. Под слоем графика в дальнейшем будет пониматься максимально большое множество плавков, готовых к распределению, т.е. таких, перед которыми идут уже закреплённые плавки.

Число плавков в каждом слое обозначим через $Q_\xi - Q_{\xi-1}$. Таким образом, индекс α будет проходить значения

$$\alpha = (1 \dots Q_{\xi-1} \dots Q_\xi \dots n)$$

А общее число плавков за сутки Q должно получаться, если сложить числа плавков в каждом слое:

$$Q = \sum_{\xi=1}^{\rho} Q_{\xi} \quad , \text{ где } \rho = \max k_i$$

ρ - число слоев графика - может быть разным в различных задачах. На КМК, например, приходится составлять график в 2-3 слоя.

Таким образом, принцип решения задачи, т.е. составление графика постепенно, по слоям, соблюдается и при использовании других алгоритмов.

II. Метод наименьших квадратов. Равномерное по времени распределение выпусков плавок можно представить в виде прямой:

$$T_{iki}^{*\alpha l_j} = a + b\alpha$$

Фактически возможные времена выпусков, очевидно, не все будут лежать на такой прямой, т.е. будут иметь место некоторые отклонения от нее:

$$\zeta = T_{iki}^{\alpha l_j} - T_{iki}^{*\alpha l_j}$$

или, подставляя значение T^{*} :

$$\zeta = T_{iki}^{\alpha l_j} - (a + b\alpha)$$

Для данной задачи метод наименьших квадратов состоит в определении значений a и b при условии минимальности суммы квадратов отклонений от прямой, т.е.

$$\min (Q = \sum_{\alpha=a_{\xi-1}}^{a_{\xi}} \zeta^2)$$

Для нахождения a и b , удовлетворяющих этому условию, составим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = -2 \sum_{\alpha=a_{\xi-1}}^{a_{\xi}} (T_{iki}^{\alpha l_j} - a - b\alpha) = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = -2 \sum_{\alpha=a_{\xi-1}}^{a_{\xi}} \alpha (T_{iki}^{\alpha l_j} - a - b\alpha) = 0$$

Если ввести следующие обозначения:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{a_{\xi} - a_{\xi-1}} \sum_{\alpha=a_{\xi-1}}^{a_{\xi}} \alpha$$

$$\bar{T} = \frac{1}{Q_{\xi} - Q_{\xi-1}} \sum_{\alpha=Q_{\xi-1}}^{Q_{\xi}} T_{ik_i}^{\alpha \ell_j} ;$$

$$\mu_1 = \frac{1}{Q_{\xi} - Q_{\xi-1}} \sum_{\alpha=Q_{\xi-1}}^{Q_{\xi}} \alpha T_{ik_i}^{\alpha \ell_j} ;$$

$$\mu_2 = \frac{1}{Q_{\xi} - Q_{\xi-1}} \sum_{\alpha=Q_{\xi-1}}^{Q_{\xi}} \alpha^2 ,$$

то наша система примет вид:

$$\begin{cases} a + b\bar{\alpha} = \bar{T} \\ a\bar{\alpha} + b\mu_2 = \mu_1 \end{cases}$$

Отсюда $b = \frac{\mu_1 - \bar{\alpha}\bar{T}}{\mu_2 - \bar{\alpha}^2}$ и $a = \bar{T} - b\bar{\alpha}$

т.е. a и b определяются однозначно, а $\min Q$ полностью задается значениями a и b

Значит

$$b = \frac{\sum_{\alpha=Q_{\xi-1}}^{Q_{\xi}} (\alpha - \bar{\alpha})(T_{ik_i}^{\alpha \ell_j} - \bar{T})}{\sum_{\alpha=Q_{\xi-1}}^{Q_{\xi}} (\alpha - \bar{\alpha})^2}$$

$$a = \bar{T} - b\bar{\alpha}$$

Подставляя полученное значение в уравнение $T_{ik_i}^{*\alpha \ell_j} = a + b\alpha$ получаем исходную прямую в виде:

$$T_{ik_i}^{*\alpha \ell_j} - \bar{T} = b(\alpha - \bar{\alpha})$$

Отсюда:

$$T_{ik_i}^{*\alpha \ell_j} = \frac{(\alpha - \bar{\alpha}) \sum_{\alpha=Q_{\xi-1}}^{Q_{\xi}} (\alpha - \bar{\alpha})(T_{ik_i}^{\alpha \ell_j} - \bar{T})}{\sum_{\alpha=Q_{\xi-1}}^{Q_{\xi}} (\alpha - \bar{\alpha})^2}$$

От полученных значений T^* можно перейти к ближайшим от них возможным временам выпусков, которые и будут считаться оптимальными значениями.

Процесс повторяется столько раз, сколько слоев насчитывается в графике данных суток, т.е.

$$\xi = k_i = (1 \dots \rho)$$

Ш. Метод сглаживания. Идея этого метода - в минимизации максимальных отклонений каждого интервала от предыдущего (или последующего) интервала. Порядок действий по данному алгоритму следующий:

1. Подсчитываются и выписываются возможные времена выпусков при условии, что на всех печах запланирована марка стали с наименьшей продолжительностью выплавки:

$$T_{ik_i}^{\alpha j} = T_{ik_i-1}^{\alpha - Q_{i\ell_0}} + \min D_j$$

Примем, как и ранее, $j = 1$, если $D_i = \min D_j$

2. Выписывается столбец интервалов между выпусками; первый интервал ставится против времени второго выпуска (интервалы назад):

$$T_{ik_i}^{\alpha \ell_1} - T_{ik_i}^{\alpha - \ell_1} = \tau_\alpha$$

3. Выписывается второй столбец интервалов; первый интервал ставится против времени первого выпуска (интервалы вперед):

$$T_{ik_i}^{\alpha + \ell_1} - T_{ik_i}^{\alpha \ell_1} = \tau_{\alpha+1}$$

4. Каждое время выпуска охарактеризовано теперь интервалом назад τ_α и интервалом вперед $\tau_{\alpha+1}$.

Подсчитываются разности между ними:

$$\tau_\alpha - \tau_{\alpha+1} = \Delta_\alpha$$

5. Из полученных разностей выбираются те, которые меньше $-\frac{D_2 - D_1}{2}$. Обозначим все $\Delta_\alpha < -\frac{D_2 - D_1}{2}$ через Δ_α^*

Очевидно, что каждому Δ_α^* соответствует $T_{ik_i}^{*\alpha \ell_1}$

6. К временам выпусков $T_{ik_i}^{*\alpha \ell_1}$ прибавляется $\alpha_1 = D_2 - D_1$

Получаем:

$$T_{ik_i}^{\alpha \ell_2} = T_{ik_i}^{*\alpha \ell_1} + \alpha_1$$

7. К полученному ряду $T_{iki}^{*\alpha l_i} + \alpha_i = (1,2)$ применяется та же процедура. Процесс повторяется до тех пор, пока не исчезнут все разности меньше $-\frac{\alpha_j}{2}$, или пока

$$\Delta_{\alpha}^* \longrightarrow T_{iki}^{\alpha l_n} (D_n = \max D_j)$$

Конкретное применение данного метода можно проследить по табл.5.

Таблица 5

1 α номера пла- вок по порядку	2 i номера ра- ботающих печей	3 T_{i0}^{α} концы те- кущих плавок	4 D $\min D_j$	5 $T_{iki}^{\alpha l_i}$ исходные времена выпус- ков	6 Интервалы		8 Раз- нос- ти Δ_{α}	9 Новое рас- пределение	
					на- зад τ_{α}	впе- ред $\tau_{\alpha+1}$		вре- мена $T_{i1}^{\alpha l_i}$	мар- ки j
					7				
0	5	-	-	23.10	-	1.10	-	23.10	-
1	3	14.10	10.10	0.20	1.10	2.30	-1.20*	0.50	2
2	10	15.20	11.30	2.50	2.30	0.50	1.40	2.50	1
3	1	17.10	10.00	3.40	0.50	1.50	-1.00*	4.10	2
4	15	18.00	11.30	5.30	1.50	0.30	1.20	5.30	1
5	6	18.30	11.30	6.00	0.30	1.00	-0.30*	6.30	2
6	14	19.40	11.20	7.00	1.00	0.10	0.50	7.00	1
7	13	20.00	11.10	7.10	0.10	0.20	-0.10	7.10	1
8	2	21.10	10.20	7.30	0.20	1.00	-0.40*	8.00	2
9	11	21.40	10.50	8.30	1.00	1.00	0	8.30	1
10	12	22.40	10.50	9.30	1.00	1.00	0	9.30	1
11	4	22.40	11.50	10.30	1.00	0	1.00	10.30	1
12	5	23.10	11.20	10.30	0	-	-	11.00	2

Первые четыре столбца этой таблицы - исходные данные. Значения 5-го столбца - это сумма величин по каждой строке третьего и

четвертого столбца. Шестой столбец подсчитывается по формуле:

$$\tau_{\alpha} = \tau_{i_1}^{\alpha, e_1} - \tau_{i_1}^{\alpha-1, e_1}$$

Седьмой столбец - это сдвинутый на одну строку вверх столбец № 6.

Разности Δ_{α} подсчитаны указанным выше способом $\Delta_{\alpha} = \tau_{\alpha} - \tau_{\alpha+1}$

Из всех разностей звездочками выделены те из них, которые меньше $-\frac{\alpha_1}{2} \cdot \alpha_1$ для данного примера принято равным получасу. Значения времен в девятом столбце получены следующим образом:

а) к временам из пятого столбца, которым соответствуют разности со звездочкой, прибавляем α ;

б) все прочие времена переписываем из пятого столбца без изменения. Столбец № 10 - это полученное после первого шага распределение номеров марок. Выписанная по этому столбцу последовательность марок будет иметь вид:

$$S = (S_2; S_1; S_2; S_1; S_2; S_1; S_1 \text{ и т.д.})$$

Можно проверить, что условно-оптимальная последовательность марок по данному алгоритму будет представлять собой при $n = 3$

$$S^0 = (S_3; S_1; S_2; S_2; S_2; S_1; S_2; S_3; S_3; S_3; S_1; S_3),$$

которая получается из следующего набора времен выпусков:

$$\tau^0 = (1.20; 2.50; 4.10; 5.40; 6.30; 7.00; 7.40; 8.30; 9.30; 10.30; 11.00; 11.30).$$

Значения S^0 и τ^0 и будут представлять собой условно-оптимальный график.

После того, как условно-оптимальный график составлен, встает задача подведения полученного графика под заданный на сутки сортамент плавок.

Преобразование условно-оптимального графика в график с заданным сортаментом

Если считать, что в любом графике каждой марке соответствует число плавок этой марки, то тогда через $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_j, \dots, \psi_n)$ можно определить сортамент условно-оптимального графика, а через $\psi^0 = (\psi_1^0, \dots, \psi_j^0, \dots, \psi_n^0)$ - тот сортамент, который задан.

Сравниваем количества Ψ и Ψ^0 . Введем: $z_j = \Psi_j^0 - \Psi_j$ ($j=1 \dots n$)
Получаемый ряд z_j показывает, по каким маркам следует изменять график.

Пусть для определенности

$$\max z_j = z_{j\beta} \quad , \quad \text{а} \quad \min z_j = z_{j\alpha}$$

Для преобразования графика строится последовательность:

$$z_{i\beta} \longrightarrow z_{j+1} \longrightarrow z_{j+2} \longrightarrow \dots \longrightarrow z_{j\alpha}$$

Каждому z_j соответствует некоторое множество времен выпусков

$$T_j = [T_{ik_i}^{d_1} \dots T_{ik_i}^{d_j} \dots T_{ik_i}^{d_j + \Psi_j - 1 \Psi_j}]$$

и, следовательно, выстроив в последовательности все z_j , тем самым мы упорядочили и наборы времен T_j .

Тогда для каждого z_j можно выбрать соответствующие ему разности интервалов Δ_α .

Обозначим те Δ_α , которые соответствуют $z_{j\alpha}$, через Δ'_α .

Из всех Δ'_α выберем такие Δ'_α общим числом $|z_{j\alpha}|$, что любая $\Delta'_\alpha \leq \Delta'_{\alpha^*}$, причем $\alpha \neq \alpha^*$.

К временам выпусков T_j , соответствующим Δ'_{α^*} , прибавляется (в алгебраическом смысле) разница между D_j и D_{j+1} .

Получается некоторый новый график, в котором $\Psi_{j\alpha} = \Psi_{j\alpha}^0$

$z_{j\alpha}$, очевидно, будет равно нулю, а $\max z_j = z_{j\pm 1\alpha}$

Процесс может повторяться с таким же успехом, пока все $\Psi_j = \Psi_j^0$, т.е. мы придем к графику с заданным сортаментом.

В табл.6 показано преобразование одного слоя графика. Так после первого шага времена 4.50 и 11.00 уменьшаются на $d_j = 0.30$, z_4 обращается в нуль. На втором шаге из времен $T_{ik_i}^{d_2}$ выбираются значения 3.50 и 9.50, которые и переносятся в следующий столбец с уменьшением на d_j . Точно так же на третьем шаге из пяти Δ'_α (в верхнем левом углу каждой клеточки, в которой находится Δ'_α , поставлена отметка) выбираются Δ'_{α^*} (соответствующие клеточки отмечены звездочками). Этим значениям разностей соответствуют времена 7.50 и 8.40, которые и переносятся в следующий столбец с уменьшением на полчаса.

Изменяя сортамент марок, приходящийся на один слой так, чтобы выдерживался сортамент заданный на сутки, можно получить не-

Таблица 6

α	i	Времена выпусков и их преобразование				Первый шаг		Второй шаг		Третий шаг				
		$T_{i,k_1}^{\alpha l_1}$	$T_{i,k_2}^{\alpha l_2}$	$T_{i,k_3}^{\alpha l_3}$	$T_{i,k_4}^{\alpha l_4}$	τ_{α}	$\Delta\alpha$	τ_{α}	$\Delta\alpha$	τ_{α}	$\Delta\alpha$			
1	1	0.20				-	1.10	-	1.10	-	1.10	-		
2	13	1.30				1.10	1.10	0	1.10	0	1.10	0		
3	11	2.40				1.10	1.10	0	1.10	0	1.10	0.30		
4	15		3.20			1.10	1.00	0.10	1.10	0.30	0.40*	0.20		
5	4			4.20	4.50	1.00	0.50	0.10*	0.30	1.20	-0.50	1.00	1.20	0.20
6	14	5.40				0.50	1.00	-0.10	1.20	1.00	0.20	1.00	1.20	0.20
7	3		6.40			1.00	1.10	-0.10	1.00	1.10	-0.10	1.00	1.10	-0.10
8	10	7.20	7.50			1.10	0.50	0.20	1.10	0.50	0.20	1.10	0.50	0.20*
9	6	8.10	8.40			0.50	1.10	-0.20	0.50	1.10	-0.20	0.50	0.40	0.10*
10	5	9.20	9.50	9.50		1.10	1.10	0*	1.10	0.40	0.30*	0.40	1.10	-0.30
11	12			10.30	11.00	1.10	-	-	0.40	-	-	1.10	-	-
	φ_j	4	3	2	2									
	φ_j^0	6	4	1	0									
	φ_j	2	1	-1	-2									

которое количество суб-оптимальных графиков. Из этих графиков и выбирается затем график наиболее подходящий по всем прочим требованиям.

* * *

Все приведенные выше методы в той или иной степени успешно решают задачу на общую равномерность. В то же время на практике может потребоваться решение задачи на множественную равномерность, т.е. по каждой марке отдельно.

Рассмотрим два возможных случая:

1. На планируемые сутки задано к выплавке приблизительно одинаковое число плавов по каждой марке или группе марок стали. Тогда любой из указанных выше методов применим и к задаче на множественную равномерность. Вместо последовательности T приходится, однако, рассматривать все векторы T_j по отдельности. Полученные частные графики должны затем "увязываться" в один общий график.

2. Количества плавов по отдельным маркам существенно различны.

В этом случае задача может быть решена только каким-либо из статистических методов. Для этого необходимо ввести некоторую числовую оценку (типа объединенного коэффициента корреляции рангов) близости данной последовательности марок стали к желаемой (оптимальной) последовательности марок.

Н. Б. Мироносцкий

СОСТАВЛЕНИЕ РАСПИСАНИЯ РАБОТЫ МАРТЕНОВСКОГО
ЦЕХА МЕТОДОМ МОНТЕ - КАРЛО

Сталеплавильное производство представляет собой весьма сложный производственный процесс, характеризующийся огромным количеством тесно переплетающихся случайных факторов. Построение формальной модели этого процесса детерминированными методами наталкивается на непреодолимые пока трудности двух категорий: либо модель не воспроизводит с нужной степенью точности производственный процесс, либо она неприемлемо сложна. С помощью построения статистических моделей оказывается возможным моделировать на ЦВМ процесс сталеплавильного производства с достаточной для практики точностью. Моделирование сталеплавильного производства предполагается проводить посредством построения комплекса моделей. Рассмотрим модель составления расписания работы мартеновского цеха. Из всего комплекса оборудования выделим сначала мартеновские печи M_1, M_2, \dots, M_n , освобождающиеся от очередной плавки в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n . В силу непрерывности мартеновского производства, примем $t_i \geq t_0$ для всех $i = 1(1)n$, где t_0 - момент времени, начиная с которого предполагается построение расписания плавок стали.

Пусть известен набор ρ сортов стали S_1, S_2, \dots, S_ρ , которые необходимо выплавить на данных мартеновских печах, при-

чем S_k сорта стали необходимо выплавить λ_k плавков для $K = 1(1)P$. λ_k - целые неотрицательные числа. Время плавки сорта стали S_k на агрегате M_i можно считать случайной величиной τ_{ik} с функцией распределения $F_{ik}(\tau)$ и математическим ожиданием $E(\tau_{ik}) = T_{ik}$. Строго говоря, при моделировании составления расписания работы сталеплавильного цеха длительность плавки τ_{ik} необходимо разыгрывать по построенному закону распределения $F_{ik}(\tau)$.

Однако получение случайных чисел с законом распределения $F_{ik}(\tau)$ сильно увеличивает время моделирования, а главное, приемлемую для практики степень точности можно получить, не генерируя псевдо-случайные числа с законом распределения $F_{ik}(\tau)$, а оперируя с соответствующими математическими ожиданиями T_{ik} .

