

Warum fliegt ein Flugzeug

Dr. Ralph-Dieter Fedra

de.wikibooks.org

11. März 2022

On the 28th of April 2012 the contents of the English as well as German Wikibooks and Wikipedia projects were licensed under Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported license. A URI to this license is given in the list of figures on page 91. If this document is a derived work from the contents of one of these projects and the content was still licensed by the project under this license at the time of derivation this document has to be licensed under the same, a similar or a compatible license, as stated in section 4b of the license. The list of contributors is included in chapter Contributors on page 89. The licenses GPL, LGPL and GFDL are included in chapter Licenses on page 97, since this book and/or parts of it may or may not be licensed under one or more of these licenses, and thus require inclusion of these licenses. The licenses of the figures are given in the list of figures on page 91. This PDF was generated by the \LaTeX typesetting software. The \LaTeX source code is included as an attachment (`source.7z.txt`) in this PDF file. To extract the source from the PDF file, you can use the `pdfdetach` tool including in the `poppler` suite, or the `http://www.pdfplabs.com/tools/pdftk-the-pdf-toolkit/` utility. Some PDF viewers may also let you save the attachment to a file. After extracting it from the PDF file you have to rename it to `source.7z`. To uncompress the resulting archive we recommend the use of `http://www.7-zip.org/`. The \LaTeX source itself was generated by a program written by Dirk Hünninger, which is freely available under an open source license from `http://de.wikibooks.org/wiki/Benutzer:Dirk_Huenniger/wb2pdf`.

Inhaltsverzeichnis

1	Was wir von einer Milchbüchse über den Luftdruck lernen	3
1.1	Luftdruck wirkt stets in alle Richtungen	3
1.2	Weiterführende Gedanken	8
2	Wie ein Botaniker die Griechen bestätigt	13
2.1	Mikroskopisch ist alles in Bewegung	13
2.2	Weiterführender Gedanke	14
3	Wie Einstein mal wieder die Welt erklärt	19
3.1	Das mittlere Verschiebungsquadrat	19
3.2	Weiterführende Gedanken	23
4	Was uns ein Autostau über Luftströmungen verrät	29
4.1	Die Kontinuitätsgleichung	29
4.2	Weiterführender Gedanke	31
5	Woher kommt der Auftrieb bei einer Umströmung?	33
5.1	Die umströmende Luft beschleunigt sich selber	33
5.2	Druckverhältnisse in der Umströmung von Hindernissen	35
5.3	Weiterführende Gedanken	36
6	Wie Otto Lilienthal das Geheimnis des Vogelfluges lüftet	45
6.1	Was hält den Vogel in der Luft?	45
6.2	Weiterführende Gedanken	50
7	Wo man im Alltag, in der Natur und Technik Auftrieb erleben kann	55
7.1	Die Asymmetrie ist entscheidend	55
7.2	Weiterführender Gedanke	64
8	Wie der Wind einen Flügel umströmt	65
8.1	Ideale Stromlinienfelder um symmetrische und asymmetrische Flügelprofile	65
8.2	Weiterführende Gedanken	71
9	In Wahrheit fliegt ein Flugzeug durch ruhende Luft	77
9.1	Wie sich die Luft wirklich bewegt	78
9.2	Weiterführende Gedanken	84
10	Was wir am Beispiel Auftrieb über Physik lernen können	85
10.1	Der Modellcharakter der Physik	85
11	Autoren	89

Abbildungsverzeichnis	91
12 Licenses	97
12.1 GNU GENERAL PUBLIC LICENSE	97
12.2 GNU Free Documentation License	98
12.3 GNU Lesser General Public License	99

1 Was wir von einer Milchbüchse über den Luftdruck lernen

1.1 Luftdruck wirkt stets in alle Richtungen



Abb. 1 Drei verschiedene Typen von Dosenlochern.

Das erste Kapitel dieser Betrachtung zum Fliegen beschäftigt sich mit den Eigenschaften der Luft, in dem das Fliegen stattfindet. Die Eigenschaft, die hier als erstes interessiert, ist der sogenannte Luftdruck. Vom Wetterbericht kennt man Hochdruck- und Tiefdruckgebiete, die meist mit schönem oder schlechtem Wetter verbunden werden. Aber wo sonst begegnet man dem Luftdruck im Alltag? Folgende Situation ist vielen Kaffeetrinkern bekannt: Wie bekommt man die Milch aus der Milchdose in den Kaffee? Das Bild rechts weist mit dem seltenen Beispiel des Doppellochers¹ schon auf eine Besonderheit hin, aber auch zwei gegenüberliegende Löcher in der Milchdose reichen nicht zur befriedigenden Lösung der Aufgabe, wie Friedrich Copei², 1931 Dozent an der Pädagogischen Akademie Dortmund, in seiner Dissertationsschrift beschreibt:

1 <https://de.wikipedia.org/wiki/%2FDosenlocher>

2 https://de.wikipedia.org/wiki/%2FFriedrich_Copei

1.1.1 Das Milchdosenbeispiel

Druck der eingeschlossenen Luft

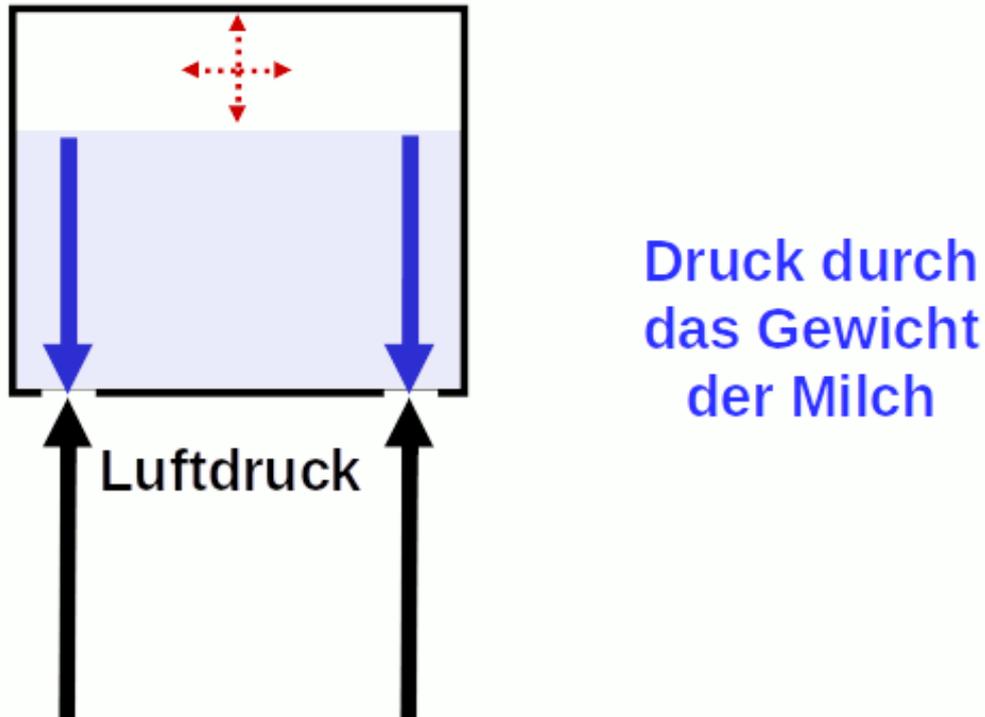


Abb. 2 Animation zum Milchbüchsenbeispiel

Auf eine Schulwanderung hat einer der Jungen eine Büchse kondensierte Milch mitgebracht, die, den meisten Landkindern etwas Neues, schon mit Interesse betrachtet wird. Feierlich öffnet der Besitzer die Büchse, indem er an einer Stelle ein Loch in den Büchsendeckel bohrt. Er will die Milch ausgießen – aber keine Milch fließt heraus! Nur beim Schütteln spritzen einige Tropfen. Alles staunt: Wie kommt das nur? Die anderen raten ihm: „Du musst das Loch größer machen.“ Er tut’s – ohne merklichen Erfolg. Einer vermutet: „Die Milch ist wohl dick geworden, vielleicht ist das Loch verstopft“ – aber eine Verstopfung ist nicht zu entdecken. Die anderen wenden auch ein: „Wir haben ja ganz flüssige Milchtropfen herausspringen sehen!“ Der Junge beharrt: „Da muss aber doch etwas davorsitzen, sonst flösse die Milch doch heraus!“ Andere sagen ihm: „Aber es sitzt doch nichts davor.“ Der Lehrer wirft ein: „Nichts?“ ein. Antwort: „Nur Luft, sonst nichts, wir haben’s ja probiert.“

Da meldet sich einer der Jungen zu Hilfe. Er schlägt ein zweites Loch in die Büchse, so wie er das schon irgendwo gesehen hat. Allgemeines Staunen, denn plötzlich fließt die Milch in schönem Strahl glatt aus der einen Öffnung. Aber doch nur, solange die Büchse schräg gehalten wird, als man die Büchse senkrecht hinstellt, damit die Milch zugleich aus beiden Löchern kommen solle, hört das Fließen wieder auf, und nur wenige Tropfen kommen.^{3 4}



Abb. 3 Überdruck einer am Boden verschlossenen Verpackung im Reiseflug

Die Erklärung führt zur grundlegenden Erkenntnis, dass der Luftdruck allseitig wirkt und die Milch, entgegen der Gewichtskraft und dem Druck der eingeschlossenen Luft, in die Dose drückt - zumindest solange sich die Öffnungen auf gleicher Höhe befinden. Bei einer Schräglage ist die Gewichtskraft über dem höher gelegenen Loch verringert und durch den Luftdruck gelangen Luftblasen in dem Maße in die Dose, wie die Milch aus der tiefer gelegenen Öffnung fließt.

3 Friedrich Copei, *Der fruchtbare Moment im Bildungsprozess* (Diss. phil. Berlin), Quelle & Meyer, Leipzig 1930 (VII, 134 S., mit Fig.); 5., unveränderte Aufl., eingel. und hrsg. von Hans Sprenger, Quelle & Meyer, Heidelberg 1960

4 Malte Brinkmann, *Der fruchtbare Moment im Bildungsprozess - Friedrich Copei 1902-1945*, vom 23.8.2017, Phänomenologische Erziehungswissenschaft <https://paed.ophen.org/2017/08/23/der-fruchtbare-moment-im-bildungsprozess-friedrich-copei-1902-1945/?lang=de>, abgerufen am 2. Februar 2022

Auch das nebenstehendes Bild verdeutlicht die **Allseitigkeit des Luftdrucks**. Eine bei Normaldruck am Boden verschlossene Plastikverpackung bläht sich auf, wenn sie sich in der Druckkabine eines Verkehrsflugzeuges befindet. Mit zunehmender Höhe nimmt der Luftdruck ab, in der Druckkabine eines Verkehrsflugzeuges im Reiseflug (ca. 10 km) herrscht ungefähr der Druck der Luft in 2,5 km Höhe. Dies ist ein Kompromiss zwischen dem Wunsch, die mechanische Belastung der Flugzeughülle zu verringern (Überdruck innen gegenüber dem geringen Luftdruck außen, wie die abgebildete aufgeblasene Verpackung) und die ausreichende Sauerstoffzufuhr zu gewährleisten, denn bei geringerem Druck verringert sich auch die enthaltene Sauerstoffmenge zum Atmen. Würde man den Kabinendruck noch weiter verringern, stiege die Gefahr der Höhenkrankheit⁵.

⁵ <https://de.wikipedia.org/wiki/H%C3%B6henkrankheit>

1.2 Weiterführende Gedanken

1.2.1 Die Größe des Luftdrucks



Abb. 4 Ab welcher Höhe fließt Wasser aus einem einseitig verschlossenen Schlauch?^a

^a Das Schlauchexperiment, Landschulheim Steinmühle, 2017, Wikipedia:Pascals Barometer [^]{https://de.wikipedia.org/wiki/Pascals_Barometer%23Bertis_Wassers%C3%A4ulen_und_das_Schlauchexperiment%20}, abgerufen am 9. Februar 2022

Interessant ist noch die Frage, wie „hoch“ eine Milchsäule sein müsste, bis der Druck durch ihre Gewichtskraft ausreicht, den Luftdruck zu überwinden?

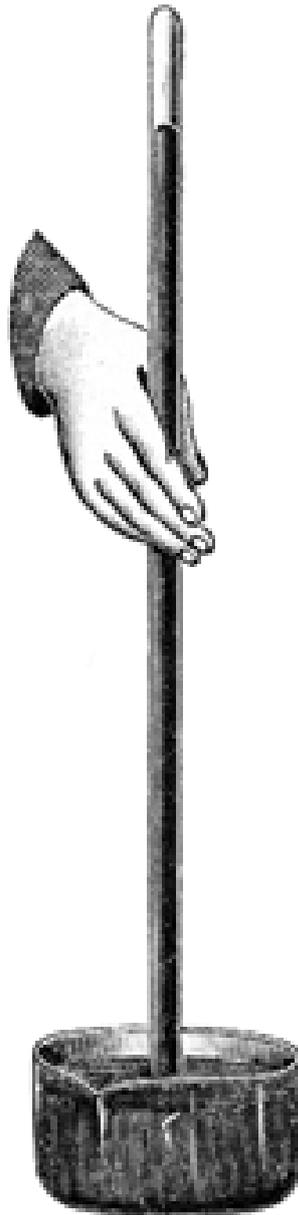


Abb. 5 Schema eines Quecksilberbarometers.

Mit dieser Frage haben sich im 17. Jahrhundert bereits G. Galilei beschäftigt und 1641 führte Gasparo Berti (ca. 1600–1643) in Rom einen Versuch durch, um die maximale Höhe einer Wassersäule zu demonstrieren. Bertis Versuch lässt sich heute deutlich einfacher nachstellen. Hierzu wird ein 12 bis 15 m langer, durchsichtiger Schlauch ganz mit Wasser gefüllt, an der Oberseite verschlossen und diese dann in einem Treppenhaus nach oben transportiert, bis die Wassersäule bei etwa zehn Metern stehenbleibt – selbst wenn man das Schlauchende weiter

anhebt⁶. Taucher⁷ kennen diese Zahl, bei einer Tauchtiefe von ungefähr 10 m ist der Taucher zusätzlich dem Druck ausgesetzt wie außerhalb des Wassers durch die Erdatmosphäre. D.h. die Gewichtskraft einer 10 m hohen Wassersäule entspricht der Gewichtskraft der Luftsäule über uns. Deswegen bleibt das Wasser im Schlauch bei einer Höhe von ca. 10 m stehen, weil dann der Druck durch die Gewichtskraft der Wassersäule im Gleichgewicht mit dem Luftdruck ist.

Nimmt man eine Flüssigkeit mit größerer Dichte als Wasser oder Milch, wird die notwendige Höhe der Flüssigkeitssäule geringer. Ein typisches Quecksilberbarometer hat bei normalem Luftdruck eine Höhe der Quecksilbersäule von 760 mm (heute 1013 hPa). Das entspricht der alten Einheit für Druckmessungen, dem Torr⁸. In einem ausgeprägten Hochdruckgebiet werden Werte bis 782 mm (1043 hPa) erreicht, in einem stürmischen Tiefdruckgebiet fällt der Luftdruck bis auf 743 mm (990 hPa)⁹. Die benötigte Flüssigkeit wird jeweils vom Reservoir zur Verfügung gestellt bzw. aufgenommen. Würde das Reservoir weggenommen, würde das Quecksilber – wie bei der Milchbüchse oder dem Schlauch – im Rohr verbleiben.

6 Das Schlauchexperiment, Landschulheim Steinmühle, 2017, Wikipedia:Pascals Barometer [{]https://de.wikipedia.org/wiki/Pascals_Barometer%23Bertis_Wassers%C3%A4ulen_und_das_Schlauchexperiment%20 , abgerufen am 9. Februar 2022

7 <https://de.wikipedia.org/wiki/Wasserdruck>

8 <https://de.wikipedia.org/wiki/Torr>

9 Messwert 2021 für Donauwörth, Werner Neudecks Wetterpage [{]<https://www.don-wetter.de/2021/Luftdruck/Luftdrfr.htm> , abgerufen am 29. Januar 2022

1.2.2 Ein häufiges Misskonzept



Abb. 6 Durch den allseitig wirkenden Luftdruck verformter Edelstahlwürfel

Der Luftdruck wird oft mit dem **Gewicht der über uns befindlichen Luftsäule** begründet. In der Tat kann die **Größe des Luftdrucks** auf diese Weise bestimmt werden. Durch diese Herleitung gerät aber das Bewusstsein über die **Allseitigkeit des Luftdrucks** leicht verloren. Aber genau diese allseitige Wirkung des Druckes in Gasen ist es, die uns dieses Gewicht überhaupt nicht spüren lässt, weil auch in unserem Gewebe Luft- bzw Gasblasen sind, deren allseitiger Druck mit dem allseitigen Luftdruck im Gleichgewicht stehen, ganz so wie in der Milchbüchse. Die Allseitigkeit des Luftdrucks und seine Stärke verdeutlicht auch dieser ehemals rechteckige Würfel vor der Kunsthalle in Bremen. Der Edelstahl-Kubus

hatte die Ausgangsmaße 2 x 2 x 2 m und wurde in einer öffentlichen "Implosions-Aktion" anlässlich der Langen Nacht der Museen am 24. Mai 2014¹⁰ verformt: hierfür entzog Ewerdt Hilgemann¹¹ dem Kubus mithilfe einer Vakuumpumpe die Binnenluft, der sich verringern-
de Druck im Inneren des Kubus und der allseitige Luftdruck außerhalb des Kubus führten dazu, dass der Würfel sich allseitig verformte und zusammengestaucht wurde.

10 Performance vor der Kunsthalle Bremen in 2014, Ewerdt Hilgemann ^{<https://bremen.museum-digital.de/index.php?t=objekt&oges=204&navlang=tr>} , abgerufen Dez 2021

11 <https://de.wikipedia.org/wiki/Ewerdt%20Hilgemann>

2 Wie ein Botaniker die Griechen bestätigt

2.1 Mikroskopisch ist alles in Bewegung

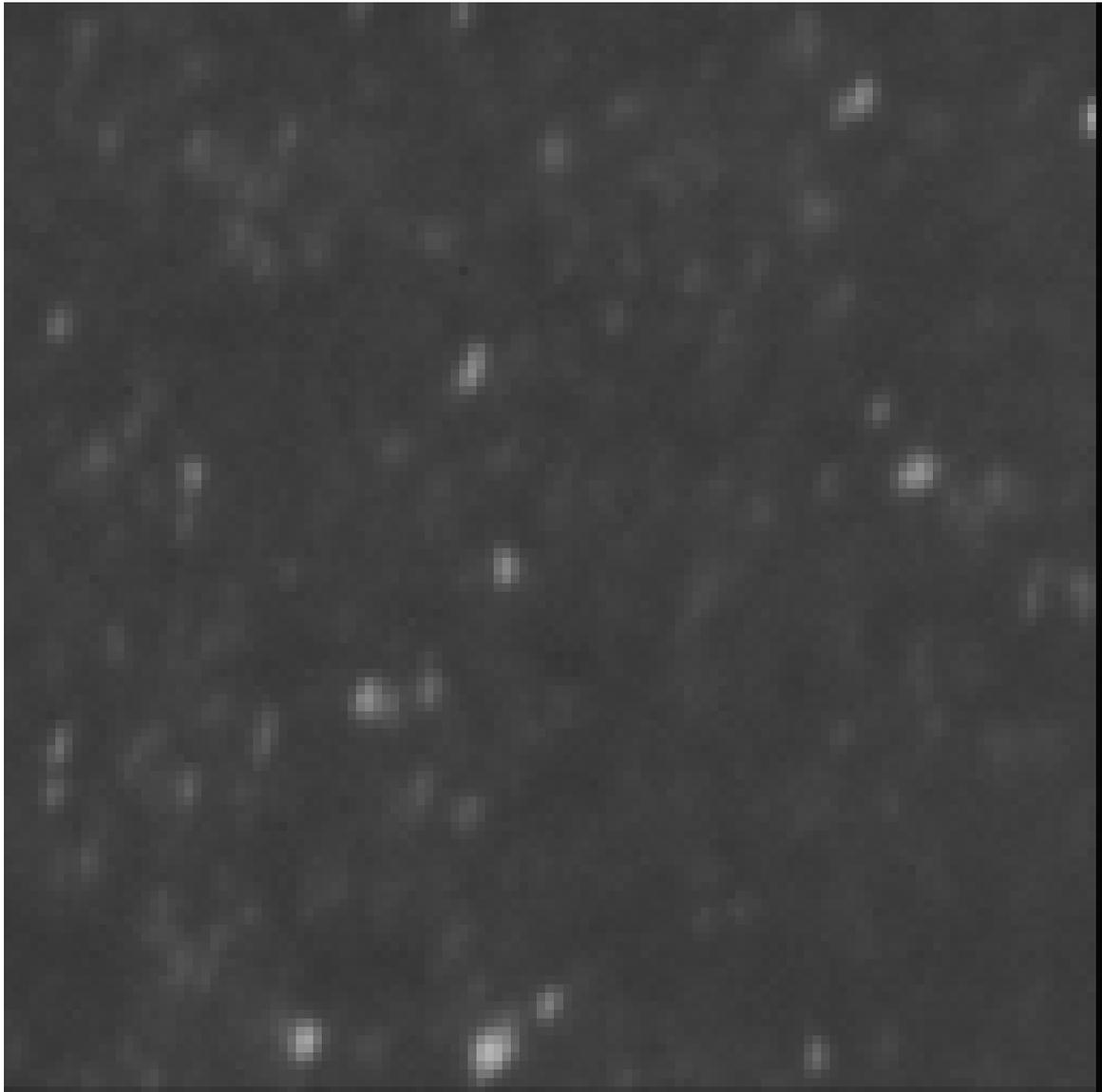


Abb. 7

Brownsche Bewegung bei ca. 60facher Vergrößerung.

In Folge der Entwicklung des Mikroskops tauchen gegen Ende des 18. Jahrhunderts erste Berichte auf über die Beobachtung, dass kleinste Teilchen, unter einem Mikroskop betrachtet, sich in ständiger und ungeordneter Bewegung befinden. Heute wird diese Entdeckung dem schottischen Botaniker Robert Brown zugeschrieben, der sie 1827 veröffentlichte. Das nebenstehende Video zeigt die Brownsche Bewegung fluoreszierender Latex-Kügelchen (20 nm Durchmesser) in Wasser. Schnell wurde klar, dass die Heftigkeit dieser ungeordneten Bewegung zunimmt,

- je kleiner die Teilchen sind und
- je höher die Temperatur ist.

Genauere Untersuchungen mit quantitativen Messungen führte Christian Wiener 1863 durch. Noch heute ist die Demonstration der Brownschen Bewegung eines der Standardexperimente jeder physikalischen Grundausbildung ¹ Die Beobachtung der Brownschen Bewegung beeinflusste nachhaltig die Vorstellung von der Natur der Gase, insbesondere die Frage, ob Gase ein Kontinuum darstellen oder aus diskreten, kleinsten Teilchen bestehen, die sich in ständiger Bewegung befinden.

2.2 Weiterführender Gedanke

2.2.1 Der Wettstreit der physikalischen Schulen

Bei der Interpretation dieser fundamentalen Beobachtung gab es lange zwei grundverschiedene Vorgehensweisen bei der Erkenntnisgewinnung. Steht am Anfang der Erkenntnis eine konkrete Vorstellung von der Welt, oder verschiedene Sinneseindrücke aus der Welt?

¹ Rene Matzdorf, UNIVERSITÄT KASSEL - INSTITUT FÜR PHYSIK, Brownsche Bewegung von Rauchteilchen unter dem Mikroskop, erstellt 17.04.2020, Brownsche Molekularbewegung Experiment (youtube video) [^]{<https://www.youtube.com/watch?v=1NYKE3ZCRMY>} , abgerufen 30. Dezember 2021

Atomismus als Beispiel einer konkreten Vorstellung

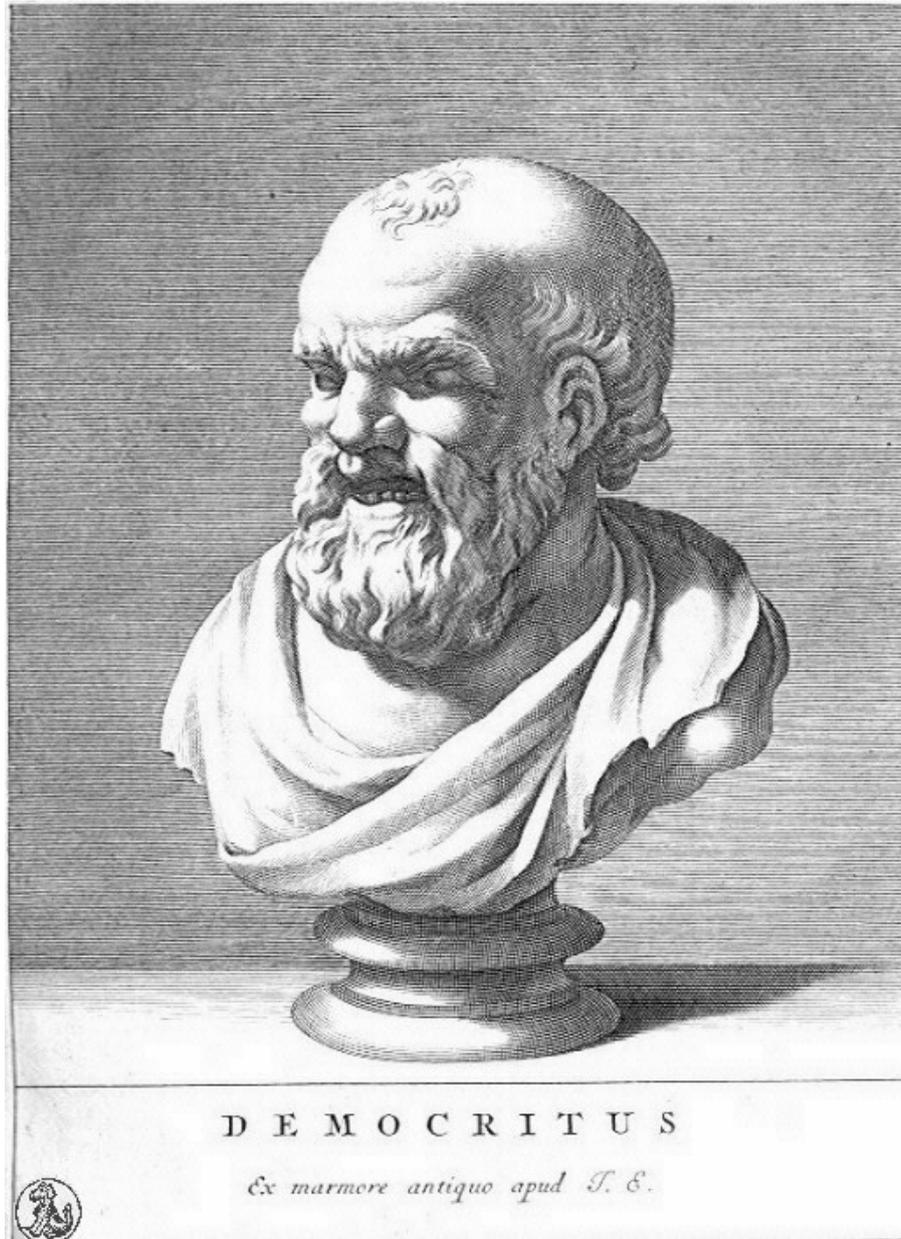


Abb. 8 Demokrit (460-370 v.u.Z.) Kupferstich nach antiker Büste, 18. Jahrhundert

Die eine Schule baute auf die Vorstellung von Demokrit² (ca. 460 – 370 v.u.Z.), nach der die gesamte Natur aus kleinsten unsichtbaren, unteilbaren Atomen zusammengesetzt sei. Demokrits zentrale Aussage dazu lautet „*Nur scheinbar hat ein Ding eine Farbe, nur scheinbar ist es süß oder bitter, in Wirklichkeit gibt es nur Atome im leeren Raum.*“³ Demokrit nahm

² <https://de.wikipedia.org/wiki/Demokrit>

³ Wilhelm Capelle ^{<https://de.wikipedia.org/wiki/Wilhelm%20Capelle%20%28Philologe%29>} : *Die Vorsokratiker*, Leipzig 1935, S. 399.

an, dass jedes Atom die Form eines regelmäßigen geometrischen Körpers hat, wie Kugel, Zylinder, Pyramide, Würfel. Wenn diese sich einander näherten, zusammenfielen oder miteinander verflochten, erschienen die einen als Wasser, andere als Feuer, als Pflanze oder als Mensch.

Demnach war die beobachtbare Brownsche Bewegung kleiner Teilchen die Folge von Stößen mit sich ungeordnet bewegendenden Atomen, die selbst unsichtbar blieben. In diesem Bild war die Temperatur - oder wie man damals sagte die "Wärme" - ein Ausdruck für die Heftigkeit der Bewegung von Atomen.

Sinneseindrücke als Quelle von Erkenntnis



Abb. 9 Ernst Mach (1838-1916)

Die andere Schule wurde u.a. von dem Physiker und Philosophen Ernst Mach⁴ (1838 – 1916) vertreten. Sie lehnte "unsichtbare Ursachen" als Erklärung physikalischer Phänomene ab. Die Quelle aller menschlichen Erkenntnis ist nur eine Mannigfaltigkeit von Sinneseindrücken. Dementsprechend sollte eine Theorie nur Objekte enthalten, die der direkten Sinneserfahrung zugänglich sind. Diese Forderung steht im klaren Gegensatz zu einer Theorie auf der Basis unsichtbarer Atome. Deswegen soll eine Standardantwort von Mach auf die Frage nach der Existenz von Atomen auch gewesen sein: "*Ham se welche gesehen?*"⁵ In dieser Schule wurden der Wärme eher stoffliche Qualitäten zugeschrieben. Das sogenannte "Phlogiston" konnte z.B. sehr anschaulich die Volumenzunahme bei Erwärmung erklären.

Eine Entscheidung zwischen diesen widerstreitenden Konzepten erfolgte im vorliegenden Fall zu Beginn des 20. Jahrhunderts im Sinne des Atomismus.

⁴ <https://de.wikipedia.org/wiki/Ernst%20Mach>

⁵ Wikiquote [{]https://de.wikiquote.org/wiki/Ernst_Mach[}]

3 Wie Einstein mal wieder die Welt erklärt

3.1 Das mittlere Verschiebungsquadrat

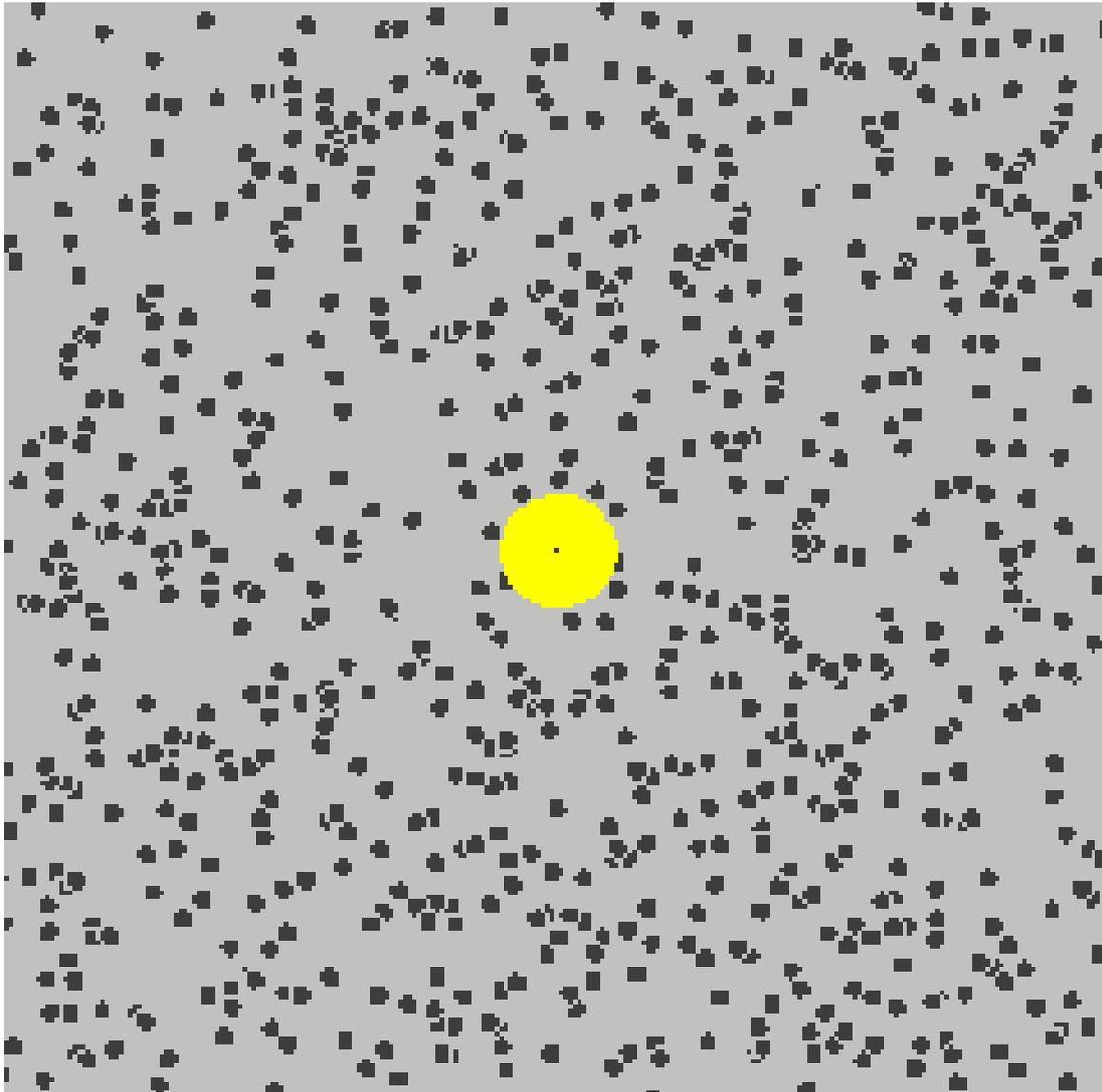


Abb. 10 Simulierte Bewegung eines großen Teilchens (gelb) durch Stöße kleiner Teilchen (grau) in ungeordneter Bewegung

Anfang des 20. Jahrhunderts entwickelten unabhängig voneinander die Physiker A. Einstein¹ (1879-1955) und M. Smoluchowski² (1872-1917) eine mathematische Theorie zur Beschreibung der Verschiebung größerer Teilchen in einem System von kleinen Teilchen in ungeordneter Bewegung. Der Kernbegriff ist das "mittlere Verschiebungsquadrat". In der abgebildeten Simulation ist dies das Quadrat des geradlinigen Abstands zwischen Anfangs- und Endpunkt der Bewegung des gelben Teilchens.

