MP Devoir en temps limité 16 — 2 heures

On considère ici les espaces euclidiens orientés $E = \mathbb{R}^2$ ou $F = \mathbb{R}^3$ muni de leur produit scalaire canonique, et sont rapportés à leur base canonique qui est orthonormale directe, que l'on pourra noter (i,j) ou (i,j,k) respectivement. On utilisera aussi la norme euclidienne $||.||$ et la distance euclidienne d associées au produit scalaire $\bullet$.

EXERCICE 1 (i) Soit $a > 0$, et $\mathcal{D}$ la courbe ("tractrice") de E définie par:

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad x(t) = a(t - \operatorname{th}(t)),\qquad y(t) = \frac{a}{\operatorname{ch}(t)}.$$

Construire $\mathcal{D}$, et déterminer l'ensemble Γ des points de E qui sont les centres de courbure des points biréguliers de $\mathcal{D}$.

(ii) Pour $M \in \mathcal{D}$, on note H le point d'intersection de la tangente à $\mathcal{D}$ en M avec l'axe Ox. Montrer que la longueur de MH (c'est-à-dire du segment $[M, H]$) est constante.

(iii) Réciproquement, déterminer toutes les fonctions $\alpha \in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que la courbe C paramétrée par $f : t \mapsto (\alpha(t), \frac{a}{\operatorname{ch}(t)})$ soit telle que si l'on note $M = f(t)$ pour $t > 0$ et H le point d'intersection de la tangente à C en M avec l'axe Ox, la longueur de MH soit constante et égale à a.

(iv) Soit $G : (t,z) \mapsto (t - \operatorname{th}(t) + \frac{z}{\operatorname{ch}(t)}, \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} + z\operatorname{ch}(t), z)$, et la surface de F: $S = G(\mathbb{R}^2)$. Montrer que seuls les points de la forme $M = G(0,z)$ sont non réguliers sur S. Déterminer le plan Π tangent à S en $A = G(\ln(2), 0)$ et calculer la distance euclidienne de $O = (0,0,0)$ à Π.

EXERCICE 2 (i) Soit S la surface de F d'équation $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Préciser la nature de S. Est-ce une surface de révolution ?

Que peut-on dire de l'intersection C_λ de S avec le plan d'équation $z = \lambda$ selon la valeur du réel λ.

(ii) Déterminer les plans tangents à S qui sont horizontaux, et préciser la position (locale ou globale) de S par rapport à un tel plan.

(iii) Soit $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - 2z = 0,\quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0\}$. Déterminer la tangente à Γ en $O = (0,0,0)$.

(iv) Déterminer toutes les courbes C paramétrées par $f : t \mapsto (t, y(t), z(t))$ de classe C^1 et régulière sur $I = \mathbb{R}+^*$, qui sont tracées sur S et passent par $A = (1,1,1)$, et telles que les tangentes en un éventuel point d'intersection entre C et une courbe C_λ soient orthogonales.

EXERCICE 3 Dans E, pour tout réel θ, on pose: $u_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et $v_\theta = u'_\theta = (-\sin(\theta), \cos(\theta)))$.

Soit Γ paramétrée par $f(\theta) = (1 + \cos(\theta))u_\theta$, pour $\theta \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire d'équation polaire $\rho = 1 + \cos(\theta)$.

(i) Construire Γ, et préciser un vecteur unitaire T_θ dirigeant la tangente en tout point $M = f(\theta)$ de Γ, ainsi que la mesure α_θ de l'angle polaire entre i et T_θ.

(ii) Préciser les points biréguliers de Γ, et déterminer la courbure en un tel point.

(iii) Soit Δ_φ la droite passant par $O = (0,0)$ et dirigée par u_φ avec $\varphi \in [0, \pi[$. Montrer qu'il existe trois points de Γ en lesquels la tangente est parallèle à Δ_φ.

(iv) Déterminer la longueur de Γ ainsi que l'aire du domaine D intérieur à Γ.

(v) Montrer que si $M = (x,y)$ est sur Γ, on peut trouver un polynôme P tel que $P(x,y) = 0$. Retrouver ainsi la tangente à Γ en $A = f(0)$; peut-on procéder de même en $B = f(\frac{\pi}{2})$?

