



EQUAZIONI DIFFERENZIALI ALLE DERIVATE PARZIALI



WIKIBOOKS
Libri liberi per un mondo aperto

Equazioni differenziali alle derivate parziali

it.wikibooks.org

2024

Questo testo proviene dal sito

https://it.wikibooks.org/wiki/Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali

La versione originale del testo si trovava su WikiToLearn. Una copia è disponibile su

https://web.archive.org/web/20200924105742/https://it.wikitolearn.org/Corso:Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali

Autori principali:

M.bona e altri utenti di WikiToLearn

Questo libro è aggiornato al

20 agosto 2024

In copertina:

La sfera centrale dell'Atomium che riflette la base e il parco di Osseghem. *Autore:* Trougnouf (Benoit Brummer); *licenza:* CC BY-SA 4.0; *fonte:*

[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Atomium_sphere_\(DSCF1211\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Atomium_sphere_(DSCF1211).jpg)

Wikibooks non dà garanzie sulla validità dei suoi contenuti. Per i dettagli vedi:

https://it.wikibooks.org/wiki/Wikibooks:General_disclaimer

Quest'opera è distribuita con licenza **Creative Commons Attribuzione - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale**. Per leggere una copia della licenza visita il sito: <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.it>



Indice

1	Introduzione	1
1.1	Scopo del corso	1
1.2	L'equazione dei fluidi perfetti	3
2	L'equazione delle onde	5
2.1	Modello di D'Alembert	5
2.2	Considerazioni sull'energia cinetica	7
2.3	Modello di Lagrange	9
3	L'equazione di Fourier e l'equazione del calore	11
3.1	L'equazione di Fourier	11
3.2	L'equazione del calore	12
3.3	Considerazioni sull'inversione temporale	13
3.4	Il moto browniano	14
4	Soluzioni e proprietà nel caso monodimensionale	17
4.1	Il teorema di D'Alembert	17
4.2	L'equazione delle onde sulla retta	18
4.3	Il problema della corda vibrante con condizioni al bordo di Dirichlet	19
4.4	L'energia per la corda vibrante	22
4.5	L'equazione del calore con condizioni al bordo di Neumann	23
4.6	L'equazione del calore con condizioni al bordo periodiche	24
5	Problemi agli autovalori	27
5.1	L'operatore derivata seconda	27
5.2	Sviluppi di Fourier e identità di Parseval	29
6	Il problema di Sturm-Liouville	31
6.1	Proprietà dell'operatore di Sturm-Liouville	31
6.2	Le soluzioni del problema di Sturm-Liouville	34
6.3	Richiami sulla teoria operatoriale	36
6.4	Operatore di Hilbert-Schmidt	39
6.5	Conclusioni	41
6.6	Alcuni casi particolari	42
7	L'equazione di Laplace	45

7.1	Formule di Green	45
7.2	Le soluzioni dell'equazione di Laplace: funzioni armoniche	47
8	Le funzioni armoniche	51
8.1	Proprietà generali delle funzioni armoniche	51
8.2	Proprietà della media	51
8.3	Principio del massimo	54
8.4	Regolarità delle funzioni armoniche	54
8.5	Teorema di Liouville	56
9	L'equazione di Poisson	57
9.1	Le soluzioni dell'equazione di Poisson	57
9.2	Soluzioni limitate dell'equazione di Poisson	59
10	Formula di rappresentazione	61
10.1	La formula di rappresentazione	61
10.2	Il metodo delle cariche immagine nel semipiano	63
10.3	Il metodo delle cariche immagine in più dimensioni	64
10.4	Cariche immagine per la sfera: la riflessione di Kelvin	65
11	Principio di Dirichlet	67
11.1	Il principio di Dirichlet	67
12	Gli autovalori del laplaciano	69
12.1	Proprietà generali	69
12.2	Il quoziente di Rayleigh	70
13	L'equazione delle onde sul disco	73
13.1	L'equazione delle onde sul disco	73
13.2	Dipendenza dai dati iniziali	75
14	La trasformata di Fourier	77
14.1	La trasformata di Fourier	77
14.2	Definizione della trasformata di Fourier	78
14.3	Proprietà della trasformata di Fourier	80
14.4	L'equazione del calore con Fourier	82
14.5	L'equazione delle onde	83
14.6	Considerazioni sull'energia delle onde	85
15	Teoria delle distribuzioni	87
15.1	Introduzione	87
15.2	Caratterizzazione delle distribuzioni	88
15.3	La delta di Dirac	89
15.4	Il valor principale	91
15.5	Operazioni con le distribuzioni	93
15.6	Soluzioni fondamentali e distribuzioni	95
15.7	Trasformata di Fourier di una distribuzione	96
15.8	Convoluzioni	97
	Crediti	99
	Fonti dei testi	99

Introduzione

1.1 Scopo del corso

Lo scopo del corso è quello di dare una panoramica introduttiva alla risoluzione delle equazioni differenziali alle derivate parziali. Probabilmente lo studente già saprà affrontare la risoluzione delle equazioni differenziali.

Si consideri ad esempio l'equazione differenziale (seconda legge di Newton):

$$m\ddot{x} = F(x)$$

Con $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o anche $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. A questa equazione può essere associato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x}(t_0) = \underline{v}_0 \\ x(t_0) = \underline{x}_0 \end{cases}$$

L'esistenza della soluzione è garantita dalla continuità di F , mentre l'unicità è garantita dalla sua lipshitzianità; ovvero è necessario che:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(F), \quad |F(x_1) - F(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|$$

Dunque, quando le due condizioni appena enunciate sono verificate, si avrà che:

$$\exists! t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathcal{U}(t_0), \quad x(t) \in C^1(\mathbb{R}^n)$$

Dunque la risoluzione di un problema di Cauchy dà una soluzione che è una funzione, univocamente definita. Generalmente un'equazione alle derivate parziali dipende da più variabili, ovvero le derivate parziali della funzione incognita. Ad esempio si potrà avere:

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad F = F(u, u_x, u_t) = 0$$

Spesso indicheremo le derivate parziali utilizzando un pedice per indicare rispetto a quale variabile viene compiuta la derivazione. Pertanto le tre seguenti notazioni sono equivalenti:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \partial_t u = u_t$$

La principale differenza tra le equazioni differenziali ordinarie e quelle alle derivate parziali è che nel secondo caso non solo si hanno infinite soluzioni, ma si ha un'intera classe di soluzioni che dipende da una funzione. Questo aspetto può essere illustrato meglio grazie al seguente esempio.

Si consideri l'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$u_t + cu_x = 0, \quad c \in \mathbb{R}$$

L'incognita u non compare esplicitamente: un caso di questo tipo è detto **degenerare**. È piuttosto banale risolvere questa equazione e trovare che la sua soluzione è:

$$u(x, t) = ct - x$$

In realtà si osserva che essa non è l'unica soluzione, ma che ogni qualsiasi funzione della forma

$$u(x, t) = f(ct - x), \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall f \in C^1$$

risolve l'equazione di partenza.

Così come per le equazioni differenziali ordinarie, anche per quelle alle derivate parziali è possibile definire l'ordine dell'equazione:

◇ **Definizione** Si definisce **ordine di un'equazione** la derivata di ordine massimo che compare nell'equazione stessa.

In questo corso ci si occuperà prevalentemente di tre equazioni differenziali alle derivate parziali, tutte del secondo ordine.

◇ **Definizione** Si definisce **equazione delle onde** l'equazione degenerare:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

Nel caso n-dimensionale, la derivata seconda rispetto alla variabile x verrà sostituita dall'operatore laplaciano:

$$\nabla^2 = \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Dunque in dimensioni superiori a $n = 2$ l'equazione delle onde sarà:

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$$

◇ **Definizione** Si definisce **equazione del calore** o della diffusione:

$$u_t - D\Delta u = 0$$

◇ **Definizione** Si definisce equazione di Laplace l'equazione stazionaria (così detta in virtù della sua indipendenza da u_t):

$$\Delta u = 0$$

Si tenga conto anche della seguente osservazione: tutte e tre le equazioni che saranno oggetto di studio sono equazioni lineari. Questo significa che la combinazione lineare di soluzioni è ancora una soluzione.

Concludiamo osservando che l'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale alle derivate parziali è sempre uno spazio vettoriale. Generalmente saremo interessati a capire se tale insieme possa essere caratterizzato maggiormente e possa, ad esempio, essere strutturato a spazio di Banach oppure di Hilbert.

1.2 L'equazione dei fluidi perfetti

In questo modulo verrà trattata brevemente un'equazione differenziale alle derivate parziali di cui non ci si occuperà ulteriormente durante il corso; tuttavia è bene dare una panoramica generale del fatto che esistano diversi tipi di equazioni alle derivate parziali.

Quello che si vuole fare è arrivare a un'equazione che possa descrivere i fluidi perfetti. Per fare ciò si supponga che siano note le seguenti quantità:

- il campo di velocità $\underline{u}(\underline{x}, t)$;
- la densità del fluido $\rho(\underline{x}, t)$, grandezza con la quale è possibile definire la massa: $M(V, t) = \int_V \rho(\underline{x}, t) d^3 \underline{x}$
- la densità di forze, ovvero l'insieme delle reazioni esterne che agiscono su un volume di prova dV . Sia essa \underline{f} .

L'equazione di Newton per un elemento infinitesimo di volume dV è:

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \vec{\nabla}) \underline{u} \right) = \underline{f}$$

Il fluido sarà soggetto anche a una pressione, il cui gradiente altera lo stato del sistema. Pertanto l'equazione appena scritta va modificata in:

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \vec{\nabla}) \underline{u} \right) = \underline{f} - \vec{\nabla} P$$

L'equazione appena scritta prende il nome di **equazione di Eulero**. Chiaramente l'equazione di Eulero non è ben definita a meno di non aggiungere al sistema delle altre equazioni che ne caratterizzino completamente lo stato, altrimenti con la sola equazione di cui sopra, essendo ignoto il gradiente di pressione, non sarebbe possibile determinare l'espressione della soluzione.

Una seconda equazione che è necessaria ai fini della trattazione del problema che si sta considerando è l'**equazione di continuità**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \underline{u}) = 0$$

Il passaggio al continuo permette di concludere che:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_{\partial V} (\rho \underline{u}) \hat{n} d\sigma \stackrel{Gauss}{=} - \int_V \nabla(\rho \underline{u}) dV$$

Ovvero:

$$\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \underline{u}) \right] dV = 0$$

Anche con l'introduzione dell'equazione di continuità il sistema non è chiuso. Per far sì che la soluzione possa essere univocamente determinata è necessario considerare un'ultima equazione, detta **equazione costitutiva**, che permette di determinare le informazioni sulle caratteristiche del fluido. Essa sarà della forma:

$$\mathcal{F}(\rho, P) = 0$$

Il sistema costituito dall'equazione di Eulero, da quella di continuità e da quella costitutiva prende il nome di **sistema di Eulero** ed è un sistema chiuso e risolvibile.

Per completezza è possibile considerare anche la componente di attrito viscoso $\underline{f}_\mu = -\mu \Delta \underline{u}$. In questo caso si ottiene l'**equazione di Navier-Stokes**:

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \vec{\nabla}) \underline{u} \right) = \underline{f} - \vec{\nabla} P - \mu \Delta \underline{u}$$

L'equazione delle onde

2.1 Modello di D'Alembert

Le equazioni che determinano l'evoluzione di un fenomeno fisico, in realtà, raramente sono esattamente deducibili, ma sono dedotte da modellizzazioni del fenomeno stesso. In questo modulo verranno presentati due modelli che portano alla deduzione dell'equazione delle onde. Il primo di questi due modelli è quello di D'Alembert.

L'idea è quella di fare delle supposizioni che possano condurre a un modello in grado di descrivere in maniera piuttosto soddisfacente i fenomeni fisici ondulatori. Più precisamente, nel caso monodimensionale, si vuole arrivare all'equazione:

$$\rho u_{tt} - \tau u_{xx} = 0$$

Detta $v^2 = \frac{\tau}{\rho}$, si può riscrivere:

$$u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0$$

Si supponga che sia nota $u(x, t)$, ovvero la curva che descrive la vibrazione a istante t fissato. Supponiamo di voler dedurre l'equazione di cui sopra nel caso di una corda oscillante. Nel suo moto la corda si deforma: quello che si vuole è una relazione tra l'azione che produce la deformazione e la deformazione stessa. Sia Δx l'elemento di prova su cui applicare le equazioni cardinali della dinamica.

In un sistema siffatto entrano in gioco due componenti di forze:

- la risultante delle forze che determina il moto della corda;
- una coppia di forze che ne determina la torsione.

Come prima ipotesi si supponga che non agiscano coppie di forze e dunque che il filo sia perfetto, privo di torsioni. La seconda ipotesi di cui ci si avvale in questo modello consiste nel supporre l'assenza di forze esterne. Chiaramente vi saranno delle forze interne che vanno considerate, infatti tagliando il filo i due lembi si separano. La forza interna responsabile di questo fenomeno è detta **tensione**. Sempre per l'ipotesi di filo perfetto, essendo nulle le torsioni dello stesso, è lecito supporre che la tensione debba agire tangenzialmente al filo. Detto \hat{h} il versore tangente alla curva ed essendo nota la parametrizzazione della curva nel piano, è possibile scrivere che:

$$\hat{h} = (1, u_x) \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2}}$$

La forza di tensione può essere scritta in funzione del versore \hat{h} :

$$T = \tau(x, t)\hat{h}(u)$$

Ai capi di Δx agiscono le forze di tensione. Per poter scrivere l'equazione di Newton per l'elemento di prova che si sta considerando è necessario conoscere l'accelerazione a cui esso è sottoposto: si supponga pertanto che il moto della corda sia puramente trasversale.

Prima di continuare è bene notare ancora una volta come la costruzione di un modello per descrivere un fenomeno fisico sia un processo che si basa su un insieme di ipotesi (restrittive o meno) necessarie per poter scrivere delle equazioni matematiche atte a descrivere il fenomeno fisico in questione.

Detto questo, si ha che $\rho\Delta x$ è la massa del tratto di corda che si sta considerando e $\underline{a} = u_{tt}\hat{k}$ è la sua accelerazione. Dunque, l'equazione di moto dell'elemento di prova Δx è:

$$\rho\Delta x u_{tt}\hat{k} = \tau\hat{h}(x + \Delta x) - \tau\hat{h}(x) \simeq \frac{\partial}{\partial x}(\tau\hat{h})\Delta x + o(\Delta x)$$

Come ultima ipotesi si supponga che le oscillazioni siano "piccole". Più precisamente questo significa che $u_x \simeq o(1)$, dunque:

$$u_x^2 \ll u_x \ll 1$$

Sotto tale ipotesi si ha anche che:

$$\hat{h} = (1, u_x) \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2}} \simeq (1, u_x) \simeq \hat{i} + u_x\hat{k}$$

L'equazione di moto per Δx può essere riscritta come:

$$\rho u_{tt}\hat{k} = \frac{\partial}{\partial x}(\tau(\hat{i} + u_x\hat{k})) + o(1)$$

Proiettando lungo \hat{i} si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau) = 0$$

Ovvero, la tensione non dipende dal punto della corda su cui è valutata: $\tau(x, t) = \tau(t)$. Proiettando lungo \hat{k} :

$$\rho u_{tt} = \tau \frac{\partial u_x}{\partial x} = \tau u_{xx}$$

Ovvero:

$$\rho u_{tt} - \tau u_{xx} = 0$$

Il processo deduttivo appena illustrato è dovuto a D'Alembert. Partendo dall'equazione delle onde così dedotta è possibile estendere a casi più generali.

- Considerando la presenza di forze di richiamo $\underline{f} = -\alpha u\hat{k}$ e di forze di attrito $\underline{f} = -\eta u_t\hat{k}$ si ottiene l'equazione dedotta da Lord Kelvin per spiegare il passaggio di corrente nei cavi elettrici, prima che fossero note le equazioni di Maxwell. Essa è detta **equazione dei cavi telegrafici** e ha la seguente forma: $\rho u_{tt} - \tau u_{xx} + \alpha u + \beta u_t = f(x, t)$

- Nel caso in cui $\beta = f = 0$, dette $v^2 = \frac{\tau}{\rho}$ e $m^2 = \frac{\alpha}{\rho}$ si ricava l'**equazione di Klein-Gordon**:

$$u_{tt} - v^2 u_{xx} + m^2 u = 0$$

In definitiva, in questo modulo si è derivata un'equazione (quella delle onde) partendo da una modellizzazione del fenomeno fisico da essa descritto. Un approccio di questo tipo ai problemi è molto comune in fisica e per uno stesso problema è possibile avere modellizzazioni differenti. Nel caso della corda oscillante, ad esempio, esiste una seconda metodologia deduttiva dovuta a Lagrange, che vedremo più avanti. Entrambi i modelli, di Lagrange e di D'Alembert, rappresentano un *modus operandi* che partendo da elementi discreti, tramite opportune ipotesi e semplificazioni, è in grado di dedurre il comportamento di un sistema fisico nel continuo.

2.2 Considerazioni sull'energia cinetica

Sappiamo che i sistemi descritti dalle equazioni di moto dedotte dalle leggi cardinali della dinamica implicano, sotto alcune ipotesi, la definizione di una quantità conservata, detta **energia**. È opportuno chiedersi se vi sia un analogo per i fenomeni descritti da equazioni differenziali alle derivate parziali, come l'equazione delle onde appena dedotta.

Dalla seconda equazione di Newton

$$m\ddot{x} = -\mathcal{U}'(x)$$

si può ricavare il valore dell'energia totale (meccanica) del sistema in maniera piuttosto naturale:

$$m\ddot{x}\dot{x} = -\mathcal{U}'(x)\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + \mathcal{U}(x(t)) \right) = 0$$

Dunque, per un sistema descritto da $m\ddot{x} = -\mathcal{U}'(x)$, esiste una quantità conservata, che verrà chiamata energia, definita da:

$$E(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + \mathcal{U}(x(t))$$

Ci chiediamo se qualcosa di simile possa valere per l'equazione delle onde in una dimensione:

$$\rho u_{tt} - \tau u_{xx} = 0$$

Procedendo in modo analogo a quanto fatto per derivare l'espressione classica dell'energia si ha:

$$\rho u_{tt} u_t - \tau u_{xx} u_t = 0$$

riscrivibile come:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho u_t^2 \right) - \tau u_{xx} u_t = 0$$

Occorre capire come trattare il secondo addendo. Si nota che:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_x u_t) = u_{xx} u_t + u_x u_{xt} = u_{xx} u_t + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u_x^2 \right)$$

E quindi è possibile riscrivere:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} (\rho u_t^2 + \tau u_x^2) \right] + \tau \frac{\partial}{\partial x} (-u_x u_t) = 0$$

Quella appena ottenuta è un'equazione di continuità, nella quale è possibile identificare una densità di energia:

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\rho u_t^2 + \tau u_x^2)$$

A cui è associato un flusso pari a:

$$J = -\tau u_x u_t$$

È anche possibile definire la relazione di cui sopra in forma integrale, passando al continuo, ottenendo:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \frac{1}{2} (\rho u_t^2 + \tau u_x^2) dx = [u_x(b) u_t(b) - u_x(a) u_t(a)] \tau$$

La densità di energia, o l'energia stessa se ϵ viene integrata sull'insieme di definizione del nostro problema, è una quantità conservata del sistema considerato nel caso in cui $J = 0$. Questa condizione si verifica per differenti condizioni al bordo, tutte applicabili all'equazione delle onde considerata. Esse sono:

- condizioni al bordo di Dirichlet, equivalenti al problema di una corda vibrante con estremi fissi:
 $u(a; t) = 0 = u(b; t)$
- condizioni al bordo di Neumann:
 $u_x(a) = u_x(b) = 0$
- condizioni al bordo periodiche:
 $u_x(a; t) = u_x(b; t), \quad u(a; t) = u(b; t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
che equivalgono a studiare il problema dell'equazione delle onde su un cerchio (o su un toro in \mathbb{R}^n).

Le condizioni al bordo di periodicità sono delle condizioni non locali, dal momento che mettono in relazione tra loro punti distanti del sistema.

È possibile definire delle condizioni al bordo più complesse, o comunque più generali, di quelle appena presentate. Un esempio sono le condizioni al bordo di Robin (o del terzo tipo):

$$u_x(b) + \alpha(x) u(b) = 0$$

Volendo descrivere un fenomeno non confinato, in una dimensione ciò significa che il fenomeno si estende su tutta la retta reale, continuerebbe a valere la conservazione dell'energia perché è lecito supporre che le soluzioni siano tutte tali da svanire all'infinito. In generale è possibile enunciare la seguente proposizione:

Per ogni soluzione dell'equazione delle onde $\rho u_{tt} - \tau u_{xx} = 0$, valgono le seguenti proprietà:

- detta ϵ la densità di energia e detto J il suo flusso, ovvero la densità di corrente di energia, vale che:

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon + \frac{\partial}{\partial x} J = 0$$
- la relazione precedente vale anche nel passaggio al continuo:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \epsilon dx = \tau [u_x(b)u_t(b) - u_x(a)u_t(a)]$$
- l'energia è una quantità conservata del sistema quando il problema è definito con condizioni al bordo di Dirichlet, Neumann oppure periodiche;
- la soluzione è di tipo classico, ovvero si richiede che sia $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Nel caso unidimensionale appena considerato è sufficiente anche solo che $u \in C^2((a, b) \times \mathbb{R})$.

Queste considerazioni riguardo l'energia mettono in evidenza come la risoluzione di un'equazione alle derivate parziali abbia delle proprietà che vanno oltre la semplice estensione delle proprietà della soluzione di un'equazione differenziale ordinaria.

2.3 Modello di Lagrange

Nei moduli precedenti è stata derivata l'equazione delle onde a partire dal modello di D'Alembert. In questo modulo ci si sofferma su un modello differente da quello già presentato, che però permette di giungere alle medesime conclusioni: il **modello di Lagrange**.

In questo approccio la corda vibrante è idealizzata a un sistema continuo costituito da N particelle identiche, tra loro collegate e interagenti da molle, tutte con la medesima costante elastica k . In tale modello si assumono anche le seguenti ipotesi:

- il moto delle particelle è unicamente trasversale;
- si suppone che le particelle interagiscano tra loro tramite forze elastiche. Tutte le forze elastiche sono tra loro identiche, avendo le particelle stessa massa e le molle stessa costante elastica, e le interazioni avvengono solo tra primi vicini.

Partendo da questa approssimazione discreta, l'equazione delle onde si otterrà passando al limite per $N \rightarrow \infty$ e $a \rightarrow 0$.