Man betrachte ein System von vielen kleinen Teilchen in ständiger ungeordneter Bewegung (grau). In diesem befindet sich ein größeres Teilchen (gelb). Ist das große Teilchen hinreichend klein, so werden die Stöße durch die kleineren Teilchen zunehmend unausgeglichen sein, mal werden die Stöße von der einen Seite überwiegen, im nächsten Moment die von einer anderen Seite. Auf diese Weise wird das große Teilchen Stück für Stück von seinem Ursprungsort verschoben.

Nach den Theorien von Einstein, Smoluchowski und später noch einmal von P. Langevin³ (1872-1946) ist die Länge dieser Verschiebung je größer, desto kleiner das beobachtete Teilchen ist, desto länger der Prozess andauert und desto höher die Temperatur ist, bei dem der Prozess beobachtet wird. Diese mathematische Theorie ließ sich perfekt auf das Phänomen der Brownschen Bewegung⁴ anwenden. Es begann eine Zeit der Experimente - vor allem durch J.B. Perrin⁵ (1870-1942) - in denen man den Radius kleiner (gelber) Teilchen zu bestimmen suchte und ihr mittleres Verschiebungsquadrat vermaß, um so auf Anzahl, Masse und Geschwindigkeit der unsichtbaren (grauen) Atome zu schließen. Die Ergebnisse passten gut zu anderen, weiter unten beschriebenen, Erkenntnissen, was letztlich der Vorstellung von unsichtbaren Atomen als kleinste Teilchen eines Gases zum Durchbruch verhalf.

1 <https://de.wikipedia.org/wiki/albert%20Einstein>

2 https://de.wikipedia.org/wiki/Marian_Smoluchowski

3 https://de.wikipedia.org/wiki/Paul_Langevin

4 https://de.wikipedia.org/wiki/Brownsche_Bewegung

5 https://de.wikipedia.org/wiki/Jean-Baptiste_Perrin

3.1.1 Die kinetische Gastheorie

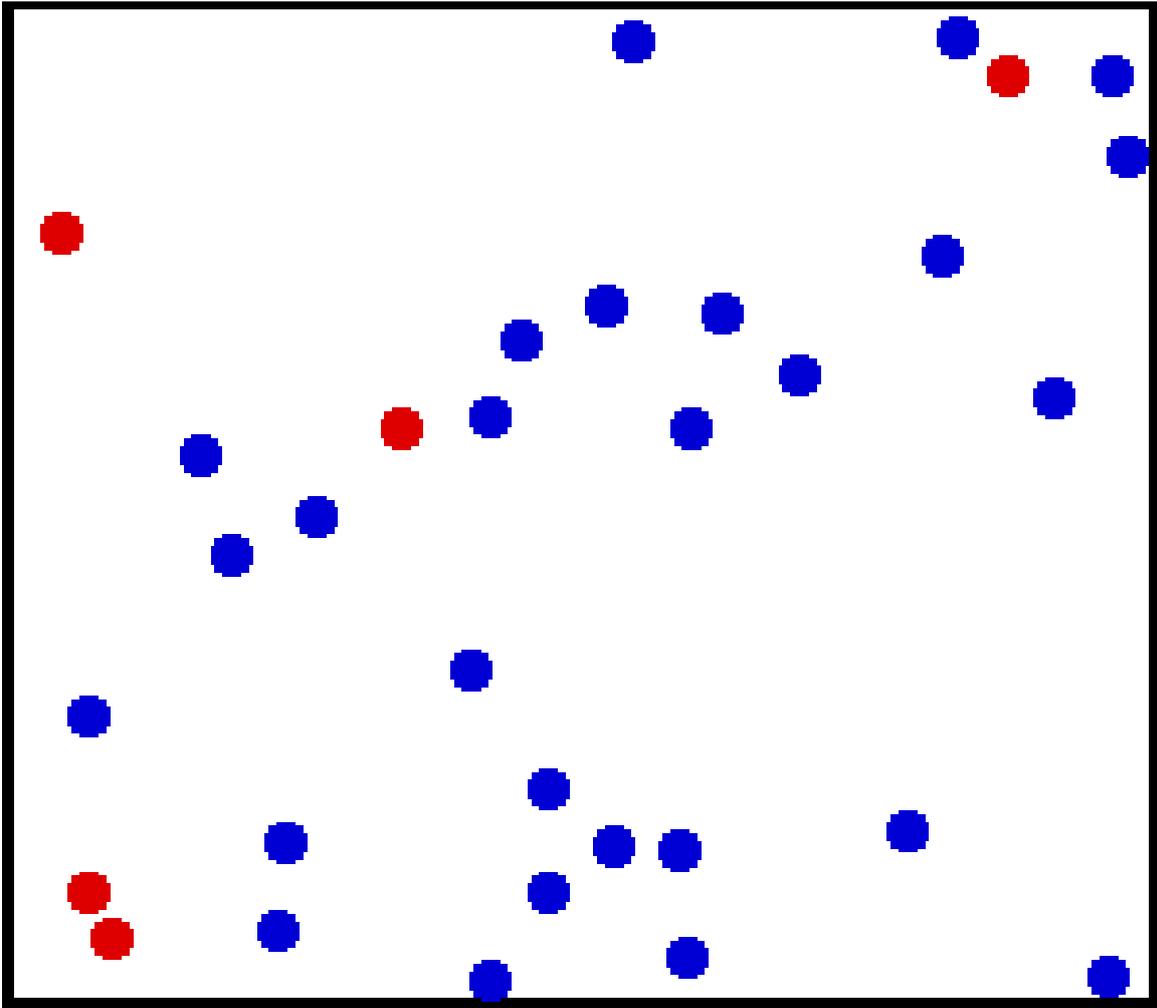


Abb. 11 Ungeordnete thermische Bewegung

Die Descart'sche Vorstellung von Atomen in Gestalt verschiedener geometrischer Formen mit Haken und Ösen, wurde ersetzt durch das Bild von kleinsten Kugeln in ständiger ungeordneter Bewegung. Mit der nunmehr akzeptierten Deutung der Brownschen Bewegung, verursacht durch die ständige ungeordnete Bewegung von unsichtbaren Atomen, wurde die kinetische Gastheorie⁶ entwickelt. Die kinetische Gastheorie beschreibt ein **Ideales Gas** auf der Grundlage folgender Annahmen:

1. Die Atome verhalten sich wie kleine elastische Kugeln.
2. Sie sind in ständiger ungeordneter Bewegung, obwohl das Gas äußerlich in Ruhe bleibt.
3. Die einzige Wechselwirkung sind elastische Stöße untereinander und mit den Begrenzungsflächen (sie verhalten sich anschaulich wie Billardkugeln auf einem Billardtisch).
4. Elektrische, magnetische, chemische Wechselwirkungen finden nicht statt.

⁶ <https://de.wikipedia.org/wiki/kinetische%20Gastheorie>

5. Das Volumen der Atome ist vernachlässigbar klein, mathematisch werden sie als punktförmig angenommen.

Mit diesem einfachen Modell eines Idealen Gases lassen sich viele Phänomene erklären, beobachtbare Gesetzmäßigkeiten herleiten und physikalische Größen quantitativ berechnen. Obwohl die Atome der meisten Gase nicht die Form von Kugeln haben und z.B. elektrische Kräfte zwischen ihnen wirken, verhalten sich viele reale Gase in guter Näherung wie ein Ideales Gas.

3.1.2 Der Gasdruck (qualitativ erklärt)

Die oben gezeigte Animation verdeutlicht die ungeordnete Bewegung der kleinsten Teilchen in einem Idealen Gas. Einige Teilchen sind rot dargestellt, um deren Bewegung besser nachverfolgen zu können. Die Teilchen bewegen sich mit unterschiedlicher Geschwindigkeit in unterschiedliche Richtungen. Wenn sie zusammenstoßen ändern sich Geschwindigkeit und Richtung der Teilchen. Stoßen Teilchen an die Wand so werden sie reflektiert. Diese Reflexion von Teilchen bewirken den Gasdruck auf die Begrenzungsflächen eines Gasvolumens. Man nennt diesen Gasdruck auch "statischen Druck". Man erkennt sofort eine charakteristische Eigenschaft des statischen Drucks, er wirkt gleichmäßig in alle Richtungen, wie es schon das Milchbüchsenbeispiel gezeigt hat.

Es gibt zwei Möglichkeiten, diesen statischen Druck in einem Gas zu verändern.

- Beim Aufblasen eines Luftballon oder Autoreifens werden viel mehr Teilchen pro Volumen zusammengebracht, als sich normalerweise in der Umgebungsluft pro Volumen befinden. Man vergleiche die **Teilchendichte** in den beiden Animationen, die obere Animation entspricht z.B. einem aufgeblasenen Luftballon, die untere z.B. der Umgebungsluft. Eine andere Möglichkeit die Teilchendichte zu erhöhen besteht übrigens darin, ein abgeschlossenes Volumen zu verkleinern, also zu komprimieren.

Bei einer erhöhten Teilchendichte stoßen im gleichen Zeitraum viel mehr Teilchen von innen gegen die Begrenzungswand als von außen, d.h. im Volumen herrscht ein größerer statischer Druck im Vergleich zum umgebenden Luftdruck, also ein Überdruck.

- Beim Erwärmen eines abgeschlossenen Gasvolumens bleibt die Teilchenzahl konstant, aber es wird deren Energie erhöht. Von außen betrachtet erhöht die Energiezufuhr beim Erwärmen die **Temperatur**, aus Sicht der kinetischen Gastheorie erhöht sich die kinetische Energie der ungeordneten Bewegung.

Bei einer erhöhten kinetischen Energie der Teilchen stoßen diese heftiger von innen gegen die Begrenzungswand als von außen, d.h. im Volumen herrscht ein größerer statischer Druck im Vergleich zum umgebenden Luftdruck, also auch ein Überdruck.

3.2 Weiterführende Gedanken

3.2.1 Der Gasdruck (quantitativ hergeleitet)

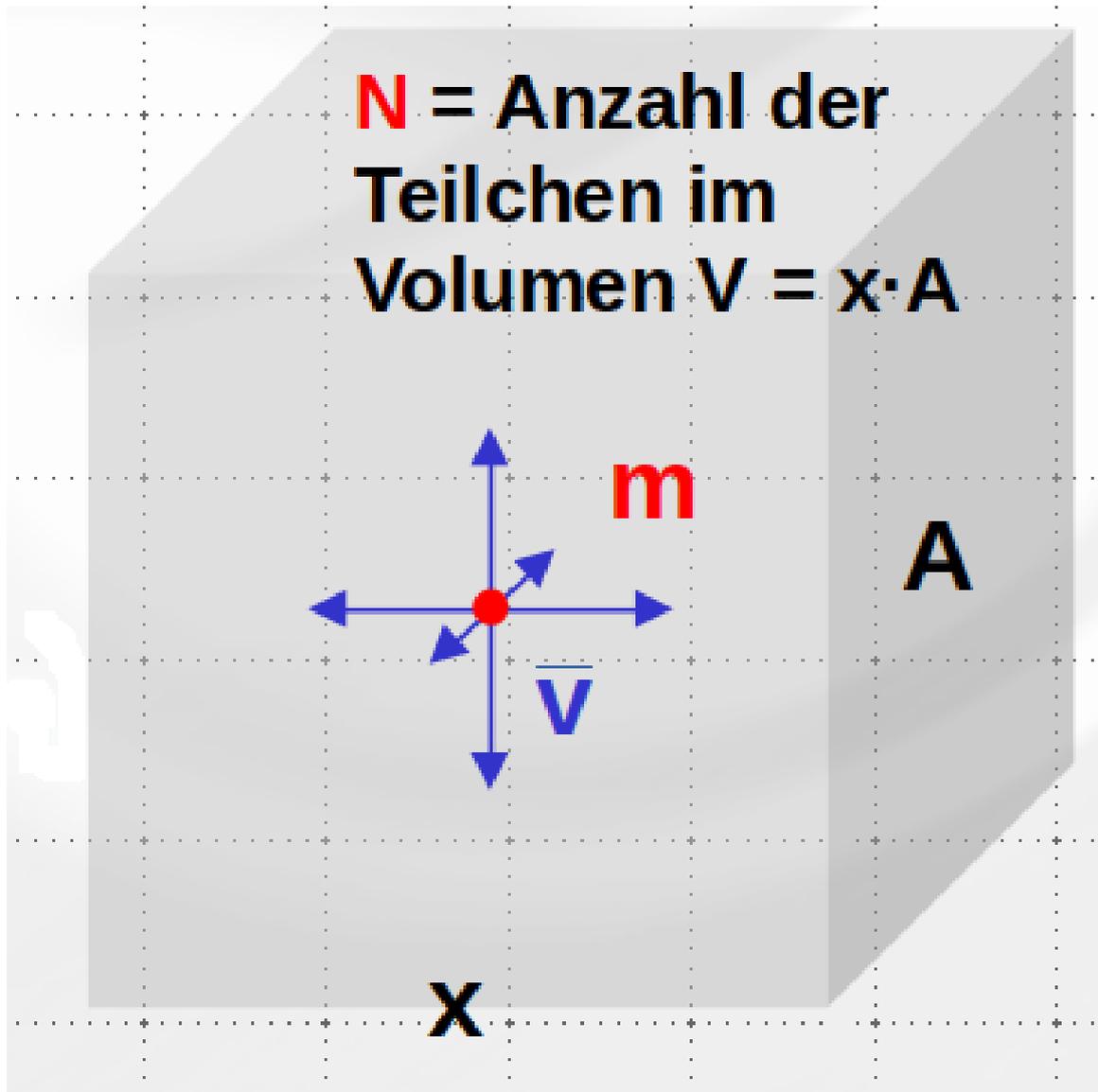


Abb. 12 Vereinfachte Betrachtung zur kinetischen Gastheorie

Die in der kinetischen Gastheorie gemachten Annahmen können zur Herleitung einer Formel für den inneren Druck p eines Gases benutzt werden. Dazu muss man wissen, welche Kraft eine Begrenzungswand erfährt, wenn ein Teilchen gegen sie stößt und reflektiert wird. Diese Kraftwirkung ist abhängig von der Masse und der Geschwindigkeit eines Teilchens. Der entscheidende Begriff ist hier der des Impulses⁷ (= Produkt aus Masse und Geschwindigkeit). Dazu vereinfacht man zuerst die ungeordnete Bewegung gemäß dem folgenden Bild. Wir betrachten ein quaderförmiges Volumen der Kantenlänge x ,

⁷ <https://de.wikipedia.org/wiki/%20Impuls>

in dem sich N Teilchen der Masse m mit der mittleren Geschwindigkeit \bar{v} bewegen, und zwar je $1/6$ der Teilchen in jede der 6 Raumrichtungen. Wie groß ist der mittlere Impulsübertrag pro Zeit, wenn alle $1/6N$ Teilchen einmal gegen die Fläche A gestoßen sind?

Ein Teilchen, welches mit \bar{v} gegen die Fläche A stößt, wird mit $-\bar{v}$ von der Fläche reflektiert. Der Impulsübertrag eines Teilchens durch die Reflexion an der Fläche A ist also

$$2m\bar{v}$$

In dem Volumen bewegen sich $1/6$ aller Teilchen in Richtung auf die Fläche A . Der Gesamtimpulsübertrag dieser Teilchen ist demnach

$$\frac{1}{6}N \cdot 2m\bar{v}$$

Diese Impulsänderung erfolgt in der Zeit t , die das am weitest entfernte Teilchen (an der gegenüberliegenden Wand) braucht, um zur Fläche A zu gelangen. Diese Zeit, die das Teilchen mit der Geschwindigkeit \bar{v} braucht, um die Strecke x zurückzulegen ist

$$t = \frac{x}{\bar{v}}$$

Die Kraft F , welche die Fläche A erfährt, ist so groß wie der gesamte Impulsübertrag $1/6N2m\bar{v}$ dividiert durch die dafür benötigte Zeit $t = x/\bar{v}$. Berücksichtigt man, dass man durch einen Bruch dividiert, indem man mit dem Kehrwert multipliziert, erhält man für die Kraft

$$F = \frac{1}{6}N \cdot 2m\bar{v} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{6}N \cdot 2m\bar{v} \cdot \frac{\bar{v}}{x} = \frac{1}{6}N \cdot \frac{2m\bar{v}^2}{x}$$

Der Druck p , der von dem Gas auf die Fläche A ausgeübt wird, berechnet sich nach

$$p = \frac{F}{A}$$

Damit erhält man

$$p = \frac{1}{6}N \cdot \frac{2m\bar{v}^2}{x \cdot A}$$

Der Teiler entspricht dem Volumen $V = x \cdot A$ des Würfels

$$p = \frac{1}{6}N \cdot \frac{2m\bar{v}^2}{V}$$

Nach Multiplikation mit V

$$pV = \frac{1}{6}N \cdot 2m\bar{v}^2$$

Für eine bessere Interpretation formt man die rechte Seite um zu

$$pV = \frac{2}{6}N \cdot m\bar{v}^2 = \frac{1}{3}N \cdot m\bar{v}^2 = \frac{2}{3}N \cdot \frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{2}{3}N \cdot \bar{E}_{kin} \quad (\text{GL. 1})$$

Diese Betrachtung zeigt, das Produkt aus Gasdruck p und Gasvolumen V ist proportional zur mittleren kinetischen Energie der ungeordneten Bewegung \bar{E}_{kin} und zu der Anzahl der Teilchen N , vermittelt durch einen Proportionalitätsfaktor $2/3$.

Interessant ist an dieser Stelle, dass der Gasdruck p in einem gegebenen Volumen unabhängig von der Masse m der Gasteilchen ist. Der Gasdruck ist nicht proportional zur Dichte ρ des Gases, sondern proportional zur Anzahl N von kleinsten Teilchen, d.h. der Menge des Gases. Schon weit vor der allgemeinen Akzeptanz der kinetischen Gastheorie formulierte A. Avogadro (1776–1856) das nach ihm benannte Avogadrosches Gesetz⁸, wonach alle Gase in gleichen Volumina (bei gleicher Temperatur und gleichem Druck) dieselbe Anzahl kleinster Teilchen enthalten. Das ist nicht selbstverständlich, denn es hat zur Konsequenz, dass gleiche Volumina unterschiedlicher Gase sich in physikalischer Hinsicht gleich verhalten. D.h. in erster Näherung verhalten sich 1 l Sauerstoff oder 1 l Stickstoff oder 1 l Luft - bei gleichem Druck und gleicher Temperatur - physikalisch gleich. Man braucht z.B. zwischen reinen Gasen und Gasgemischen nicht zu unterscheiden, zumindest solange die Annahmen der kinetischen Gastheorie hinreichend erfüllt werden.

Die kinetische Gastheorie zeigt als weitere Konsequenz, dass sich schwerere Teilchen bei gleicher Temperatur entsprechend langsamer bewegen müssen als leichte Gasteilchen, und zwar so, dass sie bei ihren Stößen auf eine Begrenzungswand denselben Druck ausüben.

Um die gefundene Beziehung weiter zu interpretieren und mit der beobachtbaren Erfahrung zu verknüpfen, braucht man einen Zusammenhang zwischen der mikroskopisch mittleren kinetischen Energie der ungeordneten Teilchenbewegung \bar{E}_{kin} und der makroskopisch messbaren Temperatur T .

3.2.2 Die Verknüpfung von innerer Energie und Temperatur eines Gases

Insbesondere J.C. Maxwell (1831-1879) beschäftigte sich mit der Geschwindigkeitsverteilung⁹ der kleinsten Teilchen in einem Idealen Gas und formulierte, dass bei gegebener Temperatur die gesamte kinetische Energie eines Idealen Gases das Produkt der Freiheitsgrade eines Systems mit einer universellen Konstante sein müsse. Ein Gas mit als kugelförmig betrachteten Teilchen besitzt z.B. 3 Freiheitsgrade, weil sich die Energie auf 3 Bewegungsrichtungen verteilen kann.

⁸ https://de.wikipedia.org/wiki/Avogadrosches_Gesetz

⁹ <https://de.wikipedia.org/wiki/Maxwell-Boltzmann-Verteilung>

L. Boltzmann (1844-1906) entwickelte diese statistische Betrachtung weiter und stellte für die mittlere kinetische Energie eines einatomigen Gases den Zusammenhang mit der makroskopisch messbaren Temperatur T fest¹⁰.

$$\frac{1}{2}m\bar{v}^2 = 3 \cdot \frac{1}{2}k_B T \quad (\text{Gl. 2})$$

Die Boltzmann-Konstante¹¹ k_B ist der Proportionalitätsfaktor zwischen der mikroskopischen Energie und der makroskopischen Temperatur und gehört zu den Fundamentalkonstanten in der Physik.

Die Summe der kinetischen Energie der ungeordneten Bewegung bezeichnet man als die „innere Energie“ U des Systems. Sie ist proportional zu der Temperatur T des Systems und der Menge N an Gasteilchen.

$$U = N \cdot \frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{3}{2}Nk_B T$$

3.2.3 Zustandsgleichung von Gasen

Die aus der kinetischen Gastheorie hergeleiteten Gl. 1 und Gl. 2 kann man verknüpfen und erhält eine Gleichung in der nur noch makroskopische (messbare) Größen enthalten sind

$$pV = Nk_B T \quad (\text{Gl. 3})$$

dabei ist

p = statischer Druck, innerer allseitiger Druck des Gases

V = Volumen des Gases

N = Anzahl der Gasteilchen im Volumen

T = Temperatur in °Kelvin

$k_B T$ = Größe des typischen zufälligen Energieaustauschs zwischen zwei stoßenden Teilchen

Diese Gleichung beschreibt ganz allgemein das Verhältnis von Druck, Volumen und Temperatur einer gegebenen Menge von N Gasteilchen. Diese Gleichung ist unabhängig von der konkreten Gasart, solange das Gas den Annahmen des Idealen Gases hinreichend entspricht. Weil die Anzahl der Teilchen sehr groß ist benutzt man im Allgemeinen die größere Einheit *mol* für die Stoffmenge. Ein *mol* eines Gases nimmt bei Normalbedingungen ($p_0 = 1013,25$ hPa und $T_0 = 273,15$ K, bzw. 0°C) ein Volumen¹² von 22,414 l ein und enthält darin

$$N_A = 6,02214076 \cdot 10^{23} \text{ [mol}^{-1}\text{]}$$

10 L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie, Leipzig, 1896, [archive.org ^{https://archive.org/details/vorlesungenber01bolt/mode/2up?view=theater}](https://archive.org/details/vorlesungenber01bolt/mode/2up?view=theater)

11 <https://de.wikipedia.org/wiki/Boltzmann-Konstante>

12 https://de.wikipedia.org/wiki/Molares_Volumen

Teilchen. Diese Zahl wird auch Avogadro-Konstante¹³ genannt. Man bezeichnet mit n die Anzahl der *mole*, also

$$n = \frac{N}{N_A} [\text{mol}] \text{ bzw. } N = n N_A [\text{mol}]$$

Damit erhält man die oft verwendete Schreibweise für die thermische Zustandsgleichung idealer Gase, die sogenannte **allgemeine Gasgleichung**

$$pV = n N_a k_B T$$

$$pV = n RT \text{ (Gl. 4)}$$

dabei ist

$$R = N_A k_B = 8,31447 \left[\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}} \right]$$

n = Anzahl der Mole

Der entstandene Proportionalitätsfaktor wird **universelle Gaskonstante** R genannt. Er bezeichnet anschaulich die Energiemenge pro *mol* und ° Temperaturänderung. R hat für alle Gase denselben Wert, welche den Annahmen der kinetischen Gastheorie entsprechen. Die universelle Gaskonstante kann für viele reale Gase in einem großem Druck- und Temperaturbereich mit guter Genauigkeit angewandt werden.

Die allgemeine Gasgleichung beschreibt das Verhalten vieler Gase, weil sie sich auf **gleiche Mengen** bezieht, d.h. - bei derselben Temperatur und demselben Druck - auf gleiche Volumina bzw. gleiche Teilchenanzahl. Konkret heißt das, dass bei gleichem Druck (z.B. Umgebungsdruck) und gleicher Temperatur (z.B. 127 °C (ca. 400 K) sich 1 l Wasserstoffgas - in physikalischer Hinsicht - genauso verhält wie 1 l Wasserdampf weil 1 l Wasserstoffgas genauso viele Teilchen enthält wie 1 l Wasserdampf.

Das gilt aber nicht, wenn man sich stattdessen auf **gleiche Massen** bezieht. Z.B. hat 1 kg Wasserstoffgas bei 100 °C (ca. 373 K) und Umgebungsdruck ein Volumen von ca. 17.000 l, während 1 kg Wasserdampf unter denselben Bedingungen nur ein Volumen von ca. 1.600 l einnimmt, also aus viel weniger aber schwereren Teilchen besteht. Um aus der allgemeinen Gasgleichung die thermische Zustandsgleichung eines speziellen Gases zu erhalten, ersetzt man die Anzahl der Mole n durch die aktuelle Masse m , dividiert durch die Masse eines Mols M

$$pV = n RT$$

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

$$pV = m \frac{R}{M} T$$

Damit erhält man die **thermische Zustandsgleichung eines speziellen Gases**

¹³ <https://de.wikipedia.org/wiki/Avogadro-Konstante>

$$pV = m R_s T \text{ (Gl. 5)}$$

dabei ist

$$R_s = \frac{R}{M} = \text{stoffspezifische Gaskonstante}$$

Der Proportionalitätsfaktor R_s wird **spezielle Gaskonstante** bezeichnet. R_s hat für jedes Gas einen anderen Wert. Die spezifische Gaskonstante eines Gases erhält man durch Division der universellen Gaskonstante R mit der Molaren Masse M des Gases. Die universellen Gaskonstante R bezeichnet anschaulich die Energiemenge pro kg und $^\circ$ Temperaturänderung.

4 Was uns ein Autostau über Luftströmungen verrät

4.1 Die Kontinuitätsgleichung

1797 veröffentlicht Giovanni Battista Venturi¹ (1746-1822) seine Untersuchungen zur Fließgeschwindigkeit von Wasser in Rohren mit veränderlichen Querschnitten²³. Daraus entstand die Kontinuitätsgleichung⁴ für die Strömung von kompressiblen und inkompressiblen Flüssigkeiten und Gasen (Fluiden). Die Kontinuitätsgleichung soll an einer Betrachtung zum Autoverkehr verdeutlicht werden.

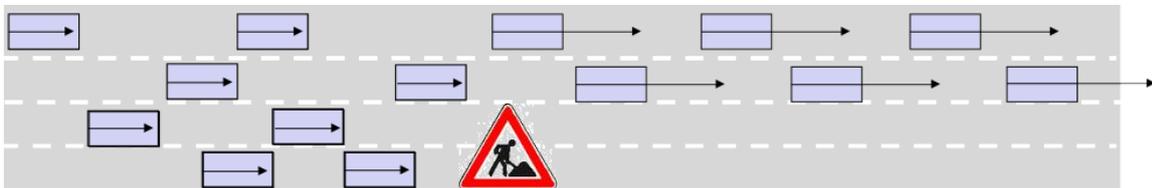


Abb. 13 Wie müssen sich Autofahrer verhalten, um bei einer Verengung einen Stau zu vermeiden?

Man stelle sich eine vierspurige Autobahn vor, auf der es wegen einer Baustelle zu einer Verengung auf zwei Fahrspuren kommt. Wie müssen sich die Autofahrer bei der Halbierung dieser Fahrbahn verhalten um einen Stau zu vermeiden? Es gibt grundsätzlich zwei Möglichkeiten:

1. Bei gleichem Abstand fahren die Autos doppelt so schnell (Vergrößerung der Geschwindigkeit).
2. Bei gleicher Geschwindigkeit verringern die Autos den Abstand untereinander auf die Hälfte (Vergrößerung der *Verkehrsdichte*⁵).

Natürlich gibt es auch die Kombination aus erhöhter Geschwindigkeit und verringertem Abstand. Ob es Autofahrern auf diese Weise gelingt einen konstanten Verkehrsfluss aufrechtzuerhalten, hängt außerdem vom Sicherheitsabstand und der erreichbaren Höchstgeschwindigkeit ab. Ist die Fahrgeschwindigkeit vor der Baustelle schon nahe der Höchstgeschwindigkeit,

1 <https://de.wikipedia.org/wiki/Giovanni%20Battista%20Venturi>

2 J.B. Venturi, Experimental researches concerning the principle of the lateral communication of motion in fluids, applied to the explanation of various hydraulic phenomena, (Übersetzung aus dem Französischen von W. Nicholson), in M.Taylor, Tracts on Hydraulics, London 1836, S.123-184, archive.org ^{https://archive.org/stream/tractsonhydraul00tredgoog#page/n135/mode/2up}

3 Abbildungen zur Übersetzung aus der Originalarbeit von J.B. Venturi, gallica.bnf.fr ^{https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k9611865z/f9.item.zoom}

4 <https://de.wikipedia.org/wiki/Kontinuit%C3%A4tsgleichung>

5 <https://de.wikipedia.org/wiki/Verkehrsdichte>

kann bei gleichem Abstand die Geschwindigkeit nicht mehr verdoppelt werden. Ist auf der anderen Seite die Verkehrsdichte vor der Baustelle schon sehr hoch, kann der Abstand nicht ausreichend verringert werden, zumindest nicht von verantwortungsvollen Autofahrern, die den Sicherheitsabstand einhalten wollen. D.h. in der Verengung wird der Verkehrsfluss langsamer und vor der Verengung kommt es zu zähfließendem Verkehr oder sogar zu einem Stau mit Stillstand.