(vi) Soit $\Phi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x^2 + y^2 - x)^2 - x^2 - y^2 = 0\}$. Montrer que Γ est une partie de Φ. Φ et Γ sont-elles égales ?

Quels sont les points de Φ à la distance 1 ou 2 de l'origine $O = (0,0)$?

(vii) Soit $G = \{u \in O(\mathbb{R}^2) / u(\Phi) = \Phi\}$. Montrer qu'il s'agit d'un groupe pour la loi de composition $\circ$. Montrer qu'il est fini et le déterminer.

EXERCICE 4 Dans F, on considère les quatre points:

$$A = (1,1,-1),\quad B = (0,0,-1),\quad C = (0,0,1),\quad D = (1,-1,1),$$

(i) Déterminer l'isobarycentre G de ces quatre points. Calculer la distance de G à la droite (BC) et au plan Π passant par les points A, B, C. Déterminer le projeté orthogonal de G sur ce plan Π.

(ii) Déterminer l'aire du triangle de sommets A, B, C et le volume du tétraèdre de sommets A, B, C, D (on rappelle que l'on peut les obtenir grâce à un produit vectoriel ou un produit mixte).

(iii) Déterminer le rayon du cercle circonscrit au triangle de sommets A, B, C, et le rayon de la sphère circonscrite du tétraèdre de sommets A, B, C, D.

(iv) Quel est le lieu des points de F équidistants des trois points A, B, C, et le lieu des points de F équidistants des quatre points A, B, C, D.

(v) Déterminer la droite Δ perpendiculaire commune aux droites $\delta = (BA)$ et $\delta' = (CD)$.

(vi) Déterminer une équation cartésienne de la surface S_1 formée des points équidistants des deux droites $\delta = (BA)$ et $\delta' = (CD)$, et préciser la nature de S_1.

(vii) Déterminer une équation cartésienne de la surface S_2 obtenue en faisant tourner la droite (AC) autour de la droite (BD), et préciser la nature de S_2.

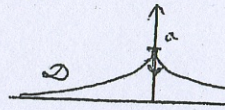
M.P. DTL16: GEOMETRIE — CORRIGÉ

EXERCICE 1 (i) $x'(t) = a(1-(1-\text{th}^2 t)) = a\,\text{th}^2 t \geq 0$
$y'(t) = -a\frac{\text{sh}\, t}{\text{ch}^2 t}$ du signe de $-t$.

x étant impaire, y paire, on peut se limiter à $t \geq 0$, puis compléter par symétrie par rapport à Oy.

t	0		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	
$y(t)$	a	$\searrow$	0

D'où:



En $(a,0)$ on a une tangente verticale car $f'(0)=0$ mais $f''(0) = (0,-a)$.

$\|s'(t)\| = |a\,\text{th} t|\sqrt{\text{th}^2 t + \frac{1}{\text{ch}^2 t}} = a|\text{th}(t)|$. On se limite ici à $t>0$ par la symétrie et $(0,a)$ est stationnaire et tous les autres points sont réguliers.

Pour $t>0$, le vecteur unitaire tangent vaut $\vec{T}(t) = (\text{th}\, t, -\frac{1}{\text{ch}\, t})$ et en notant α_t une mesure de l'angle polaire de $\vec{T}_t$, on a $\begin{cases}\cos(\alpha_t) = \text{th}\, t > 0 \\ \sin(\alpha_t) = -\frac{1}{\text{ch}\, t} < 0\end{cases}$ et on peut donc prendre $\alpha_t \in]0, -\frac{\pi}{2}[$ et $\alpha_t = -\text{Arcsin}(\frac{1}{\text{ch}\, t})$.