Il sistema si studia usando la meccanica lagrangiana, pertanto è necessario calcolare il contributo di energia cinetica e di energia potenziale totale del sistema. Ogni particella sarà descritta dalla coppia di coordinate (ia, u_i) , $i = 0, \dots, N + 1$. Si ha:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m}{2} \dot{u}_i^2(t)$$

Mentre per l'energia potenziale:

$$V = \sum_{i=1}^N r_{i,i+1}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{k}{2} \left[((i+1)a - ia)^2 + (u_{i+1} - u_i)^2 \right]$$

Sapendo che i contributi costanti di V non hanno effetto sulle equazioni di Eulero-Lagrange del sistema e quindi possono essere trascurati, si può scrivere che il valore di V è:

$$V = \frac{k}{2} \sum_{i=0}^N (u_{i+1} - u_i)^2$$

In definitiva, la lagrangiana del sistema è data da:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \sum_{i=0}^{N+1} \dot{u}_i^2(t) - \frac{k}{2} \sum_{i=0}^N (u_{i+1} - u_i)^2$$

L'evoluzione del sistema è studiabile grazie alle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$m\ddot{u}_i = -k [(u_i - u_{i+1}) + (u_i - u_{i-1})], \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Dividendo per a si ottiene:

$$\frac{m\ddot{u}_i}{a} = ak \frac{\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{a} - \frac{u_i - u_{i-1}}{a} \right)}{a}$$

Il fattore che compare al lato destro dell'equazione appena scritta, può essere pensato come il rapporto incrementale che definisce la derivata seconda. Ovvero:

$$\lim_{a \rightarrow 0, N \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{a} - \frac{u_i - u_{i-1}}{a} \right)}{a} = u_{xx}$$

Questo passaggio al limite consente di definire $\frac{m}{a} \rightarrow \rho$ e $ak \rightarrow \tau$. In realtà questi due limiti sono ipotesi che è necessario, e sensato, fare affinché il sistema abbia significato fisico. Questo passaggio al limite porta a poter riscrivere l'equazione di moto vista sopra come:

$$\rho u_{tt} - \tau u_{xx} = 0$$

Abbiamo dunque derivato l'equazione delle onde, nel caso monodimensionale, partendo da un modello, e dunque da un impianto di ipotesi, differente da quello di D'Alembert già visto.

Concludiamo questo modulo osservando che la derivazione appena effettuata si basa su un passaggio al limite, cosa che non avveniva nel modello di D'Alembert. Questo passaggio al limite è estremamente importante perché consente di giungere alla seguente osservazione.

Data la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \sum_{i=0}^{N+1} \dot{u}_i^2(t) - \frac{k}{2} \sum_{i=0}^N (u_{i+1} - u_i)^2$$

L'equazione delle onde si ricava passando al limite per $N \rightarrow +\infty$ e $a \rightarrow 0$, che equivale a scrivere:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathcal{L} = \int_a^b \left(\frac{\rho}{2} u_t^2 - \frac{\tau}{2} u_x^2 \right) dx$$

Ovvero, è possibile concludere che un sistema continuo ammette lagrangiana. Questa breve osservazione ci porta anche a poter concludere che un sistema continuo ammette pure equazioni di Eulero-Lagrange.

L'equazione di Fourier e l'equazione del calore

3.1 L'equazione di Fourier

Nei moduli precedenti abbiamo ricavato l'equazione delle onde nel caso monodimensionale. Ci chiediamo come sia possibile ricavare, sempre applicando delle opportune ipotesi e semplificazioni, l'equazione del calore nel caso monodimensionale:

$$u_t - Du_{xx} = 0$$

Si supponga che il sistema studiato sia caratterizzato da una quantità q tale da soddisfare l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div} J = 0$$

Integrando su un volume e applicando il teorema della divergenza si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} q d^3 \vec{x} = - \int_{\partial \Omega} J \hat{n} d\sigma$$

Dal momento che l'equazione del calore, soprattutto nel caso n-dimensionale, rappresenta un'equazione di diffusione, si assume che:

$$q = \rho(x; t), \quad \underline{J} = \rho(x; t) \underline{v}$$

L'equazione di continuità può essere riscritta come:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) = 0$$

In realtà, il campo di velocità non è noto e non si possono fare delle ipotesi su di esso; pertanto è necessario introdurre un'ipotesi per poter fissare il valore di \underline{J} . Tale ipotesi va sotto il nome di **legge di Fick** ed è rappresentata da:

$$\underline{J} = -D \nabla \rho, \quad D \in \mathbb{R}$$

A livello macroscopico la legge di Fick definisce una quantità \underline{J} , che si oppone alla concentrazione, direttamente proporzionale al gradiente della densità di soluto ρ . Usando la legge di Fick, è possibile riscrivere l'equazione di cui sopra come:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(-D \nabla \rho) = 0$$

Da cui segue l'equazione di Fourier per la diffusione:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - D \nabla^2 \rho = 0$$

3.2 L'equazione del calore

La derivazione dell'equazione di Fourier porta a:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - D \Delta \rho = 0$$

Innanzitutto è bene notare che se D avesse una dipendenza esplicita dalla posizione o dal tempo, ovvero se $D = D(x)$ oppure $D = D(t)$, allora avremmo una equazione alle derivate parziali a coefficienti non costanti da dover risolvere. A parte questa precisazione, vogliamo ora studiare il processo deduttivo dell'equazione del calore.

Innanzitutto si tenga presente che per l'equazione del calore è necessario considerare, al posto di ρ , una nuova quantità: la **densità di energia**. Sia essa definita come:

$$\epsilon = c\rho T$$

Dove:

- c rappresenta il calore specifico;
- ρ rappresenta la densità di massa;
- T rappresenta la temperatura assoluta.

Dunque, in un intervallo di tempo finito Δt si avrà una variazione di energia interna pari a:

$$\Delta \int_{\Omega} c\rho T d^3 \vec{x}$$

Il corrispondente flusso di corrente di energia in $\partial\Omega$ invece varrà:

$$- \int_{\partial\Omega} \underline{J} \hat{n} d\sigma$$

In analogia con la legge di Fick, si definisce \underline{J} con la **legge di Newton-Fourier**:

$$\underline{J} = -k \underline{\nabla} T, \quad k > 0 \text{ conducibilità termica}$$

L'equazione di continuità pertanto può essere scritta, per un intervallo finito Δt , come:

$$\frac{\Delta}{\Delta t} \int_{\Omega} c\rho T d^3 \vec{x} = - \int_{\partial\Omega} \underline{J} \hat{n} d\sigma$$

Nell'ipotesi in cui l'intervallo di tempo $\Delta t \rightarrow 0$, si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} c\rho T d^3 \vec{x} = - \int_{\partial\Omega} \underline{J} \hat{n} d\sigma = - \int_{\Omega} \text{div}(k \underline{\nabla} T) d^3 \vec{x}$$

Da cui segue:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t} (c\rho T) - \text{div}(k \underline{\nabla} T) \right] = 0, \quad \forall \Omega \text{ misurabile}$$

Dovendo l'integrale appena scritto essere nullo per ogni supporto misurabile Ω , dal teorema di annullamento si ha che:

$$\frac{\partial}{\partial t}(c\rho T) - \operatorname{div}(k\nabla T) = 0$$

Da cui segue l'equazione del calore:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{k}{c\rho} \Delta T = 0$$

Prima di proseguire oltre è bene osservare che l'approccio adottato per derivare l'equazione delle onde, ovvero partire scrivendo l'equazione di Newton del sistema, in questo caso era totalmente inapplicabile. La derivazione dell'equazione del calore, così come quella dell'equazione di Fourier, si basa su leggi fenomenologiche generali e macroscopiche. Sarebbe pertanto impossibile effettuare il passaggio al continuo partendo dalle leggi di Newton in forma discreta, come invece si fa per derivare l'equazione delle onde.

3.3 Considerazioni sull'inversione temporale

Nella derivazione dell'equazione del calore si è sottolineato come il *modus operandi* che si è adottato fosse totalmente differente da quello adottato per ricavare l'equazione delle onde. In questo modulo si osserva una seconda differenza, ancor più profonda, tra queste due equazioni.

Siano:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{equazione delle onde} \\ u_t - \Delta u = 0, & \text{equazione del calore} \end{cases}$$

Si consideri la funzione $v(x; t) = u(x; -t)$, ovvero la funzione che si ottiene dall'azione dell'operatore di inversione temporale su $u(x; t)$. Si supponga inoltre che $u(x; t)$ sia soluzione dell'equazione delle onde, piuttosto che di quella del calore. Andiamo a studiare che cosa si può dire per $v(x; t)$.

Si supponga come primo caso che $u(x; t)$ sia soluzione dell'equazione delle onde. Ci si chiede se pure $v(x; t)$ lo sia, ovvero se:

$$v_{tt} - \Delta v = 0$$

L'azione dell'operatore laplaciano sarà la stessa sia su $v(x; t)$ che su $u(x; t)$ dal momento che nella parte spaziale le due funzioni coincidono. Inoltre:

$$v_t = \frac{\partial}{\partial t}(u(x; -t)) = -u_t \Rightarrow v_{tt} = \partial_t v_t = u_{tt}$$

Si può dunque concludere che l'equazione delle onde è invariante per inversione temporale.

Come secondo caso si supponga che $u(x; t)$ sia soluzione dell'equazione del calore. Per $v(x; t)$ ora si ha un comportamento differente. Pur continuando a valere $\Delta u = \Delta v$, ora si ha una sola derivata parziale rispetto alla variabile t . Ciò significa che se $u(x; t)$ risolve l'equazione del calore, per la sua inversione temporale, ovvero $v(x; t)$, si avrà che:

$$v_t - \Delta v = -u_t - \Delta u \neq 0$$

Si può dunque concludere che l'equazione del calore non è invariante per inversione temporale.

La conclusione di questo modulo è ora piuttosto evidente: mentre l'equazione delle onde è invariante per inversione temporale e dunque descrive un processo reversibile, quella del calore non lo è, pertanto si è portati a concludere che essa descriva un processo irreversibile. È bene chiedersi dove si sia introdotta, a livello deduttivo, questa irreversibilità. La risposta va cercata in due assunzioni fatte, ovvero:

- si è assunto che J fosse assimilabile alla concentrazione;
- si è assunta valida la legge di Newton-Fourier.

In definitiva si osserva anche che il modello deduttivo che viene seguito nel derivare un'equazione (differenziale alle derivate parziali) che descriva un fenomeno fisico ne influenza pesantemente le proprietà.

3.4 Il moto browniano

Visti i modelli di D'Alembert e di Lagrange per derivare l'equazione delle onde e visto il modello deduttivo che porta alle equazioni di Fourier e del calore, in questo modulo ci si occuperà di un altro modello descrittivo che consente di ricavare un'equazione alle derivate parziali atta a descrivere un particolare fenomeno fisico: il **moto browniano**. Per moto browniano si intende un moto erratico, con derivata discontinua, di una qualsiasi specie di particelle in un solvente. Per la prima volta questo fenomeno venne studiato da Brown e, successivamente nel 1905, da Einstein, il cui modo di operare è descritto in questo modulo.

Verrà trattato, per questioni di semplicità, il caso monodimensionale. Ciò che si vuole fare è discutere il moto di un soluto impreggiudicato in un solvente. Sia $\Phi^{(\tau)}(y)$ la densità di probabilità che una particella di soluto si sposti nel solvente di una quantità y in un tempo τ . La probabilità che la particella, che al tempo t si trovava in x , si trovi in $(x + y, x + y + dy)$ al tempo $t + \tau$ è data da:

$$\Psi^{(\tau)}(y)dy$$

In quanto funzione densità di probabilità, essa deve soddisfare le seguenti proprietà:

- deve essere indipendente da x , dal momento che descrive un processo omogeneo. Tale proprietà è valida fintanto che si considerano particelle senza carica;
- essendo una probabilità, è necessario che essa sia normalizzata:

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi^{(\tau)}(y)dy = 1$$
- proprietà di simmetria per cui $\Psi^{(\tau)}(y) = \Psi^{(\tau)}(-y)$, che implica:

$$\int_{\mathbb{R}} y\Psi^{(\tau)}(y)dy = 0$$

Sia $\rho(x; t)dx$ la probabilità che la particella di soluto si trovi in $(x, x + dx)$ al tempo t . Allora si ha la validità della seguente **legge**, detta **di Champman-Kolmogorov**:

$$\rho(x, t + \tau) = \int_{\mathbb{R}} \rho(x - y, t)\Psi^{(\tau)}(y)dy$$

È anche possibile, sotto l'ipotesi che $x \gg y$ e $t \gg \tau$, scrivere:

$$\rho(x; t + \tau) = \rho(x; t) + \frac{\partial}{\partial t}\rho(x; t)\tau + \dots$$

$$\rho(x-y; t) = \rho(x; t) - \frac{\partial}{\partial x} \rho(x; t) y + \frac{y^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x; t) + \dots$$

Sostituendo questi due sviluppi nella legge di Champman-Kolmorogov, si ottiene:

$$\begin{aligned} \rho(x; t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(x; t) \tau &= \int_{\mathbb{R}} \left[\rho(x; t) - \frac{\partial}{\partial x} \rho(x; t) y + \frac{y^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x; t) \right] \Psi^{(\tau)}(y) dy = \\ &= \rho(x; t) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \Psi^{(\tau)}(y) dy}_{=1} - \frac{\partial \rho(x; t)}{\partial t} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} y \Psi^{(\tau)}(y) dy}_{=0} + \frac{\partial^2 \rho}{2 \partial x^2} \int_{\mathbb{R}} y^2 \Psi^{(\tau)}(y) dy = \\ &= \rho(x; t) + \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{y^2}{2} \Psi^{(\tau)}(y) dy}_{=\frac{\sigma^{(\tau)}}{2}} \end{aligned}$$

Detta $D = \frac{\sigma^{(\tau)}}{2\tau}$ si ottiene l'**equazione di moto browniano**:

$$\rho_t = D \rho_{xx}$$

Si definisce **libero cammino medio** la radice quadrata di $\sigma^{(\tau)}$:

$$\lambda^{(\tau)} = \left(\int_{\mathbb{R}} \Psi^{(\tau)}(y) y^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} = (2D\tau)^{\frac{1}{2}}$$

Si nota anche che il libero cammino medio è proporzionale alla radice quadrata del tempo e non al tempo stesso: ciò ci consente di dare validità anche alla definizione di D fatta sopra per ricavare l'equazione di moto browniano. Einstein, nella sua derivazione, dà anche una definizione empirica di D :

$$D = \frac{kt}{6\pi\eta a}, \quad \eta \text{ viscosità; } a \text{ raggio particella}$$

Soluzioni e proprietà nel caso monodimensionale

4.1 Il teorema di D'Alembert

Nei moduli precedenti è stata derivata l'equazione delle onde nel caso monodimensionale:

$$u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0$$

Ora si vuole capire come è possibile studiare questa equazione per determinarne le soluzioni. In sostanza si vuole determinare $u(x; t)$ che la soddisfi. Per farlo non si risolverà esplicitamente l'equazione, ma si sfrutterà un teorema dovuto a D'Alembert.

Sia $u(x; t) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ soluzione dell'equazione delle onde. Allora:

$$u(x; t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

Con $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Il **teorema di D'Alembert** dunque afferma che ogni soluzione dell'equazione delle onde può sempre essere scritta come somma di un'onda progressiva, $f(x - vt)$, e di un'onda regressiva, $g(x + vt)$. Inoltre è possibile provare che, se $f, g \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, anche $u_+ = f(x - vt)$ e $u_- = g(x + vt)$ soddisfano l'equazione delle onde. Dimostriamo il teorema di D'Alembert.

Si consideri la seguente trasformazione di coordinate:

$$\xi = x + vt, \quad \eta = x - vt$$

Si nota che ξ e η sono lineari e invertibili. Ora si vuole scrivere l'azione dell'operatore di D'Alembert in funzione di ξ e η . Essendo $\tilde{u}(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta))$, si ha che:

$$\square_{\xi, \eta} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial \xi} 2 \frac{\partial}{\partial \eta}$$

Infatti:

$$2 \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial vt}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial vt} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}$$

In modo analogo si prova che $2 \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}$. L'equazione delle onde, espressa in funzione di ξ e η , può essere dunque scritta come:

$$4 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \tilde{u}(\xi, \eta) = 0$$

Ovvero:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{u}(\xi, \eta) = 0$$

Dato che $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}$ non dipende da ξ , la si può scrivere come $F(\eta)$ e si ottiene:

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \int F(\eta) + g(\xi)$$

Da cui segue che:

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = f(\eta) + g(\xi)$$

Tornando in x, t si conclude che:

$$u(x; t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

4.2 L'equazione delle onde sulla retta

Sfruttiamo il teorema di D'Alembert per studiare il **problema di Cauchy sulla retta**:

$$\begin{cases} u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \in C^2(\mathbb{R}) \\ u_t(x, 0) = v_0(x) \in C^2(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Se $u(x; t)$ è soluzione classica ed è di classe $C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ allora, in virtù del teorema di D'Alembert, è possibile scrivere:

$$u(x; t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

Questa espressione di $u(x; t)$ deve chiaramente soddisfare i dati iniziali del problema di Cauchy considerato:

$$\begin{cases} u_0(x) = f(x) + g(x) \\ v_0(x) = -v f'(x) + v g'(x) \end{cases}$$

Da cui segue che:

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = u_0(x) \\ -f(x) + g(x) = \frac{1}{v} \int_0^x v_0(s) ds + \alpha \end{cases}$$

È dunque possibile ricavare l'espressione per $f(x)$ e $g(x)$:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} \left(u_0(x) - \frac{1}{v} \int_0^x v_0(s) ds - \alpha \right) \\ g(x) = \frac{1}{2} \left(u_0(x) + \frac{1}{v} \int_0^x v_0(s) ds + \alpha \right) \end{cases}$$

In definitiva, la soluzione del problema di Cauchy può essere scritta come:

$$u(x; t) = \frac{1}{2} \left[u_0(x - vt) + u_0(x + vt) + \frac{1}{v} \int_{x-vt}^{x+vt} v_0(s) ds \right]$$

Quanto appena visto in realtà è un'applicazione diretta del seguente teorema.

Sia $u(x; t) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ soluzione classica del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0 \\ u(x; 0) = u_0(x) \\ u_t(x; 0) = v_0(x) \end{cases}, \text{ con } u_0, v_0 \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

Allora, l'unica soluzione del problema di Cauchy sulla retta è:

$$u(x; t) = \frac{1}{2} \left[u_0(x - vt) + u_0(x + vt) + \frac{1}{v} \int_{x-vt}^{x+vt} v_0(s) ds \right]$$

Sebbene il teorema precedente abbia una portata molto ampia, è bene notare che nel caso in cui $v_0(x) = 0$ allora la soluzione del problema di Cauchy sarà data da:

$$u(x; t) = \frac{1}{2} [u_0(x - vt) + u_0(x + vt)]$$

Che può essere costruita utilizzando una funzione a gradino. In effetti, in questo caso, non si ha più regolarità nei dati iniziali e quindi la soluzione non sarà più classica: infatti viene meno una delle ipotesi del teorema precedente.

Il risultato del teorema precedente è esprimibile in forma ancor più generica, infatti lo studio del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \square u = 0 \\ u(x; t_0) = u_0(x) \\ u_t(x; t_0) = v_0(x) \end{cases}$$

porta a ricavare la seguente espressione per la soluzione:

$$u(x; t) = \frac{1}{2} \left[u_0(x - v(t-t_0)) + u_0(x + v(t-t_0)) + \frac{1}{v} \int_{x-v(t-t_0)}^{x+v(t-t_0)} v_0(s) ds \right]$$

Quanto appena detto consente di arrivare a un'importante conclusione: la soluzione dell'equazione delle onde non solo è invariante per inversioni temporali, ma anche per traslazioni temporali. Questo implica che la soluzione dell'equazione delle onde è invariante anche per trasformazioni di Lorentz.

4.3 Il problema della corda vibrante con condizioni al bordo di Dirichlet

Continuiamo a occuparci dell'equazione delle onde: si vuole studiare il problema di Cauchy per un dominio limitato $[0; L]$. Dalla limitatezza del dominio segue la necessità di condizioni al bordo di Dirichlet. Quindi, il problema studiato è:

$$\begin{cases} \square u = 0 \\ u(x; 0) = u_0(x) \\ u_t(x; 0) = v_0(x) \\ u(0; t) = u(L; t) = 0 \end{cases}, \quad x \in [0; L], t \in \mathbb{R}$$

Si procede alla risoluzione di questo problema di Cauchy usando il metodo di separazione delle variabili. Pertanto sia $u(x; t) = S(x)T(t)$ l'espressione attesa per la soluzione. Deve valere:

$$\frac{1}{v^2}S(x)\ddot{T}(t) - S''(x)T(t) = 0$$

Si osserva che $u(x; t) \neq 0$ perché non avrebbe senso fisico e non soddisferebbe le condizioni iniziali. Pertanto è lecito dividere ambo i lati dell'equazione appena scritta per $u(x; t)$ e ottenere:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} - \frac{S''(x)}{S(x)} = 0$$

Ovvero:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{S''(x)}{S(x)} = \alpha$$

Dove è necessario imporre l'uguaglianza ad una costante dal momento che i due membri dell'uguaglianza appena scritta dipendono da due variabili distinte. In definitiva si ottengono due equazioni differenziali, una per la parte spaziale e una per quella temporale di $u(x; t)$:

$$\begin{cases} \ddot{T}(t) - \alpha v^2 T(t) = 0 \\ S''(x) - \alpha S(x) = 0 \end{cases}$$

Iniziamo risolvendo l'equazione per la parte spaziale: α può essere maggiore, minore oppure uguale a zero. I casi $\alpha > 0$ e $\alpha = 0$ non sono ammissibili; infatti se $\alpha > 0$ avremmo:

$$S(x) = A \cosh(\sqrt{\alpha}x) + B \sinh(\sqrt{\alpha}x)$$

Tuttavia questa soluzione implicherebbe che $u(x; t) = 0$, che è l'unica possibilità per far sì che vengano soddisfatte sia le condizioni iniziali che quelle al bordo. Chiaramente una soluzione di questo tipo è priva di significato, dal momento che rappresenta una funzione d'onda identicamente nulla nello spazio e nel tempo, pertanto viene scartata.

Se $\alpha = 0$ avremmo:

$$S(x) = Ax + B$$

Tuttavia, sempre per dover soddisfare le condizioni iniziali al bordo, anche in questo caso si avrebbe $u(x; t) = 0$.

Necessariamente si dovrà avere $\alpha < 0$. Sia $\alpha = -k^2$. Per la parte spaziale si ottiene:

$$S(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

Per le condizioni al bordo si ha:

$$S(0) = A = 0$$

$$S(L) = B \sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi$$

Si conclude quindi che, posto $\alpha < 0$, esistono infinite soluzioni, tuttavia quantizzate, per la parte spaziale. Esse corrispondono a tutti quei $k_n = \frac{n\pi}{L}$:

$$S_n(x) = B \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Per la parte temporale occorre risolvere:

$$\ddot{T}(t) - \alpha v^2 T(t) = 0$$

Procedendo in maniera del tutto analoga a quanto si è fatto per la parte spaziale si ricava:

$$T_n(t) = A_n \cos(k_n vt) + B_n \sin(k_n vt)$$

Si conclude quindi che una soluzione del problema di Cauchy studiato è:

$$u_n(x; t) = [A_n \cos(k_n vt) + B_n \sin(k_n vt)] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \forall n$$

Si osserva che anche combinando tra loro le varie $u_n(x; t)$ si trova una soluzione del problema di Cauchy che soddisfa le condizioni iniziali e quelle al bordo. Pertanto anche la seguente è soluzione:

$$u(x; t) = \sum_{n \geq 1} \left([A_n \cos(k_n vt) + B_n \sin(k_n vt)] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right)$$

con condizioni iniziali soddisfatte per:

$$\begin{cases} u(0; x) = \sum_{n \geq 1} A_n \sin(k_n x) = u_0(x) \\ u_t(0; x) = \sum_{n \geq 1} v k_n B_n \sin(k_n x) = v_0(x) \end{cases}$$

Ovvero, la soluzione trovata soddisfa le condizioni iniziali quando è risolvibile il sistema appena scritto. Questo significa che è sufficiente determinare i coefficienti di Fourier delle funzioni, per ipotesi note, $u_0(x)$ e $v_0(x)$. Richiedendo inoltre che le soluzioni della parte spaziale siano tra loro ortogonali si ricava che:

$$\int_0^L S_n(x) S_m(x) dx = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \equiv \delta_{n,m}$$

Ovvero:

$$S_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Si conclude quindi che $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ rappresenta un sistema ortonormale in $L^2([0; L])$. Concludiamo osservando che, come già detto sopra, è possibile prendere $u(x; t)$ nella forma:

$$u(x; t) = \sum_{n \geq 1} \left([A_n \cos(k_n vt) + B_n \sin(k_n vt)] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right)$$

Tuttavia, affinché questa espressione soddisfi anche le condizioni iniziali, è necessario che A_n e B_n , che come già detto sono coefficienti di Fourier, siano dati da:

$$A_n = \langle u_0 | S_n \rangle$$

$$B_n = \frac{1}{vk_n} \langle v_0 | S_n \rangle$$

4.4 L'energia per la corda vibrante

Si consideri ancora il problema di Dirichlet per la corda vibrante:

$$\begin{cases} u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0 \\ u(x; 0) = u(x) \\ u_t(x; 0) = u_t(x) \\ u(0; t) = u(L; t) = 0 \end{cases}$$

È stato già dimostrato che la soluzione del problema può essere scritta sfruttando la serie di Fourier:

$$u(x; t) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n(t) s_n(x)$$

Sappiamo che l'energia totale può essere scritta, da definizione, come:

$$E = E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [u_t^2(x; t) + v^2 u_x^2(x; t)] dx$$

Si vuole ora ricavare l'espressione esplicita per questa grandezza. Per farlo si sfrutta un'importante proprietà del sistema studiato: l'energia totale è una grandezza conservata. Dunque:

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \int_0^L [u_t^2(x) + v^2 u_x^2(x)] dx$$

Per scrivere esplicitamente E in funzione dell'espressione di $u(x; t)$ scritta sopra, è necessario calcolare esplicitamente u_t e u_x .

