



# MECCANICA ANALITICA



**WIKIBOOKS**  
*Libri liberi per un mondo aperto*



# Meccanica analitica

it.wikibooks.org

2024

*Questo testo proviene dal sito*

[https://it.wikibooks.org/wiki/Meccanica\\_analitica](https://it.wikibooks.org/wiki/Meccanica_analitica)

*La versione originale del testo si trovava su WikiToLearn. Una copia è disponibile su*

[https://web.archive.org/web/20200919211340/https://it.wikitolearn.org/Corso:Meccanica\\_Analitica](https://web.archive.org/web/20200919211340/https://it.wikitolearn.org/Corso:Meccanica_Analitica)

*Autori principali:*

Dan e altri utenti di WikiToLearn

*Questo libro è aggiornato al*

25 agosto 2024

*In copertina:*

Volpe rossa nel Parco Nazionale del Gran Paradiso. *Autore:* Paolo800; *licenza:* CC BY-SA 4.0; *fonte:*

[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Volpe\\_in\\_inverno.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Volpe_in_inverno.jpg)

**Wikibooks non dà garanzie sulla validità dei suoi contenuti.** Per i dettagli vedi:

[https://it.wikibooks.org/wiki/Wikibooks:General\\_disclaimer](https://it.wikibooks.org/wiki/Wikibooks:General_disclaimer)

Quest'opera è distribuita con licenza **Creative Commons Attribuzione - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale**. Per leggere una copia della licenza visita il sito: <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.it>



---

## Indice

<b>1</b>	<b>Meccanica lagrangiana</b>	<b>1</b>
1.1	Introduzione alla meccanica lagrangiana . . . . .	1
1.2	Vincoli, virtualismi, variabili lagrangiane . . . . .	2
1.3	Equazione simbolica di d'Alembert . . . . .	4
1.4	La lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange . . . . .	5
1.5	Quantità conservate . . . . .	8
1.6	Punti di equilibrio . . . . .	9
1.7	Piccole oscillazioni attorno a punti di equilibrio stabili . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Meccanica hamiltoniana</b>	<b>15</b>
2.1	Hamiltoniana, equazioni canoniche di Hamilton . . . . .	15
2.2	Spazi delle fasi . . . . .	16
2.3	Prede e predatori: le equazioni di Lotka e Volterra . . . . .	17
2.4	Parentesi di Poisson . . . . .	20
2.5	Quantità conservate e quantità compatibili attraverso le parentesi di Poisson . . . . .	21
2.6	Il problema della brachistocrona, elementi di analisi funzionale . . . . .	23
2.7	Il principio variazionale di Hamilton, condizioni alla Dirichlet . . . . .	25
2.8	Il principio variazionale di Hamilton ampliato . . . . .	28
2.9	Funzione principale di Hamilton . . . . .	30
2.10	Trasformazioni canoniche . . . . .	32
2.11	Parentesi di Poisson e trasformazioni canoniche . . . . .	37
2.12	Metodo di Hamilton-Jacobi . . . . .	40
2.13	Il confine tra meccanica hamiltoniana e meccanica statistica . . . . .	43
2.14	La corda vibrante . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Relatività speciale</b>	<b>55</b>
3.1	La fisica dopo Maxwell . . . . .	55
3.2	Esperienza di Michelson-Morley e l'ipotesi di Einstein . . . . .	57
3.3	Trasformazioni di Lorentz e composizione delle velocità . . . . .	59
3.4	Conseguenze dell'ipotesi di Einstein . . . . .	61
3.5	Spazio di Minkowsky . . . . .	62
3.6	Cinematica relativistica . . . . .	65
3.7	Dinamica relativistica . . . . .	67
3.8	Lagrangiana in relatività e l'effetto Compton . . . . .	70

<b>Crediti</b>	<b>73</b>
Fonti dei testi . . . . .	73
Fonti delle immagini . . . . .	73

# Meccanica lagrangiana

## 1.1 Introduzione alla meccanica lagrangiana

La meccanica newtoniana è un ottimo studio dei sistemi meccanici e, tramite una strutturazione lineare e concisa, descrive appieno la realtà che ci circonda. Tuttavia, per sistemi particolari, utilizzare la meccanica newtoniana può rilevarsi una tortura. Sono i casi in cui sono presenti sistemi vincolati: il sistema si evolve nel tempo, variando le sue caratteristiche spaziali, ma queste sono vincolate a soddisfare equazioni particolari. Per questo motivo, a volte, utilizzare la meccanica newtoniana comporta uno studio lungo e faticoso, e non sempre diventa possibile scrivere le equazioni del moto.

L'obiettivo del formalismo lagrangiano è, invece, riuscire a studiare un sistema che si evolve nel tempo trascurando i vincoli; questo è possibile attraverso variabili che includano i vincoli nella loro stessa definizione, chiamate **variabili lagrangiane**. Queste variabili non sono sempre variabili spaziali: possono anche avere dimensioni totalmente diverse. Facciamo un esempio per capire meglio.

Consideriamo un punto materiale che è vincolato a muoversi lungo una guida circolare che soddisfa l'equazione  $x^2 + y^2 = 1$ . Si chiede di determinare la posizione del punto materiale in ogni tempo, ovvero si richiede di scrivere le equazioni del moto.

Già da primo impatto, non sembra una cosa davvero facile, se si considerano come variabili  $x(t)$  e  $y(t)$ . Per poter scrivere le equazioni del moto, dobbiamo scrivere la relazione  $F^{tot} = ma$ . Il problema sorge quando dobbiamo includere il vincolo: la reazione vincolare della guida, infatti, non è un valore fisso, ma varia a seconda della velocità del punto materiale. Quindi diventa particolarmente complicato riuscire a ricavare le equazioni del moto.

Se invece consideriamo come variabile del moto  $\theta(t)$  (ovvero l'angolo di rotazione) non serve calcolare forze vincolari: a ogni tempo sappiamo dove si trova il nostro punto materiale. In questo caso,  $\theta$  è una variabile lagrangiana. Inoltre,  $\theta$  non ha dimensioni spaziali ma, essendo un angolo, è un numero adimensionale. Questo dimostra come, cambiando variabile di studio, che non abbia per forza le stesse dimensioni delle precedenti, si riesca a studiare il sistema al meglio e in maniera semplice. Inoltre, si presti attenzione al fatto che, se prima si avevano due variabili corrispondenti a due gradi di libertà, ora ne abbiamo solo una. Nel prossimo modulo approfondiremo la questione delle variabili lagrangiane.

Lo scopo della meccanica lagrangiana è proprio semplificare lo studio di sistemi meccanici vincolati che evolvono nel tempo.

## 1.2 Vincoli, virtualismi, variabili lagrangiane

### 1.2.1 Vincoli olonomi

Come abbiamo già detto nell'introduzione, la meccanica lagrangiana ha come scopo aggirare i vincoli nello studio del sistema; andiamo adesso a elencare due tipi di vincoli.

I **vincoli olonomi bilaterali** sono le funzioni che descrivono insiemi di bordo; la loro espressione generale è:

$$f(x, y, z) = 0$$

Un esempio è la guida circolare, la cui espressione è  $x^2 + y^2 - R^2 = 0$

I **vincoli olonomi unilaterali**, invece, sono relazioni che riguardano una sola variabile (unilaterale non a caso); la loro espressione generale è:

$$f(x_1, \dots, x_n) > 0$$

Un esempio è una pallina che sbatte a un muro: può muoversi dove vuole da una parte, ma non può superare il muro; l'espressione di un vincolo simile può essere  $x > 0$  dove il muro è considerato come l'asse delle ordinate.

Per vincoli particolari, ad esempio delle guide dalla forma strana attraverso cui passa un anello, possono essere descritte da entrambi i modi, o da composizione di vincoli unilaterali e bilaterali.

### 1.2.2 Variabili lagrangiane e virtualismi

Le variabili lagrangiane sono delle variabili che servono a descrivere al meglio l'evoluzione temporale di un sistema fisico. La loro caratteristica principale è quella di essere non vincolate e di inglobare i vincoli nelle loro stesse definizioni. Esse sono tante quanti sono i gradi di libertà del sistema; a seconda dei vincoli, poi, possono essere anche di meno. La fondamentale importanza dell'utilizzo delle variabili lagrangiane è dovuto al fatto che queste sono indipendenti tra loro.

In meccanica newtoniana si usavano coordinate spaziali, indicate come una certa distanza dall'origine del sistema di riferimento considerato, indicabili con  $OP_i$ . Queste variabili possono essere trasformate nelle variabili lagrangiane attraverso opportune trasformazioni, e diventeranno funzione di quelle, ovvero si potrà scrivere  $OP(q_1, \dots, q_n)$ . Le variabili lagrangiane le indicheremo da ora in poi con il simboli  $q_i$ , dove l'indice indica semplicemente l'ordine di numerazione delle variabili.

Posta la trasformazione dalle variabili newtoniane alle lagrangiane, è possibile anche calcolare lo spostamento infinitesimo  $dOP$  compiuto da un sistema vincolato in cui sia il sistema che i vincoli evolvono nel tempo:

$$dOP = \sum_{h=1}^n \frac{\partial OP}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial OP}{\partial t} dt$$

Ora, il termine  $dOP$  indica lo spostamento reale del sistema secondo le variabili newtoniane. A volte, però, è più comodo parlare di spostamento virtuale di un sistema vincolato. Facciamo un esempio per chiarire di cosa parliamo.

Prendiamo un punto materiale costretto a muoversi lungo una guida. Il percorso che il punto può fare lungo la guida è determinato e non può cambiare; il moto generale del punto nello spazio, però, può essere qualsiasi. Se infatti si fa muovere la guida nello spazio, è vero che il punto, lungo essa, può solo percorrere quel determinato tragitto, ma esso si muove assieme alla guida, e quindi lo spostamento reale sarà somma di due contributi: lo spostamento del punto lungo la guida e lo spostamento della guida stessa. Chiameremo lo spostamento del punto lungo la guida spostamento virtuale. La sua definizione generale è la seguente.

◇ **Definizione** Si definisce **spostamento virtuale** di un sistema lo spostamento permesso dal vincolo se questo fosse fermo. Si indica lo spostamento virtuale con  $\delta OP$ .

Il modo migliore per visualizzare lo spostamento virtuale è fissare il tempo  $t$  e vedere quali movimenti sono permessi al nostro sistema vincolato. Poiché il tempo è fisso e consideriamo, nello spostamento virtuale, i vincoli totalmente indipendenti dal tempo (perché studiamo solo i movimenti permessi da questi, senza indagare l'evoluzione del vincolo nel tempo), l'espressione di funzione delle variabili lagrangiane deriva direttamente da quella di  $dOP$ , basta considerare il tempo ininfluente. Avremo quindi

$$\delta OP = \sum_{h=1}^n \frac{\partial OP}{\partial q_h} \delta q_h$$

Indicheremo con il simbolo  $dOP$  le quantità reali, con il simbolo  $\delta OP$  quelle virtuali. In meccanica newtoniana l'equazione differenziale che descriveva l'evolversi dello stato di un sistema è data dalla seconda legge della dinamica

$$m\ddot{OP} = \vec{F} + \vec{r}$$

$\vec{r}$  indica le forze vincolari, che non sempre è facile o possibile calcolare. Il nostro primo obiettivo sarà quello di scrivere questa formula in funzione delle variabili lagrangiane, indipendenti dai vincoli, per le quali non valgono quindi le reazioni  $\vec{r}$ . Prima di poter giungere a quel risultato, però, c'è ancora un po' di strada da fare.

Terminiamo il modulo parlando di lavoro virtuale, che ci permette di definire anche un altro vincolo:

◇ **Definizione** Data la definizione di lavoro meccanico  $dL = \vec{F} \cdot ds$ , si definisce **lavoro virtuale**

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \cdot \delta OP$$

Lo spostamento virtuale, ovviamente, rientra nella definizione di lavoro virtuale. La somma delle forze agenti sul sistema vincolato permettono a questo di muoversi solo lungo il vincolo, ed è quindi necessario che si parli di spostamento virtuale. Questo ci permette quindi di definire:

◇ **Definizione** Si definisce **vincolo perfetto bilaterale** un vincolo tale che

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot \delta OP = 0$$

Un vincolo perfetto bilaterale rende quindi il lavoro virtuale delle forze vincolari nullo per ogni infinitesimo spostamento virtuale  $\delta OP$ .

### 1.3 Equazione simbolica di d'Alembert

Ricordiamo il nostro obiettivo: scrivere l'equazione di Newton in funzione delle variabili lagrangiane. Ci resta ancora un po' di strada da fare, che percorreremo tra questo e il successivo paragrafo. Il primo tentativo di spostare lo sguardo dalla meccanica newtoniana alla meccanica lagrangiana è dato dall'equazione di d'Alembert.

◇ **Definizione** **Equazione simbolica di d'Alembert:**

$$\sum_{i=1}^n (m_i \ddot{x}_i - \vec{f}_i) \cdot \delta OP_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \cdot \delta OP_i = 0$$

L'equazione simbolica di d'Alembert è vera per qualunque scelta arbitraria di  $\delta OP_i$ . Il problema è che i  $\delta OP_i$  non sono indipendenti tra loro: in un sistema rigido, per esempio, la distanza dei vari punti dall'origine varia nel tempo, ma la forma geometrica del sistema no, quindi le distanze sono comunque in relazione tra loro. Proviamo allora a scrivere i  $\delta OP_i$  in funzione delle variabili lagrangiane  $q_h$  e, oltre a questi, scriviamo anche le quantità meccaniche più importanti.

$$\begin{aligned} \bar{OP}_i &= \bar{OP}_i(q_1, \dots, q_n) \\ v_i &= \frac{dOP_i}{dt} = \sum_{h=1}^n \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \cdot \frac{dq_h}{dt} + \frac{\partial OP_i}{\partial t} \end{aligned}$$

L'espressione  $\frac{d}{dt}$  indica la derivata totale rispetto al tempo, mentre  $\frac{\partial}{\partial t}$  indica quella parziale; l'espressione  $\frac{dq_h}{dt}$  la indicheremo, da adesso e per sempre,  $\dot{q}_h$ . Scriviamo ora l'espressione dell'energia cinetica  $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$ , sostituendo al posto di  $v$  l'espressione trovata in funzione delle  $q_h$ :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \sum_{h=1}^n \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \cdot \frac{dq_h}{dt} + \frac{\partial OP_i}{\partial t} \right) \cdot \left( \sum_{h=1}^n \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \cdot \frac{dq_h}{dt} + \frac{\partial OP_i}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_h \cdot \dot{q}_k + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N m_i \sum_{h=1}^n \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \cdot \dot{q}_h \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial t} \right) \cdot 2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{\partial OP_i}{\partial t} \right)^2 \end{aligned}$$

Facciamo chiarezza sugli indici delle sommatorie. L'indice  $i = 1, \dots, N$  indica il numero di particelle che compongono il sistema fisico che stiamo trattando, mentre gli indici  $h, k = 1, \dots, n$  indicano i gradi di libertà del nostro sistema fisico, corrispondente anche al numero di variabili lagrangiane.

Notiamo che l'ultimo elemento della somma non dipende esplicitamente da  $q_h$ ; lo chiameremo allora  $a_{00}$ . Sviluppriamo a un altro livello l'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \underbrace{\left( \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \frac{\partial OP_i}{\partial q_k} \right)}_{=a_{hk}} q_h \dot{q}_k + \sum_{h=1}^n \underbrace{\left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} m_i \right)}_{a_{0h}} \dot{q}_h \frac{\partial OP_i}{\partial t} + a_{00}$$

I due elementi tra parentesi li rinominiamo come indicato, e otteniamo infine l'espressione dell'energia cinetica in funzione delle variabili lagrangiane che, ricordiamo, sono indipendenti tra loro:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k + \sum_{h=1}^n a_{0h} \dot{q}_h + \frac{1}{2} a_{00}$$

Concludiamo il capitolo facendo una piccola osservazione sul lavoro virtuale, definito come:  $\delta L = \sum_{i=1}^N f_i \cdot \delta OP_i$ ; esplicitiamo gli spostamenti virtuali:

$$\delta L = \sum_{i=1}^N f_i \cdot \sum_{h=1}^n \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \delta q_h = \sum_{h=1}^n \underbrace{\left( \sum_{i=1}^N f_i \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \right)}_{Q_h} \delta q_h = \sum_{h=1}^n Q_h \cdot \delta q_h$$

Tutto questo lavoro è stato fatto per passare dai  $\delta OP_i$ , che sono dipendenti tra loro, ai  $\delta q_h$ , che, per definizione delle variabili lagrangiane, sono indipendenti tra loro (rappresentano gli spostamenti virtuali delle variabili lagrangiane). Quelli che abbiamo indicato con  $Q_h$  sono scalari che indicano le **forze lagrangiane**; queste, così come per le variabili, non hanno dimensioni di una forza ma dipendono dalle dimensioni delle variabili, in modo che il loro prodotto scalare abbiamo le dimensioni di un'energia (lavoro). Questo ci indica che, così come c'è un sacco di libertà nella scelta delle variabili lagrangiane, questa libertà si traduce poi nel dover prestare più attenzione alle forze che agiscono su queste variabili, in termini dimensionali. In generale, però, basta l'esperienza e l'allenamento per riuscire a individuare bene le dimensioni di un oggetto fisico.

## 1.4 La lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange

Sulla scia del modulo precedente, cerchiamo di dare una forma dipendente dalle variabili lagrangiane all'equazione di Newton. Per prima cosa, diciamo che questo modulo è molto derivante, cioè ci saranno derivate, derivate, derivate. Poi, iniziamo subito a ricordare qualche elemento da tenere in considerazione:

$$\begin{aligned} \text{eq. simbolica di d'Alembert } \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{x}_i - \vec{f}_i) \delta OP_i &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \cdot \delta OP_i = 0 \\ \text{velocita' } v_i &= \sum_{h=1}^n \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial OP_i}{\partial t} \\ \text{energia cinetica } T &= \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k + \sum_{h=1}^n a_{0h} \dot{q}_h + \frac{1}{2} a_{00} \end{aligned}$$

Premessa immediata: se i vincoli sono indipendenti dal tempo, i valori  $a_{00}$ ,  $a_{0h}$  sono nulli, e quindi l'energia cinetica ha un'espressione semplice. Consideriamo proprio questo caso: un sistema i cui vincoli siano indipendenti dal tempo.

Deriviamo rispetto a  $q_h$  e alle  $\dot{q}_h$  velocità e energia cinetica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_h} &= \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \\ \frac{\partial v_i}{\partial q_h} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i 2v_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{i=1}^N m_i v_i \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \\ \frac{\partial T}{\partial q_h} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i 2v_i \frac{\partial v_i}{\partial q_h} = \sum_{i=1}^N m_i v_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \right) \end{aligned}$$

Nell'ultima espressione, non abbiamo scritto per esteso il valore di  $\frac{\partial v_i}{\partial q_h}$  perché risulta più comodo vederla così, in vista del prossimo passo che stiamo per compiere, ovvero derivare totalmente rispetto al tempo l'ultima espressione:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{i=1}^N \left( m_i \ddot{x}_i \cdot \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} + \underbrace{m_i v_i \frac{d}{dt} \frac{\partial OP_i}{\partial q_h}}_{\frac{\partial T}{\partial q_h}} \right) = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{x}_i \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} + \frac{\partial T}{\partial q_h}$$

Da cui si ottiene che:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{x}_i \frac{\partial OP_i}{\partial q_h}$$

Riprendiamo ora l'equazione simbolica di d'Alembert e imponiamo al problema di soddisfarla, ovvero di compiere il suo moto naturale; in questa, sostituiamo l'espressione di  $\delta OP_i$  ottenendo:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{x}_i - f_i) \cdot \sum_{h=1}^n \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \delta q_h = 0$$

Poiché il sistema soddisfa l'equazione simbolica di d'Alembert, i vincoli saranno perfetti bilaterali e il lavoro virtuale è quindi nullo. È lecito quindi scrivere l'espressione di sopra  $-\delta L = 0$ :

$$\sum_{h=1}^n \left[ \sum_{i=1}^N \left( m_i \ddot{x}_i \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \delta q_h \right) - \sum_{i=1}^N f_i \frac{\partial OP_i}{\partial q_h} \delta q_h \right] = 0$$

Ricordando l'espressione scritta poco fa, e ricordando l'espressione del lavoro virtuale che abbiamo dato nel precedente modulo, otteniamo:

$$\sum_{h=1}^n \left[ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} \right) \delta q_h - Q_h \delta q_h \right] = 0$$

Adesso, ricordiamo che, per la loro definizione, i  $\delta q_h$  sono valori completamente indipendenti tra loro, e possiamo quindi semplificarli nella precedente espressione, ottenendo quelle che vengono chiamate equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h$$

Queste sono  $n$  equazioni differenziali. Il caso interessante è quello in cui le componenti lagrangiane derivano da forze derivanti da potenziali; per queste, è possibile scrivere:

$$Q_h = - \frac{\partial U}{\partial q_h}$$

Ed è quindi possibile sostituire questa espressione nelle equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \left( \frac{\partial T}{\partial q_h} - \frac{\partial U}{\partial q_h} \right) = 0$$

Ora ragioniamo sul fatto che, se i potenziali  $U(q_1, \dots, q_n)$  sono funzioni solo delle  $q_h$ , la loro derivata rispetto a queste è nulla, poiché le  $q_h$  sono indipendenti tra loro. Se questo accade, allora è lecito scrivere:

$$\frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{\partial (T - U)}{\partial q_h}$$

Dove ovviamente non ci interessa minimamente se si deriva in  $q_h$  o in  $\dot{q}_h$ : è la stessa cosa, è lecito poter scrivere  $T - U$  al posto di  $T$ . Allora, a questo punto, introduciamo la funzione.

$$L(q_h, \dot{q}_h; t) = T - U$$

Che chiameremo lagrangiana. Ripetendo il ragionamento compiuto finora, otteniamo l'espressione:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0$$

Queste vengono chiamate equazioni di Eulero-Lagrange; come per le equazioni di Lagrange, sono  $n$  equazioni differenziali. La soluzione di questo sistema differenziale fornisce le equazioni del moto del sistema. Adesso, ragionando al di là del percorso teorico affrontato per poter raggiungere questo strumento, è immediato comprendere come, utilizzando queste equazioni, si possa facilmente e velocemente risolvere un problema di meccanica in cui è presente un sistema vincolato. Attraverso l'opportuna scelta delle variabili lagrangiane, che ricordiamo essere arbitrarie, risulta poi facile determinare le equazioni del moto e, quindi, come evolve il sistema nel tempo. Basta semplicemente scriversi la funzione lagrangiana, derivarla e il lavoro è fatto.

## 1.5 Quantità conservate

Esistono, nei sistemi dinamici di cui è possibile scrivere la lagrangiana, alcune quantità che, in casi particolari, restano costanti lungo tutto il moto. Vediamo quali.

◇ **Definizione** Si definisce **momento coniugato** di  $q_r$  la quantità:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}$$

Se nella lagrangiana non è presente la variabile  $q_r$  ma è presente la sua derivata  $\dot{q}_r$ , allora il momento coniugato è una costante del moto. Facciamo un esempio.

Consideriamo un sistema la cui lagrangiana sia la seguente:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$$

Il momento coniugato di  $\theta$  sarà  $P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$  che è il momento angolare rispetto all'asse  $\hat{z}$ ; il sistema in questione è un corpo ruotante attorno al proprio asse, e sappiamo che il momento angolare è, in modulo, costante. Inoltre, sapendo questo, sappiamo che il sistema è invariante rispetto a rotazioni. Ciò ci indica che l'assenza di una variabile indica la presenza di una simmetria.

◇ **Definizione** Chiamasi **energia generalizzata** di un sistema la funzione:

$$\mathcal{H} = \sum_{h=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h - L$$

Il nome energia generalizzata non è casuale; osserviamo come, infatti, nella lagrangiana l'unico dei due fattori tra energia cinetica e energia potenziale dipendente da  $\dot{q}_h$  è l'energia cinetica. Vediamo di esprimerla bene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} &= \sum_{h=1}^n a_{hl} \dot{q}_h \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h &= \sum_{h=1}^n a_{hl} \dot{q}_h \dot{q}_l = 2T \end{aligned}$$

Ricordiamo che, all'inizio del paragrafo scorso, avevamo ottenuto che  $T = \frac{1}{2} \sum_{h,l=1}^n a_{hl} \dot{q}_h \dot{q}_l$  e quindi il primo fattore dell'energia generalizzata è proprio  $2T$ . Ricordando la definizione di lagrangiana, otteniamo:

$$\mathcal{H} = 2T - (T - U) = T + U = E_c$$

Esattamente uguale, per definizione, all'energia meccanica del sistema. Ovviamente, non sempre è una costante, l'energia; il valore di  $T$  qui sopra utilizzato è quello dei sistemi a vincoli indipendenti dal tempo. È possibile dimostrare, attraverso il seguente teorema, che, se i vincoli sono indipendenti dal tempo,  $\mathcal{H}$  è una costante del moto.

## 1.5.1 Teorema

Se  $L(q_h/\dot{q}_h)$ , ovvero indipendente dal tempo:  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ , allora  $\mathcal{H}$  è una costante del moto.

