Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 6

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 6.1. Es sei K ein unendlicher Körper und es sei $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynom mit der zugehörigen Abbildung

$$F\colon \mathbb{A}_K^n \longrightarrow \mathbb{A}_K^1 .$$

Zeige mit und ohne Satz 5.11, dass das Bild von F einpunktig oder unendlich ist.

AUFGABE 6.2.*

Man gebe ein Beispiel für eine polynomiale Abbildung

$$\mathbb{A}_K^2 \longrightarrow \mathbb{A}_K^1$$

derart, dass das Urbild von einem Punkt reduzibel ist, das Urbild von allen anderen Punkten aber irreduzibel.

AUFGABE 6.3. Bestimme für die parametrisierte Kurve

$$x = -3t^2 + 4t - 2 \text{ und } y = 2t^2 + 5t - 3$$

eine Kurvengleichung.

AUFGABE 6.4.*

Sei K ein Körper. Betrachte die durch

$$\mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2,\ t \longmapsto (t + t^2, t^3) = (x, y)\,,$$

definierte Parametrisierung. Bestimme eine (nichttriviale) algebraische Gleichung, die für alle Bildpunkte dieser Abbildung erfüllt ist. Man gebe auch einen Punkt in der affinen Ebene an, der nicht auf der Bildkurve liegt.

AUFGABE 6.5. Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und $a \in K$ von null verschieden. Zeige, dass das Polynom

$$X^2 + Y^2 + a \in K[X, Y]$$

irreduzibel ist.

Aufgabe 6.6. Beweise Lemma 6.9.

Aufgabe 6.7. Sei $P = (a, b)$ ein Punkt in der affinen Ebene und L und L' verschiedene Geraden durch P. Es sei $C = V(F)$, $F \in K[X, Y]$, eine ebene algebraische Kurve. Beschreibe explizit eine Variablentransformation (einen Koordinatenwechsel) derart, dass in den neuen Koordinaten P der Nullpunkt wird und die Geraden zum Achsenkreuz werden. Wie lautet die Kurvengleichung in den neuen Koordinaten?

Aufgabe 6.8. Zeige, dass für affin-algebraische Mengen $V, V' \subseteq \mathbb{A}_K^n$ die Beziehung der affin-linearen Äquivalenz eine Äquivalenzrelation ist.

In den folgenden Aufgabe werden die Begriffe *abgeschlossene Abbildung* und *offene Abbildung* verwendet.

Eine stetige Abbildung

$$f : X \longrightarrow Y$$

zwischen topologischen Räumen X und Y heißt *abgeschlossen*, wenn Bilder von abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen sind.

Sie heißt *offen*, wenn Bilder von offenen Mengen wieder offen sind.

Aufgabe 6.9. Zeige, dass die Projektion

$$\mathbb{A}_K^2 \longrightarrow \mathbb{A}^1,\ (x, y) \longmapsto x,$$

nicht abgeschlossen in der Zariski-Topologie ist.

Aufgaben zum Abgeben

Die folgende Aufgabe erfordert eventuell den Einsatz eines Computers.

Aufgabe 6.10. (6 Punkte)

Bestimme für die Abbildung

$$\mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2,\ t \longmapsto (t^2 + t^3, 2t^2 - t^4),$$

eine algebraische Gleichung der Bildkurve.

Aufgabe 6.11. (5 Punkte)

Wir betrachten die beiden Abbildungen

$$(s,t) \longmapsto (s^2, t^2, st) = (x,y,z) \text{ und } (s,t) \longmapsto (s, st^2, st) = (x,y,z)\,.$$

Zeige, dass das Bild der beiden Abbildungen die gleiche algebraische Gleichung F erfüllt. Untersuche die Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität (als Abbildung nach $V(F)$). Welche Abbildung liefert eine „bessere“ Beschreibung von $V(F)$?

Aufgabe 6.12. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $F \in K[X,Y]$ ein irreduzibles Polynom. Die Nullstellenmenge $V(F)$ sei unendlich. Dann ist $V(F)$ eine irreduzible affin-algebraische Menge.

Man gebe auch ein Beispiel, dass diese Aussage in drei Variablen falsch ist.

Aufgabe 6.13. (3 Punkte)

Sei $K = \mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen. Begründe, ob

$$V(X^2 + Y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{Q}}$$

irreduzibel ist oder nicht.

Aufgabe 6.14. (4 Punkte)

Zeige, dass die Projektion

$$\mathbb{A}^2_K \longrightarrow \mathbb{A}^1_K,\ (x,y) \longmapsto x,$$

offen in der Zariski-Topologie ist.