4.1.1 Die Luft kennt keinen Stau

Die Luftteilchen dagegen benutzen die beiden oben genannten Möglichkeiten bei der Umströmung eines Hindernisses voll aus. In der Natur gibt es bei Strömungen keinen Stau wie beim Autoverkehr. Was hereinfließt, fließt genauso wieder heraus. Dafür verändert die strömende Luft ihre Geschwindigkeit und Dichte. Das ist die Grundaussage der Kontinuitätsgleichung. In einer Gleichung zusammengefasst sieht das so aus:

$$\rho_1 \cdot v_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot v_2 \cdot A_2 = \rho_3 \cdot v_3 \cdot A_3$$

mit

ρ = Dichte

v = Strömungsgeschwindigkeit

A = Strömungsquerschnittsfläche

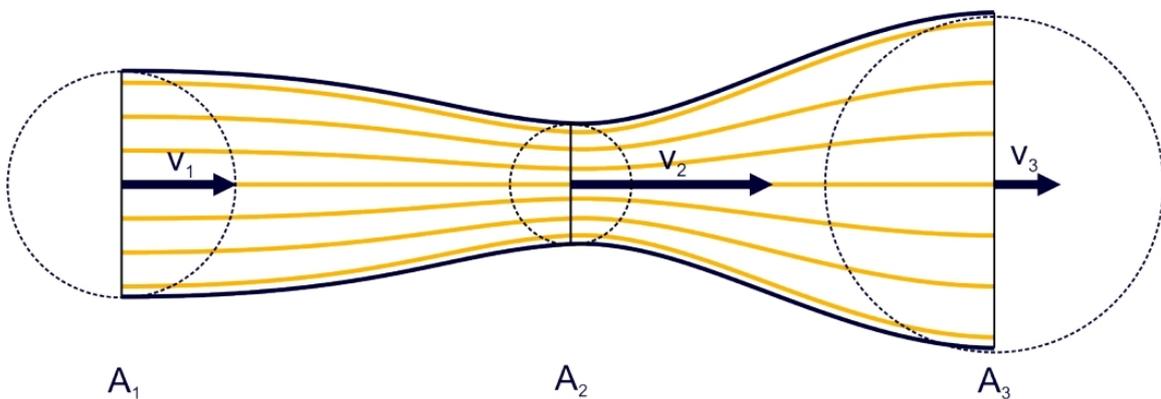


Abb. 14 Bei Strömungen weit unterhalb der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit verhält sich die Strömungsgeschwindigkeit umgekehrt proportional zum Strömungsquerschnitt

Bei einer Luftströmung verhält es sich so, dass bei kleinen Geschwindigkeiten im Vergleich zur Wellenausbreitungsgeschwindigkeit (Schallgeschwindigkeit⁶) vor allem der 1. Effekt (Vergrößerung der Strömungsgeschwindigkeit) bei weitem überwiegt, d.h. die Dichte in der Luftströmung bleibt konstant. Eine Luftströmung verhält sich also ähnlich wie eine Wasserströmung. Das ist nicht selbstverständlich, weil (ruhende) Luft im Gegensatz zu Wasser leicht komprimiert werden kann. Aber strömende Luft verhält sich ungefähr so inkompressibel wie Wasser. Dadurch vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung hin zu der Formulierung durch Venturi, dass sich bei einer Verkleinerung der Strömungsquerschnittsfläche die Strömungsgeschwindigkeit entsprechend vergrößert und umgekehrt. Die Kontinuitätsgleichung einer inkompressiblen Strömung lautet:

$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 = v_3 \cdot A_3$$

Erst bei höheren Geschwindigkeiten bekommt der 2. Effekt der Kompressibilität (Vergrößerung der Dichte) zunehmend Einfluss. Um z.B. das Verhalten einer Strömungen nahe der Schallgeschwindigkeit zu beschreiben, ist die Berücksichtigung der Kompressibilität in der Strömung von unverzichtbarer Bedeutung.

4.2 Weiterführender Gedanke

Die Schallgeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, mit der sich Schallwellen ausbreiten. In der Luft am Erdboden beträgt die Schallgeschwindigkeit⁷ 1.236 km/h. Die Schallgeschwindigkeit nimmt mit der Höhe in der Atmosphäre ab und beträgt z.B. in einer typischen Reiseflughöhe von 10 km nur noch 1076 km/h⁸

Die Schallgeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, mit der sich Druckänderungen oder Störungen in einem Körper oder Fluid fortbewegen. Von daher kann man sich vorstellen, dass mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit die Information einer Verengung (d.h. die damit verbundene Veränderung der Druck- und Strömungsverhältnisse) immer kurzfristiger bei einem anströmenden Gasvolumen ankommt. Im Fall einer Strömung mit Schallgeschwindigkeit „bemerkt“ ein Gasvolumen erst unmittelbar vor einem Hindernis dessen Existenz. Ein Effekt davon ist die sogenannte Schallmauer⁹.

Aber auch bei Bewegungen unterhalb der Schallgeschwindigkeit treten schon Kompressibilitätseffekte auf, d.h. beim Auftreffen auf ein Hindernis und dem Umströmen wird die Luft nicht nur beschleunigt, sondern sie wird auch komprimiert, wie es in der allgemeinen Formulierung der Kontinuitätsgleichung enthalten ist. In der Fliegerei geht man i. Allg. davon aus, dass für langsame Kleinflugzeuge bis ca. 300 km/h der inkompressible Ansatz die Strömungsverhältnisse ausreichend genau beschreibt. Mit zunehmender Geschwindigkeit hat die Kompression der Luft einen immer größer werdenden Einfluss. Für die Beschreibung der Strömungsverhältnisse bei Verkehrsflugzeugen mit ca. 900 km/h Reisegeschwindigkeit müssen deswegen stets Kompressibilitätseffekte berücksichtigt werden.

6 <https://de.wikipedia.org/wiki/Schallgeschwindigkeit>

7 <https://de.wikipedia.org/wiki/Schallgeschwindigkeit>

8 Die Internationale Standardatmosphäre, vgl. Normatmosphäre [^]<https://de.wikipedia.org/wiki/Normatmosph%C3%A4re> , abgerufen am 5. Februar 2022

9 <https://de.wikipedia.org/wiki/%C3%9Cberschallflug>

5 Woher kommt der Auftrieb bei einer Umströmung?

5.1 Die umströmende Luft beschleunigt sich selber

Dieses Kapitel kombiniert die grundlegenden Erkenntnisse der vorangegangenen Betrachtungen und führt zu einem zentralen Teil der Erklärung des Auftriebs. Welche grundlegenden Erkenntnisse werden hier benutzt:

- Der Druck in einem ruhenden Gas wirkt in alle Richtungen gleich (=statische Druck).
- Ein Gas besteht aus kleinsten Teilchen, die sich in ständiger ungeordneter Bewegung befinden (Brown'sche Molekularbewegung)
- In der kinetischen Gastheorie wird der statische Druck durch Reflexion der kleinsten Teilchen an den Begrenzungswänden erklärt.
- Die Kontinuitätsgleichung besagt, dass bei einer Verengung des Strömungsquerschnitts die strömende Luft eine höhere Geschwindigkeit besitzt.

Diese 4 Erkenntnisse werden nun zusammengebracht. Die Kontinuitätsgleichung beschreibt im allgemeinen das Verhalten von Rohrströmungen bei einer Verengung. Die Aussage der Kontinuitätsgleichung wird hier auf die qualitativ ähnliche Situation beim Umströmen von Hindernissen übertragen, denn auch hier gibt es eine Verengung des Strömungsquerschnitts.

Die zentrale Frage dieses Kapitels ist nun: **Woher kommt die zusätzliche kinetische Energie bei einer verengten Umströmung?** Energie ist eine Erhaltungsgröße und kann nicht einfach erzeugt oder vernichtet werden, sie wird entweder von außen zugeführt oder ist schon im System vorhanden und macht sich nur anders bemerkbar.

Man betrachte die Situation des abgebildeten LKWs im Windkanal. Oberhalb des LKW hat der Luftstrom eine geringere Querschnittsfläche zur Verfügung, dort wird die Luft gemäß der Kontinuitätsgleichung also schneller strömen. Dies entspricht einer höheren kinetischen Energie. Der ruhende LKW kann schwerlich zusätzliche kinetische Energie an den Luftstrom übertragen, welche Kraft sollte das bewirken? Es gibt in dieser Situation auch kein anderes System, welches die notwendige Energie dem Luftstrom von außen hinzufügen könnte. So bleibt nur eine Schlussfolgerung: Bei einem verringerten Strömungsquerschnitt beschleunigt sich die Luft selbst und deswegen **kommt die benötigte Energie aus dem Energievorrat der Luftströmung selber**. Es wird hier keine Betrachtung über den Mechanismus der Beschleunigung angestellt, die Aussage bezieht sich nur auf die Quelle der dazu benötigten Energie.

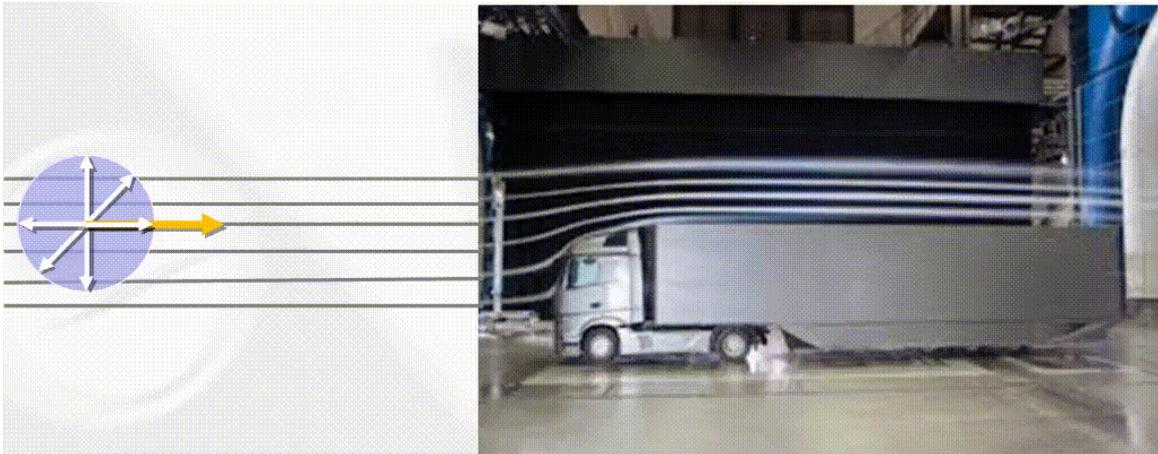


Abb. 15 Animation der Umströmung eines Hindernisses im kinetischen Gasmodell

Im Windkanal besitzt die strömende Luft kinetische Energie, die ihr zuvor, z.B. durch einen Propeller zugeführt wurde (Im Bild angedeutet durch den gelben Geschwindigkeitspfeil in Strömungsrichtung). Das kinetische Gasmodell zeigt, dass die strömende Luft im Windkanal darüber hinaus stets auch kinetische Energie in der ungeordneten Teilchenbewegung besitzt, angedeutet durch die Größe des Kreises mit den gleichverteilten Geschwindigkeiten in den 6 Raumrichtungen. Diese Energie wird auch als Innere Energie oder Druckenergie bezeichnet. Es ist dieser Energievorrat, der für die Beschleunigung der Luft in einer Verengung während der Umströmung benutzt wird ¹.

Es bleibt hier die Frage offen, wie die Luft ihre Beschleunigung anstellt aber es soll festgestellt werden, dass in der Umströmung die kinetische Energie der ungeordneten Bewegung abgenommen hat (kleinerer Kreis) zugunsten einer zusätzlichen Geschwindigkeit (weißer Pfeil) in Strömungsrichtung. Man könnte auch sagen, die Energie der ungeordneten Bewegung ist konstant geblieben aber die Gleichverteilung der Energie der ungeordneten Bewegung ist während der Umströmung gestört und wird am Ende der Umströmung wieder hergestellt.

¹ Windlast und -sog am geneigten Dach, Baunetz Wissen ^{<https://www.baunetzwissen.de/glossar/w/windsog-1663253>}, abgerufen am 6. Februar 2022

5.2 Druckverhältnisse in der Umströmung von Hindernissen



Abb. 16 Durch die Umströmung des fahrenden LKW wölbt sich die Plane hinter der Fahrerkabine nach außen

Die höhere Strömungsgeschwindigkeit bei der Umströmung von Hindernissen kann in der Realität beobachtet und mit geeigneten Instrumenten gemessen werden. Interpretiert man das Verhalten der umströmenden Luft durch eine Umverteilung der inneren Energie, gibt es noch eine zweite Konsequenz, welche für die Frage nach der Ursache des Auftriebs einen entscheidenden Baustein liefert.

Aus dem kinetischen Gasmodell wurde als Folge der ungeordneten Bewegung eine Gesetzmäßigkeit für den statischen Druck eines Gases abgeleitet. Diese Betrachtung zeigt, dass der Druck u.a. von der kinetischen Energie der Teilchen abhängig ist, mit denen diese gegen Begrenzungswände stoßen. Als notwendige Konsequenz wird in einer Umströmung in Strömungsrichtung ein höherer Druck herrschen (den Zuwachs nennt man auch dynamischer Druck²), während sich senkrecht zur Strömungsrichtung ein geringerer (statischer) Druck einstellt, und zwar geringer als der statische Druck der ruhenden Luft.

So wie die Geschwindigkeitszunahme bei einer Umströmung kann auch die veränderte Druckverteilung bei der Umströmung von Hindernissen in der Realität beobachtet und mit geeigneten Instrumenten gemessen werden³. Eine unmittelbare Folge zeigt der fahrende LKW mit einer Plane anstatt eines festen Aufbaus. Durch das Umströmen des LKW

² https://de.wikipedia.org/wiki/Druck_%28Physik%29%23Hydrodynamischer_Druck

³ Experiment mit dem Venturi-Rohr ^{https://paw.n.physik.uni-wuerzburg.de/physikonline/filme/mpg_m8_fluide/bernu5ks.mpg}, Physik Online der Universität Würzburg, abgerufen 14. Januar 2022

herrscht senkrecht zur Fahrtrichtung ein geringerer Druck, der das Herauswölben der Plane unmittelbar hinter der Fahrerkabine erklärt.

5.3 Weiterführende Gedanken

5.3.1 Bernoulli's grundlegende Beobachtung

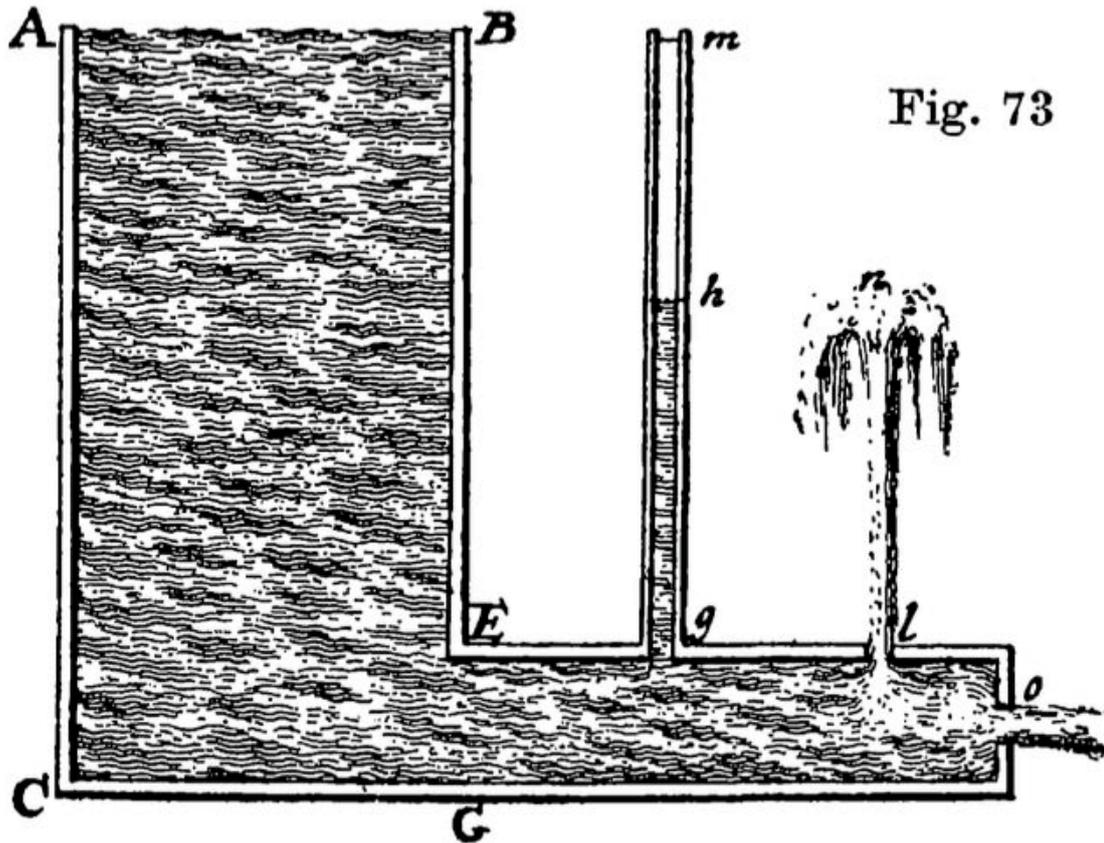


Abb. 17 Skizze zum Experiment von D. Bernoulli von 1738

D. Bernoulli (1700-1782) beschäftigte sich in seinem wichtigen Hauptwerk „Hydrodynamica“ mit dem Fließverhalten von Wasser in Kanälen und Rohrsystemen. Er erkannte und beschrieb das zum Beispiel anhand des nebenstehend skizzierten Experiments⁴. Sind die Rohröffnungen l und o zum Ende des waagerechten Rohres verschlossen, steigt das Wasser in der schmalen senkrechten Röhre g auf die Höhe m , d.h. so hoch wie die Linie AB im großen Behälter links. Die Situation entspricht der der Kommunizierenden Röhren⁵. Die Sorgfalt, mit der Bernoulli seine Beobachtungen durchführte zeigt sich u.a. auch darin,

4 DANIEL BERNOULLI'S *Hydrodynamicae*, Translated and annotated by Ian Bruce, 2014, Section XII, S.503, Fig.73, <http://www.17centurymaths.com/contents/dbernoullicontents.htm>

5 https://de.wikipedia.org/wiki/Kommunizierende_R%C3%B6hren

dass er den Einfluss von Kapilarkräften⁶ auf seine Messungen berücksichtigte.

Wird nun die Öffnung o geöffnet, wird das vormals ruhende Wasser ausströmen. Dabei verringert sich der Druck des strömenden Wassers senkrecht zur Rohrwand, in der Skizze sinkt das Wasser in der schmalen senkrechten Röhre g auf den Punkt h ; das Wasser steigt in einer Fontäne durch die Öffnung l nur noch bis zur selben Höhe h . Bei den Experimenten wird das ausströmende Wasser im großen Behälter $ABCGE$ stetig nachgefüllt, so dass der Wasserstand AB konstant erhalten bleibt.

Bernoulli betonte, dass die Öffnung l sehr klein gegenüber der Öffnung o ist, d.h. dass durch die Öffnung bei l nur sehr wenig Wasser austritt im Vergleich zur Öffnung o . Die Strömungsgeschwindigkeit im waagerechten Rohrabschnitt wird also im wesentlichen durch die Größe der Öffnung o bestimmt. Die Höhe der Fontäne bei l repräsentiert nur den Druck an der Rohrwandung der Wasserleitung.

Bernoulli experimentierte mit verschiedenen Größen der Öffnung o , also mit verschiedenen Strömungsgeschwindigkeiten. Entspricht die Öffnung o dem gesamten Rohrquerschnitt EG , so steigt kein Wasser mehr in der Röhre g hoch, d.h. senkrecht zur Rohrwand herrscht nur noch ein Druck von der Größe des umgebenden Luftdrucks.

⁶ <https://de.wikipedia.org/wiki/Kapilarit%C3%A4t>

5.3.2 Herleitung der Bernoulli Gleichung

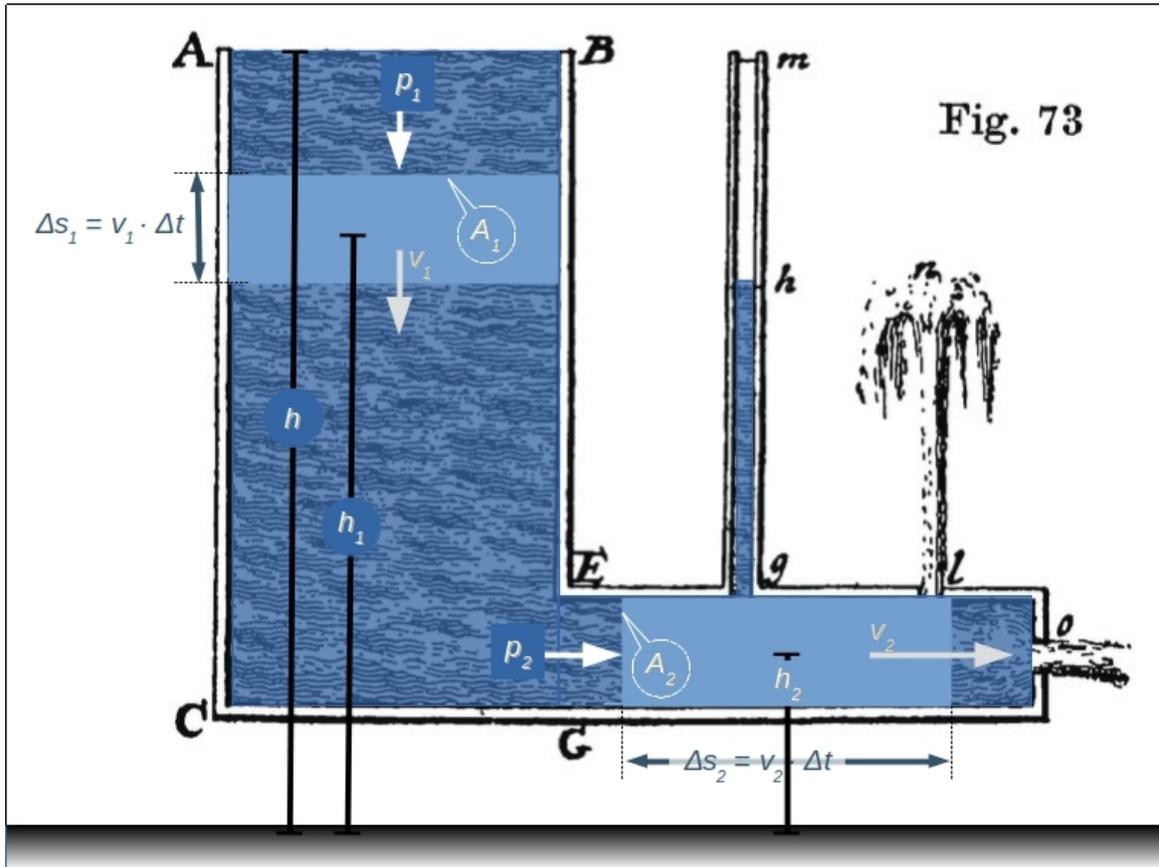


Abb. 18 Energiebetrachtung zum Experiment von Bernoulli

Das Diagramm benutzt das Experiment von Bernoulli und betrachtet die Energieverhältnisse eines Volumens (hellblaues Rechteck) an 2 Stellen der Strömung.

In der oberen Position befindet sich das Volumen V_1 auf der Höhe h_1 und bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_1 nach unten. In dem Volumen herrscht der (allseitig statische) Druck p_1 . Dieser Druck entspricht dem Luftdruck plus dem hydrostatischen Druck⁷ der darüber befindlichen Wassersäule.

Im Ausflussrohr hat das Volumen V_2 die geringere Höhe h_2 , durch die Querschnittsverringerng auf A_2 erhöht sich die Geschwindigkeit auf v_2 . Der (allseitig statische) Druck p_2 ist gegenüber p_1 verringert. Für die Größe der Volumina gilt $V_2 = V_1$, da hier von einer inkompressiblen Strömung ausgegangen wird.

Zu Zeiten von Bernoulli war der Energiebegriff noch nicht in der heutigen Klarheit definiert. Insbesondere zur kinetischen Energie konkurrierten unterschiedliche Vorstellungen. Mit dem

⁷ <https://de.wikipedia.org/wiki/hydrostatischer%20Druck>

heute zur Verfügung stehenden Begriffsrepertoire ist es viel einfacher, die Erkenntnisse aus Bernoullis Beobachtungen in eine Gleichung zu überführen.

Aufstellung der Energiebilanz

Aus der Mechanik ist die potentielle Energie (mgh) und die kinetische Energie ($\frac{1}{2}mv^2$) bekannt. In der Kontinuumsmechanik strömender Medien kommt noch die sogenannte elastische Energie (pV) hinzu, sie wird auch Druckenergie genannt. Letzterer Begriff lässt sich gut mit der kinetischen Gastheorie verbinden, in der (pV) der Energie entspricht, welche im Mittel durch alle Stöße der kleinsten Teilchen ausgetauscht wird. Diese Stöße verursachen den Druck in einem Idealen Gas.

Die Summe dieser 3 Energiebeiträge ist bei einer reibungsfreien Strömung entlang einer Stromröhre konstant.

$$m_1gh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 + p_1V_1 = m_2gh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + p_2V_2 = constant$$

Aufstellung der Druckgleichung

Damit diese Energiebilanz unabhängig wird von der Größe des betrachteten Volumens ($V_1 = V_2$), dividiert man sie durch dieses Volumen V . Mit der Dichte $\rho = \frac{m}{V}$ erhält man so aus der Energiebilanz die folgende Gleichung

$$\rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 = constant$$

Daraus folgt die Schreibweise der sogenannten Druckgleichung

$$\rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 + p = p_{total}$$

mit

ρgh = hydrostatischer Druck des Fluids am betrachteten Ort der Höhe h

p = statischer Druck im Fluid am betrachteten Ort (p_{stat} = Luftdruck + hydrostatischer Druck oberhalb von h)

$\frac{1}{2}\rho v^2$ = dynamischer Druck am betrachteten Ort (nur in Strömungsrichtung, p_{dyn})

p_{total} = konstanter Gesamtdruck (unabhängig vom Ort, aber nur in Strömungsrichtung)

5.3.3 Anwendung der Bernoulli-Gleichung für die Feuerwehr

Besitzt ein Feuerlöschwagen eine Pumpe vom Typ FPN10-2000⁸, so erreicht diese Pumpe bei einem Totaldruck von 10 bar die maximale Förderleistung von 2000 l/min. Bei einem B-Rohr⁹ mit dem Innendurchmesser 75 mm beträgt die Strömungsgeschwindigkeit v dann

8 https://de.wikipedia.org/wiki/Feuerl%C3%B6schpumpe%23Klassifizierung_von_Feuerl%C3%B6schpumpen

9 <https://de.wikipedia.org/wiki/Feuerwehrschauch%23Druckschl%C3%A4uche>

ca. 4 m/s. Beim Einsatz einer modernen Drehleiter¹⁰ wird eine Einsatzhöhe von ca. $h = 23\text{m}$ erreicht. Mit diesen Daten kann die Druckgleichung nach Bernoulli aufgestellt werden. Es ist:

$$p_{total} = 10\text{bar} = 1.000.000\text{Pa}$$

$$\rho gh = 1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 23\text{m} = 230.000\text{Pa}$$

$$p_{dyn} = \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 16 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \approx 6.000\text{Pa}$$

Daraus ergibt sich aus der Druckgleichung ein Betriebsdruck von:

$$p_{stat} \approx 764.000\text{Pa}$$

Das ist der Druck, den die Schlauchwände mindestens standhalten müssen. Er wird höher, wenn die Förderleistung gedrosselt oder ganz abgestellt wird und der dynamische Druck entsprechend kleiner oder Null ist. An der Spritze am Schlauchende steht der Druck $p_{dyn} + p_{stat}$ zur Verfügung, welcher das Löschwasser mit 39 m/s aus der Spritze herausschießen lässt. Diese Geschwindigkeit v_A berechnet sich nach derselben Formel wie der dynamische Druck, d.h.:

$$\frac{1}{2}\rho v_{Schlauch}^2 + p_{stat} = \frac{1}{2}\rho v_{Ausgang}^2$$

$$6.000 + 764.000 = \frac{1}{2}1000v_{Ausgang}^2$$

$$v_A = \sqrt{\frac{770.000 \cdot 2}{1000}} = 39 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Mit dieser Ausströmgeschwindigkeit v_A kann noch mal eine Höhe von 77 m erreicht werden. Zusammen mit den 23 m Leiterhöhe ergibt sich eine maximale Gesamthöhe des Wasserstrahls von 100 m, entsprechend der maximalen Pumpleistung von 10 bar. Man sieht, diese Rechnung beruht auf der Annahme der Reibungsfreiheit. Die tatsächlich erreichbaren Werte unter Berücksichtigung der Reibung an der Rohrwand kann man hier berechnen lassen¹¹.

¹⁰ <https://de.wikipedia.org/wiki/Drehleiter>

¹¹ Feuerwehr innovativ, Berechnungen für Einsatz und Übung, Druckverlust am Feuerwehrschauch, Druckverlust Schlauch ^{<https://tool.feuerwehr-innovativ.at/schlauch>}

5.3.4 Anwendung der Bernoulli-Gleichung für einen Windkanal

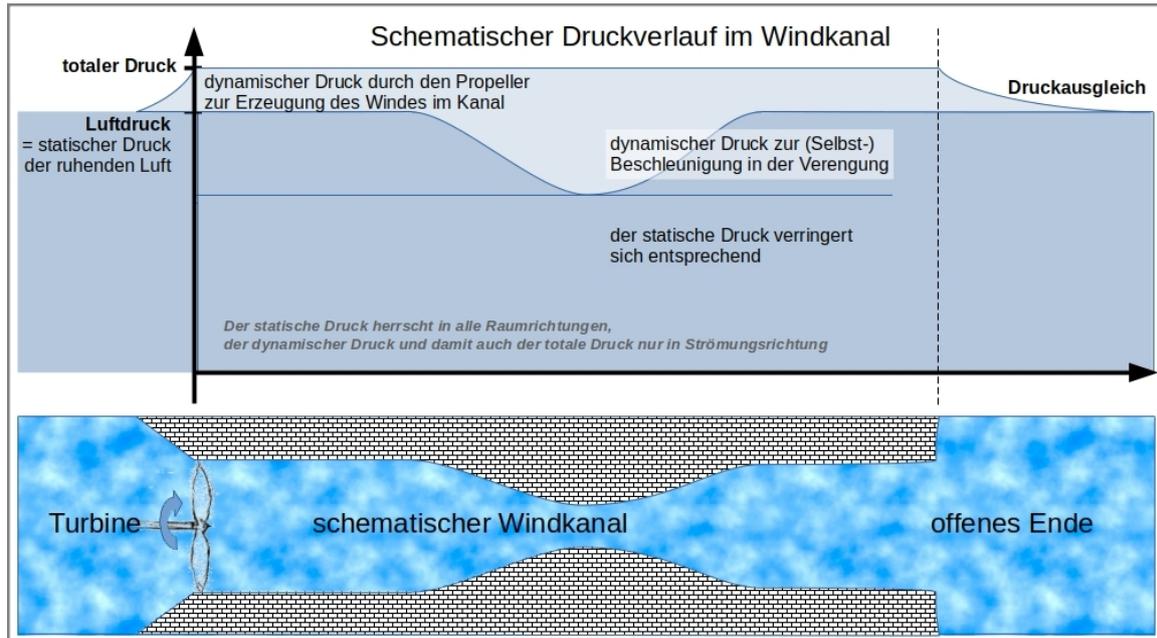


Abb. 19 Schema der Druckverhältnisse in einem Windkanal des Eiffel-Typs

Die Abbildung rechts zeigt den prinzipiellen Druckverlauf (oben) in einem Windkanal (unten). Die Strömung wird wieder als reibungsfrei angenommen. Das Druckdiagramm zeigt den dynamischen Druck in Strömungsrichtung (hellblau) und den statischen Druck senkrecht zur Strömung (dunkelblau). Die Summe beider Drücke entspricht dem totalen Druck (in Strömungsrichtung).

- Vor und hinter dem Windkanal herrscht jeweils der Luftdruck (statischer Druck der ruhenden Luft).
- Am Beginn des Windkanals wird durch eine Turbine die Luft beschleunigt. Dadurch hat die Luft im ersten Drittel des Windkanals eine konstante Strömungsgeschwindigkeit. In Strömungsrichtung kann man einen zusätzlichen dynamischen Druck messen neben dem unveränderten statischen Druck der vormals ruhenden Luft.
- Im mittleren Drittel des Windkanals befindet sich eine Verengung. Hier hat die Luft eine höhere Strömungsgeschwindigkeit. Diese Erhöhung kommt nicht durch den Propeller am Anfang des Windkanals, sondern weil sich die Luft hier selbst beschleunigt. Die zusätzliche kinetische Energie kommt aus der Druckenergie der Luft. Entsprechend sinkt der statische Druck senkrecht zur Strömung während der dynamische Druck in Strömungsrichtung zunimmt.
- Im letzten Drittel hat der Windkanal wieder seinen ursprünglichen Querschnitt. Entsprechend ist die Strömungsgeschwindigkeit wie im ersten Drittel. Die zusätzliche kinetische Energie in der Verengung ist wieder zur Druckenergie geworden. Der statische Druck entspricht wieder dem der ruhenden Luft.
- Am Ende des Windkanals nimmt die gerichtete Strömungsgeschwindigkeit ab, die durch den Propeller erhöhte kinetische Energie verteilt sich in der Umgebung und führt zu einer unmerklichen Erhöhung des statischen Drucks der ruhenden Luft.