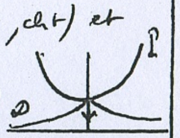
D'où $\alpha'_t = +\frac{\text{sh}\, t}{\text{ch}^2 t}\times\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\text{ch}^2 t}}} = \frac{1}{\text{ch}\, t}$ et la courbure: $c_t = \frac{\alpha'_t}{s'_t} = \frac{1}{\text{ch}\, t}\times\frac{1}{a\,\text{th}\, t} = \boxed{\frac{1}{a\,\text{sh}\, t}}$

et le rayon de courbure $R_t = \frac{1}{c_t} = a\,\text{sh}\, t$, le centre de courbure $I_t = f(t) + R_t \vec{N}_t$ où $f(t) = (a(t-\text{th}\, t), \frac{a}{\text{ch}\, t})$, $R_t = a\,\text{sh}\, t$, $\vec{N}_t = (\frac{1}{\text{ch}\, t}, \text{th}\, t)$ et $I_t = (X_t, Y_t)$ avec:

$X_t = a(t-\text{th}\, t) + a\,\text{sh}\, t\times\frac{1}{\text{ch}\, t} = at$, $Y_t = \frac{a}{\text{ch}\, t} + a\,\text{sh}\, t\,\text{th}\, t = \frac{a}{\text{ch}\, t}(1+\text{sh}^2 t) = a\,\text{ch}\, t$

L'ensemble des centres de courbure est donc la courbe paramétrée $t \mapsto a(t, \text{ch}\, t)$ et sa symétrique par rapport à Oy:

Il s'agit donc de la chaînette d'équation $y = a\,\text{ch}(\frac{x}{a})$ privée de $A = (0,a)$



ii) La tangente à D en $f(t)$ est dirigée par $\vec{T}_t$: c'est la droite d'équation:
$0 = \begin{vmatrix} X - x_t & \text{th}\, t \\ Y - y_t & -\frac{1}{\text{ch}\, t}\end{vmatrix}$ soit $\frac{1}{\text{ch}\, t}X + Y\,\text{th}\, t = \frac{at}{\text{ch}\, t}$. pour $t \geq 0$, on ~~a~~ $X + \text{sh}\, t\, Y = at$

Elle coupe Ox pour $Y=0$ soit $X_H = at$; donc $\|MH\|^2 = Y_M^2 + (x_M - x_H)^2 = \frac{a^2}{\text{ch}^2 t} + a^2\text{th}^2 t = a^2$
ce qui reste vrai par symétrie pour $t \leq 0$. Donc MH constant.

iii) $f'(t) = (\alpha'(t), -\frac{a\,\text{sh}\, t}{\text{ch}^2 t})$ dirige la tangente qui est d'équation: $\frac{a\,\text{sh}\, t}{\text{ch}^2 t}X + \alpha'(t) Y = \frac{a\,\text{sh}\, t}{\text{ch}^2 t}\alpha_t + \frac{\alpha'_t}{\text{ch}\, t}$

et $Y=0$ donne: $X_H = \alpha_t + \frac{\alpha'_t}{\text{th}(t)}$ donc $\|MH\|^2 = \frac{\alpha'^2_t}{\text{th}^2 t} + \frac{a^2}{\text{ch}^2 t} = a^2 \iff \alpha'^2_t = a^2(\text{th}^2 t - \frac{\text{th}^2 t}{\text{ch}^2 t})$

On doit avoir $\forall t > 0$, $\alpha'^2_t = a^2\text{th}^4 t$.

Comme α' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle ne s'annule donc pas et garde un signe fixe: il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que: $\forall t > 0 \quad \alpha'_t = \varepsilon a\, \text{th}^2 t = \varepsilon a(1-(1-\text{th}^2 t))$

et il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que: $\underline{\forall t > 0 \quad \alpha_t = \varepsilon a[t - \text{th}\, t] + C}$.

Quitte à translater l'origine sur Ox on se ramène au cas $C=0$, puis quitte à changer le sens de Ox, on se ramène donc au cas de D.

v) $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et pour tout $(t,z) \in \mathbb{R}^2$:

$D_1F(t,z) = (\text{th}^2 t - \frac{z\,\text{sh}\, t}{\text{ch}^2 t}, -\frac{\text{sh}\, t}{\text{ch}^2 t} + z\,\text{sh}\, t, 0)$; $D_2F(t,z) = (\frac{1}{\text{ch}\, t}, \text{ch}\, t, 1)$

et $N(t,z) = D_1F(t,z) \wedge D_2F(t,z) = (\text{sh}\, t(z - \frac{1}{\text{ch}^2 t}), -\text{th}\, t(\text{sh}\, t - z), \frac{\text{sh}\, t}{\text{ch}^3 t}(1 - z\,\text{ch}^2 t + \text{sh}\, t\,\text{ch}^2 t))$