Per u_t si ha che:

$$u_t = u_t(x; t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dot{q}_n(t) s_n(x)$$

Per u_x si ha che $u_x(x; t) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n(t) s'_n(x)$. Essendo $s_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n x)$ si ha:

$$s'_n(x) = k_n \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(k_n x) = k_n \tilde{s}_n(x)$$

Da cui segue che $u_x(x; t)$ può essere scritta come:

$$u_x(x; t) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n(t) k_n \tilde{s}_n(x)$$

È ora possibile calcolare i quadrati di queste due funzioni, necessari per poter determinare l'espressione esplicita dell'energia totale del sistema:

$$u_t^2(x; t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \dot{q}_n(t) s_n(x) \dot{q}_m(t) s_m(x)$$

Integrando tra 0 e L si ottiene:

$$\int_0^L u_t^2(x; t) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \dot{q}_n(t) \dot{q}_m(t) \underbrace{\int_0^L s_n(x) s_m(x) dx}_{\delta_{n,m}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dot{q}_n^2(t)$$

Con conti del tutto analoghi si ricava il valore del termine di energia potenziale:

$$\int_0^L v^2 u_x^2(x; t) dx = v^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} q_n(t) q_m(t) \underbrace{\int_0^L \tilde{s}_n(x) \tilde{s}_m(x) k_n k_m dx}_{\delta_{n,m} k_n k_m} = v^2 \sum_{n=1}^{+\infty} q_n^2(t) k_n^2$$

In definitiva, l'energia totale del sistema può essere scritta come:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (u_t^2 + v^2 u_x^2) dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dot{q}_n^2 + \underbrace{v^2 k_n^2}_{\omega_n^2} q_n^2 \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \dot{q}_n^2 + \frac{1}{2} \omega_n^2 q_n^2 \right)$$

Si è arrivati a un risultato piuttosto importante: la corda vibrante può essere idealizzata a un sistema di infiniti oscillatori armonici. Inoltre l'analisi di Fourier, che ci ha permesso di scrivere $u(x; t) = \sum q_n(t) s_n(x)$, permette di trovare una base ortonormale rispetto a cui l'energia è diagonale.

4.5 L'equazione del calore con condizioni al bordo di Neumann

Si vuole ora studiare l'equazione del calore, con condizioni al bordo di Neumann:

$$\begin{cases} u_t - D u_{xx} = 0 \\ u(x; 0) = u_0(x) \\ u_x(0; t) = u_x(L; t) = 0 \end{cases}, \quad x \in (0; L), t > 0$$

Usando lo stesso metodo risolutivo adottato per risolvere l'equazione della corda vibrante con estremi fissi, ovvero il metodo di separazione delle variabili, si ha:

$$\frac{1}{D} \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \frac{S''(x)}{S(x)} = \alpha$$

Per la parte spaziale si ottiene:

$$\begin{cases} S''(x) - \alpha S(x) = 0 \\ S'(0) = S'(L) = 0 \end{cases}$$

Anche in questo caso, così come per la corda vibrante, è possibile osservare che i casi $\alpha > 0$ e $\alpha = 0$ non sono accettabili perché si otterrebbe un'espressione per $S(x)$ che non soddisferebbe le condizioni iniziali. Pertanto sia $\alpha < 0$. Detto $\alpha = -k^2$ si ottiene:

$$S''(x) + k^2 S(x) = 0$$

$$S(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

$$S'(L) = 0 = -A \sin(kL) \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$$

Dunque le soluzioni per la parte spaziale sono date da:

$$S_n(x) = B \cos(k_n x), \quad n \geq 0$$

Si osservi che il caso $n = 0$ dà $S_0(x) = B = \text{cost}$: in questo caso non è un problema, a differenza del caso della corda vibrante con estremi fissi, dato che le condizioni al bordo di Neumann rimangono soddisfatte. In maniera analoga si risolve l'equazione differenziale per la parte temporale e si ottiene:

$$T(t) = A_n e^{-D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

In definitiva, la soluzione globale del problema di Cauchy studiato sarà data dalla combinazione lineare delle $S_n(x)T_n(t)$:

$$u(x; t) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n e^{-D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \cos(k_n x)$$

La soluzione appena trovata deve soddisfare anche le condizioni iniziali, pertanto è necessario che:

$$u(x; 0) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = u_0(x)$$

I coefficienti A_0 e A_n , come nel caso della corda vibrante, non sono altro che i coefficienti di Fourier di $u_0(x)$. Anche in questo caso è possibile concludere che le soluzioni spaziali costituiscono un sistema ortogonale in $L^2([0; L])$ che può essere normalizzato in maniera tale da far sì che esso costituisca un sistema ortonormale completo.

4.6 L'equazione del calore con condizioni al bordo periodiche

In analogia con i due casi appena visti (corda vibrante ed equazione del calore con condizioni di Neumann) si vuole ora risolvere il problema dell'equazione del calore con condizioni al bordo periodiche:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 \\ u(x; 0) = u_0(x) \\ u(-L; t) = u(L; t) \\ u_x(-L; t) = u_x(L; t) \end{cases}, \quad x \in [-L; L], \quad t \in \mathbb{R}$$

Anche in questo caso la strategia risolutiva che viene adottata è quella del metodo di Fourier, ovvero di separazione delle variabili: sia $u(x; t) = S(x)T(t)$.

Per la parte spaziale, anche in questo caso, si ha:

$$S''(x) - \alpha S(x) = 0$$

A differenza dei casi precedentemente studiati, ora si hanno condizioni al bordo periodiche. Questo implica che si avranno stesse soluzioni per $\alpha > 0$, $\alpha = 0$, $\alpha < 0$, cioè che tutti i valori di α sono ora ammissibili. Ancora una volta si ottiene $\alpha = -k_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$. Le soluzioni della parte spaziale e di quella temporale sono date da:

$$S_n(x) = \begin{cases} \cos(k_n x) \\ \sin(k_n x) \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$T_n(t) = A_n e^{-Dk_n^2 t}$$

La soluzione del problema di Cauchy, con condizioni al bordo periodiche, può essere scritta come:

$$u(x; t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos(k_n x) + B_n \sin(k_n x)) e^{-Dk_n^2 t}$$

Il valore dei coefficienti A_0 e A_n è dato dai coefficienti di Fourier di $u_0(x)$, fissata dalle condizioni iniziali:

$$u(x; 0) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos(k_n x) + B_n \sin(k_n x)) = u_0(x)$$

Si noti che mentre per le condizioni di Neumann e di Dirichlet si hanno solo seni o coseni, qui si hanno entrambi. Infatti $u(x; 0) = 0$ implica un prolungamento dispari naturale e $A_n = 0 \forall n$, mentre $u_x(x; 0) = 0$ implica un prolungamento pari naturale e $B_n = 0 \forall n$. Le condizioni al bordo periodiche invece rappresentano un caso più generale.

Per i valori di A_0 , A_n e B_n si ha che:

$$A_0 = \frac{\langle S | u_0 \rangle}{\langle 1 | 1 \rangle} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u_0(x) dx$$

$$A_n = \frac{\langle \cos(k_n x) | u_0 \rangle}{\langle \cos(k_n \cdot) | \cos(k_n \cdot) \rangle} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos(k_n x) u_0(x) dx$$

$$B_n = \frac{\langle \sin(k_n x) | u_0 \rangle}{\langle \sin(k_n \cdot) | \sin(k_n \cdot) \rangle} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin(k_n x) u_0(x) dx$$

Le soluzioni $S_n(x)$ normalizzate dunque sono:

$$S_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{L}} \cos(k_n x) \\ \frac{1}{\sqrt{L}} \sin(k_n x) \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

Problemi agli autovalori

5.1 L'operatore derivata seconda

In questo modulo ci si occuperà dello studio di un operatore piuttosto comune, al cui problema agli autovalori associato sono riconducibili pressoché tutti i problemi studiati sino ad ora. L'operatore in questione è quello di **derivata seconda**:

$$\hat{\mathcal{L}} = -\frac{d^2}{dx^2}$$

Questo operatore agisce su $f \in C^2((a, b))$. Il problema agli autovalori per \mathcal{L} può essere scritto come:

$$\hat{\mathcal{L}}f = \lambda f$$

A esso, trattandosi di un'equazione differenziale, può essere associato il problema con condizioni al bordo:

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{L}}f = \lambda f \\ B.C. \end{cases}$$

Definito $\mathcal{D}(\hat{\mathcal{L}}) = \{f \in C^2((a, b)), B.C.\}$, si assume che per i problemi che verranno studiati $f \in \mathcal{D}(\hat{\mathcal{L}})$.

Dai moduli precedenti si possono derivare alcune particolari espressioni per $\mathcal{D}(\hat{\mathcal{L}})$, corrispondenti a differenti condizioni al bordo:

- condizioni al bordo di Dirichlet implicano:
 $\mathcal{D}(\hat{\mathcal{L}}_{Dir}) = \{f \in C^2((a, b)), f(a) = f(b) = 0\}$
- condizioni al bordo di Neumann implicano:
 $\mathcal{D}(\hat{\mathcal{L}}_{Neu}) = \{f \in C^2((a, b)), f'(a) = f'(b) = 0\}$
- condizioni al bordo di Robin implicano:
 $\mathcal{D}(\hat{\mathcal{L}}_{Rob}) = \{f \in C^2((a, b)), f'(a) + \alpha f(a) = 0, f'(b) + \alpha f(b) = 0\}$

Tutte e tre le condizioni appena scritte sono locali. È possibile anche definire una condizione al bordo molto più generale, così da includere anche quelle non locali (e.g. periodiche). Nello specifico si avrebbe:

$$\begin{cases} \alpha_1 f(a) + \beta_1 f(b) + \gamma_1 f'(a) + \delta_1 f'(b) = 0 \\ \alpha_2 f(a) + \beta_2 f(b) + \gamma_2 f'(a) + \delta_2 f'(b) = 0 \end{cases}$$

Questo tipo di condizioni sono estremamente generali, anche troppo per gli scopi di questo corso. Nei casi che verranno studiati si suppone di prendere condizioni al bordo simmetriche, ovvero:

$$\{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)\} \Big|_a^b = 0, \quad f, g \in C^2((a, b))$$

Come già è stato accennato se si considera $\hat{\mathcal{L}}f = \lambda f$, $f \in \mathcal{D}(\hat{\mathcal{L}})$, esso può essere visto, essendo il dominio uno spazio lineare e l'operatore un operatore lineare, come un problema agli autovalori. Ci si chiede se sia lecito aspettarsi, essendo $\hat{\mathcal{L}}$ simmetrico, che $\{f\}$ sia un sistema ortonormale completo per tale operatore. Per provare a dare risposta a questa domanda si inizi considerando il seguente teorema.

Sia $f \in C^2((a, b))$ soluzione del seguente problema al bordo:

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{L}}f = \lambda f \\ f \in C^2((a, b)) \\ \text{B.C. simmetriche} \end{cases}$$

Allora:

1. $\lambda \in \mathbb{R}$
2. la soluzione del problema, f , può essere presa reale;
3. se f_1 ha per autovalore associato λ_1 e f_2 ha λ_2 allora le due funzioni sono ortogonali in $L^2((a, b))$, ovvero:
 $\langle f_1 | f_2 \rangle = 0$
4. se $f(x)f'(x) \Big|_a^b \leq 0$, allora $\lambda \geq 0$

Dimostrazione: per ipotesi si ha che $\hat{\mathcal{L}}f = \lambda f$. Passando ai coniugati si ha che $\hat{\mathcal{L}}\bar{f} = \bar{\lambda}\bar{f}$. Quindi è possibile scrivere:

$$\begin{aligned} (\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b f\bar{f}dx &= \int_a^b [(\mathcal{L}f)\bar{f} - (\mathcal{L}\bar{f})f] dx = \\ &= \int_a^b \left[\left(-\frac{d^2f}{dx^2} \right) \bar{f} + \left(\frac{d^2\bar{f}}{dx^2} \right) f \right] dx = \text{per parti} \\ &= \int_a^b \frac{d}{dx} (-f'\bar{f} + f\bar{f}') dx = (f\bar{f}' - f'\bar{f}) \Big|_a^b = 0 \end{aligned}$$

Dove l'ultima uguaglianza è giustificata dalle condizioni al bordo di simmetria. Rimane così provato il primo punto del teorema.

Si consideri la rappresentazione complessa di f : $f = f_R + if_I$. Sia la parte reale che quella immaginaria devono soddisfare l'equazione agli autovalori:

$$\begin{cases} \mathcal{L}f_R = \lambda f_R \\ i\mathcal{L}f_I = \lambda if_I \Rightarrow \mathcal{L}f_I = \lambda f_I \end{cases}$$

Da cui segue che f può essere presa reale, provando così anche il secondo punto del teorema.

Si considerino f_1, f_2 , entrambe autofunzioni di \mathcal{L} con autovalori distinti λ_1, λ_2 ; si può scrivere:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b f_1 f_2 dx = 0$$

Essendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$, deve necessariamente essere:

$$\int_a^b f_1 f_2 dx = 0 = \langle f_1 | f_2 \rangle = 0$$

Provando così anche il terzo punto del teorema.

Per ora non dimostriamo il quarto punto del teorema per soffermarci su alcune importanti osservazioni. Innanzitutto si noti che la dimostrazione si basa su un'importante relazione, detta **identità di Lagrange**:

$$\int_a^b [(\mathcal{L}f)\bar{g} - (\mathcal{L}g)\bar{f}] dx = (f'\bar{g} - \bar{g}'f) \Big|_a^b$$

Si noti anche che quando il secondo membro dell'identità di Lagrange è nullo, e nel caso delle condizioni al bordo simmetriche questo si verifica, si ha che essa è equivalente alla definizione di operatore simmetrico, infatti si avrebbe:

$$\int_a^b (\mathcal{L}f)\bar{g} dx = \int_a^b (\mathcal{L}g)\bar{f} dx$$

Se valgono le condizioni di Robin in a e quelle di Dirichlet in b si ha che:

$$f'(b)f(b) - f'(a)f(a) = \underset{Robin}{f'(a)f(a)} = -\alpha f^2(a) \geq 0 \Leftrightarrow -\alpha \geq 0$$

Quindi:

$$\lambda \int_a^b f^2 dx = -\alpha f^2(a)$$

Si noti anche che:

$$\int_a^b (\mathcal{L}f)g dx = \int_a^b f''g dx = \int_a^b f'g' dx - f'(b)g(b) - f'(a)g(a) \geq \langle f' | g' \rangle$$

In particolare, se $f = g$ la relazione appena scritta equivale ad affermare che $\hat{\mathcal{L}}$ è un operatore positivo, infatti si avrebbe:

$$\lambda \langle f | f \rangle \geq \|f'\|^2 \geq 0$$

Sfruttando quanto visto nell'osservazione precedente è anche possibile dimostrare l'ultima delle proprietà del teorema di cui sopra.

5.2 Sviluppi di Fourier e identità di Parseval

Nei moduli precedenti sono stati trovati gli autovalori e gli autovettori per l'operatore $\hat{\mathcal{L}}$ nel caso di condizioni al bordo di Dirichlet e di Neumann:

- per condizioni al bordo di Dirichlet:
 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $f_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n x)$, $n \geq 1$
- per condizioni al bordo di Neumann:
 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $f_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(k_n x)$, $n \geq 0$

Avendo poi osservato che la successione degli autovettori, in entrambi i casi, costituiva un sistema ortonormale completo. Anche per $\hat{\mathcal{L}}_R$ (ovvero con condizioni al bordo di Robin), seppur non si sia in grado di fare esattamente i conti, si potrà concludere che la $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ costituisce un sistema ortonormale completo. Questa proprietà degli autovalori discende dal seguente teorema.

Sia $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ una successione di autovettori ortonormali nello spazio di Hilbert \mathcal{H} , nel caso in esame L^2 , e siano c_1, c_2, \dots, c_N dei coefficienti numerici. Allora:

$$\|f - \sum_{n=1}^N c_n f_n\| \geq \|f - \sum_{n=1}^N \langle f | f_n \rangle f_n\|$$

I coefficienti $\langle f | f_n \rangle$ si chiamano coefficienti di Fourier di f , rispetto a $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Il teorema afferma che nell'approssimare f con una somma parziale, l'errore minimo che si introduce è quello in cui l'approssimazione è data in sviluppo in serie di Fourier. Un altro importante punto da sottolineare è il seguente: in virtù del teorema appena enunciato è possibile concludere che la serie $\sum_{n=1}^N |\langle f | f_n \rangle|^2$ converge, ma non è detto (a priori) che essa converga a $\|f\|^2$. Vediamo ora la dimostrazione del teorema.

Si ha che:

$$\begin{aligned} \|f - \sum_{n=1}^N c_n f_n\|^2 &= \int_a^b \left(f - \sum_{n=1}^N c_n f_n \right)^2 dx = \\ &= \int_a^b f^2 dx - 2 \sum_{n=1}^N c_n \int_a^b f f_n dx + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N c_n c_m \underbrace{\int_a^b f_n f_m dx}_{\delta_{n,m}} = \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{n=1}^N c_n \langle f | f_n \rangle + \sum_{n=1}^N c_n^2 = \|f\|^2 + \sum_{n=1}^N (c_n - \langle f | f_n \rangle)^2 - \sum_{n=1}^N (\langle f | f_n \rangle)^2 \geq \\ &\geq \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N (\langle f | f_n \rangle)^2 = \|f - \sum_{n=1}^N \langle f | f_n \rangle f_n\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Quindi è possibile concludere che:

$$\|f - \sum_{n=1}^N c_n f_n\| \geq \|f - \sum_{n=1}^N \langle f | f_n \rangle f_n\|$$

Concludiamo questo modulo riprendendo l'osservazione fatta in precedenza: il teorema appena dimostrato permette di concludere che $\forall f \in \mathcal{H}$ la serie dei suoi coefficienti di Fourier converge. Tuttavia non è possibile affermare, a priori, che essa converga a $\|f\|^2$: affinché ciò sia vero è necessario che la successione $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sia un sistema ortonormale completo. In tal caso vale l'identità di Parseval:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle f | f_n \rangle|^2$$

Si osservi anche che per poter portare avanti il discorso appena fatto non è stato necessario lavorare con un particolare spazio di Hilbert, ma è stato sufficiente usare la nozione di norma, e le sue proprietà, in uno spazio di Hilbert: questo a indicare l'estrema generalità di quanto appena fatto.

Il problema di Sturm-Liouville

6.1 Proprietà dell'operatore di Sturm-Liouville

In questo modulo ci si occuperà dello studio di un particolare operatore, il cui problema al bordo associato è un caso generale della maggior parte dei problemi al bordo in cui sono coinvolti operatori di derivata seconda.

◇ **Definizione** Si definisce **operatore di Sturm-Liouville**:

$$\mathcal{L} = - \left(p(x) \frac{d}{dx} \right)' + q(x)$$

Con le seguenti proprietà:

$$x \in (0, L)$$

L'operatore agisce su funzioni $u \in C^2((0, L)) \cap C^1([0, L])$:

$$\mathcal{L}u = -(pu')' + qu$$

Per ogni problema associato a questo operatore, devono essere soddisfatte le seguenti condizioni al bordo:

$$\begin{cases} h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0 \\ H_1 u(L) - H_2 u'(L) = 0 \end{cases} \quad \sum_{i=1}^2 h_i > 0, \sum_{i=1}^2 H_i > 0, h_i, H_i \geq 0 \forall i$$

Le funzioni $p(x)$ e $q(x)$ devono essere a valori reali, $p(x), q(x) \in \mathbb{R} \forall x \in (0, L)$ e devono soddisfare le seguenti proprietà:

$$p \in C^1([0, L]), p(x) > 0 \forall x \in [0, L]$$

$$q \in C^0([0, L])$$

Il complesso delle richieste di cui sopra qualifica il problema di Sturm-Liouville regolare. Eventuali problemi di definizione di p, q , sull'intervallo o simili caratterizzeranno i così detti problemi di Sturm-Liouville singolari. Nonostante ci si occuperà prevalentemente del caso regolare, si consideri un esempio significativo.

Si consideri l'operatore di Sturm-Liouville che si ottiene nel caso in cui $p(x) \equiv 1 \forall x \in (0, L)$. Esso è definito **operatore di Schrödinger**:

$$\mathcal{L}u = qu - u''$$

Esso rappresenta un caso singolare.

6.1.1 Caratterizzazione dell'operatore di Sturm-Liouville

Iniziamo ora a definire alcune importanti proprietà che caratterizzano l'operatore di Sturm-Liouville. Innanzitutto si può provare che tale operatore è hermitiano, come afferma la seguente proposizione:

L'operatore \mathcal{L} definito sulla varietà lineare $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ è hermitiano.

Si vuole dimostrare che $\langle \mathcal{L}f | g \rangle = \langle f | \mathcal{L}g \rangle$. Si ha che:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}f | g \rangle - \langle f | \mathcal{L}g \rangle &= \\ &= \int_0^L dx \left(-(pf')' + qf \right) \bar{g} - \int_0^L dx \overline{\left(-(pg')' + qg \right)} f = \\ &= \int_0^L dx \left(-(pf')' \right) \bar{g} - \int_0^L dx \overline{\left(-(pg')' \right)} f = p(x) [f\bar{g}' - f'\bar{g}] \Big|_0^L = 0 \end{aligned}$$

Una seconda importante proprietà di \mathcal{L} è data dalla seguente proposizione:

Dato l'operatore $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ e data $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ si ha che $\langle \mathcal{L}f | f \rangle$ può essere rappresentato da una forma quadratica.

Si verifica che:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}f | f \rangle &= \int_0^L dx \left(-(pf')' + qf \right) \bar{f} = \int_0^L dx \left(-(pf')' \right) \bar{f} + \int_0^L dx q |f|^2 \stackrel{\text{per parti}}{=} \\ &= \int_0^L \left(p |f'|^2 + q |f|^2 \right) dx + \frac{h_1}{h_2} p(0) |f(0)|^2 + \frac{H_1}{H_2} p(L) |f(L)|^2 \end{aligned}$$

Si noti anche che se il problema associato avesse condizioni al bordo di Dirichlet il secondo e il terzo addendo sarebbero nulli e la forma quadratica che rappresenta $\langle \mathcal{L}f | f \rangle$ si ridurrebbe al solo termine integrale.