Während bei einem Windkanal des Eiffel-Typs an der verengten Messstelle stets ein Unterdruck herrscht, benutzt man heute zumeist Windkanäle¹² in der sogenannten Göttinger Bauform, bei denen die Luft am Ende nicht einfach in die Umgebung strömt sondern in einem Kreislauf wieder der Turbine zugeführt wird. In Verbindung mit Vergrößerungen und Verkleinerungen des Strömungsquerschnitts kann bei der Göttinger Bauform der statische Druck an der Messstelle kontrolliert werden und entspricht dort meist dem Druck der ruhenden Luft; letzteres ermöglicht dann eine offene, begehbare Messstelle.¹³

5.3.5 Herleitung des Dynamischen Drucks

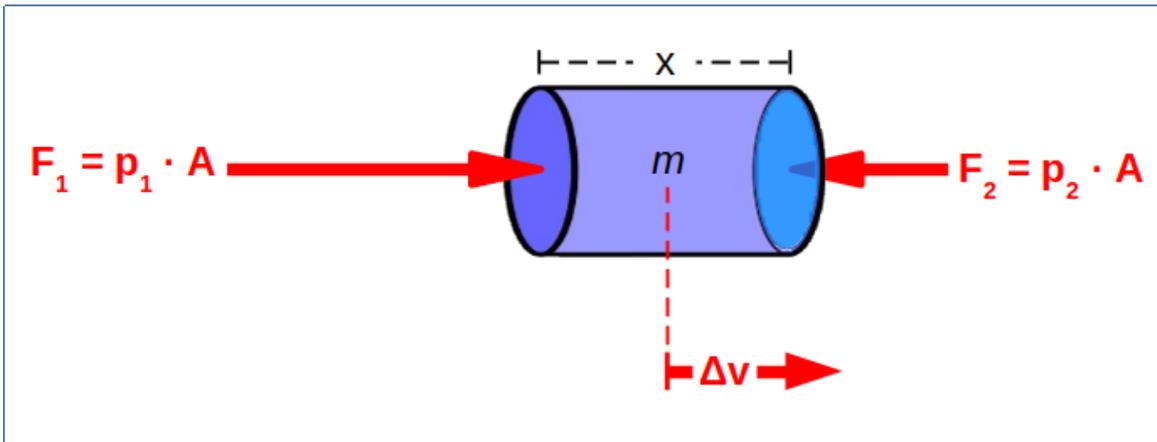


Abb. 20 Herleitung des Zusammenhangs von Druck- und Geschwindigkeitsänderung

Der sogenannte dynamische Druck bezeichnet die Beziehung zwischen einer Druckdifferenz Δp und der damit verbundenen Geschwindigkeitsänderung Δv in einem Fluid (Flüssigkeit oder Gas). Diese grundlegende Beziehung wird im folgenden hergeleitet.

Man betrachte z.B. ein zylindrisches Fluidvolumen (in der Abb. blau gezeichnet) mit der Querschnittsfläche A und der Länge x . An der linken Stirnfläche herrscht ein größerer Druck p_1 , an der rechten Stirnfläche ein geringerer Druck p_2 , entsprechend wirkt von links eine größere Kraft F_1 als von rechts F_2 . Die Differenz ist

$$\Delta F = F_1 - F_2 = p_1 \cdot A - p_2 \cdot A = \Delta p \cdot A$$

Durch die resultierende Kraft ΔF wird das Fluidvolumen verschoben. Man betrachte den Fall, dass es gerade um seine Länge x verschoben wird. Dabei wird die Beschleunigungsarbeit $\Delta F \cdot x$ geleistet, welche zu einer Zunahme der kinetischen Energie $\frac{1}{2}m\Delta v^2$ des Fluidvolumens führt.

12 <https://de.wikipedia.org/wiki/Windkanal%23Aufbau>

13 Die wesentlichen Windkanaltypen, DLR Magazin 141 "Die Windmaschinen", März 2014, Sonderdruck (Magazin 141 - 150) [^]{<https://www.dlr.de/dlr/portaldata/1/resources/documents/Windkanale/DLRmagazin-Special-Windmaschinen/files/assets/basic-html/index.html#6-7>} , abgerufen am 11.Feb 2020

$$\Delta F \cdot x = \frac{1}{2} m \Delta v^2$$

Durch diese Verschiebung ist das Fluidvolumen nun vollständig in dem Bereich, in dem p_2 herrscht. Es bewegt sich mit einer konstanten - um Δv erhöhten - Geschwindigkeit reibungsfrei weiter. Man kombiniert die beiden obigen Gleichungen um die Beziehung zwischen Druck und Geschwindigkeit zu erhalten

$$\Delta F \cdot x = \Delta p \cdot A \cdot x = \frac{1}{2} m \Delta v^2$$

und berücksichtigt, dass $A \cdot x$ dem Volumen V des betrachteten Fluidvolumens entspricht.

$$\Delta p V = \frac{1}{2} m \Delta v^2$$

Man teilt beide Seiten durch das Volumen V , um die beschleunigende Druckdifferenz Δp allein auf der linken Seite der Beziehung zu haben

$$\Delta p = \frac{1}{2} \frac{m}{V} \Delta v^2$$

Nun interpretiert man den Quotienten $\frac{m}{V}$ als die Dichte ρ im Fluidvolumen und erhält die gesuchte Beziehung zwischen Druckdifferenz und Geschwindigkeitsänderung, unabhängig von der Größe des ursprünglich betrachteten Fluidvolumens.

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho \Delta v^2$$

Diese grundlegende Beziehung zwischen Druckdifferenz und Geschwindigkeitsänderung wird meist als **dynamischer Druck** p_{dyn} bezeichnet und in folgender Form abgekürzt geschrieben

$$p_{dyn} = \frac{1}{2} \rho v^2$$

Darin bezeichnet p_{dyn} den notwendigen Überdruck (Druckdifferenz zum Umgebungsdruck}, um ein Fluid der Dichte ρ auf die Geschwindigkeit v zu beschleunigen. Typische Anwendungen dieser Beziehung sind die Berechnung...

1. ...der **Geschwindigkeitszunahme** von Fluiden durch eine von außen anliegende Druckdifferenz, z.B. Ausflussgeschwindigkeit aus dem Loch in einer Gefäßwand, Feuerwehrspritze, etc.
2. ...des **Staudrucks**, d.h. der Druckerhöhung beim Abbremsen einer Strömung, z.B. dem Winddruck. Das bedeutet nicht, dass die Strömung dabei vollständig zur Ruhe kommen muss, sie kann auch nur abgelenkt sein. In ursprünglicher Richtung ist die Strömungsgeschwindigkeit aber verringert oder gleich 0.
3. ...der **Druckveränderung** durch die Veränderung der Geschwindigkeit durch einen veränderten Strömungsquerschnitt; Beispiele dafür sind Rohrsysteme, Windkanal, Venturidüse, Umströmung von Hindernissen, etc.

Der "dynamische Druck" als Druckdifferenz hat einige Eigenschaften, die ihn vom dem bekannten "statischen Druck" in ruhenden Fluiden unterscheiden:

- Den statische Druck herrscht ständig in dem Fluidvolumen, der **dynamische** Druck macht sich dagegen nur bei **Geschwindigkeitsänderungen** bemerkbar.
- Der statische Druck wirkt in alle Richtungen gleich stark, der dynamische Druck existiert nur in Richtung der zugeordneten Geschwindigkeitsänderung.
- Der statische Druck kann an **einem** Punkt im Fluid gemessen werden, für die Messung des dynamischen Drucks müssen die Druckmessungen an **zwei** Punkten verglichen werden.

5.3.6 Messprinzip für den dynamischen Druck

In der Praxis wird der dynamische Druck benutzt um die Geschwindigkeit in einer Strömung zu messen. Für die Messung des dynamischen Drucks müssen stets 2 Messpunkte verglichen werden.

Will man an einem beliebigen Ort einer Strömung die Geschwindigkeit ermitteln, benutzt man z.B. die Prandtlsonde¹⁴. An ihrem 1. Messpunkt kommt die Strömung vollständig zur Ruhe (Staupunkt), am 2. Messpunkt strömt das Fluid möglichst ungestört vorbei.

Bei einem Flugzeug wird dieses Messprinzip durch eine Kombination von Pitotrohr¹⁵ und Statik Port¹⁶ verwirklicht. Das Pitotrohr misst den Druck in Bewegungsrichtung und ist meist vorne an der Flugzeugnase plaziert. Der Statik Port misst den Druck senkrecht zur Bewegungsrichtung, meist im vorderen Drittel des Flugzeugrumpfes an einer Stelle, wo die Luft möglichst ungestört vorbeiströmt. Meist werden Statik Ports auf beiden Seiten des Flugzeugs angebracht um Seitenwindeinflüsse auszugleichen. Aus dem so gemessenen dynamischen Druck wird u.a. die Geschwindigkeit eines Flugzeugs gegenüber der Luft ermittelt.

Für die Messung des dynamischen Drucks in gefüllten Rohren oder Kanalsystemen werden z.B. Venturidüsen¹⁷ eingesetzt und die Differenz des statischen Drucks vor und in der Verengung gemessen. Daraus kann die Strömungsgeschwindigkeit bestimmt und die Durchflussmenge berechnet werden¹⁸.

14 <https://de.wikipedia.org/wiki/%20Prandtlsonde>

15 <https://de.wikipedia.org/wiki/Pitotrohr>

16 <https://de.wikipedia.org/wiki/Pitot-Statik-System>

17 <https://de.wikipedia.org/wiki/Venturid%C3%BCse>

18 Durchfluss Messtechnik, Apparaturen und Industrieanlagen AG ^{{<https://www.wisag.ch/armaturen-mess-regeltechnik/durchflussmessung-blenden-duesen-venturi>}, abgerufen am 4. Februar 2022]}

6 Wie Otto Lilienthal das Geheimnis des Vogelfluges lüftet

6.1 Was hält den Vogel in der Luft?



Abb. 21 "Kreisende Storchenfamilie", Aquarellzeichnung von O.Lilienthal, Bucheinband

*„Tausendfältig hat der Mensch versucht, es den Vögeln gleich zu thun. Flügel ohne Zahl sind von dem Menschengeschlechte gefertigt, geprobt und -- verworfen. Alles, alles vergeblich und ohne Nutzen für die Erreichung dieses heissersehnten Zieles.“*¹

Otto Lilienthal² (1848 – 1896) veröffentlichte 1889 - nach 23 Jahren andauernden Forschungsarbeiten - sein Buch „Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst“ als Beitrag zur Systematik der Flugtechnik. Es enthält in der Tat bahnbrechende Entdeckungen und Erfindungen, die der Entwicklung der Fliegerei die entscheidenden Voraussetzungen lieferte. Zu diesem Zweck beobachtete er sehr genau verschiedene Aspekte des Vogelfluges und hielt sich sogar eine eigene kleine Storchenzucht³. Dies ermöglichte ihm wichtige Beobachtungen des Vogelflugs und wurde zur Grundlage seiner gezielten Experimente und Messversuche zum Auftrieb.

Lilienthal gilt als der erste Mensch, dem mit seinen selbstkonstruierten Flugapparaten wiederholbare Gleitflüge bis 250 m Länge gelangen. Aus vielen Fotos seiner Flugversuche ist ein kurzer Film^{4 5} erstellt worden, der einen spannenden Eindruck von den gewagten Flugmanövern Lilienthals vermittelt. Auch auf der anderen Seite des Atlantiks benutzten z.B. die Gebrüder Wright⁶ (1867-1948) die Erkenntnisse Lilienthals, mit denen 1903 ihr Erfolg des ersten motorgetriebenen Fluges gelang⁷.

1 Otto Lilienthal, Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst als Beitrag zur Systematik der Flugtechnik, 1889, Deutsches Textarchiv [{]https://www.deutschestextarchiv.de/book/view/lilienthal_vogelflug_1889?[}]

2 <https://de.wikipedia.org/wiki/Otto%20Lilienthal>

3 Lebenslauf von Otto Lilienthal [{]<https://www.otto-lilienthal.de/otto-lilienthal/lebenslauf.html>[}]

4 <https://www.smithsonianmag.com/air-space-magazine/Otto-Lilienthals-First-In-Flight-Movie-180958231/>

5 Otto Lilienthal's In-Flight Movie From the 1890s, AIR & SPACE MAGAZINE, 26.2.2016, www.smithsonianmag.com [{]<https://www.smithsonianmag.com/air-space-magazine/Otto-Lilienthals-First-In-Flight-Movie-180958231>[}], abgerufen am 21.Feb 2022

6 <https://de.wikipedia.org/wiki/Gebr%C3%BCder%20Wright>

7 Wilbur Wright, Otto Lilienthal, Aero Club of America Bulletin, September 1912 (posthum veröffentlicht), online-Archiv des Otto-Lilienthal-Museums [{]<http://www.lilienthal-museum.de/olma/12127.htm>[}]

6.1.1 Drei grundlegende Beobachtungen von Otto Lilienthal

Die Bedeutung des Flügelschlags

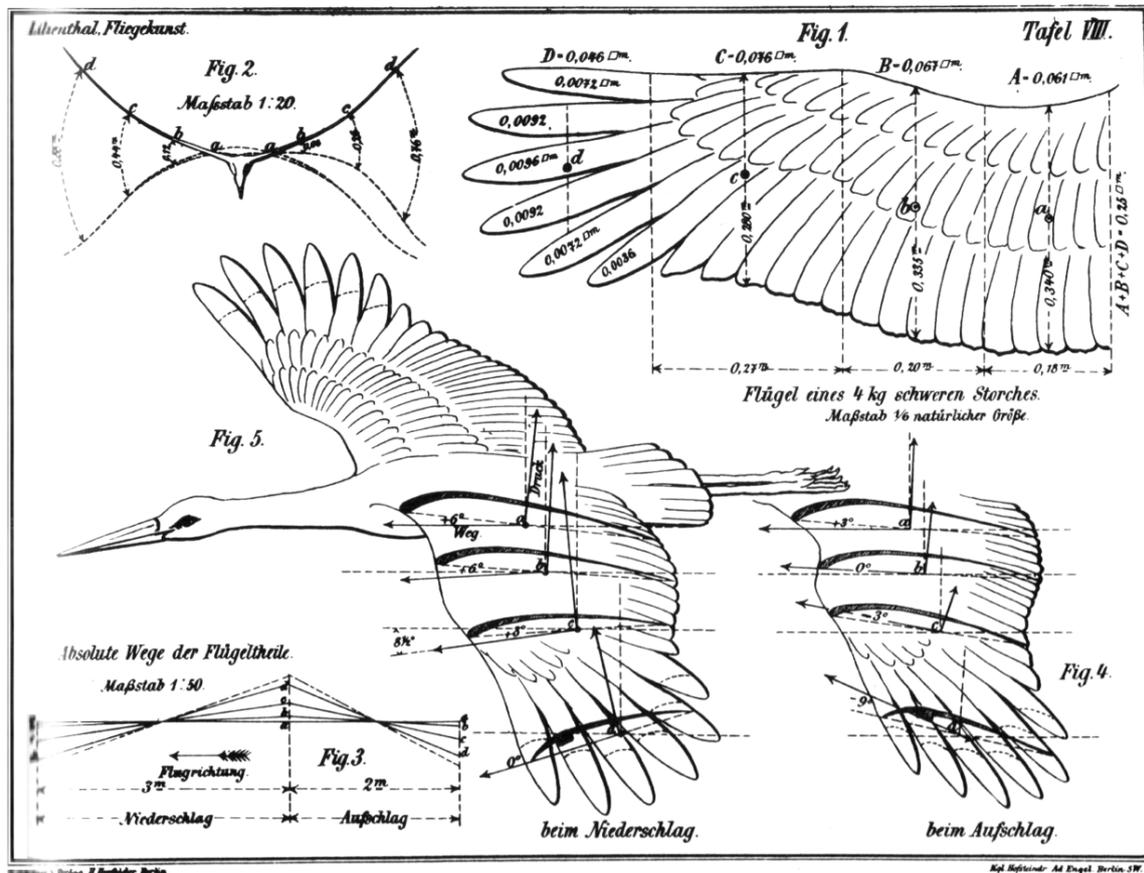


Abb. 22 Skizzen von Lilienthal zur Flügelform von Störchen

Zur Zeit Lilienthals galt vielen der auffällige Flügelschlag als wichtige Voraussetzung für den Flug der Vögel. Auch Lilienthal unternimmt vielfältige Messungen und Berechnungen zum Flügelschlag und kommt zu dem Ergebnis, dass die durch einfachen Flügelschlag nach unten bewegte Luft nicht ausreicht, das Gewicht eines Vogels auszugleichen. Der Flügelschlag dient viel mehr dem Vortrieb als dem Auftrieb. Lilienthal gelang es, sich von den hervorsteckenden Eigenschaften des Vogelflügels, dem Flügelschlag und dem Federkleid zu lösen und im Laborversuch die verborgenen, aber für den Auftrieb entscheidenden Eigenschaften des Flügels zu ermitteln.⁸

„Wie aber fliegt die Möwe? Gewöhnlich ist die Luft an der See bewegt, und meistens hat daher die Möwe Gelegenheit, sich segelnd in der Luft fortzubewegen, nur dann und wann mit einigen Flügelschlägen nachhelfend, selten kreisend, bald rechts oder links umbiegend,

⁸ <http://www.lilienthal-museum.de/olma/soest.htm>

bald steigend, bald sinkend, den Kopf geneigt und immer mit den Augen die futterspendende Wasserfläche durchsuchend.”⁹(S.137)

Die Flügelwölbung

Als entscheidende Leistung Lilienthals zur Erklärung des Auftriebs gilt seine Erkenntnis der Bedeutung der Flügelwölbung. Eine gewölbte Fläche erzeugt bereits Auftrieb, die eine ebene Fläche erst durch eine schräge Anströmung erreicht. Zu diesem Zweck sammelt und vermisst Lilienthal die Flügel und einzelne Flügel Federn verschiedener Vögel.

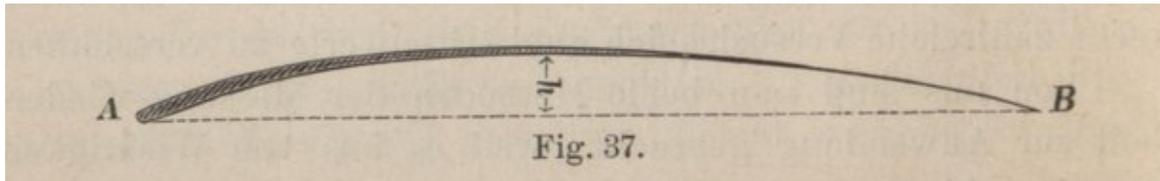


Abb. 23 Profil eines Vogelflügels

”Bei gut fliegenden Vögeln findet man nur eine schwache Wölbung des Flügelquerschnittes, deren Pfeilhöhe h in Fig. 37 $1/12$ — $1/15$ der Flügelbreite $A B$ ausmacht. Schlechtfliegende Vögel, wie alle Laufvögel, haben sehr stark gewölbte, die gut und schnell fliegenden Seevögel dagegen sehr schwach gewölbte Flügel”¹⁰(S.92).

Das Prinzip der Wölbung von Vogelflügeln kann man bei genauem Hinsehen in jeder einzelnen Feder entdecken. So kann man z.B. bei einer gefundenen Vogelfeder einschätzen, ob diese eher aus dem Federkleid des Körpers oder dem linken oder rechten Flügel stammt. Mit dieser Erkenntnis konstruierte Lilienthal Gleiter, mit denen wiederholbare, erfolgreiche Gleitflüge bis zu 250 m durchgeführt werden konnten. Er gilt daher gemeinhin als erster erfolgreicher Flieger der Zeitgeschichte. Auch die Gebrüder Wright benutzten Lilienthals Erkenntnis u.a. zur Optimierung der Propeller für ihren ersten Motorflug¹¹ über 37 m.

Am Beginn der kontrollierten Fliegerei zu Beginn des 19. Jhd. wurden wegen ihres geringen Gewichts stoffbespannte gewölbte Flächen als Flügel verwendet. Heute haben die Flügelprofile immer noch die typische asymmetrische Wölbung, aber eine ausgedehntere Form.

9 Otto Lilienthal, Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst als Beitrag zur Systematik der Flugtechnik, 1889, Deutsches Textarchiv [^{\{https://www.deutschestextarchiv.de/book/view/lilienthal_vogelflug_1889?\}}](https://www.deutschestextarchiv.de/book/view/lilienthal_vogelflug_1889?)

10 Otto Lilienthal, Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst als Beitrag zur Systematik der Flugtechnik, 1889, Deutsches Textarchiv [^{\{https://www.deutschestextarchiv.de/book/view/lilienthal_vogelflug_1889?\}}](https://www.deutschestextarchiv.de/book/view/lilienthal_vogelflug_1889?)

11 https://de.wikipedia.org/wiki/Wright_Flyer%23F1%C3%BCge_vom_17._Dezember_1903

Stromlinienform



Abb. 24 Beispiel eines modernen Flügelprofils

Auf der Suche nach den Voraussetzungen für einen erfolgreichen Segelflug erkennt Lilienthal auch die Bedeutung der Stromlinienform zur Verringerung des Widerstandes den ein bewegter Körper durch die Luft erfährt.

Die Stromlinienform ist typischerweise **vorne rund und dick und hinten schmal und spitz**. Diese Form hat einen fast 10-fach geringeren Luftwiderstand als ein Ball gleicher Querschnittsfläche¹² und ist daher eine wesentliche Voraussetzung dafür, dass Vögel mit Hilfe ihrer Muskelkraft fliegen können.

Mehr als 30 Jahre später wird im Rahmen des Zeppelinbaus die Stromlinienform im Windkanal optimiert und die Erkenntnisse daraus auch auf den Auto- und Lokomotivbau übertragen. Zur Erreichung von immer höheren Geschwindigkeiten bekommt der Reduzierung des Luftwiderstandes durch eine optimale Formgebung größte Bedeutung zu¹³.

¹² <https://www.spektrum.de/lexikon/physik/stromlinienform/14074>

¹³ <https://blog.zeppelin-museum.de/2018/07/19/vom-zeppelin-zum-auto/>

6.2 Weiterführende Gedanken

6.2.1 Die Asymmetrie beim Flugzeugflügel

In Anlehnung an Otto Lilienthal kann man sagen, dass die Auftriebswirkung eines gewölbten Flügels durch die asymmetrische Umströmung des Profils verursacht wird. In gewissen Grenzen gilt dabei:

Je ausgeprägter die Asymmetrie des Flügelprofils (Wölbung), desto größer die Auftriebskraft.

Der Nachteil einer ausgeprägte Wölbung ist jedoch der höhere Luftwiderstand einer solchen Form. Deswegen kann man diesen Parameter nicht beliebig einsetzen. Daneben gibt es vor allem 2 weitere Einflussfaktoren für den Auftrieb. Zum einen ist da die Strömungsgeschwindigkeit, zum anderen der Anstellwinkel.

Je höher die Umströmungsgeschwindigkeit eines asymmetrisch gewölbten Flügelprofils, desto größer die Auftriebskraft.

Allerdings bedeutet eine höhere Geschwindigkeit auch einen höheren Luftwiderstand des Flugzeugs, was eine entsprechende Triebwerksleistung erfordert. Dabei steigt der Luftwiderstand sogar mit dem Quadrat der Geschwindigkeit.

Der andere wichtige Einflussfaktor ist der sogenannte Anstellwinkel. In gewissen Grenzen gilt:

Je größer der Anstellwinkel, desto größer die Auftriebskraft.

Ein schräg angeströmtes Profil verstärkt eine asymmetrische Umströmung und entspricht so auch einer Form der Asymmetrie. Aber auch hier ist es so, dass sich mit größerem Anstellwinkel der Luftwiderstand vergrößert, so dass man diesen Parameter im Reiseflug klein halten will.

D.h. ein gutes Flügelprofil zeigt eine asymmetrische Wölbung, möglichst nah an der Stromlinienform, die bei minimalen Anstellwinkel oder bei einem Anstellwinkel von 0° ausreichend Auftrieb erzeugt.

Segelflug

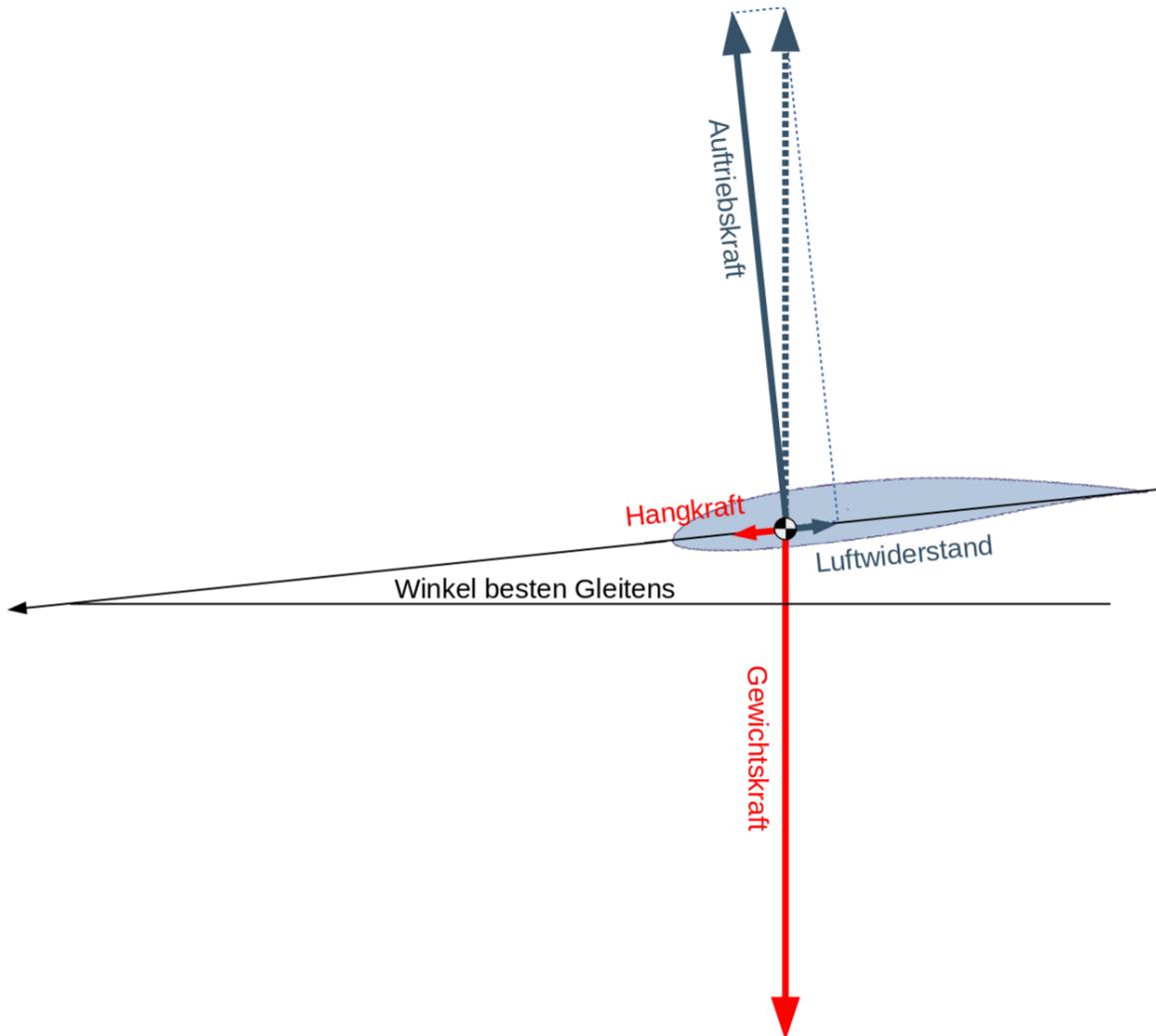


Abb. 25 Schema der Kräfteverteilung beim "besten Gleiten"

Will man ein asymmetrisches Profil optimal nutzen, wählt man eine Geschwindigkeit, bei der die erzeugte Auftriebskraft ausreicht, ohne dass zusätzlich eine schräge Anströmung benötigt wird, der Luftwiderstand also möglichst gering ist. Für alle Flugzeuge wird praktischerweise eine solche "Geschwindigkeit des besten Gleitens" definiert. Das gilt nicht nur für Segelflugzeuge sondern auch für motorgetriebene Flugzeuge im Fall eines Motorschadens. Bei dieser Geschwindigkeit segelt ein Flugzeug - leicht abwärts geneigt - am weitesten. Ein modernes Verkehrsflugzeug in Reiseflughöhe (ca. 11 km) kann ohne jegliche Triebwerkunterstützung noch ca. 200 km im Segelflug zurücklegen und z.B. in Deutschland fast alle großen Verkehrsflughäfen erreichen. Dies demonstriert eindrücklich der spektakuläre Flug von Flugkapitän C.B. Sullenberger¹⁴ 2009. Durch Vogelschlag fielen in nur 1 km Flughöhe beide Triebwerke aus, das Flugzeug legte im Segelflug noch ca. 14 km zurück, ehe es im Hudson River notlandete.

14 https://de.wikipedia.org/wiki/US-Airways-Flug_1549

Motorflug

Beim Motorflug wird die Sache etwas komplizierter weil ein Motorflugzeug, im Gegensatz zu einem Segelflugzeug, ständig sein Gewicht verändert. Ein Motorflugzeug ist beim Start immer schwerer als bei der Landung, weil es zwischendurch Sprit verbraucht. Der Gewichtsunterschied ist mitunter erheblich. Ein A380 hat beim Start eine Masse von ca. 560.000 kg, davon sind ca. 45% Kraftstoff (ca. 250.000 kg oder 310.000 l Kerosin), die bei der Landung größtenteils verbraucht ist. Während des Fluges nimmt also die Gewichtskraft stetig ab und damit auch der notwendige Auftrieb. Wie aber passt man den Auftrieb eines Flugzeugflügels an die sich verändernden Gegebenheiten an? Eine Möglichkeit wäre, mit dem immer leichter werdenden Flugzeug auch immer langsamer zu fliegen weil man ja nicht mehr so viel Auftrieb benötigt. Es ist leicht einzusehen, dass dies im Sinne der Transportfunktion unerwünscht ist. Man benutzt stattdessen 2 andere Methoden, um den Auftrieb durch die asymmetrische Umströmung anzupassen.

Anstellwinkel



Abb. 26 Concorde mit hohem Anstellwinkel bei der Landung

Die einfachste Methode zur Anpassung des Auftriebs bei einem Flügel ist der Anstellwinkel. In einem weiten Bereich kann damit die Asymmetrie der Umströmung und die damit erzeugte Auftriebskraft bei einem konstanten Flügelprofil der Geschwindigkeit angepasst werden.

Alle Motorflugzeuge benutzen diese Methode. Besonders auffällig ist das bei der Landung zu sehen, wo man die geringste der möglichen Fluggeschwindigkeiten anstrebt. Bei der hier

abgebildeten Concorde war für die Landung ein so extremer Anstellwinkel notwendig, so dass die Flugzeugkonstrukteure eine für die Landung absenkbar konstruierte Flugzeugnase konstruiert hatten, um den Piloten ausreichend Bodensicht zu ermöglichen. Im Unterschied zu teilweise hohen Anstellwinkeln bei der Landung betragen typische Anstellwinkel im Reiseflug nur wenige Grad.

Vorflügel und Landeklappen



Abb. 27 Ausgefahrene Vorflügel und Landeklappen eines modernen Verkehrsflugzeuges

Wer in einem Verkehrsflugzeug auf einem Fensterplatz nahe dem Flügel sitzt, kann bei Start und Landung eine weitere Methode beobachten, mit der Piloten den Auftrieb der gebe-

nen Geschwindigkeit anpassen. Sie verändern die asymmetrische Form des Flügelprofils, indem Vorflügel und Landeklappen¹⁵ ausgefahren werden. Durch die erhöhte Asymmetrie wird schon bei geringer Geschwindigkeit der Auftrieb erzeugt, der die Gewichtskraft des Flugzeugs ausgleicht.

Dadurch erhöht sich natürlich auch der Luftwiderstand, was bei der Landung aber unbedeutend ist. Im lang andauernden Reiseflug möchte man natürlich den Luftwiderstand so gering wie möglich halten. Deswegen sind die Flügelprofile so konstruiert, dass sie im Reiseflug - mit eingefahrenen Klappensystemen - bei geringem Luftwiderstand ausreichend Auftrieb produzieren. Bei geringen Geschwindigkeiten während des Landeanflugs - und im geringen Maße auch beim Start - wird der notwendige Auftrieb u.a. durch die Klappenstruktur hergestellt, die die Asymmetrie des Flügelprofils erhöht, oft kombiniert mit einem erhöhten Anstellwinkel.