Dimostrazione

Deriviamo totalmente l'energia generalizzata rispetto al tempo:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{h=1}^n \left( \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \right) \cdot \dot{q}_h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \ddot{q}_h \right) - \frac{dL}{dt}$$

Esprimiamo per intero:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{h=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \ddot{q}_h \right)$$

Otteniamo così che, derivando l'energia generalizzata rispetto al tempo vale:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \sum_{h=1}^n \left[ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \right) \dot{q}_h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \ddot{q}_h - \frac{\partial L}{\partial q_h} \dot{q}_h - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \ddot{q}_h \right] \\ &\Rightarrow \sum_{h=1}^n \dot{q}_h \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} \right] \end{aligned}$$

Se, quindi, sono soddisfatte le equazioni di Eulero-Lagrange, ovvero i vincoli sono indipendenti dal tempo,  $\mathcal{H}$  è una **costante del moto**, la derivata rispetto al tempo è nulla (questo vale anche come **teorema dell'energia meccanica**). Se, invece,  $L$  è indipendente da  $t$ , ma i vincoli lo sono,  $\mathcal{H}$  è sempre una costante del moto, ma non è l'energia meccanica.

Abbiamo quindi trovato che due quantità, in casi particolari, restano costanti nel tempo. Saranno proprio queste due quantità che saranno alla base della meccanica hamiltoniana, come vedremo nella prossima parte del corso.

## 1.6 Punti di equilibrio

Parleremo in questo e nel prossimo modulo di punti di equilibrio e movimenti attorno a essi. Considereremo nel nostro studio sistemi generici, ma ricordiamo che queste nozioni si applicano in particolare a quei sistemi di cui è possibile scrivere la lagrangiana per poterne appunto studiare le configurazioni di equilibrio.

◇ **Definizione** Diremo che un sistema si trova in uno **stato di equilibrio** se, una volta messo fermo in quello stato, vi resta indefinitamente.

La definizione di stato di equilibrio è abbastanza coerente: se il sistema si trova in questo stato in quiete, allora le forze saranno tutte in equilibrio, bilanciate tra loro, la risultante sarà nulla. Date quindi le coordinate lagrangiane  $q_h$ , se vale:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q_h} \right|_{\bar{q}_h} = 0 \quad \forall i, \dots, n$$

Allora diremo che  $\bar{q}_h$  è una posizione di equilibrio.

### 1.6.1 Classificazione dei punti di equilibrio

Prendiamo ora un sistema in uno stato di equilibrio, e forziamo una leggera perturbazione al sistema. Possono accadere in sostanza due cose: o il sistema resta intorno alla posizione di equilibrio oscillando leggermente, o schizza via verso l'infinito e oltre non tornandovi più. Nel primo caso parleremo di **equilibrio stabile**, nel secondo di **equilibrio instabile**.

Formalmente, essere in un punto di equilibrio stabile significa dire che, se il sistema viene messo all'interno di un intorno del punto di equilibrio (intorno di ordine  $\delta_\varepsilon$ ), il sistema non uscirà mai dall'intorno  $\varepsilon$ . In matematica:

$$\sum_{h=1}^n \left( |q_h^{(0)} - \bar{q}_h|^2 + \alpha \left( \dot{q}_h^{(0)} \right)^2 \right) < \delta_\varepsilon$$

$$\sum_{h=1}^n \left( |q_h^{(t)} - \bar{q}_h|^2 + \alpha \left( \dot{q}_h^{(t)} \right)^2 \right) < \varepsilon$$

Dove la prima espressione implica la seconda. Detta così, la situazione sembra irrisolvibile: dovremmo applicare la definizione a tutte le coordinate lagrangiane del sistema, sperando prima o poi di trovarne una che rispetta questa condizione. Grazie a Dirichlet, questo non serve.

### 1.6.2 Teorema di Dirichlet

Siano i vincoli, la lagrangiana, l'energia potenziale indipendenti dal tempo (esplicitamente). Sia  $P^*$  un punto di equilibrio. Affinché questo sia punto di equilibrio stabile (condizione necessaria) allora  $p^*$  deve essere un minimo isolato dell'energia potenziale.

In termini pratici, per poter stabilire se un punto di equilibrio sia o meno stabile occorre studiare il determinante hessiano dell'energia potenziale: occorre scrivere la matrice hessiana delle derivate seconde e calcolarne il determinante: se è positivo, il punto è un minimo dell'energia potenziale e quindi è un punto di equilibrio stabile. Tutti gli altri casi (massimo o sella) corrispondono a equilibri instabili.

#### Dimostrazione

Dimostriamo il caso unidimensionale con  $q_h = x$ . La condizione da rispettare è che, se vale  $\left( |x^{(0)} - \bar{x}|^2 + \alpha \left( \dot{x}^{(0)} \right)^2 \right) < \delta_\varepsilon$  allora deve essere  $\left( |x^{(t)} - \bar{x}|^2 + \alpha \left( \dot{x}^{(t)} \right)^2 \right) < \varepsilon$ .

Se la lagrangiana non dipende dal tempo, l'energia totale del sistema è costante, ovvero  $E = T + U = \text{cost}$ . Possiamo scrivere l'energia come  $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$ . L'ipotesi che imponiamo al sistema è che  $U(x)$  ha un minimo in  $x = 0$ , ovvero  $U(0) = 0$ .

Procediamo per assurdo. L'intorno di ordine  $\varepsilon$  è chiuso e limitato e in questo intorno vale  $E > 0$ . Per il teorema di Weierstrass esiste il minimo  $m$  in questo intorno tale che  $E > E(m) > 0$ . Consideriamo il valore dell'energia vicino all'origine, un valore  $E^*$  piccolo a piacere, tale che  $E^* < E(m)$ . Ma  $m$  era proprio il minimo, e questo è abbastanza contraddittorio. Quindi il minimo isolato è proprio l'origine, il che conferma la tesi.

## 1.7 Piccole oscillazioni attorno a punti di equilibrio stabili

### 1.7.1 Frequenze delle piccole oscillazioni

In questo modulo parleremo delle piccole oscillazioni che il sistema compie una volta che viene messo in moto attorno a un punto di equilibrio stabile  $\tilde{q}$ ; il sistema è sempre descritto dalle coordinate lagrangiane  $q_i = (q_1, \dots, q_n)$ .

Sviluppiamo l'energia al secondo ordine di Taylor:

$$U(q_1, \dots, q_n) = U(\tilde{q}) + \sum_{l=1}^n \left. \frac{\partial U}{\partial q_l} \right|_{\tilde{q}} \cdot \eta_l + \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k} \right|_{\tilde{q}} \cdot \eta_h \eta_k + o(\eta^3)$$

In questa espressione abbiamo considerato  $\eta_n = q_n - \tilde{q}_n$ .

Possiamo considerare  $U(\tilde{q}) = 0$ ; inoltre, per definizione di punto di equilibrio, vale  $\left. \frac{\partial U}{\partial q_l} \right|_{\tilde{q}} = 0$ . Allora, se siamo vicini al punto di equilibrio (e nello studio delle piccole oscillazioni ci troviamo appunto in un intornino del punto di equilibrio) possiamo anche trascurare  $o(\eta^3)$  ottenendo:

$$U(q_n) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n U_{hk} \eta_h \eta_k$$

È lecito chiederci quanto vicino alla posizione di equilibrio  $\tilde{q}$  dobbiamo trovarci affinché siano valide queste approssimazioni. Sviluppiamo anche l'energia cinetica fino a un significativo ordine di  $\eta$ , ovvero tale che  $|\eta| \ll |\tilde{q}|$ . Ricordiamo l'espressione dell'energia cinetica:  $T = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n a_{hk}(q) \dot{q}_h \dot{q}_k$ . Possiamo esplicitare:

$$a_{hk}(q) = a_{hk}(\tilde{q}) + o(\eta)$$

Passiamo adesso dalle  $\dot{q}_h$  alle  $\dot{\eta} = \frac{d}{dt}(q_h - \tilde{q}) = \dot{q}$ ; il passaggio non comporta quindi troppe difficoltà energetiche. Fatte queste considerazioni, possiamo scrivere l'energia cinetica come:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n a_{hk}(q) \dot{\eta}_h \dot{\eta}_k + o(\eta^3)$$

Anche qui consideriamo di essere abbastanza vicino a  $\tilde{q}$  e possiamo trascurare  $o(\eta^3)$ . Inoltre, per classicità di notazione, scriviamo  $a_{hk}$  come  $T_{hk}$ , ottenendo l'espressione dell'energia cinetica  $T = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n T_{hk} \dot{\eta}_h \dot{\eta}_k$ .

Possiamo finalmente scrivere la lagrangiana del nostro sistema

$$L = T - U = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n (T_{hk} \dot{\eta}_h \dot{\eta}_k - U_{hk} \eta_h \eta_k)$$

Ora possiamo scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange scrivendo così le equazioni del moto in prossimità del punto di equilibrio  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} - \frac{\partial L}{\partial \eta} = 0$ :

$$\sum_{k=1}^n (T_{hk} \ddot{\eta}_k + U_{hk} \eta_k) = 0$$

Notiamo come, avendo scelto il punto di equilibrio come posizione privilegiata, otteniamo delle equazioni differenziali lineari, che hanno tutte le loro proprietà (lo

spazio delle soluzioni è spazio vettoriale). Le soluzioni di queste equazioni saranno del tipo  $\eta = a e^{i\omega t}$ , con  $\underline{\eta}, \underline{a}$  vettori di  $n$  dimensioni con componenti le differenti soluzioni delle equazioni. In particolare, indichiamo

$$\underline{a}_n = (a_{n1}, \dots, a_{nn}) \in \mathbb{C} \quad \underline{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n) \text{ funzioni complesse}$$

La soluzione generale delle equazioni è la somma di tutte le soluzioni particolari, ovvero

$$\underline{\eta}_k = \sum_{h=1}^n a_{kh} e^{i\omega_h t}$$

L'indice  $k$  indica la componente del vettore soluzione, l'indice  $n$  indica il vettore soluzione. Dobbiamo ovviamente far vedere che queste sono soluzioni, quindi le sostituiamo nell'equazione differenziale.

$$\sum_{k=1}^n (T_{hk} \ddot{\eta}_k + U_{hk} \eta_k) = 0$$

Cerchiamo delle soluzioni del tipo  $\eta_k = a_k e^{i\omega t}$  con  $a_k \in \mathbb{C}$  coefficienti complessi:

$$\sum_{k=1}^n (-\omega^2 T_{hk} + U_{hk}) a_{hk} e^{i\omega_h t} = 0$$

Ovviamente, come è immediato pensare, il termine  $\omega$  indica la pulsazione dell'oscillazione. L'esponenziale si può semplificare essendo sempre positiva, ottenendo un sistema di equazioni algebriche (non differenziali, semplici equazioni algebriche) in  $n$  incognite complesse  $a_k$  che dipendono dal parametro  $\omega$ :

$$\sum_{k=1}^n (-\omega^2 t_{hk} + U_{hk}) a_k = 0$$

La soluzione banale è  $a_k = 0$ , ma poco importa; cerchiamo quindi soluzioni non banali, per far ciò deve verificarsi (posto  $\lambda = \omega^2$ ):

$$\det(-\lambda T_{hk} + U_{hk}) = 0$$

È possibile dimostrare che esistono  $n$  soluzioni reali positive, quindi troveremo un numero di frequenze di oscillazione pari al numero dei gradi di libertà (o coordinate lagrangiane) del sistema. Non forniremo la dimostrazione matematica, ma faremo un breve discorso logico per far capire che l'esistenza delle soluzioni non è completamente insensata.

Se ci fosse un qualche  $\lambda < 0$ , avremmo a che fare con  $\omega = \pm\sqrt{\lambda}$ , ovvero due numeri complessi. Quindi potremmo scrivere:

$$\eta = a_k e^{i\omega t} = a_k e^{i\omega_1 t} \cdot e^{-i\omega_2 t}$$

L'esponenziale negativo o esplose o si annulla. Tuttavia, l'energia del sistema deve restare costante lungo tutto il moto, quindi questo non è possibile.

Facciamo un po' di chiarimenti sui termini  $T_{hk}$  e  $U_{hk}$ . Queste sono due matrici  $n \times n$ : la seconda  $U_{hk}$  è l'hessiana dell'energia potenziale già studiata nel modulo precedente, mentre la prima  $T_{hk}$  è l'hessiana dell'energia cinetica rispetto ai momenti coniugati delle coordinate; per fare un esempio, per due gradi di libertà, questa sarà:

$$T_{hk} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial(\dot{q}_1)^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_1\partial\dot{q}_2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_1\partial\dot{q}_2} & \frac{\partial^2 T}{\partial(\dot{q}_2)^2} \end{bmatrix}$$

Tornando a parlare delle soluzioni, per ogni  $\lambda_k$  abbiamo  $n$  soluzioni, ovvero si ha che  $\lambda_k$  è un autovalore e  $a_k$  il corrispondente autovettore:

$$\lambda_k \rightarrow a_k \quad \underline{a}_k = C_k e^{i\varphi t}$$

La soluzione sarà quindi la parte reale del vettore:

$$\underline{\eta}_k = \Re \left[ \sum_{k=1}^n a_k e^{i\omega_k t} \right] = \underline{c}_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$$

Ora facciamo un lunghissimo passo indietro, ricordando che  $\eta = q - \tilde{q}$ , e quindi:

$$q(t) = \tilde{q} + \sum_{k=1}^n \underline{c}_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$$

Le frequenze sono le  $\omega_k$  presenti nell'argomento del coseno, e rappresentano la somma delle soluzioni dell'equazione algebrica in funzione di  $\lambda$ . Le costanti  $c_k, \varphi_k$  sono arbitrarie.

La soluzione che abbiamo trovato, che rappresenta l'equazione del moto del sistema per movimenti piccoli attorno ai punti di equilibrio, è una combinazione lineare di  $n$  oscillatori armonici, che vengono chiamati **modi normali**. Le  $\omega_k$  sono chiamate **frequenze normali o proprie**. Quindi il moto del sistema, apparentemente complesso, non è altro che una somma di oscillatori armonici disaccoppiati, e ha quindi più senso e ordine di quanto possa sembrare da un'osservazione empirica.

### 1.7.2 Esempio classico: pendoli accoppiati

Un esempio classico di sistema di cui appare complicato studiare le piccole oscillazioni è quello di due pendoli accoppiati, ovvero appesi entrambi a una corda che abbia torsione elastica. Se mettiamo in piccola oscillazione solo uno dei due pendoli, dopo qualche secondo anche l'altro comincia a muoversi perché la corda che li unisce, torcendosi, fornisce un momento delle forze al pendolo che induce l'oscillazione. Vogliamo studiare le piccole oscillazioni di questo sistema. Facciamo finta che, a unire i pendoli, ci sia una molla di costante  $k$  (lo studio resta uguale, invece di studiare una forza torcente studiamo una forza elastica). Per semplicità, inoltre, poniamo  $m_1 = m_2 = l_1 = l_2 = g = 1$ . Le coordinate lagrangiane sono i due angoli di oscillazione dei pendoli, in particolare:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \theta_1 \approx \theta_1 \\ x_2 &= l_2 \sin \theta_2 \approx \theta_2 \\ y_1 &= l_1(1 - \cos \theta_1) \\ y_2 &= l_2(1 - \cos \theta_2) \end{aligned}$$

L'energia cinetica sarà  $T = \frac{1}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$ ; ricordando che  $T = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n T_{hk} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$  la matrice  $T_{hk}$  sarà:

$$T_{hk} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Studiamo i punti di equilibrio; l'energia potenziale è data da  $U = 1 - \cos \theta_1 + 1 - \cos \theta_2 + \frac{1}{2}k(\theta_1 - \theta_2)^2$ , quindi:

$$\nabla U = \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \theta_1} = \sin \theta_1 + k(\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta_2} = \sin \theta_2 + k(\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases}$$

L'unico punto di equilibrio è, logicamente,  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ . Studiamone la classificazione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_1^2} &= \cos \theta_1 + k \Big|_{(0,0)} = 1 + k \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_2^2} &= \cos \theta_2 + k \Big|_{(0,0)} = 1 + k \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} &= -k \Big|_{(0,0)} = -k \end{aligned} \quad U_{hk} = \begin{vmatrix} 1+k & -k \\ -k & 1+k \end{vmatrix}$$

Il punto è, com'è logico che sia, stabile (il determinante è positivo). Studiamo ora il determinante della matrice  $-\lambda t_{hk} + U_{hk} = 0$ :

$$\det \begin{vmatrix} -\lambda + 1 + k & -k \\ -k & -\lambda + 1 + k \end{vmatrix} = (-\lambda + 1 + k)^2 - k^2$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado in  $\lambda$  escono due soluzioni del tipo  $\lambda = k + 1 \pm k$ , quindi avremo che

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 & \omega_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 2k + 1 & \omega_2 &= \sqrt{2k + 1} \end{aligned}$$

Per poter trovare i modi normali, studiamo  $\sum_{k=1}^n (-\lambda T_{hk} + U_{hk})a_k = 0$ ; per  $\lambda_1$  avremo:

$$\begin{pmatrix} 1+k & -k \\ -k & 1+k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da cui otteniamo che  $a_1 = a_2$ , ovvero le due ampiezze di oscillazione sono uguali:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= a \cos(t) \\ \theta_2 &= a \cos(t) \end{aligned}$$

Per  $\lambda_2$  invece:

$$\begin{pmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da cui otteniamo  $-ka_1 - ka_2 = 0$ , ovvero  $a_1 = -a_2$ ; le oscillazioni sono del tipo:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= a \cos(\sqrt{2k+1}t) \\ \theta_2 &= -a \cos(\sqrt{2k+1}t) \end{aligned}$$

Ovvero le oscillazioni, a prima vista complesse, sono la somma di due semplici moti armonici di ampiezza uguale o contraria.

## Meccanica hamiltoniana

### 2.1 Hamiltoniana, equazioni canoniche di Hamilton

La meccanica hamiltoniana è un'altra riformulazione della meccanica, diversa sia dalla formulazione newtoniana che da quella lagrangiana, pur partendo però dai risultati raggiunti da questa.

Il formalismo hamiltoniano è, come vedremo, uno strumento molto potente; a differenza di quello lagrangiano, la cui potenza stava nel facilitare lo studio dinamico di un sistema, il formalismo hamiltoniano fornisce un altro punto di vista sulla fisica e sul mondo, cambiando totalmente il modo di vedere le cose. Vedremo pian piano come questo sia possibile, anche senza notevoli difficoltà.

Nella meccanica lagrangiana abbiamo visto che le variabili di interesse erano le coordinate lagrangiane  $q_h$  e le loro derivate, ovvero come evolvono nel tempo,  $\dot{q}_h$ . La meccanica hamiltoniana, invece, prende come variabili di interesse sempre le stesse  $q_h$ , ma sostituisce le  $\dot{q}_h$  con i rispettivi momenti coniugati  $p_h$ . Per riuscire a sostituire la dipendenza dalle  $\dot{q}_h$  con la dipendenza dai  $p_h$  dobbiamo compiere una trasformazione, che viene generalmente chiamata **trasformata di Legendre**.

Per poter passare dalle  $\dot{q}_h$  ai  $p_h$  occorre poter scrivere:

$$\dot{q}_h = f_h(q/p/t)$$

quando scriviamo una dipendenza nella forma  $f(x/y/z)$ , intendiamo che le variabili  $x, y, z$  variano negli indici  $h = 1, \dots, n$ . Ovviamente, il tempo non ha indici ed è coordinata assoluta. Attraverso questa trasformazione, e partendo dall'energia generalizzata:

$$\mathcal{H} = \sum_{h=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \dot{q}_h - L = \sum_{h=1}^n p_h \dot{q}_h - L$$

Dove la lagrangiana è funzione  $L(q/\dot{q}/t)$ . Se invece adesso passo da  $\dot{q}_h$  a  $f(q/p/t)$ , ottengo:

$$\mathcal{H}(q/\dot{q}/t) \Rightarrow \mathcal{H}(q/f(q/p/t)/t)$$

Questa è la definizione di hamiltoniana, la funzione fondamentale del formalismo hamiltoniano, che sostituisce l'energia generalizzata e che descrive l'evoluzione del sistema fisico. La sua espressione generale è:

$$H(q/p/t) = \sum_{h=1}^n p_h f_h(q/p/t) - L(q/f(q/p/t)/t)$$

Vediamo ora come è possibile descrivere il sistema a partire dall'hamiltoniana. Studiamone le variazioni rispetto a un  $q_l$  fissato; l'indice  $q_h$  è l'indice muto della sommatoria:

$$\frac{\partial H}{\partial q_l} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_h}{\partial q_l} p_h - \frac{\partial L}{\partial q_l} - \sum_{h=1}^n \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}}_{p_h} \frac{\partial L}{\partial q_l} = -\frac{\partial L}{\partial q_l}$$

Dalle equazioni di Eulero-Lagrange, sappiamo che  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial L}{\partial q_h}$ ; sostituendo nell'espressione sopra:

$$\frac{\partial H}{\partial q_l} = -\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}}_{p_l} = -\frac{d}{dt} p_l = -\dot{p}_l$$

Adesso vediamo la variazione rispetto al momento coniugato:

$$\frac{\partial H}{\partial p_l} = f_l(q/p/t) + \sum_{h=1}^n p_h \frac{\partial f_h}{\partial p_l} - \sum_{h=1}^n \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}}_{p_l} \frac{\partial f_h}{\partial p_l} = f_l(q/p/t) = \dot{q}_l$$

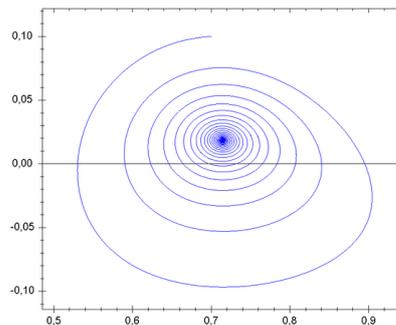
Otteniamo le cosiddette equazioni canoniche di Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l} \\ \dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l} \end{cases}$$

Un sistema che compie il suo moto naturale rispetta queste equazioni differenziali; come vedremo, si nascondono molte cose dietro le equazioni canoniche.

## 2.2 Spazi delle fasi

Abbiamo visto che nel formalismo hamiltoniano si studia l'evolvere di un sistema fisico al variare delle coordinate lagrangiane  $q_h$  e dei rispettivi momenti coniugati  $p_h$ . È allora interessante graficare proprio queste variabili, ottenendo quello che si definisce spazio delle fasi, ovvero un grafico  $(p, q)$  con i momenti sulle ordinate. Questo è un esempio di spazio delle fasi, di un sistema instabile:



Vediamo qualche esempio di spazi delle fasi. Iniziamo con l'oscillatore armonico: scriviamone la lagrangiana.

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

L'energia generalizzata  $\mathcal{H}$ , in questo caso particolare, coincide con l'energia totale del sistema. Il momento coniugato di  $x$  sarà  $P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ ; l'hamiltoniana è:

$$H = T + U = \frac{p_x^2}{2m} + U(x) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

Questa formula è simile a un'espressione del tipo  $\frac{p_x^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}$ , che è l'equazione di un'ellisse. Ciò significa che, nello spazio delle fasi, il moto normale del sistema sarà descritto da una traiettoria ellissoidale; le curve di livello del grafico, ovvero le varie ellissi, variano di dimensioni a seconda dell'energia del sistema.

## 2.3 Prede e predatori: le equazioni di Lotka e Volterra

La meccanica hamiltoniana, le equazioni canoniche di Hamilton, lo spazio delle fasi: sono tutti elementi che abbiamo già introdotto e che possono sembrare, a un primo sguardo, un bell'artificio matematico per descrivere la dinamica dei sistemi oltre la meccanica lagrangiana. In realtà, come vedremo meglio anche nei prossimi moduli, la meccanica hamiltoniana è un potente strumento che permette di descrivere la realtà in una maniera matematicamente bella ed elegante, e conferisce un modo di vedere le cose completamente diverso. In questo modulo daremo un esempio interessante (forse il più importante) di come il formalismo hamiltoniano possa essere applicato ai più svariati casi della realtà. Parliamo, infatti, di dinamica delle popolazioni.

### 2.3.1 Il dopoguerra e la crisi della pesca

La storia di questo esempio risale alla prima guerra mondiale, in particolare all'immediato dopoguerra. Molti pescherecci del porto di Ancona (città natale di Vito Volterra, importante matematico italiano, a cui si deve questo studio) erano andati distrutti in guerra, e quelli rimasti erano pochi. Al tempo, era più facile uscire per pescare in gruppi organizzati, ma le possibilità di muoversi erano poche, considerato il numero di barche rimanenti. Proprio perché i pescherecci erano pochi, le aspettative di pesca erano molto alte: pochi cacciatori, tante prede; ci si aspettava che i pochi coraggiosi pescherecci che andavano al largo, tornassero carichi di pesce. Non fu così: il pesce nel mare era scarso, e il gioco non valeva la candela.

La cosa ebbe un impatto relativamente alto sulla popolazione locale, e interessò in particolare Volterra, che non fece altro che studiare la dinamica delle popolazioni di prede e predatori applicando proprio le equazioni canoniche di Hamilton.