La simmetria di \mathcal{L} ha due importanti conseguenze:

- l'operatore di Sturm-Liouville ammette autovalori reali;
- ad autovalori distinti corrispondono autovettori ortogonali.

Una dimostrazione di queste due proprietà può essere fatta riprendendo in maniera pressoché identica quella usata per dimostrare le medesime proprietà nel caso di operatori simmetrici in spazi finito dimensionali: in quel caso infatti non è stata usata nessuna particolare informazione riguardo allo spazio di Hilbert nel quale si stava lavorando, ma è stata utilizzata unicamente la nozione di norma, che si estende in

modo del tutto naturale anche a spazi infinito dimensionali come quello considerato in questo caso. Un'altra importante caratterizzazione dell'operatore di Sturm-Liouville deriva dal fatto che esso ammetta forma quadratica, infatti si ha che:

- $q \in C^0([0, L]) \Rightarrow q(x) \geq q_{min}(x) \in \mathbb{R}$
- $\langle \mathcal{L}f | f \rangle \geq q_{min} \int_0^L |f|^2 dx = q_{min} \|f\|^2$. Più precisamente varrà che, se λ è autovalore di f :
 $\lambda \|f\|^2 \geq q_{min} \|f\|^2$

Da quanto appena detto segue quindi che:

- l'operatore di Sturm-Liouville è un operatore inferiormente limitato, dato che la forma quadratica ad esso associata lo è;
- tutti gli autovalori dell'operatore di Sturm-Liouville sono sempre maggiori, o al più uguali, ad un valore minimo q_{min} .

Detto questo, è lecito chiedersi se e quando si possa verificare il caso $\lambda = q_{min}$. Sia definito il problema di Sturm-Liouville e sia data la forma:

$$\langle \mathcal{L}f | f \rangle \pm q_{min} \langle f | f \rangle$$

Supponiamo che sia definito il problema di Sturm-Liouville con condizioni al bordo di Dirichlet. Allora, essendo il secondo e il terzo addendo della forma quadratica associata a \mathcal{L} nulli per condizioni al bordo, sarà necessario richiedere che:

$$\int_0^L (p |f'|^2 + (q - q_{min}) |f|^2) dx = 0$$

quali quelli

$$\Rightarrow \int_0^L p |f'|^2 = 0$$

Essendo $p > 0$ la condizione appena scritta è equivalente a richiedere che $f' = 0$ il che implica, in virtù delle condizioni al bordo di Dirichlet, che f debba essere costante e identicamente nulla. Si conclude che per il problema di Sturm-Liouville, con condizioni al bordo di Dirichlet, non si potrà mai avere $\lambda = q_{min}$. Supponiamo invece che le condizioni al bordo siano di Neumann. Seguirebbe che:

$$h_1 = H_1 = 0$$

Ancora una volta si dovrà richiedere che il termine integrale presente nella forma quadratica associata a \mathcal{L} sarà nullo, ma in questo caso il fatto che $f' = 0$ porta a concludere semplicemente che f debba essere costante, ma non identicamente nulla. Si conclude che \mathcal{L} assume sempre autovalori $\lambda \geq q_{min}$ e che l'uguaglianza ($\lambda = q_{min}$) vale se e solo se si hanno condizioni al bordo di Neumann e dunque f costante.

Abbiamo osservato che $\langle \mathcal{L}f | f \rangle \geq q_{min} \|f\|^2, \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$. Abbiamo anche constatato che ciò implica che la forma quadratica associata, e dunque l'operatore stesso, è limitata inferiormente. Ci si chiede se possa essere possibile che essa sia in qualche modo anche limitata superiormente. Ovvero, si vuole capire se sia possibile che:

$$\exists M \text{ t.c. } \langle \mathcal{L}f | f \rangle \leq M \|f\|^2$$

Ciò non può essere possibile. Si consideri ad esempio l'operatore di Sturm-Liouville definito con $p = 1, q = 0$ (ovvero la derivata seconda). In questo caso si ha che:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad u_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Quindi:

$$\langle \mathcal{L}u_n | u_n \rangle = \left\langle \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 u_n | u_n \right\rangle = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

Il che implica che se \mathcal{L} dovesse essere anche superiormente limitato, si avrebbe:

$$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \leq M = \text{cost.}$$

Che è assurdo perché partendo da una palla di raggio finito e applicando \mathcal{L} si ottengono palle di raggio via via crescente.

6.2 Le soluzioni del problema di Sturm-Liouville

Ci si vuole occupare della risoluzione del problema di Sturm-Liouville. Innanzitutto si nota che esso può essere scritto in forma generica come:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda u = f \\ B.C. \end{cases}, \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}), \quad f \in C^0((0, L)) \cap C^2([0, L])$$

Quindi, risolvere il problema di Sturm-Liouville significa essere in grado di risolvere l'equazione differenziale $\mathcal{L}u = f$. Si nota però che la risoluzione di un'equazione non è altro che un problema di inversione. Più precisamente, nel caso in esame, si tratterà di essere in grado di invertire l'operatore \mathcal{L} per poter scrivere:

$$u = \mathcal{L}^{-1}f$$

Chiaramente, affinché quanto appena detto sia fattibile, occorre che $\ker \mathcal{L} = 0$. Pertanto si studierà il problema di cui sopra con l'ipotesi preliminare che \mathcal{L} non abbia autovalore nullo.

Ora che si è inquadrato il problema, possiamo procedere con la sua risoluzione. Innanzitutto si considerino v_1, v_2 soluzioni distinte dei due problemi $\mathcal{L}v_i = 0$ con condizioni al bordo date da:

$$h_1 v_1(0) - h_2 v_1'(0) = 0$$

$$H_1 v_2(L) + H_2 v_2'(L) = 0$$

È possibile che esistano due soluzioni che soddisfano queste condizioni, a patto di prenderle tra loro linearmente indipendenti. Se v_1, v_2 non fossero linearmente indipendenti, allora dovrebbero essere una multiplo dell'altra e soddisfare contemporaneamente le condizioni al bordo, ma questa richiesta sarebbe equivalente ad ammettere che \mathcal{L} abbia autovalore nullo, caso che escludiamo per ipotesi preliminare. Siano dunque v_1, v_2 linearmente indipendenti. Il wronskiano dell'equazione differenziale di secondo ordine associata al problema per \mathcal{L} è dato da:

$$W(x) = \begin{vmatrix} v_1(x) & \text{amp;} v_2(x) \\ v_1'(x) & \text{amp;} v_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

Si consideri il seguente lemma:

Dato l'operatore di Sturm-Liouville $\mathcal{L} = -\left(p(x)\frac{d}{dx}\right)' + q(x)$, e dato il problema al bordo sull'intervallo $[0, L]$ a esso associato si ha che:

$$(pW)(x) = (pW)(0)$$

Dove $W(x)$ è il determinante wronskiano dell'equazione differenziale (equazione agli autovalori) di secondo ordine associata all'azione di \mathcal{L} .

Si ha che $(pW)(x) = cost$ dal momento che:

$$(pW)'(x) = v_1(pv_2)' - v_2(pv_1)' = -v_1qv_2 + v_2qv_1 = 0$$

Dunque $(pW)' = 0 \Rightarrow (pW)(x) = (pW)(0)$.

Sfruttiamo il risultato del lemma per risolvere $\mathcal{L}v = f$ come equazione differenziale, usando il metodo di variazione delle costanti. Si ha che:

$$\begin{bmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \frac{1}{p(x)}$$

Da cui si ricavano i seguenti valori per c_1', c_2' :

$$c_1'(x) = \frac{v_2(x)f(x)}{pW}$$

$$c_2'(x) = -\frac{v_1(x)f(x)}{pW}$$

Da cui è possibile ricavare i valori di $c_1(x), c_2(x)$ integrando. Avendo osservato nel lemma che $pW = cost$, gli integrali ne saranno indipendenti. Si ottiene:

$$u(x) = c_1v_1(x) + c_2v_2(x) - \frac{v_1(x)}{pW} \int_x^L dyv_2(y)f(y) - \frac{v_2(x)}{pW} \int_0^x dyv_1(y)f(y)$$

Occorre determinare i valori delle costanti c_1, c_2 imponendo che $u(x)$ soddisfi le condizioni al bordo. Si ottiene che esse sono soddisfatte se e solo se $c_1 = c_2 = 0$. La soluzione dell'equazione differenziale coincide con la soluzione della non omogenea, ottenuta per variazione delle costanti:

$$u(x) = -\frac{v_1(x)}{pW} \int_x^L dyv_2(y)f(y) - \frac{v_2(x)}{pW} \int_0^x dyv_1(y)f(y)$$

Generalmente la si riscrive come:

$$u(x) = \int_0^L \mathcal{G}(xy)f(y)dy, \quad \mathcal{G}(xy) = -\frac{1}{pW} \begin{cases} v_1(x)v_2(y), & 0 < x < y \leq L \\ v_1(y)v_2(x), & 0 < y < x \leq L \end{cases}$$

La funzione $\mathcal{G}(xy)$ si chiama **funzione di Green dell'operatore di Sturm-Liouville** e coincide con il nucleo integrale di tale operatore. Si osserva quindi che partendo da $\mathcal{L}u = f$ e trattandolo come un problema di inversione si ottiene che:

$$u = \mathcal{L}^{-1}f = \int_0^L \mathcal{G}(xy)f(y)dy$$

Un'altra importante osservazione che è opportuno fare a questo punto è legata alla regolarità della funzione che si ottiene: partendo dall'azione di un operatore differenziale si è ottenuta una funzione che dipende dall'azione di un operatore integrale, quindi si può concludere che l'inversione del problema di Sturm-Liouville ritorna un risultato, per esempio una funzione, più regolare di quella di partenza.

L'operatore $f \mapsto \int_0^L \mathcal{G}(cy)f(y)dy$ è un operatore lineare in $C^0((0, L)) \cap C^2([0, L])$ e corrisponde all'inverso dell'operatore \mathcal{L} su $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ se $\lambda = 0$ non è autovalore per l'operatore di Sturm-Liouville \mathcal{L} .

La funzione di Green $\mathcal{G}(xy)$ è continua in $[0, L] \times [0, L]$. Collegandoci a quest'ultima osservazione, è opportuno chiedersi anche che cosa si possa concludere sulla derivabilità di \mathcal{G} . Si può concludere che, oltre che continua, la funzione di Green dell'operatore di Sturm-Liouville è anche differenziabile su $[0, L] \times [0, L]$, tranne che sulla diagonale $x = y$. Concludiamo questo modulo con un'importante osservazione che lega autovalori e autovettori dell'operatore di Sturm-Liouville a quelli della funzione di Green ad esso associata.

Si è osservato che, partendo da $\mathcal{L}u = f$ è possibile trovare l'espressione esplicita di $u(x)$ studiando questo come un problema di inversione. Torniamo ora al caso in cui l'equazione da risolvere sia proprio quella agli autovalori per \mathcal{L} , ovvero $\mathcal{L}u = \lambda u$. In questo caso si avrà che:

$$u = \lambda \int_0^L \mathcal{G}(xy)u(y)dy, \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$$

Si definisca:

$$\mathcal{G}u(x) \equiv \int_0^L \mathcal{G}(xy)u(y)dy = \frac{1}{\lambda}u$$

Si conclude quindi che, nell'ipotesi in cui $\lambda \neq 0$, la coppia (λ, u) è coppia autovalore/autovettore per \mathcal{L} se e solo se la coppia $(\frac{1}{\lambda}, u)$ è coppia autovalore/autovettore per \mathcal{G} .

6.3 Richiami sulla teoria operatoriale

Per completezza, in questo modulo ci si occuperà di richiamare alcune delle principali nozioni legate alla teoria degli operatori.

Innanzitutto è bene inquadrare il problema: si lavorerà su spazi di Hilbert separabili \mathcal{H} sul campo \mathbb{C} (o \mathbb{R}). Sia V una varietà lineare densa in \mathcal{H} . Sia $\mathcal{L} : V \rightarrow \mathcal{H}$ un operatore lineare; da definizione si ha che:

- $\mathcal{L}(v_1 + v_2) = \mathcal{L}(v_1) + \mathcal{L}(v_2), \quad \forall v_i \in V$
- $\mathcal{L}(\alpha v) = \alpha \mathcal{L}v, \quad \forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$

Nel caso infinito dimensionale può essere vero che V e \mathcal{H} non coincidano anche se la varietà lineare è densa in \mathcal{H} . Si ha che se:

$$\|\mathcal{L}v\|_{\mathcal{H}} \leq M \|v\|, \quad \forall v \in V$$

Allora \mathcal{L} può essere esteso a tutto \mathcal{H} , conservandone la limitatezza.

6.3.1 Teorema

Ogni operatore \mathcal{L} limitato in \mathcal{H} è anche continuo e viceversa.

Se un operatore è limitato si avrà che:

$$\frac{\|\mathcal{L}v\|}{\|v\|} \leq M, \forall v \in \mathcal{H}, v \neq 0$$

Passando all'estremo superiore, si definisce **norma di un operatore** la quantità:

$$\|\mathcal{L}\| = \sup_{v \in \mathcal{H}} \frac{\|\mathcal{L}v\|}{\|v\|}$$

◇ **Definizione** Dato un operatore \mathcal{L} , si definisce **operatore aggiunto**, nello spazio di Banach ottenuto dotando \mathcal{H} della norma indotta dalla definizione di cui sopra, l'operatore \mathcal{L}^* tale che:

$$\langle \mathcal{L}u | v \rangle_{\mathcal{H}} = \langle u | \mathcal{L}^*v \rangle_{\mathcal{H}}$$

In virtù del teorema di Riesz è possibile concludere che esiste sempre, ed è limitato, l'aggiunto di un operatore lineare e limitato.

Dimostrazione

Sia $l(u)v = \langle \mathcal{L}u | v \rangle$. Esso è un funzionale lineare limitato, infatti:

$$|l_u v| \leq |\langle \mathcal{L}u | v \rangle| \leq \|\mathcal{L}u\| \|v\| \leq M \|u\| \|v\|$$

Da cui segue la limitatezza di l_u . Si osserva anche che l_u è prodotto scalare per un vettore, ovvero si può scrivere:

$$l_u = \langle \cdot | w \rangle$$

Per definizione allora $w = \mathcal{L}^*$, cioè l'aggiunto di \mathcal{L}

◇ **Definizione** Un **operatore** è detto **simmetrico** se coincide con il suo aggiunto:

$$\langle \mathcal{L}u | v \rangle = \langle u | \mathcal{L} | v \rangle = \langle u | \mathcal{L}v \rangle$$

◇ **Definizione** Si definisce **operatore autoaggiunto** un operatore lineare, limitato e simmetrico.

Tornando per un momento a quanto fatto nel modulo precedente, ovvero la risoluzione del problema di Sturm-Liouville per inversione, si ha la seguente osservazione: il passaggio da $\mathcal{L}u = \lambda u$ a $\mathcal{G}u = \frac{1}{\lambda}u$ permette di passare da un operatore di derivazione, dunque non limitato, a un operatore integrale che quindi è limitato e simmetrico.

◇ **Definizione** Un operatore \mathcal{L} su \mathcal{H} si dice **compatto** se manda limitati in precompatti. Ovvero se $\forall u_n$, successione limitata su \mathcal{H} , la successione $\{\mathcal{L}u_n\}$ ammette una sottosuccessione convergente in \mathcal{H} .

Come conseguenza diretta di ciò si ha che ogni operatore compatto è anche limitato e il prodotto di un operatore limitato con uno compatto è ancora compatto.

Sia \mathcal{L} un operatore simmetrico e compatto su \mathcal{H} allora esso ammette un autovalore λ_0 che coincide con la sua norma:

$$\lambda_0 = \|\mathcal{L}\|$$

In generale si ha che ogni operatore (limitato) ha per autovalori dei numeri compresi tra $-\|\mathcal{L}\|$ e $\|\mathcal{L}\|$:

$$\mathcal{L}u = \lambda u \Rightarrow \|\mathcal{L}u\| = |\lambda| \|u\| \Rightarrow |\lambda| = \frac{\|\mathcal{L}u\|}{\|u\|} \leq \|\mathcal{L}\|$$

Sfruttando questi due risultati si può concludere un'importante proprietà che è riassunta dalla seguente proposizione:

Sia \mathcal{L} simmetrico e compatto, allora $\exists \lambda_0$ tale che $\lambda_0 = \|\mathcal{L}\|$. Sia u_0 l'autovettore di \mathcal{L} , con autovalore corrispondente λ_0 . Si costruisca lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}^{(1)}$ siffatto:

$$\mathcal{H}^{(1)} = \{u \in \mathcal{H} : \langle u | u_0 \rangle = 0\}$$

Si consideri la restrizione di \mathcal{L} a $\mathcal{H}^{(1)}$: \mathcal{L} continuerà a essere simmetrico, compatto, lineare e limitato. Pertanto anche per questa restrizione di \mathcal{L} esisterà un certo λ_1 tale da soddisfare $\lambda_1 = \|\mathcal{L}\|_{\mathcal{H}^{(1)}}$. Iterando questo processo si potrebbe creare $\mathcal{H}^{(2)}$, prendere la restrizione di \mathcal{L} a questo nuovo spazio di Hilbert e trovare l'autovalore λ_2 . Questo processo iterativo porterebbe alla costruzione di una successione di autovalori $\{\lambda_n\}$ e alla corrispondente successione di autovettori $\{u_n\}$. Per costruzione tutti gli u_n saranno tra loro ortogonali e sarà dunque possibile concludere che la successione $\{u_n\}$ costituisce un sistema ortonormale.

6.3.2 Teorema

Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert e sia \mathcal{L} un operatore simmetrico e compatto su \mathcal{H} . Allora esiste una successione di autovalori $\{\lambda_n\}$ per \mathcal{L} tale che:

$$\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

I corrispondenti autovettori costituiscono un sistema ortonormale completo in \mathcal{H} e vale che:

$$\forall u \in \mathcal{H}, u = \sum_{j=0}^{+\infty} \langle u_j | u \rangle u_j + h$$

Dove $h \in \ker \mathcal{L} : \mathcal{L}(h) = 0$.

Dimostrazione

È già stata provata l'esistenza delle due successioni $\{u_n\}$ e $\{\lambda_n\}$. Si supponga, per assurdo, che la successione degli autovalori λ_n non tenda a zero per n che tende all'infinito. Si può dunque costruire la successione dei v_k siffatti:

$$v_k = \frac{1}{\lambda_k} u_k$$

Questa successione è limitata per ché $\|u_k\| = 1$ e perché, per ipotesi di assurdo, il limite di λ_k non è zero. La successione $\{\mathcal{L}v_k\}$ è compatta, dunque:

$$\|\mathcal{L}v_k - \mathcal{L}v_j\|^2 = \|u_k - u_j\|^2 = 2$$

Dunque $\{\mathcal{L}v_k\}$ non converge e quindi si deve concludere, contro l'ipotesi di assurdo, che:

$$\lambda_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Sia ora $u^{(N)} = \sum_{j=0}^N \langle u_j | u \rangle u_j$, si ha che:

$$\|\mathcal{L}(u - u^{(N)})\| \leq \lambda_N \|u - u_N\| \leq \lambda_N \|u\|, \quad u^{(N)} \in \mathcal{H}^{(N)}$$

Sapendo che per $n \rightarrow +\infty$, $\lambda_n \rightarrow 0$, si conclude:

$$\mathcal{L}(u - u^{(N)}) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

Dalla continuità di \mathcal{L} segue che $\mathcal{L}(u - u^{(+\infty)}) = 0$, che significa che $(u - u^{(+\infty)}) \in \ker \mathcal{L}$. Dunque, detto $h = u - u^{(+\infty)}$ si ha che:

$$u = \sum_{j=0}^{+\infty} \langle u_j | u \rangle u_j + h$$

6.4 Operatore di Hilbert-Schmidt

Nei moduli precedenti abbiamo visto che il problema della risoluzione di $\mathcal{L}u = f$ può essere pensato come un problema di inversione dell'operatore \mathcal{L} e, usando questa interpretazione, ottenere la funzione di Green per l'operatore di Sturm-Liouville:

$$\mathcal{G}u(x) = \int_0^L \mathcal{G}(xy)u(y)dy$$

Questa strategia risolutiva in realtà è un caso particolare, ottenuto partendo da una forma molto più generale:

$$Tu(x) = \int_{\Omega} K(xy)u(y)dy$$

Con Ω compatto in \mathbb{R}^n e $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. L'operatore appena scritto prende il nome di **operatore di Hilbert-Schmidt**. Il seguente teorema dà una caratterizzazione più dettagliata di questo operatore.

6.4.1 Teorema

Sia $K(xy)$ continua in $[0, L] \times [[0, L]$ e sia $\mathcal{H} = L^2([0, L])$. Allora:

- $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ è compatta;
- se $u \in \mathcal{H} \rightarrow Tu$ è continua e $Tu \in C^0([0, L])$;
- se $K(xy) = K(yx)$, ovvero se il nucleo integrale dell'operatore di Hilbert-Schmidt è simmetrico, allora T è simmetrica in \mathcal{H} .

Dimostrazione

Sia $u \in \mathcal{H}$. Dalla disuguaglianza di Holder segue che:

$$\int_0^L 1 |u(y)| dy \leq \left(\int_0^L 1^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |u(y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = L^{\frac{1}{2}} \|u\|_{\mathcal{H}}$$

È dunque possibile controllare una norma in L^1 , cioè quella di $|u(y)|$, con una norma su un limitato di L^2 , cioè quella di $\|u\|$. Sia ora $v = Tu = \int_0^L K(xy)f(y)dy$, con K uniformemente continua su $[0, L] \times [0, L]$. Dunque si ha che:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta : \text{Se } x, z \in [0, L], |x - z| < \delta, \alpha = \max_{y \in [0, L]} |K(xy) - K(yz)| < \epsilon$$

Dunque si ha che:

$$|v(x) - v(z)| \leq \alpha \int_0^L u(y) dy \leq \epsilon L^{\frac{1}{2}} \|u\|_{\mathcal{H}}, \forall x, z \in [0, L], |x - z| < \delta$$

Si è dunque provato che Tu è continua; in realtà si osserva che essa è uniformemente continua, dunque si ha:

$$\max_{x \in [0, L]} v(x) \leq \max_{x, y \in [0, L]} |K(xy)| \int_0^L |u(y)| dy \leq \text{cost} \|u\|_{\mathcal{H}}^2$$

È dunque possibile concludere che:

$$\|Tu\|_{\mathcal{H}} = \left[\int_0^L |v(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq \text{cost} \|u\|$$

Ovvero che T è limitato.