En notant $a(t,z)$, $b(t,z)$, $c(t,z)$ les trois coordonnées respectives, on a:
$a(t,z) = 0 \iff \begin{cases} t=0 \\ \text{ou} \\ z = \frac{1}{\text{ch}^2 t}\end{cases}$; $b(t,z) = 0 \iff \begin{cases} t = 0 \\ \text{ou} \\ \text{sh}\, t = z\end{cases}$. Donc a et b s'annulent simultanément
ou $t=0$ soit $t \neq 0$ et alors $z = \text{sh}\, t = \frac{1}{\text{ch}^2 t}$, et dans ce cas $c(t,z) = \frac{\text{sh}\, t}{\text{ch}^3 t}(\text{sh}\, t\,\text{ch}^2 t - 1) = 0$
l'étude de $\varphi: t \mapsto \text{sh}\, t\,\text{ch}^2 t$, impaire, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, prouve qu'il existe

un unique $t_0 > 0$ tel que $\text{sh}\, t_0\, \text{ch}^2 t_0 = 1$. Posons $z_0 = \text{sh}\, t_0 = \frac{1}{\text{ch}^2 t_0}$ et dans ce cas $N(t_0, z_0) = 0$.

<u>Conclusion</u>: Les points non réguliers de $S = G(\mathbb{R}^2)$ sont les points $M(0,z)$ et $M(t_0, z_0)$.

Soit $t = \ln 2$ et $z = 0$. on a $M = F(\ln 2, z) = (\ln 2 - \text{th} \ln 2, \frac{1}{\text{ch} \ln 2}, 0) = (\ln 2 - \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$

et $N = (-\frac{12}{25}, -\frac{9}{20}, \frac{3\times 139}{4\times 125}) = \frac{1}{500}(-240, -225, 417)$

et l'équation du plan tangent à S en M: $\underline{+240(X - \ln 2 + \frac{3}{5}) + 225(Y - \frac{4}{5}) - 417 Z = 0}$

EXERCICE 2 (i) S est un paraboloïde de révolution $S = \bigcup_{\lambda \geq 0} \mathcal{C}_\lambda$ où $\mathcal{C}_\lambda$ est le <u>cercle</u> de centre $(0,0,\lambda)$ et de rayon $\sqrt{2\lambda}$ pour $\lambda \geq 0$, <u>d'axe Oz</u>. $\mathcal{C}_\lambda = \emptyset$ si $\lambda < 0$

(ii) S est d'équation $z = \varphi(x,y)$ où $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$
et le plan tangent Π_{M_0} en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ avec $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$ est: $z - z_0 = p(x-x_0) + q(y-y_0)$
avec $p = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0, y_0)$, $q = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0, y_0)$, le plan Π_{M_0} étant horizontal si $p = q = 0$
soit $\underline{x_0 = y_0 = 0}$. Comme $\underline{\varphi \geq 0}$, S est <u>globalement au dessus de Π_0</u>.

(iii) $\Gamma = S_1 \cap S_2$ où S_1 d'équation $F_1(x,y,z) = z - \frac{1}{2}(x^2+y^2) = 0$, S_2 d'équation $F_2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2x = 0$. La tangente à Γ est donc l'intersection
$\text{grad} F_1(0) = (0,0,1)$, $\text{grad} F_2(0) = (-2,0,0)$. La tangente à Γ est donc l'intersection des deux plans Π_1 et Π_2 : Π_1 d'équation $z=0$ et Π_2 d'équation $x=0$: c'est <u>l'axe Oy</u>