6.2.2 Anstellwinkel ist hilfreich aber nicht notwendig

Ein manchmal anzutreffendes Misskonzept für die Erklärung des Auftriebs eines Flugzeugflügels ist, dass ein positiver Anstellwinkel notwendig für die Erzeugung von Auftrieb ist. Manchmal wird dieses Konzept mit der Vorstellung verbunden, der Luftstrom werden durch die „Reflexion“ an der Flügelunterseite umgelenkt und damit erklärt sich die Auftriebskraft auf der Grundlage des 3. Newtonschen Axioms von Actio und Reactio. Dieses Konzept ist zwar sehr anschaulich und man fühlt es scheinbar bei jedem Kinderdrachen. Aber es übersieht 2 wichtige Aspekte

- ein asymmetrisches Flügelprofil erzeugt auch ohne Anstellwinkel Auftrieb (vgl. Segelflug)
- die Oberseite eines Flügels trägt ebenso – ja sogar überwiegend - zum Auftrieb bei wie die Unterseite.

Richtig ist, dass man einen Anstellwinkel braucht, wenn es sich um ein symmetrisches Flügelprofil handelt, oder z.B. um eine ebene Platte wie beim Kinderdrachen¹⁶.

Weiterhin richtig ist, dass in der praktischen Flugdurchführung mit Motorflugzeugen stets ein angepasster positiver Anstellwinkel benutzt wird, um den Auftrieb bei veränderten Flugparametern (z.B. Gewicht, Geschwindigkeit) im notwendigen Maß aufrechtzuerhalten.

Aber auch eine auf dem Boden liegende Halbkugel erfährt durch eine zum Boden parallel verlaufenden Strömung einen Auftrieb. Im folgenden Kapitel werden alltägliche und technische Beispiele vorgestellt, bei denen Auftrieb entsteht. Sie alle eint die phänomenologische Erklärung, dass die Asymmetrie bei einer Umströmung mit einer resultierenden Kraft senkrecht zur Strömung (=Auftrieb) einhergeht.

¹⁵ <https://de.wikipedia.org/wiki/Auftriebshilfe>

¹⁶ <https://de.wikipedia.org/wiki/Drachen>

7 Wo man im Alltag, in der Natur und Technik Auftrieb erleben kann

7.1 Die Asymmetrie ist entscheidend

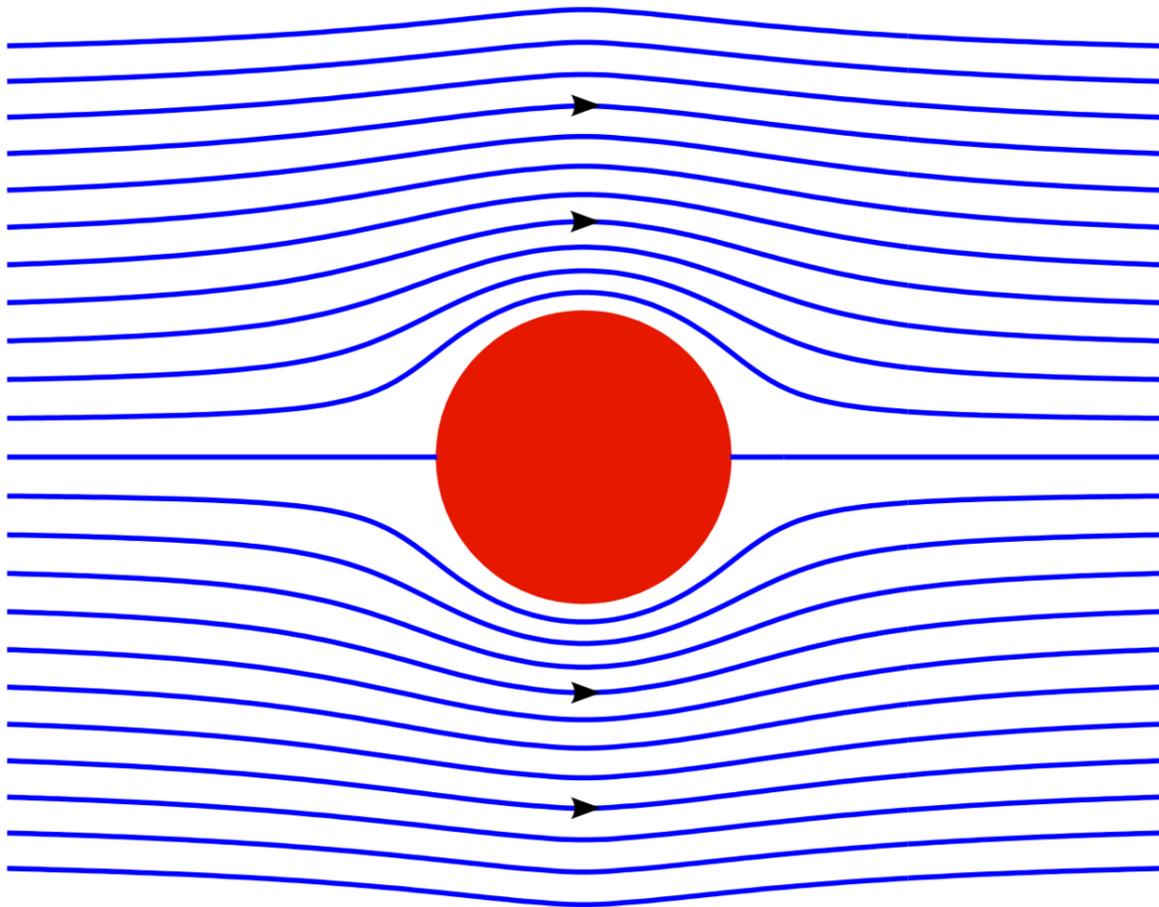


Abb. 28

Stromlinienbild

Im vorhergehenden Kapitel wurde gezeigt, wie bei der Umströmung eines Hindernisses wegen der sich beschleunigenden Luft der Druck senkrecht zur Strömung abnimmt. Bei einer vollkommen symmetrischen Umströmung (Kugel, ebene Platte, stromlinienförmiger Körper) heben sich diese senkrechten Kräfte gegeneinander auf. Dies verdeutlicht die nebenstehende Abbildung. Sie zeigt den Verlauf der Stromlinien bei einer vollkommen symmetrischen, idealen Umströmung einer Kugel. Man sieht ober- und unterhalb der Kugel,

dass dort die Stromlinien enger beieinander liegen als im ungestörten Teil der Strömung. In dem Bereich mit enger beieinanderliegenden Stromlinien ist die Strömungsgeschwindigkeit erhöht und der statische Druck entsprechend verringert. Durch die symmetrische Umströmung gibt es aber keine resultierende Druckdifferenz und deshalb keine resultierende Kraft senkrecht zur Strömung.

Das Modell der Strömung deutet an: Nur bei einer **Asymmetrie in der Umströmungssituation** entsteht eine resultierende Kraft senkrecht zur Strömungsrichtung. Diese Kraft ist abhängig von der Relativgeschwindigkeit und der Ausprägung der Asymmetrie. Ursachen für Asymmetrie können vielfältig sein:

1. Unsymmetrische Form des umströmten Körpers
2. Schräge Anströmung des Körpers (Anstellwinkel)
3. Rotation bei einem symmetrischen Körper
4. Unsymmetrische (divergierende) Strömung

Das wird im Folgenden durch unterschiedliche Beispiele illustriert.

7.1.1 Wäsche im Wind

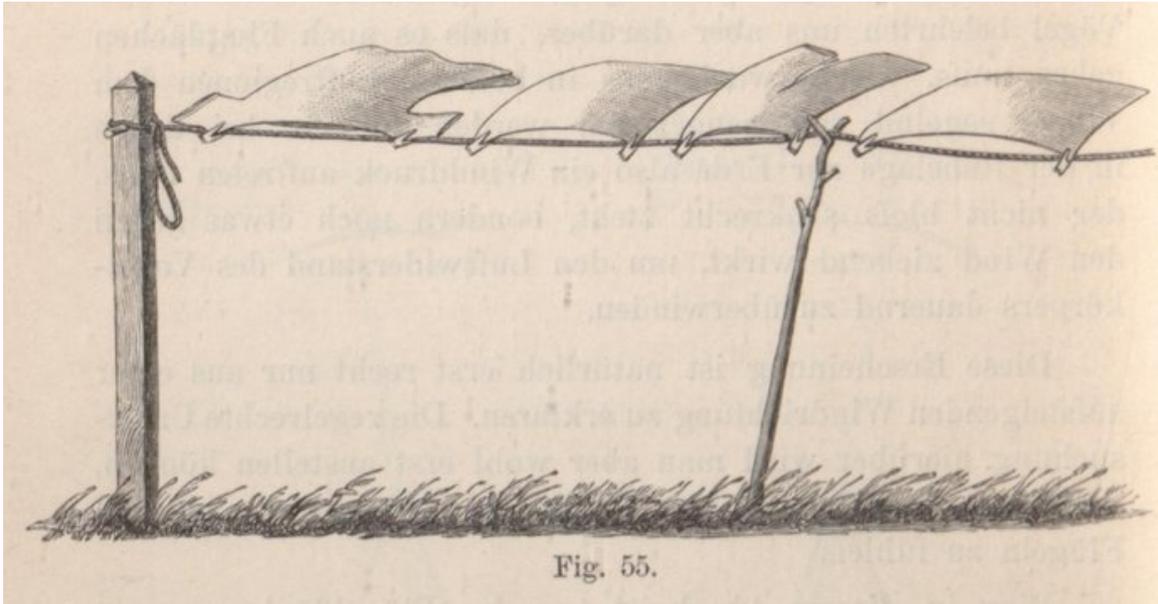


Abb. 29 Zeichnung von Otto Lilienthal

Lilienthal benennt in seinem Buch folgende alltägliche, aber doch erstaunliche Beobachtung zum Auftrieb:

Die auf freiem Platze im Winde zum Trocknen auf der Leine hängende Wäsche belehrt uns ebenso wie die an horizontaler Stange wehende Fahne, dafs alle nach oben gewölbten Flächen einen starken Auftrieb im Winde erfahren und trotz ihres Eigengewichtes gern

über die Horizontale hinaussteigen. Das kleine Bildchen Fig. 55 wird manchen an einen oft gehaltenen Anblick erinnern.¹(S.127)

7.1.2 Fahne im Wind



Abb. 30 Flaggen im Wind

Lilienthal wendet seine Erkenntnis des Auftriebs gewölbter Flächen auch auf die vertikale Situation einer Stofffahne an.

Auch das immerwährende Flattern der Fahnen an vertikaler Stange im starken Winde ist auf die genannten Eigenschaften gewölbter Flächen zurückzuführen. Die steife Wetterfahne aus Blech stellt sich ruhig in die Windrichtung. Nicht so die Fahne aus Stoff. ... (sie) flattert in großen Wellenwindungen hin und her. Die Erklärung ist folgendermaßen zu denken: Bei der Fahne aus Stoff bildet sich ein labiles Verhältnis, denn die geringste entstehende Wölbung nach einer Seite verstärkt den Winddruck nach dieser Seite eben auf Grund der uns jetzt bekannten Eigenschaften gewölbter Flächen, wodurch die Wölbung sich vergrößert... bis der Winddruck... die Wölbung durchklappt... Dieses Hin- und Herklappen der Wölbung von rechts nach links ruft das Flattern der Fahnen hervor und ihre immer

1 Otto Lilienthal, Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst als Beitrag zur Systematik der Flugtechnik, 1889, Deutsches Textarchiv [^]{https://www.deutschestextarchiv.de/book/view/lilienthal_vogelflug_1889}

*gleichen Wellenbewegungen.*²(S.128)

Die Fahne ist ein Beispiel dafür, dass Auftrieb auch waagrecht wirken kann, und zwar senkrecht zur asymmetrischen Strömung.

7.1.3 Segelboot



Abb. 31 Segelyacht mit gewölbten Segeln

Bei der entsprechend gewählten Anordnung auf einem Segelboot wird der "waagerechte Auftrieb" zum Vortrieb genutzt. Lilienthal schreibt dazu:

*Nachdem wir gesehen haben, welche gewaltigen Unterschiede sich einstellen, wenn eine vom Winde schräg unter spitzem Winkel getroffene Fläche nur wenig aus der Ebene sich durchwölbt, so ist es erklärlich, dafs man nur schwache Annäherungen an die Wirklichkeit erhalten kann, wenn man die Segelleistung der Schiffe unter Annahme ebener Segel berechnet, und dafs man sich nicht wundern darf, wenn der Segeleffekt derartige Berechnungen weit übertrifft.*³(S.144)

2 Otto Lilienthal, Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst als Beitrag zur Systematik der Flugtechnik, 1889, Deutsches Textarchiv [^{\{https://www.deutschestextarchiv.de/book/view/lilienthal_vogelflug_1889\}}](https://www.deutschestextarchiv.de/book/view/lilienthal_vogelflug_1889)

3 Otto Lilienthal, Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst als Beitrag zur Systematik der Flugtechnik, 1889, Deutsches Textarchiv [^{\{https://www.deutschestextarchiv.de/book/view/lilienthal_vogelflug_1889\}}](https://www.deutschestextarchiv.de/book/view/lilienthal_vogelflug_1889)

7.1.4 Papierdrachen



Abb. 32 Fesseldrachen

Anders als Vogelflügel, Wäsche im Wind oder Segel haben die meisten Papierdrachen keinerlei Wölbung. Der Auftrieb wird hier hauptsächlich durch eine schräge Anströmung erreicht. Oft findet man die Erklärung, dass es sich hierbei um eine Art „Reflexion“ des Windes an der schrägen Ebene handelt. Im Bild der asymmetrischen Umströmung dagegen lautet die Erklärung, dass durch den Anstellwinkel eine asymmetrische Umströmung um Ober- und Unterseite den Auftrieb bewirkt, ganz so wie man auch bei einem Flugzeug den Auftrieb durch eine Vergrößerung des Anstellwinkels vergrößern kann.⁴(S.80)

4 Otto Lilienthal, Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst als Beitrag zur Systematik der Flugtechnik, 1889, Deutsches Textarchiv [^]{https://www.deutschestextarchiv.de/book/view/lilienthal_vogelflug_1889}

7.1.5 Rotation eines Balles

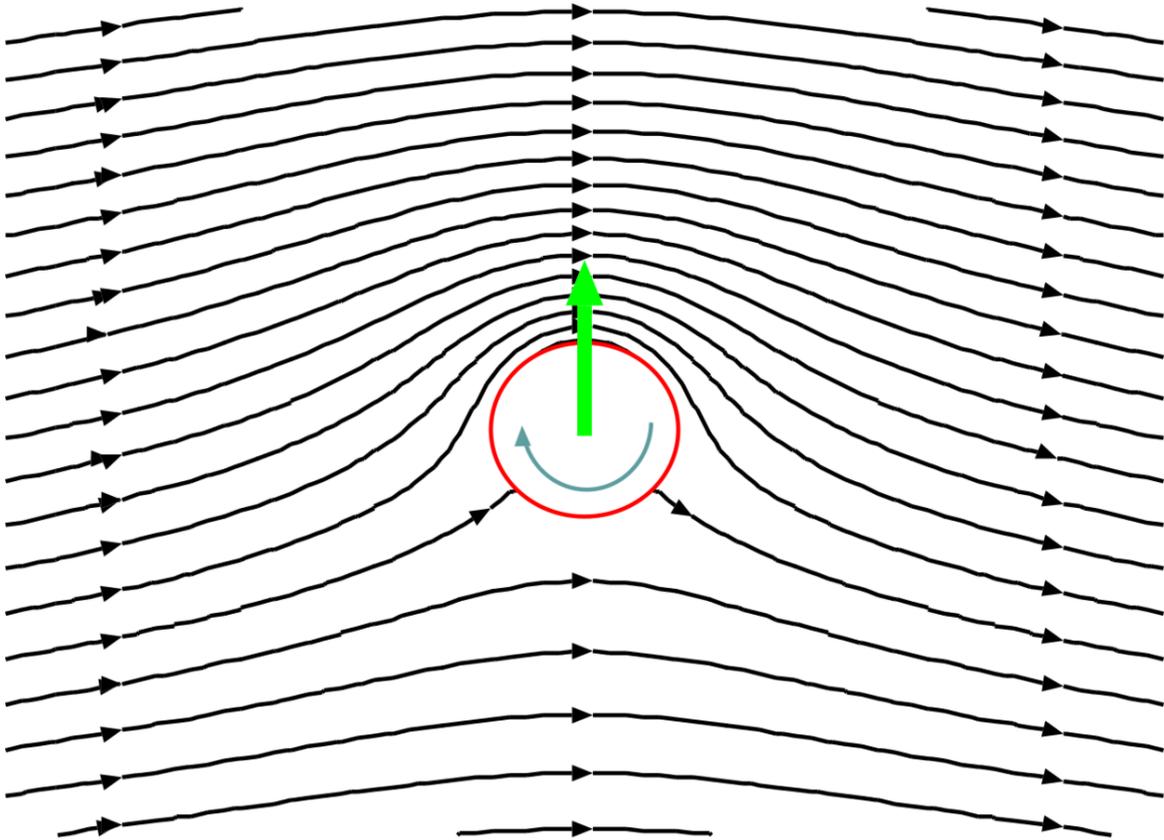


Abb. 33 Eine rotierenden Kugel erzeugt eine asymmetrische Umströmung

Während bei der symmetrischen Umströmung eines ruhenden Balles sich die Kräfte senkrecht zur Strömung aufheben, ändert sich dies bei einem rotierenden Ball. Die nebenstehende Grafik illustriert, wie die Drehung einer Kugel oder eines Zylinders die Symmetrie der Umströmung verändert und zu einer resultierenden Kraft senkrecht zur Strömung führt. Dieser Effekt wurde 1852 ausführlich von Heinrich Gustav Magnus⁵ (1802–1870) erklärt und trägt daher seinen Namen.

Bei allen professionellen Ballspielen ist die Drehung des Balles oder der Kugel von entscheidender Bedeutung für die Flugbahn oder das Verhalten beim Aufprall. Im Ballsport finden sich dafür verschiedene Namen

- "Bananenflanke"⁶ im Fußball
- "Topspin"⁷ und "Slice" beim Tennis
- „Spin“⁸ beim Tischtennis

5 <https://de.wikipedia.org/wiki/Magnus-Effekt>

6 <https://de.wikipedia.org/wiki/Bananenflanke>

7 <https://de.wikipedia.org/wiki/Topspin>

8 <https://de.wikipedia.org/wiki/Tischtennis%23Spin>

- „Drive⁹“ beim Golf

usw.

7.1.6 Flettner Rotor



Abb. 34 Yacht mit Flettner-Rotor, Berlin 1931

Neben dem Sport gab es auch Versuche der technischen Anwendung des Magnus-Effektes zur Erzeugung von Vortrieb, vor allem in der Seefahrt. Das Bild zeigt eine Rotor-Yacht

9 <https://de.wikipedia.org/wiki/Golfschlag%23Flugbahnen>

mit dem imposanten Aufbau des Flettner-Rotors¹⁰ auf den Gewässern des Wannsees 1931. Diese Konstruktion ist nach ihrem Erfinder Anton Flettner (1885 - 1961) benannt. Auch wenn jeweils nur die Seitenwindkomponente für den Vortrieb genutzt werden kann, hat diese Konstruktion einen guten Wirkungsgrad zwischen eingesetzter Energie für die Rotation und erzielbarer Vortriebsleistung.

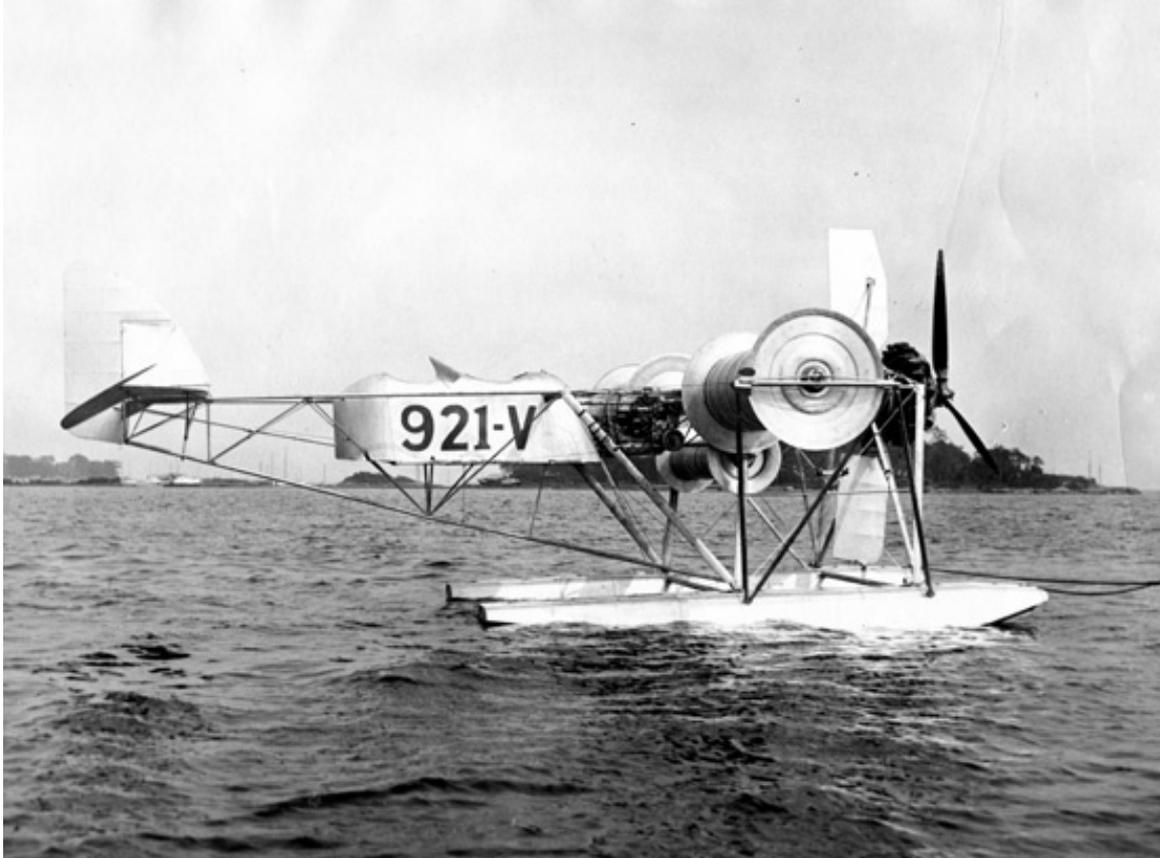


Abb. 35 Plymouth A-A-2004, 1930

Das Prinzip rotierender Zylinder wurde deswegen auch versuchsweise in Flugzeugen eingesetzt. Gegenüber einer vergleichbaren Flügelfläche hat ein Flettner-Rotor einen ca 10 fach höheren Auftrieb. Der Ersatz der Flügelfläche durch einen Flettner-Rotor hat aber einen gravierenden Nachteil, nämlich die fehlenden Segelflugeigenschaften im Falle eines Motor-ausfalls! ¹¹

¹⁰ <https://de.wikipedia.org/wiki/Flettner-Rotor>

¹¹ Whirling Spools Lift This Plane, Popular Science Monthly, Nov 1930, S.26, googlebooks ^{<https://books.google.gr/books?id=xSgDAAAAMBAJ&printsec=frontcover&hl=de#v=onepage&q&f=true>}

7.1.7 Asymmetrischer Luftstrom

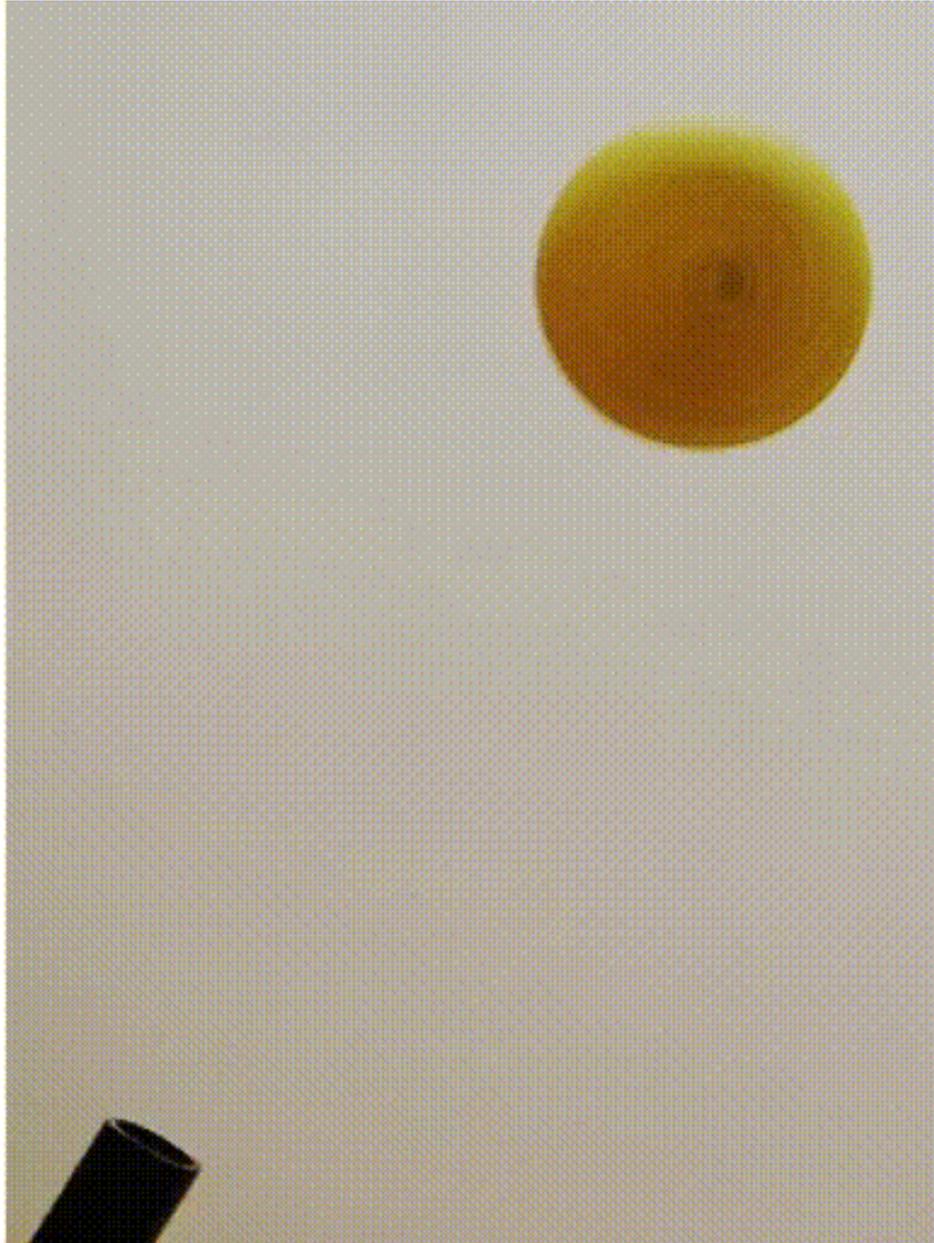


Abb. 36 Im begrenzten Luftstrahl eines Föns erfährt ein Ball durch einseitige Anströmung Auftrieb

In allen bisherigen Beispielen war die Ursache der asymmetrischen Strömung eine Asymmetrie der umströmten Körper, entweder durch ihre Form oder durch Rotation. Als letztes Beispiel für asymmetrische Umströmung soll noch einmal die symmetrische, ruhende Kugel vom Anfang dieses Kapitels betrachtet werden. Diese vollkommen symmetrische Form kann auch ohne Drehung einen Auftrieb erfahren, wenn **die Strömung eine Asymmetrie aufweist**, also z.B. im divergierenden Luftstrahl eines Föns.

Dass der Ball - anders als beim Magnus-Effekt - hier keine Rotation aufweisen muss (auch wenn diese sich manchmal einstellt), demonstrieren folgende Experimente mit asymmetrischen Strömungen:

- Video der Weber State University mit Ping-Pong Bällen¹².
- Experimente mit einem kräftigen Laubbläser¹³ und einem richtigen Ball.
- UNIVERSITÄT KASSEL - INSTITUT FÜR PHYSIK, Bernoulli-Effekt¹⁴ mit einer leeren Plastikflasche und einem Schraubenzieher!

Die asymmetrische, einseitige Umströmung von Hindernissen erklärt nicht nur die obigen Beispiele, sondern auch die Art von Sturmschäden, wenn kräftige, horizontale Winde einzelne Dachziegel oder ganze Hausdächer abdecken. Bei der Umströmung eines Hausdaches beschleunigt sich die Luft und entsprechend sinkt der Druck. So herrscht über dem umströmten Dach ein geringerer Druck als der Luftdruck (der ruhenden Luft) im Haus. Diese Druckdifferenz kann das Dach "abheben" lassen. In der Realität haben aber noch weitere Faktoren einen Einfluss auf Sturmschäden, z.B. Gebäudehöhe, Gebäudeöffnungen, Art der Dachdeckung, Dachform und -neigung etc.¹⁵.

7.2 Weiterführender Gedanke

Insbesondere für den "schwebenden Ping-Pong-Ball" findet sich gelegentlich die Erklärung durch den Coanda-Effekt¹⁶. Dieser tritt aber nur bei Flüssigkeiten wegen ihrer Eigenschaft der Adhäsion¹⁷ auf und nicht bei Luftströmungen, weil Gase keine Adhäsion zeigen.

12 <https://www.youtube.com/watch?v=2G4-pYkq0jI>

13 <https://www.youtube.com/watch?v=PPweiE9Z568>

14 <https://www.youtube.com/watch?v=UZImG081nDM>

15 Windschäden am geneigten Dach, Baunetz Wissen ^{<https://www.baunetzwissen.de/geneigtes-dach/fachwissen/feuchte--witterungsschutz/windschaeden-am-geneigten-dach-158517>} , abgerufen am 6. Februar 2022

16 <https://de.wikipedia.org/wiki/Coanda-Effekt>

17 <https://de.wikipedia.org/wiki/Adh%C3%A4sion>

8 Wie der Wind einen Flügel umströmt

8.1 Ideale Stromlinienfelder um symmetrische und asymmetrische Flügelprofile

Im Folgenden werden sogenannte Stromlinienbilder¹ interpretiert. Dabei zeigt der Verlauf der Stromlinien den Weg von Luftteilchen in einer Strömung. In einer Idealen Strömung zeigt ein Zusammenrücken von Stromlinien eine höhere Strömungsgeschwindigkeit an, ein Auseinanderrücken eine langsamere Strömungsgeschwindigkeit. Die hier verwendeten Bilder sind berechnete Stromlinien einer Idealen Strömung unter Verwendung des NASA Educational Programm "FoilSim III"². Einen Eindruck von Stromlinien einer realen Strömung in einem Windkanal bekommt man z. B. durch ein Video der Cambridge University^{3,4}

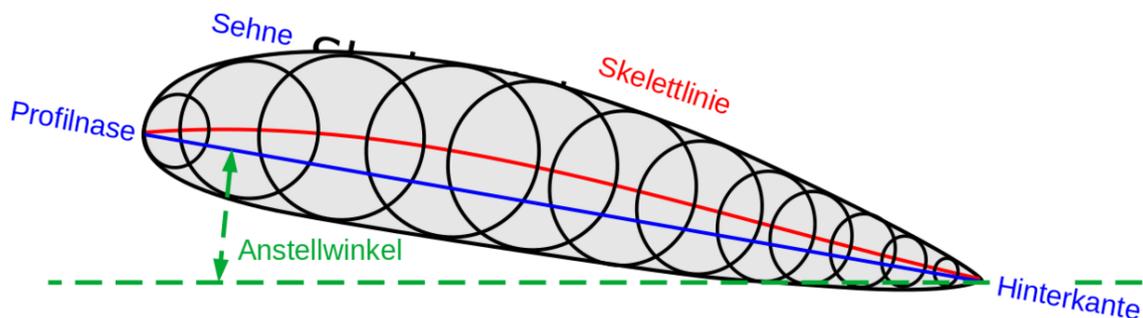


Abb. 37 Begriffe zur Beschreibung eines Flügelprofils

Ein Flügelprofil wird u.a. durch folgende Charakteristika beschrieben, die wir für die nachfolgende Betrachtung benötigen.