Si consideri ora una famiglia \mathcal{F} di funzioni limitate su \mathcal{H} . Sia $\|u\| \leq N, \forall u \in \mathcal{F}$, con N indipendente da u . Dalle disuguaglianze scritte sopra discende che v è una famiglia equilimitata nello spazio delle funzioni continue e che è equicontinua. Dal teorema di Ascoli-Artzelà è possibile concludere che Tu converge in $C^0([0, L])$, e quindi anche in $\mathcal{L}^2([0, L])$. Dunque u è limitata in C^0 ; il che implica che v è una famiglia equilimitata ed equicontinua in C^0 e dovrà ammettere una sottosuccessione uniformemente convergente in C^0 stesso e perciò anche in \mathcal{L}^2 . Pertanto si ha:

$v_n \rightarrow v$, dunque:

$$\|v_n - v\|_{L^2([0, L])} = \left(\int_0^L (v_n - v)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \max_{x \in [0, L]} |v_n(x) - v(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Dunque se $\mathcal{F} = \{f_n\}$ è una successione limitata in $L^2([0, L])$ la corrispondente $T(\mathcal{F}) = \{Tf_n\}$ ammette sottosuccessione convergente in $L^2([0, L])$ –

Per concludere si vuole dimostrare che se $K(xy) = K(yx)$ allora T è simmetrico. Si ha che:

$$\begin{aligned} \langle Tu | v \rangle_{L^2} &= \int_0^L v \left(\int_0^L K(xy)u(y)dy \right) dx = \\ &= \int_0^L \left(\int_0^L K(xy)v(x)dx \right) u(y)dy = \int_0^L \int_0^L K(yx)v(x)dxu(y)dy = \langle u | Tv \rangle_{L^2} \end{aligned}$$

Da cui segue non solo che T è simmetrico e compatto, ma anche che (in virtù del teorema spettrale) esso ammette una successione di autovalori reali convergente a zero e la corrispondente successione di autovettori forma un sistema ortonormale completo su $L^2([0, L])$.

6.5 Conclusioni

Torniamo al problema da cui siamo partiti:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = -(pu')' + qu \\ B.C. \end{cases}, \quad p \in C^1((0, L)), p(x) > 0 \forall x \in [0, L], q \in C^0([0, L])$$

Abbiamo osservato come questo problema si possa risolvere nella forma più generale $\mathcal{L}u = f \in L^2([0, L]) \cap C^0([0, L])$. In quest'ottica diventa un'equazione differenziale ordinaria, che può essere risolta tramite l'inversione dell'operatore \mathcal{L} . Ovvero, supponendo che $\lambda = 0$ non sia autovalore di \mathcal{L} , si giunge a:

$$u = \mathcal{L}^{-1}f$$

Avendo risolto esplicitamente questo problema, si è in grado di concludere che:

$$\mathcal{L}^{-1}f = \int_0^L \mathcal{G}(xy)f(y)dy$$

Con \mathcal{G} funzione di Green dell'operatore di Sturm-Liouville, data da:

$$\mathcal{G}(xy) = -\frac{1}{pW} \begin{cases} v_1(x)v_2(y), & 0 < x < y \leq L \\ v_1(y)v_2(x), & 0 < y < x \leq L \end{cases}$$

Si è anche osservato che \mathcal{G} è una funzione continua, differenziabile su $[0, L] \times [0, L]$ ma non sulla diagonale $x = y$ e simmetrica. Come operatore \mathcal{G} pertanto è simmetrico e compatto e, in virtù dell'ipotesi preliminare, non ammette autovalore nullo. Si è anche osservato che se \mathcal{L}^{-1} è simmetrico e compatto, ammette un sistema ortonormale completo. Da ciò segue che anche \mathcal{L} ammette autovalori: essi saranno corrispondenti ai reciproci degli autovalori di $\mathcal{L}^{-1} = \mathcal{G}$ con stessi autovettori. Questi autovettori, per altro comuni, dunque costituiranno un sistema ortonormale completo sullo spazio di Hilbert su cui si lavora.

Completiamo il discorso sull'operatore di Sturm-Liouville andando ad analizzare il caso, scartato per ipotesi, in cui $\lambda = 0$. Innanzitutto si osserva che \mathcal{L} è limitato dal basso, e dunque che:

$$\langle \mathcal{L}u | u \rangle \geq q_{min}$$

Si ha che tutti gli autovalori di \mathcal{L} saranno maggiori, o al più uguali, a questo valore q_{min} :

$$\langle \lambda u | u \rangle = \lambda \langle u | u \rangle \geq q_{min}$$

Segue quindi che esisterà sicuramente un numero reale μ_0 che non sarà autovalore di \mathcal{L} . Definendo l'operatore $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} - \mu_0 \mathbb{I}$ si ha che esso conserva tutte le proprietà dell'operatore di Sturm-Liouville, ma non ammetterà mai autovalore nullo. Possiamo quindi applicare tutta la teoria sviluppata per \mathcal{L} a \mathcal{L}_1 trattandolo come una traslazione di \mathcal{L} . Tutti i risultati sino ad ora ottenuti continuano a essere applicabili, col vantaggio che \mathcal{L}_1 non può ammettere autovalore nullo: quindi viene risolto anche il problema iniziale per cui era necessario supporre $\lambda_{\mathcal{L}} \neq 0$. In definitiva, non avendo nemmeno problemi per l'autovalore nullo, è possibile concludere che l'operatore di Sturm-Liouville ammette sempre sistema ortonormale completo costituito dai suoi autovalori.

6.6 Alcuni casi particolari

Studiamo alcuni casi particolari di operatori di Sturm-Liouville singolari, per cui non vale rigorosamente la teoria sviluppata nei moduli precedenti.

Iniziamo considerando il caso in cui $p(x)$ abbia degli zeri in $[0, L]$. Un esempio è quello in cui si ha l'operatore di Legendre:

$$p(x) = 1 - x^2, \quad p : [0, L] \rightarrow [-1, 1]$$

In questo caso l'operatore di Sturm-Liouville assume la forma seguente:

$$\mathcal{L}u = - \left((1 - x^2) u' \right)', \quad \forall x \in (-1, 1)$$

È evidente che in questo caso non siamo in grado di scrivere l'equazione differenziale associata al problema, come invece si fa per l'operatore di Sturm-Liouville regolare. Ciò implica l'impossibilità di scrivere e quindi risolvere per inversione $\mathcal{L}u = f$ perché $p(x) = 0$ agli estremi del suo intervallo di definizione. Risulta dunque pregiudicata la costruzione di $\mathcal{L}^{-1} = \mathcal{G}$ e quindi anche la risoluzione del problema.

Un secondo caso particolare si ha quando l'intervallo di definizione è illimitato. In tal caso tutta la teoria sviluppata in precedenza non è più applicabile: tutte le disequazioni che sono state usate proprio perché l'operatore era definito su intervalli limitati ora non sono più vere e quindi non sarà più possibile dedurre la compattezza di \mathcal{L}^{-1} . Generalmente, per risolvere problemi di questo tipo si determinano le informazioni necessarie non dalle condizioni al bordo (ora non presenti) ma dal fatto che la soluzione del problema debba stare nel dominio di definizione dell'operatore di Sturm-Liouville $\mathcal{D}(\mathcal{L})$.

A tal proposito si consideri l'azione dell'operatore:

$$\mathcal{L}u = -u'' + \mu^2 u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad p = 1, \quad q = \text{cost}$$

Ora sarà possibile scrivere l'equazione differenziale $u = \mathcal{L}^{-1}f$, tuttavia una sua completa risoluzione dovrà essere trovata tenendo presente che si sta lavorando su \mathbb{R} e non su un intervallo limitato. Si ha per l'omogenea:

$$-u'' + \mu^2 u = 0$$

Dunque:

$$u_O(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}$$

Una soluzione della non omogenea può essere trovata con il metodo di variazione delle costanti:

$$\begin{bmatrix} v_1(x) & \text{amp;} & v_2(x) \\ v_1'(x) & \text{amp;} & v_2'(x) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(x) \end{pmatrix}$$

Da cui si ricava:

$$c_1(x) = c_1 + \frac{1}{2\mu} \int_x^{+\infty} e^{-\mu y} f(y) dy$$

$$c_2(x) = c_2 + \int_{-\infty}^x e^{\mu y} f(y) dy$$

Ora, i valori di c_1, c_2 non possono essere ricavati richiedendo la validità di particolari condizioni al bordo, dato che si sta lavorando su tutto \mathbb{R} , ma si dovranno ricavare imponendo che $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$. Si trova che $c_1 = c_2 = 0$ e quindi:

$$u(x) = \frac{1}{2\mu} \int_{\mathbb{R}} e^{-\mu(x-y)} f(y) dy = \mathcal{L}^{-1} f$$

Quindi la funzione di Green per questo particolare operatore di Sturm-Liouville è data da:

$$\mathcal{G}(xy) = \frac{1}{2\mu} e^{-\mu(x-y)}$$

In tutto ciò si ha un problema: l'operatore appena trovato, pur essendo limitato, continuo e simmetrico, non è compatto. Ciò ci porta a concludere che l'operatore inverso non ammette sistema ortonormale completo e quindi non è possibile concludere nulla sulle proprietà di \mathcal{L} .

Concludiamo presentando un ultimo caso particolare, simile a quello appena visto:

Sia $\mathcal{L}u = -u'' + \mu^2 u$, $x \in \mathbb{R}^+$, $u \in L^2(\mathbb{R}^+)$, $u'' \in L^2(\mathbb{R}^+)$. Per definire completamente $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ sono necessarie delle considerazioni ulteriori, perché ora l'insieme di definizione (pur essendo illimitato) ha bordo. Pertanto sia:

$$u(0) = 0, \quad u''(0) = 0, \quad \cos \alpha u(0) - \sin \alpha u'(0) = 0$$

Dove l'ultima delle richieste è una rappresentazione equivalente delle condizioni al bordo di Robin. Un problema siffatto, proprio perché ha bordo, potrà essere definito con differenti condizioni al bordo. La trattazione specifica è pressoché la stessa vista nell'esempio precedente, con l'aggiunta della necessità di dover verificare che $u(x)$ rispetti delle opportune condizioni al bordo. Nello specifico si avrà:

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\mu} \int_0^{+\infty} e^{-\mu(|x-y|)} f(y) dy - \frac{1}{2\mu} \int_0^{+\infty} e^{-\mu(x+y)} f(y) dy, & \text{Dirichlet} \\ \frac{1}{2\mu} \int_0^{+\infty} e^{-\mu(|x-y|)} f(y) dy + \frac{1}{2\mu} \int_0^{+\infty} e^{-\mu(x+y)} f(y) dy, & \text{Neumann} \\ \frac{1}{2\mu} \int_0^{+\infty} e^{-\mu(|x-y|)} f(y) dy + F(\mu, \alpha) \int_0^{+\infty} e^{-\mu(x+y)} f(y) dy, & \text{Robin} \end{cases}$$

con:

$$F(\mu, \alpha) = \frac{\mu \sin \alpha - \cos \alpha}{2\mu [\mu \sin \alpha + \cos \alpha]}$$

L'equazione di Laplace

7.1 Formule di Green

Da questo punto in poi, per buona parte del corso, ci si occuperà della terza delle equazioni presentate inizialmente, ovvero l'equazione di Laplace:

$$\Delta u = 0$$

Si studieranno anche alcune proprietà di una equazione strettamente legata a quella appena scritta, ovvero l'equazione di Poisson:

$$-\Delta u = f$$

Di entrambe le equazioni si è interessati a determinare le equazioni su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Se Ω è limitato, si potrà inoltre assumere che $\partial\Omega$ sia regolare. Iniziamo col presentare delle formule di importanza fondamentale per il resto della trattazione: le formule di Green.

7.1.1 Teorema di Gauss-Green

Sia $u \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Allora:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u \hat{n}_i d\sigma$$

Come diretta conseguenza del teorema di Gauss-Green si ha la formula di integrazione per parti in \mathbb{R}^n :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uv \hat{n}_i d\sigma$$

Sia $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, allora si ha la formula di integrazione per parti per funzioni a valori vettoriali, nota anche come teorema della divergenza.

7.1.2 Teorema della divergenza

Sia $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Allora:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \hat{n} d\sigma$$

Sfruttando i teoremi appena enunciati è possibile scrivere le formule di Green. Più precisamente siano $f \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ e $g \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, allora $f \cdot \nabla g$ è un campo vettoriale di classe $C^1(\Omega)$. La sua divergenza è data da:

$$\nabla(f \cdot \nabla g) = \nabla f \nabla g + f \Delta g$$

Integrando su Ω e applicando il teorema della divergenza si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(f \nabla g) dx &= \int_{\partial\Omega} (f \nabla g) \hat{n} d\sigma = \int_{\partial\Omega} f \underbrace{\frac{\partial g}{\partial n}}_{\nabla g \hat{n}} d\sigma = \\ &= \int_{\Omega} \nabla f \nabla g dx + \int_{\partial\Omega} f \Delta g dx \end{aligned}$$

Da cui si ha la prima formula di Green:

$$\int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial n} d\sigma = \int_{\Omega} \nabla f \nabla g dx + \int_{\partial\Omega} f \Delta g dx$$

Se, al contrario, si avesse che $f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, $g \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ si potrebbe scrivere:

$$\int_{\partial\Omega} g \frac{\partial f}{\partial n} d\sigma = \int_{\Omega} \nabla f \nabla g dx + \int_{\Omega} g \Delta f dx$$

Supponendo che $f, g \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ e sottraendo membro a membro l'espressione ottenuta con la prima formula di Green si ottiene la seconda formula di Green:

$$\int_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) dx = \int_{\partial\Omega} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) d\sigma$$

7.1.3 Simmetria del laplaciano

Definiamo $\mathcal{D}(\Delta_D)$ il dominio del laplaciano di Dirichlet:

$$\mathcal{D}(\Delta_D) = \left\{ u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

Dalla seconda formula di Green si ricava che il laplaciano di Dirichlet è simmetrico, essendo il lato destro dell'uguaglianza che la definisce nullo:

$$\int_{\Omega} f \Delta g dx = \int_{\Omega} g \Delta f dx$$

In maniera analoga si osserva che anche il laplaciano di Neumann, definito su:

$$\mathcal{D}(\Delta_N) = \left\{ f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) : \frac{\partial f}{\partial n} \Big|_{\Omega} = 0 \right\}$$

e il laplaciano di Robin, definito su:

$$\mathcal{D}(\Delta_R) = \left\{ f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) : \left[\frac{\partial f}{\partial n} + \alpha f \right]_{\partial\Omega} = 0, \alpha \in C^0(\partial\Omega) \right\}$$

sono simmetrici.

Le considerazioni fatte in questo modulo sono di fondamentale importanza per la trattazione dell'equazione di Laplace e per la sua risoluzione. Nei prossimi moduli ci si occuperà di una particolare classe di funzioni, soluzioni dell'equazione di Laplace: le funzioni armoniche.

7.2 Le soluzioni dell'equazione di Laplace: funzioni armoniche

In questo modulo ci si occuperà di dare una caratterizzazione delle funzioni che risolvono l'equazione di Laplace, anche dette **funzioni armoniche**.

◇ **Definizione** Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e sia $u \in C^2(\Omega)$. La funzione u è detta **armonica** se soddisfa l'equazione di Laplace, ovvero se:

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega$$

Segue direttamente dalla definizione che ogni funzione armonica $u \in \ker \{\Delta\}$. Per capire quale sia la forma analitica di u studiamo il caso monodimensionale e quello di dimensione $n = 2$:

Per il caso monodimensionale non si ricavano particolari informazioni. Infatti se $\Omega = (a, b)$ si avrà che:

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{dx^2} = 0$$

Che significa semplicemente trovare:

$$u(x) = c_1 x + c_2$$

Il caso $n = 2$ è piuttosto interessante invece. Infatti sarà possibile osservare che, in virtù dell'isomorfismo $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, vi è uno stretto legame tra funzioni olomorfe e soluzioni dell'equazione di Laplace, ovvero funzioni armoniche.

Si ricorda che se f è olomorfa in Ω essa coincide con il suo sviluppo di Taylor nell'intorno di un qualsiasi punto $x_0 \in \Omega$ ed è di classe $C^\infty(\mathbb{C})$. Si potrà quindi scrivere $f = u(x, y) + iv(x, y)$ e dovrà soddisfare le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Il legame tra funzioni olomorfe e funzioni armoniche di cui si parlava sopra è esplicitato dal seguente teorema.

7.2.1 Teorema

Sia f una funzione olomorfa in $\Omega \subset \mathbb{C}$. Allora $f = u(x, y) + iv(x, y)$ e le funzioni $u(x, y)$, $v(x, y)$ sono armoniche in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Dimostrazione

Per ipotesi f è olomorfa, dunque soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Derivando rispetto a x la prima equazione e rispetto a y la seconda si ottiene:

$$\begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yy} = -v_{xy} \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Quindi $\Delta u = 0$, ovvero $u(x, y)$ è armonica in Ω . Dove si può concludere che $v_{xy} = v_{yx}$ in virtù del teorema di Schwarz, essendo $f \in C^\infty(\mathbb{C})$. Analogamente, derivando la prima delle equazioni di Cauchy-Riemann rispetto a y e la seconda rispetto a x , si può provare che anche $v(x, y)$ è armonica in Ω .

7.2.2 Soluzioni fondamentali radiali del laplaciano

Un'importante semplificazione nello studio delle funzioni armoniche si ottiene andando a considerare funzioni armoniche radiali. In \mathbb{R}^n si considerano le funzioni armoniche tali per cui è vero che:

$$u(\underline{x}) = v(|x|) = v(r)$$

Da definizione si ha che u deve essere $C^2(\Omega)$. Si nota che il passaggio alle funzioni armoniche radiali può far sorgere dei problemi in $x = 0$, pertanto (almeno preliminarmente) si richiede che $x \neq 0$. Dovendo lavorare con funzioni radiali è necessario derivare l'espressione per il laplaciano:

$$u_{x_i} = \frac{x_i}{|x|} v'(|x|), \quad \forall x \neq 0$$

$$u_{x_i, x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{|x|} v'(|x|) \right) = \frac{1}{|x|} v'(|x|) - \frac{x_i^2}{|x|^3} v'(|x|) + \frac{x_i^2}{|x|^2} v''(|x|)$$

In definitiva:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{v'}{|x|} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{v'}{(|x|)^3} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{v''}{(|x|)^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ &= \frac{n-1}{|x|} v'(|x|) + v''(|x|) \end{aligned}$$

La cosa interessante che si nota è che il passaggio alle funzioni armoniche radiali consente di riscrivere l'equazione di Laplace come un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine:

$$\frac{n-1}{r} v'(r) + v''(r) = 0, \quad r \neq 0$$

$$\Rightarrow v''(r) = \frac{1-n}{r} v'(r)$$

Da cui si ricava integrando una volta:

$$\log(v'(r)) = \frac{1-n}{\log} r + C$$

$$v'(r) = \frac{C}{r^{n-1}}$$

Integrando di nuovo e tornando in x si ricavano le soluzioni fondamentali del laplaciano in $n = 2, n = 3$:

$$u(x) = \begin{cases} c_1 \log(|x|) + c_2, & n = 2, x \neq 0 \\ \frac{c_1}{(2-n)|x|^{n-2}} + c_2, & n = 3, x \neq 0 \end{cases}$$

In genere si utilizzano questi parametri (soprattutto nei problemi di elettromagnetismo):

$$u(x) = \begin{cases} -\log(|x|) & n = 2 \\ \frac{1}{4\pi|x|} & n = 3 \end{cases}$$

L'oggetto di studio dei prossimi moduli dunque saranno le funzioni armoniche, le loro proprietà e la risoluzione esplicita delle equazioni di Laplace e di Poisson.

Le funzioni armoniche

8.1 Proprietà generali delle funzioni armoniche

Nel modulo precedente abbiamo accennato al fatto che le funzioni armoniche sono soluzioni dell'equazione di Laplace e ne è stata data una prima caratterizzazione. Qui, e nei prossimi moduli ci si occuperà di definire in modo più preciso alcune proprietà fondamentali di questa classe di funzioni.

◇ **Definizione** Sia $B(x_0, r)$ la palla di centro x_0 e raggio r in \mathbb{R}^n e sia $S(x_0, r) = \partial B(x_0, r)$. Si definiscono:

- $\alpha(n)$ la misura della palla di raggio 1 in \mathbb{R}^n .
- $\omega(n) = \omega_n$ la misura del bordo della palla di raggio 1 in \mathbb{R}^n .

Si ha che:

$$\omega_n = n\alpha(n)$$

◇ **Definizione** Sia $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in C^0(\Omega)$. Si definiscono le seguenti quantità:

- **media sulla palla**¹ $B(x_0, r) \subset \Omega$:

$$\oint_{B(x_0, r)} u(y) dy = \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0, r)} u(y) dy = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x_0, r)} u(y) dy$$
- **media sulla sfera** $\partial B(x_0, r)$:

$$\oint_{\partial B(x_0, r)} u(y) d\sigma(y) = \frac{1}{|S(x_0, r)|} \int_{\partial B(x_0, r)} u(y) d\sigma(y) = \frac{1}{\omega(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x_0, r)} u(y) d\sigma(y)$$

8.2 Proprietà della media

La media sferica di una funzione armonica possiede importanti proprietà che, come vedremo, caratterizzano le funzioni armoniche stesse.

8.2.1 Teorema (Proprietà della media delle funzioni armoniche)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $u \in C^2(\Omega)$ armonica. Allora:²

$$u(x) = \oint_{B(x,r)} u(y) dy = \oint_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y) \quad \forall B(x,r) \in \Omega$$

Il valore della funzione armonica in x corrisponde alla media sferica su una palla centrata in x .

Dimostrazione

Dimostriamo prima il teorema per la media sferica su $\partial B(x,r) = S(x,r)$.

Consideriamo per $r > 0$ la funzione:

$$\phi(r) = \oint_{S(x,r)} u(y) d\sigma(y)$$

Per $r = 0$ $\phi(0) = u(x)$. È un prolungamento per continuità.

Dimostriamo che $\frac{\partial \phi}{\partial r}(r) = 0$ cioè che questa funzione non varia al variare del raggio su cui eseguiamo la media.

Facciamo prima di tutto un cambio di variabile per eseguire la media sulla sfera centrata nell'origine di raggio 1. Possiamo considerare la variabile di integrazione y come $y = x + rz$ dove z è un versore radiale e x è la traslazione dall'origine.

$$z = \frac{y - x}{r}$$

$$\phi(r) = \oint_{S(x,r)} u(y) d\sigma(y) = \oint_{S(0,1)} u(x + rz) d\sigma(z)$$

Mostriamo più esplicitamente che il cambio di variabile non cambia la forma dell'integrale:

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{S(x,r)} u(y) d\sigma(y) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{S(0,1)} u(x + rz) r^{n-1} d\sigma(z) \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} u(x + rz) d\sigma(z) = \oint_{S(0,1)} u(x + rz) d\sigma(z) \end{aligned}$$

Questo accade perché il cambio di variabile equivale a scalare il raggio di un fattore r , quindi il differenziale di superficie sferica scala come r^{n-1} .

Ora possiamo derivare rispetto a r perché l'insieme di integrazione è fissato.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial r}(r) &= \oint_{S(0,1)} \frac{\partial u(x + rz)}{\partial r} d\sigma(z) \\ &= \oint_{S(0,1)} \nabla u(x + rz) \hat{z} d\sigma(z) \\ &= \oint_{S(x,r)} \nabla u(y) \left(\frac{y - x}{r} \right) d\sigma(y) \\ &= \oint_{S(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} d\sigma(y) \end{aligned}$$

²Attenzione! Utilizziamo qui il simbolo \oint per indicare gli integrali di media sferica e sulla palla, non integrali di linea.

Ora utilizziamo la prima formula di Green con $f = 1$ e $g = u$. Otteniamo:

$$\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \oint_{B(x,r)} \Delta u(y) dy = 0$$

dove i termini di bordo scompaiono perché $\nabla f = 0$ e la formula si annulla a causa dell'armonicità di u . Quindi $\phi(r)$ è costante e $u(x) = \phi(0) = \phi(r)$.