(iv) La tangente à $\mathcal{C}$ en $M = f(t)$ est dirigée par $f'(t) = (1, y'(t), z'(t))$. Dans le plan Π_λ d'équation $z = \lambda$
si $M \in \mathcal{C}_\lambda$ on a donc $z(t) = \lambda$, $x(t) = t$ et $y(t) = \lambda$. la tangente en $M = (x,y,\lambda)$ à $\mathcal{C}_\lambda$
le cercle $\mathcal{C}_\lambda$ d'équation $x^2+y^2 = 2\lambda$ $(z=\lambda)$: la tangente en $M=(x,y,\lambda)$ à $\mathcal{C}_\lambda$ est de vecteur normal $\text{grad}\,\varphi(x,y) = (2x, 2y)$, d'équation $x(X-x) + y(Y-y) = 0$.
et dirigée par le vecteur $(-y, x, 0)$. Donc les tangentes en M à $\mathcal{C}_\lambda$ et $\mathcal{C}$ sont orthogonales si $-y(t) + t y'(t) = 0$ pour $t > 0$ soit $y'(t) = \frac{1}{t}y(t)$ pour $t > 0$

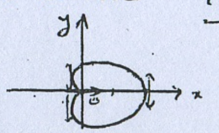
et il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que: $\forall t > 0$, $y(t) = A e^{\ln t} = At$. Enfin comme $M \in S$, on
Comme $M = f(t) \in S$, $t^2 + y^2(t) = 2z(t) = t^2(1+A^2)$. Enfin comme $A \in \mathcal{C}$, on a donc $A = 1$. et $y(t) = t$, $z(t) = t^2$. $\mathcal{C}$ est <u>la parabole</u> paramétrée par $t \mapsto (t,t,t^2)$, $\mathbb{R}_+^* \to S$.
(dans le plan d'équation $x = y$)

EXERCICE 3 (i) Γ est une <u>cardioïde</u>:
$f(\theta) = \rho_\theta u_\theta$, $f'(\theta) = \rho'_\theta u_\theta + \rho_\theta v_\theta = -\sin\theta\, u_\theta + (1+\cos\theta) v_\theta$ — <u>Or</u> $\begin{cases} 1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} \\ \sin\theta = 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\end{cases}$
$f'(\theta) = 2\cos\frac{\theta}{2}\cdot[-\sin\frac{\theta}{2}u_\theta + \cos\frac{\theta}{2}v_\theta]$ $f'(\theta) \neq 0$ <u>ssi</u> $\cos\theta/2 \neq 0$

Compte-tenu de ρ et f 2π-périodique avec <u>ρ paire</u>, on peut se limiter à prendre $\theta \in [-\pi, \pi]$ et même $\theta \in [0, \pi]$.

Pour $\theta \in]-\pi, \pi[$, $f'(\theta) \neq 0$. et $s'(\theta) = \|f'(\theta)\| = |2\cos\frac{\theta}{2}| = 2\cos\frac{\theta}{2} > 0$. et
$\vec{T_\theta} = [-\sin\frac{\theta}{2}u_\theta + \cos\frac{\theta}{2}v_\theta]$ fait un angle $V = (\widehat{\vec{u_\theta}, \vec{T_\theta}}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$ avec $\vec{u_\theta}$
(car $\cos V = -\sin\frac{\theta}{2}$, $\sin V = \cos\frac{\theta}{2}$) et on prend $\alpha_\theta = (\vec{\imath}, \vec{u_\theta}) + (\vec{u_\theta}, \vec{T_\theta}) = \frac{\pi}{2} + \frac{3\theta}{2}$
pour $\theta = -\pi$ ou $\theta = \pi$, $f'(\theta) = 0$ mais $f''(\theta) = -2\sin\theta\, v_\theta - (1+2\cos\theta)u_\theta$, colinéaire à $\vec{\imath}$:
on prend alors encore $\underline{\vec{T_\theta} = -\sin\frac{\theta}{2}u_\theta + \cos\frac{\theta}{2}v_\theta}$ pour diriger la tangente (on a un point de rebroussement de 1ère espèce)

D'où le dessin:



avec $\forall\theta \in [-\pi, \pi]$, $\alpha_\theta = \frac{\pi + 3\theta}{2} \in [-\pi, \pi]$.

(ii) $[f'(\theta), f''(\theta)] = \begin{vmatrix} -\sin\theta & -1-2\cos\theta \\ 1+\cos\theta & -2\sin\theta\end{vmatrix} = 2\sin^2\theta + 1 + 2\cos^2\theta + 3\cos\theta = 3(1+\cos\theta)$.
(cf (u_θ, v_θ) "BOND")

Par suite. les points de Γ $M_1 = f(\theta)$ ~~est~~ biréguliers si $\cos\theta \neq -1$.