Перейдем к описанию алгоритмов моделирования.

Задача 1. Составить такое расписание плавков сортов стали

S_1, S_2, \dots, S_p с кратностями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ на сталеплавильных агрегатах M_1, M_2, \dots, M_n , чтобы выход плавков был как можно более равномерным. Формализуем поставленную задачу. Предположим, расписание Γ_μ составлено на интервале $[t_0, \bar{t}_a]$. Пусть моментами выхода плавков будут моменты времени $t_{v_1}^\mu, t_{v_2}^\mu, \dots, t_{v_\omega}^\mu$. Расположим это множество чисел в порядке возрастания $t_1^\mu \leq t_2^\mu \leq \dots \leq t_\omega^\mu$ и вычислим $\Delta t_j^\mu = t_{j+1}^\mu - t_j^\mu$ для всех $j = 1(1)[\omega - 1]$. Величины $\Delta t_j^\mu \geq 0$ и ограничены сверху в силу непрерывности сталеплавильного производства. Агрегаты, находящиеся в ремонте, здесь не рассматриваются, а агрегатам M_i , вступающим в число действующих в момент времени $t_i, t_i \in [t_0, \bar{t}_a]$, припишем время освобождения t_i . Итак, все Δt_j^μ лежат на конечном интервале $[\min_{j=1(1)[\omega-1]} \Delta t_j^\mu, \bar{T}]$.

В нашу задачу сейчас не входит отыскание величины \bar{T} , оценить величину \bar{T} можно, исходя из величин n, p и t_{ik} . Величины интервала $[\min_{j=1(1)[\omega-1]} \Delta t_j^\mu, \bar{T}]$ характеризует, очевидно, равномерность выпуска плавков - чем меньше этот интервал, тем больше равномерность выпуска плавков. Будем стремиться уменьшить интервал $[\min_{j=1(1)[\omega-1]} \Delta t_j^\mu, \bar{T}]$ за счет левого конца.

Отсюда возникает следующая простая идея: строим неким образом

множество графиков $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N$, где N некоторое достаточно большое число, и последовательными оценками выбираем из этого множества график Γ_θ со свойством:

$$\Delta t^\theta = \max_{\mu=1(1)N} \min_{j=1(1)[\omega-1]} \Delta t_j^\mu \quad (1)$$

Построение графиков $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N$ ведется следующим образом. Выбирается очередной мартен M_i из произвольной последовательности мартенов M_1, M_2, \dots, M_n . Затем по программе получения равномерно распределенных псевдослучайных чисел (ПСЧ) вырабатывается псевдослучайное число, в нем выделяется α разрядов, где α удовлетворяет условию $2^{\alpha-1} \leq \rho \leq 2^\alpha - 1$. Содержимое α разрядов $[\alpha]$ является номером

S_K сорта стали, если $0 < [\alpha] \leq \rho$, в противном случае вырабатывается следующее ПСЧ. Каждый мартен характеризуется определенным техническим состоянием, согласно которому данный сорт стали можно варить на данном мартене или нельзя. Информация об этом записывается в характеристике сорта стали S_K в l двоичных разрядах. Договоримся в i разряд характеристики S_K сорта стали вписывать единицу, если сорт стали S_K по технологическим условиям нельзя варить на мартене M_i в период $[t_0, \bar{t}_0]$ и нуль в противном случае. Необходимо, следовательно, после выбора мартена M_i , сорта стали S_K проанализировать содержимое i разряда характеристики стали S_K . Если $[i] = 1$, переходим к выработке следующего ПСЧ. Если $[i] = 0$, то оформляется график. Из всех графиков $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N$ интерес представляет в итоге только график, удовлетворяющий (1), поэтому при оформлении графика Γ_μ ради экономии времени нет необходимости выписывать все характеристики графика:

список мартенов, список сортов стали, намеченных для выплавки на них, время начала и конца плавки и т.д. Будем выписывать только моменты времени окончания плавок, вынося их в стандартные ячейки памяти машины. Для последующего восстановления графика, удовлетворяющего (1), достаточно знать первое ПСЧ, с которого начинается построение графика Γ_μ . При оценке качества графика по соотношению (1) лучший график из $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{\mu-1}, \Gamma_\mu$ запоминается своим первым ПСЧ, с помощью которого все характеристики

его, очевидно, можно восстановить перед выдачей графика Γ_θ на печать. Для этого достаточно заслать первое ПСЧ графика Γ_θ в программу ПСЧ и обратиться еще раз к подпрограмме построения графика Γ_μ . При оформлении плавки сорта S_κ на M_i мартен уменьшаем число плавов λ_κ на единицу, и при $\lambda_\kappa = 0$ вычеркиваем S_κ сорт стали из списка S_1, S_2, \dots, S_ρ , число ρ при этом, естественно, уменьшается на единицу. Вычисляем момент окончания плавки M_i мартена $t_{\nu_\alpha}^\mu + T_{i\kappa} = t_{\nu_\beta}^\mu$, где $t_{\nu_\alpha}^\mu$ и $t_{\nu_\beta}^\mu$ соответственно старый и новый момент окончания плавки, новый момент времени окончания плавки мартена M_i будет $t_i = t_{\nu_\beta}^\mu$. Величину $T_{i\kappa}$ можно выбирать из матрицы:

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1\rho} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2\rho} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{n1} & T_{n2} & \dots & T_{n\rho} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Однако, как показала практика, без ущерба для точности можно уменьшить размер матрицы (2), разбив на несколько групп с одинаковым (средним) временем плавки все сорта плавов S_1, S_2, \dots, S_ρ .

После перевычисления t_i для M_i мартена выносим величину t_i в отдельную группу ячеек $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots$ и переходим к выбору плавов на следующий мартен M_{i+1} , при $i \neq n$. Если $i = n$, необходимо сделать переход к разыгрыванию сорта плавки на мартен M_1 . Описанную процедуру повторяем до тех пор, пока все моменты окончания плавов t_i не удовлетворят условию:

$t_i \geq \bar{t}_0$, $i = 1(1)n$, что означает окончание построения графика Γ_μ . Новый график оценивается по критерию (1), и при:

$$(\mu \neq N) \wedge (\max_{\rho=1(1)\mu} \min_{j=1(1)[\omega-1]} \Delta t_j^p < \Delta_0)$$

где Δ_0 наперед заданный разрыв между двумя соседними моментами времени выпусков плавов, восстанавливается исходная информация для построения $\Gamma_{\mu+1}$ графика.

Если

$$(\mu = N) \vee (\max_{\rho=1(1)\mu} \min_{j=1(1)[\omega-1]} \Delta t_j^p \geq \Delta_0)$$

то управление передается на подпрограмму выдачи графика. Подпрограмма выдачи графика по первому ПСЧ наилучшего графика Γ_{θ} восстанавливает информацию о расписании Γ_{θ} и, преобразовав информацию к виду, удобному для пользования в заводских условиях, выдает расписание Γ_{θ} .

Задача 2. По технологическим условиям иногда требуется построить такое расписание Γ_{θ} , чтобы моменты окончания плавок распределялись в соответствии с наперед заданными числами

$A_1, A_2, \dots, A_{\omega}$, где $A_e > t_0$. Необходимо, проще говоря, такое расписание, по которому моменты окончания плавок были бы как можно ближе к наперед заданным числам. Пусть числа A_e упорядочены по величине: $A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq A_{\omega}$

По описанному в задаче 1 способу строим графики $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{\mu}$. После построения очередного графика Γ_{μ} и упорядочения моментов окончания плавок $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{\omega}$, оценивается качество расписания:

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{\omega} (t_j^{\mu} - A_j)^2} = \delta_{\mu}$$

Расписание Γ_{α} считается лучше расписания Γ_{β} , если $\delta_{\alpha} < \delta_{\beta}$. Последовательные построения расписаний Γ_{μ} и выбор расписания с наименьшим δ_{ρ} , $\rho = 1(1)\mu$ проводятся до тех пор, пока

$$(\mu = N) \vee (\min_{\rho=1(1)\mu} \delta_{\rho} < \delta_0),$$

где δ_0 - наперед заданная величина допустимого отклонения моментов выпусков плавок $t_1, t_2, \dots, t_{\omega}$ от заданных чисел $A_1, A_2, \dots, A_{\omega}$.

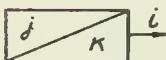
Наилучший из построенных графиков Γ_{θ} при $\delta_{\theta} = \min_{\rho=1(1)\mu} \delta_{\rho}$ выдается на печать описанным в задаче 1 способом.

Ниже приводится блок-схема программы построения расписания. Программа составлена для ЦВМ ВЦ СО АН СССР. Программы за-

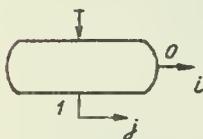
дачи 1 и задачи 2 различаются только подпрограммами критериев. Подпрограмма критерия задачи 1 описана блоками 33-37, подпрограмма критерия задачи 2 описана блоками 38-44. Для смены критериев оценки графика Γ_{μ} достаточно изменить выход из блока 23. Блоки 3-22 осуществляют построение графика Γ_{μ} . Блок 25 настраивает подпрограмму построения графика Γ_{μ} для построения рабочего графика Γ_{θ} , заменяет блок 14 блоком 28, который выписывает необходимую информацию о рабочем графике Γ_{θ} . В приведенной блок-схеме опущены некоторые вспомогательные блоки, блоки контроля решения. В блок-схеме применяются следующие обозначения:



- стандартный блок выхода.



- стандартный блок передачи управления блоку i с настройкой стандартного блока выхода j для передачи управления блоку k .

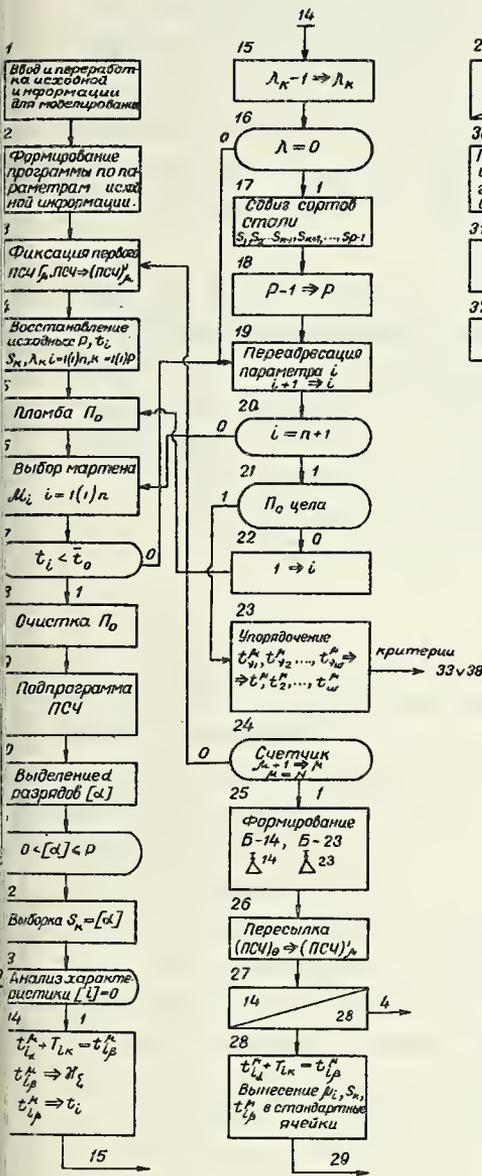


- логический блок. Передача управления блоку i в случае ложности предложения записанного в блоке обозначается: $o \rightarrow i$. В случае истинности предложения выход обозначается: $i \rightarrow j$.

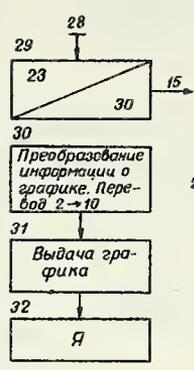


- функциональный блок номер k , назначение описывается.

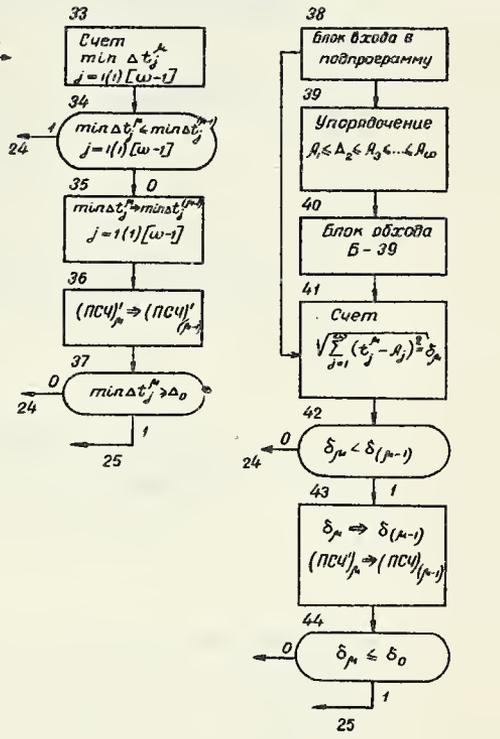
Программа построения графика



Подпрограмма критерия-I



Подпрограмма критерия I



Л и т е р а т у р а

1. Н.П.Бусленко, Д.И.Голенко, - Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), Физматгиз, 1962.
И.М.Соболь, В.Г.Срагович,
Ю.А.Шрейдер
2. Н.П.Бусленко - Моделирование производственных процессов на электронных цифровых машинах. Сб. "Проблемы кибернетики", выпуск 9, Физматгиз, 1964.
3. Г.А.Алиев, Н.П.Бусленко, - Моделирование производственного процесса автоматизированного стана печной сварки труб. Сб. "Проблемы кибернетики", выпуск 9, Физматгиз, 1964.
Г.П.Климов, А.И.Назаренко

М.К.Калмык

ОПЫТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТРУДОЕМКОСТИ РАБОТ ПО ПОДДЕРЖАНИЮ
ВЫРАБОТОК В УГОЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

В угольной промышленности все более широкое применение находят новые математические методы (программирование, корреляционный и дисперсионный анализ и т.д.). Более широкое распространение получает и классический "аналитический" (по выражению акад.Шевякова Л.Д. /1/) метод с использованием высшей алгебры и функционального анализа.

В настоящей работе рассмотрен вопрос об определении трудоемкости поддержания только наклонных выработок и выведены аналитические формулы для установления объемов работ по поддержанию (в метро-годах) наклонных выработок для самых разнообразных горногеологических и горнотехнических условий применительно к разработке пологих пластов Донбасса.

Поддержание выработок при современных условиях разработки и способах подготовки пласта имеет большое значение в период эксплуатации шахт Советского Союза. Расходы на поддержание выработок в нормальных условиях (по трудоемкости и стоимости работ) весьма значительны. Так, трудоемкость работ по поддержанию выработок составляет в среднем 15-30% от всей суммарной трудоемкости работ по отдельно взятому пласту, из них 5-25% приходится на

поддержание штреков и 7-10% - на поддержание наклонных выработок. Естественно, что вопрос поддержания штреков более существенен и важен при разработке пластов. Этому вопросу посвящено большое число исследований. Но, придавая большое значение вопросу поддержания штреков, нельзя игнорировать вопрос о поддержании наклонных выработок (капитальных и панельных бремсбергов с ходками и уклонов). А этот последний почти полностью выпал из поля зрения исследователей, хотя, как уже отмечено, удельный вес затрат на поддержание наклонных выработок также существенен. До сих пор во всех проектных и научно-исследовательских работах при проведении технико-экономических расчетов объемы работ и трудоемкость по поддержанию наклонных выработок определялись весьма приблизительно и ориентировочно. При этом не учитывались способ подготовки пласта, порядок отработки этажей или ярусов и система разработки, а также объемы и стоимость работ при нахождении выработок в нетронutom массиве угля или в выработанном пространстве, так как отсутствовала какая-либо методика по этому вопросу. В выполненной работе приводится методика определения трудоемкости работ по поддержанию наклонных выработок и выведены формулы для определения объемов работ по поддержанию при различных способах подготовки и отработки пласта и разных горногеологических и горнотехнических условиях (мощность пласта, длина лавы и т.д.). Установленные зависимости и выведенные формулы могут быть использованы в проектных и технико-экономических работах.

Вначале рассмотрено поддержание капитальных и панельных наклонных выработок, затем промежуточных бремсбергов с ходками.

А. Поддержание капитальных и панельных наклонных выработок

Определение трудоемкости поддержания наклонных выработок (капитальных и панельных бремсбергов и ходков при них, а также уклонов), складывается из следующих этапов:

1. Определение объемов работ по поддержанию, т.е. количества метро-лет поддержания наклонных выработок, в том числе отдельно в период нахождения их в нетронutom массиве угля и в выработанном пространстве (предохраняемых лишь целиками).

2. Определение трудовых затрат на поддержание 1 п.м. наклонной выработки в год (в чел.-сменах) и суммарных трудовых затрат по поддержанию всех наклонных выработок за весь период их службы.

3. Определение относительной трудоемкости работ по поддержанию наклонных выработок (в чел.-сменах), приходящейся на 1000 тонн угля, в зависимости от промышленного запаса угля в одной бремсберговой панели (или всей бремсберговой части шахтного поля при этажном способе подготовки).

Рассмотрим эти этапы последовательно.

1. Определение количества метро-лет поддержания наклонных выработок

Вопросы поддержания наклонных выработок были затронуты в работах к.т.н.Р.А.Селецкого /2,3/, а также в работе с участием автора /4/.

Основной недостаток первой из указанных работ /2/ заключался в следующем: автор рассматривал все вопросы проведения, поддержания и транспорта по выработкам, как при этажном, так и панельном способах подготовки только в технических единицах. Например, проведение в метрах, поддержание в метро-годах и транспорт в тонно-километрах. Для производства же технико-экономических расчетов, производимых обычно в рублях или, как в настоящей работе, в затратах рабсилы (в чел.-сменах), эти расчеты не могут быть использованы, так как в различных условиях (например, находится ли выработка в нетронутом массиве угля или же в угольных целиках, среди выработанного пространства) стоимость в рублях и затраты в человеко-сменах будут различны для одной и той же выработки. Это же относится к подземному транспорту, где не общее количество тонно-километров в конечном счете имеют решающее значение, а стоимость 1 ткм, которая, как известно, зависит в первую очередь от суточной производительности. То же можно сказать о протяженности выработки, где главным фактором является не столько протяженность их, сколько объем проведенных выработок, зависящий не только от длины, но и от сечения.