Dimostriamo ora il teorema per la media sulla palla $B(x, r)$. Dobbiamo procedere per strati e utilizzando la dimostrazione precedente.

$$\begin{aligned} \oint_{B(x,r)} u(y) dy &= \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y) \right) dr \\ &= \int_0^r \omega_n r^{n-1} \left(\oint_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y) \right) dr \\ &= \omega_n \int_0^r r^{n-1} u(x) dr = \omega_n u(x) \int_0^r r^{n-1} \\ \oint_{B(x,r)} u(y) dy &= \omega_n u(x) \frac{r^n}{n} \end{aligned}$$

Quindi ricostruendo la media sulla palla:

$$\frac{1}{\alpha(n)r^n} \oint_{B(x,r)} u(y) dy = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \overbrace{n\alpha(n)}^{\omega_n} \frac{r^n}{n} u(x) \rightarrow u(x)$$

Quindi anche la media sulla palla corrisponde al valore della funzione nel centro.

Le funzioni armoniche sono quindi uguali alle loro medie sulle sfere. Ma vale il contrario?

8.2.2 Teorema (Inverso della proprietà della media)

Sia $u \in C^2(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto tale che u soddisfi la proprietà della media:

$$u(x) = \oint_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y) \quad \forall B(x,r) \subset \Omega$$

Allora $\Delta u = 0$ su Ω .

Dimostrazione

Come nella dimostrazione precedente consideriamo $\phi(r) = \oint_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y)$, per ipotesi abbiamo che $\phi' = 0$. Possiamo eseguire gli stessi calcoli della dimostrazione precedente ottenendo:

$$\phi' = \frac{r}{n} \oint_{\partial B(x,r)} \Delta u(y) dy = 0$$

Ora se per assurdo $\Delta u \neq 0$ in un punto $x_0 \in \Omega$ essendo $\Delta u \in C^0$ si avrebbe che in intorno di x_0 il laplaciano sarebbe o positivo o negativo. Quindi ϕ' non potrebbe essere 0. Assurdo. Di conseguenza u è necessariamente armonica.

8.3 Principio del massimo

Le funzioni armoniche possiedono importanti proprietà anche per quanto riguarda il massimo e il minimo sull'insieme di definizione Ω .

8.3.1 Teorema (Principio del massimo)

Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ armonica. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato. Allora:

- $\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \Omega} u(x)$
- Se Ω è connesso ed esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $\max_{x \in \Omega} u(x) = u(x_0)$ allora u è costante in Ω .

Dimostrazione

Se la seconda conseguenza è verificata lo è anche la prima, quindi verifichiamo solo la seconda.

La dimostrazione è per assurdo. Supponiamo che $\exists x_0 \in \Omega$ tale che $M = u(x_0) = \max_{x \in \Omega} u(x)$. Prendiamo r tale che $0 < r < \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Se M è il massimo significa che:

$$M = u(x_0) = \oint_{B(x_0, r)} u(y) dy \leq M$$

Ma per il teorema della media non può essere minore, solo uguale. Quindi u deve essere costante ed uguale a M in tutta la palla.

Procediamo ora per connessione: considero un punto $x_1 \in B(x_0, r)$, anche $u(x_1) = M$ che per ipotesi è un massimo, quindi posso creare una nuova palla e concludere di nuovo che u è costante in tutta la palla. Siccome l'insieme è connesso posso raggiungere tutti i punti di Ω con questo metodo dimostrando che la funzione u è costante in tutto l'insieme. Quindi se una funzione armonica ha massimo, questo è situato sulla frontiera del dominio, altrimenti la funzione è costante.

8.4 Regolarità delle funzioni armoniche

Affrontiamo ora le proprietà di regolarità delle funzioni armoniche. Prima di tutto però analizziamo le proprietà di una particolare funzione che ci sarà utile nelle dimostrazioni.

8.4.1 Il mollificatore

Consideriamo la funzione su \mathbb{R}^n :

$$\eta(x) = \begin{cases} Ce^{-1/1-|x|^2} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

C è una variabile di normalizzazione tale che $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1$ Questa funzione ha diverse proprietà:

- per $|x| \rightarrow 1, |x| < 1, \eta(x) \rightarrow 0$
- qualunque derivata di $\eta(x)$ tende a 0 per $|x| \rightarrow 1^-$
- $\eta(x) \in C_n^\infty(\mathbb{R}^n)$

Generalizziamo la funzione scalandola e traslandola:

$$\eta(x)_{\epsilon,y} = \frac{1}{\epsilon^n} \eta\left(\frac{(x-y)}{\epsilon}\right)$$

il supporto ora ha raggio ϵ ed è centrata in y .

8.4.2 Teorema (Regolarità delle funzioni armoniche)

Sia Ω aperto limitato di \mathbb{R}^n e $u \in C^0(\Omega)$ che soddisfi la proprietà della media

$$u(x) = \oint_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y) \quad \forall B(x,r) \subset \Omega$$

Allora $u \in C^\infty(\Omega)$

Dimostrazione

Consideriamo ϵ tale che $0 < \epsilon < \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Eseguiamo la convoluzione di u con η , cioè:

$$u * \eta_\epsilon = \int_{\Omega} u(y) \eta_\epsilon(x-y) dy = u_\epsilon(x)$$

Dimostriamo che:

- $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega)$
- $u_\epsilon = u(x) \quad \forall x \in \Omega$

Prendiamo $u_\epsilon = \int_{\Omega} \eta_\epsilon(x-y) u(y) dy$, possiamo passare la derivata rispetto a x sotto l'integrale perché x è in η che è a supporto compatto.

$$\frac{\partial u_\epsilon(x)}{\partial x} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \eta_\epsilon(x-y) u(y) dy$$

Essendo η_ϵ una funzione $C^\infty(\Omega)$, u_ϵ è analitica.

Ora calcoliamo u_ϵ restringendoci al supporto di η_ϵ che è

$$\mathcal{D}(\eta_\epsilon(x-y)) = \{y \mid |x-y| \leq \epsilon\} = B(x, \epsilon)$$

$$\begin{aligned} u_\epsilon(x) &= \int_{B(x,\epsilon)} \eta_\epsilon(x-y) u(y) dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_{B(x,\epsilon)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right) u(y) dy \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_0^\epsilon \left(\int_{\partial B(x,\epsilon)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right) u(y) d\sigma(y) \right) dr \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_0^\epsilon \eta\left(\frac{r}{\epsilon}\right) \left(\int_{\partial B(x,\epsilon)} u(y) d\sigma(y) \right) dr \\ &= \frac{1}{\epsilon^n} \int_0^\epsilon \eta\left(\frac{r}{\epsilon}\right) \omega(n) r^{n-1} \underbrace{\left(\int_{\partial B(x,\epsilon)} u(y) d\sigma(y) \right)}_{=u(x)} dr \end{aligned}$$

Otteniamo quindi da un lato $u(x)$ e dall'altro la misura della superficie sferica di raggio ϵ . Possiamo quindi ricomporre l'integrale sulla sfera.

$$\begin{aligned} &= u(x) \frac{1}{\epsilon^n} \int_0^\epsilon \eta\left(\frac{r}{\epsilon}\right) \int_{\partial B(x,\epsilon)} 1 \cdot d\sigma \\ &= u(x) \underbrace{\left[\frac{1}{\epsilon^n} \int_{B(x,\epsilon)} \eta\left(\frac{r}{\epsilon}\right) dr \right]}_{=1} \rightarrow u(x) \end{aligned}$$

Nell'ultimo integrale abbiamo utilizzato la normalizzazione del mollificatore.

Quindi abbiamo dimostrato che $u_\epsilon = u(x)$ e $u \in C^\infty$.

Osservazione: se consideriamo $u \in C^2$ che rispetta la proprietà della media allora u è armonica (vedi Inverso della proprietà della media). L'ultimo teorema dimostra che le funzioni armoniche sono anche analitiche.

8.5 Teorema di Liouville

8.5.1 Teorema

Sia $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ armonica e limitata. Allora u è costante.

Dimostrazione

Prendiamo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u(x_0) = \oint_{B(x_0,r)} u(y) dy$. Sappiamo che u è analitica quindi possiamo fare la derivata del laplaciano:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Delta u = 0 = \Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \rightarrow \Delta u_{x_i} = 0$$

anche la derivata prima di u è armonica e quindi possiamo usare la proprietà della media.

$$u_{x_i}(x_0) = \oint_{B(x_0,r)} u_{x_i}(y) dy$$

Utilizziamo la prima formula di Green:

$$u_{x_i} = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x_0,r)} 1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) dy = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{\partial B(x_0,r)} u(y) \cdot n_i d\sigma(y)$$

Abbiamo legato derivata con la funzione u , ma ora sappiamo che u è limitata.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{\partial B(x_0,r)} u(y) \cdot n_i d\sigma(y) \right| \\ &\leq |u|_{\mathcal{L}^\infty} \cdot \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{\partial B} 1 d\sigma(y) \\ &\leq |u|_{\mathcal{L}^\infty} \frac{n\alpha(n)r^{n-1}}{\alpha(n)r^n} \leq \frac{n|u|_{\mathcal{L}^\infty}}{r} \end{aligned}$$

Siccome deve valere per ogni r allora si ottiene che $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, quindi u è costante in \mathbb{R}^n .

L'equazione di Poisson

9.1 Le soluzioni dell'equazione di Poisson

Abbiamo visto che le soluzioni fondamentali del laplaciano possono essere scritte nella forma:

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log(|x|), & n = 2, x \neq 0 \\ \frac{1}{\omega_n} \frac{1}{n\alpha(n)(n-1) |x|^{n-1}}, & n \geq 3, x \neq 0 \end{cases}$$

Esse sono chiaramente funzioni armoniche in \mathbb{R}^n e sono funzioni radiali. Si è anche osservato che $\Phi(x - y)$, $\forall y$ fissato ma arbitrario, è una funzione armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$. Allo stesso modo, anche le funzioni $c_1\Phi(x - y_1) + c_2\Phi(x - y_2)$ sarà armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \{y_1, y_2\}$ e similmente per una qualsiasi combinazione lineare di funzioni armoniche fondamentali. Ci si può chiedere che cosa accade quando si passa al continuo, ovvero se anche

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(y)\Phi(x - y)dy$$

È una funzione armonica. Innanzitutto si nota che essa, in $n = 3$ dove assume la forma $\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{4\pi|x-y|} dy$, rappresenta la forma di un potenziale elettrostatico/gravitazionale di una distribuzione di massa/carica $\rho(y)$. In generale essa però non è una funzione armonica, ma soddisferà l'equazione di Poisson come afferma il seguente teorema.

9.1.1 Teorema

Sia $g \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ e sia

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y)g(y)dy$$

Allora:

- $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$
- $u(x)$ risolve l'equazione di Poisson $-\Delta u = g$

Premettiamo alla dimostrazione del teorema il seguente importante lemma (2):

Sia $g \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, allora $\forall \Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ si ha che:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta g(y) dy = -g(0)$$

Dimostrazione

Si osserva che l'integrale di cui parla il lemma può essere riscritto dividendo l'insieme di integrazione, come segue:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) \Delta g(x) dx = \int_{B(0,\delta)} \Phi(x) \Delta g(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} \Phi(x) \Delta g(x) dx = I + J$$

Calcoliamo l'integrale $I(\delta)$: se $n = 2$ si ha che $\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \log(|x|)$ e quindi:

$$\begin{aligned} \left| \int_{B(0,\delta)} \frac{1}{2\pi} \log(|x|) \Delta g(x) dx \right| &\leq c \|\Delta g\|_{L^\infty} \int_{B(0,\delta)} \log(|x|) dx \\ &\leq c \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\delta \log(r) r dr \leq c \log(\delta) \delta^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Se $n \geq 3$ invece si ha che:

$$\left| \int_{B(0,\delta)} \frac{1}{n\alpha(n)(n-2)} \frac{1}{|x|^{n-2}} \Delta g dx \right| \leq c \|\Delta g\| \int_0^\delta \frac{r^{n-1}}{r^{n-2}} dr \leq c \delta^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

Si ha quindi che $\forall n$, $I(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ e pertanto l'unico contributo al calcolo dell'integrale che stiamo svolgendo sarà dato da $J(\delta)$. Per $J(\delta)$ si ha che, utilizzando la seconda formula di Green, compariranno dei termini di bordo a $+\infty$ che però si annulleranno perché si stanno considerando funzioni armoniche e funzioni a supporto compatto. Pertanto si ha:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} \Phi(x) \Delta g(x) dx = \\ &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} \Delta \Phi(x) g(x) dx}_{=0} - \int_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta))} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{n}} \right) g(x) dx + \int_{\partial(\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta))} \Phi(x) \frac{\partial g}{\partial \hat{n}} dx \end{aligned}$$

Chiamiamo rispettivamente J_1, J_2 i due addendi in cui è stato scomposto $J(\delta)$. Calcoliamo J_1 : per farlo è necessario ricavare la derivata normale di $\Phi(x)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{n}} = \frac{|x|^2}{n\alpha(n) |x|^{n+1}} = \frac{1}{n\alpha(n) |x|^{n-1}}$$

Da cui segue che:

$$J_1 = -\frac{1}{n\alpha(n)\delta^{n-1}} \int_{\partial B(0,\delta)} g(x) dx \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} -g(0)$$

Per quanto riguarda il contributo di J_2 invece si ha che:

$$J_2 = \int_{\partial B(0,\delta)} \Phi \frac{\partial g}{\partial \hat{n}} d\sigma \leq \frac{c}{\delta^{n-2}} \left| \frac{\partial g}{\partial \hat{n}} \right| \int_{\partial B(0,\delta)} d\sigma \leq \frac{c\delta^{n-1}}{\delta^{n-2}} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

Si conclude quindi che per $\delta \rightarrow 0$ si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) \Delta g(x) dx = -g(0)$$

La proprietà appena dimostrata vale anche per traslazioni, ovvero:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) g(y) dy = -g(x)$$

Sfruttando questa proprietà è possibile dimostrare il teorema.

Per dimostrare che $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ si procede in modo analogo a quanto fatto per provare che u_ϵ usata nel teorema di Liouville era C^∞ . Proviamo quindi che $u(x)$ risolve l'equazione di Poisson. Abbiamo che:

$$\Delta_x u = \Delta_x \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) dy = -f(x)$$

Quindi

$$-\Delta u = f$$

Ovvero, $u(x)$ risolve l'equazione di Poisson.

Si è messo in luce un comportamento piuttosto singolare e importante delle soluzioni fondamentali del laplaciano. Infatti si è notato come, nel passaggio al continuo, esse risolvano l'equazione di Poisson. Ci si può ora chiedere, e sarà oggetto del prossimo modulo la risposta a questa domanda, se le soluzioni trovate ora per l'equazione di Poisson siano uniche o se si possano avere altre soluzioni.

9.2 Soluzioni limitate dell'equazione di Poisson

Nel modulo precedente si è ricavata un'espressione per le soluzioni dell'equazione di Poisson. Ora ci si chiede se la forma trovata sia l'unica espressione che una soluzione dell'equazione di Poisson può avere. La risposta a questa domanda è data dal seguente teorema.

9.2.1 Teorema (1)

Sia $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ tale che $-\Delta u = f$. Allora tutte le soluzioni limitate dell'equazione di Poisson sono della forma:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy + c$$

Abbiamo già provato nel modulo precedente che una funzione della forma $u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy$ risolve l'equazione di Poisson, quindi chiaramente la forma analitica data per $u(x)$ qui sopra, essendo semplicemente una traslazione della soluzione dell'equazione di Poisson, sarà anche essa soluzione. Dimostriamo ora che essa è anche limitata e che tutte le soluzioni devono avere la forma data dal teorema appena enunciato.

Dimostrazione

Si ha che:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy \right| &\leq \left| \int_{B(x,\epsilon)} \Phi(x-y)f(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\epsilon)} \Phi(x-y)f(y)dy \right| \\
 &\leq \left| \int_B \Phi(x-y)f(y)dy \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B} \Phi(x-y)f(y)dy \right| \leq \\
 &\leq \|f\|_{B(x,\epsilon)} \int_{B(x,\epsilon)} |\Phi(x-y)| dy + \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus B(x,\epsilon)} \Phi(x-y) \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,\epsilon)} f(y)dy \leq \\
 &\leq \text{cost.}
 \end{aligned}$$

Si ha quindi che $u(x)$ è limitata ed è soluzione dell'equazione di Poisson. Occorre ora provare che tutte le soluzioni hanno la forma di cui parla il teorema. Per farlo si consideri $w(x) = u(x) - \tilde{u}(x)$, dove $u(x)$ è quella appena trovata e $\tilde{u}(x)$ è una generica soluzione dell'equazione di Poisson. Chiaramente, per costruzione, $w(x)$ è una funzione armonica ed è pure limitata pertanto, dal teorema di Liouville, segue che essa è pure costante. Segue quindi che tutte le soluzioni limitate dell'equazione di Poisson, hanno forma:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy + c$$

Formula di rappresentazione

10.1 La formula di rappresentazione

Nel modulo precedente si è osservata l'importanza delle soluzioni fondamentali del laplaciano in \mathbb{R}^n nella definizione delle soluzioni delle equazioni differenziali di cui ci stiamo occupando. Più precisamente si è dimostrato che le soluzioni dell'equazione di Poisson possono essere scritte in funzione della soluzione fondamentale del laplaciano. In questo modulo si metterà in luce l'estrema importanza di $\Phi(x - y)$ nel definire quella che viene chiamata **formula di rappresentazione**.

10.1.1 Teorema (1)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto con frontiera regolare e sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ tale che $\int_{\Omega} |\Delta u| < +\infty$, ovvero $u \in L^1(\Omega)$. Allora si ha la formula di rappresentazione:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(x - y) \frac{\partial u(y)}{\partial \hat{n}} - u(y) \frac{\partial \Phi(x - y)}{\partial \hat{n}} \right) dy - \int_{\Omega} \Phi(x - y) \Delta u(y) dy$$

Prima di procedere con la dimostrazione si tengano presenti la seguenti osservazioni:

Innanzitutto si nota che per funzioni armoniche, essendo $\Delta u = 0$, la formula di rappresentazione assume la forma:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(x - y) \frac{\partial u(y)}{\partial \hat{n}} - u(y) \frac{\partial \Phi(x - y)}{\partial \hat{n}} \right) dy$$

In cui si nota che, essendo $\Phi(x - y) \in C^\infty$, anche l'integranda lo sarà. Pertanto quella appena scritta è un'altra rappresentazione di $u(x)$ come funzione di classe C^∞

Se si vuole usare la formula di rappresentazione per risolvere $-\Delta u = f$ si nota che essa in realtà ci dà l'espressione di una funzione che è quasi una soluzione dell'equazione di Poisson. Più precisamente, si ha che per poter usare $u(x)$, scritta con la formula di rappresentazione, per risolvere $-\Delta u = f$ si dovrebbero conoscere due valori al bordo: quello di $u(y)$ e quello di $\frac{\partial u(y)}{\partial \hat{n}}$ ma il problema al bordo con condizione di Dirichlet fissa solo uno di questi due valori.

Veniamo ora alla dimostrazione del teorema.

Dimostrazione

Sia, per comodità, $\Psi(y) = \Phi(x-y)$. Si ha che $\Psi(y)$ è localmente integrabile nell'intorno della singolarità, quindi si avrà:

$$\int_{B(x,\epsilon)} \Psi(y) dy < +\infty$$

Dunque $\Psi(y)\Delta u(y) \in L^1(\Omega)$. Allora si ha che:

$$\int_{\Omega} \Psi(y)\Delta u(y) dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus B(x,\epsilon)} \Psi(y)\Delta u(y) dy$$

Calcolando esplicitamente il limite si ha che:

$$\int_{\Omega \setminus B(x,\epsilon)} \Psi(y)\Delta u(y) dy = \int_{\partial\Omega} \left(\Psi \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} - u \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{n}} \right) d\sigma(y) + \int_{\partial B} \left(\Psi \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} - u \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{n}} \right) d\sigma(y)$$

Per scrivere questa uguaglianza si è usata la prima identità di Green e si è osservato che

$$\int_{\Omega \setminus B(x,\epsilon)} \delta \Psi(y) u(y) dy = 0$$

Il secondo degli addendi scritti sopra è già stato calcolato nel lemma che si è usato nel modulo riguardo alle soluzioni dell'equazione di Poisson e si è osservato che il risultato di quell'integrale è $-u(x)$. In definitiva, passando al limite $\epsilon \rightarrow 0$, si ottiene:

$$\int_{\Omega} \Psi(y)\Delta u(y) dy = \int_{\partial\Omega} (\Psi u_{\hat{n}} - \Psi_{\hat{n}} u) d\sigma(y) - u(x)$$

Da cui segue la tesi.

In realtà vale una versione ben più generica della formula di rappresentazione. Si consideri una funzione $h \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, armonica in Ω . Si consideri poi la funzione $\mathcal{G}(x,y) = \Phi(x-y) \pm h(y)$. La formula di rappresentazione continuerà a valere anche per lo scambio $\Psi \mapsto \mathcal{G}$. Infatti, data:

$$\int_{\Omega} h \Delta u dy = \underbrace{\int_{\Omega} u \Delta h dy}_{=0} + \int_{\partial\Omega} \left(h \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} - u \frac{\partial h}{\partial \hat{n}} \right)$$

Sommando membro a membro con la formula di rappresentazione data dal teorema enunciato sopra si ottiene:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} (G(x,y)u_{\hat{n}} - G(x,y)_{\hat{n}}u(y)) d\sigma(y) - \int_{\Omega} G(x,y)\Delta u(y) dy$$

La funzione $G(x,y)$ prende il nome di funzione di Green. Sostanzialmente l'uso della formula di rappresentazione, nella sua forma più generale, ci permette di sistematizzare il problema al bordo da cui partiamo, ma non garantisce che esso sia risolvibile. Più precisamente, nell'uso della formula di rappresentazione non si è certi del fatto che il problema in $h(y)$ che si ottiene sia risolvibile. Sebbene qui non verrà fatto esplicitamente, è possibile provare che la funzione di Green $G(x,y)$ esiste sempre. Nel modulo successivo ci occuperemo di sfruttare i risultati ora ottenuti per andare a illustrare alcuni esempi di casi particolari in cui è conveniente usare la formula di rappresentazione.

10.2 Il metodo delle cariche immagine nel semipiano

Si è dimostrato che una funzione $u(x)$ modulo integrabile di classe $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ può essere scritta, grazie alla formula di rappresentazione, conoscendo i valori che essa assume al bordo di Ω e il valore di Δu . Per poter scrivere in modo completo la formula di rappresentazione, come si è visto, è necessario anche conoscere la funzione di Green del problema che si sta studiando. Si è osservato che la funzione di Green è simmetrica ed esiste sempre: l'eventuale difficoltà starà nella sua determinazione. In questo e nei prossimi moduli ci si occuperà di usare la formula di rappresentazione, e dunque di determinare la funzione di Green, per risolvere dei problemi al bordo particolari.

Iniziamo con l'esempio della determinazione della funzione di Green nel semipiano positivo di \mathbb{R}^2 : questo problema è anche noto con il nome di metodo delle cariche immagine.