- Profilnase = Kleinster Krümmungsradius vorne
- Hinterkante = Spitzes Ende
- Sehne = Gradlinige Verbindung von der Nase zur Hinterkante
- Anstellwinkel = Winkel zwischen Strömungsrichtung und Sehne

1 <https://de.wikipedia.org/wiki/Stromlinie>

2 NASA, Glenn Research Center, 16.4.2019, FoilSim Student JS ^{<https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/foi13.html>}, abgerufen am 15. Dezember 2021

3 <https://www.youtube.com/watch?v=6UlsArvbTeo>

4 How Wings work? Smoke streamlines around an airfoil, Department of Engineering, University of Cambridge, multimedia video from Physics Education, 2003, by Holger Babinsky, youtube video ^{<https://www.youtube.com/watch?v=6UlsArvbTeo>}, abgerufen 2. Februar 2022

8.1.1 Umströmung eines symmetrischen Profils mit Anstellwinkel 0°

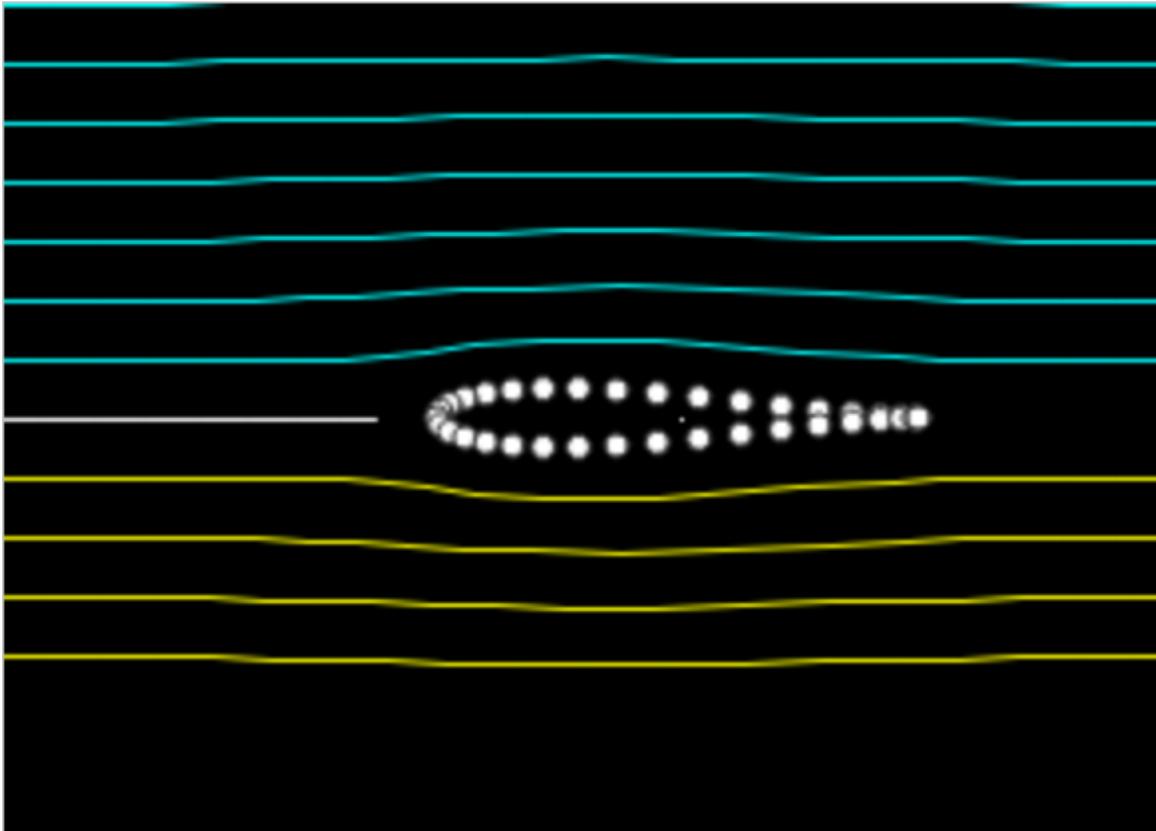


Abb. 38 symmetrisches Flügelprofil
Anstellwinkel 0°

Man kann an dieser berechneten idealen Umströmung 2 Dinge erkennen

1. An der Profilnase verteilt sich die Strömung gleichmäßig oberhalb und unterhalb des Profils. Allgemein definiert man den Staupunkt als den Punkt, an dem der Luftstrom nach oben bzw. nach unten aufgeteilt wird. Im Staupunkt selber ist die Strömung zur Ruhe gekommen, d.h. die Geschwindigkeit in Richtung der Strömung ist 0. In diesem Beispiel sind Staupunkt und Profilnase identisch. Bei einer idealen, inkompressiblen Strömung bleibt dabei die kinetische Energie der Strömung vollständig erhalten, d.h. Luft wird nicht komprimiert, sondern sie nimmt die kinetische Energie mit, während sie ober- und unterhalb der Profils strömt.
2. Der Abstand der Stromlinien untereinander ist ober- und unterhalb des Profils geringer als in der ungestörten Strömung. Dies zeigt eine höhere Strömungsgeschwindigkeit an und zwar gleichermaßen ober- als auch unterhalb des Profils.

Dies entspricht der Kontinuitätsgleichung, nach der die Strömungsgeschwindigkeit bei einer Verringerung des Strömungsquerschnitts zunimmt. Gemäß der Bernoulli-Gleichung und dem ihr zu Grunde liegenden Energieerhaltungssatz ist der statische Druck senkrecht zur Strömung hier entsprechend geringer als der statische Druck in der ungestörten Strömung. Der Effekt ist symmetrisch, d.h. es gibt keine resultierende Kraft senkrecht zur

Strömung.

Der statische Druck in der ungestörten Luftströmung entspricht dem Luftdruck der ruhenden Luft. Das ist verständlich, wenn man sich vorstellt, das Profil würde nicht im Windkanal umströmt, sondern stattdessen mit derselben Geschwindigkeit durch ruhende Luft bewegt. Das sind zunächst zwei unterschiedliche Situationen aber die Erfahrung lehrt, dass es bei den beobachtbaren Effekten wie Auftrieb und Luftwiderstand dabei keinen Unterschied gibt.

8.1.2 Umströmung eines symmetrischen Profils mit Anstellwinkel 10°

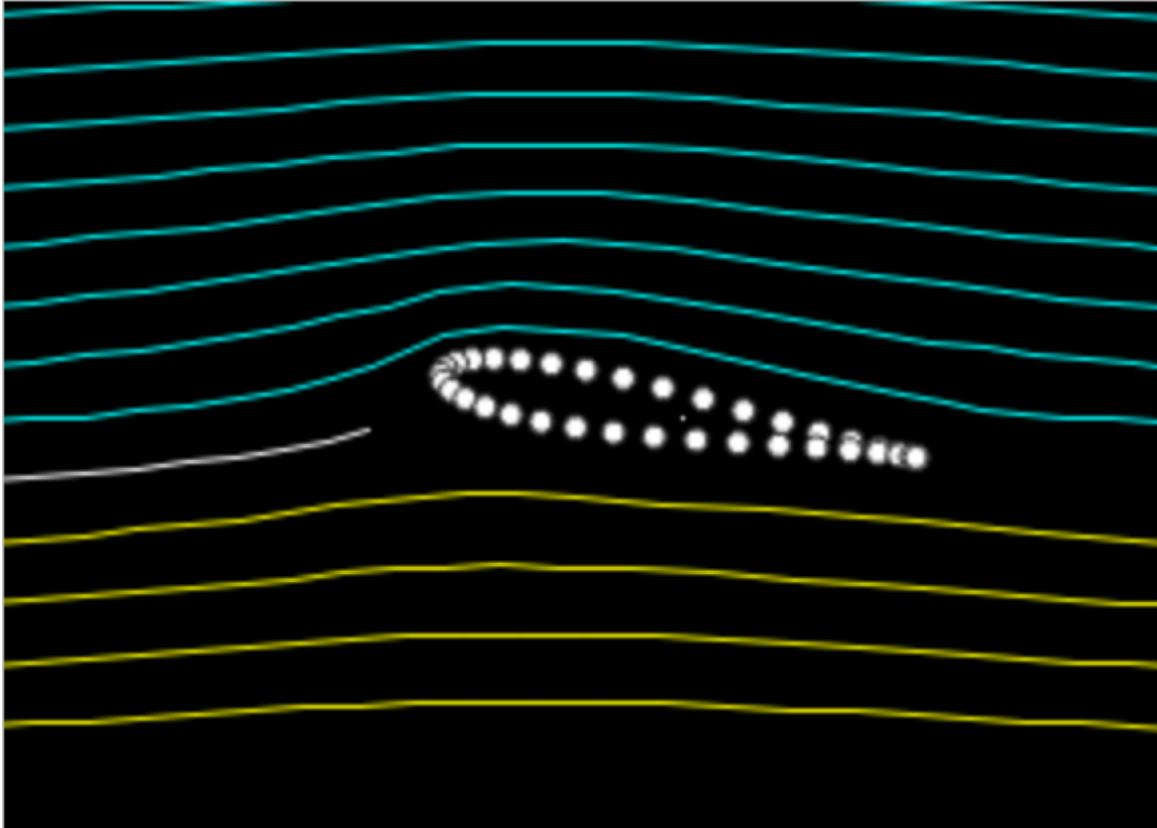


Abb. 39 symmetrisches Flügelprofil
Anstellwinkel 10°

Was hat sich durch den positiven Anstellwinkel verändert?

1. Der Staupunkt ist gewandert und befindet sich nun unterhalb der Profalnase, d.h. ein größerer Teil des Luftstroms bewegt sich oberhalb des Flügels, entsprechend strömt ein kleinerer Teil unterhalb des Profils entlang.
2. Die Geschwindigkeitsverteilung hat sich verändert.

Oberhalb des Profils ist die Strömungsgeschwindigkeit im Vergleich zum 0° Anstellwinkel noch gestiegen, weil nun ein größerer Anteil des Luftstroms über die Flügeloberseite strömt. Man erkennt dies an dem geringeren Abstand der Stromlinien oberhalb des Profils im

Vergleich zum ersten Bild.

Unterhalb des Profils ist die Strömungsgeschwindigkeit kleiner geworden, vor allem im vorderen Bereich der Flügelunterseite. Hier erfährt der kleinere Anteil des Luftstroms eine Erweiterung. Man erkennt dies an dem größeren Abstand der Stromlinien im Vergleich zur ungestörten Strömung.

Gemäß der Bernoulli-Beziehung hat sich der statische Druck im Vergleich zum statischen Druck der ungestörten Strömung (Luftdruck) verändert. Oberhalb des Profils ist er deutlich verringert und unterhalb des Profils etwas erhöht. Es gibt eine nach oben gerichtete resultierende Kraft senkrecht zur Strömung. In dieser Berechnung beträgt die durchschnittliche Druckdifferenz zwischen Ober- und Unterseite des Profils ca. 74 hPa (bei 100 m/s Strömungsgeschwindigkeit der ungestörten Strömung).

8.1.3 Umströmung eines asymmetrischen Profils mit Anstellwinkel 0°

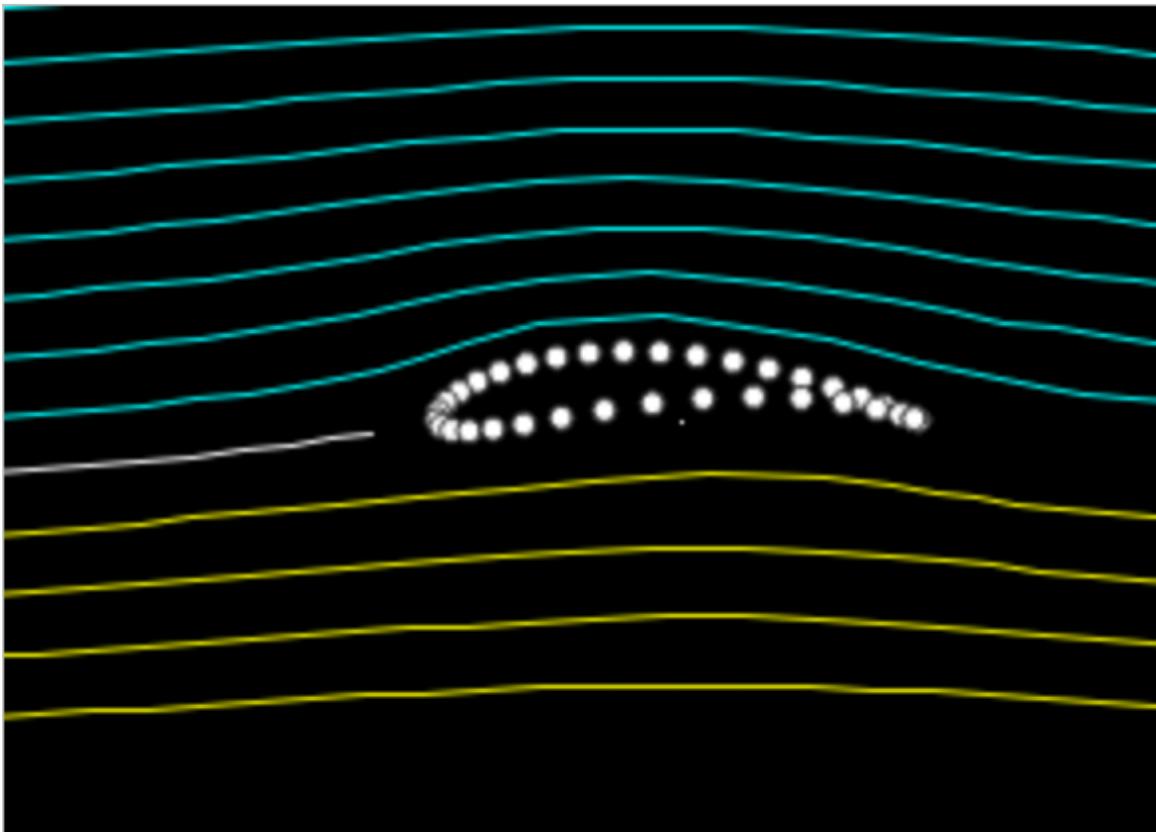


Abb. 40 asymmetrisches Flügelprofil
Anstellwinkel 0°

Hier betrachten wir die Umströmung eines typischen asymmetrischen Flügelprofils parallel zur Sehne (Achse Profilnase – Profilhinterkante), also bei einem Anstellwinkel von 0° . Wir sehen eine Mischung aus den ersten beiden Strömungsbildern

1. Der Staupunkt liegt bei der Profilnase, wie im ersten Beispiel. Der Luftstrom verteilt sich gleichmäßig ober- und unterhalb des Profils.
2. Der obere Luftstrom erfährt durch die Profiloberseite eine Verengung und beschleunigt sich. Der untere Luftstrom erfährt durch die spezielle Profilform im hinteren Teil eine kleine Erweiterung und strömt dort mit etwas langsamerer Geschwindigkeit im Vergleich zur ungestörten Strömung. Die Drucksituation entspricht ungefähr dem 2. Beispiel.

Entsprechend der Bernoulli-Gleichung herrscht oberhalb des Profils ein geringerer statischer Druck und unterhalb ein etwas größerer. Die Druckabnahme oberhalb ist dabei größer als die Druckzunahme unterhalb. Es gibt eine nach oben gerichtete resultierende Kraft senkrecht zur Strömung. In dieser Berechnung beträgt die durchschnittliche Druckdifferenz zwischen Ober- und Unterseite des Profils ca. 76 hPa (bei 100 m/s Strömungsgeschwindigkeit der ungestörten Strömung). Dieses asymmetrische Profil erzeugt bei 0° Anstellwinkel also fast soviel Auftrieb wie das symmetrische Profil bei einem Anstellwinkel von 10°.

8.1.4 Umströmung eines asymmetrischen Profils mit Anstellwinkel 10°

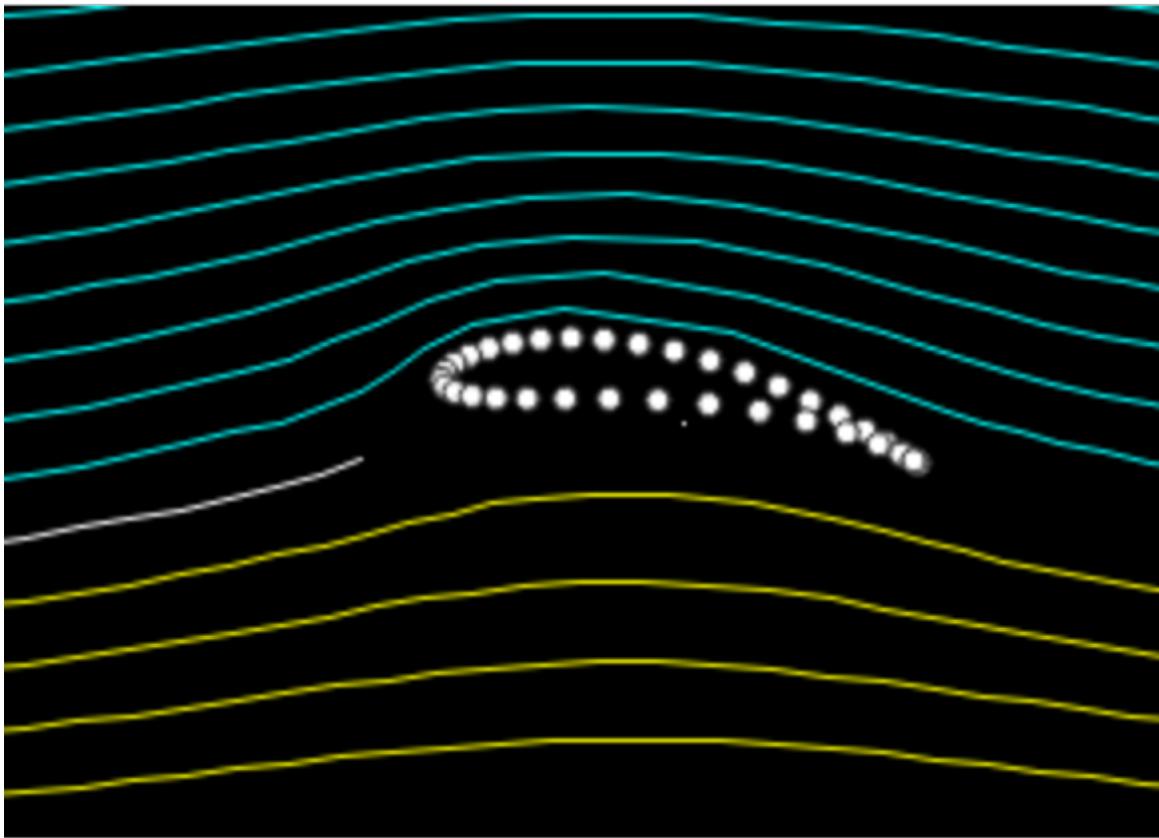


Abb. 41 asymmetrisches Flügelprofil
Anstellwinkel 10°

Mit diesem Bild können wir den aerodynamischen Auftrieb eines symmetrischen und eines asymmetrischen Profils bei gleichem Anstellwinkel vergleichen.

1. Der Staupunkt liegt wieder unterhalb der Profilnase, d.h. ein größerer Teil des Luftstroms bewegt sich oberhalb des Flügels, ein kleinerer Teil unterhalb.

Allgemein kann man sagen, dass je größer der Anstellwinkel ist, desto weiter wandert der Staupunkt Richtung Profilunterseite.

1. Die Strömungsgeschwindigkeit oberhalb des Flügelprofils ist deutlich größer und unterhalb etwas kleiner als die Geschwindigkeit der ungestörten Strömung.

Die Erklärung auf Grundlage der Kontinuitätsgleichung lautet, dass das (schräge) Profil sowohl ober- als auch unterhalb eine Verengung des Strömungsquerschnittes darstellt. Zur Erklärung der unterschiedlichen Geschwindigkeiten ober- und unterhalb des schräg angeströmten Profils ist zu berücksichtigen, dass durch die schräge Anströmung ein größerer Teil des Luftstroms oberhalb und nur ein kleinerer Teil unterhalb des Profils vorbeiströmt. Für den kleineren Teil des Luftstroms unterhalb des Profils erweitert sich der Strömungsquerschnitt, entsprechend verlangsamt sich dort die Strömungsgeschwindigkeit im Vergleich zur ungestörten Strömung. Je nach Profilform und Anstellwinkel ist die Luft oberhalb des Profils ca. 30 % schneller als die ungestörte Strömungsgeschwindigkeit, während sie unterhalb des Profils ca. 15 % langsamer ist als in der ungestörten Strömung⁵.

Entsprechend der Bernoulli-Gleichung ist deswegen der statische Druck oberhalb des Profils geringer und unterhalb etwas größer als der Luftdruck der ruhenden Luft. Es gibt eine nach oben gerichtete resultierende Kraft senkrecht zur Strömung. In dieser Berechnung beträgt die durchschnittliche Druckdifferenz zwischen Ober und Unterseite des Profils ca. 149 hPa (bei 100 m/s Strömungsgeschwindigkeit der ungestörten Strömung). Dieses asymmetrische Profil erzeugt bei vergleichbaren Bedingungen (Anstellwinkel 10°, gleiche Strömungsgeschwindigkeit) also fast doppelt soviel Auftrieb wie das symmetrische Profil.

⁵ Warum kann ein Flugzeug fliegen? (Luftfahrt verständlich erklärt), Frank Dreyer, Kapitän A380, 14. 12.2020, youtube video [^{\{https://www.youtube.com/watch?v=3wifrwabptk\}}](https://www.youtube.com/watch?v=3wifrwabptk), abgerufen am 4. Februar 2022

8.2 Weiterführende Gedanken

8.2.1 Bernoulli kontra Newton

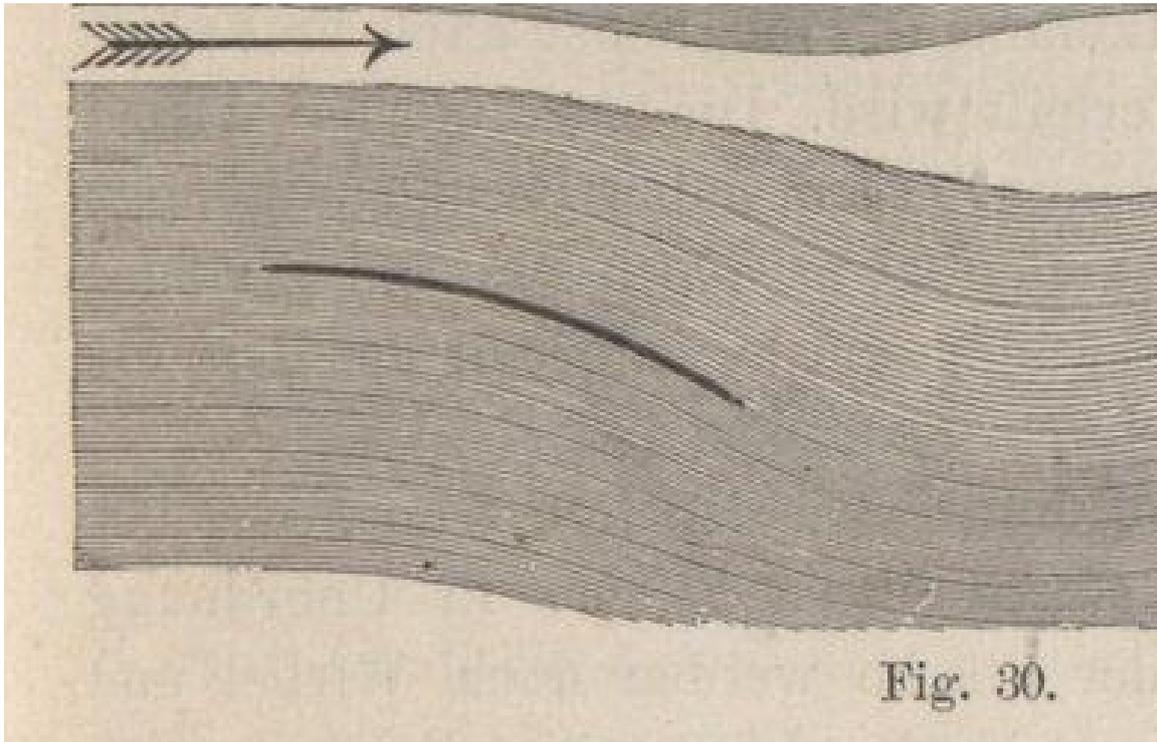


Abb. 42 Fig. 30 von Lilienthal zum Umströmen einer gewölbten Fläche (1889)

Betrachtet man die 3 Beispiele für eine asymmetrische Umströmung genauer (insbesondere das letzte Beispiel mit dem höchsten Auftrieb), stellt man folgendes fest: Am Beginn der ungestörten Strömung gibt es nur eine horizontale Strömung. Durch die Umströmung des Flügelprofils bekommt die Strömung eine zusätzliche Geschwindigkeitskomponente nach unten. D.h. der Luftstrom wird durch die Asymmetrie der Umströmung - in dieser Anordnung - nach unten abgelenkt. Die Strömung erhält durch das Profil einen gekrümmten Verlauf. Schon Lilienthal hat diesen Aspekt des Strömungsverlaufs aufgrund seiner Analysen beschrieben, obwohl zu seiner Zeit entsprechende Beobachtungen noch gar nicht möglich waren. Er schreibt auf S. 81:

„Die hier vorgeführte Darstellung mag nun wohl der Wirklichkeit bei derartigen unsichtbaren Vorgängen in der Luft nicht genau entsprechen, es genügt aber, wenn die charakteristischen Unterschiede so weit zutreffen, als es für die Anknüpfung der nötigen Überlegungen erforderlich ist“⁶.

Die durch den Flügel erzeugte abwärts gekrümmte Strömung entspricht einer ständigen Impulsänderung der vorbeiströmenden Luft, d.h. der Flügel überträgt einen nach unten

6 Otto Lilienthal, Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst als Beitrag zur Systematik der Flugtechnik, 1889, Deutsches Textarchiv [^](https://www.deutschestextarchiv.de/book/view/lilienthal_vogelflug_1889?){https://www.deutschestextarchiv.de/book/view/lilienthal_vogelflug_1889?}

gerichteten Impulsstrom auf die vorbeiströmende Luft. Nach dem 3. Newtonschen Axiom (Actio = Reactio) wirkt auf den verursachenden Flügel eine gleich große entgegengesetzte Impulsänderung. D.h. anschaulich, der Abwärtsbewegung der Luft entspricht eine Aufwärtsbewegung (Auftrieb) des Flügels. In der Tat kann man über die Menge und das Ausmaß der abwärts gelenkten Luft pro Zeit ermitteln, welche Auftriebskraft der Flügel erfährt.

Gelegentlich wird die Abwärtsbewegung der Luft mit einer Art „Reflexion“ der Luftströmung an der schräg angeströmten Unterseite des Profils erklärt. Das ist zwar sehr anschaulich aber z.B. schwierig anzuwenden auf das Beispiel der asymmetrische Umströmung bei einem Anstellwinkel von 0° , die – wie wir gesehen haben – ebenfalls Auftrieb erzeugt.

Auch ist es schwierig zu erklären, wie die Oberseite des Flügelprofils zu dieser beobachteten Abwärtsbewegung beiträgt, zumal die Oberseite einen größeren Beitrag zum Auftrieb leistet als die Unterseite. Eher selten findet sich für die Oberseite die Erklärung, dass die Luft an der Flügeloberseite „hafte“ und deswegen der Form folge, so ähnlich wie Flüssigkeiten aufgrund der Adhäsion⁷ an Oberflächen haften (Coandă-Effekt⁸).

Richtig ist, dass die asymmetrische Umströmung eines Flügels dazu führt, dass Luft senkrecht zur Strömung nach unten beschleunigt wird, und es entspricht dem 3. Newtonschen Axiom, dass der Flügel eine gleich große Reactio erfährt. Darauf wird noch im nächsten Kapitel eingegangen.

8.2.2 Zusammenfassung mit Venturi und Bernoulli

Die hier versuchte populärwissenschaftliche Erklärung zum Auftrieb an einem Tragflügel als Beispiel einer asymmetrischen Umströmung beruht auf zwei bekannten Gesetzmäßigkeiten und einer grundlegenden Beobachtung.

Kontinuitätsgleichung

In den vorangehenden Kapiteln wurde anhand der Venturidüse die Beobachtung der konstanten Stromdichte zur Formulierung der Kontinuitätsgleichung benutzt. Für eine inkompressible Luftströmung gilt:

- „Je kleiner der Strömungsquerschnitt, desto größer die Strömungsgeschwindigkeit“.

An Stelle der Kontinuitätsgleichung findet sich gelegentlich als Begründung für die unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten, dass der obere und der untere Luftstrom hinter dem Profil wieder zusammen kommen müssen. Für die höhere Strömungsgeschwindigkeit wird dann der längere Weg auf der Oberseite eines Flügels angeführt. Das widerspricht aber

⁷ <https://de.wikipedia.org/wiki/Adh%C3%A4sion>

⁸ <https://de.wikipedia.org/wiki/Coanda-Effekt>

der Beobachtung⁹. Zudem reichen die Wegunterschiede ober- und unterhalb des Flügels nicht aus, um die beobachtbaren Geschwindigkeits- und Druckunterschiede hervorzurufen. Das Argument der Wegstrecken ist falsch.

Bernoulli-Gleichung

Die Betrachtung der Bernoulli-Gleichung für eine ideale Strömung ohne Energiezufuhr zeigt m.E., warum die höhere Geschwindigkeit bei einem kleineren Strömungsquerschnitt zu einer Verringerung des statischen Drucks führt, mit dem Ergebnis:

- „Je größer die Geschwindigkeitszunahme in einer Verengung, desto geringer der statische Druck“;

Für das richtige Verständnis der Bernoulli-Gleichung soll hier betont werden, dass der dynamische Druck (und entsprechend der totale Druck) nur in Strömungsrichtung wirkt, während der statische Druck allseitig wirkt. Für die Anwendung auf eine Strömung nicht notwendig, wohl aber für das Verständnis hilfreich ist der Hinweis, dass in den betrachteten Beispielen der statische Druck der ungestörten Strömung der normale Luftdruck der ruhenden Luft p_{Luft} ist.

Grundlegende Beobachtung

Für die Erklärung des Auftriebs wird die Umströmung eines Profils als Verengung des Strömungsquerschnitts interpretiert. Bei einer asymmetrischen Umströmung beobachtet man im Stromlinienbild eine ungleiche Aufteilung der Strömung um das Profil, die für die Anwendung von Kontinuitäts- und Bernoulli-Gleichung ausschlaggebend ist.

- Eine Asymmetrie in der Umströmung führt zu einer asymmetrischen Aufteilung des Luftstroms auf den beiden umströmten Seiten des Flügelprofils.
- Für den oberen größeren Anteil des Luftstromes stellt das Flügelprofil einer Verringerung des Strömungsquerschnitts dar.
- Für den kleineren unteren Anteil des Luftstromes steht dagegen ein größerer Strömungsquerschnitt zur Verfügung.

Ergebnis

Mit diesen 3 Aussagen können folgende grundlegende Aspekte des Auftriebs qualitativ erklärt werden

1. Oberhalb des Flügels herrscht ein geringerer statischer Druck ($<p_{Luft}$).
2. Unterhalb des Flügels herrscht ein größerer statischer Druck ($>p_{Luft}$).
3. Der Unterdruck oberhalb des Flügels ist stärker ausgeprägt als der Überdruck unterhalb.
4. Auftrieb entsteht bei einer asymmetrischen Umströmung als resultierende Kraft durch den unterschiedlichen statischen Druck unter- und oberhalb des Flügels.

⁹ How Wings work? Smoke streamlines around an airfoil, Department of Engineering, University of Cambridge, multimedia video from Physics Education, 2003, by Holger Babinsky, youtube video [^{\{https://www.youtube.com/watch?v=6UlsArvbTeo\}}](https://www.youtube.com/watch?v=6UlsArvbTeo), abgerufen 2. Februar 2022

5. Die ungleichen Strömungsgeschwindigkeiten führen dazu, dass am Profilende obere und untere Strömung zueinander versetzt sind.

8.2.3 Grenzen der Betrachtung

Das Modell der Idealen Strömung beruht auf mehreren Voraussetzungen, die in der Realität nicht erfüllt werden, z.B.:

- Das Gas bewegt sich reibungsfrei, d.h. die Wechselwirkung der Gasteilchen mit den Begrenzungswänden beschränkt sich ausschließlich auf elastische Stöße.
- Die Strömung ist wirbelfrei.
- Die Strömung ist laminar, d.h. die Stromlinien kreuzen sich nie.
- Die Strömung ist inkompressibel, d.h. in Verbindung mit der Konstanz der Energie herrscht überall dieselbe Dichte.

Die oben erläuterten Beispiele zeigen, dass trotz der starken Vereinfachung dieses Modells der Idealen Strömung der Aspekt des Auftriebs und einige andere Strömungseffekte am Flügel qualitativ gut beschrieben werden können.

Folgende Aspekte können jedoch nicht erklärt werden:

- Die Ablenkung der Luftströmung am Ende des Profils (= gekrümmte Strömung) nach unten.
- Die Bewegung eines Flügels durch ruhende Luft führt zwar zu denselben beobachtbaren Druckunterschieden, aber es liegt keine Strömung vor.
- Weil eine reibungsfreie Strömung betrachtet wird, findet der Luftwiderstand in Form von Druck- und Oberflächenwiderstand sowie induziertem Widerstand keine Beachtung. Auftrieb geschieht quasi ohne Energieaufwand.