### 2.3.2 Il sistema dinamico

Il sistema considerato è molto semplice. Prendiamo il caso che, nel nostro ecosistema ideale, esistano solo due specie animali: conigli, in veste di prede, e volpi, i predatori. Indicheremo i conigli con  $c$  e le volpi con  $v$ . Le equazioni che descrivono l'evoluzione dinamica del sistema sono le seguenti:

$$\begin{cases} \dot{c} = \alpha c - \beta cv \\ \dot{v} = -\gamma v + \delta cv \end{cases}$$

Cerchiamo ovviamente di dare un senso a quello che abbiamo scritto. Le derivate si intendono totali rispetto al tempo, quindi  $\dot{c}$  e  $\dot{v}$  indicano come evolvono nel tempo conigli e volpi. La prima espressione indica che i conigli crescono tanto più velocemente quanti più conigli sono presenti (sono infatti molto prolifici), e questo è indicato con il parametro  $\alpha$ ; allo stesso tempo, però, i conigli diminuiscono se sono presenti tante volpi, che li cacciano: questo è indicato dal parametro  $\beta$ . Il comportamento delle volpi è, invece, contrario: più volpi ci sono, meno le volpi crescono, a causa della concorrenza nella caccia (parametro  $\gamma$ ), mentre aumentano all'aumentare dei conigli, perché sono il loro sostentamento di vita: parametro  $\delta$ .

Ora vanno studiate, in qualche modo, queste due equazioni differenziali che, come si può notare, non sono disaccoppiate. Il trucco matematico è semplice: facciamo un cambio di variabili come segue.

$$\begin{cases} x = \ln c & \begin{cases} c = e^x \\ v = e^y \end{cases} \\ y = \ln v \end{cases}$$

Le nostre variabili hamiltoniane saranno proprio  $x$  e  $y$ ; calcoliamone le derivate prime:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\dot{c}}{c} = \alpha - \beta v = \alpha - \beta e^y = g'(x) \\ \dot{y} = \frac{\dot{v}}{v} = -\gamma + \delta c = -\gamma + \delta e^x = f'(y) \end{cases}$$

Se definisco  $H = f(y) + g(x)$ , le due variabili considerate seguono le leggi:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned}$$

Come vediamo subito, la dinamica delle popolazioni di prede e predatori ha la stessa struttura simplettica della meccanica hamiltoniana. L'espressione generale di  $H$  è:

$$H = (\delta e^x - \gamma x) + (\beta e^y - \alpha y) = \text{cost}$$

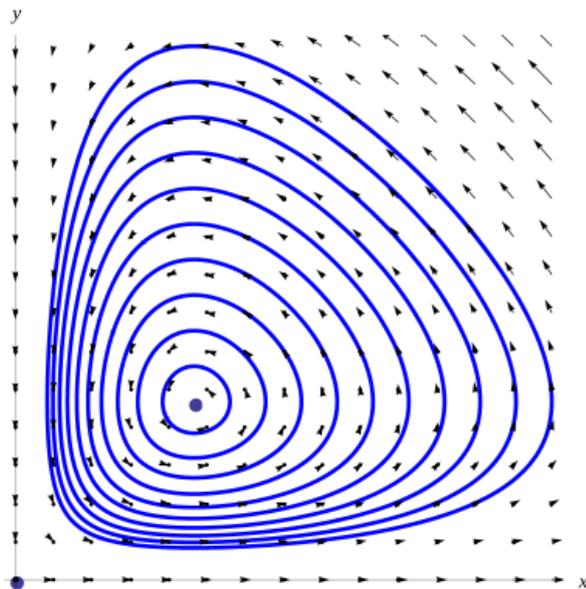
In termini di conigli e volpi, tornando alle iniziali variabili del nostro studio:

$$H = \delta c - \gamma \ln c + \beta v - \alpha \ln v$$

Questa funzione ammette minimo, di cui vi risparmiamo il calcolo. Il minimo in questione sarà esattamente il punto di equilibrio del sistema, e le coordinate sono:

$$\begin{aligned} \dot{x} = 0 & \Rightarrow v_{eq} = \frac{\alpha}{\beta} \\ \dot{y} = 0 & \Rightarrow c_{eq} = \frac{\gamma}{\delta} \end{aligned}$$

Lo "spazio delle fasi" (è inappropriato chiamarlo così, perché non riguarda una variabile e il suo momento coniugato bensì due variabili distinte) dell'andamento di prede e predatori è descritto dalle curve di livello di questa immagine:



Il punto centrale corrisponde al minimo della funzione  $H(c, v)$  ed è un punto di equilibrio stabile: il sistema oscilla in continuazione, su varie curve di livello, ma torna poi sempre in quel punto particolare. Il grafico qui sopra mostra chiaramente come variano prede e predatori nell'arco del tempo; infatti (si noti che le prede sono sull'asse delle ascisse, mentre i predatori sulle ordinate) il sistema inizia la sua evoluzione con le prede che aumentano di gran numero, corrispondente a un aumento, minore, dei predatori; quando però le prede sono in numero molto alto, i predatori iniziano ad aumentare di gran lunga, e di conseguenza le prede diminuiscono, fino a quando non saranno così poche che anche i predatori inizieranno a diminuire: in questo periodo, sia prede che predatori diminuiranno, tornando allo stato iniziale del sistema.

L'evoluzione prede-predatori è tutt'altro che scontata: ci sono due periodi in cui diminuiscono e aumentano entrambi, mentre, in altri due tratti, al diminuire di uno aumenta l'altro. Questo spiega la carenza di pesca nel dopoguerra: sia le prede che i predatori erano nel periodo di tempo in cui diminuivano, comportando la magra nel mare.

### 2.3.3 Accenno a più specie

Questo accade quando in ballo ci sono solo due specie. Ora proviamo a dare un accenno su cosa accade se, invece di due specie, ce ne fossero tre: aggiungiamo i lupi  $L$  al nostro ecosistema ideale, ipotizzando che volpi e lupi si trovino in un patto di non belligeranza e non si caccino a vicenda. In questo caso, le equazioni delle variazioni delle specie sono:

$$\begin{cases} \dot{c} = \alpha c - \beta(cv + cL) \\ \dot{v} = -\gamma v + \delta cv \\ \dot{L} = -\gamma' L + \delta cL \end{cases}$$

Come possiamo vedere, i conigli avranno vita dura: dovranno resistere a due tipi diversi di predatori. Tuttavia, non sono loro a essere i più minacciati: i due parametri  $\gamma$  e  $\gamma'$  indicano la resistenza della specie; se fosse  $\gamma' > \gamma$ , anche solo di poco, i lupi

inizierebbero a sparire esponenzialmente. Questo dimostra come l'equilibrio dinamico di un ecosistema sia in realtà molto fragile: all'entrata di una nuova specie, altre specie, anche se non vengono direttamente cacciate dal nuovo entrato, rischiano di scomparire in pochissimo tempo.

L'esempio delle equazioni di Lotka-Volterra dimostra molto chiaramente come il formalismo hamiltoniano abbia un largo uso nello studio dei casi reali di sistemi in evoluzione.

## 2.4 Parentesi di Poisson

Date due funzioni  $f(q/p/t)$  e  $g(q/p/t)$ , si definisce la parentesi di Poisson tra  $f$  e  $g$ :

$$[f, g] = \sum_{h=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_h} \frac{\partial g}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial g}{\partial q_h} \right)$$

L'espressione qui sopra si legge  $f$  poisson  $g$ . Questo elemento ha particolare importanza nella meccanica hamiltoniana, come vedremo nel prossimo modulo. Introduciamo intanto le tre proprietà delle parentesi di Poisson.

- **Antisimmetria.** Le parentesi di Poisson rispettano la proprietà dell'antisimmetria; infatti:

$$[g, f] = \sum_{h=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial q_h} \frac{\partial f}{\partial p_h} - \frac{\partial g}{\partial p_h} \frac{\partial f}{\partial q_h} \right) = -[f, g]$$

- **Bilinearità.** Le parentesi di Poisson sono bilineari, ovvero valgono:

$$\begin{aligned} \alpha[f, g] &= [\alpha f, g] = [f, \alpha g] \\ [(f_1 + f_2), g] &= [f_1, g] + [f_2, g] \\ [f, (g_1 + g_2)] &= [f, g_1] + [f, g_2] \end{aligned}$$

- Rispettano l'**identità di Jacobi**, per tre funzioni  $f, g, h$ :

$$[[f, g], h] + [[h, f], g] + [[g, h], f] = 0$$

Le parentesi di Poisson sono quindi un'operazione, dotata di proprietà, tra funzioni di variabili hamiltoniane. Quest'operazione fornisce quindi una struttura al formalismo hamiltoniano, ed è una struttura di tipo simplettico (si parla infatti di "struttura simplettica della meccanica hamiltoniana"). Vediamo adesso alcune caratteristiche principali delle parentesi di Poisson.

Siamo  $q_k$  e  $q_h$  indipendenti tra loro, e valga lo stesso per  $p_k$  e  $p_h$ ; allora vale:

$$[q_h, q_k] = \sum_{l=1}^n \left( \frac{\partial q_h}{\partial p_l} \frac{\partial q_k}{\partial p_l} - \frac{\partial q_h}{\partial p_l} \frac{\partial q_k}{\partial q_l} \right) = \delta_{lh} \cdot 0 - 0 \cdot \delta_{kl} = 0$$

Lo stesso risultato si ottiene per  $[p_h, p_k]$ ; i  $\delta_{lh}$  sono i delta di Kronecker, che valgono 1 se gli indici sono uguali ( $h = l$ ), valgono invece 0 in tutti gli altri casi. Consideriamo ora:

$$[q_h, p_k] = \sum_{l=1}^n \left( \frac{\partial q_h}{\partial q_l} \frac{\partial p_h}{\partial p_l} - \frac{\partial q_h}{\partial p_l} \frac{\partial p_h}{\partial q_l} \right) = \delta_{hl} \cdot \delta_{kl} = \delta_{hk}$$

## 2.5. Quantità conservate e quantità compatibili attraverso le parentesi di Poisson

Questo è molto interessante perché  $[q_h, p_k]$  vale 1 quando gli indici sono uguali, sono nulle in tutti gli altri casi.

Vediamo adesso come le equazioni canoniche di Hamilton riflettano la struttura simplettica del formalismo hamiltoniano; calcoliamo infatti:

$$[q_h, H] = \sum_{l=1}^n \left( \frac{\partial q_h}{\partial q_l} \frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial q_h}{\partial p_h} \frac{\partial H}{\partial q_l} \right) = \delta_{hl} \frac{\partial H}{\partial p_l} \xrightarrow{h=l} \frac{\partial H}{\partial p_h}$$

Che riflette la legge  $\dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h}$ ; allo stesso modo:

$$[p_h, H] = \sum_{l=1}^n \left( \frac{\partial p_h}{\partial q_l} \frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial p_h}{\partial p_l} \frac{\partial H}{\partial q_l} \right) = -\delta_{hl} \frac{\partial H}{\partial q_l} \xrightarrow{h=l} -\frac{\partial H}{\partial q_h}$$

Che riflette la legge  $\dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h}$ .

Un'altra utile applicazione delle parentesi di Poisson è che è possibile esprimere le derivate totali tramite questo strumento; vediamo come, data  $x(q/p/t)$ :

$$[x, H] + \frac{\partial x}{\partial t} = \sum_{h=1}^n \left( \frac{\partial x}{\partial q_h} \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_h}}_{\dot{q}_h} - \frac{\partial x}{\partial p_h} \underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_h}}_{-\dot{p}_h} \right) + \frac{\partial x}{\partial t} = \sum_{h=1}^n \left( \frac{\partial x}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial x}{\partial p_h} \dot{p}_h \right) + \frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x}$$

Un modo di esprimere la derivata totale è quindi  $\dot{x} = [x, H] + \frac{\partial x}{\partial t}$  e, in alcuni casi, è anche un metodo più semplice per calcolarla.

## 2.5 Quantità conservate e quantità compatibili attraverso le parentesi di Poisson

Come per la meccanica lagrangiana, anche nella meccanica hamiltoniana si possono trovare quantità che si conservano, ovvero che sono costanti nel tempo. Consideriamo per esempio due funzioni  $x(q/p/t)$  e  $y(q/p/t)$ ; dal modulo precedente possiamo scrivere le loro derivate totali:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [x, H] + \frac{\partial x}{\partial t} \\ \dot{y} &= [y, H] + \frac{\partial y}{\partial t} \end{aligned}$$

Ora, consideriamo appunto il caso in cui  $\dot{x} = \dot{y} = 0$ , ovvero le due funzioni  $x, y$  sono costanti nel tempo. Possiamo trovare una relazione tra le due che resti ancora costante. Prima, però, ricordiamo che se vale  $\dot{x} = \dot{y} = 0$  allora varranno:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= -[x, H] \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -[y, H] \end{aligned}$$

Dimostriamo ora che, sotto queste condizioni, si ha  $\frac{d}{dt}[x, y] = 0$ . Esplicitiamo il termine da dimostrare e svolgiamo i calcoli:

$$[[x, y], H] + \frac{\partial}{\partial t}[x, y] = [[x, y], H] + \left[ \frac{\partial x}{\partial t}, y \right] + \left[ x, \frac{\partial y}{\partial t} \right]$$

L'uguaglianza è resa possibile grazie alla bilinearità delle parentesi poissoniane; ora, ricordando le condizioni iniziali e le relazioni scritte sopra, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} & [x, y, H] + [-[x, H], y] + [x, -[y, H]] = \\ & = [x, y, H] + [H, x, y] + [y, H, x] = 0 \end{aligned}$$

Il passaggio dal primo al secondo passaggio è reso possibile attraverso la proprietà dell'**antisimmetria**, dove  $-[x, H] = [H, x]$ ; l'ultima riga, come possiamo notare, è proprio un'identità di Jacobi, e quindi, è vero che  $\frac{d}{dt}[x, y] = 0$ .

### 2.5.1 Quantità compatibili

Attraverso le parentesi di Poisson si può definire una relazione tra due funzioni:

◇ **Definizione** Due quantità  $x$  e  $y$  si dicono **compatibili** se

$$[x, y] = 0$$

Vediamo due casi immediati di quantità compatibili.

Il primo è quando  $x$  e  $y$  sono due quantità completamente scollegate tra loro, per esempio:

$$x(q_1, q_2, p_3, p_4) \quad y(q_5, q_6, p_7, p_8)$$

Se andiamo a esplicitare la parentesi di poisson tra le due:

$$[x, y] = \sum_{h=1}^n \left( \frac{\partial x}{\partial q_h} \frac{\partial y}{\partial p_h} - \frac{\partial x}{\partial p_h} \frac{\partial y}{\partial q_h} \right) = 0$$

Questo perché, per  $h = 1, \dots, 8$  capita o che la  $y$  sia indipendente a  $q_h$  o  $p_h$ , o il contrario, ottenendo derivate parziali nulle.

Il secondo caso è quando  $y = \phi(x)$ , ovvero  $y$  è una funzione di  $x$ . Esplicitando anche qui la parentesi:

$$[x, y] = \sum_{h=1}^n \left( \frac{\partial x}{\partial q_h} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p_h} - \frac{\partial x}{\partial p_h} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_h} \right) = 0$$

I termini nella parentesi sono esattamente uguali (per il teorema della derivata di funzioni composte).

La domanda, lecita, che può venire spontanea è: perché ci interessano così tanto le quantità compatibili? La risposta risiede nel fatto che il formalismo hamiltoniano è la base formale della meccanica quantistica, e in questa le parentesi di Poisson hanno la funzione di commutatori. In quantistica, se due quantità non commutano, ovvero la loro parentesi non è nulla, allora non è possibile determinarle con precisione arbitraria. Da qui deriva il **principio di indeterminazione di Heisenberg**: gli operatori (in meccanica quantistica non si parla più di coordinate o variabili, ma di operatori) posizione e quantità di moto non commutano, ovvero:

$$[\hat{x}, \hat{p}] \neq 0$$

Ed è per questo motivo che, se conosco con altissima precisione la posizione, non so quasi nulla della velocità e viceversa. Il formalismo hamiltoniano, come vedremo anche per l'azione, è importante in fisica proprio per il suo utilizzo in meccanica quantistica dove, sebbene il paradigma di base sia completamente diverso (l'invito è a cercare informazione sull'epistemologia di Kuhn), è rimasto qualcosa dalla meccanica classica: la struttura formale. Fondamentalmente, è anche per questo che, dopo un secolo e mezzo, si studia ancora la teoria di Hamilton.

## 2.6 Il problema della brachistocrona, elementi di analisi funzionale

Il problema della brachistocrona è un famoso quesito risalente addirittura all'antica Grecia; il problema presentato è molto semplice: bisogna far giungere un grave da un punto iniziale (l'origine nell'immagine qui sotto) a un punto finale (il punto  $(a, h)$ ) nel minor tempo possibile, ricordando che il grave è soggetto a forza peso. Qual è il percorso migliore che minimizzi il tempo impiegato? Ovvero, qual è il migliore scivolo?

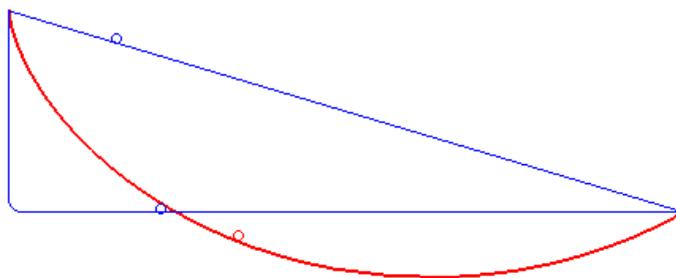


Fig. 2.1: Nell'immagine sono riportate alcune possibili traiettorie; in rosso una traiettoria simile a quella cercata

Come può immediatamente essere notato, questo problema non riguarda più il variare di una variabile, bensì varia la funzione. Scriviamo l'energia totale del sistema:

$$\frac{1}{2}m(v(x))^2 = mgz(x)$$

Dove  $z(x)$  è la traiettoria della curva seguita dal grave; da questa espressione ricaviamo che la velocità è  $v(x) = \sqrt{2gz(x)}$ ; inoltre, poiché vale  $v(x) = \frac{ds}{dt}$ , otteniamo la relazione  $dt = \frac{ds}{v(x)}$ . Analizziamo meglio lo spostamento infinitesimo  $ds$ , che vale  $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2}$ ; questo può essere anche scritto:

$$ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

Il tempo impiegato dal grave è dato da:

$$\begin{aligned} T &= \int_0^T dt = \int_0^T \frac{ds}{v(x)} = \\ &= \int_0^T \frac{ds}{\sqrt{2gz(x)}} = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gz(x)}} dx \end{aligned}$$

Come possiamo vedere, il tempo  $T$  è funzione della curva  $z(x)$  percorsa; sarà quindi  $T[z(x)]$ . Si indica con le parentesi quadre, e in matematica è un oggetto noto come **funzionale**: a seconda della traiettoria percorsa,  $T$  assumerà valori sempre diversi. Quello che noi cerchiamo è proprio il valore minimo, quindi dobbiamo minimizzare un funzionale. Come possiamo fare?

### 2.6.1 Elementi di analisi funzionale: variazione di un funzionale

Consideriamo la funzione (generica)  $L(q, q', t)$ . Siano tutte le funzioni  $q(t) \in C^2$ , con  $t \in (a, b)$ ; l'espressione  $q'$  è la derivata prima della funzione, ovvero  $q' = \dot{q}(t) = \frac{dq}{dt}$ . Chiamiamo:

$$I[q] = \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$$

Questo è un funzionale della funzione  $q(t)$ . Come varia  $I$  al variare di  $q$ ? Scelgo la funzione  $q(t)$  come la seguente funzione particolare:

$$q(t) = \bar{q}(t) + \delta q(t) \quad \Rightarrow \quad \delta q(t) = \alpha \eta(t) \in C^2$$

Con le particolari condizioni al contorno  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  e  $\alpha \approx d\alpha$ , ovvero molto piccolo. Quello che sto facendo, in realtà, è semplicemente variare la funzione  $q(t)$  mantenendone fissi gli estremi, come nella figura seguente (in rosso  $q(t)$ , in tratteggiato le  $\eta(t)$ , mantenendo fissi gli estremi  $q(a) = A$  e  $q(b) = B$ ).

Con la funzione  $q(t)$  così definita, il funzionale diventa:

$$I_{[q]}(\alpha) = \int_a^b dt L(\bar{q}(t) + \alpha \eta(t); \dot{\bar{q}}(t) + \alpha \dot{\eta}(t); t)$$

In questo modo abbiamo trasformato il funzionale in una funzione che dipende solo dal parametro  $\alpha$ , perché  $\bar{q}(t)$  è fissata. Di una funzione sappiamo scrivere la sua derivata, che sarà quindi:

$$\delta I = \alpha \left( \frac{dI}{d\alpha} \right)_\alpha$$

La precedente notazione prevede  $\alpha = d\alpha$  perché, per come è presa  $\bar{q}(t)$ , il parametro  $\alpha \ll 1$  è molto piccolo; inoltre, l'indice basso della derivata indica che quella va calcolata per  $\alpha = 0$ . Quando  $I$  varia, ovviamente, introduciamo un  $\alpha$  diverso da zero, quando invece  $\alpha = 0$  si ha che  $q(t) = \bar{q}(t)$ . Al variare di  $\alpha$ , quindi, variano sia  $I$  che  $q(t)$ . Dalla precedente espressione possiamo calcolare  $\delta I$ :

$$\delta I = \alpha \int_a^b dt \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\eta} \right] = \alpha \int_a^b \frac{\partial L}{\partial q} \eta dt + \alpha \int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\eta} dt$$

Il secondo membro lo integriamo per parti, ottenendo così:

$$\delta I = \alpha \left( \int_a^b dt \frac{\partial L}{\partial q} \eta + \left[ \eta \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \eta \right)$$

Ricordando che, per definizione,  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ , otteniamo l'espressione:

$$\delta I = \alpha \int_a^b dt \left( \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \eta(t) \right)$$

Per poter trovare un minimo, il nostro obiettivo,  $\delta I$  deve essere nullo, cosicché  $I$  resti stazionario. Allora deve valere:

$$\delta I = \alpha \int_a^b dt \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \eta(t) \right] = 0$$

Ricordiamo ancora una volta che  $\eta(t)$  è arbitraria, purché si annulli agli estremi. Esiste un lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, che ora dimostreremo.

Sia  $\int_a^b \phi(t) \eta(t) dt = 0 \quad \forall \eta(t) \in C^2$ , con  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ . Allora deve necessariamente essere  $\phi(t) = 0$ .

La condizione necessaria e sufficiente affinché  $\int_a^b \phi(t) \eta(t) dt = 0$  è che  $\phi(t) = 0$ . Che è sufficiente è banale, non perdiamo neanche tempo a mostrarlo; dobbiamo dimostrare che è necessaria.

Procediamo per assurdo. Sia  $\eta(t)$  arbitraria e  $\phi(t) \neq 0$ , per esempio una sinusoidale. In un periodo vale  $\int_a^b \phi(t) dt = 0$ . Allora prendiamo  $\eta(t)$  così definita:

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & t < \xi_1 \\ 0 & t > \xi_2 \\ (t - \xi_1)^n (\xi_2 - t)^m & \xi_1 < t < \xi_2, \text{ con } n, m > 2 \end{cases}$$

Questo supponendo che esisterà un  $\xi_1 < \xi < \xi_2$  tale che  $\phi(\xi) \neq 0$ ;  $\phi(\xi) > 0$ . Secondo queste ipotesi, per  $\eta(t)$  così definita (ricordiamo che è arbitraria), per  $\phi(t) \neq 0$ , si ha che:

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \phi(t) \eta(t) dt \neq 0$$

Il che è contrario all'ipotesi del lemma, quindi, per assurdo, deve necessariamente essere  $\phi(t) = 0$ .

Quindi, per questo lemma appena dimostrato, affinché il funzionale resti statico deve necessariamente essere:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

Ciò significa che, dato un funzionale definito come sopra, di una funzione  $L(q, \dot{q}, t)$ , affinché questo resti stazionario la funzione considerata deve soddisfare questa equazione differenziale appena scritta, con le condizioni a contorno  $\bar{q}(a) = A$  e  $\bar{q}(b) = B$ .

Nel prossimo modulo vedremo come tutto ciò ha a che fare con quello che stiamo studiando.

## 2.7 Il principio variazionale di Hamilton, condizioni alla Dirichlet

Riprendiamo in questo modulo il discorso concluso nello scorso; come abbiamo visto, dato una generica funzione  $L(q, \dot{q}, t)$ , il funzionale definito come:

$$I = \int_a^b dt L(q(t), \dot{q}(t), t)$$

è stazionario solo se la funzione  $L$  soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

Ora, di solito, per indicare una funzione si usa la notazione  $f(x(t), \dot{x}(t), t)$ . Se abbiamo chiamato la nostra funzione  $L(q(t), \dot{q}(t), t)$  non è per confondervi, perché quella può essere, anzi, è la lagrangiana. Quello che abbiamo dimostrato nello scorso modulo si chiama **principio variazionale di Hamilton**, e ora lo vedremo e spiegheremo più nel dettaglio. Prima di tutto, in meccanica hamiltoniana si definisce il seguente funzionale formale:

◇ **Definizione** Si definisce **azione di un sistema fisico** il funzionale:

$$A[q] = \int_{t_0}^t dt L(q(t), \dot{q}(t); t)$$

Dove  $L(q(t), \dot{q}(t), t)$  è la funzione lagrangiana del sistema.