Sia $\Omega = \{x_2 > 0\}$. Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

Dalla formula di rappresentazione si ha che:

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \hat{n}} d\sigma(y) + \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy$$

Nello specifico del problema studiato essa equivale a:

$$u(x, y) = - \int_{y=0} g(s) G_{\hat{n}}(x, y) ds + \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} G(x, y) f(y) dy$$

Ci si chiede ora chi sia, e che espressione abbia, la funzione $G(x, y)$. Se esiste, essa deve avere la forma $G(x, y) = \Phi(x - y) - h(y)$. Stiamo quindi cercando $G(x, y)$ tale che:

$$G(x, 0) = 0 \forall x \in \mathbb{R}, \quad G \sim \Phi \text{ in } \mathcal{U}(x \in \Omega), \quad \Delta G = 0 \forall x \neq y$$

Nel piano si ha che $\Phi = \frac{1}{2\pi} \log |x|$ e si vuole trovare $h(y)$ tale che annulli Φ su $(x, y = 0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Si osserva che prendendo $h(y)$ della forma $h(y) = \Phi(x^* - y)$ con $x^* = \{x_2 < 0\} = \mathbb{R}_-^2$; in questo modo si avrà che $\Delta \Phi = 0$, $\forall y \in \Omega = \mathbb{R}_+^2$. Ci si chiede ora se $\exists x^*(x)$ tale che $\Phi(x - y) - \Phi(x^* - y) = 0$. In sostanza si vuole determinare $x^*(x)$ tale che

$$\begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x - y| = -\frac{1}{2\pi} \log |x^*(x) - y| \\ \underline{y} = (y_1, 0) \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}_+^2, \quad x^* \in \mathbb{R}_-^2$$

Se $\underline{x} = (x_1, x_2)$ il sistema appena scritto è risolto dalla scelta:

$$\underline{x}^* = (x_1, -x_2) \Rightarrow \text{dist}(y = 0, x) = \text{dist}(y = 0, x^*)$$

Si nota quindi che x^* , la posizione della carica immagine, corrisponde al simmetrico di x nel semipiano negativo. Avendo determinato x^* è quindi possibile scrivere l'espressione esplicita della soluzione, usando la formula di rappresentazione. Infatti ora la funzione di Green è completamente determinata:

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} (\log |x - y| + \log |x^* - y|)$$

Ora riscrivendo l'espressione per $u(x, y)$ con la formula di rappresentazione e la forma analitica appena determinata per la funzione di Green si ha una determinazione completa della soluzione del problema.

10.3 Il metodo delle cariche immagine in più dimensioni

Nel modulo precedente abbiamo determinato l'espressione della funzione di Green nel caso di un problema di Dirichlet nel semipiano. Ci si chiede cosa cambi nel caso in cui si studi lo stesso problema in \mathbb{R}^n . Si procede in analogia con quanto visto per \mathbb{R}^2 .

In \mathbb{R}^n la soluzione fondamentale del laplaciano è data da

$$\Phi(x - y) = \frac{1}{n(n-2)\alpha_n} \frac{1}{|x - y|^{n-2}}$$

Ancora si dovrebbe cercare x^* tale che $\Phi(x - y) - \Phi(x^*(x) - y) = 0$ con $y \in \partial\mathbb{R}_+^n = \{(y, y_n) \in \mathbb{R}^n : y_n = 0\} \forall y$. In sostanza, anche nel caso a più dimensioni, x^* corrisponde al punto riflesso di x rispetto a $\partial\mathbb{R}_+^n$. Andando a cercare la soluzione esplicita del problema di Dirichlet nel semipiano in dimensione generica si ha che:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\partial\mathbb{R}_+^n} = g \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}_+^n$$

Per poter scrivere l'espressione di $u(x)$ usando la formula di rappresentazione è necessario determinare l'espressione della derivata normale di $G(x, y)$. Sapendo che $\frac{\partial\Phi}{\partial\hat{n}} = -\frac{y_n}{n\alpha(n)|y|^n}$ si ha che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial\hat{n}(x, y)} &= \frac{\partial\Phi(x - y)}{\partial\hat{n}} - \frac{\partial\Phi(x^* - y)}{\partial\hat{n}} = \\ &= \frac{y_n - x_n}{n\alpha_n |x - y|^n} - \frac{y_n - x_n^*}{n\alpha_n |x^* - y|^n} = -\frac{2x_n}{n\alpha_n |x - y|^n} \end{aligned}$$

L'espressione appena determinata per la funzione di Green ci consente quindi di poter scrivere la soluzione esplicita del problema studiato. Nel caso particolare in cui $f(x) = 0$, ovvero nel caso di un problema di Dirichlet nel semipiano per l'equazione di Laplace anzi che per quella di Poisson, si avrebbe che la forma esplicita di $u(x)$ è data da:

$$u(x) = -\frac{2x_n}{n\alpha_n} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{g(y)}{|x - y|^n} d\sigma(y)$$

che quindi soddisfa il problema al bordo:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \\ u|_{\partial\mathbb{R}_+^n} = g \end{cases}$$

La funzione:

$$K(x, y) = -\frac{2x_n}{n\alpha_n |x - y|^n}$$

è detta **nucleo integrale di Poisson** per il semispazio.

I due esempi appena visti sono casi di applicazione del seguente teorema.

Sia $g \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ e sia $u(x)$ definita da:

$$u(x) = -\frac{2x_n}{n\alpha_n} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{g(y)}{|x-y|^n} d\sigma(y)$$

Allora si ha che:

- $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+^n)$
- $\Delta u = 0$ in $R + n\mathbb{R}_+^n$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = g(x_0)$, $\forall x_0 \in \partial\mathbb{R}_+^n$

da cui discende il seguente lemma:

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Allora $\forall x, y \in \Omega$ con $x \neq y$ si ha che $G(x, y) = G(y, x)$. Ovvero, la funzione di Green (per qualsiasi problema) è un nucleo simmetrico.

10.4 Cariche immagine per la sfera: la riflessione di Kelvin

Come ultimo esempio di applicazione della formula di rappresentazione per risolvere problemi al bordo si consideri il caso in cui $\Omega = B(0, R)$ in \mathbb{R}^3 .

Anche in questo caso il vero problema consiste nella determinazione della funzione di Green. Come visto per i due casi precedente si vuole trovare x^* tale che $\Phi(x - y) - h(y) = 0$. In questo caso però occorre introdurre un secondo parametro, oltre a x^* , che andrà determinato; altrimenti con la sola scelta $h(y) = \Phi(x^* - y)$ non si riuscirebbe a determinare completamente l'espressione di $G(x, y)$. Pertanto sia $h(y) = h_x(y) = \frac{q}{4\pi|x^*(x)-y|}$, con x^* e q da determinare. Dunque, se $y \in \partial B(0, R)$ con $|y| = R$, deve essere che:

$$\Phi(x, y) - q\Phi(x^*, y) = 0$$

Più precisamente, essendo $\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|}$, si ha:

$$q|x-y| = |x^*-y|$$

Passando ai quadrati, dovendo valere $\forall y \in \partial B(0, R)$ la relazione appena scritta, si ha che:

$$|\underline{x}^*|^2 + |\underline{y}|^2 - 2|\underline{x}^*||\underline{y}| = q^2(|\underline{x}|^2 + |\underline{y}|^2 - 2|\underline{x}||\underline{y}|)$$

Ricordando che $|\underline{y}| = R$ si può riscrivere l'equazione sopra separando i termini che contengono il termine \underline{y} da quelli che non lo contengono così da ottenere:

$$|\underline{x}^*|^2 + R^2 - q^2(|\underline{x}|^2 + R^2) = 2(q^2\underline{x} - \underline{x}^*)\underline{y}$$

Dovendo valere $\forall y \in \partial B(0, R)$ deve quindi essere che:

$$q^2\underline{x} = \underline{x}^*$$

In definitiva si ottiene:

$$q^4|\underline{x}|^2 + R^2 - q^2(|\underline{x}|^2 + R^2) = 0$$

da cui si possono ricavare i valori di q^2 :

$$q^2 = 1 \vee q^2 = \frac{R^2}{|\underline{x}|^2}$$

Il valore $q^2 = 1$ non è accettabile perché porterebbe a concludere $\underline{x} = \underline{x}^*$, dunque si conclude che $q^2 = \frac{R^2}{|\underline{x}|^2}$. In definitiva:

$$q = \frac{R}{|\underline{x}|}, \quad \underline{x}^* = \left(\frac{R}{|\underline{x}|} \right)^2 \underline{x}$$

Una riflessione del punto \underline{x} in \underline{x}^* siffatta è anche detta **riflessione di Kelvin**. Si conclude che per il caso considerato la funzione di Green, che potrà essere usata per scrivere espressamente $u(x)$ con la formula di rappresentazione, è data da:

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi |\underline{x} - \underline{y}|} - \frac{R}{|\underline{x}|} \frac{1}{4\pi \left| \frac{R^2}{|\underline{x}|^2} \underline{x} - \underline{y} \right|}$$

Principio di Dirichlet

11.1 Il principio di Dirichlet

In questo modulo ci occuperemo di un principio variazionale piuttosto importante che lega le soluzioni di problemi al bordo al teorema del minimo: il principio di Dirichlet. Partiamo dalla seguente definizione.

11.1.1 Teorema (1 Funzionale di Dirichlet)

Si consideri l'insieme

$$A_h = \left\{ u \in C^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = h \right\}$$

$E : A_h \rightarrow \mathbb{R}$ si definisce funzionale di Dirichlet

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

Si ha il seguente teorema.

11.1.2 Teorema (2 Principio di Dirichlet)

Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, $u \in A_g$. Essa è soluzione di

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

Se e solo se minimizza il funzionale di Dirichlet, ovvero:

$$E(u) = \min_{w \in A_g} E(w)$$

Dimostrazione

Supponiamo che u sia soluzione del problema al bordo, vogliamo dimostrare che $E(u) \leq E(w)$, $\forall w \in A_g$. Si ha che:

$$0 = \int_{\Omega} (\Delta u)(u - w) dx = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla(u - w) dx = - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla w dx \leq$$

Dalla disuguaglianza di Schwarz:

$$\begin{aligned} &\leq - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\nabla w|^2) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \end{aligned}$$

Da cui segue che $E(u) \leq E(w)$, $\forall w \in A_g$. Viceversa, sia $E(u) \leq E(w)$, $\forall w \in A_g$, si vuole dimostrare che u risolve il problema al bordo dato. Si consideri il funzionale $E(w) = E(u + \epsilon v)$, con $v \in A_0$. Allora, fissate u, v , $E(u + \epsilon v)$ è una funzione della sola variabile ϵ . Inoltre si ha che essa deve avere minimo in $\epsilon = 0$, essendo $E(u)$ minima per ipotesi. Pertanto si avrà che tutte le derivate direzionali di E saranno nulle; quindi:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dE}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\epsilon} \int_{\Omega} |\nabla (u + \epsilon v)|^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\epsilon} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + 2\epsilon |\nabla u| |\nabla v| + \epsilon^2 |\nabla v|^2) dx = \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| dx \end{aligned}$$

Si ha quindi la seguente espressione per la derivata funzionale (o di Gateaux):

$$E'(\epsilon = 0) = \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| dx$$

Dalla prima formula di Green con termine al bordo nullo si ha che:

$$0 = E'(0) = - \int_{\Omega} v(-\Delta u) dx, \forall v \in A_0$$

Si conclude quindi che $\Delta u = 0$ in Ω .

L'ultima uguaglianza della dimostrazione, così come molti passaggi simili visti durante i moduli precedenti, è giustificata dal teorema di annullamento.

11.1.3 Teorema (3 Di annullamento)

Se $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ e $\int_{\Omega} fg dx = 0$, $\forall g \in C_0^\infty(\Omega)$, allora $f = g$ quasi ovunque.

I risultati ottenuti in questo modulo, uniti a quelli del modulo precedente, ci permettono di studiare in maniera piuttosto completa e dettagliata tutti i problemi al bordo visti durante il corso. Infatti ora sappiamo qual è l'espressione esplicita delle soluzioni dell'equazione di Poisson; sappiamo che per ogni problema al bordo è possibile ricavare delle informazioni riguardo la sua risoluzione sfruttando la formula di rappresentazione e infine sappiamo che le proprietà di problemi al bordo di Dirichlet per il laplaciano possono essere studiate grazie al principio di Dirichlet. Nel prossimo modulo cercheremo di dare una panoramica globale dei problemi al bordo per il laplaciano andando a osservare lo stretto legame che essi hanno con i problemi agli autovalori e andando a caratterizzare un poco nel dettaglio la possibilità di usare gli autovalori del laplaciano come sistema ortonormale completo, su cui espandere in serie di Fourier le soluzioni.

Gli autovalori del laplaciano

12.1 Proprietà generali

Sino ad ora ci siamo occupati prevalentemente dello studio di problemi al bordo, ad esempio:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, \text{ (oppure } u_t - \Delta u = 0) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Avevamo inoltre notato che i problemi al bordo studiati potevano in qualche modo essere ricondotti a equazioni agli autovalori, per l'operatore di derivata seconda $\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2}$. Ora ci si vuole occupare dello studio dei problemi agli autovalori per l'operatore laplaciano. Più precisamente vorremmo capire quali sono, e come si trovano, i numeri λ tali che:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, \in \Omega \\ B.C. \end{cases}$$

Con condizioni al bordo di Dirichlet, di Neumann oppure di Robin.

Innanzitutto si osserva che i problemi al bordo si possono ricondurre a problemi agli autovalori per l'operatore laplaciano quando si lavora su spazi limitati. Infatti, detta $u(x, t) = e^{i\lambda t}v(x)$ la soluzione (o presunta tale) dell'equazione $u_{tt} - \Delta u = 0$, si ricava:

$$\Delta v(x) = -\lambda^2 v(x)$$

che è esattamente un'equazione agli autovalori per l'operatore laplaciano. Un discorso simile vale anche per l'equazione di Schroedinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(x)\psi, \quad \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}, \quad V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Posto $\psi(x, t) = e^{-iEt} \phi(x)$ si ottiene:

$$\left(-\frac{1}{2} \nabla^2 + V \right) \phi = E\phi$$

Detto $\hat{H} = -\frac{1}{2} \nabla^2 + V$, si ottiene l'equazione agli autovalori per l'operatore hamiltoniana:

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

Con condizione al bordo sostituita dalla richiesta che $\psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$.

Tornando al problema di partenza, ovvero alla determinazione degli autovalori del laplaciano, possiamo osservare che:

- l'operatore laplaciano è un operatore lineare quando definito su $\mathcal{D}(\Delta_{D,N,R})$;
- l'operatore laplaciano è un operatore simmetrico su $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Da queste due proprietà seguono due teoremi, in realtà estensione di proprietà già viste nel caso finito dimensionale.

12.1.1 Teorema (1)

Per l'operatore laplaciano valgono le seguenti proprietà:

- gli autovalori di $\Delta_{D,N,R}$ sono reali;
- le autofunzioni possono essere prese reali;
- ad autovalori distinti corrispondono autofunzioni ortogonali;
- gli autovettori possono costituire un sistema ortonormale completo.

Una caratterizzazione più precisa degli autovalori è data dal seguente teorema:

12.1.2 Teorema (2)

- gli autovalori di Δ_D sono positivi;
- gli autovalori di Δ_N sono non negativi, e $\lambda = 0$ è autovalore;
- gli autovalori di Δ_R sono non negativi se $\alpha(x) \geq 0$

Pertanto risulta ora chiaro che ciascuno dei problemi visti sino ad ora può essere ricondotto a un problema agli autovalori per l'operatore laplaciano. Vogliamo capire, e sarà oggetto di studio del prossimo modulo, come trovare questi autovalori e se essi possano costituire un sistema ortonormale o meno.

12.2 Il quoziente di Rayleigh

Nel modulo precedente si è messo in evidenza lo stretto legame che c'è tra i problemi al bordo e i problemi agli autovalori. Ora è necessario occuparsi di come trovare gli autovalori dell'operatore laplaciano e chiedersi se le corrispondenti autofunzioni possano costituire un sistema ortonormale completo o meno.

Delle importanti considerazioni in tal senso possono essere fatte grazie a una quantità detta **quoziente di Rayleigh** e definita come segue:

$$\frac{\|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2}{\|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2} = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} |u|^2 dx}$$

Consideriamo $Y = \mathcal{D}(\Delta_D) = \{w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), w \neq 0: w|_{\partial\Omega} = 0\}$, anche detto **spazio delle funzioni di prova per il problema di Dirichlet**.

12.2.1 Teorema (1)

Sia $u \in Y$ un punto di minimo per il quoziente di Rayleigh, ovvero:

$$m = \frac{\|\nabla u\|^2}{\|u\|^2} = \min_{w \in Y} \frac{\|\nabla w\|^2}{\|w\|^2}$$

Allora m è il primo autovalore di Δ_D con autofunzione corrispondente $u(x)$.

Il teorema appena enunciato è di fondamentale importanza nel tentativo di rispondere alla domanda che ci si era posti a inizio modulo. Infatti ora sappiamo che per poter ricavare il primo autovalore dell'operatore laplaciano è possibile cercare il punto di minimo del quoziente di Rayleigh. Rimane però aperta una questione: trovato il primo degli autovalori, esiste un modo per ricavare anche gli autovalori successivi? Effettivamente la risposta a questa domanda è affermativa, grazie al teorema seguente:

12.2.2 Teorema (2)

Siano v_1, v_2, \dots, v_{n-1} i primi $n-1$ autovettori di Δ_D scelti tra loro ortogonali. Sia

$$Y_n = \{w \in Y : \langle w | v_i \rangle = 0, \forall i = 1, \dots, n-1\}$$

Se esiste v_n che minimizza il quoziente di Rayleigh in Y_n , ovvero:

$$m_n = \min_{w \in Y_n} \frac{\|\nabla w_n\|^2}{\|w_n\|^2} = \frac{\|\nabla v_n\|^2}{\|v_n\|^2}$$

Allora l' n -esimo autovalore di Δ_D coincide esattamente con il valore $m_n = \lambda_n$ e la corrispondente autofunzione associata sarà v_n .

I due teoremi enunciati hanno una portata estremamente rilevante: grazie a essi non solo possiamo concludere che è possibile determinare autovalori e autofunzioni dell'operatore laplaciano, ma abbiamo anche una maniera esplicita per poterlo fare. Ci rimane ora da chiarire se le autofunzioni che determiniamo nella maniera appena illustrata siano o meno un sistema ortonormale completo.

12.2.3 Teorema (3 Di monotonia degli autovalori rispetto all'insieme di definizione)

Sia $\Omega_1 \subset \Omega_2$, allora $\lambda_n(\Omega_1) \geq \lambda_n(\Omega_2) \forall n$

Questo teorema porta immediatamente a un altro teorema che garantisce che gli autovalori che si possono trovare sono effettivamente infiniti:

12.2.4 Teorema (4)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato, con frontiera regolare. Allora l'operatore laplaciano per cui è definito il problema agli autovalori:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Ammette una successione infinita di autovalori con $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Il complesso dei risultati ottenuti in questo modulo ci permette di concludere che effettivamente la successione di autofunzioni dell'operatore di Dirichlet, ma analogamente si potrà dire per quello di Neumann e di Robin, costituiscono un sistema ortonormale completo

12.2.5 Teorema (5)

Le autofunzioni del problema di Dirichlet sono un sistema ortonormale completo su $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

I risultati ottenuti in questo e nel modulo precedente sono di estrema importanza perché permettono di concludere che: i problemi al bordo considerati possono essere ricondotti a un problema agli autovalori per l'operatore laplaciano, il quale ammette una successione infinita di autofunzioni che costituisce un sistema ortonormale completo sullo spazio delle funzioni modulo-quadro integrabili e possono essere usate per sviluppare in serie di Fourier le soluzioni dei problemi al bordo considerati.

L'equazione delle onde sul disco

13.1 L'equazione delle onde sul disco

Iniziamo con lo studio di un esempio.

Vogliamo risolvere l'equazione delle onde sul disco circolare di raggio a , con condizioni al contorno di Dirichlet. Questo esempio modella il tamburo. Dunque abbiamo:

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - c^2\Delta u = 0 \\ u(0, x, y) = \phi(x, y), \quad \partial_t u(0, x, y) = \psi(x, y) \\ u(t, x, y)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Omega = \{x^2 + y^2 < a^2\} \end{cases}$$

Il corrispondente problema agli autovalori per il laplaciano sul disco, con condizioni al bordo di Dirichlet, sarà:

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda v, \quad \text{su}\Omega \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Separando le variabili avremo che:

$$u(x, t) = T(t)v(x, y)$$

$$u(t, x) = \left(A \cos(\sqrt{\lambda}t) + B \sin(\sqrt{\lambda}t) \right) v_\lambda(x, y)$$

Studiamo quindi autovalori e autovettori sul disco. Per simmetria di Ω , scriviamo Δ in coordinate polari. Questo ci porterà a dover effettuare la sostituzione $v(x, y) \mapsto v(r, \theta)$ e ad avere $\Delta v = \left(\partial_{rr}^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta}^2 \right) v(r, \theta)$. Anche nelle variabili angolari è possibile separare le variabili, così da poter scrivere: $v(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. La corrispondente equazione agli autovalori diventa:

$$-\left[\partial_{rr}^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta}^2 \right] R(r)\Theta(\theta) = \lambda R(r)\Theta(\theta)$$

Che può essere riscritta nella forma:

$$\frac{\partial_{\theta\theta}^2\Theta(\theta)}{\Theta(\theta)} = -r^2 \left(\lambda + \frac{\partial_{rr}^2 R(r) + \frac{1}{r}\partial_r R(r)}{R(r)} \right) = -\gamma$$

Dove l'ultima uguaglianza deriva dalla necessità di dover avere entrambi i termini dell'equazione uguali a una costante, essendo dipendenti da variabili separate. L'equazione in θ ci porta a: $\frac{d^2}{d\theta^2}\Theta + \gamma\Theta = 0$. Stiamo cercando soluzioni periodiche di periodo 2π , dunque ci aspettiamo tre casi:

$$\gamma \begin{cases} < 0, \text{ la soluzione è non periodica} \\ > 0 \\ = 0, \text{ la soluzione è lineare} \end{cases}$$

In definitiva:

$$\Theta(\theta) = A \cos(\sqrt{\gamma}\theta) + B \sin(\sqrt{\gamma}\theta)$$

Che ha periodo di 2π se e solo se $\gamma = n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$. L'equazione in r ci porta a: $\frac{d^2}{dr^2}R(r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}R(r) + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right)R(r) = 0$ per $0 < r < a$. Le soluzioni di questa equazione differenziale devono soddisfare due importanti proprietà: occorre che $\lim_{r \rightarrow 0} R(r) < +\infty$ e che sia soddisfatta la condizione al bordo $R(a) = 0$. Dobbiamo aggiungere questa condizione perché le soluzioni del laplaciano è regolare, di classe C^2 dunque non divergeranno mai nell'origine. La singolarità deriva da una singolarità "fittizia" data dal passaggio in polari, tuttavia era già contenuta implicitamente nel problema di partenza. Di λ sappiamo che è positivo, perché autovalore di Δ_D , quindi facciamo un cambio di coordinate tale per cui $r \mapsto \sqrt{\lambda}r = \rho$. Tramite questo riscaldamento di variabili otteniamo una nuova equazione per $R(r)$:

$$R'' + \frac{1}{\rho}R' + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)R = 0, \quad R = R(\rho)$$

Le soluzioni di questa equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti non costanti hanno una forma particolare, essendo dei reciproci di monomi. Mi aspetterei dunque di trovare delle soluzioni proporzionali a monomi o a potenze, tuttavia non è possibile farlo in questo caso. Cerchiamo dunque soluzioni per serie, della forma:

$$R(\rho) = \rho^\alpha \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \rho^k$$

Dove i valori di α e a_k vanno determinati. Presa $R(\rho)$ in questa forma e sostituita nell'equazione differenziale di cui sopra si ottiene:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (k + \alpha)(k + \alpha - 1) \rho^{k+\alpha-2} + a_k (k + \alpha) \rho^{k+\alpha-2} + a_k \rho^{k+\alpha} - n^2 a_k \rho^{k+\alpha-2} = \\ & = \rho^\alpha \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \left[(k + \alpha)^2 - n^2 \right] \rho^{k-2} + \rho^2 \sum_{k=2}^{+\infty} a_{k-2} \rho^{k-2} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Dove impongo che i coefficienti dello stesso grado siano nulli, per poter ottenere una soluzione nulla. Si ha che se $k = 0$, $a_0(\alpha^2 - n^2) = 0$: ma, per ipotesi, $a_0 \neq 0$; dunque $\alpha = \pm n$, ma non potendo divergere in zero la soluzione, deve necessariamente essere $\alpha = n$. Le altre due relazioni che si ottengono sono:

$$k = 1, \quad a_1 \left[(1 + \alpha)^2 - n^2 \right] = 0$$

$$k \geq 2, a_k [(k + \alpha)^2 - n^2] + a_{k-2} = 0$$

Dalla 2, si ottiene $a_1 = 0$; mentre dalla 3 si ottiene $a_k = \frac{a_{k-2}}{(k+n)^2 - n^2}$, $a_0 = \frac{1}{2^n n!}$. In definitiva si ha che, l'unica soluzione regolare dell'equazione di Bessel $R'' + \frac{1}{\rho} R' + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right) R = 0$ è data da

$$J_n(\rho) = \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{n+2j}}{j!(n+j)!}$$

Per cui si ha che se $\rho \gg 1$, $J_n(\rho) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \cos\left(\rho - \frac{\sqrt{\pi}}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) + \mathcal{O}(\rho^{-3/2})$ che è una funzione oscillante; per n fissato, all'infinito oscilla ancora e quindi è una soluzione con infiniti zeri. Tornando al problema originario del laplaciano sul disco, abbiamo ora la possibilità di affermare che:

$$v(r, \theta) = J_n(\sqrt{\lambda}r) (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)), \quad \forall n = 0, 1, \dots$$

Tuttavia il valore di λ è ancora impregiudicato: sappiamo soltanto che deve essere un autovalore. Per determinarlo imponiamo la condizione al bordo, ovvero richiediamo che $v(a, \theta) \stackrel{!}{=} 0 = J_n(\sqrt{\lambda}a) (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$. Dunque ho che i valori di λ ammissibili sono tutti quei λ_n tali che $J_n(\sqrt{\lambda_n}a) = 0$. La soluzione generale dell'equazione delle onde pertanto sarà data da:

$$u(t, r, \theta) = \sum_{m=1}^{+\infty} J_0(\sqrt{\lambda_m}r) \left(C_{0m} \cos(\sqrt{\lambda_{0m}}t) + D_{0m} \sin(\sqrt{\lambda_{0m}}t) \right) + \\ + \sum_{m,n=1}^{+\infty} J_n(\sqrt{\lambda_{nm}}r) (A_{nm} \cos(n\theta) + B_{nm} \sin(n\theta)) \left(C_{nm} \cos(\sqrt{\lambda_{nm}}t) + D_{nm} \sin(\sqrt{\lambda_{nm}}t) \right)$$

13.2 Dipendenza dai dati iniziali

Abbiamo risolto due problemi:

- abbiamo trovato le soluzioni periodiche dell'equazione differenziale; $-\frac{d^2}{d\Theta^2} \Theta(\theta) = \gamma \Theta(\theta)$
- abbiamo trovato le soluzioni dell'equazione di Bessel, cercando le soluzioni di $\Delta v = 0$ sul disco.