Dans ce cas la courbure est : $C_\theta = \dfrac{\alpha'(\theta)}{s'(\theta)} = \dfrac{3/2}{\cos\theta/2}$ pour $\theta \in]-\pi, \pi[$.

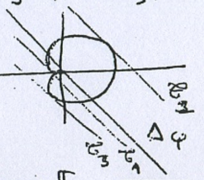
iii) Si θ décrit $[-\pi, \pi]$, $\alpha_\theta = \dfrac{\pi + 3\theta}{2}$ décrit $[-\pi, \pi]$.

donc si $\varphi \in [0, \pi]$, on aura $\vec{T}_\theta$ parallèle à $\vec{u}_\varphi$ si et seulement si

$\dfrac{\pi + 3\theta}{2} \equiv \varphi \; [\pi]$ i.e. $3\theta \equiv 2\varphi - \pi \; [2\pi]$ ou $\theta \equiv \dfrac{2\varphi - \pi}{3} \left[\dfrac{2\pi}{3}\right]$

il existe donc 3 valeurs de $\theta \in [-\pi, \pi]$: $\theta_1 = \frac{2}{3}\varphi - \pi$, $\theta_2 = \frac{2}{3}\varphi - \frac{\pi}{3}$, $\theta_3 = \frac{2}{3}\varphi + \frac{\pi}{3}$.

et donc 3 tangentes à Γ parallèles à $\Delta\varphi$.



iv) $\mathrm{long}(\Gamma) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} s'(\theta)\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} 2\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = \left[4\sin\frac{\theta}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \boxed{8}$.

Par la formule de Green-Riemann : Aire $(D) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho^2(\theta)}{2}\, d\theta =$

Aire $(D) = \displaystyle\int_0^{\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta = \left[\theta + 2\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi} = \boxed{\frac{3\pi}{2}}$.

v). si $M = (x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ avec $\rho = 1 + \cos\theta$.

on a donc $\rho^2 = \rho\cos\theta + \rho$ soit $x^2 + y^2 = x + \rho$ et $\rho^2 = x^2 + y^2 = (x^2 + y^2 - x)^2$.

On peut donc prendre $P(x, y) = (x^2 + y^2 - x)^2 - x^2 - y^2$.

. $A = f(0) = (2, 0)$. $\quad \mathrm{grad}\, P(x, y) = \left((2x - 1)(x^2 + y^2 - x) - 2x,\ 2y\,(x^2 + y^2 - x - 1)\right)$

$\mathrm{grad}\, P(2, 0) = (2, 0)$ normal à Γ en A, la tangente en $A = f(0)$ est la droite d'équation $x = 2$.

• $B = f(\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$. $\quad \mathrm{grad}\, P(0, 1) = (0, 0)$: on ne peut conclure ainsi car B est singulier : non régulier pour ϕ donnée par son équation cartésienne.

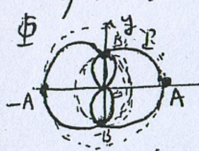
vi) $\Gamma \subset \phi$ a été vu en (v). Étudions la réciproque

posons $(x, y) = \rho(\cos\theta, \sin\theta)$ et $P(x, y) = (\rho^2 - \rho\cos\theta)^2 - \rho^2 = \rho^2\left[(\rho - \cos\theta)^2 - 1\right]$

et $P(x, y) = 0 \iff \rho = 0$ ou $\rho - \cos\theta = 1$ ou $\rho - \cos\theta = -1$

ϕ est donc constituée de Γ et de la courbe d'équation polaire $\rho = \cos\theta - 1$

qui n'est autre que la symétrique de Γ par rapport à Oy (cf $\theta \longleftrightarrow \pi - \theta$, $\rho \longleftrightarrow -\rho$).



et donc $\phi \neq \Gamma$. $\quad \Gamma \subsetneq \phi$.

si $M = (x, y) \in \phi$ et $d(M, O) = r$, on aura donc : $x^2 + y^2 = r^2$

• si $r = 1$: $(1 - x)^2 = 1 \iff \begin{cases} 1 - x = 1 \\ \text{ou} \\ 1 - x = -1 \end{cases} \iff x \in \{0, 2\}$

or si $x = 2$, $r^2 \geq 4$ est impossible.