Nello scorso modulo abbiamo dimostrato che, se la lagrangiana soddisfa l'equazione differenziale scritta sopra, allora questo funzionale è stazionario. Quell'equazione corrisponde esattamente alle equazioni di Eulero-Lagrange. Quindi, ciò che abbiamo fatto è stato dimostrare che, se la lagrangiana di un sistema fisico rispetta le equazioni di Eulero-Lagrange, allora il funzionale azione resta stazionario. Questo è esprimibile anche nel seguente modo.

### 2.7.1 Principio variazionale di Hamilton

Sia un sistema fisico descritto da una curva  $q(t)$ ; se la lagrangiana di questa curva soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange, ovvero se il sistema compie il suo moto naturale, la curva  $q(t)$  rende stazionario il funzionale azione, di solito lo minimizza. In altre parole, un sistema fisico segue una traiettoria che rende sempre stazionaria l'azione.

Ora, quello che abbiamo appena detto (e dimostrato) è, in tutti i sensi, un modo diverso di vedere la realtà. Ciò che il principio variazionale afferma è che, se voi prendete un oggetto e lo lanciate in faccia a qualcuno, questo seguirà sempre quella particolare traiettoria che rende minima l'azione. In pratica, nella natura, tutto ciò che segue il suo moto naturale rende minimo un numero puramente formale, ovvero creato *ad hoc*, caratteristico di quel sistema. Se non vi è ben chiaro il messaggio, consigliamo fortemente di rileggere questo paragrafo. Se, invece, vi è chiaro, benvenuti nel nuovo modo di vedere le cose.

Quando abbiamo parlato delle parentesi di Poisson, abbiamo fatto l'esempio della meccanica quantistica e del suo utilizzo in quell'ambito, dicendo anche che il formalismo hamiltoniano era alla base della teoria quantomeccanica. Ovviamente, in questa teoria, anche l'azione ha un'importanza rilevante, soprattutto nella teoria ondulatoria di Schrödinger: vediamo come.

Quando passiamo allo studio meccanico delle particelle (trascurando gli effetti relativistici e gli effetti elettromagnetici, in pratica studiando gli effetti secondo la teoria classica della meccanica quantistica) non ha più senso parlare di traiettoria descritta da una particella: si parla, infatti, di **ampiezza di probabilità** che quella particella compia una determinata traiettoria per arrivare da un punto a un altro

dello spazio. Quest'ampiezza di probabilità è determinata dalla somma di tutte le possibili traiettorie che la particella può compiere, pesate per la loro probabilità di essere compiute. Quest'ampiezza è descritta come

$$e^{\frac{i}{\hbar}A}$$

$A$  rappresenta l'azione della particella. Questo significa che la traiettoria che minimizza l'azione è quella con più probabilità di essere compiuta. Ancora una volta, il modo di vedere le cose cambia totalmente, e questo è un altro motivo, forse il più importante, del perché il formalismo hamiltoniano è così importante: pur descrivendo fenomeni classici di meccanica, questo nuovo modo di vedere le cose, oltre a essere intrigante di per sé, rende anche il passaggio alla fisica quantistica meno drammatico.

### 2.7.2 Condizioni alla Dirichlet

Abbiamo visto che, dato un sistema di cui è possibile scrivere la lagrangiana, questo, tra tutte le traiettorie possibili, compie l'unica che rende minima l'azione. Il fatto che sia unica non è banale, e non sempre è vero. Le condizioni al contorno che abbiamo dato nello studio della variazione dell'azione, infatti, non sono le classiche condizioni alla Cauchy, bensì sono diverse: si chiamano condizioni alla Dirichlet.

◇ **Definizione** Si chiamano **condizioni alla Dirichlet** di un'equazione differenziale le condizioni del tipo:

$$\begin{cases} q(a) = A \\ q(b) = B \end{cases}$$

Dove  $a, b$  sono i tempi iniziale e finale e  $A, B$  sono le posizioni iniziale e finale.

Per quanto riguarda le condizioni alla Cauchy, sappiamo che queste fanno sì che la soluzione sia unica. Per le condizioni alla Dirichlet, invece, nessuno ce lo assicura; se però riuscissimo a dimostrare che sono equivalenti, allora anche le condizioni alla Dirichlet renderebbero unica la soluzione. Facciamo due esempi diversi.

Consideriamo anzitutto un grave in caduta libera. L'equazione del suo moto è:

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

Secondo le condizioni alla Cauchy, date  $x_0, v_0$  sappiamo con precisione come evolve il sistema in tutti i tempi. Se dessimo, invece, delle condizioni alla Dirichlet? Poniamo:

$$\begin{cases} x(a) = v_0 a + \frac{1}{2} g a^2 \\ x(b) = v_0 b + \frac{1}{2} g b^2 \end{cases}$$

È immediato notare che possiamo facilmente, da queste condizioni, ricavare  $v_0$ , riportandoci quindi alle condizioni alla Cauchy. Ne concludiamo che, in questo caso, le due condizioni sono equivalenti e la soluzione è unica per entrambe, coincidente.

Nel secondo esempio, come sistema fisico prendiamo un oscillatore armonico, per semplicità non smorzato né forzato. L'equazione del suo moto è:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

In questo caso, poiché sono presenti funzioni periodiche, se dessimo delle condizioni alla Dirichlet non troveremo un'unica soluzione, bensì ne troveremo tante diverse. In questo caso, le condizioni alla Dirichlet non assicurano l'unicità della soluzione.

L'ultimo esempio considerato rappresenta proprio il naturale passaggio alla meccanica quantistica, dove abbiamo a che fare con sistemi altamente oscillanti (ovvero che oscillano sempre, non che oscillano più forte); in quei casi, non esistono più traiettorie certe, bensì esisterà solo la probabilità di trovarsi in  $B$  al tempo  $t = b$ .

### 2.7.3 Soluzione al problema della brachistocrona

Non ci siamo dimenticati del problema da cui siamo partiti, e ora torniamo sui nostri passi e diamo la soluzione al problema. Lo scivolo di forma migliore che minimizzi il tempo impiegato è un ramo di cicloide, descritto dalle funzioni:

$$\begin{cases} z = r(1 - \cos(\theta)) & \theta \geq 0 \\ x = r(\theta - \sin(\theta)) & r = \text{cost} \end{cases}$$

Una cicloide ha una forma simile alla seguente:

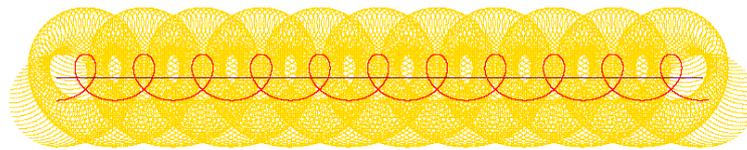


Fig. 2.2: In rosso un esempio di cicloide

Ovviamente, se il punto di arrivo si trova oltre il punto in cui la curva si arrotola su se stessa, la soluzione cercata non è quella (nessuno scivolo ragionevole si arrotola su se stesso), ma ne esisterà comunque un'altra che renderà minimo il tempo di discesa.

## 2.8 Il principio variazionale di Hamilton ampliato

Abbiamo dimostrato, nei moduli precedenti, il principio variazionale di Hamilton, osservando come un sistema di cui è possibile scrivere la lagrangiana compie una traiettoria che rende stazionario, generalmente minimo, il funzionale formale azione. Questo principio - in realtà un teorema, perché abbiamo potuto dimostrarlo (per altri esempi famosi di teoremi dimostrabili passati alla storia sotto il nome di principio, ci rifacciamo al principio di indeterminazione) - parla di lagrangiana, ma viene studiato nel formalismo hamiltoniano. È immediato quindi chiedersi se una cosa simile è possibile anche riguardo l'hamiltoniana; la risposta è positiva e va sotto il nome di **principio variazionale di Hamilton ampliato**. L'aggettivo ampliato si riferisce al metodo utilizzato per studiare la variazione del funzionale formale: non varieremo solo la traiettoria  $q(t)$ , ma anche il suo momento coniugato  $p(t)$ . Procediamo per gradi.

Siano  $q_h, p_h$  le variabili canoniche di un sistema, prese indipendenti tra loro, che soddisfano le equazioni canoniche di Hamilton. Studiamo di questo sistema le variazioni  $\delta q_h$  e  $\delta p_h$ . Per poter visualizzare al meglio le variazioni, prendiamo lo spazio delle fasi dell'oscillatore armonico.

Come per il principio non ampliato, non facciamo variare  $q_1$  né  $q_2$ , ovvero  $\delta q_1 = \delta q_2 = 0$ . Si definisce **azione ampliata** il funzionale:

$$A' = \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \sum_{h=1}^n p_h \dot{q}_h - H(q/p/t) \right)$$

La prima osservazione, non banale, è che l'azione ampliata non è uguale all'azione, ovvero  $A \neq A'$ . Procediamo come nel caso precedente, studiandone la variazione. In questo non varia solo la traiettoria  $q(t)$  ma varia anche  $p(t)$ . Nella seguente dimostrazione ci limitiamo, per semplicità di notazione, al caso unidimensionale (gradi di libertà  $n = 1$ ); nel caso multidimensionale è del tutto identica, basta aggiungere la sommatoria. Scriviamo le funzioni che variano come:

$$\begin{aligned} q(t) &= q(t) + \delta q(t) \\ p(t) &= p(t) + \delta p(t) \end{aligned}$$

Possiamo ora scrivere la variazione del funzionale:

$$\delta A' = \int_{t_0}^{t_1} dt \left( p \delta \dot{q} + \dot{q} \delta p - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \right)$$

Sviluppiamo per parti il fattore  $\int_{t_0}^{t_1} dt p \delta \dot{q}$ , ottenendo  $p \delta q \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} dt \dot{p} \delta q$ ; sostituendo:

$$p \delta q \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} dt \left( -\dot{q} \delta q + \dot{q} \delta p - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \right)$$

Ricordiamo ora che come condizioni abbiamo posto  $\delta q(t_1) = \delta q(t_0) = 0$ , e che il nostro sistema soddisfa le equazioni canoniche di Hamilton, che compaiono qui. Sostituendo e raggruppando, otteniamo:

$$\delta A' = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[ \left( -\dot{p} - \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q + \left( \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p \right] = 0$$

Tutto questo sempre tenendo in considerazione che  $\delta q, \delta p$  sono arbitrari. Abbiamo appena dimostrato che, per un sistema che compie il suo moto normale, di cui è possibile scrivere l'hamiltoniana e le cui variabili canoniche soddisfano le equazioni canoniche, il funzionale formale azione ampliata è stazionario. Per meglio esprimerci:

### Principio di Hamilton ampliato

Se un sistema segue la sua traiettoria normale, allora l'azione ampliata è stazionaria, generalmente minima. Ciò vuol dire che, tra tutte le traiettorie possibili, il sistema compie la particolare  $q(t)$ , di momento coniugato  $p(t)$ , tali che questi due elementi minimizzino l'azione ampliata.

Esattamente come per il principio variazionale non ampliato, questo risultato è di notevole interesse, seppur aspettato (poiché l'hamiltoniana deriva direttamente dalla lagrangiana, era auspicabile ottenere un risultato simile).

## 2.9 Funzione principale di Hamilton

Trattiamo adesso un argomento che termina lo studio variazionale fatto finora; potrà sembrare inconcludente a una prima occhiata, ma più avanti nel corso torneremo a trattare questo argomento specificamente.

Dato il funzionale azione ampliata:

$$A'[q, p] = \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \sum_{h=1}^n p_h \dot{q}_h - H(q/p/t) \right)$$

Sappiamo essere funzione delle traiettorie  $q(t)$  e dei rispettivi momenti coniugati  $p(t)$ . Sappiamo anche che, scelte traiettorie e momenti coniugati che soddisfano le equazioni canoniche, questo funzionale resta stazionario. Proprio da questo punto partiamo, per modificare il funzionale in una funzione. Scegliamo, appunto, non traiettorie  $q(t)$  e  $p(t)$  arbitrarie, bensì scegliamo proprio quelle che minimizzano l'azione ampliata. A questo punto,  $A'$  non è più un funzionale, ma diventa un numero reale preciso. Tuttavia, questo può essere fatto variare, in particolare rendendolo funzione di diverse variabili. Come variabili particolari scegliamo  $q_0, q_1, t_0, t_1$ , ovvero posizioni e tempi iniziali e finali. Ottengo quella che viene definita come **funzione principale di Hamilton**:

$$S(q_0, t_0, q_1, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} d\tau \left( \sum_{h=1}^n p_h \dot{q}_h - H(q/p/t) \right)$$

Questa è una funzione di quattro variabili che deriva direttamente dall'azione ampliata: semplicemente, si varia il valore dell'azione ampliata variando posizioni e tempi iniziali e finali. Quali equazioni deve soddisfare questa funzione? Vediamole, variando una a una le variabili.

Partiamo variando  $\delta q$ , esprimiamo  $\delta S$  in funzione di  $\delta q$ .

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} d\tau \left( \delta p \dot{q} + p \delta \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \right)$$

Come ci siamo abituati, integriamo per parti il termine  $p \delta \dot{q}$ :

$$p \delta q \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left[ \delta p \left( \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) - \delta q \left( -\dot{p} - \frac{\partial H}{\partial q} \right) \right] d\tau$$

Le variabili  $p$  e  $q$  non sono arbitrarie, sono quelle che minimizzano l'azione ampliata e che rispettano le equazioni canoniche, quindi tutto il termine integrando è identicamente nullo, quindi otteniamo che:

$$\delta S = p \delta q \Big|_{t_0}^{t_1} = p \delta q(t) - p_0 \delta q_0$$

Da questo risultato ottengo già le prime due relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial q} &= p \\ \frac{\partial S}{\partial q_0} &= -p_0 \end{aligned}$$

Adesso facciamo variare  $\delta t$ ; vediamo l'espressione  $\delta S$ . Per il teorema fondamentale del calcolo vale:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\int_{t_0}^t d\tau(p\dot{q} - H)}{dt} = p\dot{q} - H$$

Un altro modo di esprimere  $\delta S$  è quello di calcolare la derivata totale:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q} \dot{q}$$

Utilizzando le espressioni già trovate, avendo  $\frac{\partial S}{\partial q} = p$ , vale:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + p\dot{q}$$

Ora uguagliamo questa espressione con quella ottenuta sfruttando il teorema fondamentale del calcolo:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + p\dot{q} = p\dot{q} - H$$

Otteniamo quindi la terza espressione:  $\frac{\partial S}{\partial t} = -H$

Ora facciamo variare  $\delta t_0$ ; come prima, per il teorema fondamentale del calcolo vale:

$$\frac{dS}{dt_0} = \frac{\int_{t_0}^t d\tau(p\dot{q} - H)}{dt_0} = -\frac{\int_{t_0}^t d\tau(p\dot{q} - H)}{dt_0} = -p\dot{q} + H(q_0, p_0, t_0)$$

Calcolando esplicitamente la derivata totale, invece:

$$\frac{dS}{dt_0} = -\frac{\partial S}{\partial t_0} + \frac{\partial S}{\partial q_0} \dot{q}_0$$

Sfruttando le equazioni prima ottenute  $\frac{\partial S}{\partial q_0} = -p_0$ , otteniamo:

$$\frac{dS}{dt_0} = \frac{\partial S}{\partial t_0} - p_0 \dot{q}_0$$

Uguagliando le due espressioni trovate:

$$-p_0 \dot{q}_0 + H(q_0, p_0, t_0) = \frac{\partial S}{\partial t_0} - p_0 \dot{q}_0$$

Ottenendo l'ultima espressione cercata:  $\frac{\partial S}{\partial t_0} = H(q_0, p_0, t_0)$ .

Le espressioni che abbiamo ottenuto sono le seguenti e vengono chiamate **equazioni di Hamilton-Jacobi**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial q} = p \\ \frac{\partial S}{\partial q_0} = -p_0 \\ \frac{\partial S}{\partial t} = -H(q, p, t) \\ \frac{\partial S}{\partial t_0} = H(q_0, p_0, t_0) \end{array} \right.$$

Queste espressioni ci permettono di studiare l'evoluzione della funzione principale di Hamilton al variare delle sue variabili; come notiamo, per poter conoscere la funzione dobbiamo prima conoscere  $q(t)$  e  $p(t)$ , perché sappiamo che queste sono quelle particolari variabili che minimizzano l'azione.

## 2.10 Trasformazioni canoniche

### 2.10.1 Trasformazioni canoniche e condizione di Lie

Usciamo per un momento dalla descrizione quantitativa dello stato dinamico di un sistema fisico, tornando alle variabili attraverso cui esso è descritto. Sappiamo che è possibile scrivere, per un sistema, la funzione hamiltoniana  $H(q/p/t)$  e si può descrivere l'evoluzione temporale del sistema attraverso le equazioni canoniche, che sono un set di  $2n$  equazioni differenziali nelle variabili canoniche.

Se invece volessimo cambiare set di variabili canoniche, passando alle nuove variabili  $(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)$ , in che modo possiamo esser certi che queste rispettino ancora le equazioni canoniche di Hamilton? Purtroppo, non c'è un modo per sapere immediatamente se questo accade; necessitiamo di trovare una trasformazione che ci faccia passare dalle vecchie variabili, in cui valgono le equazioni canoniche, alle nuove, mantenendo invariata la struttura delle equazioni canoniche, ovvero una trasformazione dalle  $(q, p)$  alle  $(Q, P)$  che gode della proprietà che esista una funzione  $H'$  tale che questa descriva l'evoluzione temporale del sistema descritto da  $(Q, P)$ . Se esiste, questa trasformazione prende il nome di trasformazione canonica:

$$(q, p) \leftrightarrow (Q, P)$$

Questa trasformazione deve quindi essere biunivoca e devono valere le equazioni canoniche sia nelle variabili  $(q, p)$  descritte con la funzione  $H$ , sia nelle nuove variabili  $(Q, P)$  descritte dalla funzione  $H'$ . Un caso particolare è quanto  $H(q(Q, P), p(Q, P)) = H'(Q, P)$ : in questo caso la **trasformazione** si dice **completamente canonica**. Affinché quindi una trasformazione sia canonica deve essere il determinante jacobiano della trasformazione non nullo, ovvero:

$$\det \left( \frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} \right) = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial Q_1} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial Q_1} & \frac{\partial p_1}{\partial P_1} & \dots & \frac{\partial p_n}{\partial P_1} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial q_n}{\partial Q_n} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial Q_n} & \frac{\partial p_1}{\partial P_n} & \dots & \frac{\partial p_n}{\partial P_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

Detto questo, quale condizione deve soddisfare la trasformazione affinché sia canonica?

**Teorema (condizione di Lie)**

Affinché una trasformazione sia canonica, deve valere la **condizione di Lie**:

$$\sum_{h=1}^n p_h dq_h \rightarrow \lambda \left( \sum_{h=1}^n P_h dQ_h \right) + \Psi dt + dF$$

Questa condizione è necessaria e sufficiente affinché la trasformazione sia canonica. Il coefficiente  $\lambda \in \mathbb{R}$  è un numero reale e le due funzioni  $\psi, F$  sono due qualsiasi funzioni dello spazio delle fasi, ovvero funzioni delle variabili  $\psi(q/p/t)$  e  $F(q/p/t)$ .

Osserviamo come la costante  $\lambda$  tenga conto delle dimensioni fisiche: nel passaggio dalle  $(q, p)$  alle  $(Q, P)$  si può passare da qualsiasi dimensione fisica a qualsiasi altra, e la costante  $\lambda$  sistema le dimensioni affinché la trasformazione abbia senso dimensionalmente. La condizione di Lie può essere scritta anche nella forma seguente:

$$\sum_{h=1}^n p_h dq_h - \lambda \sum_{h=1}^n P_h dQ_h - \Psi dt = dF$$

In questo caso notiamo come  $dF$  sia un differenziale esatto. La funzione  $F$  viene chiamata funzione generatrice della trasformazione canonica.

### Dimostrazione

Dimostriamo solo che la condizione di Lie è sufficiente. Ricordiamo che, se le variabili  $(q, p)$  soddisfano le equazioni di Hamilton, queste rendono minimo il funzionale azione ampliata:

$$\delta A' = \delta \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \sum_{h=1}^n p_h \dot{q}_h - H \right) = 0$$

Nell'espressione del funzionale, sostituiamo al posto di  $\sum_{h=1}^n p_h \dot{q}_h$  la condizione di Lie; per semplicità di notazione, consideriamo  $n = 1$ , un solo grado di libertà; nel caso generale la dimostrazione è identica, basta tener conto della sommatoria.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt \left( P\dot{Q} - H + \Psi + \frac{dF}{dt} \right)$$

Chiamo  $-(H - \Psi) = H'$ ; considerato questo:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt \left( P\dot{Q} - H' + \frac{dF}{dt} \right) = \delta \int_{t_0}^{t_1} dt (P\dot{Q} - H') + \left[ \delta F \right]_{t_0}^{t_1}$$

L'ultimo membro dell'addizione è dato dal teorema fondamentale del calcolo:  $\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{dF}{dt} = \delta F \Big|_{t_0}^{t_1}$ . Consideriamo proprio questo valore. Per l'azione ampliata valgono  $\delta q_0 = \delta q_1 = 0$ . Se  $\delta F$  è una funzione solo delle  $q$ , allora  $\delta F = 0$ . Ma se fosse funzione anche delle  $p$ , studiando l'azione non ampliata, in cui anche  $\delta p_0 = \delta p_1 = 0$ , allora si ha che  $\delta F = 0$  in qualsiasi caso. Allora, il funzionale azione ampliata nelle nuove variabili hamiltoniane è stazionario:

$$\delta A' = \delta \int_{t_0}^{t_1} dt (P\dot{Q} - H') = 0$$

Quindi le nuove variabili rispettano le equazioni canoniche di Hamilton.

Il calcolo della funzione generatrice di una trasformazione canonica è identico al verificare che un campo vettoriale sia conservativo o meno.

### 2.10.2 Funzioni generatrici notevoli

Studieremo ora delle trasformazioni canoniche con diverse funzioni generatrici note. Consideriamo una generica trasformazione  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ , questa sarà canonica se esiste  $H'$  tale che:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} & \dot{Q} &= \frac{\partial H'}{\partial P} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} & \dot{P} &= -\frac{\partial H'}{\partial Q}\end{aligned}$$

Inoltre, la condizione necessaria e sufficiente affinché sia canonica è la condizione di Lie:

$$\sum_{h=1}^n p_h dq_h = \sum_{h=1}^n P_h dQ_h + \Psi dt + dF$$

Consideriamo allora diverse funzioni generatrici. Partiamo dal primo caso, quello in  $F_1(q, Q, t)$ , ovvero funzione solo delle  $q$  e  $Q$ . Da qui in avanti considereremo un solo grado di libertà, con l'osservazione che in più gradi basta aggiungere la sommatoria. Scriviamoci le nuove variabili in funzione delle vecchie:

$$Q(q, p, t) \quad P(q, p, t)$$

Allora possiamo scrivere il differenziale esatto  $dF_1$ :

$$dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial q} dq + \frac{\partial F_1}{\partial Q} dQ + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt$$

Sostituendolo nella condizione di Lie:

$$pdq - PdQ = \Psi dt + \frac{\partial F_1}{\partial q} dq + \frac{\partial F_1}{\partial Q} dQ + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt$$

Supponiamo che sia soddisfatta la condizione di Lie; devono quindi valere le condizioni:

$$\begin{aligned}p &= \frac{\partial F_1}{\partial q} \\ P &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \\ \Psi &= -\frac{\partial F_1}{\partial t}\end{aligned}$$

Ricordando che  $H' = H - \Psi$  abbiamo che:  $H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$ . Le tre relazioni scritte qui sopra possono essere sfruttate per esplicitare le nuove variabili in funzione delle vecchie.