В двух других работах /3,4/ количество метро-лет поддержания наклонных выработок определялось усредненно.

В настоящей работе впервые выведены конкретные зависимости по поддержанию наклонных выработок, удобные для технико-экономических расчетов.

Рассмотрим отдельно случаи поддержания капитального бремсберга при этажном и панельном способах подготовки.

Этажный способ подготовки

Количество метро-лет поддержания капитального бремсберга для случая, когда он поддерживается на всю длину в течение всего срока отработки бремсберговой части шахтного поля /2/ равно (случай "а"):

$$R_{к.бр.}^a = \frac{H}{2} \cdot \frac{T_{ш}}{2} \cdot \beta_э, \text{ м-лет}, \quad (1)$$

где:

H - размер всего шахтного поля по падению, м ;

$\frac{H}{2}$ - длина бремсберговой части шахтного поля по падению, м;

$T_{ш}$ - срок службы шахты, лет ;

$\frac{T_{ш}}{2}$ - срок службы всей бремсберговой (или уклонной) части шахтного поля, лет ;

$\beta_э$ - коэффициент, учитывающий длину ходков при капитальном бремсберге; в зависимости от количества ходков при бремсберге $\beta_э = 2$ или $\beta_э = 3$.

Для более редкого случая, когда капитальный бремсберг одновременно погашается по мере отработки этажей (случай "б")

$$R_{к.бр.}^б = \beta_э \cdot \frac{H \cdot T_{ш}}{8} \left(1 + \frac{2}{n}\right), \text{ м-лет} \quad (2)$$

где n - число этажей в шахтном поле.

Ниже будет рассмотрен только случай "а", имеющий преимущественное распространение.

В зависимости от количества лав, расположенных в этаже, порядке их отработки и способа подготовки пласта, могут быть 11 ти-

повых случаев. Рассмотрим вопрос поддержания бремсбергов применительно к ним.

1. Вариант сплошной системы разработки с двумя лавами в этаже (прямой порядок отработки этажа, рис. 1)

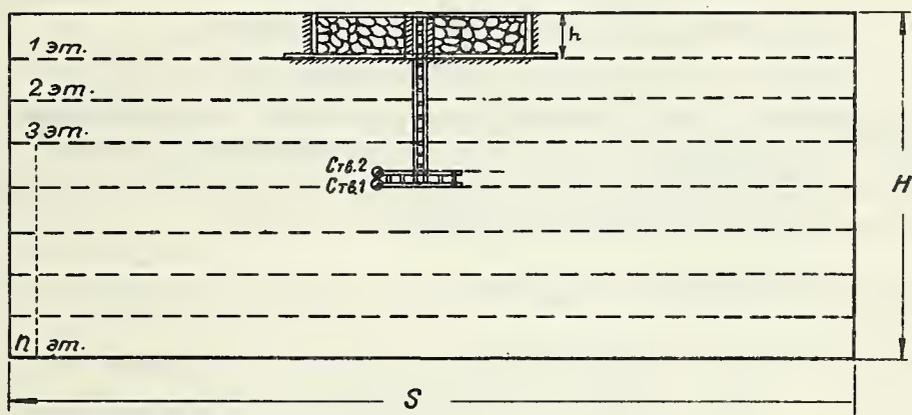


Рис. 1

Из всего количества метро-лет поддержания капитального бремсберга ($R_{к.бр.} = \frac{HTш \cdot \beta_3}{4}$) часть его поддерживается в период эксплуатации в нетронутым массиве угля, а часть в выработанном пространстве (при наличии предохранительных целиков).

1-а. Количество метро-лет поддержания бремсберга в нетронутым массиве угля

Обозначим:

n - число этажей в шахтном поле;

$\frac{n}{2}$ - число этажей в бремсберговой части шахтного поля (или уклонной);

h - наклонная высота этажа, м ;

l - длина лавы, м ;

$h = (e + \varepsilon)$ - где ε - дополнительная величина, учитывающая ширину просеков, штреков, предохранительных около - штрековых целиков угля;

t_3 - срок службы одного этажа (в годах);

$R_{к.бр.}^{н.м.}$ - количество метро-лет поддержания капитального бремсберга в нетронutom массиве угля;

$R_{к.бр.}^{в.п.}$ - то же, но в выработанном пространстве.

Очевидно, что при прямом порядке отработки 1-й (верхний) этаж вообще не будет поддерживаться в массиве угля (обозначим его h_1), второй этаж (h_2) будет поддерживаться в течение срока отработки первого этажа (т.е. t_3 лет), третий этаж (h_3) - в течение $2 \cdot t_3$ лет и т.п. Поэтому

$$R_{к.бр.}^{н.м.} = h_2 t_3 + 2h_3 t_3 + 3h_4 t_3 + \dots + h_{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2} - 1\right) t_3, \text{ м-лет},$$

где: $h_{\frac{n}{2}}$ - самый нижний этаж бремсберговой части шахтного поля;

$\left(\frac{n}{2} - 1\right)$ - число этажей в бремсберговой части шахтного поля (без 1-го этажа), которые в какой-то период времени поддерживаются в массиве угля.

Отсюда:

$$R_{к.бр.}^{н.м.} = h t_3 \left[1 + 2 + 3 + \dots + \left(\frac{n}{2} - 1\right)\right], \text{ м-лет}.$$

В этой прогрессии число членов будет $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$, поэтому

$$\begin{aligned} R_{к.бр.}^{н.м.} &= h \cdot t_3 \left[1 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)\right] \left(\frac{n}{2} - 1\right) \frac{1}{2} = \\ &= h t_3 \left(\frac{n^2}{8} - \frac{2n}{8}\right) = n \cdot h \cdot n \cdot t_3 \left(\frac{1}{8} - \frac{2}{8n}\right). \end{aligned}$$

Но так как $n \cdot h = H$ (размер шахтного поля по падению) и

$t_3 \cdot n = T_{ш}$ (срок службы шахты), то

$$R_{к.бр.}^{н.м.} = \frac{HT_{ш}}{8} \left(1 - \frac{2}{n}\right), \text{ м-лет}. \quad (3)$$

1-б. Количество метро-лет поддержания бремсберга в выработанном пространстве (в целиках) получено аналогично:

$$R_{к.бр.}^{в.п.} = \frac{HT_{ш}}{8} \left(1 + \frac{2}{n}\right), \text{ м-лет.} \quad (4)$$

Легко убедиться, что общее количество метро-лет поддержания бремсберга составит:

$$R_{к.бр.} = \frac{HT_{ш}}{8} \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{HT_{ш}}{8} \left(1 + \frac{2}{n}\right) = \frac{HT_{ш}}{4}, \text{ м-лет,}$$

что соответствует формуле (1).

Так как в отобранных для исследования вариантах систем разработки срок службы шахтного поля и число этажей неизвестны, то надо " $T_{ш}$ " и " n " выразить через другие известные величины.

Нам известны:

H - длина шахтного поля по падению (в расчетах $H = 2000\text{м}$);

$S_{ш}$ - длина шахтного поля по простиранию ($S_{ш} = 5000 \text{ м}$);

z - суточное подвигание лавы, м/сутки ;

$t_э$ - время отработки этажа. При двухкрылой отработке этажа

$$t_э = \frac{S_{ш}}{2} : (300 \cdot z) = \frac{S_{ш}}{600 \cdot z} \text{ лет,}$$

где: $(300 \cdot z)$ - годовое подвигание лавы, м/год.

Время поддержания всего бремсберга составит

$$T_{бр.} = t_э \cdot \frac{n}{2} = \frac{T_{ш}}{2} \text{ лет,}$$

где $\frac{n}{2}$ - число этажей в бремсберговой части шахтного поля или в уклонной, откуда срок службы шахты

$$T_{ш} = 2 \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{S_{ш}}{600 \cdot z} = \frac{n \cdot S_{ш}}{600 \cdot z} \text{ лет.}$$

На основании формулы (1) количество метро-лет поддержания капитального бремсберга составит:

$$R_{бр.} = \frac{H}{2} \left(\frac{T_{ш}}{2}\right) \beta_э = \beta_э \frac{H}{2} \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{S_{ш}}{600 \cdot z}\right) = \frac{H \cdot n \cdot S_{ш}}{2400 \cdot z} \cdot \beta_э.$$

В свою очередь число этажей в бремсберговой части шахтного поля $\left(\frac{n}{2}\right)$ равно: $\frac{n}{2} = \frac{H}{2} : (\varrho + \varepsilon) = \frac{H}{2(\varrho + \varepsilon)},$

где ℓ - длина лавы, м ;

$(\ell + \varepsilon)$ - наклонная высота этажа (учитывает ширину штреков, просеков и предохранительных околострековых целиков).

Таким образом, общее количество метро-лет поддержания капитального бремсберга составит

$$R_{к.бр.} = \frac{H \cdot S_{ш}}{1200 \cdot z} \cdot \frac{n}{2} \cdot \beta_3 = \beta_3 \frac{H^2 \cdot S_{ш}}{2400 \cdot z (\ell + \varepsilon)} \text{ м-лет,} \quad (5)$$

в том числе: а) в нетронутым массиве угля поддержание бремсберга составит:

$$R_{к.бр.}^{н.м.} = \frac{H \cdot S_{ш}}{4800 \cdot z} \left(\frac{H}{\ell + \varepsilon} - 2 \right) \beta_3 \text{ м-лет,} \quad (6)$$

б) в выработанном пространстве

$$R_{к.бр.}^{в.п.} = \frac{H \cdot S_{ш}}{4800 \cdot z} \left(\frac{H}{\ell + \varepsilon} + 2 \right) \beta_3 \text{ м-лет,} \quad (7)$$

Удобные для расчета вариантов формулы (5), (6) и (7) соответственно преобразованы из формул (1), (3) и (4).

2. Аналогично можно получить, что для случая отработки 2-х лав в этаже обратным порядком отработки (столбовая система разработки "лава-этаж"), количество метро-лет поддержания капитального бремсберга с ходами составит:

а) в нетронутым массиве угля

$$R_{к.бр.}^{н.м.} = \beta_3 \frac{H \cdot S_{ш}}{4800 \cdot z} \left(\frac{H}{\ell + \varepsilon} + 2 \right) \text{ м-лет,} \quad (8)$$

б) в выработанном пространстве

$$R_{к.бр.}^{в.п.} = \beta_3 \frac{H \cdot S_{ш}}{4800 \cdot z} \left(\frac{H}{\ell + \varepsilon} - 2 \right) \text{ м-лет,} \quad (9)$$

3. Для случая, когда при прямом порядке отработки этажа он делится на подэтажи, и следовательно, в этаже обрабатывается в зависимости от числа подэтажей одновременно 4 (или 6) лав.

Сюда относятся: а) все варианты сплошной системы разра -

ботки с делением этажа на подэтажи и б) столбовой системы разработки с делением этажа на подэтажи и выемкой на передний промежуточный бремсберг выемочных полей.

В этом случае поддержание капитального бремсберга в массиве и выработанном пространстве соответственно составит:

$$R_{к.бр.}^{н.м.} = \frac{H \cdot S_{ш}}{4800 \cdot z} \left[\frac{H}{\mu(e+\varepsilon)} - 2 \right] \cdot \beta_3 \text{ м-лет}, \quad (10)$$

$$R_{к.бр.}^{в.п.} = \frac{H \cdot S_{ш}}{4800 \cdot z} \left[\frac{H}{\mu(e+\varepsilon)} + 2 \right] \cdot \beta_3 \text{ м-лет}, \quad (11)$$

где μ - число подэтажей в этаже.

Следует указать, что при наличии 2-х ходков при капитальном бремсберге (когда $\beta_3 = 3$), один ходок (а иногда и оба) можно по мере отработки этажей погашать. Тогда в расчетах можно принимать, что $\beta_3^{н.м.} = 3$, а $\beta_3^{в.п.} = 2$ (или же $\beta_3^{в.п.} = 1$).

4. Для системы разработки длинные столбы по простиранию с делением этажа на подэтажи и отработкой выемочных полей обратным ходом (от границ этажа) поддержание бремсберга в массиве и выработанном пространстве составит:

$$R_{к.бр.}^{н.м.} = \frac{H \cdot S_{ш}}{4800 \cdot z} \left[\frac{H}{\mu(e+\varepsilon)} + 2 \right] \cdot \beta_3 \text{ м-лет}, \quad (12)$$

$$R_{к.бр.}^{в.п.} = \frac{H \cdot S_{ш}}{4800 \cdot z} \left[\frac{H}{\mu(e+\varepsilon)} - 2 \right] \cdot \beta_3 \text{ м-лет}. \quad (13)$$

5. Для варианта столбовой системы разработки с делением этажа на подэтажи и отработкой выемочных полей на задний участковый бремсберг, когда сами выемочные поля в этаже отработываются прямым порядком отработки, а в пределах выемочного поля

имеем обратный порядок отработки (рис.2),

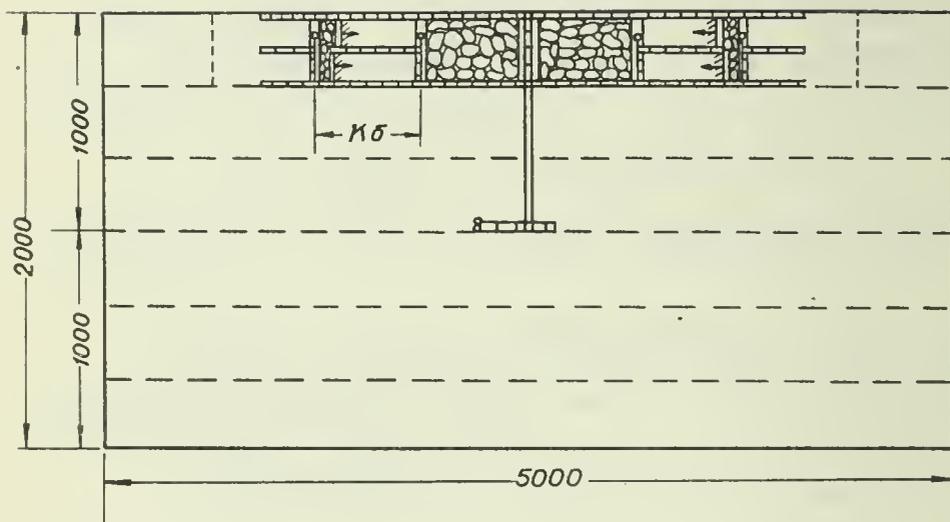


Рис.2

поддержание капитального бремсберга в массиве угля равно:

$$\sum R_{к.бр.}^{н.м.} = R_{к.бр.}^{н.м.} + R_{гол.}, \quad (14)$$

где: $R_{к.бр.}^{н.м.}$ - соответствует формуле (10);

$R_{гол.}$ - то дополнительное количество метро-лет поддержания бремсберга в массиве, которое получается за счет того, что, хотя этаж отработывается прямым ходом, первое выемочное поле (также как и последующие) отработывается обратным ходом, что удлиняет срок поддержания капитального бремсберга в массиве на период отработки первого выемочного поля.

Если обозначить количество выемочных полей в этаже K_B , то при расстоянии между промежуточными бремсбергами K_δ получим, что $K_B = \frac{S_{ш}}{K_\delta}$, а срок отработки одного выемочного поля

составит $t_{в.п.} = t_3 : \frac{K_B}{2} = \frac{2t_3}{K_B}$ лет.

Количество метро-лет поддержания бремсберга при отработке всех близлежащих к бремсбергу выемочных полей (а их число $\frac{n}{2}$) составит:

$$R_{доп.} = \frac{n}{2} h \cdot t_{в.п.} = \frac{n}{2} \cdot h \cdot \frac{2t_3}{K_B} = \frac{n}{2} \cdot t_3 \cdot \frac{H}{n} \cdot \frac{2}{K_B} =$$

$$= \frac{T_{ш}}{2} \cdot \frac{H}{n} \cdot \frac{2}{K_B} = \frac{S_{ш} \cdot n}{600 \cdot z} \cdot \frac{H}{n \cdot K_B} = \frac{H \cdot S_{ш}}{600 \cdot z \cdot K_B} \quad (14-a)$$

Отсюда: $\sum R_{к.бр.}^{н.м.} = R_{к.бр.}^{н.м.} + R_{доп.} =$

$$= \left[\frac{HT_{ш}}{8} \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{H \cdot S_{ш}}{600 \cdot z \cdot K_B} \right] \cdot \beta_3 =$$

$$= \left\{ \frac{H \cdot S_{ш}}{4800 \cdot z} \left[\frac{H}{\mu(e+\varepsilon)} - 2 \right] + \frac{H \cdot S_{ш}}{600 \cdot z \cdot K_B} \right\} \beta_3 = \frac{H \cdot S_{ш}}{4800 \cdot z} \beta_3 \left[\frac{H}{\mu(e+\varepsilon)} - 2 + \frac{8}{K_B} \right] \quad (15)$$

или вместо последнего слагаемого в скобках $\frac{8}{K_B}$ можно поставить $\frac{8 \cdot K_B}{S_{ш}}$.