Die verschiedenen Formen des Luftwiderstandes sind aber bedeutungsvoll. Während eine ideale Umströmung dem umströmten Körper keinen Luftwiderstand entgegengesetzt, wird doch in der Realität jede Bewegung durch den Luftwiderstand abgebremst.

Die Situation ist ähnlich wie bei der Betrachtung des freien Falls. Sieht man von der Reibung (und dem hydrostatischen Auftrieb) ab, fallen alle Körper im Prinzip gleich schnell zu Boden. Erst wenn man Reibung (und hydrostatischen Auftrieb) berücksichtigt, ergeben sich unterschiedliche Fallverhalten, die auch in der Realität beobachtet werden. Übertragen auf die Ideale Strömung heißt das, das Prinzip des Auftriebs wird richtig beschrieben, aber erst mit Berücksichtigung der Reibung kommt man der exakten Beschreibung der beobachtbaren Realität näher.

Für eine exakte Beschreibung des Luftwiderstandes muss das Modell erweitert werden. Dies hat als erster Ludwig Prandtl¹⁰ (1875 – 1953) getan, der 1904 seine Grenzschichttheorie¹¹ veröffentlicht hat. Mit dieser Theorie ist es z.B. möglich, den Druck- und Oberflächenwiderstand von umströmten Körpern zu berechnen, welche der wirklichen Bewegung in Luft

¹⁰ <https://de.wikipedia.org/wiki/Ludwig%20Prandtl>

¹¹ https://de.wikipedia.org/wiki/Fluidodynamische_Grenzschicht

entgegenwirken.

Darüber hinaus gibt es noch eine weitere Form des Luftwiderstandes, den sogenannten induzierten Luftwiderstand, der auch die Fortbewegung bremst, aber nur bei einer asymmetrischen Umströmung auftritt. Der induzierte Widerstand kann deswegen als eine unmittelbare Voraussetzung für Auftrieb betrachtet werden. Der induzierte Widerstand liefert auch die Erklärung, warum der Spritverbrauch eines Flugzeugs - bei gleicher Form und Geschwindigkeit - von seinem Beladungszustand abhängt. Das nächste Kapitel geht genauer darauf ein.

9 In Wahrheit fliegt ein Flugzeug durch ruhende Luft

9.1 Wie sich die Luft wirklich bewegt



Abb. 43 Learjet fotografiert von P.Bowen aus der Perspektive des Heckschützen eines B-25 Bombers^a.

^a https://de.wikipedia.org/wiki/North_American_B-25

Die bisherigen Beispiele beschreiben überwiegend Situationen, in denen ruhende Körper von einem Wind umströmt werden, der klassischen Situation in einem Windkanal. In der Wirklichkeit des Fliegens, dem hier das Hauptinteresse gilt, ist es aber genau umgekehrt: Es ist das Flugzeug, welches sich bewegt und es ist die Luft, die ruht. Dieser Umstand wird meist übersehen, und der Eindruck, den ein Passagier im Flugzeug angesichts vorbei rasender Wolkenfetzen bekommt, tut sein übriges. Aber die Kontinuitätsgleichung und die Gleichung von Bernoulli sind aus der Beobachtung bewegter Fluide entstanden und es ist fraglich, inwieweit sie auf Bewegung durch ruhende Luft angewandt werden können.

So entsteht die Frage, **was passiert eigentlich bei der Bewegung eines Flügels durch ruhende Luft?**

Das nebenstehende Bild gibt einen ersten Eindruck von der Bewegung der Luft. Es zeigt einen Businessjet im Flug knapp über einer Wolkenschicht. Man erkennt, dass unterhalb des Flugzeugs die Luft eine Abwärtsbewegung erfährt, durch welche die Wolkenschicht eingedrückt wird, den sogenannten **Downwash**. Diese beeindruckende Aufnahme hat der Fotograf Paul Bowen¹ gefertigt. Er saß dazu am Platz des ehemaligen Heckschützen einer North_American_B-25² mit Sicht nach hinten.

1 <http://www.airtoair.net/index.htm>

2 https://de.wikipedia.org/wiki/North_American_B-25



Abb. 44 Luftbewegung einer Rauchwand beim Durchfliegen

Das zweite Foto verdeutlicht die Luftbewegung in Bodennähe beim Durchfliegen einer rot gefärbten, aufsteigenden Rauchwand. Man erkennt den sogenannten **Randwirbel** (Vortex).

Beide Fotos liefern in der Tat einen völlig anderen Eindruck als die Stromlinien im Windkanal. Bevor die Bewegung ruhender Luft um einen bewegten Flügel genauer analysiert wird, hier Beispiele mit eindrucksvollen optischen Eindrücken von Downwash und Randwirbel bei der Bewegung von Flugzeugen durch ruhende Luft

- Die ersten beiden Videos zeigen je ein Beispiel für eine „umgekehrte“ Windkanalaufnahme, in der durch ein bewegtes Flugzeugmodell eine Abwärtsbewegung der Luft erzeugt wird. Wie auf dem Foto wird der Downwash³ auch hier durch eine Rauchwolke sichtbar gemacht. Der Downwash kombiniert sich mit zwei gegenläufigen Randwirbeln an den Flügelspitzen.

1) Ein Flugmodell fliegt durch Rauch⁴

³ <https://de.wikipedia.org/wiki/Abwind%23downwash>

⁴ <https://qph.fs.quoracdn.net/main-qimg-2b01acd30549c7c76b40d570ce958621>

2) French Aerospace Lab ONERA⁵.

- Die zweiten Videos zeigen dasselbe bei einem Verkehrsflugzeug im Landeanflug durch eine Wolkenschicht.

3) Awesome view of a Emirates Airbus A380 creating huge wake vortices in clouds at Sunset⁶

4) noch ein Airbus A380 erzeugt Downwash und Randwirbel⁷

- Das Zentrum der Randwirbel liegt im Bereich der Flügelspitzen (Vortex⁸), dies zeigt das letzte Video eindrucksvoll.

5) Randwirbel in einem sehr tiefen Vorbeiflug⁹

9.1.1 Erläuterung der Luftbewegung

Sowohl im Windkanal an einem ruhenden Flügel als auch am bewegten Flügel durch ruhende Luft stellt man denselben Zustand fest: Oberhalb des Flügels herrscht Unterdruck, unterhalb Überdruck.

In der Windkanalsituation kann man die Druckverhältnisse qualitativ mit dem Bernoulli-Effekt, d.h. mit einer vergrößerten Strömungsgeschwindigkeit oberhalb und einer verringerten Strömungsgeschwindigkeit unterhalb erklären. In der Situation des bewegten Flügels gibt es keine Strömung à la Bernoulli. Stattdessen stellt sich die Frage, wie reagiert ruhende Luft auf die um den bewegten Flügel herrschenden Druckverhältnisse?

Grundsätzlich gilt, dass Luft entlang eines Druckgefälles in Richtung des niedrigeren Drucks beschleunigt wird. Im Rahmen der Bernoulli-Gleichung wurde die grundlegende Beziehung zwischen Druckdifferenz und Geschwindigkeitsänderung bereits hergeleitet. Wenn eine Druckdifferenz nicht aufrechterhalten wird, z.B. in einer stationären Strömung, bedeutet die durch eine Druckdifferenz hervorgerufene Luftbewegung nichts anderes als den selbsttätigen Ausgleich von Druckunterschieden, so wie sich auch Temperaturunterschiede von selbst ausgleichen.

Mit dieser Vorbemerkung kann man in der ruhenden Luft im Umfeld eines bewegten Flügels 2 Luftbewegungen unterscheiden, die beide der Tendenz zum Druckausgleich entspringen.

5 <https://www.instagram.com/p/Bnqs6tSBDam/>

6 <https://www.youtube.com/watch?v=Ihc4oWKnWTA>

7 https://www.youtube.com/watch?v=BaRb46vv_bQ

8 https://de.wikipedia.org/wiki/Wirbel_%28Str%C3%B6mungslehre%29

9 <https://coub-com-g6qu.imagizer.com/view/ztzrh>



Druckunterschiede um ein bewegtes Flugzeug

Abb. 45 Animation zur Bewegung von ruhender Luft durch einen bewegten Flügel

1. Die ersten vier Videos zeigen insbesondere, wie im Flügelbereich die Luft vertikal nach unten beschleunigt wird (Downwash¹⁰). Diese Luftbewegung entsteht durch eine Kombination der Druckausgleiche oberhalb und unterhalb des Flügels.

Oberhalb strömt Luft aus dem Bereich des normalen Luftdrucks nach unten in Richtung des Unterdrucks auf der Flügeloberseite.

Unterhalb strömt Luft vom Überdruck der Flügelunterseite nach unten in Richtung des geringeren normalen Luftdrucks (In der Animation grün eingezeichnet).

1. Das 5. Video zeigt eindrucksvoll den Druckausgleich an dem linken und rechten Flügelende (Vortex¹¹). Hier strömt die Luft aus dem Überdruckgebiet unterhalb des Flügels in das Unterdruckgebiet oberhalb des Flügels. Es entsteht ein sogenannter Randwirbel. Im Video sieht man, wie der in Flugrichtung rechte Randwirbel sich durch einen leichten Seitenwind über dem Kopf des Filmenden hinwegbewegt, mit Drehrichtung entgegen dem Uhrzeigersinn (in der Animation für beide Flügelspitzen rot eingezeichnet).

Sowohl beim Downwash als auch bei den Randwirbeln wird der Luft kinetische Energie zugeführt, die durch die Bewegung des verursachenden Flügels aufgebracht werden muss. Diese Energie, welche der Luft zugeführt wird, geht dem Flugzeug verloren. D.h. die

¹⁰ <https://de.wikipedia.org/wiki/Abwind%23downwash>

¹¹ https://de.wikipedia.org/wiki/Wirbel_%28Str%C3%B6mungslehre%29

beschriebenen Luftbewegungen zum Ausgleich der erzeugten Druckunterschiede stellen eine Art Luftwiderstand entgegen der Bewegung des Flügels bzw. Flugzeugs dar. Man nennt dies auch den induzierten Widerstand¹². Andere Widerstände sind der Formwiderstand¹³ (abhängig von Formgebung und Querschnittsfläche) und der Reibungswiderstand¹⁴ (abhängig von Größe und Beschaffenheit der Flügeloberfläche).

Die durch die Bewegung des Flügels erzeugte Abwärtsbewegung der Luft erklärt den Auftrieb am Flügel. Denn nach den Grundsätzen der Mechanik erfordert die Bewegung der Luft nach unten eine beschleunigende Kraft, und der die Beschleunigung verursachende Körper erfährt eine ebensolche Kraft, aber in entgegengesetzter Richtung (Actio gleich Reactio¹⁵). D.h. in dem Maße wie der bewegte Flügel Luft nach unten beschleunigt, erfährt er Auftrieb nach oben. Man bezeichnet diese auftriebserzeugende Abwärtsbewegung der Luft auch als Downwash¹⁶. Der Downwash als Teil des durch die Flügelbewegung induzierten Widerstandes ist also prinzipiell notwendig. Das steht etwas im Widerspruch zum üblichen physikalischen Verständnis des Wortes *Widerstand*, mit dem man i.d.R. etwas Negatives bezeichnet, was möglichst vermieden werden soll.

Der Randwirbel¹⁷ als ein anderer Teil des induzierten Widerstandes trägt allerdings nicht zu diesem Auftrieb bei und wird deswegen auch als schädlicher (induzierter) Widerstand bezeichnet.

9.1.2 Gewichtsabhängiger Spritverbrauch

Die hier vorgestellte Erklärung des Auftriebs ist in einem wichtigen Punkt näher an der Realität als die Erklärung über den Bernoulli-Effekt. Die Erklärung über Bernoulli geht von einer reibungsfreien Strömung aus. Entsprechend erscheint es nach Bernoulli, als wenn der Auftrieb durch die Druckdifferenz sozusagen ohne extra Aufwand entsteht.

Die Erklärung über den Downwash zeigt, dass der Auftrieb der Menge und Geschwindigkeit der nach unten beschleunigten Luft entspricht und dass die darin enthaltene Energie durch den Antrieb des Flugzeugs zugeführt werden muss. Das erklärt viel besser die Realität, in der ein vollbeladenes Flugzeug bei gleicher Geschwindigkeit mehr Sprit verbraucht als ein unbeladenes. Bei großer Beladung muss der Flügel in derselben Zeit mehr Luft oder dieselbe Luftmenge schneller nach unten beschleunigen als bei geringerer Beladung und diese größere Energiemenge, welche von dem Flügel an die Luft abgegeben wird, muss in Form von erhöhter Triebwerksleistung zur Verfügung gestellt werden.

12 <https://de.wikipedia.org/wiki/induzierter%20Widerstand>

13 <https://de.wikipedia.org/wiki/Druckwiderstand>

14 https://de.wikipedia.org/wiki/Reibung%23Innere_Reibung

15 https://de.wikipedia.org/wiki/Actio_und_Reactio

16 <https://de.wikipedia.org/wiki/Abwind%23downwash>

17 <https://de.wikipedia.org/wiki/Wirbelschleppe>

9.2 Weiterführende Gedanken

9.2.1 Relativbewegung

Rückblickend betrachtet zeigt sich, dass die Mehrzahl der in diesem Buch behandelten Beispiele keinen Unterschied macht zwischen der Situation, in der ein Wind um ein stehendes Hindernis strömt und der Situation, in der sich ein Hindernis durch ruhende Luft bewegt. In der Realität des Fliegens hat man meist eine Kombination beider Fälle, d.h. man bewegt sich während gleichzeitig ein Wind weht.

Aus Sicht der klassischen Mechanik macht es keinen Unterschied, ob etwas in Ruhe oder in gleichförmiger geradliniger Bewegung ist. Es gibt kein absolutes Koordinatensystem (z.B. das Weltall), in dem man sagen könnte: Was hier ruht, ruht wirklich. Statt dessen zeigt die Erfahrung, **alle mechanischen physikalischen Phänomene hängen nur von der Relativgeschwindigkeit ab**. Mechanische Kräfte gehen stets mit einer **Änderung der Geschwindigkeit** einher, eine etwaige vorhandene konstante Geschwindigkeit ist dagegen ohne Belang. Anschaulich heißt das z.B., dass sich der Flugbegleiter beim Eingießen eines Glases keine Gedanken darüber machen muss, ob das Flugzeug am Boden steht oder sich mit hoher Geschwindigkeit durch die Luft bewegt, man hält das Glas einfach unter die Flaschenöffnung und kann darauf vertrauen, dass die Flüssigkeit senkrecht nach unten ausströmt.

Einstein hat dieses Prinzip über die Mechanik hinaus auf die gesamte Physik übertragen. Die von ihm entwickelte Relativitätstheorie¹⁸ fordert, physikalische Gesetze zur Beschreibung der Natur so zu formulieren, dass ausschließlich die Relativgeschwindigkeit der beteiligten Systeme berücksichtigt werden muss.

D.h. für die Messung physikalischer Größen (z.B. Änderung der Strömungsgeschwindigkeiten und der Druckverhältnisse um einen Flügel) ist es gleichgültig, ob diese Messung an einem bewegten Flugzeug oder in einem Windkanal durchgeführt wird. Dennoch soll betont werden, dass für die beiden Situationen gänzlich unterschiedliche Modelle benutzt werden. Die Bernoulli-Beziehung ist ein sehr einfaches Modell zur Beschreibung der Windkanalsituation und wird deswegen gerne zur Erläuterung des Auftriebs herangezogen. Um die in diesem Kapitel gezeigten Luftbewegungen um ein bewegtes Flugzeug zu beschreiben, sind kompliziertere mathematische Gleichungen anzuwenden, welche vor allem die Reibungseffekte berücksichtigen, was i.d.R. dem Aerodynamiker überlassen bleibt.

¹⁸ <https://de.wikipedia.org/wiki/Spezielle%20Relativit%C3%A4tstheorie>

10 Was wir am Beispiel Auftrieb über Physik lernen können

10.1 Der Modellcharakter der Physik

Die hier vorgenommene Betrachtung zum dynamischen Auftrieb an Flugzeugen, aber auch die dabei verwendeten Konzepte wie "kinetische Gastheorie", "ideale Strömung" oder Prinzipien wie die "Bernoulli-Gleichung" ermöglichen einen Blick auf das Verhältnis von Physik und Wirklichkeit. Eine solche Betrachtung soll dieses Buch abrunden.

Zur Beschreibung des Phänomens "innerer Druck" in Gasen hat sich im Laufe der wissenschaftlichen Diskussion am Ende das Modell des Idealen Gases durchgesetzt. Es ist verständlich, dass dieses Modell nicht der Wirklichkeit entspricht. Besonders deutlich wird das am Modell der idealen, reibungsfreien Strömung. Mit seiner Hilfe kann man die Grundlagen des Auftriebs verstehen, andererseits ist dieses Modell aber nicht in der Lage, den Luftwiderstand in einer Strömung zu erklären.

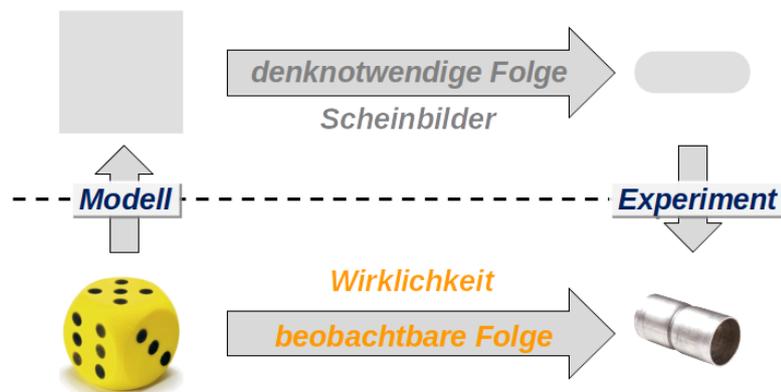


Abb. 46 Der Modellbegriff in der Physik nach H. Hertz

Die in der Physik (und anderen Wissenschaften) typische Methode „Wissen zu schaffen“, d.h. Erklärungen zu finden und technische Anwendungen zu ermöglichen, hat sehr schön

der Physiker Heinrich Hertz (1857 – 1894) in seinem Buch „Die Prinzipien der Mechanik (1894)“ mit folgenden Worten beschrieben:

„Wir machen uns innere Scheinbilder oder Symbole der äußeren Gegenstände, und zwar machen wir sie von solcher Art, dass die denknotwendigen Folgen der Bilder stets wieder Bilder seien von den abgebildeten Gegenständen.“¹(S.1).

10.1.1 Beispiel Gas

- In der Wirklichkeit existieren reale Gase und Gasgemische mit Atomen und Molekülen
- Das Modell ist das "Ideale Gas" mit kleinen Kugeln
- Die denknotwendige Folge ist die allg. Zustandsgleichung $p = nRT$
- Sie entspricht der beobachtbaren Folge, dass bei gleichen Volumina (d.h. gleicher Menge n) der Druck p in verschiedenen realen Gasen derselbe ist und in einem großen Bereich nur von der Temperatur T abhängt.

Dabei bilden unsere Modelle von einem wirklichen Gegenstand meist nur **einen** Aspekt dieses Gegenstandes ab, und zwar so, dass logische Folgen, die wir aus unserem Modell ziehen, als Konsequenz in der Wirklichkeit beobachtbar sind. Darüber hinaus muss es keine weitere Übereinstimmung zwischen Modell und wirklichem Gegenstand geben. Die in der Wirklichkeit beobachtbaren Konsequenzen müssen nicht unbedingt einer natürlichen Situation entspringen sondern können auch (und werden meist) erst durch entsprechende Experimente hervorgerufen.

Letztlich bleibt es ein Geheimnis, warum Modellvorstellungen - innere Bilder in Verbindung mit mathematischer Logik - mit dem Mechanismus der experimentellen Überprüfung so erfolgreich sind. Mit dieser Methode haben Wissenschaft und Technik den Menschen sogar bis zum Mond fliegen lassen.

10.1.2 Beispiel Strömung

In Bezug auf das Thema dieses Buches kann die Hertz'sche Beschreibung der Modellvorstellung in der Physik folgendermaßen angewendet werden:

- Die Wirklichkeit ist die Bewegung eines Flugzeugs durch Luft
- Das Modell ist die asymmetrische "Ideale Strömung" (reibungsfrei, wirbelfrei, etc...)
- Die denknotwendige Folge ist ein Druckunterschied senkrecht zur Strömung
- Sie entspricht der beobachtbaren Folge des Auftriebs

In diesem Prozess sind laut Hertz stets „*Verschiedene Bilder derselben Gegenstände ... möglich, und diese Bilder können sich nach verschiedenen Richtungen unterscheiden*“² (S.2) Bei der Auswahl eines geeigneten Modells kommen zwei Kriterien zum Einsatz. Ein Modell soll...

1 H.Hertz, Gesammelte Werke, Bd. III, Die Prinzipien der Mechanik, Leipzig 1894, archive.org [{]<https://archive.org/details/dieprinzipiende00hertgoog> , abgerufen am 2. Februar 2022

2 H.Hertz, Gesammelte Werke, Bd. III, Die Prinzipien der Mechanik, Leipzig 1894, archive.org [{]<https://archive.org/details/dieprinzipiende00hertgoog> , abgerufen am 2. Februar 2022

- ...mit möglichst wenigen Annahmen auskommen
- ...möglichst viele beobachtbare Folgen beschreiben

Weil diese beiden Kriterien nicht immer gleich gut erfüllt werden können, werden in der Physik oft verschiedene Modelle und Erklärungen für denselben Gegenstand parallel benutzt. Es kommt darauf an, was man erreichen möchte. Will man z.B. eine einfache anschauliche Erklärung für den Auftrieb finden, wählt man eher ein einfaches Modell mit wenigen Annahmen. In diesem Buch wurde z.B. dazu die ideale Strömung nach Bernoulli benutzt. Möchte man dagegen bei der Neukonstruktion eines Flugzeuges ein optimales Flügelprofil entwerfen, wählt man eher ein Modell, welches möglichst viele beobachtbare Folgen beschreibt und genaue Rechnungen ermöglicht. Dies ist im vorliegenden Fall das Modell des "induzierten Widerstandes".

11 Autoren

Edits	User
228	Dfedra ¹
26	Dirk Hünninger ²
1	HirnSpuk ³
2	Michael32710 ⁴

¹ <https://de.wikibooks.org/wiki/Benutzer:Dfedra>
² https://de.wikibooks.org/wiki/Benutzer:Dirk_H%25C3%25BCnniger
³ <https://de.wikibooks.org/wiki/Benutzer:HirnSpuk>
⁴ <https://de.wikibooks.org/wiki/Benutzer:Michael32710>

Abbildungsverzeichnis

- GFDL: Gnu Free Documentation License. <http://www.gnu.org/licenses/fdl.html>
- cc-by-sa-3.0: Creative Commons Attribution ShareAlike 3.0 License. <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>
- cc-by-sa-2.5: Creative Commons Attribution ShareAlike 2.5 License. <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/>
- cc-by-sa-2.0: Creative Commons Attribution ShareAlike 2.0 License. <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/>
- cc-by-sa-1.0: Creative Commons Attribution ShareAlike 1.0 License. <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/1.0/>
- cc-by-2.0: Creative Commons Attribution 2.0 License. <http://creativecommons.org/licenses/by/2.0/>
- cc-by-2.0: Creative Commons Attribution 2.0 License. <http://creativecommons.org/licenses/by/2.0/deed.en>
- cc-by-2.5: Creative Commons Attribution 2.5 License. <http://creativecommons.org/licenses/by/2.5/deed.en>
- cc-by-3.0: Creative Commons Attribution 3.0 License. <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/deed.en>
- GPL: GNU General Public License. <http://www.gnu.org/licenses/gpl-2.0.txt>
- LGPL: GNU Lesser General Public License. <http://www.gnu.org/licenses/lgpl.html>
- PD: This image is in the public domain.
- ATTR: The copyright holder of this file allows anyone to use it for any purpose, provided that the copyright holder is properly attributed. Redistribution, derivative work, commercial use, and all other use is permitted.
- EURO: This is the common (reverse) face of a euro coin. The copyright on the design of the common face of the euro coins belongs to the European Commission. Authorised is reproduction in a format without relief (drawings, paintings, films) provided they are not detrimental to the image of the euro.
- LFK: Lizenz Freie Kunst. <http://artlibre.org/licence/lal/de>
- CFR: Copyright free use.

- EPL: Eclipse Public License. <http://www.eclipse.org/org/documents/epl-v10.php>

Copies of the GPL, the LGPL as well as a GFDL are included in chapter Licenses⁵. Please note that images in the public domain do not require attribution. You may click on the image numbers in the following table to open the webpage of the images in your webbrowser.

⁵ Kapitel 12 auf Seite 97

1	Stefan Schmidt	CC-BY-SA-3.0
2	Dfedra ⁶ , Dfedra ⁷	
3	Dfedra ⁸ , Dfedra ⁹	
4	Elop ¹⁰ , Elop ¹¹	CC-BY-SA-3.0
5	Carhart, Henry; Chute, Horatio	
6	Verograph ¹² , Verograph ¹³	CC-BY-SA-3.0
7	Jkrieger ¹⁴ am Deutschen Krebsforschungszentrum ¹⁵ in der Arbeitsgruppe B040 Biophysik der Makromoleküle	CC-BY-SA-3.0
8	Aayushraj9546, Ecummenic, JarektBot, Jdx, Prarabdha Bhalerao, Tomisti, Túrelío, Un1c0s bot commonswiki	
9	BotMultichillT, Deadstar, Faebot, Fæ, SchlurcherBot, Xocolatl	
10	Lookang ¹⁶ Author of computer model: Francisco Esquembre, Fu-Kwun and lookang, Lookang ¹⁷ Author of computer model: Francisco Esquembre, Fu-Kwun and lookang	CC-BY-SA-3.0
11	A. Greg (Greg L ¹⁸ at English Wikipedia ¹⁹), A. Greg (Greg L ²⁰ in der Wikipedia auf Englisch ²¹)	
12	Dfedra ²² , Dfedra ²³	
13	Dfedra ²⁴ , Dfedra ²⁵	
14	Dfedra ²⁶ , Dfedra ²⁷	
15	Dfedra ²⁸ , Dfedra ²⁹	
16	Dfedra ³⁰ , Dfedra ³¹	
17	Daniel Bernoulli	
18	Dfedra ³² , Dfedra ³³	

6 <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
7 <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
8 <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
9 <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
10 <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Elop>
11 <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Elop>
12 <http://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=User:Verograph&action=edit&redlink=1>
13 <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=User:Verograph&action=edit&redlink=1>
14 <https://de.wikipedia.org/wiki/Benutzer:Jkrieger>
15 https://de.wikipedia.org/wiki/Deutsches_Krebsforschungszentrum
16 <http://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=User:Lookang&action=edit&redlink=1>
17 <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=User:Lookang&action=edit&redlink=1>
18 https://en.wikipedia.org/wiki/User:Greg_L
19 <https://en.wikipedia.org/wiki/>
20 https://en.wikipedia.org/wiki/User:Greg_L
21 <https://en.wikipedia.org/wiki/>
22 <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
23 <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
24 <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
25 <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
26 <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
27 <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
28 <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
29 <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
30 <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
31 <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
32 <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
33 <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>

19	Dfedra ³⁴ , Dfedra ³⁵	
20	Dfedra ³⁶ , Dfedra ³⁷	
21	AntiCompositeBot, AntiCompositeNumber, Dfedra, PeterWD, SchlurcherBot	
22	Otto Lilienthal, Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst, Berlin 1889	
23	AntiCompositeNumber, BotMultichillT, Dfedra, PeterWD, SchlurcherBot	
24	en:User:Meggar ³⁸	CC-BY-SA-3.0
25	Dfedra ³⁹ , Dfedra ⁴⁰	
26	Dfedra ⁴¹ , Dfedra ⁴²	CC-BY-SA-3.0
27	Ariadacapo, Arpingstone, AssetBurned commonswiki, Bapho commonswiki, Bilderbot, BotMultichill, Deep silence, El Grafo, JarektBot, JotaCartas, MB-one, Marsian commonswiki, My name, PeterWD, Ralf Roletschek, Raymond, SieBot, Xyt033	
28	Kraaiennest ⁴³ , Kraaiennest ⁴⁴	CC-BY-SA-3.0
29	AntiCompositeBot, AntiCompositeNumber, Dfedra	
30	CCecilia ⁴⁵ , CCecilia ⁴⁶	
31	Ludovic Péron ⁴⁷ , Ludovic Péron ⁴⁸	CC-BY-SA-3.0
32	(Claus Ableiter ⁴⁹), Panoramafreiheit und mündlich eingeholte Erlaubnis des Konstrukteurs, der den Drachen auch steigen lies., (Claus Ableiter ⁵⁰), Panoramafreiheit und mündlich eingeholte Erlaubnis des Konstrukteurs, der den Drachen auch steigen lies.	CC-BY-SA-3.0
33	くま兄やん ⁵¹ , くま兄やん ⁵²	CC-BY-SA-3.0
34	Ariadacapo, BArchBot, BotMultichill, Bundesarchiv-B6, JarektBot, Lotse, Lucarelli, MB-one, PeterWD, Sebastian Wallroth, YaCBot	
35	Autor unbekanntUnknown author, Unknown authorUnknown author	

34 <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>

35 <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>

36 <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>

37 <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>

38 <https://en.wikipedia.org/wiki/User:Meggar>

39 <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>

40 <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>

41 <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>

42 <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>

43 <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Kraaiennest>

44 <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Kraaiennest>

45 <http://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=User:CCecilia&action=edit&redlink=1>

46 <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=User:CCecilia&action=edit&redlink=1>

47 <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Ludo29>

48 <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Ludo29>

49 http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Claus_Ableiter

50 https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Claus_Ableiter

51 [http://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=User:%E3%81%8F%E3%81%BE%E5%85%84%E3%](http://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=User:%E3%81%8F%E3%81%BE%E5%85%84%E3%82%84%E3%82%93&action=edit&redlink=1)

52 [https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=User:%E3%81%8F%E3%81%BE%E5%85%84%E3%](https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=User:%E3%81%8F%E3%81%BE%E5%85%84%E3%82%84%E3%82%93&action=edit&redlink=1)

[82%84%E3%82%93&action=edit&redlink=1](https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=User:%E3%81%8F%E3%81%BE%E5%85%84%E3%82%84%E3%82%93&action=edit&redlink=1)

36	Dfedra ⁵³ , Dfedra ⁵⁴	
37	Dfedra ⁵⁵ unter Verwendung der freien Vorlage von user:ILA-boy ⁵⁶ , Dfedra ⁵⁷ unter Verwendung der freien Vorlage von user:ILA-boy ⁵⁸	
38	Dfedra ⁵⁹ unter Verwendung der freien Software https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/foil3.html ⁶⁰ , Dfedra ⁶¹ unter Verwendung der freien Software https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/foil3.html ⁶²	
39	Dfedra ⁶³ unter Verwendung der freien Software https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/foil3.html ⁶⁴ , Dfedra ⁶⁵ unter Verwendung der freien Software https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/foil3.html ⁶⁶	
40	Dfedra ⁶⁷ unter Verwendung der freien Software https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/foil3.html ⁶⁸ , Dfedra ⁶⁹ unter Verwendung der freien Software https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/foil3.html ⁷⁰	
41	Dfedra ⁷¹ unter Verwendung der freien Software https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/foil3.html ⁷² , Dfedra ⁷³ unter Verwendung der freien Software https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/foil3.html ⁷⁴	
42	BotMultichillT, Dfedra, SchlurcheBot	
43	Irish Defence Forces ⁷⁵ from Ireland	

- 53 <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
54 <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
55 <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
56 <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:ILA-boy>
57 <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
58 <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:ILA-boy>
59 <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
60 <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/foil3.html>
61 <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
62 <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/foil3.html>
63 <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
64 <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/foil3.html>
65 <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
66 <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/foil3.html>
67 <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
68 <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/foil3.html>
69 <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
70 <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/foil3.html>
71 <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
72 <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/foil3.html>
73 <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>
74 <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/foil3.html>
75 <https://www.flickr.com/people/42787928@N06>

44	NASA Langley Research Center (NASA-LaRC) ⁷⁶ , Edited by Fir0002 ⁷⁷ , NASA Langley Research Center (NASA-LaRC) ⁷⁸ , Edited by Fir0002 ⁷⁹	
45	Dfedra ⁸⁰ , Dfedra ⁸¹	
46	Dfedra ⁸² , Dfedra ⁸³	

76 <http://lisar.larc.nasa.gov/>

77 <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Fir0002>

78 <http://lisar.larc.nasa.gov/>

79 <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Fir0002>

80 <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>

81 <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>

82 <http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>

83 <https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Dfedra>

12 Licenses

12.1 GNU GENERAL PUBLIC LICENSE

Version 3, 29 June 2007

Copyright © 2007 Free Software Foundation, Inc. <<http://fsf.org/>>

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed. Preamble

The GNU General Public License is a free, copyleft license for software and other kinds of works.