Cambiamo funzione generatrice e prendiamo  $F_2(q, P, t)$ , funzione delle  $q$  e delle  $P$ . Per far ciò, partiamo da  $F_1$  e sostituiamo le  $Q$  con le  $P$  attraverso la trasformata di Legendre:

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + PQ$$

Da cui otteniamo che:

$$dF_1 = dF_2 - (PdQ + QdP)$$

Sostituendolo nella condizione di Lie (scritta sopra lì):

$$pdq - PdQ = \Psi dt + dF_2 - (PdQ + QdP)$$

Otteniamo la nuova condizione

$$dF_2 = pdq - Qdp - \Psi dt$$

Esplicitando  $dF_2$ :

$$\frac{\partial F_2}{\partial q} dq + \frac{\partial F_2}{\partial P} dP + \frac{\partial F_2}{\partial t} dt + \Psi dt = pdq - QdP$$

Otteniamo le nuove relazioni:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F_2}{\partial q} \\ Q &= \frac{\partial F_2}{\partial P} \\ \Psi &= -\frac{\partial F_2}{\partial t} \end{aligned}$$

Passiamo adesso alla funzione  $F_3(p, Q, t)$ ; con la trasformata di Legendre, vale:

$$F_3(p, Q, t) = F_1 - pq$$

Da cui:

$$dF_1 = dF_3 + (pdq + qdp)$$

Sostituendo nella condizione di Lie:

$$pdq - PdQ = \Psi dt + dF_1 + pdq qdp$$

Otteniamo l'espressione:

$$\frac{\partial F_3}{\partial p} dp + \frac{\partial F_3}{\partial Q} dQ + \frac{\partial F_3}{\partial t} dt + \Psi dt = -qdp - PdQ$$

Le relazioni riguardo questa funzione generatrice sono:

$$\begin{aligned} q &= -\frac{\partial F_3}{\partial p} \\ P &= -\frac{\partial F_3}{\partial Q} \\ \Psi &= -\frac{\partial F_3}{\partial t} \end{aligned}$$

La quarta combinazione di variabili si riassume nella funzione  $F_4(p, P, t)$ . Abbiamo:

$$F_4(p, P, t) = F_1 + (-pq + PQ)$$

Il differenziale è:

$$dF_1 = dF_4 + pdq + qdp - PdQ - QdP$$

Sostituendo come al solito nella condizione di Lie:

$$\begin{aligned} pdq - PdQ &= \Psi dt + dF_4 + pdq + qdp - PdQ - QdP \\ QdP - PdQ &= \Psi dt + dF_4 = \Psi dt + \frac{\partial F_4}{\partial p} dp + \frac{\partial F_4}{\partial P} dP + \frac{\partial F_4}{\partial t} dt \end{aligned}$$

Otteniamo le relazioni:

$$\begin{aligned} q &= -\frac{\partial F_4}{\partial p} \\ Q &= \frac{\partial F_4}{\partial P} \\ \Psi &= H' - H = -\frac{\partial F_4}{\partial t} \end{aligned}$$

### 2.10.3 Esempi di trasformazioni canoniche

Diamo qualche esempio di trasformazione canonica e vediamone le caratteristiche; ricordiamo che, per calcolare la funzione generatrice di una trasformazione canonica, il procedimento da usare è lo stesso del dover verificare che un campo sia conservativo o meno. Vediamo un paio di esempi.

**Esempio 1.** Sia la funzione generatrice  $F_1(q, Q) = \sum_{i=1}^n q_i Q_i$ ; valgono allora:

$$\begin{aligned} p_h &= \frac{\partial F_1}{\partial q_h} = Q_h \\ P_h &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_h} = -q_h \quad \frac{\partial F_1}{\partial t} = 0 = \Psi \Rightarrow H' = H \end{aligned}$$

Abbiamo quindi che le due hamiltoniane sono le stesse e sono relazionate tra loro come segue:

$$H' = H(q(P, Q), p(Q, P)) = H(-P, Q)$$

Le equazioni canoniche sono inoltre:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{q}_h &= \frac{\partial H}{\partial p_h} = -\dot{P}_h \\ \dot{p}_h &= -\frac{\partial H}{\partial q} = \dot{Q} \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{P}_h &= -\frac{\partial H'}{\partial Q_h} \\ \dot{Q}_h &= \frac{\partial H'}{\partial P_h} \end{aligned} \right.$$

Ovvero questa trasformazione porta le coordinate canoniche nei rispettivi momenti coniugati e viceversa. Questa è un'altra prova della flessibilità del formalismo hamiltoniano.

**Esempio 2.** Consideriamo ora la funzione generatrice  $F_1(q, Q, t)$ , e l'evoluzione temporale di un sistema fisico. Se prendiamo come funzione generatrice la funzione principale di Hamilton, ponendo  $Q = q_0$  e  $t_0 = 0$ , ovvero  $F_1(q, Q, t) = S(q, Q, t)$ , definita come:

$$F_1 = \int_0^t d\tau (\dot{q}p - H(q, p, t))$$

Sappiamo che la funzione principale soddisfa le equazioni di Hamilton-Jacobi, ma che deve anche soddisfare le equazioni della funzione generatrice  $F_1$ ; abbiamo quindi che, ricordando  $\frac{\partial S}{\partial t} = -H$ :

$$H' - H = \frac{\partial S}{\partial t} \rightarrow H' - H = -H \rightarrow H' = 0$$

Quindi le nuove variabili canoniche sono costanti del moto, ovvero:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \frac{\partial H'}{\partial P} = 0 \\ \dot{P} &= -\frac{\partial H'}{\partial Q} = 0\end{aligned}$$

In generale, per un sistema la cui hamiltoniana è indipendente dal tempo, abbiamo che l'evoluzione temporale del sistema è una trasformazione canonica con funzione generatrice la funzione principale di Hamilton. Questo punto sarà molto importante in seguito.

## 2.11 Parentesi di Poisson e trasformazioni canoniche

Riprendiamo quanto abbiamo già visto riguardo le parentesi di Poisson. Date due funzioni delle coordinate e dei momenti coniugati  $f, g$ , la parentesi di Poisson è così definita:

$$[f, g] = \sum_{h=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_h} \frac{\partial g}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial g}{\partial q_h} \right)$$

Adesso consideriamo una trasformazione completamente canonica  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ , ottenendo le nuove funzioni  $f', g'$ ; cosa possiamo dire della parentesi di Poisson nelle nuove variabili?

### 2.11.1 Teorema

Le parentesi di Poisson sono invarianti rispetto a trasformazioni canoniche, ovvero:

$$[f, g]_{q,p} = [f', g']_{Q,P}$$

L'indice basso indica la variabili rispetto a cui è calcolata la parentesi di Poisson.

#### Dimostrazione

Ci limiteremo al caso di trasformazione completamente canoniche. Consideriamo un grado di libertà per semplicità di notazione. Prima di procedere, ricordiamo che, tramite le parentesi di Poisson, abbiamo calcolato la derivata totale temporale di una funzione come:

$$\dot{x}(q, p, t) = [x, H] + \frac{\partial x}{\partial t}$$

Se, invece,  $x(q, p)$  è indipendente dal tempo, la sua derivata è esattamente  $\dot{x} = [x, H]$ , poiché la derivata parziale  $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$ .

Nella nostra parentesi  $[f, g]$ , consideriamo la funzione  $g$  come se fosse l'hamiltoniana di un qualsiasi sistema fisico; non ci interessa sapere quale sistema sia, possiamo tranquillamente supporre questo, ricordando l'alta flessibilità del formalismo hamiltoniano (abbiamo calcolato l'hamiltoniana dei conigli che vengono mangiati dalle volpi, insomma, non stupiamoci per così poco). Ha senso, posto ciò, scrivere  $[f, g] = [f, H]$ . Questo risultato appena ottenuto va a coincidere proprio con:

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = [f, H] = [f, g]_{q,p}$$

Inoltre, poiché abbiamo posto  $g = H$ , valgono le equazioni canoniche di Hamilton nelle variabili di partenza:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial g}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial g}{\partial q}\end{aligned}$$

Inoltre, essendo la trasformazione completamente canonica, abbiamo che  $H = H'$ , ovvero  $g = g'$ :

$$\begin{aligned}g' &= g(q(Q, P), p(Q, P)) \\ H' &= H(q(Q, P), p(Q, P))\end{aligned}$$

Quindi, deve valere anche che  $\frac{df'}{dt} = [f', g']_{Q,P}$  e quindi:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \frac{\partial g'}{\partial P} \\ \dot{P} &= -\frac{\partial g'}{\partial Q}\end{aligned}$$

Essendo la trasformazione completamente canonica, vale anche che  $f' = f(q(Q, P), p(Q, P))$ , per cui  $\dot{f}' = \dot{f}$ , ovvero:

$$[f, g]_{q,p} = [f', g']_{Q,P}$$

Ovvero le parentesi di Poisson sono invarianti per trasformazioni completamente canoniche.

Assumiamo vero che sia valido in generale per trasformazioni canoniche, saltando la dimostrazione matematica. Possiamo applicare questo risultato interessante a delle parentesi di Poisson notevoli che abbiamo già trattato in passato. Ricordiamole:

$$\begin{aligned}[q_h, p_k] &= \delta_{hk} \\ [a_h, q_k] &= 0 \\ [p_h, p_k] &= 0\end{aligned}$$

Prendiamo ora la seconda. Applichiamo una trasformazione completamente canonica:

$$\begin{aligned}q_h &= q_h(Q, P) \\ p_h &= p_h(Q, P)\end{aligned}$$

Per il teorema prima dimostrato, deve valere  $[q_h, q_k] = [Q_h, Q_k] = [Q_h(q, p), Q_k(q, p)] = 0$ . La più interessante da osservare è invece la prima parentesi. Applicando la stessa trasformazione, deve verificarsi:

$$[q_h, p_k]_{Q,P} = [Q_h(q, p), P_k(q, p)]_{q,p} = \delta_{hk}$$

Questa è un'altra condizione per la canonicità di una trasformazione.

Condizione necessaria e sufficiente affinché una trasformazione sia canonica:

$$[Q_h, P_k]_{Q,P} = [Q_h(q, p), P_k(q, p)]_{q,p} = \delta_{hk}$$

Le trasformazioni canoniche hanno anche particolari proprietà. La più notevole è la seguente.

### 2.11.2 Teorema (proprietà delle trasformazioni canoniche)

Per una trasformazione canonica vale:

$$\int dqdpf(q, p) = \int dQdPf'(Q, P) \cdot J$$

Dove  $J$  è lo jacobiano della trasformazione:

$$J = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)}$$

$J$  è una matrice  $2n \times 2n$ .

Sullo jacobiano possono esserci, a volta, problemi. Per fortuna le trasformazioni canoniche sono speciali.

### 2.11.3 Teorema

Se la trasformazione è canonica, allora il suo jacobiano vale  $J = 1$ .

**Dimostrazione**

Sfruttiamo il fatto che, dividendo la trasformazione in due passi successivi, non cambia il risultato finale. Cambiamo quindi prima le coordinate lagrangiane e poi i rispettivi momenti, potendo scrivere quindi:

$$J = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)} \cdot \frac{\partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)}$$

Nella prima matrice la trasformazione è  $Q \rightarrow q$ , nella seconda  $P \rightarrow p$ , lasciando le altre invariate in entrambi i passi. Possiamo scrivere:

$$J = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)} \cdot \left[ \frac{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)} \right]^{-1}$$

Al posto del secondo termine abbiamo solo scritto l'inverso. Poiché nel primo resta costante il momento  $P_h$ , mentre nel secondo resta costante la coordinata  $q_h$ , possiamo scrivere:

$$\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n)} \Big|_{P=\text{cost}} \cdot \left[ \frac{\partial(p_1, \dots, p_n)}{\partial(P_1, \dots, P_n)} \right]_{q=\text{cost}}$$

Il determinante dello jacobiano sarà quindi dato da:

$$\det J = \det \left[ \frac{\partial Q_i}{\partial q_h} \right] \cdot \left[ \det \left[ \frac{\partial P_i}{\partial p_h} \right] \right]^{-1}$$

Da quello che abbiamo visto nel modulo scorso sulle trasformazioni canoniche e funzioni generatrici, vale  $\frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i$ , da cui

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_h} = \frac{\partial \left( \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \right)}{\partial q_h} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_h \partial P_i}$$

Vale anche  $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ , quindi:

$$\frac{\partial p_i}{\partial P_h} = \frac{\partial \left( \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right)}{\partial P_h} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_h}$$

Osserviamo che le due matrici sono uguali, quindi il determinante dello jacobiano:

$$\det J = \det \left[ \frac{\partial Q_i}{\partial q_h} \right] \cdot \left[ \det \left[ \frac{\partial P_i}{\partial p_h} \right] \right]^{-1} = \det J_{ik} \cdot (\det J_{ik})^{-1} = \det J_{ik} \cdot \frac{1}{\det J_{ik}} = 1$$

## 2.12 Metodo di Hamilton-Jacobi

### 2.12.1 Metodo di Hamilton-Jacobi per sistemi con hamiltoniana indipendente dal tempo

Ricordiamo un momento una cosa detta qualche modulo fa: l'evoluzione temporale di un sistema con hamiltoniana indipendente dal tempo è una trasformazione canonica che ha come funzione generatrice la funzione principale di Hamilton. Il metodo di Hamilton-Jacobi che andremo a discutere in questo modulo permette, data proprio questa trasformazione canonica (ovvero preso semplicemente un sistema a hamiltoniana indipendente dal tempo e lasciato evolvere nel tempo secondo le equazioni canoniche) di poter scrivere le equazioni del moto senza risolvere equazioni differenziali. Non è esattamente la via più breve e neanche la più comoda per risolvere il problema, ma per completezza del nostro discorso sul formalismo hamiltoniano lo discuteremo lo stesso.

Consideriamo una trasformazione canonica indipendente dal tempo, che fa il seguente cambio di variabili:

$$(q, p) \rightarrow (\beta, \pi)$$

La funzione generatrice è  $S(q, Q) \rightarrow S(q, \pi)$  (è indipendente dal tempo), quindi abbiamo che  $H' = 0$ . L'espressione di  $H'$  è la seguente:

$$H' = H - \frac{\partial F}{\partial t} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

L'hamiltoniana è funzione delle variabili  $H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$ ; dalle equazioni di Hamilton-Jacobi sappiamo che  $p_h = \frac{\partial S}{\partial q_h}$ ; andando a sostituire:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left( q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t \right) = 0$$

Questa è un'equazione differenziale alle derivate parziali che, se risolta, ci permette di ricavare la funzione principale  $S$ ; la soluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali è un problema molto complicato, risolto solo nel secolo scorso, quindi non tratteremo di come si integrano questi tipi di equazioni. A noi tuttavia non interessa l'integrale generale dell'equazione, ma trovare l'integrale completo, ovvero quella soluzione funzione di  $n$  variabili non banale che soddisfi questa particolare equazione. Troveremo quindi una funzione  $S(q_h, \pi_h, t)$  tale che:

$$\det \left( \frac{\partial^2 S}{\partial q_h \partial \pi_k} \right) \neq 0$$

(Questa è la condizione di non banalità della funzione).

Dal fatto che  $H' = 0$  otteniamo che, sfruttando le equazioni canoniche,

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_h &= \frac{\partial H'}{\partial \pi_h} = 0 \\ \dot{\pi}_h &= -\frac{\partial H'}{\partial \beta_h} = 0 \end{aligned}$$

Ovvero  $\beta, \pi$  sono **costanti del moto**. Poiché la trasformazione è canonica, possiamo anche scrivere:

$$p_h = \frac{\partial S}{\partial q_h} \quad \beta_h = \frac{\partial S}{\partial \pi_h}$$

Possiamo invertire queste equazioni, esplicitando  $(q, p)$ :

$$\begin{aligned} q_h &= q_h(\beta, \pi, t) \\ p_h &= p_h(\beta, \pi, t) \end{aligned}$$

Poiché  $\beta, \pi$  sono delle costanti, le equazioni che abbiamo appena scritto qui sono le **equazioni del moto**, ovvero descrivono il comportamento delle coordinate lagrangiane e dei rispettivi momenti coniugati al variare del tempo.

Inoltre, se l'hamiltoniana è indipendente dal tempo  $H(q, p)$ , possiamo anche scrivere:

$$S \left( q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t \right) = W \left( q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n} \right) - Et$$

Dove  $W$  è una generica funzione indipendente dal tempo. Se deriviamo parzialmente questa espressione rispetto al tempo, otteniamo:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E$$

Andando a sostituire questo risultato nell'equazione differenziale prima trovata otteniamo:

$$-E + H \left( q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n} \right) = 0$$

Ovvero  $E$  è l'energia meccanica del sistema ed è una costante del moto, uguale alla funzione hamiltoniana. Nel prossimo paragrafo chiameremo  $E = \pi_1$  e lo sfrutteremo per poter risolvere l'oscillatore armonico.

In generale, non esiste un teorema o una condizione che ci assicuri che un sistema possa essere risolto. Quei sistemi per i quali si può trovare la funzione  $S$  si dicono **integrabili**. Ci sono tuttavia due casi noti di sistemi integrabili: l'oscillatore armonico e la particella libera. Tutta la fisica teorica, quantistica e particellare, quindi, sfrutta questa caratteristica particolare e, tramite opportune trasformazioni, cerca di ricondursi a questi casi noti, riuscendo a mappare sistemi di cui non si sa nulla con l'oscillatore armonico o la particella libera.

### 2.12.2 Soluzione dell'oscillatore armonico attraverso il metodo di Hamilton-Jacobi

Risolviamo ora l'oscillatore armonico. Consideriamo il caso di una sola dimensione; l'hamiltoniana sarà:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2$$

$$\left(E - \frac{k}{2}q^2\right) 2m = \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2$$

La funzione generatrice è  $S(q, p) = W\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) - Et$ ; sostituiamo l'espressione  $p = \frac{\partial S}{\partial q}$  nell'hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{k}{2}q^2 = E$$

Questa equazione differenziale si può risolvere a variabili separate; riprendendo l'espressione di  $S = W\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) - Et$ , notiamo che possiamo scrivere:

$$\left(E - \frac{k}{2}q^2\right) 2m = \left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2$$

Risolviamola:

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m \left(E - \frac{k}{2}q^2\right)}$$

$$W = \int dq \sqrt{2m \left(E - \frac{k}{2}q^2\right)}$$

$$S = \int dq \sqrt{2m \left(E - \frac{k}{2}q^2\right)} - Et$$

Consideriamo la trasformazione canonica  $(q, p) \rightarrow (\beta, \pi)$ , ricordando che  $\beta = \frac{\partial S}{\partial \pi}$ . Chiamo  $\pi = E$ , quindi  $\beta = \frac{\partial S}{\partial E}$ . Esplicitiamo questa espressione:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial E} &= -t + \int dq \frac{2m}{2\sqrt{2m(E - \frac{k}{2}q^2)}} = -t + \int dq \frac{2m}{\sqrt{2m} \cdot \sqrt{E - \frac{k}{2}q^2}} \\
&= -t + \sqrt{2m} \int dq \frac{1}{2\sqrt{\frac{k}{2}(E - q^2)}} \\
&= -t + \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{2k}} \int dq \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{k}(1 - q^2)}} = -t + \sqrt{\frac{m}{k}} \int dq \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{k} \cdot \sqrt{1 - q^2 \frac{k}{2E}}}} \\
&= -t + \sqrt{\frac{m}{k}} \int dt \left( \sqrt{\frac{k}{2E}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2 k}{2E}}} \right)
\end{aligned}$$

Cambiamo variabile: chiamiamo  $x = q\sqrt{\frac{k}{2E}}$ ; otteniamo:

$$\frac{\partial S}{\partial E} = -t + \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -t + \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \left( q\sqrt{\frac{k}{2E}} \right)$$

Otteniamo che  $\beta + t = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \left( q\sqrt{\frac{k}{2E}} \right)$ ; invertendo l'espressione per ricavarci  $q$  otteniamo:

$$\sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}}(\beta + t) \right) = q\sqrt{\frac{k}{2E}}$$

Chiamato  $\beta' = \beta\sqrt{km}$ , otteniamo:

$$q = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}}t + \beta' \right)$$

Che è l'equazione del moto dell'oscillatore armonico a cui siamo abituati, con  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Abbiamo trovato l'equazione senza dover risolvere equazioni differenziali, seppure, forse, è stata una strada più lunga. Questo ci indica che, se conosciamo la funzione principale  $S(q, p, t)$  di un sistema, sappiamo più o meno tutto: equazioni del moto, evoluzione temporale, funzionale azione in funzione delle posizioni e dei tempi iniziali e finali. Insomma, c'è un motivo se si chiama funzione principale di Hamilton.

## 2.13 Il confine tra meccanica hamiltoniana e meccanica statistica

Il formalismo hamiltoniano che abbiamo trattato finora, come abbiamo accennato più volte, è alla base di teorie moderne della fisica come la meccanica quantistica e la meccanica statistica. Tuttavia, nei suoi ultimi traguardi, il confine tra meccanica classica e meccanica statistica si assottiglia notevolmente, tanto da poter dire che questo modulo è un'introduzione alla meccanica statistica.

Questa branca della fisica nasce tra la fine del XIX secolo e l'inizio del XX. A dare il via allo studio statistico fu la distribuzione delle velocità studiata da Maxwell; il testimone passò poi a Ludwig Boltzmann, che fu il massimo esponente

della meccanica statistica. Questa si occupa di studiare sistemi a infiniti gradi di libertà, come un gas composto da un numero elevatissimo di particelle.

Prendiamo per l'appunto come sistema fisico un gas composto da un numero  $n$  di particelle molto grande, ad esempio il numero di Avogadro (quindi di ordine  $10^{23}$ ). Cosa possiamo dire dello stato del sistema? Nello spazio delle fasi  $2n$  dimensionale non possiamo graficare con precisione lo stato del sistema, ma possiamo approssimare la posizione delle particelle del gas con un volumetto, attraverso cui descriviamo, quindi, lo stato del gas.

Il volumetto sappiamo misurare  $V_0(c) = c$  al tempo  $t_0 = 0$ ; il nostro sistema, poi, evolve nel tempo, andando a deformare il volumetto. Cosa possiamo dire della misura del volumetto a un tempo successivo  $t \neq 0$ ?

Tutti i punti facenti parte del volumetto rappresentano un possibile stato microscopico delle particelle, e ognuno di questi stati evolve temporalmente, seguendo delle traiettorie che non si incrociano mai (altrimenti avremmo il paradosso di avere in un punto due particelle contemporanee). A risolvere i nostri dubbi c'è il seguente teorema.

### 2.13.1 Teorema (di Liouville)

Se l'hamiltoniana del sistema è indipendente dal tempo (ipotesi fondamentale), il volumetto del sistema resta costante man mano che il sistema evolve nel tempo.

#### Dimostrazione

Consideriamo una trasformazione canonica  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ . Misuriamo il volumetto  $c$ :

$$V(c) = \int_c dq_1 dq_2 \cdots dq_n dp_1 \cdots dp_n$$

L'integrale è secondo la misura di Lebesgue. Con la trasformazione canonica, il volume diventa:

$$V(c) = \int_c dQ_1 \cdots dQ_n dP_1 \cdots dP_n \cdot \left| \det \frac{\partial(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n)}{\partial(Q_1, \cdots, Q_n, P_1, \cdots, P_n)} \right|$$

Sappiamo però che in una trasformazione canonica lo jacobiano vale  $J = 1$ . Sappiamo anche che l'evoluzione temporale è una trasformazione canonica, con funzione generatrice la funzione principale di Hamilton. La misura di Lebesgue del volumetto resta quindi costante nel tempo.

È interessante questo risultato, sebbene non fosse così inaspettato; in fin dei conti, pensare che il volume si comprima o si espanda all'infinito ha come conseguenza la perdita di alcune caratteristiche tipiche, come la densità. Un teorema davvero importante che sfocia nella fisica statistica è il seguente.

## 2.13.2 Teorema (della ricorrenza di Poincaré)

Consideriamo un sistema fisico con hamiltoniana indipendente dal tempo, che può muoversi nello spazio delle fasi in un volume limitato  $\lambda$ . Consideriamo un punto  $x_0$  e un suo intorno  $U_0$  aperto e piccolo a piacere. Il sistema evolve nel tempo fino al tempo  $t = \tau$ , in cui consideriamo un intorno  $U(\tau)$ . Allora, qualunque sia  $\tau$ , esisterà un tempo  $t^*$  tale che  $U(t^*) \cap U(t_0) \neq \emptyset$ . Ovvero, dopo un certo tempo, il sistema torna arbitrariamente vicino al punto iniziale.

## Dimostrazione

Consideriamo il tempo in maniera discreta, come una successione discreta di tempi  $\{t_0, t_1, \dots\}$ . Definiamo  $U(t_n) = U_n$ . Prima di tutto, dimostriamo che esistono due intorni  $U_{n_1}$  e  $U_{n_2}$  tali che  $U_{n_1} \cap U_{n_2} \neq \emptyset$ .

Indichiamo con  $\mu(U_i)$  la misura dell'intorno  $U$  al tempo  $i$ . Se gli intorni non si incrociassero mai nel corso del tempo, il sistema arriverebbe a occupare tutto il volume possibile  $\lambda$ , occupando di volta in volta tutti i volumetti disgiunti che lo formano. Il volume che occupa nel tempo sarà quindi (additività della misura di Lebesgue):

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n U_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(U_i)$$

Se  $n \rightarrow \infty$ , allora anche il volume occupato  $\mu \rightarrow \infty$ ; ma sappiamo che il sistema può muoversi in un volume limitato  $\lambda$ , quindi devono essere due intorni  $U_{n_1}$  e  $U_{n_2}$  tali che la loro intersezione è non nulla.

Rappresentiamo i due intorni e osserviamo la loro intersezione. I due intorni sono gli evoluti temporali degli intorni  $U_{n_1-1}$  e  $U_{n_2-1}$ ; poiché sono, appunto, evoluti temporali, la loro intersezione deve anche appartenere ai loro predecessori; facendo due passi indietro, la storia è la stessa. Supponendo  $n_2 > n_1$ , facendo  $n_1$  passi indietro, abbiamo che  $U_{n_2-n_1}$  e  $U_0$  si intersecano. Ovvero, a un certo tempo  $n_2 - n_1$  il sistema è tornato arbitrariamente vicino al punto di origine.

Attenzione! Il teorema di Poincaré non afferma che il sistema torna al punto iniziale, ma solo che vi torna arbitrariamente vicino, e le due cose hanno significati diversi. Questo caso è interessante ma ha anche delle strane conseguenze. Il caso più famoso è un gas contenuto in una scatola divisa in due compartimenti  $A$  e  $B$ ; il gas si trova in  $A$ , mentre in  $B$  viene fatto il vuoto. Tolto il setto divisore, il gas si espande fino a occupare tutto il volume  $A + B$ . Secondo il teorema di Poincaré, esisterà un tempo in cui il gas si troverà a essere quasi tutto contenuto nella metà  $A$  della scatola. Questo sembra avere poco senso e, addirittura, contraddice il secondo principio della termodinamica.