Поддержание капитального бремсберга в выработанном пространстве соответственно будет равно $\sum R_{к.бр.}^{в.п.} = R_{к.бр.}^{в.п.} - R_{доп.} =$

$$= \frac{H \cdot S_{ш}}{4800 \cdot z} \beta_3 \left[\frac{H}{\mu(e+\varepsilon)} + 2 - \frac{8}{K_B} \right] \text{ м-лет.} \quad (16)$$

6. Для варианта столбовой системы разработки с делением этажа на подэтажи и выемкой с двухсторонними промежуточными бремсбергами количество метро-лет поддержания капитального бремсберга в массиве угля составит:

$$R_{к.бр.}^{н.м.} = \frac{HT_{ш}}{8} \left(1 - \frac{2}{n}\right); \text{ где } \frac{T_{ш}}{2} = T_{бр.части} = \frac{t_3 \cdot n}{2} =$$

$$= \frac{S_{ш}}{1200 \cdot z} \cdot \frac{n}{2} = \frac{S_{ш}}{2400 \cdot z} \cdot \frac{H}{\mu(e+\varepsilon)} = \frac{H \cdot S_{ш}}{2400 \cdot z \cdot \mu(e+\varepsilon)}.$$

Отсюда:

$$\sum R_{к.бр.}^{н.м.} = \frac{T_{ш}}{2} \cdot \frac{H}{4} \left[1 - \frac{2 \cdot \mu(e+\varepsilon)}{H} \right] =$$

$$= \frac{H \cdot S_{ш}}{9600 \cdot z} \left[\frac{H}{\mu(e+\varepsilon)} - 2 \right] \cdot \beta_3 \text{ м-лет.} \quad (17)$$

Для выработанного пространства

$$\sum R_{к.бр.}^{в.п.} = \frac{H \cdot S_{ш}}{9600 \cdot z} \left[\frac{H}{\beta_{\mu}(\rho + \varepsilon)} + 2 \right] \text{ м-лет.} \quad (18)$$

Б. Панельный способ подготовки

Количество метро-лет поддержания всех панельных бремсбергов (с ходками), по аналогии с этажным способом, очевидно, будет равно:

$$\sum R_{пан.бр.} = \frac{H \cdot T_{ш}}{4} \cdot \beta_{п} \text{ м-лет,} \quad (19)$$

где $\beta_{п}$ - учитывает количество ходков при одном панельном бремсберге.

Соответственно для панельного уклона

$$\sum R_{пан.укл.} = \frac{H T_{ш}}{4} \left(1 + \frac{2}{n_{я}} \right) \beta_{п} \text{ м-лет,} \quad (20)$$

где $n_{я}$ - число ярусов в панели.

Количество метро-лет поддержания одного панельного бремсберга составит (рис.3):

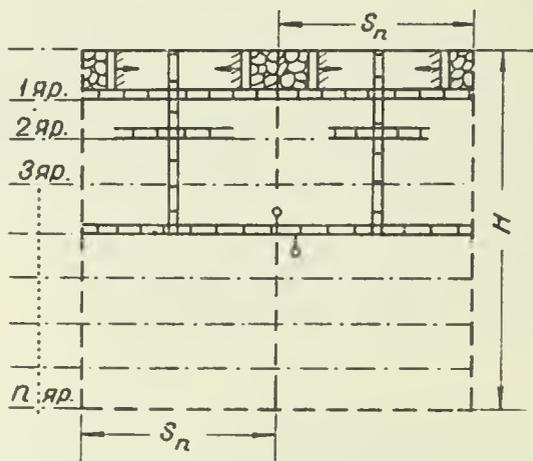


Рис.3

$$R_{\text{пан.бр.}} = \frac{H}{2} \cdot T_n = \frac{H}{2} (t_{\text{я}} \cdot \frac{n_{\text{я}}}{2}) \beta_n =$$

$$= \frac{H}{2} \frac{S_n}{2 \cdot (300 \cdot z)} \cdot \frac{n_{\text{я}}}{2} \cdot \beta_n = \frac{H \cdot S_n \cdot n_{\text{я}}}{2 \cdot 1200 \cdot z} \beta_n ;$$

где T_n - время отработки панели (лет);

$t_{\text{я}}$ - время отработки одного яруса (лет);

S_n - размер панели по простиранию (м) ;

$300 \cdot z$ - годовое подвигание очистного забоя в ярусе (z - точное подвигание в метрах).

Остальные обозначения те же, что и при этажном способе.

Если $\frac{n_{\text{я}}}{2} = \frac{H}{2(\varrho + \varepsilon)}$ и $n_{\text{я}} = \frac{H}{\varrho + \varepsilon}$, где ϱ и ε

те же значения, что и выше, значит

$$R_{\text{пан.бр.}} = \frac{H}{2} \cdot \frac{S_n \cdot \beta_n}{1200 \cdot z} \cdot \frac{H}{(\varrho + \varepsilon)} = \frac{S_n \cdot H^2 \cdot \beta_n}{2400 \cdot z (\varrho + \varepsilon)} . \quad (21)$$

Соответственно формулу (19) для поддержания всех панельных бремсбергов (а их в шахтном поле будет "К") можно представить

так:
$$\sum R_{\text{пан.бр.}} = \frac{H}{2} \cdot \frac{T_{\text{ш}}}{2} \cdot \beta_n = \frac{H}{2} \cdot \frac{S_n \cdot K \cdot H}{1200 \cdot z (\varrho + \varepsilon)} \beta_n =$$

$$= \frac{S_n \cdot H^2 \cdot K \cdot \beta_n}{2400 \cdot z \cdot (\varrho + \varepsilon)} \quad \text{м-лет} . \quad (22)$$

В случае, когда в каждом крыле яруса отрабатываются одновременно 2 лавы-подъяруса (или 2 яруса), формулы (21) и (22) будут выглядеть так:

$$R_{\text{пан.бр.}} = \frac{S_n \cdot H^2 \cdot \beta_n}{2400 \cdot z \cdot m_{\text{я}} (\varrho + \varepsilon)} \quad \text{м-лет} , \quad (23)$$

$$\sum R_{\text{пан.бр.}} = \frac{S_n \cdot H^2 \cdot K \cdot \beta_n}{2400 \cdot z \cdot m_{\text{я}} (\varrho + \varepsilon)} \quad \text{м-лет} , \quad (24)$$

где $m_{\text{я}}$ - число подъярусов в ярусе (в этом случае

$$n_{\text{я}} = \frac{H}{m_{\text{я}} (\varrho + \varepsilon)}) .$$

Аналогично определено количество метро-лет поддержания панельных наклонных выработок, находящихся в нетронutom массиве и, отдельно, в выработанном пространстве (в угольных целиках) для разных вариантов столбовой и сплошной систем разработки.

В сводной таблице 1 приведены в общем виде формулы для всевозможных случаев (вариантов) систем разработки.

Таблица 1

Варианты систем разработки	Количество лав в крыле	Способ подготовки	Количество метро-лет поддержания наклонных выработок, в том числе:	
			в нетронутым массиве угля	в выработанном пространстве (в целиках)
1. Столбовая лава-ярус	1	панельный		
2. Столбовая лава-этаж	1	этажный		
3. Столбовая с делением на подэтажи и отработкой крыльев от границ	2	этажный	$R^{н.м.} = \frac{H \cdot S}{4800 \cdot z} \left[\frac{H}{\mu(e+\varepsilon)} + 2 \right] \cdot \beta$	$R^{в.п.} = \frac{H \cdot S}{4800 \cdot z} \left[\frac{H}{\mu(e+\varepsilon)} - 2 \right] \cdot \beta$
4. Столбовая с делением яруса на два подъяруса	2	панельный		
5. Сплошная лава-ярус	1	панельный		
6. Сплошная лава-этаж	1	этажный		
7. Столбовая с делением на подэтажи и отработкой на передний бремсберг	2	этажный	$R^{н.м.} = \frac{H \cdot S}{4800 \cdot z} \left[\frac{H}{\mu(e+\varepsilon)} - 2 \right] \cdot \beta$	$R^{в.п.} = \frac{H \cdot S}{4800 \cdot z} \left[\frac{H}{\mu(e+\varepsilon)} + 2 \right] \cdot \beta$
8. Сплошная с делением яруса на подъярусы	2	панельный		
9. Сплошная с делением этажа на подэтажи	2	этажный		
10. Столбовая с делением на подэтажи и выемкой на задний бремсберг	2	этажный	$R^{н.м.} = \beta \frac{H \cdot S}{4800 \cdot z} \times \left[\frac{H}{\mu(e+\varepsilon)} - 2 + \frac{\beta}{K_{в.п.}} \right]$	$R^{в.п.} = \beta \frac{H \cdot S}{4800 \cdot z} \times \left[\frac{H}{\mu(e+\varepsilon)} + 2 - \frac{\beta}{K_{в.п.}} \right]$
11. Столбовая с двухсторонними промежуточными бремсбергами	4	этажный	$R^{н.м.} = \beta \frac{H \cdot S}{9600 \cdot z} \times \left[\frac{H}{\mu(e+\varepsilon)} - 2 \right]$	$R^{в.п.} = \beta \frac{H \cdot S}{9600 \cdot z} \times \left[\frac{H}{\mu(e+\varepsilon)} + 2 \right]$

В приведенных в табл.1 формулах, помимо вышеуказанных обозначений,

S - размер по простиранию (м) либо этажа при этажном способе подготовки, либо панели - при панельном;

μ - число подэтажей в этаже или подъярусов в ярусе (для случаев лава-этаж или лава-ярус $\mu = 1$);

K_B - количество выемочных полей в этаже.

2 этап. Определение трудовых затрат (в чел.-сменах) на поддержание 1 п.м. наклонной выработки в год

Исходя из работ /3 и 5/, трудоемкость поддержания 1 п.м. в год наклонной выработки, закрепленной деревянной крепью и находящейся в целиках угля в зоне влияния выработанного пространства (это имеет место при прямом порядке отработки яруса или этажа от наклонной выработки к границам), составляет:

$$z^{(дер)} = F \cdot m \cdot k \left(\frac{560}{v_{cp} + 200} + 0,2 \right) \quad \text{чел.-смен/п.м. в год, (25)}$$

где

F - сечение выработки (m^2 в свету) ;

m - мощность пласта, м ;

v_{cp} - среднее расстояние от наклонной выработки до очистного забоя, м.

(Однако при $v_{cp} \geq 500$ м, выражение в скобках должно приниматься равным 1, т.е. трудовые затраты на поддержание 1 п.м. наклонной выработки при среднем расстоянии до очистных забоев 500 м и более остаются постоянными);

k - коэффициент, учитывающий влияние устойчивости пород. В зависимости от устойчивости пород кровли и почвы, коэффициент " k " принимается:

$$K_{уст.} = 0,35 ; \quad K_{cp.уст.} = 1,0 ; \quad K_{неуст.} = 2,0.$$

Для случая, когда наклонная выработка закреплена металлом (спецпрофиль), трудоемкость поддержания 1 п.м. в год этой выра-

ботки составляет /5/:

$$z_{н.в.}^{(мет)} = F \cdot m \cdot k \left(\frac{110}{v_{ср.}} + 0,78 \right) \quad \text{чел-смен на 1 п.м. в год} \quad (26)$$

В этой формуле также при $v_{ср.} \geq 500$ м выражение в скобках принимается равным 1. На основании этой формулы трудовые затраты (в человеко-сменах) на поддержание 1 п.м. наклонной выработки в год, находящейся в выработанном пространстве (среди предохранительных угольных целиков), представлены в табл.2.

Таблица 2

Мощности пласта, м	Трудовые затраты (чел.-смен) на поддержание 1 п.м. наклонной выработки в год					
	Панельный способ			Этажный способ		
	Категория устойчивости пород			Категория устойчивости пород		
	неустойчивые	среднеустойчивые	устойчивые	неустойчивые	среднеустойчивые	устойчивые
0,5	5,6	2,8	0,98	5,21	2,61	0,91
0,75	8,4	4,2	1,47	7,82	3,91	1,37
1,0	11,2	5,6	1,96	10,22	5,12	1,82
1,25	14,0	7,0	2,45	12,8	6,4	2,28
1,3	14,56	7,28	2,55	13,56	6,77	2,37
1,5	16,8	8,4	2,94	15,36	7,68	2,73
1,6	17,94	8,97	3,14	16,7	8,35	2,92
1,75	19,6	9,8	3,43	17,94	8,97	3,19

Для наклонной выработки, находящейся в нетронutom массиве угля, согласно той же работы /5/, трудовые затраты (в чел.-сменах) на поддержание 1 п.м. наклонной выработки в год принимаются в размере 10% от трудовых затрат для случая нахождения выработки в выработанном пространстве при мощности пласта 1,0 м. Для других мощностей пласта эта трудоемкость не изменится, ибо на поддержание наклонной выработки в массиве угля мощность пласта влиять не будет. Такой же вывод был сделан В.И.Голомолзиным в работе /6/. Трудовые затраты на поддержание 1 п.м. наклонной выработки в год, закрепленной металлом и находящейся в нетронutom массиве угля,

приведены в табл.3.

Таблица 3

Способ подготовки пласта	Размер по простиранию одного крыла (м)		Трудовые затраты (чел.-смен) в зависимости от категории устойчивости боковых погод		
	панели	шахтного поля	неустойчивые	среднеустойчивые	устойчивые
1. Панельный	750	-	1,1	0,56	0,2
2. Этажный	-	2500	1,02	0,51	0,18

3-й этап. Определение суммарной трудоемкости работ по поддержанию наклонных выработок может быть выполнено для разных вариантов систем разработки на основании изложенного выше, для получения же относительной трудоемкости работ по поддержанию панельных и капитальных наклонных выработок (в человеко-сменах на 1000 т.угля) необходимо учесть промышленные запасы угля в шахтном поле (или панели) в зависимости от способа подготовки и мощности пласта.

В. Поддержание участковых бремсбергов и ходков при них

Эти работы учитывались только в тех вариантах этажного способа подготовки, где имеется деление этажа на подэтажи и выемочные поля. По условиям поддержания, согласно работ /5 и 7/, для определения трудоемкости поддержания участковых (промежуточных) бремсбергов, целесообразно все случаи с промежуточными бремсбергами объединить в 5 групп:

1 группа. Односторонние выемочные поля отрабатываются на бремсберг, поводимый в массиве угля через каждые 500 м (сплошная система разработки с отработкой лав на задний участковый бремсберг). Последний поддерживается весь период отработки этажа в выработанном пространстве (в целиках угля). Около него проводится один людской ходок.

II группа. Односторонние выемочные поля (также при сплошной

системе разработки) отрабатываются на передовой бремсберг, проводимый через каждые 200 м по простиранию и поддерживаемый в выработанном пространстве (в целиках угля).

Ш группа. Односторонние выемочные поля отрабатываются на передний бремсберг, проводимый через каждые 200 м по простиранию на длину 3-х подэтажей и поддерживаемый на 2/3 своей длины (на длину 2 подэтажей) в выработанном пространстве и на 1/3 - в массиве угля. К этой группе относятся комбинированные подэтажные /8/ варианты, например, применяющиеся на шахте "Горская" треста "Первомайскуголь" в Луганском районе Донбасса.

1У группа. Односторонние выемочные поля отрабатываются на передний бремсберг, проводимый через 750 м, с обеих сторон которого находится массив угля (при столбовой системе разработки). Около бремсберга проводится один людской ходок.

У группа. Сюда относится вариант с двухсторонними выемочными полями в крыле этажа размером 1500 м по простиранию. Бремсберг поддерживается в массиве угля. Около бремсберга проводят обычно два людских ходка.

Трудоемкость поддержания 1 п.м. наклонной выработки в год (в чел.-сменах), закрепленной металлической крепью, для случая поддержания выработок в выработанном пространстве (в целиках угля) можно определить по формуле (26), а для массива угля принять 10% от трудоемкости поддержания в выработанном пространстве для мощности пласта 1,0 м (см. выше).

Суммарная относительная трудоемкость поддержания промежуточных бремсбергов (в чел.-сменах), приходящаяся на 1000 т угля, в зависимости от устойчивости пород и варианта системы разработки составит:

1. Для 1 группы

а) при неустойчивых породах:

$$R_{бр.}^{н/у} = \frac{[3 \cdot \ell] \cdot 4 \cdot [F \cdot m \cdot k_y (\frac{110}{\alpha_{ср}} + 0,78)] \cdot [\frac{500}{300 \cdot \tau}] \cdot 1000}{2500 \cdot [2 \cdot \ell] \cdot m \cdot \delta \cdot c}, \text{ чел.-см.}$$

где:

ℓ - наклонная длина подэтажа, м (для упрощения принята равной длине лавы);

3. ℓ - суммарная длина одного промежуточного бремсберга с ходком, м ;
- 4 - количество таких промежуточных бремсбергов с ходком в крыле этажа ;
- 500 - длина одного выемочного поля по простиранию, м ;
- z - суточное подвигание лавы, м/сут. ;
300. z - годовое подвигание лавы, м/год ;
- $\frac{500}{300 \cdot z}$ - срок поддержания одного пром.бремсберга, лет ;
- $x=250$ - среднее расстояние от бремсберга до лавы, м .

В знаменателе формулы показан промышленный запас угля в крыле этажа (в тоннах), где :

- 2500 - длина крыла шахтного поля по простиранию, м ;
2. ℓ - наклонная длина этажа, м ;
- m - мощность пласта, м ;
- γ - объемный вес угля, т/м³ ($\gamma = 1,3$) ;
- C - коэффициент извлечения угля ($C = 0,9$) ;
- 1000 - коэффициент, учитывающий, что трудоемкость подсчитывается на 1000 т .

После упрощения трудоемкость на 1000 т составит :

$$R_{бр.}^{неуст.} = \frac{3.4 F \cdot K_y \left(\frac{110}{250} + 0,78 \right) 500 \cdot 1000}{2500 \cdot 2 \cdot 1,3 \cdot 0,9 \cdot 300 \cdot z} = \frac{43}{z}, \text{ чел-смен} \quad (27)$$

б) Соответственно для пород средней устойчивости :

$$R_{бр.}^{ср.уст.} = \frac{21,5}{z}, \text{ чел-смен} \quad (28)$$

в) Для устойчивых $R_{бр.}^{уст.} = \frac{7,52}{z}, \text{ чел-смен} \quad (29)$

2. Для II группы (при которой: суммарная длина одного промежуточного бремсберга - ℓ метров, количество пром.бремсбергов - 12, длина одного выемочного поля - 200 м, срок поддержания одно-

го бремсберга - $\frac{200}{300 \cdot z}$ лет, а $x = 100$ м ; остальные данные те же), трудоемкость поддержания на 1000 т угля составит:

а) для неустойчивых пород $R_{бр.}^{неуст.} = \frac{26,7}{z}$ чел-смен, (30)

б) для средней устойчивости $R_{бр.}^{ср.уст.} = \frac{13,4}{z}$ чел-смен, (31)

в) для устойчивых $R_{бр.}^{уст.} = \frac{4,7}{z}$ чел-смен (32)

3. Для III группы, при которой суммарная длина промежуточного бремсберга, поддерживаемая в выработанном пространстве - 2ℓ , а в массиве угля - ℓ м ; количество пром.бремсбергов - 12 ; длина одного выемочного поля - 200 м ; срок поддержания одного бремсберга $\frac{200}{300 \cdot z}$ лет и $x = 100$; количество подэтажей в этаже - 3 (это число участвует в подсчете пром.запаса угля в крыле этажа), а остальные длины те же - трудоемкость поддержания на 1000 т добычи составит:

а) для неустойчивых пород:

$$R_{бр.}^{неуст.} = \frac{35,6}{z} + \frac{1,8}{z} = \frac{37,4}{z} \text{ чел-смен,} \quad (33)$$

б) для средней устойчивости:

$$R_{бр.}^{ср.уст.} = \frac{17,8}{z} + \frac{0,9}{z} = \frac{18,7}{z} \text{ чел-смен,} \quad (34)$$

в) для устойчивых:

$$R_{бр.}^{уст.} = \frac{6,23}{z} + \frac{0,3}{z} = \frac{6,53}{z} \text{ чел-смен} \quad (35)$$

В каждом из этих значений первое слагаемое - это трудоемкость на поддержание бремсбергов в выработанном пространстве, а второе слагаемое - в массиве угля.