• si $r = 2$. $(4 - x)^2 = 4 \iff \begin{cases} 4 - x = 2 \\ \text{ou} \\ 4 - x = -2 \end{cases} \iff x \in \{2, 6\}$

or si $x = 6$, $r^2 \geq 36$ est impossible.

En conclusion, il y a deux points de ϕ à la distance 1 de O : $B = (0, 1)$, $(0, -1) = -B$

et 2 points à la distance 2 $A = (2, 0)$ et $(-2, 0) = -A$.

vii) On vérifie qu'il s'agit d'un sous-groupe de $(O(\mathbb{R}^2), \circ)$

. $G \subset O(\mathbb{R}^2)$ non vide car contient $id_{\mathbb{R}^2}$

. si $u \in G$ $\quad u(\phi) = \phi \Rightarrow u^{-1}(u(\phi)) = \phi = u^{-1}(\phi)$ et $u^{-1} \in G$

. si $u, v \in G$ $\quad u \circ v(\phi) = u(\phi) = \phi$ et $u \circ v \in G$.

Si $f \in G$, f conserve les distances et donc $f(B) \in \{B, C\}$
$f(A) \in \{A, D\}$

Il y a donc 4 possibilités pour l'action de f sur la base $(B, A) = (j, 2i)$ de $\mathbb{R}^2$

. $f(B) = B$ et $f(A) = A$ et $f = id_{\mathbb{R}^2}$

. $f(B) = B$ et $f(A) = -A$ et f est la symétrie orthogonale par rapport à Oy : s_{Oy}

. $f(B) = -B$ et $f(A) = A$ et ——— Ox : s_{Ox}

. $f(B) = -B$ et $f(A) = -A$ et $f = -id_{\mathbb{R}^2}$.

$G = \{id_{\mathbb{R}^2}, -id_{\mathbb{R}^2}, s_{Ox}, s_{Oy}\}$

EXERCICE 4 (i) $G = \frac{1}{4}(A + B + C + D) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$; $\vec{BC} = (0, 0, 2)$ (BC) est l'axe Oz

$d(G, (BC)) = \dfrac{\|\vec{GB} \wedge \vec{BC}\|}{\|\vec{BC}\|}$, $\quad \vec{GB} = \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$. $\quad \vec{GB} \wedge \vec{BC} = (0, -1, 0)$ $\quad d(G, (BC)) = \frac{1}{2}$ (évident)

Le plan $\Pi = \{M \in F / [\vec{BM}, \vec{BC}, \vec{BA}] = 0\}$ d'équation $0 = \begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ y & 0 & -1 \\ z+1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ soit $x = y$ (de vecteur

normal $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$) et $d(G, \Pi) = \dfrac{\left|\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Enfin H projeté orthogonal de G sur Π est de la forme $H = (x, x, z)$ avec $\vec{GH} \cdot \vec{BC} = 0 = \vec{GH} \cdot \vec{BA}$

d'où $z = 0$, $x = \frac{1}{4}$ $\quad \boxed{H = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)}$ (on retrouve $\|\vec{HG}\| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$). $\quad$ soit $\begin{cases} z = 0 \\ -(x - \frac{1}{2}) - x = 0 \end{cases}$

(ii) Aire $(ABC) = \frac{1}{2}\|\vec{BC} \wedge \vec{BA}\| = \boxed{\sqrt{2}}$ car : $\vec{BC} \wedge \vec{BA} = -2\vec{k} \wedge (\vec{i} + \vec{j}) = -2\vec{j} + 2\vec{i}$ de norme $2\sqrt{2}$

enfin le tétraèdre $\mathcal{T}$ de sommets $ABCD$ a comme volume (cf pyramide) $V = \frac{h}{3}S$ où S est l'aire de la base et h la hauteur. soit $\mathcal{T} = \frac{1}{6}\left|[\vec{BC}, \vec{BA}, \vec{BD}]\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}\right| = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$

iii) Le triangle ABC est rectangle en B car $\vec{BC} = (0, 0, 2)$ et $\vec{BA} = (-1, -1, 0)$ orthogonaux