Ora, se le particelle sono 3,4, è abbastanza probabile che, dopo un certo tempo umano, tornino nel volume  $A$ . Ma se il gas è un gas ragionevole, composto da un elevato numero di particelle, allora la probabilità che ciò avvenga in tempi brevi si assottiglia sempre più. In particolare, Boltzmann riuscì addirittura a stimare il tempo che un gas composto da  $N_A$  particelle torni nel volume iniziale. Questo tempo è pari a  $t^* = e^{N_A}$  secondi, che è addirittura superiore all'età dell'universo. Poiché il teorema di Poincaré non specifica quale tempo sia quello in cui è soddisfatta la tesi, ma ne verifica solo l'esistenza, non sono state possibili prove sperimentali che lo

confutino. Anche perché non abbiamo e  $e^{N_A}$  secondi a disposizione per attendere che ciò accada.

## 2.14 La corda vibrante

### 2.14.1 Il sistema della corda vibrante e l'equazione del moto

Per concludere la parte del corso che riguarda la meccanica nei formalismi lagrangiano e hamiltoniano, studiamo il caso interessante di un sistema a infiniti gradi di libertà: la corda vibrante. Studiando il modello, vedremo come, scrivendo l'azione del sistema, minimizzandola, si possono ricavare le equazioni del moto.

Per semplificare il nostro modello, consideriamo una corda orizzontale sovrapposta all'asse delle  $x$ , che viene tenuta tesa grazie a una tensione  $\tau$ . La corda può oscillare nello spazio.

Il sistema è elastico, in buona approssimazione lo è perfettamente; questo vuol dire che, a ogni sollecitazione di tipo elastico (allungamento), il sistema restituisce l'energia potenziale accumulata, tornando alla posizione iniziale, senza dissipazioni. Per ciò che riguarda l'energia potenziale, posta  $l$  la lunghezza della corda a riposo, avremo che questa sarà pari, per la legge di Hook, a:

$$\delta U = \tau \cdot dl$$

La corda si trova nello spazio, e si muove nel tempo. Il nostro intento è studiarne la posizione al variare del tempo; preso quindi un punto della corda a riposo, che chiameremo  $x^*$ , la posizione della corda può essere espressa come:

$$\begin{cases} x = x(x^*, t) \\ y = y(x^*, t) \\ z = z(x^*, t) \end{cases}$$

Posto così, il sistema appare molto complicato da risolvere. Per poter semplificare lo studio, poniamo delle particolari condizioni che questo deve rispettare. *In primis*, assumiamo che la corda non compia grandi oscillazioni; questo si traduce imponendo che le oscillazioni nello spazio sia piccole a piacere, ovvero:

$$\frac{|x - x^*|}{l} < \varepsilon \quad \frac{|y|}{l} < \varepsilon \quad \frac{|z|}{l} < \varepsilon$$

Ovviamente, le oscillazioni lungo le tre variabili sono normalizzate alla lunghezza della corda. Se ciò non venisse fatto, la scrittura  $|x - x^*| < \varepsilon$  avrebbe poco senso: le dimensioni fisiche non sono rispettate e  $\varepsilon$  ha poco significato. Una variazione di un metro è enorme, per una corda lunga due metri, ma è insignificante se la corda è lunga svariati chilometri (ammesso che esista). Normalizzare la variazione con la lunghezza effettiva della corda dà senso alla condizione che abbiamo posto.

La seconda condizione che andiamo a porre è quella che le deformazioni sono regolari, ovvero non presentano asperità o singolarità (come cuspidi o effetti simili); questo si traduce limitando le derivate delle deformazioni:

$$\left| \frac{\partial(x - x^*)}{\partial x^*} \right| < \varepsilon \quad \left| \frac{\partial y}{\partial x^*} \right| < \varepsilon \quad \left| \frac{\partial z}{\partial x^*} \right| < \varepsilon$$

Queste condizioni che abbiamo posto sulle deformazioni ci semplificano lo studio dei casi critici, come dei nodi non voluti e singolari durante il moto. Per semplificare

invece lo studio generale, consideriamo che il moto sia piano e trasversale; questo si traduce con  $z = 0 \forall t$ , ovvero il sistema si muove solo nel piano  $(x, y)$ ; affinché sia trasversale, poniamo che si muova solo lungo l'asse delle  $y$ : il punto studiato  $x^*$  non oscillerà lungo l'asse  $x$ . Alla luce di queste considerazioni, possiamo sostituire la variabile  $x^*$  con la generica posizione  $x$ , che resta costante nel tempo:

$$\begin{cases} x(x, t) = x^* \\ y(x, t) \\ z(x, t) = 0 \end{cases}$$

In tutto ciò, inoltre, affinché abbia senso lo studio del moto, gli estremi della corda devono restare fissi (altrimenti diamo un impulso alla corda e ci troviamo a rincorrerla in giro perché è volata via); tutto questo si traduce ponendo  $y(0, t) = y(l, t) = 0$ .

Tutte le condizioni che abbiamo imposto al sistema hanno una conseguenza interessante: compiendo piccole oscillazioni e rispondendo linearmente, il sistema avrà delle equazioni del moto lineari, il che non può far altro che farci piacere. Un esempio interessante di onde descritte da equazioni non lineari è il solitone, per chiunque fosse interessato. Passiamo ora allo studio vero e proprio del sistema.

L'energia potenziale l'abbiamo già espressa e definita. Per quanto riguarda l'energia cinetica, invece, abbiamo bisogno del contributo della massa. Approssimando la massa del filo come se fosse contenuta in delle palline (di dimensioni minime e massa uguale), numerate da un indice  $i = 1, \dots, N$ , possiamo descrivere il sistema come un sistema discreto a  $N$  gradi di libertà, dove  $N$  indica il numero di palline. Se adesso rimpiccioliamo le palline, aumentandone in numero, e portiamo  $N \rightarrow \infty$ , otteniamo un sistema continuo a infiniti gradi di libertà, e l'indice  $i$  discreto diventa un indice  $dx$  continuo. Posta  $\mu$  la massa per unità di lunghezza del filo, potremo quindi calcolarci la massa totale del filo.

Il sistema, allora, quali equazioni deve soddisfare? Per determinare ciò, ci scriviamo la lagrangiana, definita come  $L = T - U$ . Nel caso discreto, questo avremmo potuto scriverlo come:

$$L = \sum_{i=1}^N (T_i - U_{i,j})$$

Essendo noi passati a un sistema continuo, a infiniti gradi di libertà, le energie diventano due funzioni  $T(x)$  e  $U(x)$ . Consideriamo ora la deformazione della corda. Nel caso statico, la deformazione  $ds = dx$ ; se, invece, il sistema è in moto e deformato, possiamo approssimare la deformazione come:

$$ds = \sqrt{dy^2 + dx^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

Poiché precedentemente abbiamo posto che il sistema compie piccole oscillazioni, ovvero  $\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| < \varepsilon$ , possiamo sviluppare secondo Taylor l'espressione di  $ds$ :

$$ds \approx dx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)$$

La variazione di energia potenziale vale quindi (posto ovviamente  $dl = ds - dx$ , ovvero lo spostamento deformato meno lo spostamento statico):

$$dU = \tau \left[ dx \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) - dx \right] = \tau \frac{1}{2} dx \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

L'energia potenziale totale sarà la somma di questa variazione; essendo il sistema continuo, la sommatoria diventa un integrale lungo tutta la lunghezza della corda:

$$U = \int_0^l dx \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

Passiamo ora all'energia cinetica. L'infinitesimo di corda ha una massa pari a  $dm = \mu dx$ , per quanto detto prima. Quindi la variazione di energia cinetica sarà:

$$dT = \frac{\mu}{2} dx \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$

Dove vale, ovviamente,  $\frac{\partial y}{\partial t} = v_y$ , ovvero la velocità lungo  $y$ , che è l'unico asse su cui avviene il moto. L'energia cinetica totale diventa quindi:

$$T = \int_0^l dx \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$

Ora osserviamo che sia l'energia cinetica che quella potenziale dipendono dalla traiettoria  $y(x, t)$  percorsa dalla corda. Sono, quindi, due funzionali,  $T_{[y]}$  e  $U_{[y]}$ . La lagrangiana del sistema sarà quindi:

$$L = \int_0^l dx \left[ \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \tau \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]$$

Ricordando la definizione di azione, possiamo scriverla come:

$$A = \int_{t_0}^{t_1} dt L = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l dx \left[ \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \tau \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx dt$$

Per trovare le equazioni del moto, dobbiamo minimizzare l'azione, ponendo  $\delta A = 0$ . Ricordiamo che gli estremi sono fissi, ovvero  $y(0, t) = y(l, t) = 0$ , per cui anche le rispettive variazioni lo saranno, ovvero  $\delta y(0, t) = \delta y(l, t) = 0$ . Inoltre, come facemmo nella dimostrazione del principio variazionale di Hamilton, poniamo:

$$\delta y(x, t_0) = 0$$

$$\delta y(x, t_1) = 0$$

Facciamo adesso variare l'azione:

$$\begin{aligned} \delta A &= \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l dx \left[ \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial(y + \delta y)}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \tau \left( \frac{\partial(y + \delta y)}{\partial x} \right)^2 \right] = 0 \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l dx \left[ \mu \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \delta y}{\partial t} - \tau \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right] = 0 \end{aligned}$$

Ricordiamo ora come abbiamo dimostrato il principio variazionale; il fattore nell'integrale  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}$  lo integravamo per parti. Anche qui ripetiamo lo stesso procedimento, ottenendo:

$$\delta A = \underbrace{\int_0^l dx \mu \frac{\partial y}{\partial t} \delta y}_{=0} \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l dx \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta y - \left( \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} dt \tau \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_0^l}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l dx \tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta y \right)$$

Gli elementi integrati per parti sono nulli perché abbiamo posto le variazioni agli istanti iniziali e finali nulle (prima riga) e gli estremi fissi, con rispettive variazioni nulle (seconda riga). Otteniamo quindi l'espressione di  $\delta A$ :

$$\delta A = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l dx \left[ \tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right] \delta y(x, t) = 0$$

Dal lemma fondamentale delle variazioni, per un  $\delta y(x, t)$  arbitrario, l'integrale si annulla se il termine tra parentesi è nullo. Posto  $v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$ , otteniamo finalmente l'equazione del moto d'onda:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Nota anche come **equazione delle onde di d'Alembert**. Nei prossimi paragrafi vedremo due diversi modi di risolvere questa equazione.

### 2.14.2 Onde progressive e regressive

Il primo modo che studiamo per risolvere l'equazione parte da un'osservazione preliminare: l'equazione è lineare. Quindi, prese due soluzioni, la loro somma è ancora soluzione dell'equazione. Allora, tramite un opportuno cambio di variabili:

$$\begin{cases} \xi = x - vt \\ \eta = x + vt \end{cases}$$

L'equazione diventa quindi  $\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ ; in particolare, abbiamo che:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = 0 \end{cases}$$

Ovvero, possiamo scrivere  $y(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$ , il che vuol dire anche che  $y(x, t) = \varphi(x - vt) + \psi(x + vt)$ .

Studiamo ora le due soluzioni  $\varphi, \psi$ . Prendiamo una particolare deformazione: la legge  $\varphi(x - vt)$  ci dice che quella deformazione avanza lungo la corda all'avanzare del tempo, ovvero è un'onda progressiva. Al contrario, la  $\psi(x + vt)$  ci indica che una qualsiasi deformazione arretra lungo la corda, all'avanzare del tempo: è un'onda regressiva. Tuttavia, noi sappiamo che la corda non avanza o arretra, ma resta dove si trova oscillando verticalmente. Ne possiamo concludere che qualunque deformazione dipendente dal tempo è combinazione di due onde, una progressiva e una regressiva, il cui risultato è un'onda stazionaria.

## 2.14.3 Metodo di separazione delle variabili

Ora, invece, proviamo un approccio diverso. Cerchiamo una soluzione del tipo  $y(x, t) = G(x)F(t)$ , ovvero la soluzione è prodotto di due soluzioni dipendenti solo da una delle due variabili in gioco. Andando a sostituire questo tipo di soluzione nell'equazione di d'Alembert otteniamo:

$$\begin{aligned} v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= 0 \\ v^2 G(x)F(t) - G(x)F(t) &= 0 \\ v^2 \frac{G(x)G'(x)}{G(x)} \frac{F(t)}{F(t)} &= \end{aligned}$$

Poiché le due funzioni sono di diverse variabili, affinché sia valida l'equazione scritta devono essere entrambi i membri uguali a una costante  $C$ ; in particolare, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} F''(t) - CF(t) = 0 \\ v^2 G''(x) - CG(x) = 0 \end{cases}$$

L'espressione che risolve l'equazione per la funzione  $G$  è:

$$G(x) = ae^{\frac{\sqrt{C}}{v}x} + be^{-\frac{\sqrt{C}}{v}x}$$

Studiamo i vari casi; se  $C > 0$ , applicando la condizione al contorno  $G(0) = G(l) = 0$ :

$$0 = a + b \quad \Leftrightarrow \quad ae^{\frac{\sqrt{C}}{v}l} + be^{-\frac{\sqrt{C}}{v}l}$$

L'unica soluzione possibile è quando i coefficienti si annullano, ovvero  $a = b = 0$ , che ha poco interesse fisico. Ne consegue che deve essere  $C < 0$ ; possiamo allora scrivere  $C = -\omega^2 \in \mathbb{R}$  per indicare un qualsiasi numero negativo; poiché  $\sqrt{C} = \sqrt{-\omega^2} = \pm i\omega$ , entrando nel campo dei complessi, la soluzione assume un carattere oscillante, ed è ciò cerchiamo per un'onda. Quindi l'espressione di  $G(x)$  può essere scritta, generalmente, come somma di un coseno e un seno (lo stesso discorso si fa per la funzione  $F(t)$ ):

$$\begin{cases} G(x) = c \cos\left(\frac{\omega}{v}x\right) + d \sin\left(\frac{\omega}{v}x\right) \\ F(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \end{cases}$$

Sfruttando ancora una volta le condizioni al contorno del nostro problema, ricaviamo i coefficienti:

$$G(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c \cos(0) + d \sin(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$$

Ovvero possiamo scrivere  $G(x) = d \sin\left(\frac{\omega}{v}x\right)$ ; applicando la seconda condizione  $G(l) = 0$ , possiamo determinare la pulsazione  $\omega$  (escludendo il caso  $d = 0$  in cui ricadiamo nella soluzione banale):

$$d \sin\left(\frac{\omega}{v}l\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega}{v}l = n\pi \quad \omega_n = \frac{v\pi n}{l}$$

Otteniamo quindi  $G(x) = d \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$ ; posto  $d \cdot a = a_n$  e  $d \cdot b = b_n$ , otteniamo che una soluzione particolare dell'equazione differenziale risulta essere:

$$y_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[ a_n \cos\left(\frac{v\pi n}{l}t\right) + b_n \sin\left(\frac{v\pi n}{l}t\right) \right]$$

Notiamo come questa abbia la parte spaziale sinusoidale: così facendo, ci siamo assicurati che agli estremi sia nulla. Supponiamo ora sia  $b_n = 0$ , così da poterci concentrare sul fattore  $\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{v\pi n}{l}t\right)$ ; questa è un'onda stazionaria armonica, ovvero, al crescere di  $n$ , diminuisce il suo periodo, e aumentano i nodi che restano fissi; i nodi si trovano in posizione  $x = \frac{l}{n}$ ; nell'immagine seguente si vedono le prime otto armoniche di una corda. La prima armonica, in musica, viene anche chiamata **armonica fondamentale**.

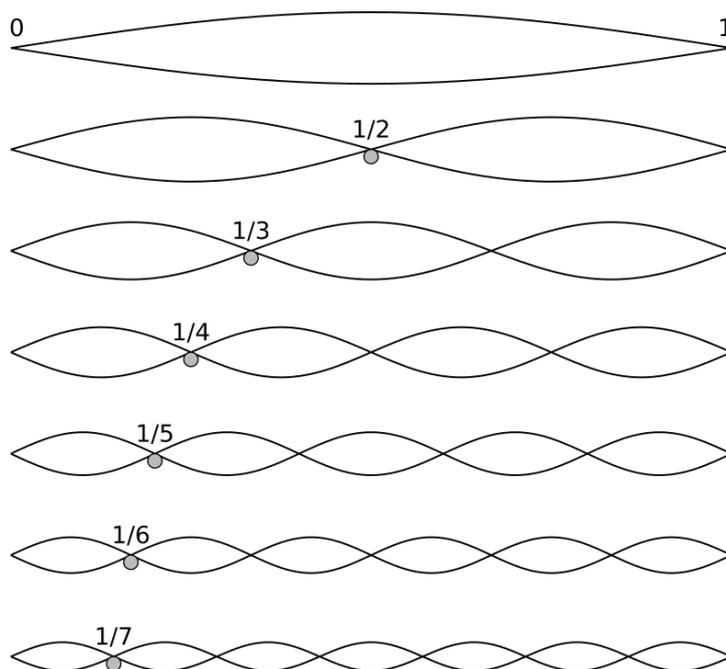


Fig. 2.3: Prime otto armoniche fondamentali di una corda. Si osserva il crescere lineare del numero di nodi con la crescita dell'armonica.

Il contributo del coseno, invece, ne modifica l'ampiezza, senza interferire sulla periodicità. La frequenza di oscillazione della corda è  $\nu_n = \frac{nv}{2l}$ . Se  $b_n \neq 0$ , possiamo osservare che il seno è solo un coseno traslato, e quindi l'oscillazione dell'onda varia solo in ampiezza.

La domanda è: cosa hanno a che fare tutte queste funzioni trigonometriche con il metodo usato prima? Cioè, prese due soluzioni  $\varphi(x - vt)$  e  $\psi(x + vt)$ , cosa ha a che fare tutto ciò con le onde progressive e regressive? La risposta risiede nell'**analisi di Fourier**, chiamata anche **analisi armonica**.

Scegliamo una particolare deformazione iniziale  $y(x, 0) = h(x)$ , a cui corrisponde un rispettivo profilo di velocità  $\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = k(t)$ . Come descriviamo questa deformazione combinandole con la soluzione  $y_n$  scritta poco sopra?

L'analisi di Fourier permette di decomporre una funzione in somme di onde elementari: ogni funzione (sotto opportune ipotesi) è in realtà una somma di seni e coseni. Consideriamo una successione di funzioni trigonometriche:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \\ \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \end{cases}$$

Con  $k = 0, 1, \dots, N \in \mathbb{N}$ . Queste funzioni sono tutte  $C^\infty$  e periodiche di periodo  $2l$ . Queste funzioni trigonometriche rispettano le condizioni di ortogonalità, ovvero sono valide le seguenti espressioni.

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l dx \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{k'\pi}{l}x\right) &= 0 \quad \forall k' \neq k \\ \int_{-l}^l dx \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{k'\pi}{l}x\right) &= 0 \quad \forall k' \neq k \\ \int_{-l}^l dx \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) &= 0 \quad \forall k', k \end{aligned}$$

L'unico caso particolare è per il prodotto di coseni: se  $k = 0$ , si ha che  $\int \cos(0) \cos(0) dx = |b - a|$ , ovvero, nel nostro caso,  $2l$ .

Analizziamo un po' meglio tutto questo. Ricordiamo a tal proposito il generale prodotto scalare euclideo:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^N a_i b_i$$

Se  $N \rightarrow \infty$ , l'indice  $i$  discreto diventa un indice continuo, e la sommatoria diventa integrale. Quindi il prodotto scalare diventa:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \int_{-l}^l a(x) \cdot b(x) dx$$

Questo vuol dire che le tre espressioni scritte sopra sono prodotti scalari, e che quindi le funzioni sin e cos sono la base di uno spazio vettoriale a infinite dimensioni (noto anche come spazio di Hilbert), e l'integrale è il particolare prodotto scalare definito in questo spazio. Inoltre, sono anche una base ortonormale, ovvero si possono normalizzare le funzioni seno e coseno affinché il loro prodotto scalare sia unitario.

A questo punto, presa una funzione  $f(x)$  abbastanza regolare (ci basta che sia di classe  $C^1$ ), questa potrà essere scritta come somma di seni e coseni:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right]$$

Con i coefficienti  $a_n, b_n$  univocamente determinati. Inoltre, se la funzione  $f(x)$  è pari nell'intervallo  $[-l, l]$ , questa potrà essere scritta come solo somma di coseni:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Allo stesso modo, se la funzione  $f(x)$  è dispari in  $[-l, l]$ , si può scrivere come sola somma di seni:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Come si possono determinare i coefficienti? Ricordiamo che, preso un generico vettore  $V$  appartenente allo spazio, questo può essere scritto come una combinazione

lineare della base  $\phi_i$  dello spazio  $V = \sum a_i \phi_i$ . Per poter avere il coefficiente  $a_m$  si proietta il vettore sulla base, ovvero:

$$a_m = \phi_m \cdot V = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i \cdot \phi_m$$

Allo stesso modo, per poter avere i nostri coefficienti  $a_n, b_n$ , occorre proiettare la funzione  $f(x)$  sulla base di seni e coseni. Per avere  $a_n$ , infatti:

$$a_m = \int_{-l}^l dx f(x) \cos\left(\frac{m\pi}{l}x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_n \int_{-l}^l dx \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{l}x\right) + b_n \int_{-l}^l dx \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) \right] = a_m \cdot l$$

Il secondo integrale è sempre nullo, mentre il primo, se  $m = n$ , dà come risultato  $l$ , altrimenti è sempre nullo. Otteniamo quindi che

$$a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l dx f(x) \cos\left(\frac{m\pi}{l}x\right)$$

$$b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l dx f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)$$

Per  $b_m$  si è fatto lo stesso ragionamento fatto per  $a_m$ .

Possiamo adesso tornare al nostro discorso fisico, dopo questa breve parentesi matematica. Avevamo trovato una soluzione particolare:

$$y_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[ a_n \cos\left(\frac{v\pi n}{l}t\right) + b_n \sin\left(\frac{v\pi n}{l}t\right) \right]$$

Prese infinite di queste soluzioni e sommate tra loro, otteniamo la soluzione generale:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[ a_n \cos\left(\frac{v\pi n}{l}t\right) + b_n \sin\left(\frac{v\pi n}{l}t\right) \right]$$

Ricordiamo che la parte spaziale è sinusoidale perché si annulla agli estremi. Il nostro profilo di deformazione  $h(x)$  assomiglia a una funzione dispari, ma purtroppo vale solo nell'intervallo  $[0, l]$ . Allora, affinché sia una funzione dispari, possiamo prolungarla nel semiasse negativo, in cui sarà pari  $-h(-x)$ ; la funzione così ottenuta è dispari, e può essere scritta, secondo Fourier, come somma di seni:

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Dove

$$A_n = a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l dx h(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \frac{2}{l} \int_0^l dx h(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Questo perché il prodotto  $h(x) \cdot \sin$  dà origine a una funzione pari, che quindi è simmetrica rispetto all'asse  $y$ .

Derivando ora l'espressione  $y(x, t)$  e imponendo  $t = 0$  otteniamo l'espressione di  $k(t)$ :

$$\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(n\pi v)}{l} \cos(0) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = k(x)$$

Chiamato  $B_n = \frac{b_n(n\pi v)}{l}$ , questo si può esprimere con lo stesso ragionamento di  $A_n$ :

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l dx k(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Da cui ricaviamo che

$$b_n = \frac{B_n \cdot l}{n\pi v} = \frac{2}{n\pi v} \int_0^l dx f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Abbiamo quindi trovato i coefficienti da sostituire alla soluzione generale trovata. L'analisi di Fourier, come visto, è uno strumento molto potente, che permette di risolvere tantissimi problemi fisici e di poter analizzare i fenomeni sotto un'ottica diversa.

## Relatività speciale

### 3.1 La fisica dopo Maxwell

In questo breve corso di relatività, tratteremo solo la teoria ristretta, quindi parleremo solo di sistemi inerziali non accelerati. Perderemo tanto del formalismo matematico che caratterizza la teoria a causa dello scopo del corso: essere una semplice introduzione alla meccanica relativistica in ambito ristretto.

#### 3.1.1 Dopo l'elettromagnetismo

Nel 1864 James Clerk Maxwell pubblicò il testo *A Dynamical Theory of Electromagnetic Field* in cui riunisce in un'unica teoria i risultati sperimentali e teorici concernenti i campi elettrico e magnetico ottenuti nel corso del XIX secolo. Il testo e la teoria di Maxwell sono considerati uno dei risultati più importanti della storia della fisica, tanto da esser paragonati al lavoro di Isaac Newton.

Il termine della teoria di Maxwell ebbe conseguenze interessanti che tratteremo tra poco. Ci soffermiamo ora sul fatto che, dopo questa teoria, nella comunità scientifica c'era la sensazione che ormai tutto fosse stato scoperto. All'orizzonte, oltre che confermare le teorie già studiate o, magari, trovare qualche curiosità scientifica, non si prospettava nulla di nuovo. Addirittura, la teoria meccanica di Hamilton che abbiamo studiato finora è stata scritta poco prima della teoria di Maxwell (nel 1833), quindi, oltre a riformulare ciò che già si sapeva, non si pensava si potesse andare oltre. La cosa carina di questa storia è che nel giro di 15 anni cambiò tutto.