4. Для IV группы суммарная длина промежуточного бремсберга с ходком, поддерживаемая в массиве угля, - $3 \cdot \ell$ м ; количество пром.бремсбергов в крыле - 3 (иногда - 2); длина одного выемоч-

ного поля - 750 м; срок поддержания одного бремсберга $\frac{750}{300 \cdot z}$ лет;
 $x = 375$; остальные данные те же. Трудоемкость поддержания на
 1000 т добычи составит:

а) для неустойчивых пород

$$R_{бр.}^{неуст.} = \frac{4,27}{z} \text{ чел-смен,} \quad (36)$$

б) для средней устойчивости

$$R_{бр.}^{ср.уст.} = \frac{2,13}{z} \text{ чел-смен,} \quad (37)$$

в) для устойчивых

$$R_{бр.}^{уст.} = \frac{0,75}{z} \text{ чел-смен.} \quad (38)$$

Для варианта с количеством пром.бремсбергов в крыле - 2
 следует принять $\frac{2}{3}$ от трудоемкости, полученной по формулам (36)-
 -(38).

5. Для У группы, которая отличается от предыдущей (1У-й)
 только суммарной длиной пром.бремсбергов с ходками в крыле
 (5,2 . ℓ вместо 3. 3. ℓ), трудоемкость поддержания на
 1000 т добычи составит:

а) для неустойчивых

$$R_{бр.}^{неуст.} = \frac{4,74}{z} \text{ чел-смен,} \quad (39)$$

б) для средней устойчивости

$$R_{бр.}^{ср.уст.} = \frac{2,37}{z} \text{ чел-смен,} \quad (40)$$

в) для устойчивых

$$R_{бр.}^{уст.} = \frac{0,83}{z} \text{ чел-смен} \quad (41)$$

Подставив в полученные эмпирические формулы (27)-(41) со-
 ответствующие значения суточных подвиганий лав (z), можно оп-
 ределить трудоемкости поддержания промежуточных бремсбергов (и
 ходков при них) в чел-сменах. Следует отметить, что удельное
 значение трудоемкости работ только по поддержанию промежуточ-
 ных бремсбергов (и ходков) невелико и составляет от 0,5 до 1,0%

всей трудоемкости работ по панели (пласту), но не учитывать эти работы, как это часто бывает, методически неверно.

Разработанная методика определения трудоемкости поддержания наклонных выработок (капитальных и панельных бремсбергов и уклонов с ходками, а также участков бремсбергов) и приведенные формулы для разных вариантов систем разработки, способов подготовки и мощностей пласта и других условий могут быть использованы в технико-экономических и проектных расчетах, связанных с определением оптимальных условий разработки угольных пластов подземным способом.

Л и т е р а т у р а

1. Ш е в я к о в Л.Д. - Основы теории проектирования угольных шахт, Углетехиздат, 1958 г.
2. Р.А. С е л е ц к и й - Сравнение этажной и панельной схем подготовки шахтных полей для пологопадающих угольных месторождений. Кафедра РПМ, МГИ, 1949 г. (машинопись).
3. Р.А. С е л е ц к и й, А.П. К и л я ч к о в, В.Л. П о - п о в - Критический анализ схем вскрытия и подготовки шахтных полей пологопадающих месторождений Донбасса по материалам выполненных проектов глубоких шахт. Кафедра РПМ, МГИ, 1952 г.
4. Р.А. С е л е ц к и й, А.П. Б о б ы л е в, М.К. К а л - м ы к - Этажный и панельный способ подготовки шахтных полей в условиях пологопадающих пластов Донецкого бассейна. Кафедра РПМ, МГИ, 1960 г.
5. С.Д. С о н и н, Р.А. С е л е ц к и й, А.П. К и л я ч - к о в - Выбор рационального способа подготовки шахтного поля для одиночных пологих пластов Донецкого бассейна. Кафедра РПМ, МГИ, 1958 г.
6. Стоимостные параметры для проектирования шахт Донбасса. ИГД АН СССР, Госгортехиздат, 1960 г.
7. С.Д. С о н и н, А.П. К и л я ч к о в, М.К. К а л м ы к, С.И. З о р и н - Определение оптимальных размеров основных элементов сплошной, столбовой и комбинированной систем разработки пологих угольных пластов Донбасса и установление области применения этих систем разработки. Кафедра ТЭМ(п) Моск. Ин-та радиоэлектроники и горной электромеханики, 1962 г. (машинопись).
8. Б.К. К у к л и н - Анализ систем разработки пологих пластов Донбасса. ДонУТИ, Госгортехиздат, 1961 г.

М.И.Вирченко, В.П.Можин,
В.А.Семенова, В.Э.Шляпентох

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ КОРМОВОЙ БАЗЫ

Одной из важных задач планирования сельскохозяйственного производства является определение рациональной структуры кормовой базы. Планируемое производство кормов должно обеспечить полноценное кормление сельскохозяйственных животных, т.е. удовлетворение их потребностей в питательных веществах (кормовых единицах, переваримом протеине и др.) и разнообразии кормов. Кроме того, крайне важно, чтобы запас кормов не только отвечал зоотехническим требованиям, но и был максимально дешевым. Для решения такого рода экстремальных задач весьма эффективно могут быть использованы математические методы оптимального планирования и ЭВМ.

В литературе освещены методические вопросы применения линейного программирования для определения наилучшей структуры кормовой базы. Однако во многих работах приводятся условные примеры и расчеты. В данном исследовании излагается опыт экономико-математического моделирования на основе использования конкретных данных по ряду хозяйств Искитимского производственного управления Новосибирской области. В работе специально рассмат -

ривается вопрос об оценках оптимального плана, об их значении для экономико-математического анализа.

Опишем математическую постановку задачи. Пусть имеется S видов животноводческой продукции ($S = 1, \dots, z$), которая должна производиться в хозяйстве в заданных объемах. Известны потребность в питательных веществах (кормовых единицах и переваримом протеине) и требования к структуре кормовых рационов в расчете на 1 ц продукции. Содержание i -го питательного вещества ($i = 1, \dots, m$) в единице j -го корма ($j = 1, \dots, n, n+1, \dots, n+k$) обозначим через a_{ij} , а стоимость единицы j -го корма - через C_j . Корма в данном случае удобно разделить на 2 группы: по первым n кормам нет ограничений по возможным объемам их производства. Для k кормов такие ограничения имеются. В нашей задаче эти ограничения касаются сена с естественных сенокосов и зеленого корма с пастбищ, количество которых определяется имеющимися площадями пастбищ и сенокосов. Обозначим через B_j количество j -го корма ($j = n+1, \dots, n+k$), объем производства которого ограничен. Ограничение по площади пашни, предназначенной для производства кормов, в данном случае не ставилось, хотя оно легко может быть учтено в модели.

\underline{A}_{ij}^S и \bar{A}_{ij}^S отражают соответственно минимальную и максимальную потребность в i -м питательном веществе для производства заданного объема S -го вида продукции, которая может быть удовлетворена за счет отдельных видов или групп кормов. Через x_j^S обозначим количество j -го корма, используемого для производства S -го вида продукции.

Таким образом, необходимо найти минимум линейной формы

$$\sum_{S=1}^z \sum_{j=1}^{n+k} C_j x_j^S \text{ при условиях:}$$

$$1) \quad x_{j_{n+k}}^S \geq 0 \quad j = 1, 2 \dots n, n+1, \dots n+k;$$

$$2) \quad \underline{A}_{ij}^S \leq \sum_{j=1}^{n+k} a_{ij} x_j^S \leq \bar{A}_{ij}^S \quad i = 1, 2 \dots m; \quad S = 1, 2 \dots z;$$

$$3) \quad \sum_{S=1}^z x_j^S \leq B_j \quad j = n+1, \dots, n+k.$$

Первое условие – это условие неотрицательности переменных. Во втором условии отражены требования к общей потребности в кормовых единицах и переваримом протеине для каждого вида животноводческой продукции, а также к соотношению отдельных групп кормов в рационах. Чтобы учесть последнее требование, по группам кормов были заданы интервалы в виде минимальной и максимальной потребности в них для каждого вида продукции.

Третья группа ограничений относится к кормам, суммарное использование которых не должно превышать имеющиеся ресурсы.

Один из возможных вариантов решения задачи заключается в определении рационального набора кормов для отдельных видов продукции.

В качестве примера приведем расчет наиболее дешевого набора кормов для производства мяса в Ульбинском совхозе (по плановым данным на 1963 год). В расчетах мы руководствовались нормативами потребности в питательных веществах, принятыми Госэкономсоветом СМ для РСФСР, а также рекомендациями СибНИИЖА.

В частности, норма расхода кормовых единиц на 1 кг говядины (в живом весе) была принята равной 10,5г, норма расхода перевариваемого протеина на 1 кормовую единицу – 110 г. Затраты на производство отдельных кормов были взяты на уровне, запланированном в совхозе.

Характеристика культур, которые могут выращиваться на корма в данном хозяйстве, приводится в табл.1.

Производственным планом Ульбинского совхоза предусматривается производство 3559 ц говядины. В соответствии с принятыми нормативами для обеспечения производства этой продукции требуется 37369,5 ц кормовых единиц и 4100,64 ц перевариваемого протеина.

На основе рекомендаций, справочной литературы и советов практических работников при расчете данного рациона были использованы следующие интервалы по группам кормов (см.табл.2).

Из общей потребности в питательных веществах была вычтена та часть, которая удовлетворяется за счет молока и обраты, а также за счет кормов с естественных сенокосов и пастбищ. В связи с этим были скорректированы первоначально принятые интервалы

Таблица 1

Виды кормов	Обозначение искомых пере- менных	Количество пита- тельных веществ (в центнере)		Себе- стои- мость 1 ц (в руб.)
		кормовые единицы	переваримый протеин	
1. Рожь озимая	x_1	1,14	0,099	3,24
2. Пшеница яровая	x_2	1,18	0,140	3,55
3. О в е с	x_3	1,00	0,085	3,58
4. Г о р о х	x_4	1,17	0,195	2,81
5. Ячмень	x_5	1,13	0,095	3,27
6. Кукуруза на силос	x_6	0,15	0,011	0,42
7. Сахарная свекла	x_7	0,26	0,012	1,89
8. Однолетние травы - сено	x_8	0,47	0,068	1,82
9. Многолетние травы - сено	x_9	0,42	0,074	1,50
10. Однолетние травы на зеленый корм	x_{10}	0,16	0,021	0,42
11. Многолетние травы на зеленый корм	x_{11}	0,19	0,029	0,34
12. Кукуруза на зеленый корм	x_{12}	0,11	0,012	0,70
13. В и к а	x_{13}	1,10	0,215	3,53
14. Кормовые бобы	x_{14}	1,29	0,287	2,06

Таблица 2

Группы кормов	Удельный вес кор- мовых единиц в районе (в %)		Количество кормовых единиц (в центнерах)	
	наимень- шее	наиболь- шее	наименьшее	наибольшее
1. С е н о	2,0	13,0	747,39	4858,04
2. Зеленый корм	8,0	20,0	2989,56	7473,9
3. С и л о с	25,0	47,0	9342,38	17563,65
4. Концентраты	14,0	22,0	5231,73	8221,29
5. Сахарная свекла	3,0	7,0	1121,09	2615,87
6. М о л о к о	1,6	1,6	597,91	
7. О б р а т	1,4	1,4	523,17	

соответствующих групп кормов. Полученная в результате потребность в кормовых единицах и переваримом протеине, а также ограничения по отдельным группам кормов представлены в табл.3.

Таблица 3

Группа кормов	Кормовые единицы		Переваримый протеин
	минимум	максимум	
Общая потребность,	26297,16	-	2940,63
в том числе:			
1. Концентраты	5231,73	8221,29	-
2. С и л о с	9342,38	17563,65	-
3. Сахарная свекла	1121,09	2615,87	-
4. С е н о	0	1414,04	-
5. Зеленый корм	0	966,64	-

На основании этой таблицы и данных по питательности кормов можно составить систему неравенств.

1. Ограничения по общей потребности в кормовых единицах:

$$1,14x_1 + 1,18x_2 + x_3 + 1,17x_4 + 1,13x_5 + 0,15x_6 + 0,26x_7 + 0,47x_8 + 0,42x_9 + 0,16x_{10} + 0,19x_{11} + 0,11x_{12} + 1,1x_{13} + 1,29x_{14} \geq 26297,16.$$

2. Ограничения по переваримому протеину:

$$0,099x_1 + 0,140x_2 + 0,085x_3 + 0,195x_4 + 0,092x_5 + 0,011x_6 + 0,012x_7 + 0,068x_8 + 0,074x_9 + 0,021x_{10} + 0,029x_{11} + 0,012x_{12} + 0,215x_{13} + 0,287x_{14} \geq 2940,63.$$

3. Ограничения по концентратам:

$$8221,29 \geq 1,14x_1 + 1,18x_2 + x_3 + 1,17x_4 + 1,13x_5 + 1,1x_{13} + 1,29x_{14} \geq 5231,73.$$

4. Ограничения по силосу:

$$17563,65 \geq 0,15x_6 \geq 9342,38.$$

5. Ограничения по сахарной свекле:

$$2615,87 \geq 0,26x_7 \geq 1121,09.$$

6. Ограничения по селу:

$$1414,04 \geq 0,48x_8 + 0,42x_9 \geq 0.$$

7. Ограничения по зеленому корму:

$$966,64 \geq 0,16x_{10} + 0,19x_{11} \geq 0.$$

8. Ограничения по зернобобовым:

$$1,17x_4 + 1,1x_{13} + 1,29x_{14} \leq 0,4 \times (1,14x_1 + 1,18x_2 + x_3 + 1,17x_4 + 1,13x_5 + 1,1x_{13} + 1,29x_{14}).$$

После преобразования и приведения подобных членов данное ограничение примет вид:

$$0,456x_1 + 0,472x_2 + 0,400x_3 - 0,700x_4 + 0,452x_5 - 0,666x_{13} - 0,744x_{14} \geq 0.$$

Цель наших расчетов состоит в получении наиболее дешевого набора кормов, удовлетворяющего в то же время приведенным выше требованиям. Поэтому в модель включается так называемая целевая функция $f(x)$, в которой коэффициенты при неизвестных x_j представляют себестоимость одного центнера j -го корма.

$$f(x) = 3,24x_1 + 3,5x_2 + 3,5x_3 + 2,8x_4 + 3,27x_5 + 0,42x_6 + 1,89x_7 + 1,82x_8 + 1,5x_9 + 0,42x_{10} + 0,32x_{11} + 0,70x_{12} + 3,53x_{13} + 2,06x_{14} \rightarrow \min$$

Искомые значения переменных, т.е. x_1, x_2, \dots, x_{14} были найдены методами линейного программирования. Задача решалась на ЭВМ Вычислительного Центра СО АН СССР по программе, реализующей метод последовательного улучшения плана (программа составлена сотрудницей Института математики Р.А.Звягиной).

Рассчитанный оптимальный план производства кормов для получения запланированного объема говядины в совхозе Улыбинский представлен в табл. 4.

План производства кормов

Группы и виды кормов	Количество в ц	Кормовые единицы (в центнерах)		Переваримый протеин (в центнерах)		Себестоимость в рублях
		в 1ц	всего	удель- ный вес в %	всего	
1. С е н о			4858,1	12,5	593,5	
а) естественных се- нокосов	8610,0	0,40	3444,0	70,3	344,4	1,81
б) многолетних трав	3366,8	0,42	1414,1	29,2	249,1	1,5
2. Зеленый корм			7473,86	19,2	798,23	
а) естественных пастбищ	38278,0	0,17	66507,26	85,2	650,73	0
б) многолетних трав	5087,6	0,19	966,6	14,8	147,5	0,34
3. Концентраты			8221,3	21,3	1316,8	
а) пшеница	4180,3	1,18	4932,8	60,0	585,2	3,55
б) кормовые бобы	2549,2	1,29	3288,5	40,0	731,6	3,55
4. Сахарная свекла	4311,88	0,26	1121,1	3,0	51,74	2,06
5. Силос кукурузный	106848,8	0,15	16027,2	41,2	1175,3	1,89
6. Молоко	1865,5	0,32	597,91	1,5	59,79	0,42
7. Обрат	3741,0	0,14	523,17	1,3	115,1	8,51
Итого:			38822,64	100	4110,46	1,0
Потребность в питатель- ных веществах по норма- тиву			37369,5		4110,46	
Перерасход			1453,14			
						15584,1
						5050,2
						729,8
						14840,1
						14840,1
						5251,4
						8149,5
						60682,3
						15900,9
						3741,0
						131025,88

Таким образом, затраты на производство кормов составляют 131025,9 руб., в то время как по плану совхоза - 235917 руб., т.е. план, составленный с помощью методов математического программирования, оказался на 44,5% дешевле плана, составленного обычными методами в хозяйстве.