Donc le rayon du cercle circonscrit au triangle ACB est la moitié du diamètre AC : $R = \frac{\|\vec{AC}\|}{2}$

soit $\vec{AC} = (-1, -1, 2)$ et $R = \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$:

On peut aussi commencer par chercher le centre I de ce cercle qui est dans le plan Π d'équation $x = y$:

On a donc $I = (x, x, z)$ tel que : $AI^2 = BI^2 = CI^2$ soit $\quad$ D'où $(z + 1)^2 - (z - 1)^2 = 0$ et $z = 0$

$2(x - 1)^2 + (z + 1)^2 = 2x^2 + (z + 1)^2 = 2x^2 + (z - 1)^2$

puis $(x - 1)^2 - x^2 = 0$ donne $2x = 1$ $\quad$ et $I = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ et $R = AI = \left\|\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)\right\|$

$R = \sqrt{\frac{2}{4} + 1} = \sqrt{\frac{6}{4}}$.

• On procède de même : le centre J de la sphère circonscrite à $\mathcal{T}$ est équidistant de A, B, C

donc si $J = (x, y, z)$: $AJ^2 = BJ^2 = CJ^2 \iff (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = x^2 + y^2 + (z - 1)^2$

donc $(z - 1)^2 = (z + 1)^2$ et donc $z = 0$ puis $-2(x + y) + 2 = 0$ et $x + y = 1$

donc $J = (x, 1 - x, 0)$ et enfin $DJ^2 = AJ^2$ donne : $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 1 = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + 1$

soit $x + y = x - y = 1$ donc $x = 1$, $y = 0$. et $\underline{J = (1, 0, 0)}$ et le rayon de la sphère

est $r = JA = \|(0, 1, -1)\| = \sqrt{2}$.

iv) En reprenant les calculs précédents, le premier lieu est la droite d'équations $\begin{cases} z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$

et le second lieu le point J.

v) : Sans calculs ici, il est clair que $\Delta = Oz$ (c'est la droite BC) car $\begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \\ \vec{DC} \cdot \vec{BC} = 0 \end{cases}$

(on peut aussi le retrouver par le calcul classique vu en cours)

vi) $M \in S_1 \iff d^2(M, AB) = d^2(M, CD) \iff \dfrac{\|\vec{MB} \wedge \vec{AB}\|^2}{\|AB\|^2} = \dfrac{\|\vec{MC} \wedge \vec{CD}\|^2}{\|CD\|^2}$

$\vec{AB} = (1, 1, 0)$; $\vec{CD} = (1, -1, 0)$ de même norme. $\quad$ d'où $M \in S_1 \iff \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z+1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|^2 = \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|^2$

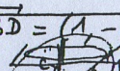
$\vec{MB} = (x, y, z + 1)$; $\vec{MC} = (x, y, z - 1)$

$M \in S_1 \iff 2(z + 1)^2 + (x - y)^2 = 2(z - 1)^2 + (x + y)^2 \iff 4z = (x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$.

en posant $X = \frac{x + y}{\sqrt{2}}$, $Y = \frac{x - y}{\sqrt{2}}$, $Z = z$: S_1 d'équation $\boxed{z = xy}$ dans $\mathcal{R}$ et $\boxed{Z = \frac{X^2 - Y^2}{2}}$ dans $\mathcal{R}'$

S_1 est donc un paraboloïde hyperbolique.

vii) $\vec{BD} = (1, -1, -2)$ si $M \in AC$ $\quad M = C + t\vec{CA} = (t, t, 1 + 2t)$ dans le plan Π_M passant par M de vecteur normal $\vec{BC}$: $X - Y - 2Z = x_M - y_M - 2z_M$. on obtient $S_2 \cap \Pi_M$



cercle d'axe $D = (BC)$ passant par M. $\quad S_2 = \bigcup \mathcal{C}_M$ est un hyperboloïde à une nappe et