La teoria dell'elettromagnetismo di Maxwell viene considerata come la branca finale della fisica classica; le sue conclusioni e le considerazioni che seguirono diedero il via alle teorie moderne della fisica, che compongono quindi la fisica moderna. Una delle conclusioni più importanti dell'elettromagnetismo è che i campi elettrico e magnetico non sono due enti distinti, ma si propagano nello spazio ortogonalmente tra loro sotto forma di onde elettromagnetiche (costituendo così il noto campo elettromagnetico). Queste conclusioni furono dedotte da Heinrich Hertz, il quale per primo verificò sperimentalmente l'esistenza delle onde elettromagnetiche e, nello stesso periodo, verificò anche che la luce è un'onda elettromagnetica. L'equazione d'onda che le onde elettromagnetiche soddisfano è la seguente:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(x, y, z, t) = 0$$

dove  $\Psi(x, y, z, t)$  è una qualsiasi funzione dipendente dalle coordinate spaziali e dal tempo, come ad esempio il campo elettrico o magnetico. È proprio da questa equazione differenziale che sorgono problemi. Infatti, questa non è invariante per trasformazioni galileiane: cambiando sistema di riferimento e applicando quindi le trasformazioni di Galileo, l'equazione si sfalda assumendo una forma diversa (e più brutta rispetto a quella bella ordinata qui sopra).

Quando accade una cosa simile, ovvero che la descrizione matematica di un fenomeno cambia notevolmente a seconda del sistema di riferimento in cui si studia, si cerca un sistema privilegiato, ovvero un sistema di riferimento per il quale valga l'equazione iniziale (quella scritta qui sopra), mentre negli altri sistemi si devono applicare le trasformazioni di Galileo. Questo sistema non poteva essere la Terra per motivi evidenti e ben diversi, tra i quali il fatto che la Terra non è un sistema inerziale, e la cosa è abbastanza scomoda. La scelta ricadde sul sistema delle stelle fisse, ovvero quelle stelle poste a distanze così elevate dalla Terra da essere praticamente immobili nella volta celeste. Quindi le onde elettromagnetiche (e la luce) sono descritte da quella bella equazione differenziale nel sistema delle stelle fisse: negli altri casi, devono essere applicate le trasformazioni di Galileo.

### 3.1.2 L'etere luminifero

Fino a qui, nessun problema. Il sistema delle stelle fisse non è null'altro che un sistema di riferimento come tutti gli altri, anzi, è addirittura inerziale. I problemi sorsero altrove. Abbiamo detto che si scoprì che luce è un'onda elettromagnetica, per di più un'onda trasversale. Per quel che si sapeva all'epoca delle onde trasversali, queste necessitavano di un mezzo abbastanza rigido per propagarsi. Il problema è che, se creiamo il vuoto in una bottiglia di vetro, la luce vi passa attraverso. La cosa oggi può sembrare banale, ma solo perché lo sappiamo fin da bambini quello che accade. All'epoca, si pensò di risolvere il problema parlando di etere luminifero, un mezzo che aveva le seguenti proprietà:

- è molto rarefatto;
- è molto rigido;
- è ineffabile sperimentalmente (ovvero non può essere visto)

Ora, se la logica ha ancora un suo perché, se qualcosa è molto rarefatto è assurdo che sia rigido. Che poi sia inosservabile, questo era una conseguenza dell'esperienza: facendo il vuoto in una bottiglia, la luce continua a propagarsi, quindi l'etere vi è rimasto, ma non può essere visto. Insomma, l'etere era un mezzo che permeava il tutto, caratterizzato da specifiche proprietà.

Il fenomeno dell'aberrazione stellare, inoltre, dimostrava che l'etere era in quiete rispetto alle stelle fisse. Per aberrazione stellare si intende un fenomeno ottico che fa sembrare in moto oggetti fermi; fu scoperto e confermato nel 1728, studiando la posizione nel cielo di determinate stelle considerate fisse: si vide che queste compivano delle ellissi nel cielo, effetto causato dal moto della Terra e dal diverso verso che ha la sua velocità nel corso dell'orbita.

Un altro esperimento che confermava l'esistenza dell'etere era l'effetto Doppler di un'onda luminosa con velocità di segno opposto: si vide che i risultati erano in accordo con le trasformazioni di Galileo. In pratica, l'etere sembrava dover esistere davvero.

## 3.2 Esperienza di Michelson-Morley e l'ipotesi di Einstein

A cambiare le cose fu un esperimento divenuto celebre con il nome di **fallimento di Michelson-Morley**, che valse a Michelson il premio Nobel per la fisica nel 1907. L'esperimento aveva come scopo dimostrare l'esistenza dell'etere, e il nome di "fallimento" deriva dal fatto che le conclusioni furono diverse da quelle aspettate.

L'esperimento fa uso dell'**interferometro di Michelson**, uno strumento che studia le interferenze di due onde luminose generate da un singolo fascio di luce.

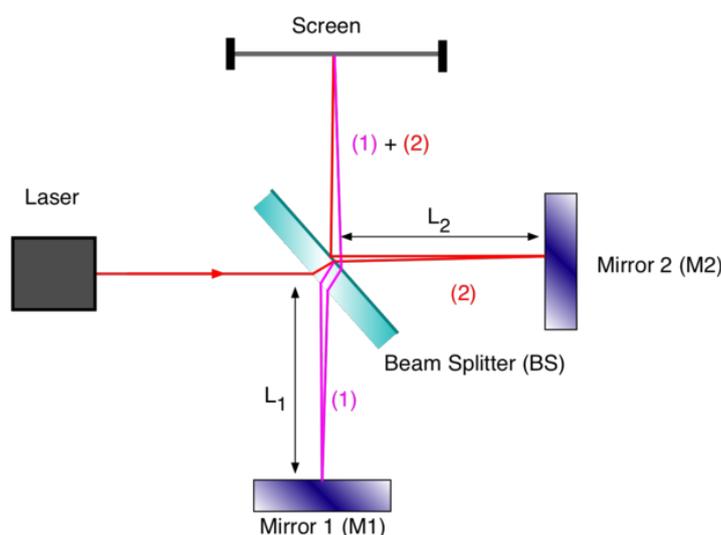


Fig. 3.1: Schema dell'interferometro di Michelson-Morley

Il fascio di luce parte dalla sorgente, per poi incontrare uno specchio semi-argentato, che divide in due il fascio: una parte viene rifratta, percorre  $l_2$  e arriva a un altro specchio, mentre l'altro raggio viene riflesso, percorre  $l_1$  e incontra a sua volta uno specchio. I due fasci di luce tornano poi allo specchio semi-argentato, da cui poi arrivano ad uno schermo finale in cui si può notare l'interferenza luminosa causata dalla sfasatura dei due fasci.

Non è banale che i due fasci siano sfasati; se le due lunghezze  $l_1$  e  $l_2$  fossero uguali, i due fasci sarebbero concordi dopo esser tornati allo specchio. Tuttavia, considerata la lunghezza d'onda della luce, le due distanze sono "umane", ovvero qualche metro e, sebbene siano simili tra loro ( $l_1 \sim l_2$ ), non sono così simili da essere precisi alla lunghezza d'onda della luce, provocando la sfasatura che, infine, determina il formarsi sullo schermo di frange d'interferenza.

Tutto l'apparato era montato su un disco di marmo (affinché fosse il più rigido possibile), il quale poggiava su del mercurio liquido. La scelta del mercurio fu dovuta al fatto che, considerate le piccole lunghezze d'onda dei fasci, le vibrazioni terrestri avrebbero potuto incidere non poco sui risultati finali. Inoltre, in questo modo l'apparato poteva essere ruotato. È infatti questo il punto cruciale dell'esperimento: nella prima parte si metteva l'interferometro nel sistema di riferimento Terra (ovvero concorde alla velocità della Terra relativa rispetto all'etere), poi si ruotava e si metteva nel sistema di riferimento etere (ovvero perpendicolare alla velocità della Terra relativa all'etere).

Calcoliamo il tempo impiegato dal fascio di luce per arrivare dalla sorgente allo schermo. Consideriamo che la Terra si muova da sinistra verso destra con velocità  $v$ ;

il tempo impiegato dal primo raggio sarà pari a:

$$T_1 = \frac{l_1}{c+v} + \frac{l_1}{c-v} = \frac{2l_1}{c\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

Questo perché la velocità del fascio di luce si somma a quella della Terra secondo le trasformazioni di Galileo. Calcoliamo il tempo impiegato dal secondo raggio; questo, poiché la Terra si muove anche attraverso l'etere, percorre una traiettoria triangolare (il fascio trasla assieme alla Terra).

Dal teorema di Pitagora ricaviamo che il tempo impiegato dal secondo raggio è:

$$T_2 = \frac{2}{c} \sqrt{l_2^2 + \left(\frac{vT_2}{2}\right)^2} \Rightarrow T_2 = \frac{2l_2}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Da qui possiamo ricavare la differenza tra i due tempi, che crea l'interferenza:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{2}{c} \left( \frac{l_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_1}{\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)} \right)$$

Ruotando il sistema di  $90^\circ$ , questo cambia perché, essendo  $l_1 \neq l_2$  i due raggi ora sono a percorsi inversi rispetto a prima; otteniamo quindi:

$$\Delta T' = \frac{2}{c} \left( \frac{l_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \right)$$

Notiamo che  $\Delta T \neq \Delta T'$ , quindi l'interferenza sarà diversa; infatti, posto  $\tau = \Delta T' - \Delta T$ , questo non è nullo, bensì:

$$\tau = \frac{2}{c} (l_1 + l_2) \left[ \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]$$

Quindi le due interferenze dovranno essere diverse, considerate diverse le differenze di tempo tra i due fasci. Se l'esperimento è chiamato fallimento di Michelson-Morley c'è un motivo: le frange d'interferenza erano identiche. Ovvero, sia ponendo il sistema nel sistema concorde con l'etere, che opposto, non si avevano effetti sulle interferenze. Non è giusto dire che questo esperimento decretò l'inesistenza dell'etere, anche perché Einstein stesso, qualche anno dopo, ne parlò in modo diverso come campo spazio-temporale, ma fu il colpo decisivo alla teoria dell'etere.

La conseguenza di questo esperimento era che, se esiste, l'etere deve essere in quiete rispetto alla Terra. Il primo tentativo di accordare l'esistenza dell'etere a questo fatto fu quello di considerarlo come un fluido incompressibile, e la Terra si muoveva in esso causando un moto laminare: la parte di fluido attorno alla Terra si muoveva con essa, ma via via che ci si allontanava l'etere sarebbe stato fermo e la Terra in moto. Ovviamente, questa ipotesi non reggeva. A cambiare le carte in tavola fu Albert Einstein, all'epoca uno sconosciuto impiegato dell'ufficio brevetti di Berna. La sua ipotesi cambiava totalmente il paradigma di pensiero che finora era utilizzato: in breve, possiamo riassumerlo dicendo che il modulo della velocità della luce è costante in ogni sistema di riferimento e le leggi fisiche hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Da qui, lo stesso Einstein formulò la teoria della relatività, ristretta prima, generale poi.

### 3.3 Trasformazioni di Lorentz e composizione delle velocità

#### 3.3.1 Trasformazioni di Lorentz

L'ipotesi di Einstein non ha poche conseguenze. La prima e fondamentale è quella di rivedere le trasformazioni del moto, adattandole al nuovo sistema. In realtà, queste erano già state ricavate. Il fisico olandese Hendrik Lorentz, qualche anno prima, trovò un sistema di trasformazioni che rendevano l'equazione delle onde elettromagnetiche invarianti rispetto a cambi di sistemi, ovvero, passando da un sistema a un altro seguendo queste trasformazioni, la forma dell'equazione differenziale non variava. Egli le ricavò come puro espediente matematico, rispondendo alla domanda: secondo quali trasformazioni l'equazione delle onde è invariante? Non pensava che queste potessero essere delle vere trasformazioni. Per un moto relativo all'asse  $x$ , le trasformazioni sono le seguenti:

$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Il perché Lorentz non pensava potessero essere vere è ben chiaro: il tempo non è più costante, ovvero, cambiando sistema di riferimento, cambia anche il tempo. All'epoca, pensare una cosa simile era assurdo: si riteneva, infatti, che il tempo fosse assoluto e uguale in ogni sistema di riferimento. Einstein pensò semplicemente che è la natura a essere fatta così, e la nostra difficoltà ad accettare questa cosa è dovuta al fatto che siamo esseri biologici che vivono a basse velocità, per i quali il tempo è, in buona approssimazione, assoluto.

Una piccola osservazione su queste trasformazioni: sono lineari, e le equazioni differenziali non cambiano per trasformazioni lineari. Inoltre, la somma di due trasformazioni è ancora trasformazione, esistono l'elemento neutro e l'inverso: queste trasformazioni formano quindi un gruppo, detto **gruppo di Lorentz**.

Ora vediamo brevemente come, a partire dalle trasformazioni galileiane e dall'ipotesi che il modulo della velocità è costante, possiamo arrivare alle trasformazioni di Lorentz.

Consideriamo una lampadina che si accende situata nell'origine; la luce si propaga nello spazio seguendo la legge:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

Considerando il tempo assoluto e la velocità della luce costante, in un altro sistema di riferimento avremo che:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

Applichiamo adesso le trasformazioni di Galileo:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2vtx + v^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

A questo punto, per far tornare i conti, dobbiamo per forza abbandonare l'ipotesi che il tempo sia assoluto; per questo, poniamo  $t' = t + \varphi \cdot x$  dove  $\varphi$  è una generica funzione. Esplicitando il quadrato:

$$x^2 - 2vtx + v^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2(t^2 + 2\varphi xt + \varphi^2x^2)$$

Da questo ricaviamo che  $\varphi = -\frac{v}{c^2}$ . Sostituendo questo valore nell'espressione qui sopra:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + v^2t^2 - 2vtx &= c^2t^2 - 2vtx + \frac{v^2}{c^2}x^2 \\ x^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 &= c^2t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \end{aligned}$$

A questo punto, per poter ottenere l'equazione da cui siamo partiti, necessitiamo di dividere  $x'$  e  $t'$  per un fattore  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ , ottenendo le trasformazioni di Lorentz.

### 3.3.2 Composizione delle velocità secondo le trasformazioni di Lorentz

Ricordiamo la composizione delle velocità secondo Galileo: partendo da  $x' = x - vt$ , differenziando questa espressione otteniamo la composizione  $\dot{x}' = \dot{x} - v$ .

Lo stesso procedimento lo applichiamo alle trasformazioni di Lorentz. Differenziandole, otteniamo

$$\begin{cases} dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Dato allora una generica  $u_x = \frac{dx}{dt}$ , quale sarà la  $u'_x = \frac{dx'}{dt'}$ ?

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u_x - v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

Allo stesso modo possiamo calcolare le altre componenti della velocità:

$$\begin{aligned} u'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \\ u'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \end{aligned}$$

### 3.4 Conseguenze dell'ipotesi di Einstein: dilatazione dei tempi e contrazione delle lunghezze

L'ipotesi di Einstein che il modulo della velocità della luce è costante in tutti i sistemi di riferimento inerziali ha conseguenze non banali. Come abbiamo già potuto notare dalle trasformazioni di Lorentz, viene a cadere il concetto di tempo assoluto, che fin da Aristotele era il paradigma diffuso e accettato dalla comunità scientifica. Questo è un effetto interessante: in conseguenza dell'ipotesi di Einstein, siamo di fronte a una dilatazione dei tempi quando cambiamo sistema di riferimento.

#### 3.4.1 Dilatazione dei tempi

Facciamo un esempio, studiando un modello. Consideriamo un'astronave che passa per l'origine del nostro sistema di riferimento con velocità orizzontale  $v = \text{cost}$ . Su questo razzo sono presenti due specchi, a distanza di un metro l'uno dall'altro; un raggio luminoso parte da uno dei due specchi, viene riflesso dal secondo e torna al laser d'origine. Questo sarà il nostro particolare orologio, che misura il tempo in spazio percorso dal raggio luminoso. Un intervallo fondamentale è un periodo completo, che sarà pari a  $\Delta t' = \frac{l}{c} = 2\text{m}$ , posto ovviamente  $c = 1$ . L'apice indica che ci troviamo nel sistema di riferimento del razzo e non a terra.

L'evento che studiamo è proprio il raggio di luce che parte dal laser. Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}\Delta t' &= 2\text{m} \\ \Delta x' &= 0 \\ \Delta y' &= 0 \\ \Delta z' &= 0\end{aligned}$$

Consideriamo ora la grandezza  $\Delta s' = \Delta t'^2 - (\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2) = 4$ . Di questa grandezza parleremo in seguito, per ora prendiamola per buona.

Spostiamoci adesso nel sistema a terra. Il raggio luminoso si sposta assieme al razzo (esattamente come nel caso di Michelson-Morley, percorre una traiettoria triangolare, con la base pari a  $\Delta x$  e i lati obliqui di dimensione  $c$ ). Avremo le seguenti variazioni:

$$\begin{aligned}\Delta x &= v\Delta t \\ \Delta y &= 0 \\ \Delta z &= 0 \\ \Delta t &= 2\sqrt{l^2 + \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2} = 2\sqrt{l^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

Notiamo che  $\Delta t' \neq \Delta t$ . In particolare  $\Delta t' = \frac{2}{c}$ , applicando le trasformazioni di Lorentz:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow (\Delta x = 0) \quad \Delta t = \Delta t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Da questo otteniamo che  $\Delta t = \frac{2}{c} \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}$ . Ovvero  $\Delta t > \Delta t'$ , quindi i tempi si dilatano per velocità più basse. Notiamo tuttavia che il  $\Delta s$  definito come sopra resta invariato in entrambi i sistemi di riferimento (il calcolo è solo algebra elementare).

### 3.4.2 Contrazione delle lunghezze

Adesso passiamo a considerare un altro fenomeno fisico, stavolta di tipo particellare. Attraverso dei particolari rilevatori riusciamo a osservare un gran numero di muoni che arrivano a Terra, formatisi all'inizio dell'atmosfera terrestre (generati dal vento solare che incontra l'atmosfera). Questo fenomeno è di per sé poco interessante, se non fosse che i muoni non potrebbero arrivare a terra.

Infatti, la velocità dei muoni è pari a  $v = 0.99999c$ , molto prossima a quella della luce; tuttavia, la vita media di un muone è pari a  $10^{-7}$ s, dopo i quali decade in un elettrone e un antineutrino. Facendo un breve calcolo, lo spazio percorso, con quella velocità e in quel tempo, è al massimo qualche centinaio di metri (con fluttuazioni statistiche sulla vita del muone). Il limite dell'atmosfera si trova a venti chilometri (all'incirca) da terra.

Un modo di spiegare questo fenomeno è che, nel sistema di riferimento Terra, che ha velocità molto più basse di quelle del muone, il tempo si dilata secondo trasformazioni di Lorentz:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Poiché  $\frac{v^2}{c^2} \rightarrow 1$ , avremo che  $\Delta t \gg \Delta t'$ : l'intervallo di tempo si dilata così tanto, infatti, da permettere al muone di arrivare a terra con la sua velocità caratteristica.

E se invece ci mettessimo nel sistema di riferimento del muone? Se ci sediamo sul muone, il tempo  $10^{-7}$ s resta quello che è, e la velocità è quella che è, cioè, dopo qualche centinaio di metri, il muone dovrebbe decadere e noi cadremmo nel vuoto (perché eravamo seduti sul muone). Allora, come è possibile che nel sistema di riferimento Terra i muoni arrivano al suolo, ma nel sistema di riferimento muone no?

Semplicemente, come il tempo si dilata, lo spazio si contrae. Consideriamo la stessa astronave dell'esempio precedente: su questa è presente un metro di lunghezza  $l'$ . Nell'istante in cui l'astronave passa all'origine, l'astronauta misura in un intervallo  $\Delta t' = 0$  la lunghezza di un metro a terra. È fondamentale che la misura sia fatta in un istante pressoché nullo (altrimenti l'astronave va via e il metro si trova ad essere lungo qualche chilometro). Questa lunghezza è pari a:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Risulta quindi essere  $\Delta x' < \Delta x$ : lo spazio si contrae a seconda del sistema di riferimento. Il muone, quindi, riesce ad arrivare a terra perché lo spazio che percorre è molto minore di quello che vediamo noi.

Queste due conseguenze posero fine all'assolutismo dello spazio e del tempo: queste due misure, infatti, sono relative al sistema di riferimento in cui vengono misurate. C'è una ragione, quindi, se viene chiamata "teoria della relatività".

## 3.5 Spazio di Minkowsky

Come anticipammo già all'inizio del corso, tralascieremo molti aspetti interessanti riguardanti il formalismo di questa teoria. Tuttavia, è bene parlare dello spazio di Minkowsky, chiamato così in onore del suo creatore Hermann Minkowsky, ovvero lo spazio vettoriale in cui si muove la teoria della relatività.

Se consideriamo lo spazio euclideo  $\mathbb{E}^3$ , formato da vettori a tre componenti  $(x, y, z)$ , questo risulta essere uno spazio vettoriale completo, con una norma generata da un prodotto scalare e con la sua caratteristica distanza euclidea. Inoltre, il prodotto vettoriale definito come

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

risulta essere invariante per trasformazioni ortogonali, come rotazioni e traslazioni. Però, questo non può essere lo spazio in cui può muoversi la teoria della relatività: tempo e spazio, come abbiamo visto, variano cambiando sistema di riferimento (ovvero apportando opportune trasformazioni), come conseguenza della costanza di  $c$ .

Lo spazio da noi cercato è uno spazio di dimensione quattro: ci interessano infatti i **quadrivettori**, ovvero vettori a quattro componenti, di cui la prima, che si indica con l'indice 0, è la coordinata temporale, mentre le tre successive, numerate da 1 a 3 sono le coordinate spaziali. Ci interessa, inoltre, definire un prodotto vettoriale che, se applicato a due vettori dello spazio, resti invariante per trasformazioni di Lorentz.

◇ **Definizione** Dati due quadrivettori  $A, B$ :

$$\begin{aligned} A(A_0, A_1, A_2, A_3) \\ B(B_0, B_1, B_2, B_3) \end{aligned}$$

Si definisce **prodotto di Minkowsky** oppure **norma di Minkowsky** il prodotto così definito:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} := A_0 B_0 - (A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3)$$

Questo prodotto scalare è invariante per trasformazioni di Lorentz.

Uno spazio vettoriale di dimensione quattro su cui è verificata la norma di Minkowsky viene chiamato **spazio di Minkowsky**.

Osserviamo come la norma di Minkowsky non sia definita positiva. Dati due eventi dello spazio  $E_1$  e  $E_2$ , la norma:

$$|E_1 E_2|^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2)$$

Può essere maggiore, minore o uguale a 0. Questo valore resta invariante cambiando sistema di riferimento secondo trasformazioni di Lorentz. Inoltre, abbiamo i seguenti casi:

- se  $|E_1 E_2|^2 > 0$ , diremo che questo è un vettore di genere tempo;
- se  $|E_1 E_2|^2 = 0$ , diremo che questo è un vettore di genere luce;
- se  $|E_1 E_2|^2 < 0$ , diremo che questo è un vettore di genere spazio.

Lo spazio si può disegnare in un piano (o rappresentare in tre dimensioni); nell'immagine seguente vediamo una schematizzazione dello spazio di Minkowsky: notiamo il cono di luce a cui appartengono tutti i vettori di tipo luce; la velocità della luce è il limite naturale che non può essere superato. I vettori che sono "interni" al cono di luce sono di genere tempo, e lo resteranno in ogni sistema di riferimento; quelli che sono esterni al cono, invece, sono di genere spazio, e lo resteranno in ogni sistema di riferimento.

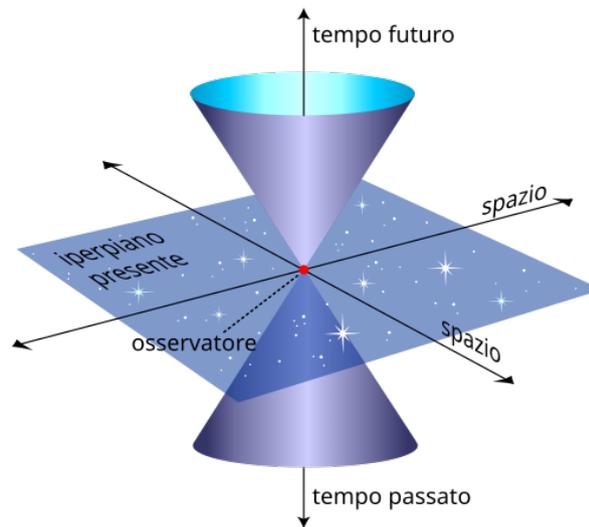


Fig. 3.2: Figurazione tridimensionale dello spazio di Minkowsky. Il cono di luce delimita lo spazio dei vettori di genere tempo da quello dei vettori di genere spazio.