Выбранный запас кормов отвечает всем требованиям, которые поставлены в условиях задачи. Ими удовлетворяется общая потребность в переваримом протеине и потребность в кормовых единицах. При этом потребность в переваримом протеине удовлетворяется на ее нижней границе, в то время как по кормовым единицам получается определенный перерасход в размере 1453,4 ц. То обстоятельство, что потребность в протеине оказалась покрытой на уровне установленного минимума, а по кормоединицам оказался перерасход, обусловило прежде всего выбор культур с относительно высоким содержанием белка. На максимальном уровне выбрали концентраты, в том числе бобовые. Эта группа кормов обеспечивает 32% всей потребности в протеине, остальные 68% получают за счет кормов с меньшим содержанием белковых веществ, в том числе за счет сена - 14,4%, зеленого корма - 19,4%, силоса - 28,6%, остальная часть приходится на сахарную свеклу - 1,3%, молоко - 1,5% и обрат - 2,3%.

В максимальном количестве, соответствующем верхней границе интервалов, в кормовую базу оказались включенными, кроме концентратов, сено и зеленый корм. Эти группы кормов по содержанию переваримого протеина стоят выше силоса и сахарной свеклы. Как видно из таблицы, количество силоса в оптимальном плане является промежуточным между минимальным и максимальным уровнями. Сахарная свекла в рацион вошла в количестве, соответствующем нижней границе интервала, несмотря на то, что по содержанию питательных веществ в одном ц она стоит выше силоса. Очевидно, что такой выбор был обусловлен тем обстоятельством, что себестоимость центнера переваримого протеина в силосе равна 38,18 руб., а в сахарной свекле - 157,5 руб. Экономически целесообразно (с точки зрения минимизации затрат на корма) оказалось идти на определенный перерасход кормовых единиц.

При оценке полученных результатов решения некоторое сомнение в правомерности сделанного выбора может вызвать тот факт,

что в состав кормовой базы в большом количестве попали бобы, которые в условиях рассматриваемого хозяйства оказались менее эффективными с точки зрения себестоимости и урожайности, чем это предусматривалось планом.

Может возникнуть вопрос о реальности плановых показателей и в отношении некоторых других культур, включенных в задачу.

В связи с этим представлялось целесообразным провести расчет оптимальной кормовой базы не только на основе плановых, но и многолетних отчетных данных по себестоимости и урожайности кормовых культур. Этот расчет проводился по аналогичной методике. Его результаты приводятся в табл.5.

Как видно из таблицы, план, рассчитанный на основе многолетних данных по урожайности и себестоимости кормовых культур, отличается от аналогичных расчетов на основе плановых показателей. Изменилось соотношение различных видов кормов, из числа концентрированных кормов выпали бобы, их место заняла вика.

В целом затраты на производство кормов в данном варианте плана несколько возросли, однако и в этом случае они на 87 тыс.руб., или на 37%, меньше, чем это предусматривается планом хозяйства.

Одновременно с решением задачи по определению кормовой базы с минимальной себестоимостью были получены оценки каждого заданного ограничения (оценку получили кормовые единицы, переваримый протеин, ограничения по концентратам и т.д.), которые определяются всей совокупностью условий задачи и объективно ими обуславливаются.

Такого рода оценки, предложенные Л.В.Канторовичем, могут быть получены только с помощью математических методов оптимального планирования.

Оценки выражаются в тех единицах измерения, в которых задан функционал (наш функционал характеризует себестоимость, следовательно, оценки выражены в рублях). Оценки получают верхние и нижние границы интервалов заданных ограничений. Ненулевая оценка нижней границы означает, что уменьшение (увеличение)данного ограничения на единицу обеспечивает уменьшение (рост) суммарной себестоимости кормовой базы на размер данной оценки, а

Таблица 5

Виды и группы кормов	Количество в ц	Кормовые единицы		Переваримый протеин		Себестоимость в рублях	
		в ц	в %	в ц	Удельный вес в %	1ц	всего
1. Сено			13,0		802,15		
а) естественных сенокосов	1765,0	0,4	14,5	0,04	70,6	1,72	3085,8
б) многолетних трав	9885,8	0,42	85,5	0,074	731,55	1,16	11467,54
2. Зеленый корм			19,9		777,6		
а) естественных пастбищ	38278,0	0,17	87,1	0,016	650,73	0,23	1389,55
б) однолетних трав	6041,5	0,19	12,9	0,029	126,87		
3. Концентраты			21,9		1228,0		
а) пшеница яровая	4180,32	1,18	60,0	0,14	585,24	2,94	12290,14
б) вика	2389,56	1,29	40,0	0,287	642,76	3,9	11659,28
4. Сахарная свекла	4311,88	0,26	3,0	0,013	51,74	1,61	6942,13
5. Силос кукурузный	97842,38	0,15	39,2	0,011	1076,27	0,78	76610,58
6. Молоко	1875,0	0,32	1,6	0,034	59,79	11,5	21762,5
7. Обрат	3736,9	0,14	1,4	0,031	115,1	1,0	3736,9
Итого:					4110,64		148894,42
Потребность в питательных веществах по нормативу					4110,64		
Перерасход							

оценка верхней границы означает, что увеличение (уменьшение) этого ограничения на единицу обеспечит снижение (рост) себестоимости рациона на величину оценки. Нулевое значение оценки указывает, что изменение данного ограничения в определенных пределах не изменит значения функционала, т.е. себестоимости запаса кормов.

Использование данных оценок при экономическом анализе может быть в двух аспектах, а именно: оценки ограничений при анализе дают возможность проанализировать и количественно оценить основные пути удешевления кормовой базы для каждого конкретного условия. Это является основным аспектом использования оценок. Не менее важным является вопрос анализа экономической целесообразности замены одного вида корма другим внутри определенной группы, а также отдельных видов кормов, что уже связано с физиологической возможностью такой замены. И на это должен ответить зоотехник. Приведем таблицу оценок, полученных в нашем примере:

Виды ограничений	Оценка (в рублях)	
	нижняя	верхняя
	г р а н и ц ы	
Кормовые единицы	0	0
Переваримый протеин	38,18	0
Концентраты,	0	3,67
в т.ч. бобовые	0	5,38
С и л о с	0	0
Сахарная свекла	5,5	0
С е н о	0	3,16
Зеленый корм	0	4,04

Прежде всего обращает на себя внимание то, что оценки ограничений по общему содержанию кормоединиц в рационе и по силосу равны нулю. О чем это говорит? Начнем с ограничения по кормоединицам. Как видно из результатов решения задачи, в искомом запасе кормов из-за недостаточного содержания белка в отдельных кормах имеет место перерасход кормовых единиц. В таких условиях увеличение или уменьшение ограничения по общему содер-

жанию кормовых единиц (в сравнительно небольших размерах) не может повлиять на общую себестоимость кормовой базы. Таким образом, требования по общему количеству кормоединиц не связывают зоотехника, который может до известной степени не беспокоиться, приведут ли некоторые изменения и корректировка исходных условий задачи за счет изменения интервалов, за счет уменьшения себестоимости и соотношения между отдельными кормами к увеличению или уменьшению общего количества кормоединиц.

Не это в данных условиях важно. Борьба за снижение себестоимости кормовой базы должна идти прежде всего по линии уменьшения стоимости белка.

В известной мере аналогичная ситуация имеет место с силосом, который, как отмечалось выше, выбрался внутри заданного интервала. Поэтому опять-таки ограничения по силосу не связывают составителя рациона в том смысле, что он может осуществить в известных пределах, определяемых устойчивостью оценок и максимально возможным количеством его в рацион, определенные мероприятия, не беспокоясь при этом, ведут ли они к увеличению или уменьшению доли силоса в рационе, руководствуясь лишь тем, чтобы они способствовали общему уменьшению стоимости рациона.

Иначе дело обстоит с другими компонентами. Все они выбрались на границах своих интервалов (верхних или нижних) и поэтому получили оценку. Наибольшая оценка оказалась у переваримого протеина - 38,18 руб. на один центнер. Это означает, что белок является самым "узким" местом в рационе. Действительно, как уже отмечалось, потребность в протеине на минимальной границе была удовлетворена в значительной степени за счет кормов с малым содержанием переваримого протеина, что и привело к перерасходу кормов (в кормовых единицах). В определенных границах включение в рацион в том или ином виде протеина (например, в виде мочевины) будет выгодным, если затраты на центнер переваримого протеина окажутся меньше 38,18 руб.

Концентраты, включая бобовые, сено и зеленый корм, выбрались на верхних границах интервала. Поэтому оценку получили именно верхние границы. Полученные оценки показывают, во что обходится хозяйству соблюдение требований того, чтобы количест-

во кормовых единиц, получаемых за счет указанных групп, не превышало установленный для них максимум. Если бы эти ограничения были сняты и хозяйство могло бы при определении доли концентратов и сена руководствоваться только содержанием в них питательных веществ и себестоимостью, то оно существенно повысило бы удельный вес этих кормов в рационе. Это обстоятельство позволило бы снизить затраты на корма, и полученные оценки показывают, что увеличение максимальной границы на один центнер кормовых единиц по концентратам позволило бы сократить общую себестоимость на 3,67 руб., по бобовым - на 5,38 руб., по зеленому корму - 4,04 руб., по сене - на 3,16 руб. Как видно, наиболее выгодно было бы "смягчить" ограничения по зернобобовым, а также по зеленому корму.

В отличие от концентратов, зеленого корма и сена, сахарная свекла оказалась выбранной на нижней границе интервала. Это результат того, что центнер переваримого протеина сахарной свеклы оказался очень дорогим. Не будь требования, согласно которому в рационе должно быть определенное количество сахарной свеклы (при любой себестоимости данного вида корма), она по понятным причинам (высокая себестоимость и малое содержание переваримого протеина), вероятно, совсем не вошла бы в рацион. Сокращение в рационе содержания сахарной свеклы на один центнер кормовых единиц обеспечивает экономию в размере 5,50 руб.

Приведем некоторые расчеты, иллюстрирующие возможность использования получаемых оценок при экономическом анализе задачи. Посмотрим, как может быть реализована оценка ограничения по минимальному содержанию сахарной свеклы в рационе (5,5 руб.). Пусть мы хотим уменьшить это ограничение на 1 ц кормовых единиц, т.е. на 3,85 ц сахарной свеклы (1:0,26). В этом количестве свеклы содержится $3,85 \times 0,012 = 0,046$ ц переваримого протеина. За счет каких кормов наиболее выгодно компенсировать этот недостаток? Все корма, кроме силоса, вошли в оптимальный план в максимально-допустимых количествах. А нулевые оценки обоих ограничений по силосу показывают, что изменение его объема в плане не приведет к росту общих затрат на корма. Чтобы получить 0,046 ц переваримого протеина, потребуется $0,046:0,011 = 4,2$ ц силоса. Затраты на силос составят $0,42 \text{ руб./ц} \times 4,2 \text{ ц} =$

= 1,8 руб., а отказ от 3,85 ц сахарной свеклы даст экономию 1,89 руб/ц x 3,85 ц = 7,3 руб. Таким образом, чистая экономия составит 7,3 руб. - 1,8 руб. = 5,5 руб., т.е. равна оценке. Аналогичные расчеты показывают, что увеличение этого ограничения приведет к росту общих затрат на ту же величину.

Рассмотрим применение оценок ограничений на максимальное содержание отдельных групп кормов в рационе.

Пусть, например, имеется возможность увеличить верхнее ограничение по сене на 1 ц кормовых единиц (2,38 ц сена многолетних трав), что даст $2,38 \times 0,074 = 0,176$ ц переваримого протеина. Это позволяет отказаться от $0,176 : 0,011 = 16$ ц силоса. Затраты на сено при этом равны $2,38$ ц x $1,5$ руб/ц = $3,57$ руб., экономия за счет отказа от силоса - 16 ц x $0,42$ руб/ц = $6,72$ руб., и чистая экономия составляет $6,72$ руб. - $3,57$ руб. = $3,15$ руб., т.е. равна оценке.

Такой же смысл имеет оценка ограничения (сверху) по концентратам, только изменение этого ограничения, например, на 1 ц кормовых единиц происходит и за счет зерновых (0,6 ц кормовых единиц), и за счет бобовых концентратов (0,4 ц кормовых единиц), так как изменения в плане не должны затрагивать оптимальных пропорций между кормами.

Оценка ограничения, допускающего, что бобовые могут составлять до 40% от всех концентратов, показывает, как влияет на наш функционал замена одного центнера кормовых единиц зерновых концентратов одним центнером кормовых единиц бобовых. Приведем расчет чистой экономии, которая может быть получена, если увеличить в концентратах долю бобовых на 1 ц кормовых единиц (это равно 0,775 ц кормовых бобов, что дало бы переваримого протеина $0,287 \times 0,775 = 0,2224$ ц).

При отказе от 1 ц кормовых единиц зерновых (0,847 ц пшеницы) теряем $0,847 \times 0,14 = 0,1186$ ц переваримого протеина. Замена дает дополнительно $0,2224 - 0,1186 = 0,1038$ ц переваримого протеина, что позволяет отказаться от $0,1038 : 0,011 = 9,44$ ц кукурузного силоса. Затраты на кормовые бобы составят $0,775$ ц x $2,06$ руб/ц = $1,6$ руб., а экономия за счет отказа от пшеницы и силоса - $0,847$ ц x $3,55$ руб/ц + $9,44$ ц x $0,42$ руб/ц = $6,97$ руб., следовательно, чистая экономия равна $6,97$ руб. - $1,6$ руб. = $5,37$ руб.,

т.е. совпадает с полученной оценкой.

Представляют также интерес соотношения оценок, которые можно трактовать как соотношение взаимозаменяемости ограничений. Так, соотношение оценок переваримого протеина и сахарной свеклы $38,18 : 5,5 = 6,94 : 1$ показывает, что изменение нижнего ограничения по сахарной свекле на 6,94 ц кормовых единиц (26,7 ц) позволяет при тех же затратах получить дополнительно (или потратить) 1 ц переваримого протеина. Например, при уменьшении ограничения на 6,94 ц кормовых единиц мы теряем $26,7 \times 0,012 = 0,32$ ц переваримого протеина, но на сэкономленные средства (26,7 ц \times $1,89$ руб/ц = 50,46 руб.) можем дополнительно ввести $50,46 \text{ руб.} : 0,42 \text{ руб/ц} = 120,14$ ц силоса, что даст $120,14 \times 0,011 = 1,32$ ц переваримого протеина. Это не только покрывает недостаток в белке (0,32 ц), но и дает дополнительно (без увеличения общих затрат) 1 ц переваримого протеина.

Таким образом, оценки, как видно из приведенных примеров, являются ценным ориентиром, показывающим, в каком направлении, с точки зрения принятого критерия, было бы целесообразно менять ограничения; кроме того, они дают количественную оценку этих изменений.

Н.Н. Кулаков

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТЬ ПОВЫШЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРОВ

При рассмотрении радиоаппаратуры с точки зрения ее надежности значительная доля отказов падает на электронные приборы большой мощности. Это приводит к простоям оборудования, дополнительным ремонтам, а следовательно, к дополнительным затратам.

Для получения данных о надежности и долговечности мощных электронных приборов в условиях производства проводятся различные испытания. Такие испытания проводятся на малом количестве экземпляров, которое не дает возможности с необходимой достоверностью судить о надежности как главной характеристике качества. Это обусловлено тем, что испытательные стенды требуют больших капитальных вложений, а необходимое количество одновременно испытываемых приборов также невыгодно вследствие их высокой стоимости.

Поэтому статистические данные эксплуатации являются экономически оправданными, отражают реальные условия работы и дают возможность с достаточной достоверностью судить о факторах реальной надежности и долговечности.

В данной работе рассматриваются три типа электронных приборов (назовем их условно В, Е, А) за один год эксплуатации на одном объекте, в одноименной аппаратуре.

Не вдаваясь в подробности анализа причин, а руководствуясь

только количественными данными отказов, рассчитаем экономическую целесообразность повышения надежности электронных приборов на примере одного объекта эксплуатации.

Результаты расчетов интенсивности отказов, вероятности исправной работы, частоты отказов представлены в таблицах 1,2,3.

Для каждой таблицы даны обозначения:

- Δt - интервал времени ($\Delta t = 200$ часов);
- $n(t)$ - число вышедших из строя приборов в Δt - м интервале времени;
- N - число приборов, исправно действующих в интервале времени Δt ;
- $N(t)$ - среднее число исправно действующих приборов в начале интервала;
- $\lambda(t)$ - значение интенсивности отказов;
- $D(t)$ - вероятность исправной работы;
- $a(t)$ - частота отказов.

Математический аппарат, используемый для расчета указанных характеристик, широко известен, а потому приводить его не представляется целесообразным [1] .

Как видно из расчетов, основные параметры, определяющие надежность и долговечность данного типа приборов, не отвечают предъявляемым к ним требованиям.

Приборы типов В, Е, А, согласно требованиям СТЗ,314.010 ТУ, СВЗ.314.014 ТУ и ГОСТа № 7047-54, считаются высококачественными, если в конце 1000 часов работы вероятность их исправной работы будет примерно равна 0,9. Интенсивность выхода из строя приборов, соответствующих данному уровню надежности, можно определить, исходя из экспоненциального закона распределения отказов.

Согласно этому закону вероятность исправной работы определится по формуле [1] :

$$D = e^{-\lambda t},$$

где t - текущее время работы.

Определим интенсивность отказов, соответствующую надежнос-

ти 0,8 , 0,85 , 0,9 в конце 1000 часов работы:

$$0,8 = e^{-\lambda \cdot 1000}$$

$$\text{Ег } 0,8 = -\lambda \cdot 1000$$

$$\lambda = 0,220 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Ег } 0,85 = -\lambda \cdot 1000$$

$$\lambda = 0,158 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Ег } 0,9 = -\lambda \cdot 1000$$

$$\lambda = 0,110 \cdot 10^{-3}$$

Проанализируем целесообразность повышения надежности электронных приборов для объекта эксплуатации при случае, когда с ростом надежности изменяется и стоимость этих приборов (при условии, что стоимость и оптовая цена одинаковы).

По известной интенсивности отказов, соответствующей качественным приборам, можно определить стоимость нового прибора с повышенной надежностью, выраженной формулой

$$C_2 = C_1 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^\alpha, \quad (1)$$

где C_1 - стоимость прибора с существующей надежностью;

C_2 - стоимость прибора с повышенной надежностью;

λ_2 - интенсивность отказов приборов, находящихся в эксплуатации;

λ_1 - интенсивность отказов приборов, которую необходимо иметь;

α - коэффициент, отражающий степень новизны, безразмерная величина.