The licenses for most software and other practical works are designed to take away your freedom to share and change the works. By contrast, the GNU General Public License is intended to guarantee your freedom to share and change all versions of a program—to make sure it remains free software for all its users. We, the Free Software Foundation, use the GNU General Public License for most of our software; it applies also to any other work released this way by its authors. You can apply it to your programs, too.

When we speak of free software, we are referring to freedom, not price. Our General Public Licenses are designed to make sure that you have the freedom to distribute copies of free software (and charge for them if you wish), that you receive source code or can get it if you want it, that you can change the software or use pieces of it in new free programs, and that you know you can do these things.

To protect your rights, we need to prevent others from denying you these rights or asking you to surrender the rights. Therefore, you have certain responsibilities if you distribute copies of the software, or if you modify it: responsibilities to respect the freedom of others.

For example, if you distribute copies of such a program, whether gratis or for a fee, you must pass on to the recipients the same freedoms that you received. You must make sure that they, too, receive or can get the source code. And you must show them these terms so they know their rights.

Developers that use the GNU GPL protect your rights with two steps: (1) assert copyright on the software, and (2) offer you this License giving you legal permission to copy, distribute and/or modify it.

For the developers' and authors' protection, the GPL clearly explains that there is no warranty for this free software. For both users' and authors' sake, the GPL requires that modified versions be marked as changed, so that their problems will not be attributed erroneously to authors of previous versions.

Some devices are designed to deny users access to install or run modified versions of the software inside them, although the manufacturer can do so. This is fundamentally incompatible with the aim of protecting users' freedom to change the software. The systematic pattern of such abuse occurs in the area of products for individuals to use, which is precisely where it is most unacceptable. Therefore, we have designed this version of the GPL to prohibit the practice for those products. If such problems arise substantially in other domains, we stand ready to extend this provision to those domains in future versions of the GPL, as needed to protect the freedom of users.

Finally, every program is threatened constantly by software patents. States should not allow patents to restrict development and use of software on general-purpose computers, but in those that do, we wish to avoid the special danger that patents applied to a free program could make it effectively proprietary. To prevent this, the GPL assures that patents cannot be used to render the program non-free.

The precise terms and conditions for copying, distribution and modification follow. TERMS AND CONDITIONS 0. Definitions.

"This License" refers to version 3 of the GNU General Public License.

"Copyright" also means copyright-like laws that apply to other kinds of works, such as semiconductor masks.

"The Program" refers to any copyrightable work licensed under this License. Each licensee is addressed as "you". "Licensees" and "recipients" may be individuals or organizations.

To "modify" a work means to copy from or adapt all or part of the work in a fashion requiring copyright permission, other than the making of an exact copy. The resulting work is called a "modified version" of the earlier work or a work "based on" the earlier work.

A "covered work" means either the unmodified Program or a work based on the Program.

To "propagate" a work means to do anything with it that, without permission, would make you directly or secondarily liable for infringement under applicable copyright law, except executing it on a computer or modifying a private copy. Propagation includes copying, distribution (with or without modification), making available to the public, and in some countries other activities as well.

To "convey" a work means any kind of propagation that enables other parties to make or receive copies. Mere interaction with a user through a computer network, with no transfer of a copy, is not conveying.

An interactive user interface displays "Appropriate Legal Notices" to the extent that it includes a convenient and prominently visible feature that (1) displays an appropriate copyright notice, and (2) tells the user that there is no warranty for the work (except to the extent that warranties are provided), that licensees may convey the work under this License, and how to view a copy of this License. If the interface presents a list of user commands or options, such as a menu, a prominent item in the list meets this criterion. 1. Source Code.

The "source code" for a work means the preferred form of the work for making modifications to it. "Object code" means any non-source form of a work.

A "Standard Interface" means an interface that either is an official standard defined by a recognized standards body, or, in the case of interfaces specified for a particular programming language, one that is widely used among developers working in that language.

The "System Libraries" of an executable work include anything, other than the work as a whole, that (a) is included in the normal form of packaging a Major Component, but which is not part of that Major Component, and (b) serves only to enable use of the work with that Major Component, or to implement a Standard Interface for which an implementation is available to the public in source code form. A "Major Component", in this context, means a major operating system (kernel, window system, and so on) of the specific operating system (if any) on which the executable work runs, or a compiler used to produce the work, or an object code interpreter used to run it.

The "Corresponding Source" for a work in object code form means all the source code needed to generate, install, and (for an executable work) run the object code and to modify the work, including scripts to control those activities. However, it does not include the work's System Libraries, or general-purpose tools or generally available free programs which are used unmodified in performing those activities but which are not part of the work. For example, Corresponding Source includes interface definition files associated with source files for the work, and the source code for shared libraries and dynamically linked subprograms that the work is specifically designed to require, such as by intimate data communication or control flow between those subprograms and other parts of the work.

The Corresponding Source need not include anything that users can regenerate automatically from other parts of the Corresponding Source.

The Corresponding Source for a work in source code form is that same work. 2. Basic Permissions.

All rights granted under this License are granted for the term of copyright on the Program, and are irrevocable and provided the stated conditions are met. This License explicitly affirms your unlimited permission to run the unmodified Program. The output from running a covered work is covered by this License only if the output, given its content, constitutes a covered work. This License acknowledges your rights of fair use or other equivalent, as provided by copyright law.

You may make, run and propagate covered works that you do not convey, without conditions so long as your license otherwise remains in force. You may convey covered works to others for the sole purpose of having them make modifications exclusively for you, or provide you with facilities for running those works, provided that you comply with the terms of this License in conveying all material for which you do not control copyright. Those thus making or running the covered works for you must do so exclusively on your behalf, under your direction and control, on terms that prohibit them from making any copies of your copyrighted material outside their relationship with you.

Conveying under any other circumstances is permitted solely under the conditions stated below. Sublicensing is not allowed; section 10 makes it unnecessary. 3. Protecting Users' Legal Rights From Anti-Circumvention Law.

No covered work shall be deemed part of an effective technological measure under any applicable law fulfilling obligations under article 11 of the WIPO copyright treaty adopted on 20 December 1996, or similar laws prohibiting or restricting circumvention of such measures.

When you convey a covered work, you waive any legal power to forbid circumvention of technological measures to the extent such circumvention is effected by exercising rights under this License with respect to the covered work, and you disclaim any intention to limit operation or modification of the work as a means of enforcing, against the work's users, your or third parties' legal rights to forbid circumvention of technological measures. 4. Conveying Verbatim Copies.

You may convey verbatim copies of the Program's source code as you receive it, in any medium, provided that you conspicuously and appropriately publish on each copy an appropriate copyright notice; keep intact all notices stating that this License and any non-permissive terms added in accord with section 7 apply to the code; keep intact all notices of the absence of any warranty; and give all recipients a copy of this License along with the Program.

You may charge any price or no price for each copy that you convey, and you may offer support or warranty protection for a fee. 5. Conveying Modified Source Versions.

You may convey a work based on the Program, or the modifications to produce it from the Program, in the form of source code under the terms of section 4, provided that you also meet all of these conditions:

* a) The work must carry prominent notices stating that you modified it, and giving a relevant date. * b) The work must carry prominent notices stating that it is released under this License and any conditions added under section 7. This requirement modifies the requirement in section 4 to "keep intact all notices." * c) You must license the entire work, as a whole, under this License to anyone who comes into possession of a copy. This License will therefore apply, along with any applicable section 7 additional terms, to the whole of the work, and all its parts, regardless of how they are packaged. This License gives no permission to license the work in any other way, but it does not invalidate such permission if you have separately received it. * d) If the work has interactive user interfaces, each must display Appropriate Legal Notices; however, if the Program has interactive interfaces that do not display Appropriate Legal Notices, your work need not make them do so.

A compilation of a covered work with other separate and independent works, which are not by their nature extensions of the covered work, and which are not combined with it such as to form a larger program, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the compilation and its resulting copyright are not used to limit the access or legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. Inclusion of a covered work in an aggregate does not cause this License to apply to the other parts of the aggregate. 6. Conveying Non-Source Forms.

You may convey a covered work in object code form under the terms of sections 4 and 5, provided that you also convey the machine-readable Corresponding Source under the terms of this License, in one of these ways:

* a) Convey the object code in, or embodied in, a physical product (including a physical distribution medium), accompanied by the Corresponding Source fixed on a durable physical medium customarily used for software interchange. * b) Convey the object code in, or embodied in, a physical product (including a physical distribution medium), accompanied by a written offer, valid for at least three years and valid for as long as you offer spare parts or customer support for that product model, to give anyone who possesses the object code either (1) a copy of the Corresponding Source for all the software in the product that is covered by this License, on a durable physical medium customarily used for software interchange, for a price no more than your reasonable cost of physically performing this conveying of source, or (2) access to copy the Corresponding Source from a network server at no charge. * c) Convey individual copies of the object code with a copy of the written offer to provide the Corresponding Source. This alternative is allowed only occasionally and noncommercially, and only if you received the object code with such an offer, in accord with subsection 6b. * d) Convey the object code by offering access from a designated place (gratis or for a charge), and offer equivalent access to the Corresponding Source in the same way through the same place at no further charge. You need not require recipients to copy the Corresponding Source along with the object code. If the place to copy the object code is a network server, the Corresponding Source may be on a

different server (operated by you or a third party) that supports equivalent copying facilities, provided you maintain clear directions next to the object code saying where to find the Corresponding Source. Regardless of what server hosts the Corresponding Source, you remain obligated to ensure that it is available for as long as needed to satisfy these requirements. * e) Convey the object code using peer-to-peer transmission, provided you inform other peers where the object code and Corresponding Source of the work are being offered to the general public at no charge under subsection 6d.

A separable portion of the object code, whose source code was excluded from the Corresponding Source as a System Library, need not be included in conveying the object code work.

A "User Product" is either (1) a "consumer product", which means any tangible personal property which is normally used for personal, family, or household purposes, or (2) anything designed or sold for incorporation into a dwelling. In determining whether a product is a consumer product, doubtful cases shall be resolved in favor of coverage. For a particular product received by a particular user, "normally used" refers to a typical or common use of that class of product, regardless of the status of the particular user or of the way in which the particular user actually uses, or expects or is expected to use, the product. A product is a consumer product regardless of whether the product has substantial commercial, industrial or non-consumer uses, unless such uses represent the only significant mode of use of the product.

"Installation Information" for a User Product means any methods, procedures, authorization keys, or other information required to install and execute modified versions of a covered work in that User Product from a modified version of its Corresponding Source. The information must suffice to ensure that the continued functioning of the modified object code is in no case prevented or interfered with solely because modification has been made.

If you convey an object code work under this section in, or with, or specifically for use in, a User Product, and the conveying occurs as part of a transaction in which the right of possession and use of the User Product is transferred to the recipient in perpetuity or for a fixed term (regardless of how the transaction is characterized), the Corresponding Source conveyed under this section must be accompanied by the Installation Information. But this requirement does not apply if neither you nor any third party retains the ability to install modified object code on the User Product (for example, the work has been installed in ROM).

The requirement to provide Installation Information does not include a requirement to continue to provide support service, warranty, or updates for a work that has been modified or installed by the recipient, or for the User Product in which it has been modified or installed. Access to a network may be denied when the modification itself materially and adversely affects the operation of the network or violates the rules and protocols for communication across the network.

Corresponding Source conveyed, and Installation Information provided, in accord with this section must be in a format that is publicly documented (and with an implementation available to the public in source code form), and must require no special password or key for unpacking, reading or copying. 7. Additional Terms.

"Additional permissions" are terms that supplement the terms of this License by making exceptions from one or more of its conditions. Additional permissions that are applicable to the entire Program shall be treated as though they were included in this License, to the extent that they are valid under applicable law. If additional permissions apply only to part of the Program, that part may be used separately under those permissions, but the entire Program remains governed by this License without regard to the additional permissions.

When you convey a copy of a covered work, you may at your option remove any additional permissions from that copy, or from any part of it. (Additional permissions may be written to require their own removal in certain cases when you modify the work.) You may place additional permissions on material, added by you to a covered work, for which you have or can give appropriate copyright permission.

Notwithstanding any other provision of this License, for material you add to a covered work, you may (if authorized by the copyright holders of that material) supplement the terms of this License with terms:

* a) Disclaiming warranty or limiting liability differently from the terms of sections 15 and 16 of this License; or * b) Requiring preservation of specified reasonable legal notices or author attributions in that material or in the Appropriate Legal Notices displayed by works containing it; or * c) Prohibiting misrepresentation of the origin of that material, or requiring that modified versions of such material be marked in reasonable ways as different from the original version; or * d) Limiting the use for publicity purposes of names of licensors or authors of the material; or * e) Declining to grant rights under trademark law for use of some trade names, trademarks, or service marks; or * f) Requiring indemnification of licensors and authors of that material by anyone who conveys the material (or modified versions of it) with contractual assumptions of liability to the recipient, for any liability that these contractual assumptions directly impose on those licensors and authors.

All other non-permissive additional terms are considered "further restrictions" within the meaning of section 10. If the Program as you received it, or any part of it, contains a notice stating that it is governed by this License along with a term that is a further restriction, you may remove that term. If a license document contains a further restriction but permits relicensing or conveying under this License, you may add to a covered work material governed by the terms of that license document, provided that the further restriction does not survive such relicensing or conveying.

If you add terms to a covered work in accord with this section, you must place, in the relevant source files, a statement of the additional terms that apply to those files, or a notice indicating where to find the applicable terms.

Additional terms, permissive or non-permissive, may be stated in the form of a separately written license, or stated as exceptions; the above requirements apply either way. 8. Termination.

You may not propagate or modify a covered work except as expressly provided under this License. Any attempt otherwise to propagate or modify it is void, and will automatically terminate your rights under this License (including any patent licenses granted under the third paragraph of section 11).

However, if you cease all violation of this License, then your license from a particular copyright holder is reinstated (a) provisionally, unless and until the copyright holder explicitly and finally terminates

your license, and (b) permanently, if the copyright holder fails to notify you of the violation by some reasonable means prior to 60 days after the cessation.

Moreover, your license from a particular copyright holder is reinstated permanently if the copyright holder notifies you of the violation by some reasonable means, this is the first time you have received notice of violation of this License (for any work) from that copyright holder, and you cure the violation prior to 30 days after your receipt of the notice.

Termination of your rights under this section does not terminate the licenses of parties who have received copies or rights from you under this License. If your rights have been terminated and not permanently reinstated, you do not qualify to receive new licenses for the same material under section 10. 9. Acceptance Not Required for Having Copies.

You are not required to accept this License in order to receive or run a copy of the Program. Ancillary propagation of a covered work occurring solely as a consequence of using peer-to-peer transmission to receive a copy likewise does not require acceptance. However, nothing other than this License grants you permission to propagate or modify any covered work. These actions infringe copyright if you do not accept this License. Therefore, by modifying or propagating a covered work, you indicate your acceptance of this License to do so. 10. Automatic Licensing of Downstream Recipients.

Each time you convey a covered work, the recipient automatically receives a license from the original licensors, to run, modify and propagate that work, subject to this License. You are not responsible for enforcing compliance by third parties with this License.

An "entity transaction" is a transaction transferring control of an organization, or substantially all assets of one, or subdividing an organization, or merging organizations. If propagation of a covered work results from an entity transaction, each party to that transaction who receives a copy of the work also receives whatever licenses to the work the party's predecessor in interest had or could give under the previous paragraph, plus a right to possession of the Corresponding Source of the work from the predecessor in interest, if the predecessor has it or can get it with reasonable efforts.

You may not impose any further restrictions on the exercise of the rights granted or affirmed under this License. For example, you may not impose a license fee, royalty, or other charge for exercise of rights granted under this License, and you may not initiate litigation (including a cross-claim or counterclaim in a lawsuit) alleging that any patent claim is infringed by making, using, selling, offering for sale, or importing the Program or any portion of it. 11. Patents.

A "contributor" is a copyright holder who authorizes use under this License of the Program or a work on which the Program is based. The work thus licensed is called the contributor's "contributor version".

A contributor's "essential patent claims" are all patent claims owned or controlled by the contributor, whether already acquired or hereafter acquired, that would be infringed by some manner, permitted by this License, of making, using, or selling its contributor version, but do not include claims that would be infringed only as a consequence of further modification of the contributor version. For purposes of this definition, "control" includes the right to grant patent sublicenses in a manner consistent with the requirements of this License.

Each contributor grants you a non-exclusive, worldwide, royalty-free patent license under the contributor's essential patent claims, to make, use, sell, offer for sale, import and otherwise run, modify and propagate the contents of its contributor version.

In the following three paragraphs, a "patent license" is any express agreement or commitment, however denominated, not to enforce a patent (such as an express permission to practice a patent or covenant not to sue for patent infringement). To "grant" such a patent license to a party means to make such an agreement or commitment not to enforce a patent against the party.

If you convey a covered work, knowingly relying on a patent license, and the Corresponding Source of the work is not available for anyone to copy, free of charge and under the terms of this License, through a publicly available network server or other readily accessible means, then you must either (1) cause the Corresponding Source to be so available, or (2) arrange to deprive yourself of the benefit of the patent license for this particular work, or (3) arrange, in a manner consistent with the requirements of this License, to extend the patent license to downstream recipients. "Knowingly relying" means you have actual knowledge that, but for the patent license, your conveying the covered work in a country, or your recipient's use of the covered work in a country, would infringe one or more identifiable patents in that country that you have reason to believe are valid.

If, pursuant to or in connection with a single transaction or arrangement, you convey, or propagate by procuring conveyance of, a covered work, and grant a patent license to some of the parties receiving the covered work authorizing them to use, propagate, modify or convey a specific copy of the covered work, then the patent license you grant is automatically extended to all recipients of the covered work and works based on it.

A patent license is "discriminatory" if it does not include within the scope of its coverage, prohibits the exercise of, or is conditioned on the non-exercise of one or more of the rights that are specifically granted under this License. You may not convey a covered work if you are a party to an arrangement with a third party that is in the business of distributing software, under which you make payment to the third party based on the extent of your activity of conveying the work, and under which the third party grants, to any of the parties who would receive the covered work from you, a discriminatory patent license (a) in connection with copies of the covered work conveyed by you (or copies made from those copies), or (b) primarily for and in connection with specific products or compilations that contain the covered work, unless you entered into that arrangement, or that patent license was granted, prior to 28 March 2007.

Nothing in this License shall be construed as excluding or limiting any implied license or other defenses to infringement that may otherwise be available to you under applicable patent law. 12. No Surrender of Others' Freedom.

If conditions are imposed on you (whether by court order, agreement or otherwise) that contradict the conditions of this License, they do not excuse you from the conditions of this License. If you cannot convey a covered work so as to satisfy simultaneously your obligations under this License and any other pertinent obligations, then as a consequence you may not convey it at all. For example, if you agree to terms that obligate you to collect a royalty for further conveying from those to whom you convey the Program, the only way you could satisfy both those terms and this License would be to refrain entirely from

conveying the Program. 13. Use with the GNU Affero General Public License.

Notwithstanding any other provision of this License, you have permission to link or combine any covered work with a work licensed under version 3 of the GNU Affero General Public License into a single combined work, and to convey the resulting work. The terms of this License will continue to apply to the part which is the covered work, but the special requirements of the GNU Affero General Public License, section 13, concerning interaction through a network will apply to the combination as such. 14. Revised Versions of this License.

The Free Software Foundation may publish revised and/or new versions of the GNU General Public License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns.

Each version is given a distinguishing version number. If the Program specifies that a certain numbered version of the GNU General Public License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that numbered version or of any later version published by the Free Software Foundation. If the Program does not specify a version number of the GNU General Public License, you may choose any version ever published by the Free Software Foundation.

If the Program specifies that a proxy can decide which future versions of the GNU General Public License can be used, that proxy's public statement of acceptance of a version permanently authorizes you to choose that version for the Program.

12.2 GNU Free Documentation License

Version 1.3, 3 November 2008

Copyright © 2000, 2001, 2002, 2007, 2008 Free Software Foundation, Inc. <<http://fsf.org/>>

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed. 0. PREAMBLE

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondly, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this license is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference. 1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "Document", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "you". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A "Modified Version" of the Document means any work containing the Document in a part or whole, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A Secondary Section is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The Invariant Sections are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The "Cover Texts" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A "Transparent" copy of the Document means a machine-readable copy, presented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparent" is called "Opaque".

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The "Title Page" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

The "publisher" means any person or entity that distributes copies of the Document to the public.

A section Entitled XYZ means a named submit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses

Later license versions may give you additional or different permissions. However, no additional obligations are imposed on any author or copyright holder as a result of your choosing to follow a later version. 15. Disclaimer of Warranty.

THERE IS NO WARRANTY FOR THE PROGRAM, TO THE EXTENT PERMITTED BY APPLICABLE LAW. EXCEPT WHEN OTHERWISE STATED IN WRITING THE COPYRIGHT HOLDERS AND/OR OTHER PARTIES PROVIDE THE PROGRAM "AS IS" WITHOUT WARRANTY OF ANY KIND, EITHER EXPRESSED OR IMPLIED, INCLUDING, BUT NOT LIMITED TO, THE IMPLIED WARRANTIES OF MERCHANTABILITY AND FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. THE ENTIRE RISK AS TO THE QUALITY AND PERFORMANCE OF THE PROGRAM IS WITH YOU. SHOULD THE PROGRAM PROVE DEFECTIVE, YOU ASSUME THE COST OF ANY NECESSARY SERVICING, REPAIR OR CORRECTION. 16. Limitation of Liability.

IN NO EVENT UNLESS REQUIRED BY APPLICABLE LAW OR AGREED TO IN WRITING WILL ANY COPYRIGHT HOLDER, OR ANY OTHER PARTY WHO MODIFIES AND/OR CONVEYS THE PROGRAM AS PERMITTED ABOVE, BE LIABLE TO YOU FOR DAMAGES, INCLUDING ANY GENERAL, SPECIAL, INCIDENTAL OR CONSEQUENTIAL DAMAGES ARISING OUT OF THE USE OR INABILITY TO USE THE PROGRAM (INCLUDING BUT NOT LIMITED TO LOSS OF DATA OR DATA BEING RENDERED INACCURATE OR LOSSES SUSTAINED BY YOU OR THIRD PARTIES OR A FAILURE OF THE PROGRAM TO OPERATE WITH ANY OTHER PROGRAMS), EVEN IF SUCH HOLDER OR OTHER PARTY HAS BEEN ADVISED OF THE POSSIBILITY OF SUCH DAMAGES. 17. Interpretation of Sections 15 and 16.

following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as Acknowledgements", "Dedications", "Endorsements", or "History";) To "Preserve the Title" of such a section when you modify the Document means that it remains a section Entitled XYZ according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties; any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License. 2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies. 3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first one listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general networking public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document. 4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

* A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission. * B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement. * C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher. * D. Preserve all the copyright notices of the Document. * E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices. * F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below. * G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice. * H. Include an unaltered copy of this License. * I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence. * J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions if they are known. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission. * K. For any section Entitled "Acknowledgements" ("Dedications"), Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein. * L. Preserve all

if the disclaimer of warranty and limitation of liability provided above cannot be given local legal effect according to their terms, reviewing courts shall apply local law that most closely approximates an absolute waiver of all civil liability in connection with the Program, unless a warranty or assumption of liability accompanies a copy of the Program in return for a fee.

END OF TERMS AND CONDITIONS How to Apply These Terms to Your New Programs

If you develop a new program, and you want it to be of the greatest possible use to the public, the best way to achieve this is to make it free software which everyone can redistribute and change under these terms.

To do so, attach the following notices to the program. It is safest to attach them to the start of each source file to most effectively state the exclusion of warranty; and each file should have at least the "copyright" line and a pointer to where the full notice is found.

<one line to give the program's name and a brief idea of what it does.> Copyright (C) <year> <name of author>

This program is free software; you can redistribute it and/or modify it under the terms of the GNU General Public License as published by the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or (at your option) any later version.

This program is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License for more details.

the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles. * M. Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version. * N. Do not retile an existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section. * O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version. 5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements". 6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document. 7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a separate or distribution medium, is called an aggregate if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate. 8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title

You should have received a copy of the GNU General Public License along with this program. If not, see <<http://www.gnu.org/licenses/>>.

Also add information on how to contact you by electronic and paper mail.

If the program does terminal interaction, make it output a short notice like this when it starts in an interactive mode:

```
<program> Copyright (C) <year> <name of author> This program comes with ABSOLUTELY NO WARRANTY; for details type 'show w'. This is free software, and you are welcome to redistribute it under certain conditions; type 'show c' for details.
```

The hypothetical commands 'show w' and 'show c' should show the appropriate parts of the General Public License. Of course, your program's commands might be different; for a GUI interface, you would use an "about box".

You should also get your employer (if you work as a programmer) or school, if any, to sign a "copyright disclaimer" for the program, if necessary. For more information on this, and how to apply and follow the GNU GPL, see <<http://www.gnu.org/licenses/>>.

The GNU General Public License does not permit incorporating your program into proprietary programs. If your program is a subroutine library, you may consider it more useful to permit linking proprietary applications with the library. If this is what you want to do, use the GNU Lesser General Public License instead of this License. But first, please read <<http://www.gnu.org/philosophy/why-not-lgpl.html>>.

(section 1) will typically require changing the actual title. 9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided under this License. Any attempt otherwise to copy, modify, sublicense, or distribute it is void, and will automatically terminate your rights under this License.

However, if you cease all violation of this License, then your license from a particular copyright holder is reinstated (a) provisionally, unless and until the copyright holder explicitly and finally terminates your license, and (b) permanently, if the copyright holder fails to notify you of the violation by some reasonable means prior to 60 days after the cessation.

Moreover, your license from a particular copyright holder is reinstated permanently if the copyright holder notifies you of the violation by some reasonable means, this is the first time you have received notice of violation of this License (for any work) from that copyright holder, and you cure the violation prior to 30 days after your receipt of the notice.

Termination of your rights under this section does not terminate the licenses of parties who have received copies or rights from you under this License. If your rights have been terminated and not permanently reinstated, receipt of a copy of some or all of the same material does not give you any rights to use it. 10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See <http://www.gnu.org/copyleft/>.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License or any later version applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document specifies that a proxy can decide which future versions of this License can be used, that proxy's public statement of acceptance of a version permanently authorizes you to choose that version for the Document. 11. RELICENSING

"Massive Multiauthor Collaboration Site"(or "MMC Site") means any World Wide Web server that publishes copyrightable works and also provides prominent facilities for anybody to edit those works. A public wiki that anybody can edit is an example of such a server. A "Massive Multiauthor Collaboration"(or "MMC") contained in the site means any set of copyrightable works thus published on the MMC site.

"CC-BY-SA" means the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 license published by Creative Commons Corporation, a not-for-profit corporation with a principal place of business in San Francisco, California, as well as future copyleft versions of that license published by that same organization.

Incorporate" means to publish or republish a Document, in whole or in part, as part of another Document.

An MMC is eligible for relicensing if it is licensed under this License, and if all works that were first published under this License somewhere other than this MMC, and subsequently incorporated in whole or in part into the MMC, (1) had no cover texts or invariant sections, and (2) were thus incorporated prior to November 1, 2008.

The operator of an MMC Site may republish an MMC contained in the site under CC-BY-SA on the same site at any time before August 1, 2009, provided the MMC is eligible for relicensing. ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

```
Copyright (C) YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".
```

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with ... Texts." line with this:

with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.

12.3 GNU Lesser General Public License

GNU LESSER GENERAL PUBLIC LICENSE

Version 3, 29 June 2007

Copyright © 2007 Free Software Foundation, Inc. <<http://fsf.org/>>

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

This version of the GNU Lesser General Public License incorporates the terms and conditions of version 3 of the GNU General Public License, supplemented by the additional permissions listed below.

0. Additional Definitions.

As used herein, “this License” refers to version 3 of the GNU Lesser General Public License, and the “GNU GPL” refers to version 3 of the GNU General Public License.

“The Library” refers to a covered work governed by this License, other than an Application or a Combined Work as defined below.

An “Application” is any work that makes use of an interface provided by the Library, but which is not otherwise based on the Library. Defining a subclass of a class defined by the Library is deemed a mode of using an interface provided by the Library.

A “Combined Work” is a work produced by combining or linking an Application with the Library. The particular version of the Library with which the Combined Work was made is also called the “Linked Version”.

The “Minimal Corresponding Source” for a Combined Work means the Corresponding Source for the Combined Work, excluding any source code for portions of the Combined Work that, considered in isolation, are based on the Application, and not on the Linked Version.

The “Corresponding Application Code” for a Combined Work means the object code and/or source code for the Application, including any data and utility programs needed for reproducing the Combined Work from the Application, but excluding the System Libraries of the Combined Work. 1. Exception to Section 3 of the GNU GPL.

You may convey a covered work under sections 3 and 4 of this License without being bound by section 3 of the GNU GPL. 2. Conveying Modified Versions.

If you modify a copy of the Library, and, in your modifications, a facility refers to a function or data to be supplied by an Application that uses the facility (other than as an argument passed when the facility is invoked), then you may convey a copy of the modified version:

* a) under this License, provided that you make a good faith effort to ensure that, in the event an Application does not supply the function or data, the facility still operates, and performs whatever part of its purpose remains meaningful, or * b) under the GNU GPL, with none of the additional permissions of this License applicable to that copy.

3. Object Code Incorporating Material from Library Header Files.

The object code form of an Application may incorporate material from a header file that is part of the Library. You may convey such object code under terms of your choice, provided that, if the incorporated material is not limited to numerical parameters, data structure layouts and accessors, or small macros, inline functions and templates (ten or fewer lines in length), you do both of the following:

* a) Give prominent notice with each copy of the object code that the Library is used in it and that the Library and its use are covered by this License. * b) Accompany the object code with a copy of the GNU GPL and this license document.

4. Combined Works.

You may convey a Combined Work under terms of your choice that, taken together, effectively do not restrict modification of the portions of the Library contained in the Combined Work and reverse engineering for debugging such modifications, if you also do each of the following:

* a) Give prominent notice with each copy of the Combined Work that the Library is used in it and that the Library and its use are covered by this License. * b) Accompany the Combined Work with a copy of the GNU GPL and this license document. * c) For a Combined Work that displays copyright notices during execution, include the copyright notice for the Library among these notices, as well as a reference directing the user to the copies of the GNU GPL and this license document. * d) Do one of the following: o 0) Convey the Minimal Corresponding Source under the terms of this License, and the Corresponding Application Code in a form suitable for, and under terms that permit, the user to recombine or relink the Application with a modified version of the Linked Version to produce a modified Combined Work, in the manner specified by section 6 of the GNU GPL for conveying Corresponding Source. o 1) Use a suitable shared library mechanism for linking with the Library. A suitable mechanism is one that (a) uses at run time a copy of the Library already present on the user's computer system, and (b) will operate properly with a modified version of the Library that is interface-compatible with the Linked Version. * e) Provide Installation Information, but only if you would otherwise be required to provide such information under section 6 of the GNU GPL, and only to the extent that such information is necessary to install and execute a modified version of the Combined Work produced by recombining or relinking the Application with a modified version of the Linked Version. (If you use option 4d0, the Installation Information must accompany the Minimal Corresponding Source and Corresponding Application Code. If you use option 4d1, you must provide the Installation Information in the manner specified by section 6 of the GNU GPL for conveying Corresponding Source.)

5. Combined Libraries.

You may place library facilities that are a work based on the Library side by side in a single library together with other library facilities that are not Applications and are not covered by this License, and convey such a combined library under terms of your choice, if you do both of the following:

* a) Accompany the combined library with a copy of the same work based on the Library, uncombined with any other library facilities, conveyed under the terms of this License. * b) Give prominent notice with the combined library that part of it is a work based on the Library, and explaining where to find the accompanying uncombined form of the same work.

6. Revised Versions of the GNU Lesser General Public License.

The Free Software Foundation may publish revised and/or new versions of the GNU Lesser General Public License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns.

Each version is given a distinguishing version number. If the Library as you received it specifies that a certain numbered version of the GNU Lesser General Public License “or any later version” applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that published version or of any later version published by the Free Software Foundation. If the Library as you received it does not specify a version number of the GNU Lesser General Public License, you may choose any version of the GNU Lesser General Public License ever published by the Free Software Foundation.

If the Library as you received it specifies that a proxy can decide whether future versions of the GNU Lesser General Public License shall apply, that proxy's public statement of acceptance of any version is permanent authorization for you to choose that version for the Library.