Consideriamo due eventi contemporanei, ovvero che avvengono nello stesso tempo (per esempio, giacenti entrambi sull'iperpiano presente). In un altro sistema di riferimento, i due eventi possono non coincidere temporalmente: le coordinate temporali possono variare per trasformazioni di Lorentz, a restare costante è la norma di Minkowsky; ciò è possibile solo se il vettore differenza tra i due eventi è di genere spazio. In quel sistema di riferimento, allora, uno dei due eventi sarà avvenuto prima nel tempo. Per questo motivo, i due eventi non possono essere in rapporto causale l'uno con l'altro. È in questo punto che la teoria della relatività di Einstein si scontra con la teoria quantistica, nel fenomeno dell'*entanglement*.

Allo stesso modo, possono esistere due eventi che avvengono in luoghi diversi i quali, in un altro sistema di riferimento, accadono nello stesso luogo (o hanno le stesse coordinate spaziali); ciò è possibile solo se il loro vettore differenza è di genere tempo.

Le curve che rappresentano le traiettorie nel grafico dello spazio-tempo di Minkowsky (piano o tridimensionale) si dicono **linee di universo**. Possono essere rappresentate come curve in funzione di un generico parametro  $\lambda$ :

$$\phi(\lambda) = (x_0(\lambda), x_1(\lambda), x_2(\lambda), x_3(\lambda))$$

Un parametro che di solito risulta essere utile o particolarmente interessante è il tempo proprio.

◇ **Definizione** Si definisce **tempo proprio** di un sistema (o evento) inerziale il tempo del sistema di riferimento proprio dell'evento considerato.

Per fare un esempio, supponiamo di avere un'astronave che viaggia a velocità costante nello spazio, al cui interno c'è un orologio. Il tempo proprio di quell'astronave sarà il tempo segnalato dall'orologio al suo interno, non dal nostro orologio a terra (che, come abbiamo visto, misura un tempo diverso).

La definizione è valida per sistemi inerziali; infatti, come è poi ben dimostrato nella teoria della relatività generale, l'accelerazione ha effetti sullo spazio-tempo, che provocano variazioni diverse. Quindi, c'è da fare una piccola precisazione: questa definizione resta ancora valida per sistemi non inerziali a patto che si definisca il tempo proprio di un sistema non inerziale come il tempo di un sistema inerziale che si sovrappone istante per istante al sistema non inerziale, avente in ogni punto la stessa velocità del sistema accelerato considerato. Risulta essere un po' artificiosa, però, nel caso di sistemi accelerati, il regime della relatività speciale viene a mancare e si passa ad applicare la teoria generale.

◇ **Definizione** Si definisce **intervallo di tempo proprio**:

$$\frac{ds}{c} = \frac{\sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}}{c} =: d\tau$$

Ricordiamo che il fattore  $ds$  è invariante per trasformazioni di Lorentz, quindi anche l'intervallo di tempo proprio  $d\tau$  risulta esserlo.

### 3.5.1 Breve accenno tensoriale

Apriamo una piccola parentesi legata alla norma di Minkowsky; notiamo che la norma quadra di un vettore è pari a:

$$|x|^2 = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 x_i x_j \cdot \hat{g}_{i,j}$$

Dove  $\hat{g}$  è una matrice versore tale che  $g_{00} = 1$  e  $g_{ii} = -1$ ,  $i = 1, 2, 3$ , ovvero è una matrice  $4 \times 4$  del tipo:

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

In relatività generale questa non è una matrice diagonale, ma presenta altri elementi: questa matrice diventa un tensore che rappresenta proprio la curvatura dello spazio-tempo in presenza di masse che lo deformino.

## 3.6 Cinematica relativistica

Come abbiamo accennato nel precedente paragrafo, possiamo descrivere le linee di universo come funzioni del tempo proprio  $\tau$ . Ora iniziamo a fare considerazioni di meccanica relativistica, introducendo le grandezze fondamentali con le quali si studiano eventi nello spazio di Minkowsky. Breve precisazione di notazione: l'indice  $i$  sulle coordinate dei quadrivettori indica tutte le coordinate, quindi  $i = 0, 1, 2, 3$ , al contrario, l'indice  $\alpha$  indica solo le coordinate spaziali, ovvero  $\alpha = 1, 2, 3$ .

◇ **Definizione** Siano le coordinate di un quadrivettore ( $x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ ), si definisce **quadrivelocità**:

$$U_i = \frac{dx_i(\tau)}{d\tau}$$

Notiamo che la quadrivelocità non può essere di genere spazio: se così fosse, infatti, avremmo che la sua norma  $|\underline{U}| > c$  supera la velocità della luce, e non è possibile. Risulta quindi essere un vettore di tipo tempo e, quindi, interno al cono di luce.

Data la velocità classica di coordinate  $v_\alpha = v_x, v_y, v_z$ , scriviamo le coordinate del vettore  $\underline{U}$  in funzione di queste. Ricordiamo la relazione delle trasformazioni di Lorentz:

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Da questo, sostituendo il valore trovato di  $d\tau$  nella definizione di quadrivelocità, otteniamo:

$$U_i = \frac{dx_i(\tau)}{d\tau} = \frac{dx_i(\tau)}{dt} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \begin{cases} U_0 = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ U_\alpha = \frac{v_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Inoltre, la norma quadra della quadrivelocità risulta essere costante:

$$\begin{aligned} |\underline{U}|^2 &= U_0^2 - U_1^2 - U_2^2 - U_3^2 = \left(\frac{d(ct)}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = \\ &= \frac{(c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)}{d\tau^2} = \frac{ds^2}{d\tau^2} = c^2 \frac{d\tau^2}{d\tau^2} = c^2 \end{aligned}$$

Come anticipato, quindi, la norma quadra è costante, positiva, e quindi la quadrivelocità è un vettore di genere tempo in ogni sistema di riferimento inerziale.

La scelta di definire la quadrivelocità è portata dall'utilizzo delle trasformazioni di Lorentz. La matrice di trasformazione, infatti, è una matrice  $4 \times 4$ , mentre la velocità classica è un vettore in tre coordinate spaziali. Inoltre, la comodità di lavorare in uno spazio quadri-dimensionale rende comodo lo studio di come variano tempo e spazio lungo tutto lo spazio.

◇ **Definizione** Si definisce il vettore **quadriaccelerazione**:

$$\underline{A} = \frac{d\underline{U}}{d\tau}$$

Notiamo che, posto  $U_\alpha = \frac{v_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , possiamo esplicitare le componenti  $A_\alpha$  della quadriaccelerazione:

$$\begin{aligned}
A_\alpha &= \frac{dU_\alpha}{d\tau} = \frac{dU_\alpha}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left( \frac{\frac{dv_\alpha}{dt}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + v_\alpha \left( -\frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{c^2} \frac{dv_\alpha v_\alpha}{dt} \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left( \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v_\alpha^2}{c^2} \frac{a}{\sqrt{\left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^2}} \right)
\end{aligned}$$

In relatività, si usa passare a due parametri noti,  $\beta$  e  $\gamma$ , che valgono:

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Utilizzando questi parametri, l'espressione qui sopra può essere scritta in forma più elegante (come molte altre espressioni della teoria).

### 3.6.1 Paradosso dei gemelli

Il paradosso dei gemelli è un semplice esperimento mentale proposto da Einstein. Alla luce di ciò che abbiamo detto finora, potrà essere chiaro.

Il problema è semplice: due gemelli vengono messi su due astronavi e sottoposti agli stessi effetti accelerativi (ovvero subiscono le stesse variazioni di velocità), solo che uno dei due trascorre nello spazio più tempo, viaggiando a velocità più elevate di quelle della Terra. Quindi, un gemello atterra prima dell'altro e, una volta arrivati entrambi a terra, confrontano i loro tempi propri: il risultato finale è che, essendo stato uno dei due più tempo nello spazio a velocità elevate, questo sarà più giovane del fratello.

## 3.7 Dinamica relativistica

Dopo aver definito le grandezze fondamentali della cinematica, lo studio si sposta alla dinamica dei corpi in relatività. Procediamo con calma, ragionando su quel che abbiamo finora osservato. Possiamo iniziare col dire che i quadrivettori velocità e accelerazione sono ortogonali secondo Minkowsky, ovvero il loro prodotto scalare di Minkowsky è nullo  $\underline{U} \cdot \underline{A} = 0$ . Poiché vale  $|\underline{U}|^2 = c^2$ , possiamo anche scrivere:

$$0 = \frac{d|\underline{U}|^2}{d\tau} = \frac{dU \cdot U}{d\tau} = 2 \cdot U \cdot \frac{dU}{d\tau} = 2U \cdot A = 0$$

Ricordiamo che la derivata di  $c^2$  è 0 perché è una costante.

Detto questo, e ricordando che  $U$  è un vettore di genere tempo, la quadriaccelerazione  $A$  risulta essere di genere spazio.

### 3.7.1 Quantità di moto e energia a riposo

◇ **Definizione** Si definisce **massa propria** di un corpo la massa che il corpo ha nel sistema di riferimento rispetto a cui è in quiete. Si indica con  $m_0$ . Per i sistemi di riferimento non inerziali, vale la stessa osservazione fatta per il tempo proprio.

Questa definizione è molto ambigua. Che senso ha descrivere la massa propria? Ovvero, la massa non è costante in ogni sistema di riferimento? Questa era l'ipotesi posta da Newton per poter studiare la dinamica degli oggetti, ma, in relatività, cade anche questo assunto: la massa varia in base al sistema di riferimento in cui la si misura. Passiamo alla definizione di quantità di moto relativistica.

◇ **Definizione** Si definisce **quadrivettore quantità di moto**:

$$\underline{P} = m_0 \cdot \underline{U}$$

Note le coordinate della quadrivelocità, possiamo esplicitare le coordinate della quantità di moto. Le sue coordinate spaziali valgono:

$$P_\alpha = m_0 \frac{v_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = v_\alpha \cdot m$$

Dove  $m$  è la massa vista da un altro sistema di riferimento, e si chiama **massa dinamica** o **relativa**. L'espressione generale è  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m(v)$  ed è una funzione della velocità del sistema di riferimento in cui la si misura.

La componente temporale della quantità di moto, invece, vale

$$P_0 = \frac{cv_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = c \cdot m$$

◇ **Definizione** Si definisce **energia a riposo** e si indica con  $E_0$ :

$$E_0 = cP_0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c = mc^2$$

L'energia a riposo indica che, solo perché esiste una massa, questa ha una sua energia a riposo. Questa energia, come possiamo notare, ha un valore molto alto. È stato sviluppato un modo per poterla sfruttare, ed è la fissione nucleare, che riesce a trasformare questa energia a riposo di atomi radioattivi in energia utilizzabile. Inoltre, l'espressione dell'energia a riposo ci dice anche che la massa è solo un'altra forma di esprimere l'energia.

### 3.7.2 Leggi del moto

Passiamo ora a studiare le leggi della dinamica che regolano il moto.

◇ **Definizione** Si definisce **quadriforza**:

$$\underline{K} = m_0 \underline{A}$$

Questa, se è nota la definizione operativa di  $\underline{K}$ , è già un'equazione del moto. Tuttavia, la definizione operativa della quadriforza non ci interessa. Ricordando che la teoria della relatività resta ancora una teoria deterministica (a differenza della teoria quantistica), possiamo passare dalla quadriforza alla velocità e alla forza classiche del nostro sistema di riferimento. Infatti:

$$\underline{K} = m_0 \underline{A} = m_0 \frac{dU}{d\tau} = m_0 \frac{dU}{dt} \frac{dt}{d\tau} = m_0 \frac{dU}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato le trasformazioni di Lorentz per cui  $dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ . Da questa ricaviamo che:

$$\underline{K} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0 \frac{dU}{dt}$$

Vediamo ora le componenti spaziali:

$$K_\alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = F_\alpha = m_0 \frac{dU_\alpha}{dt} = m_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{v_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Formalmente, questa è uguale alla legge di Newton, con la sottile differenza che la massa dipende dalla velocità. Possiamo infine scrivere:

$$F_{alpha} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v_\alpha \right) = \frac{d}{dt} (P_\alpha)$$

La componente temporale, invece, posto  $\underline{U} \cdot \underline{A} = 0 \rightarrow \underline{U} \cdot \underline{K} = 0$ , vale:

$$U_0 K_0 - U_\alpha K_\alpha = 0 \Rightarrow k_0 = \frac{U_\alpha k_\alpha}{U_0}$$

Ricordando l'espressione di  $U_0 = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , riprendiamo la generica espressione di

$\underline{K} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0 \frac{dU}{dt}$  e vediamo quanto vale questa per la coordinata temporale:

$$K_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0 \frac{d}{dt} \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow c K_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dE}{dt}$$

Valgono sempre  $U_\alpha = \frac{v_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  e  $U_0 = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ ; da queste otteniamo che  $\frac{U_\alpha}{U_0} = \frac{v_\alpha}{c}$ ;

il nostro obiettivo è sempre quello di esplicitare  $K_0 = \frac{U_\alpha}{U_0} K_\alpha$ ; andiamo a sostituire questo valore nell'espressione trovata qui sopra:

$$c \frac{U_\alpha}{U_0} \underbrace{\left( K_\alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)}_{F_\alpha} = \frac{dE}{dt} \Rightarrow v_\alpha F_\alpha = \frac{dE}{dt}$$

Che è il rispettivo del teorema delle forze vive in meccanica classica. Notiamo anche che  $v_\alpha \cdot F_\alpha = v \cdot F$  ovvero il prodotto scalare euclideo. Abbiamo ottenuto due leggi fondamentali, simili alle leggi della meccanica classica:

$$F_\alpha = \frac{dP_\alpha}{dt}$$

$$F_\alpha v_\alpha = \frac{dE}{dt}$$

Ricordiamo che queste valgono nella teoria della relatività, dove abbiamo considerato  $E = m(v)c^2$ .

Inoltre, ci sono due regole generali che dominano la dinamica relativistica: come la dinamica classica, valgono sia la conservazione della quantità di moto che la conservazione dell'energia, ovvero:

$$\sum_{h=1}^n m_{0h} \underline{U}_h = \sum_{h'=1}^n m_{0h'} \underline{U}_{h'}$$

$$\sum_{h=1}^n m_h c^2 = \sum_{h'=1}^n m_{h'} c^2$$

La conservazione della quantità di moto, ad esempio, permette di rilevare le particelle neutre. La presenza dei neutrini, infatti, è stata ipotizzata proprio per una violazione della conservazione della quantità di moto: prima di affermare che non sia vero, infatti, si è ipotizzato che esistessero piccolissime particelle neutre, i neutrini appunto, che non fossero osservabili da rilevatori magnetici ma che prendessero una piccola parte della quantità di moto al decadere di una particella, così da equilibrare il totale.

## 3.8 Lagrangiana in relatività e l'effetto Compton

### 3.8.1 La lagrangiana in relatività

L'equazione del moto in meccanica relativistica, ottenuta come:

$$\frac{dP}{dt} = F \quad \Rightarrow \quad P = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Può essere espressa nel formalismo lagrangiano, prendendo come variabili generalizzate le variabili cartesiane (o le componenti spaziali nello spazio di Minkowsky). Tuttavia, la definizione di lagrangiana vista finora  $L = T - U$  ha poco significato in relatività. Che valore assume  $T$ ? Per questo motivo, si assume come definizione di lagrangiana in relatività l'espressione:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - V(x)$$

Dove, ovviamente,  $V(x)$  è l'energia potenziale. Non discuteremo dei motivi per i quali la lagrangiana assume questa forma.

Ricordando che  $v^2 = \sum_{\alpha=1}^3 v_\alpha^2$ , si possono applicare le equazioni di Eulero-Lagrange assumendo come lagrangiana l'espressione scritta sopra per poter ricavare le leggi del moto:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial x_\alpha}$$

Abbiamo che:

$$\frac{\partial L}{\partial v_\alpha} = -m_0 c^2 \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(-\frac{2v_\alpha}{c^2}\right) = \frac{m_0 v_\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = P_\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial x_\alpha} = F_\alpha$$

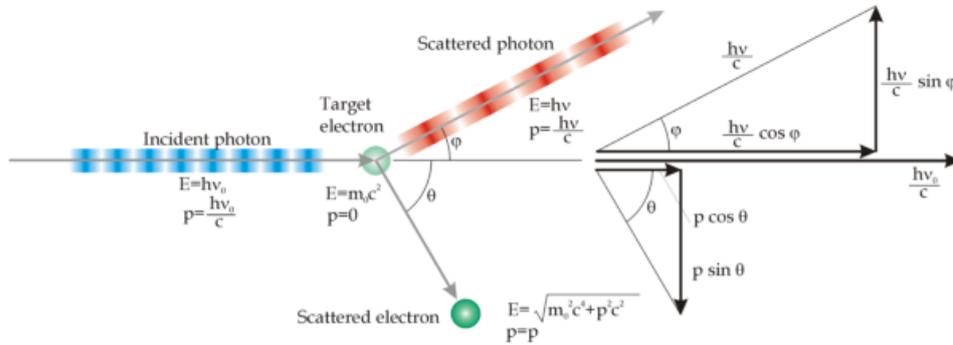
$$\Rightarrow \frac{\partial P_\alpha}{\partial t} = F_\alpha$$

Esattamente come ci aspettavamo.

### 3.8.2 Effetto Compton

L'esperimento di Compton è successivo all'esperimento fotoelettrico di Einstein (il quale valse a Einstein il Nobel nel 1921); questo aveva dimostrato la natura corpuscolare della luce, studiando l'interazione tra fotoni ed elettroni. Tuttavia, si notò che l'interazione dipendeva non dall'intensità di radiazione, bensì dalla frequenza: fasci di luce molto intensi, a basse frequenze, interagivano poco con gli elettroni di un metallo, a differenza di fasci poco intensi ma con frequenze molto alte, che permettevano agli elettroni di schizzare fuori dal reticolo metallico.

L'effetto Compton (che valse ad Arthur Compton il premio Nobel nel 1927) studia proprio questo effetto: studiando l'energia del fotone come funzione della sua frequenza, si riesce a spiegare l'effetto fotoelettrico. Nell'immagine qui sotto è ben schematizzato l'effetto Compton, con le grandezze di energie relative ad lato di interesse.



Possiamo quindi ricavare una relazione tra l'angolo di *scattering* del fotone  $\phi$  e la sua frequenza  $\nu$ , che cambia in  $\nu'$  dopo lo *scattering*. Sfruttando la conservazione della quantità di moto e dell'energia relativistiche si spiega questo fenomeno. La quantità di moto di un fotone è pari a  $P = \frac{h\nu}{c}$ , dove  $h$  è la costante di Planck di alto interesse e utilizzo in fisica quantistica; l'energia del fotone è proprio  $E = h\nu$ . Per risolvere il problema, si sfrutta il teorema del coseno:

$$\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - 2\frac{h\nu}{c}\frac{h\nu'}{c}\cos\phi$$

La conservazione dell'energia, invece, impone, considerata l'energia dell'elettrone come  $E = m_0 c^2$  a riposo, poi come energia in movimento:

$$h\nu + m_0 c^2 = h\nu' + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Risolvendo il sistema, si ottiene:

$$\frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} = \left( \frac{h}{m_0 c} \right) (1 - \cos \phi)$$
$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \phi)$$

La differenza tra le frequenze del fotone, o tra le rispettive lunghezze d'onda, è quindi in funzione dell'angolo di scattering. La grandezza  $\frac{h}{m_0 c}$  si chiama **lunghezza d'onda Compton**. Questa lunghezza è equivalente a un fotone avente come energia la stessa energia a riposo della particella: da qui si aprì il dibattito sulla dualità onda-corpuscolo della materia, arrivando poi all'ipotesi di De Broglie.

---

# Crediti

## Fonti dei testi

- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Introduzione\\_alla\\_meccanica\\_lagrangiana&oldid=451283](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Introduzione_alla_meccanica_lagrangiana&oldid=451283)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Vincoli,\\_virtualismi,\\_variabili\\_lagrangiane&oldid=451284](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Vincoli,_virtualismi,_variabili_lagrangiane&oldid=451284)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Equazione\\_simbolica\\_di\\_d%27Alembert&oldid=451318](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Equazione_simbolica_di_d%27Alembert&oldid=451318)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/La\\_lagrangiana\\_e\\_le\\_equazioni\\_di\\_Eulero-Lagrange&oldid=451323](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/La_lagrangiana_e_le_equazioni_di_Eulero-Lagrange&oldid=451323)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Quantit%C3%A0\\_conservate&oldid=451324](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Quantit%C3%A0_conservate&oldid=451324)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Punti\\_di\\_equilibrio&oldid=451327](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Punti_di_equilibrio&oldid=451327)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Piccole\\_oscillazioni\\_attorno\\_a\\_punti\\_di\\_equilibrio\\_stabili&oldid=451330](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Piccole_oscillazioni_attorno_a_punti_di_equilibrio_stabili&oldid=451330)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Hamiltoniana,\\_equazioni\\_canoniche\\_di\\_Hamilton&oldid=451331](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Hamiltoniana,_equazioni_canoniche_di_Hamilton&oldid=451331)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Spazi\\_delle\\_fasi&oldid=451332](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Spazi_delle_fasi&oldid=451332)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Prede\\_e\\_predatori:\\_le\\_equazioni\\_di\\_Lotka\\_e\\_Volterra&oldid=451333](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Prede_e_predatori:_le_equazioni_di_Lotka_e_Volterra&oldid=451333)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Parentesi\\_di\\_Poisson&oldid=451334](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Parentesi_di_Poisson&oldid=451334)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Quantit%C3%A0\\_conservate\\_e\\_quantit%C3%A0\\_compatibili\\_attraverso\\_le\\_parentesi\\_di\\_Poisson&oldid=451445](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Quantit%C3%A0_conservate_e_quantit%C3%A0_compatibili_attraverso_le_parentesi_di_Poisson&oldid=451445)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Il\\_problema\\_della\\_brachistocrona,\\_elementi\\_di\\_analisi\\_funzionale&oldid=451450](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Il_problema_della_brachistocrona,_elementi_di_analisi_funzionale&oldid=451450)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Il\\_principio\\_variazionale\\_di\\_Hamilton,\\_condizioni\\_alla\\_Dirichlet&oldid=451454](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Il_principio_variazionale_di_Hamilton,_condizioni_alla_Dirichlet&oldid=451454)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Il\\_principio\\_variazionale\\_di\\_Hamilton\\_ampliato&oldid=451461](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Il_principio_variazionale_di_Hamilton_ampliato&oldid=451461)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Funzione\\_principale\\_di\\_Hamilton&oldid=451462](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Funzione_principale_di_Hamilton&oldid=451462)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Trasformazioni\\_canoniche&oldid=451466](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Trasformazioni_canoniche&oldid=451466)

- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Parentesi\\_di\\_Poisson\\_e\\_trasformazioni\\_canoniche&oldid=451557](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Parentesi_di_Poisson_e_trasformazioni_canoniche&oldid=451557)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Metodo\\_di\\_Hamilton-Jacobi&oldid=451559](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Metodo_di_Hamilton-Jacobi&oldid=451559)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Il\\_confine\\_tra\\_mechanica\\_hamiltoniana\\_e\\_mechanica\\_statistica&oldid=451560](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Il_confine_tra_mechanica_hamiltoniana_e_mechanica_statistica&oldid=451560)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/La\\_corda\\_vibrante&oldid=451562](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/La_corda_vibrante&oldid=451562)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/La\\_fisica\\_dopo\\_Maxwell&oldid=451563](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/La_fisica_dopo_Maxwell&oldid=451563)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Esperienza\\_di\\_Michelson-Morley\\_e\\_l%27ipotesi\\_di\\_Einstein&oldid=451593](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Esperienza_di_Michelson-Morley_e_l%27ipotesi_di_Einstein&oldid=451593)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Trasformazioni\\_di\\_Lorentz\\_e\\_composizione\\_delle\\_velocit%C3%A0&oldid=451595](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Trasformazioni_di_Lorentz_e_composizione_delle_velocit%C3%A0&oldid=451595)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Conseguenze\\_dell%27ipotesi\\_di\\_Einstein:\\_dilatazione\\_dei\\_tempi\\_e\\_contraazione\\_delle\\_lunghezze&oldid=451598](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Conseguenze_dell%27ipotesi_di_Einstein:_dilatazione_dei_tempi_e_contraazione_delle_lunghezze&oldid=451598)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Spazio\\_di\\_Minkowsky&oldid=451600](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Spazio_di_Minkowsky&oldid=451600)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Cinematica\\_relativistica&oldid=451601](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Cinematica_relativistica&oldid=451601)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Dinamica\\_relativistica&oldid=451602](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Dinamica_relativistica&oldid=451602)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_analitica/Lagrangiana\\_in\\_relativit%C3%A0\\_e\\_l%27effetto\\_Compton&oldid=451603](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_analitica/Lagrangiana_in_relativit%C3%A0_e_l%27effetto_Compton&oldid=451603)

## Fonti delle immagini

- pag. 16: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Focal\\_stability.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Focal_stability.png)
- pag. 19: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lotka-Volterra.svg>
- pag. 23: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Brachistochrone.gif>
- pag. 28: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cicloide1.png>
- pag. 51: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Harmonicpartials\\_on\\_strings.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Harmonicpartials_on_strings.svg)
- pag. 57: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Michelson\\_Interferometer\\_scheme.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Michelson_Interferometer_scheme.png)
- pag. 64: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:World\\_line2-it.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:World_line2-it.svg)
- pag. 71: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Compton\\_scattering\\_600x225.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Compton_scattering_600x225.png)