Коэффициент α рекомендуется выбирать равным 0,5 [2] (по библиографии). По известным λ_2 , λ_1 , C_1 и „ α “ определим стоимость приборов с повышенной надежностью. Данные расчетов приведены в таблице 4. По результатам расчетов построены графики зависимости приборов от их надежности (рис.1).

Приборы с такой надежностью будут стоить дороже существую-

щих

А - на 13,6 рублей,

В - на 47 рублей,

Е - на 69 рублей.

Это и будут те затраты на мероприятия, которые необходимо было бы провести для повышения надежности приборов до уровня, соответствующего требованиям, предъявляемым к приборам данных типов.

Сравнение эксплуатационных расходов при существующем уровне надежности и при ее повышении до уровня 0,9

Как было указано выше, одновременно с изменениями затрат на разработку и изготовление, связанными с повышением надежности приборов, изменяются затраты по их эксплуатации.

Расходы по эксплуатации в рамках данного анализа включают в себя только стоимость годовой потребности объекта в приборах типа В, Е, А и тех расходов, которые связаны непосредственно с ними.

Полная стоимость годовой потребности в приборах, как и все прочие расходы, связанные с ними, зависит от надежности последних.

Расчет годовой потребности в резервных приборах производится по формуле

$$N = n \cdot t \cdot \lambda, \quad (2)$$

где N - потребное количество приборов данного типа на год;

n - число приборов в схеме;

t - число часов работы одного прибора в году;

λ - интенсивность отказов приборов данного типа при определенном уровне их надежности.

Полная стоимость годовой потребности в приборах по каждому типу определится умножением потребного количества приборов на год на соответствующую цену.

Результаты расчетов стоимости годовой потребности по каждому типу приборов при существующем и необходимом уровнях надеж-

ности приведены в таблице 5. Расчеты показывают, что при повышенной надежности стоимость приборов становится выше, а эксплуатационные расходы уменьшаются. Это видно из рис.2.

Снижение эксплуатационных расходов происходит в результате того, что приборам повышенной надежности соответствует более низкая интенсивность отказов, а следовательно, при одном и том же количестве часов работы требуется меньшее число резервных приборов.

В расчетах принята надежность $P = 0,9$ с интенсивностью отказов $\lambda = 0,110 \cdot 10^{-3}$. Эксплуатационные расходы объекта сокращаются при использовании надежных приборов на величину:
 $31920 - 17630 = 14390$ рублей.

При использовании приборов с повышенной надежностью уменьшаются затраты по прочим производственным и транспортным расходам, не выделенным в самостоятельные статьи. Прочие производственные и транспортные расходы включают в себя расходы объекта за упаковку, транспортировку и заготовительно-складские расходы. Эти расходы можно принять равными 5% от стоимости приборов.

Расчеты расходов объекта по статье прочих производственных и транспортных расходов представлены в таблице 3. (Расчеты расходов в указанной таблице и всех последующих проводятся для приборов с существующим уровнем надежности и при надежности $P = 0,9$ и $\lambda = 0,110 \cdot 10^{-3}$). Расходы объекта при использовании надежных приборов сократятся на
 $1596 - 881 = 715$ рублей.

При использовании в работе приборов с $\lambda = 0,110 \cdot 10^{-3}$ расходы объекта по статьям "материалы", "запасные части" и "прочие производственные и транспортные расходы" уменьшаются на сумму:

$$14390 + 715 = 15105 \text{ рублей.}$$

Прежде, чем установить приборы в схему, они подвергаются специальной тренировке, называемой жестчением, для восстановления высокого вакуума. Здесь используется то обстоятельство, что в ионизированном состоянии частицы газа поглощаются значительно лучше, чем в нейтральном. Поэтому, подавая небольшие напряжения на электроды и постепенно увеличивая их, можно восстановить высокий вакуум в приборе.

Стоимость электроэнергии, расходуемой на жестчение приборов, можно рассчитать по следующей формуле:

$$C_{\text{ээ}} = m \cdot \frac{N \cdot P_n}{\zeta}, \quad (3)$$

- где $C_{\text{ээ}}$ - стоимость электроэнергии, расходуемой на жестчение приборов в год;
- m - тариф за 1 киловатт-час;
- N - потребное количество резервных приборов на год;
- P_n - мощность, потребляемая одним прибором при жестчении;
- ζ - коэффициент полезного действия установки для жестчения .

Расчет расходов на электроэнергию, потребляемую при жестчении, представлен в таблице 4.

Расходы объекта, связанные с жестчением, сократятся на $28,62 - 8,0 = 20,62$ рубля.

В данном случае расходы на эксплуатацию сократятся на $15105 + 20,62 = 15125,62$ рубля.

Суммарные эксплуатационные расходы объекта представлены в таблице 5.

Определим, как изменится себестоимость единицы продукции объекта в целом. Себестоимость единицы продукции определяется путем деления общей суммы эксплуатационных расходов - \mathcal{E} - на объем продукции Q за тот же период:

$$C = \frac{\mathcal{E}}{Q}.$$

По объекту себестоимость определяется на 100 рублей объема продукции. За рассматриваемый год объем продукции объекта в денежном выражении составил 1371400 рублей. Себестоимость 100 рублей объема продукции при использовании приборов с существующим уровнем надежности составит

$$C = \frac{551807}{13714} = 40,1 \text{ рублей,}$$

а с повышенным уровнем надежности

$$C = \frac{537253,4}{13714} = 39 \text{ рублей.}$$

Себестоимость 100 рублей объема продукции снизится на 40,1 - 39 = 1,1 рублей.

Если повышение надежности не требует больших капиталовложений и отпускная цена на приборы остается постоянной, то в этом случае затраты объекта эксплуатации будут еще меньше.

Расчеты затрат объекта при использовании приборов с повышенной надежностью и с постоянной ценой приведены в таблицах 9, 10, 11.

В этом случае себестоимость 100 рублей объема продукции будет равна:

$$C = \frac{528546}{13714} = 38,4 \text{ рублей,}$$

что соответственно приведет к снижению на 40,1 - 38,4 = 1,7 рублей по сравнению с существующим уровнем надежности.

Если рассмотреть одновременно зависимости затрат на производство и затрат объекта на эксплуатацию, то пересечение кривых даст возможность определить оптимальную надежность путем построения результирующей кривой, минимум которой будет соответствовать оптимальной надежности.

Однако экономический эффект при повышении надежности не ограничивается только снижением эксплуатационных затрат. С повышением надежности улучшаются качественные показатели работы объекта.

На основании проведенных исследований можно сделать вывод, что при определенных дополнительных капиталовложениях надежность может быть повышена на определенный заданный процент, т.е. ее можно планировать.

Л и т е р а т у р а

1. И.М.Маликов и др. - Основы теории расчета надежности, Судпромгиз, 1960.
2. - "Вопросы определения технико-экономической эффективности в приборостроении". Центральный научно-технический институт информации приборостроения и средств автоматизации, Москва, 1962.

Таблица 1

Прибор типа В, $N_0 = 38$						
$\Delta \tau$	n	N	$N(t)$	$\lambda(t) \cdot 10^{-2}$	$P(t)$	$\alpha(t) \cdot 10^{-2}$
0-200	7	31	34,5	0,104	0,81	0,092
200-400	2	29	30	0,033	0,76	0,026
400-600	1	28	28,5	0,017	0,74	0,013
600-800	1	27	27,5	0,018	0,71	0,013
800-1000	1	26	26,5	0,019	0,68	0,013
1000-1200	2	24	25,5	0,040	0,63	0,026
1200-1400	1	23	23,5	0,021	0,61	0,013
1400-1600	2	21	22	0,045	0,55	0,024
1600-1800	3	18	19,5	0,077	0,47	0,039
1800-2000	1	17	17,5	0,028	0,45	0,013
2000-3000	2	15	16	0,062	0,39	0,026
3000-3200	1	14	14,5	0,064	0,36	0,013
3200-3400	1	13	13,5	0,037	0,34	0,013
3400-3600	1	12	12,5	0,040	0,32	0,013
4000-4200	1	11	11,5	0,043	0,29	0,013
5200-5400	2	9	10	0,100	0,24	0,026
5400-5600	1	8	8,5	0,053	0,21	0,013
5600-5800	1	7	7,5	0,066	0,18	0,013
6200-6400	1	6	6,5	0,077	0,15	0,013
7000-7200						
8800-9000	2	4	5,0	0,200	0,11	0,026
9800-10000	2	2	3,0	0,332	0,05	0,026
11000-11200	1	1	1,5	0,332	0,02	0,013
12000-16000	1	0	0,5	1,000	0	0,013

Таблица 2

Прибор типа Э, = 167 шт.

Δt	n	N	$N(t)$	$\lambda(t) \cdot 10^{-2}$	$D(t)$	$a(t) \cdot 10^{-2}$
0-200	56	111	139	0,201	0,87	0,167
200-400	14	97	104	0,067	0,58	0,042
400-600	7	90	93,5	0,037	0,54	0,021
600-800	5	85	87,5	0,028	0,51	0,015
800-1000	3	82	83,5	0,018	0,49	0,009
1000-1200	5	77	79,5	0,031	0,46	0,015
1200-1400	3	74	75,5	0,019	0,44	0,009
1400-1600	4	70	72	0,027	0,42	0,012
1600-1800	6	64	67	0,044	0,38	0,018
1800-2000	5	39	61,5	0,040	0,35	0,015
2000-2200	2	57	58	0,017	0,34	0,006
2200-2400	1	56	56,5	0,009	0,33	0,003
2400-2600	3	53	54,5	0,027	0,31	0,009
2600-2800	2	51	52	0,019	0,30	0,006
2800-3000	2	49	50	0,020	0,29	0,006
3000-3200	2	47	48	0,021	0,28	0,006
3200-3400	1	46	46,5	0,010	0,27	0,003
3400-3600	2	44	45	0,022	0,26	0,006
3800-4000	1	43	43,5	0,011	0,25	0,003
4000-4200	2	42	42	0,024	0,24	0,006
4200-4400	2	39	40	0,025	0,23	0,006
4600-4800	4	35	37	0,029	0,21	0,012
5000-5200	1	34	34,5	0,014	0,20	0,003
5200-5400	4	30	32	0,062	0,17	0,012
5800-6000	4	26	28	0,071	0,15	0,012
6400-6600	3	23	24,5	0,062	0,14	0,009
6600-6800	1	22	21	0,024	0,13	0,003
6800-7000	4	18	20	0,100	0,10	0,012
7000-7200	3	15	16,5	0,091	0,09	0,009
7800-8000	2	13	14	0,071	0,08	0,006
8000-8200	1	12	12,5	0,048	0,07	0,003
8200-8400	1	11	11,5	0,043	0,066	0,003
8800-9000	2	9	10	0,100	0,057	0,006
9400-9600	1	8	8,5	0,059	0,040	0,003
10000-10200	3	5	6,5	0,223	0,030	0,009
11000-11200	3	2	3,5	0,443	0,012	0,009
12400-12600	2	0	1	1,100	0	0,006

Таблица 3

Прибор типа А, $N_0 = 246$ шт.						
Δt	n	N	$N(t)$	$\lambda(t) \cdot 10^{-2}$	$\rho(t)$	$\alpha(t) \cdot 10^{-2}$
0-200	24	222	234	0,051	0,90	0,049
200-400	11	211	216,5	0,025	0,86	0,024
400-600	10	201	206	0,024	0,82	0,020
600-800	15	186	193,5	0,038	0,76	0,032
800-1000	6	180	183	0,016	0,73	0,012
1000-1200	5	175	177,5	0,014	0,71	0,010
1200-1400	4	171	173	0,012	0,70	0,008
1400-1600	11	160	165,5	0,032	0,65	0,024
1600-1800	14	146	153	0,045	0,60	0,028
1800-2000	10	136	141	0,035	0,55	0,020
2000-2200	8	128	132	0,030	0,52	0,016
2200-2400	7	121	124,5	0,014	0,49	0,014
2400-2600	7	114	117,5	0,015	0,46	0,014
2600-2800	5	109	111,5	0,011	0,44	0,010
2800-3000	15	94	101,5	0,037	0,39	0,032
3000-3200	11	83	88,5	0,028	0,34	0,024
3200-3400	16	67	75	0,053	0,27	0,033
3400-3600	25	42	54,5	0,714	0,17	0,051
3600-3800	3	39	40,5	0,037	0,15	0,006
3800-4000	10	29	34	0,147	0,12	0,020
4000-4200	3	26	27,5	0,055	0,10	0,006
4400-4600	5	21	235	0,105	0,08	0,010
4600-4800	5	16	18,5	0,135	0,07	0,010
4800-5000	2	14	15	0,067	0,06	0,004
5000-5200	1	13	13,5	0,037	0,05	0,002
5400-5600	1	12	12,5	0,040	0,05	0,002
5800-6000	3	9	10,5	0,142	0,037	0,006
6800-7000	3	9	7,5	0,200	0,024	0,006
7200-7400	3	3	4,5	0,332	0,012	0,006
8800-9000	1	2	2,5	0,200	0,008	0,002
9800-14000	2	0	1	1,000	0	0,004

Таблица 4

Тип прибора	$C_{рп}^{1)}$ (руб)	$\lambda_3 \cdot 10^{-3}$	ρ (1000)	$\lambda_1 \cdot 10^{-3}$	α	$\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$	$\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^\alpha$	$C'_{рп}$ (руб)
В	80	0,284	0,80	0,220	0,5	1,29	1,136	91
						1,79	1,338	107
						2,58	1,606	127
Е	75	0,405	0,80	0,220	0,5	1,84	1,356	101
						2,56	1,600	120
						3,68	1,918	144
А	16	0,376	0,80	0,220	0,5	1,71	1,308	20,9
						2,38	1,542	24,7
						3,42	1,849	29,6

1) - стоимость разработки и производства.

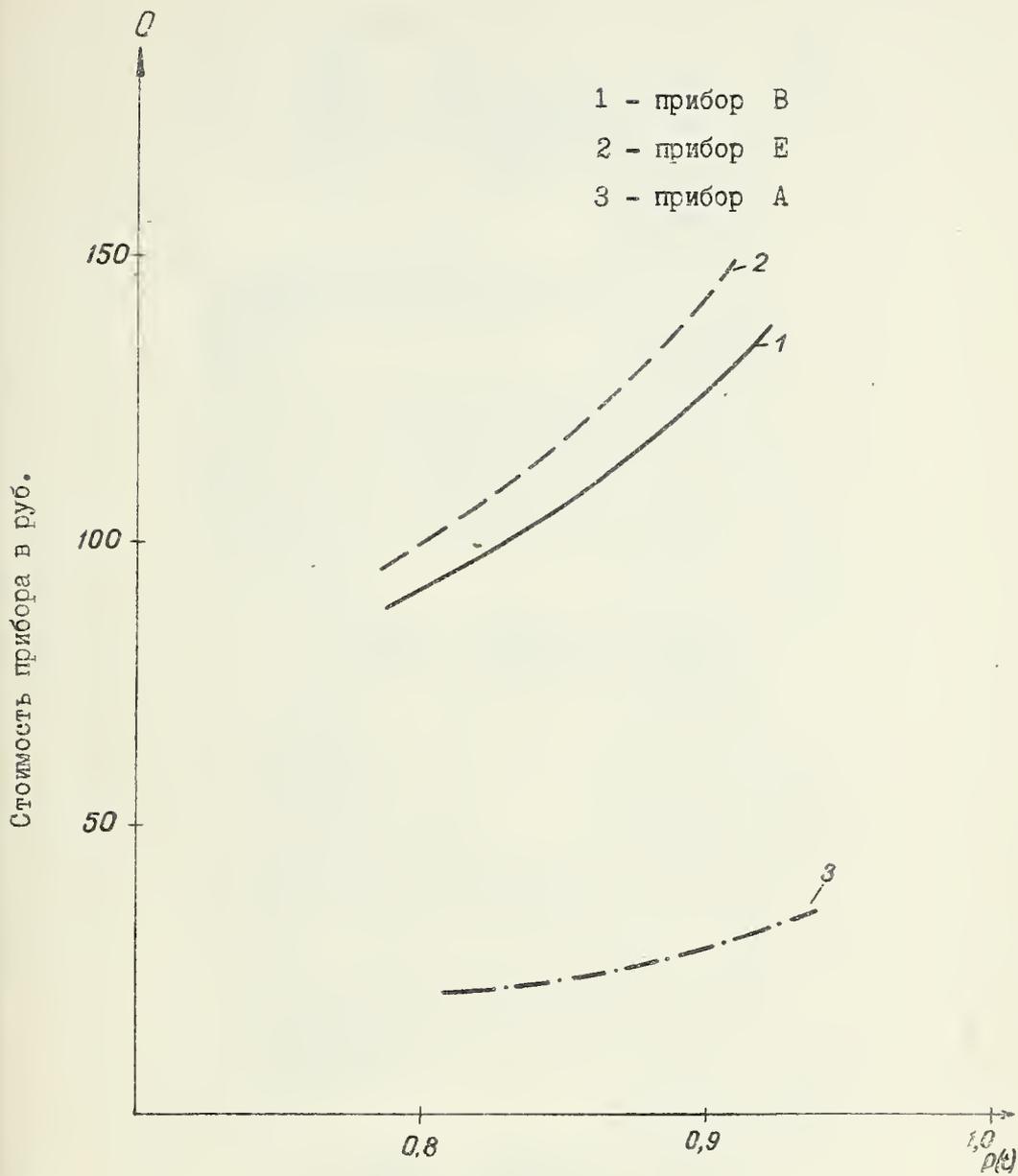


Рис.1. Изменение стоимости приборов с увеличением надежности

Таблица 6

Тип прибора	Приборы с существующим уровнем надежности			Приборы с повышенной надежностью		
	Полная стоимость годовой потребности (руб.)	Транспортные и прочие накладные расходы (руб.)		Полная стоимость годовой потребности (руб.)	Транспортные и прочие накладные расходы (руб.)	
		в % от полной стоимости	в руб.		в % от полной стоимости	в руб.
В	7120	5	356	4450	5	222
Е	18200	5	910	9500	5	475
А	6600	5	330	3680	5	187
Итого	---	---	1596	---	---	881

Таблица 7

Тип прибора	Приборн с существующим уровнем надежности					Приборн с повышенной надежностью						
	N	P_n	ζ	$\frac{NP_n}{\zeta}$	Стоимость электроэнер-гии (руб.) за 1 квт.ч.	Все-го	N	P_n квт.ч	ζ	Стоимость электроэнер-гии (руб.) за 1 квт.ч.	Все-го	
В	89	0,75	0,65	104	0,0051	5,3	35	0,75	0,65	41	0,0051	2,1
Е	243	1,12	0,65	450	0,0051	23	66	1,12	0,65	114	0,0051	5,8
А	414	0,10	0,65	63	0,0051	0,32	121	0,10	0,65	19	0,0051	0,1
Итого						28,62						8,0

Таблица 8

№ п/п	Наименование элементов и статей затрат	Годовые расходы на весь объем продукции (руб.)	
		при использовании существующих приборов	при использовании приборов с высокой надежностью
1.	Заработная плата производственного штата основной деятельности	90000	90000
2.	Отчисление на социальное страхование	4780	4780
3.	Материалы и запасные части, в том числе на электроприборы	79140	65210
4.	Электроэнергия со стороны для производственных нужд, в том числе на электронные приборы	31920	17630
5.	Амортизационные отчисления	91900	91878,38
6.	Прочие производственные и транспортные расходы (не выделенные в самостоятельные статьи), в том числе по электронным приборам	28,62	8
7.	Общие расходы	243300	243300
	Итого:	8687	8085
		1596	881
		34000	34000
		551807	537253,4

Таблица 9

Тип прибора	Приборы с существующим уровнем надежности		Приборы с повышенной надежностью	
	В	Е	В	Е
Число приборов, одновременно работающих в схеме (шт.)	40	92	69	50
Количество часов горения приборов за год $n \cdot t$ (час.)	312000	600000	80	80
Интенсивность отказов $\lambda; 10^{-3}$	$P=0,753$ 0,284	$P=0,667$ 0,405	80	80
Потребное количество приборов на год (шт.)	89	243	80	80
	за штуку	75	75	75
всего	7190	18200	5520	4000
Потребное количество приборов на год (шт.)	16	414	16	174
	за штуку	16	16	16
всего	6600	242	3870	2780
Потребное количество приборов на год (шт.)	158	1100000	121	16
	за штуку	158	16	16
всего	31920	19290	13900	9766
Итого:				

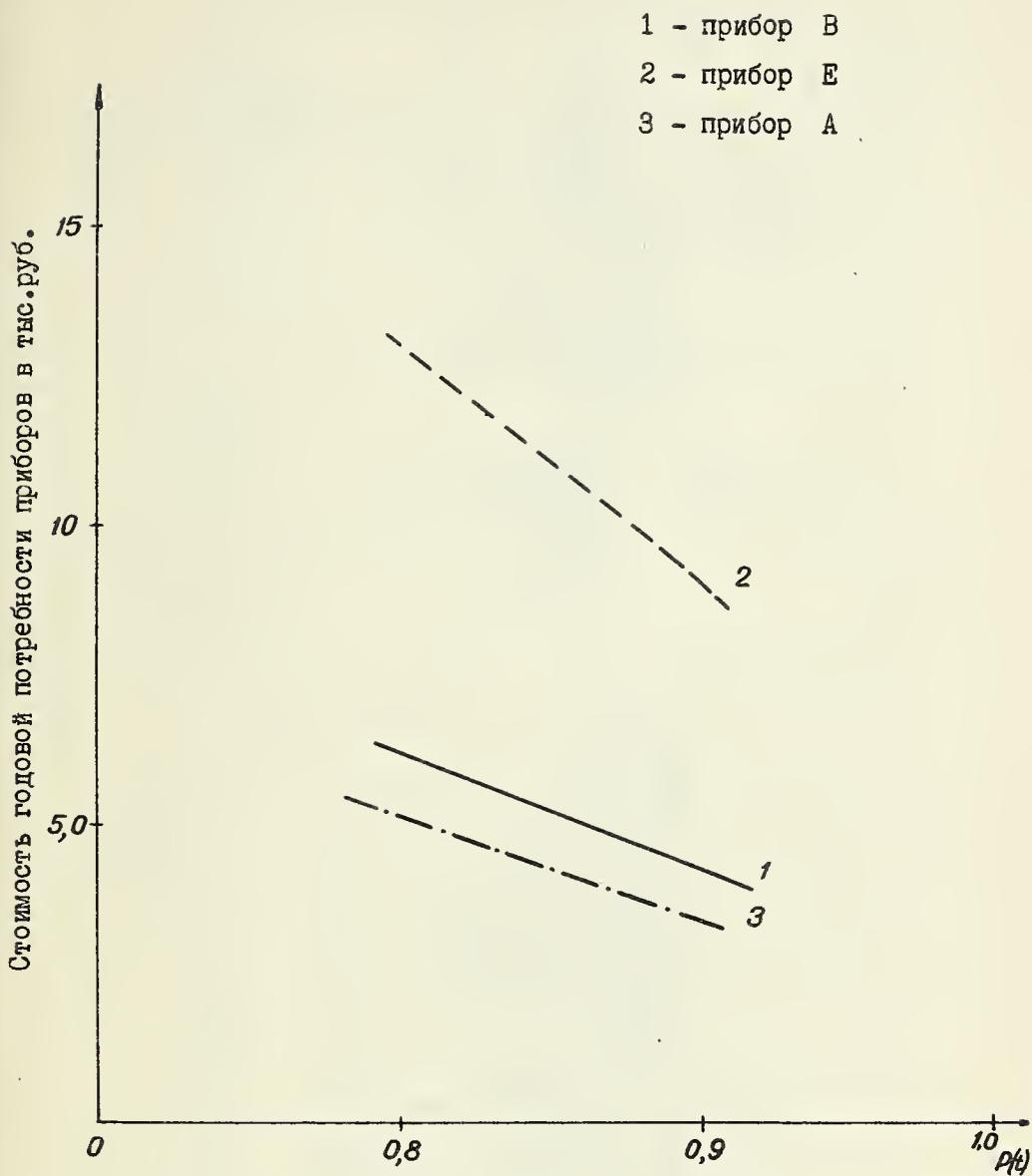


Рис.2. Изменение стоимости годовой потребности объекта в приборах в зависимости от их надежности

Таблица 10

Типы приборов	Приборы с существующим уровнем надежности			Приборы с повышенной надежностью		
	Полная стоимость годовых потребностей приборов (руб.)	Транспортные и прочие накладные расходы (руб.)		Полная стоимость годовых потребностей приборов (руб.)	Транспортные и прочие расходы по приборам (руб.)	
		в % от полной стоимости	в руб.		в % от полной стоимости	в руб.
В	7120	5	356	2900	5	145
Е	18200	5	910	4950	5	248
А	6600	5	330	1936	5	97
ИТОГО:	---	---	1596	---	---	490

Таблица 11

№ п/п	Наименование элементов и статей затрат	Годовые расходы на весь объем продукции (руб.)	
		при использовании существующих приборов	при использовании приборов с повышенной надежностью
1.	Заработная плата производственного штата основной деятельности	90000	90000
2.	Отчисления на социальное страхование	4780	4780
3.	Материалы и запасные части, в том числе на приборы	79140	57006
4.	Электроэнергия со стороны для производственных нужд, в том числе на приборы	31920	9786
5.	Амортизационные отчисления	91900	91878,38
6.	Прочие транспортные и производственные расходы (не выделенные в самостоятельные статьи), в том числе по приборам	2862	8
	Общие расходы	243300	243300
7.		8687	7581
		1596	490
		34000	34000
	Итого:	551807	528545,38

1 - тип В

2 - тип Е

3 - тип А

C_p - затраты на разработку 100 приб.

$C_э$ - затраты на эксплуатацию

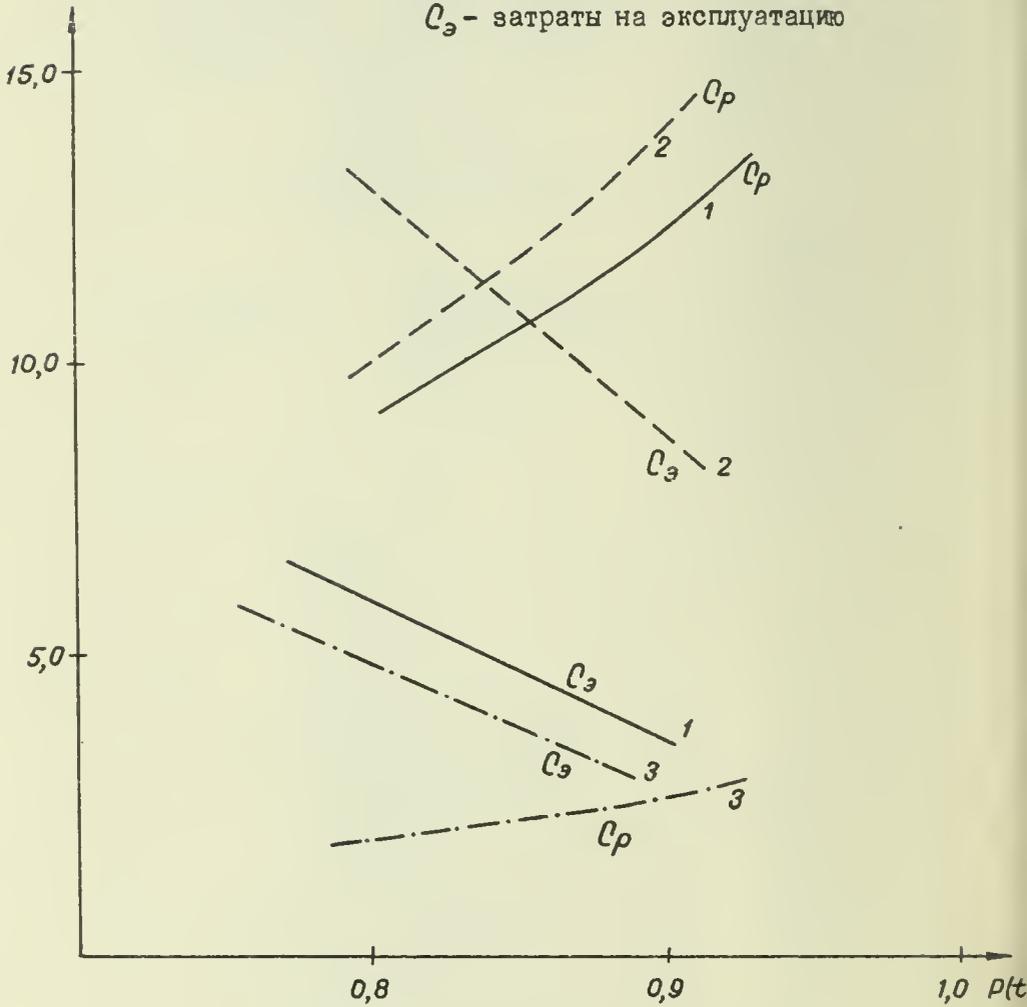


Рис.10. Зависимость затрат от надежности

СО Д Е Р Ж А Н И Е

	Стр.
Часть 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ НА ЭВМ	9
А.Б.Г о р с т к о, А.В.Ф и н к о в с к а я. О решении некоторых динамических задач на ЭВМ	11
В.Л.М а к а р о в. Производственно-транспортная задача линейного программирования	18
К.А.Б а г р и н о в с к и й, Е.Л.Б е р л я н д. Об одном методе решения задач, связанных с управлением химическим производством	26
М.П.М о с к а л е н к о, Н.С.К о щ е е в а. Определение оптимального варианта расстановки рыболовецких судов по районам промысла в течение года	33
А.Б.Г о р с т к о. О кибернетической модели производства	40
Н.Б.М и р о н о с е ц к и й. Об одном алгоритме приближенного решения задачи календарного планирования	45
М.Л.Л у к а ц к а я. Некоторые свойства случайных величин, распределенных обобщенно-нормально	57
И.М.Б о б к о. Программа уплотнения информации при ее обработке на ЭВМ	72
Н.Б.М и р о н о с е ц к и й. Программа определения элементов обратной матрицы методом Монте-Карло	76
Е.М.Л е в и ц к и й. Об одном алгоритме анализа сетевого графика	80
В.А.П е р е г е л и ц а. Алгоритм выделения элементарных контуров на ориентированном графе без петель	85
Часть II. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ИНЖЕНЕРНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ	101
И.П.Ш у б к и н а, Н.Б.М и р о н о с е ц к и й, З.В.К о р о б к о в а. Модели календарного планирования на машиностроительном заводе	103

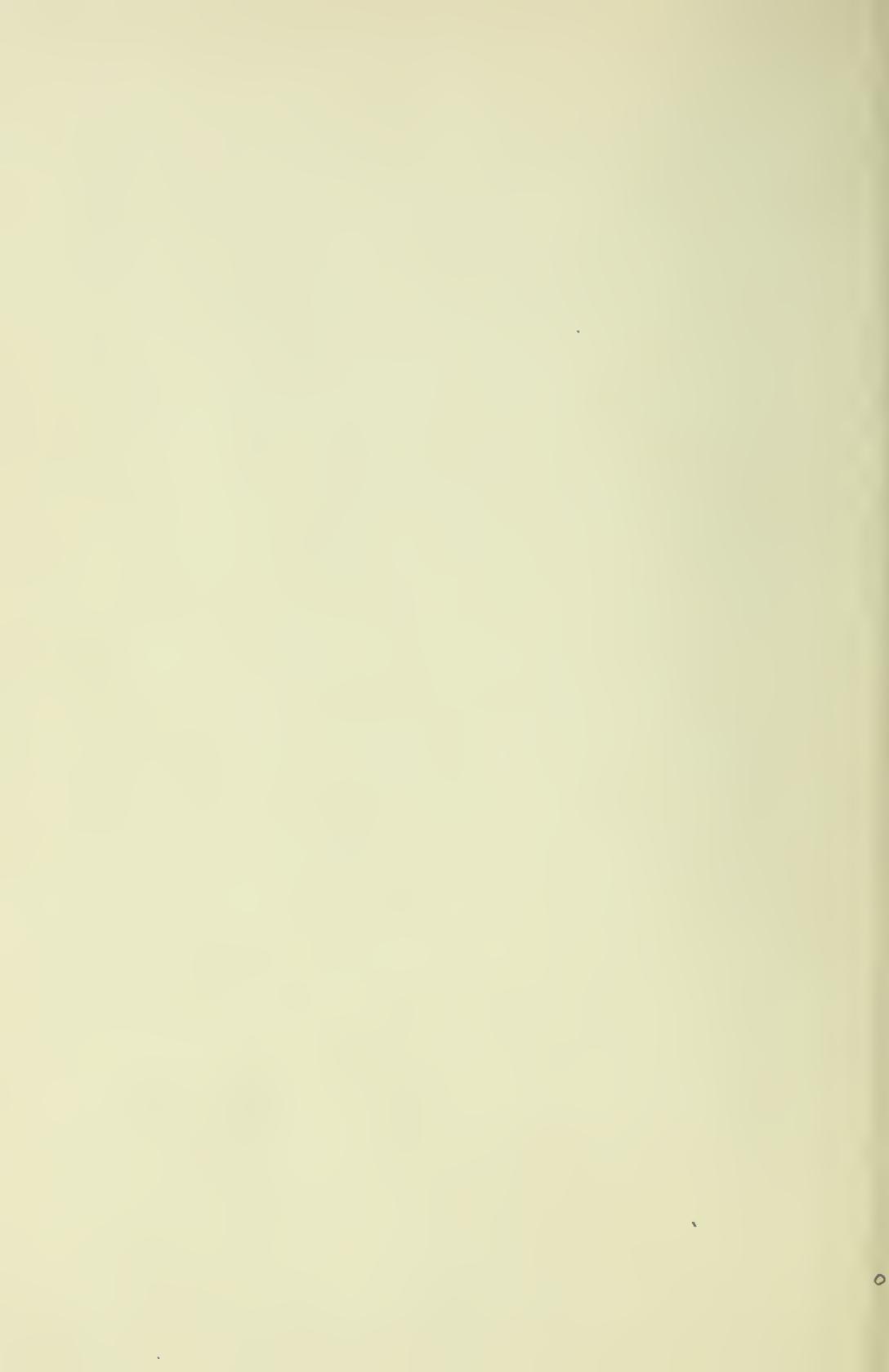
	Стр.
Б.Б.Р о з и н. Некоторые методические вопросы оптимального нормирования в металлургии	147
Б.Б.Р о з и н, Г.А.Н а р ы ш е в. Математико-статистические методы установления коэффициентов трудности в мартеновском производстве	162
Б.Б.Р о з и н, Г.А.Н а р ы ш е в, Ю.П.В о р о н о в. Прогнозирование отдельных показателей работы сталеплавильных агрегатов	189
Б.Б.Р о з и н, Ю.П.В о р о н о в. Вопросы составления суточного графика работы сталеплавильных цехов	220
Н.Б.М и р о н о с е ц к и й. Составление расписания работы мартеновского цеха методом Монте-Карло	239
М.К.К а л ы к. Опыт использования математических методов для определения трудоемкости работ по подержанию выработок по угольной промышленности . .	247
М.И.В и р ч е н к о, В.П.М о ж и н, В.А.С е м е н о в а, В.Э.Ш л я п е н т о х. Экономико-математические модели определения оптимальной структуры кормовой базы	269
Н.Н.К у л а к о в. Экономическая целесообразность повышения надежности электронных приборов	284

ОПЫТ МОДЕЛИРОВАНИЯ
И ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПЛАНОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
(Научные труды)

Редактор	Т.Г. Загорских
Корректор	Т.С. Якимова
Художественный редактор	К.К. Бородина

Подписано к печати 31 декабря 1964 г., 19 л.л.
Формат бумаги 60x92/16 № МН 02969
Заказ № 46 Тираж 600 экз. Цена 1р.14к.

Отпечатано на ротапринтере ИГиГ,
Новосибирск, Академгородок





0904791782

DUKE UNIVERSITY LIBRARIES
Opyt modelirovaniia i programmirovaniia
330.8 N945N, vvp. 5