Se vogliamo cercare la classe di funzioni armoniche omogenee di grado k troviamo:

$$f(r, \theta, \phi) = r^k f(1, \theta, \phi) = r^k g(\theta, \phi)$$

Riformuliamo il problema in tre dimensioni passando in coordinate polari e riscrivendo l'equazione agli autovalori. Cerchiamo soluzioni armoniche omogenee di grado k . Sostituendo nell'equazione appena scritta per $f(r, \theta, \phi)$ si trova:

$$\Delta v = r^{k-2} \left(k(k+1)g + \underbrace{\Delta_{s^2} g}_{\text{Parte angolare di } \Delta} \right) = 0$$

Dunque dobbiamo risolvere:

$$-\Delta_{s^2}g = k(k+1)g$$

Si ritrova un risultato analogo in un altro problema importante, quello della palla di centro zero e raggio a ; ovvero quando $\Omega = B(0, a) \subset \mathbb{R}^3$. Anche nel caso della risoluzione dell'equazione di Schroedinger per l'atomo di idrogeno ci si trova a risolvere

$$-\Delta\phi + \frac{1}{r}\phi = \lambda\phi$$

Per la parte angolare abbiamo l'azione dell'operatore Δ_{s^2} che ci permette di determinare le autofunzioni in θ, ϕ , anche dette **armoniche sferiche**.

La trasformata di Fourier

14.1 La trasformata di Fourier

Per la risoluzione delle equazioni presentate all'inizio del corso è necessario introdurre un nuovo strumento di calcolo: la **trasformata di Fourier**. Innanzitutto si nota che presa la funzione $e^{ik \cdot x}$, la sua derivata rispetto alla componente x_j ha un comportamento piuttosto particolare, infatti:

$$\frac{\partial e^{ik \cdot x}}{\partial x_j} = ik_j e^{ik \cdot x}$$

Ovvero, la derivata parziale si comporta in maniera molto semplice e si osserva che rispetto a essa la funzione $e^{ik \cdot x}$ è in realtà una autofunzione, con autovalore associato pari a ik_j . Consideriamo ora un elemento $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, che corrisponde a una stringa di n numeri che chiameremo **multiindice**. La quantità

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

si dice **modulo del multiindice** α . Inoltre si ha che:

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$$

La notazione dei multiindici è estremamente importante in analisi matematica, ed è utilizzata per indicare particolari elementi, le derivate parziali e gli operatori differenziali:¹

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

$$\mathcal{P}(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha$$

Un esempio di operatore differenziale agente su $e^{ik \cdot x}$:

¹Nell'esempio qui proposto \mathcal{P} rappresenta un polinomio differenziale, m il massimo ordine di derivazione e c_α degli opportuni coefficienti complessi, non necessariamente costanti.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\partial)e^{ik \cdot x} &= \sum_{|\alpha| \leq n} c_\alpha \partial^\alpha e^{ik \cdot x} = \\ &= \sum c_\alpha (ik)^\alpha e^{ik \cdot x} = \mathcal{P}(ik)e^{ik \cdot x}\end{aligned}$$

Prendiamo ad esempio il laplaciano: esso è un operatore differenziale di quelli appena definiti. Dunque, posto $\mathcal{P}(\partial) = -\Delta$, si ha:

$$\begin{aligned}-\Delta(e^{ik \cdot x}) &= -[(ik_1)^2 + (ik_2)^2 + \dots + (ik_n)^2] e^{ik \cdot x} = \\ &= [k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2] e^{ik \cdot x} = |\underline{k}|^2 e^{ik \cdot x}\end{aligned}$$

Quindi $e^{ik \cdot x}$ (onde piane) sono particolari autofunzioni dell'operatore laplaciano; le sfruttiamo per definire $\Psi(x)$, combinazione lineare di onde piane:

$$\Psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik \cdot x} A(k) dk, \quad A(k) \text{ funzione peso}$$

L'integrale sopra definito altro non è che la trasformata di Fourier di $A(k)$. Applichiamo l'operatore $\mathcal{P}(\partial)$ alla $\Psi(x)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\partial)\Psi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{P}(\partial)e^{ik \cdot x} A(k) dk = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{P}(ik)e^{ik \cdot x} A(k) dk\end{aligned}$$

Dunque l'effetto di $\mathcal{P}(\partial)$ è unicamente quello di modificare il peso di $\Psi(x)$ da $A(k)$ a $\mathcal{P}(ik)A(k)$. Nel caso in cui $\mathcal{P}(\partial) = -\Delta$ si ha che:

$$-\Delta\Psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |k|^2 A(k) e^{ik \cdot x} dk$$

14.2 Definizione della trasformata di Fourier

Dopo una breve introduzione, vogliamo definire il concetto di trasformata di Fourier. Essa viene definita naturalmente per funzioni di classe L^1 ma, come si vedrà nel corso di questo modulo, risulta piuttosto delicata l'estensione allo spazio L^2 , che tuttavia è quello di maggior interesse essendo anche spazio di Hilbert.

14.2.1 Teorema (1)

Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definiamo trasformata di Fourier di u la quantità

$$\mathcal{F}u = \hat{u}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik \cdot x} u(x) dx, \quad k \in \mathbb{R}^n$$

Definiamo **antitrasformata di Fourier** la quantità

$$\mathcal{F}^{-1}u = \check{u}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik \cdot x} u(x) dx, \quad k \in \mathbb{R}^n$$

Gli integrali che definiscono la trasformata e l'antitrasformata di Fourier altro non sono che degli integrali di Fourier con un'opportuna costante di normalizzazione. Quella usata nella nostra definizione è solo una delle possibili ed è una delle più comuni in fisica. Sappiamo quindi che la trasformata (l'antitrasformata) di Fourier è una mappa che manda $u \mapsto \hat{u}(\check{u})$. Tuttavia è bene chiedersi quale sia la sua immagine.

14.2.2 Teorema (2 Di Plancherel)

Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ a quadrato integrabile. Allora

$$\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\check{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Lo spazio $L^2(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio di Hilbert,² quindi \hat{u} e \check{u} sono isometrie. Si tenga presente che la trasformata di Fourier in realtà è definita su $L^1(\mathbb{R}^n)$ e dunque è necessario, per poter rimanere nel campo di validità del teorema appena enunciato, estenderla a $L^2(\mathbb{R}^n)$. Questa estensione si può fare lavorando in un particolare spazio detto **spazio di Schwarz**.

14.2.3 Osservazione (1)

Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Definiamo una successione $\{u_k\} \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$u_k \xrightarrow{L^2(\mathbb{R}^n)} u$$

ovvero

$$\|u_k - u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Allora per questa successione è ben definita la trasformata di Fourier, perché ogni elemento della stessa sta in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Inoltre si ha che

$$\|\hat{u}_k - \hat{u}_j\|_{L^2} = \|(u_k - u_j)^\wedge\|_{L^2} = \|u_k - u_j\|_{L^2}$$

Dal momento che $u_k \rightarrow u$ ed essendo L^2 uno spazio di Hilbert, e dunque anche di Banach, si ha che

$$u_k - u_j \rightarrow 0$$

Questo ci porta a concludere che la successione u_k è una successione di Cauchy. In realtà, in virtù dell'uguaglianza scritta qui sopra si ha che pure la successione \hat{u}_k è di Cauchy. Dunque essa dovrà convergere a una certa funzione $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ che per definizione chiameremo trasformata di Fourier di u . Stiamo procedendo per "densità": è fondamentale sapere che quelle che usiamo sono isometrie per poter concludere che \hat{u}_k è una successione di Cauchy.

Possiamo dunque definire la trasformata di Fourier in L^2

14.2.4 Teorema (3)

Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, si definisce trasformata di Fourier di u in $L^2(\mathbb{R}^n)$ la quantità

$$g = \hat{u} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik \cdot x} u_k(x) dx$$

Il limite che definisce la trasformata su L^2 non è un limite puntuale, ma un limite in media. La trasformata di Fourier è un'isometria di $L^2(\mathbb{R}^n)$ in sé stesso.

²Per altro l'unico degli $L^p(\mathbb{R}^n)$ a essere spazio di Hilbert.

14.2.5 Teorema (4)

Calcoliamo la trasformata di Fourier di una gaussiana. Sia $u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \in L^1(\mathbb{R})$. Dalla definizione abbiamo che:

$$\hat{u}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} e^{-x^2/2} dx$$

Detta $h(xk) = e^{-ikx} e^{-x^2/2}$, si ha che

$$\frac{\partial h}{\partial k} = -ixe^{-ikx} e^{-x^2/2}$$

$$\left| \frac{\partial h}{\partial k} \right| = |x| e^{-x^2/2} \in L^1(\mathbb{R})$$

Derivando rispetto a $k\hat{u}(k)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \hat{u}'(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-ix)e^{-ikx} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} ie^{-ikx} \frac{d}{dx} (e^{-x^2/2}) dx = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} ke^{-ikx} e^{-x^2/2} dx = -k\hat{u}(k) \end{aligned}$$

Dunque $\hat{u}(k)$ deve soddisfare la seguente equazione differenziale del primo ordine:

$$\hat{u}'(k) + k\hat{u}(k) = 0$$

La cui soluzione è

$$\hat{u}(k) = \hat{u}(0)e^{-k^2/2}$$

Più precisamente, notando che $\hat{u}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = 1$, si ha che

Ovvero che la trasformata di Fourier di una gaussiana è ancora una gaussiana.

Se la gaussiana non avesse varianza 1, ma un valore arbitrario, poco cambierebbe.

Più precisamente, se $u(x) = e^{-\xi|x|^2}$, avremmo che

$$\hat{u}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\xi}} e^{-\frac{|k|^2}{4\xi}}, \quad x, k \in \mathbb{R}$$

Chiaramente la nostra definizione non è per nulla restrittiva e segue in maniera naturale la sua estensione a \mathbb{R}^n . Sempre con l'esempio della gaussiana avremmo che $u(\underline{x}) = \prod_{i=1}^n e^{-\xi x_i^2}$ (notazione dei multiindici), e la sua trasformata di Fourier sarebbe

$$\hat{u}(\underline{k}) = \frac{1}{(2\xi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|\underline{k}|^2}{4\xi}}$$

14.3 Proprietà della trasformata di Fourier

Le principali proprietà della trasformata di Fourier sono riassunte dal seguente teorema.

14.3.1 Teorema (1)

Siano $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Allora valgono le seguenti proprietà:

- la trasformata di Fourier conserva i prodotti scalari, e dunque le norme in spazi di Hilbert:
 $\int_{\mathbb{R}^n} u \bar{v} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u} \bar{\hat{v}} dx$
 $(\partial^\alpha u)^\wedge = (ik)^\alpha \hat{u}, \forall \alpha$ multiindice tale che $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$
- la trasformata di Fourier di una convoluzione è il prodotto delle trasformate di Fourier; ovvero, date $u, v \in L^1 \cap L^2$ e $u \star v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)v(x-y)dy$ si ha che $(u \star v)^\wedge(k) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{u} \hat{v}$
- proprietà di inversione: ogni funzione è l'antitrasformata della sua trasformata, ovvero
 $u = (\hat{u})^\vee = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ikx} \hat{u}(k) dk$

Dimostrazione

$u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\|u + \alpha v\|_{L^2} = \|\hat{u} + \hat{\alpha v}\|_{L^2}$. Questa uguaglianza tra norme può essere scritta esplicitamente come:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} [|u|^2 + |\alpha v|^2 + \bar{u}(\alpha v) + u(\bar{\alpha v})] dx = \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} [|\hat{u}|^2 + |\hat{\alpha v}|^2 + \bar{\hat{u}}(\hat{\alpha v}) + \hat{u}(\overline{\hat{\alpha v}})] dk \\ & \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} (\alpha \bar{x} v + \bar{\alpha} u \bar{v}) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\alpha \bar{\hat{u}} \hat{v} + \bar{\alpha} \hat{u} \bar{\hat{v}}) dk \end{aligned}$$

Da cui si ottiene $\alpha = 1, i$ che combinati linearmente danno proprio il punto 1 del teorema.

Sia $u \in \mathcal{C}_0^{+\infty}(\mathbb{R}^n)$, allora:

$$\begin{aligned} (\partial^\alpha u)^\wedge(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx} \partial_x^\alpha u(x) dx = \\ &= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha (e^{-ikx}) u(x) dx = \\ &= (ik)^\alpha \hat{u}(k) \end{aligned}$$

Nello spostare l'azione di ∂^α su e^{-ikx} si è effettuata un'integrazione per parti, in cui i termini di bordo tendono a zero a $\pm\infty$ grazie al supporto compatto di $u(x)$.

Si ha che

$$\begin{aligned} (u \star v)^\wedge(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx} \int_{\mathbb{R}^n} u(z)v(x-z) dz dx = \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikz} u(z) dz \right) \hat{v}(k) = (2\pi)^{n/2} \hat{u}(k) \hat{v}(k) \end{aligned}$$

Si può osservare che se $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} \check{u} v = \int_{\mathbb{R}^n} u \check{v}$$

Dunque, essendo $\check{v} = \overline{(\hat{v})^\wedge}$, si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\hat{u})^\vee v dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u} \check{v} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u} \overline{(\hat{v})^\wedge} = \int_{\mathbb{R}^n} u \bar{\bar{u}} = \int_{\mathbb{R}^n} uv$$

14.4 L'equazione del calore con Fourier

Nei moduli precedenti è stata data una panoramica introduttiva riguardo alla teoria sulla trasformata di Fourier. Si è anche detto che essa è uno strumento estremamente importante nello studio dei problemi al bordo. In questo modulo (e nei due seguenti) verranno illustrati degli esempi in cui l'uso della trasformata di Fourier è fondamentale per la determinazione esplicita delle soluzioni delle equazioni delle onde e del calore.

Proviamo a risolvere l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{in } (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = g(x) \end{cases}$$

Ricordando che l'operatore Δ si "comporta bene" con la trasformata di Fourier, cerchiamo un'equazione per la trasformata di Fourier spaziale di u .

$$u(t, x) \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) e^{-ikx} dx = \hat{u}(t, k)$$

Otteniamo un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine:

$$\begin{cases} \hat{u}_t(t, k) + |k|^2 \hat{u}(t, k) = 0 \\ \hat{u}(0, k) = \hat{g}(k) \end{cases}$$

la cui soluzione è una gaussiana:

$$\hat{u}(t, k) = \hat{u}(0, k) e^{-t|k|^2} = \hat{g}(k) e^{-t|k|^2}$$

Quindi per trovare la soluzione nelle coordinate spaziali dobbiamo applicare l'antitrasformata di Fourier:

$$u(t, x) = \left(\hat{g}(k) e^{-t|k|^2} \right)^\vee$$

Possiamo usare la proprietà della convoluzione poiché sappiamo che:

$$(g \star F)^\vee = (2\pi)^{n/2} (\hat{g}(k) \cdot \hat{F})$$

Quindi usando:

$$\hat{F} = e^{-t|k|^2} \rightarrow F = \frac{1}{(2t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

$$u(t, x) = \left(\hat{g}(k) e^{-t|k|^2} \right)^\vee = \frac{(g(x) \star F)}{(2\pi)^{n/2}}$$

Esplicitando la convoluzione si ottiene la formula risolutiva:

$$u(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy$$

che definisce la soluzione dell'equazione del calore in ogni dimensione.

14.5 L'equazione delle onde

Nel modulo precedente abbiamo visto come è possibile sfruttare le proprietà della trasformata di Fourier per ricavare l'espressione della soluzione dell'equazione del calore. In questo modulo si sfrutteranno considerazioni analoghe per andare a determinare la soluzione dell'equazione delle onde, con problema di Cauchy associato:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0, x) = f(x) \\ u_x(0, x) = g(x) \end{cases}$$

In analogia con quanto visto per l'equazione del calore si potrà scrivere, passando al corrispondente problema per $\hat{u}(x, t)$:

$$\hat{u}(k, t) = \hat{f}(k) \cos(x | k | t) + \hat{g}(k) \frac{\sin(x | k | t)}{c | k |}$$

Chiaramente la soluzione del problema di partenza si potrà trovare applicando l'inverso dell'operatore di Fourier \mathcal{F}^{-1} a \hat{u} . Per poter fare questo passaggio è necessario però che \mathcal{F} , operatore di Fourier, sia ben definito e sempre invertibile. Queste condizioni sono verificate quando si lavora nello spazio di Schwarz:

$$S(\mathbb{R}^n) = \{\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \partial^\alpha \psi \text{ è a decrescenza rapida } \forall \alpha\}$$

◇ **Definizione** Si dice che una funzione $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ è **a decrescenza rapida** se

$$|\psi(x)| \leq \frac{c}{|x|^p}, \quad \forall p, |x| \rightarrow +\infty$$

Lo spazio di Schwarz $S(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio vettoriale completo, quindi è anche di Banach. Per esso valgono le seguenti proprietà:

- se $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$, allora $\forall \alpha, \beta$ si ha che $x^\beta \partial^\alpha \psi \in S(\mathbb{R}^n)$;
- se $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$, allora $\hat{\psi} \in S(\mathbb{R}^n)$

Inoltre si ha che $S(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, da cui segue che $\mathcal{F} : S \rightarrow S$ è biettiva ed è un'isometria. Fatta questa necessaria introduzione possiamo partire con lo studio delle soluzioni dell'equazione delle onde, con dati iniziali del corrispondente problema di Cauchy presi di classe Schwarz. Le proprietà della soluzione dell'equazione delle onde sono date dal seguente teorema.

14.5.1 Teorema (Espressione delle soluzioni dell'equazione delle onde)

La soluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle onde con dati iniziali in $S(\mathbb{R}^n)$ ha per espressione:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \text{ in } \mathbb{R}$$

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{2\pi} \int_{|y| \leq 1} f(x + cty) \frac{1}{\sqrt{1 - |y|^2}} dy \right) + \frac{t}{2\pi} \int_{|y| \leq 1} g(x + cty) \frac{1}{\sqrt{1 - |y|^2}} dy \text{ in } \mathbb{R}^2$$

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{4\pi} \int_{S^2} f(x + ct\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} \right) + \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} g(x + ct\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} \text{ in } \mathbb{R}^3$$

Dimostrazione

Iniziamo considerando il caso $n = 1$. Applicando l'antitrasformata di Fourier a $\hat{u}(k, t)$ si ha che:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\hat{f}(k) \cos(x | k | t) + \hat{g}(k) \frac{\sin(x | k | t)}{c | k |} \right) e^{ikx} dk = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\hat{f}(k) \frac{e^{ic|k|t} + e^{-ic|k|t}}{2} + \hat{g}(k) \frac{e^{ic|k|t} - e^{-ic|k|t}}{2ic | k |} \right) e^{ikx} dk \end{aligned}$$

che può essere riscritto come:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) \frac{e^{ik(x+ct)} + e^{ik(x-ct)}}{2} dk + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(k) \frac{e^{ik(x+ct)} - e^{ik(x-ct)}}{2ikc} dk = \end{aligned}$$

Vedendo ciascuno degli addendi del primo integrale come un'antitrasformata di Fourier è possibile riscrivere:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(k) \left[\int_{-ct}^{ct} \frac{e^{ik(x+s)}}{2c} ds \right] dk = \\ &= \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(n) e^{ik(x+s)} \frac{dn}{\sqrt{2\pi}} ds = \\ &= \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{+ct} g(x + s) ds \end{aligned}$$

Non trattiamo il caso $n = 2$ perché più complesso degli altri due e, soprattutto, perché si può derivare dal caso $n = 3$. Nello spazio tridimensionale, dato un insieme invariante per rotazioni si ha, data una rotazione R , che:

$$RR^t = \mathbb{I}, \quad RS^2 = S^2$$

Chiaramente $\det R = 1$. Se $R \in SO(3)$ si ha che

$$\int_{S^2} \psi(R\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} = \int_{S^2} \psi(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}$$

Come per il caso monodimensionale, si vuole ricavare $u(x, t)$ come antitrasformata di Fourier di $\hat{u}(k, t)$, ovvero:

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\hat{f}(k) \cos(c | k | t) + \hat{g}(k) \frac{\sin(c | k | t)}{c | k |} \right) e^{ikx} d^2\mathbf{k}$$

Si osserva che $\cos(c | k | t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sin(c|k|t)}{c|k|} \right)$: quindi è possibile valutare solo il secondo dei due integrali che definiscono $u(x, t)$ e ottenere l'espressione del primo derivando rispetto a t . Per valutare il secondo integrale si sfrutta la seguente identità:

$$\begin{aligned} \int_{S^2} e^{ictyk} d\sigma_y &= \int_{S^2} e^{icty\underline{k}} d\sigma_y = \int_{S^2} e^{ict(R^t \underline{y} \underline{k})} d\sigma_y = \\ &= \int_{S^2} e^{ict(yRk)} d\sigma_y = \int_{S^2} e^{ic|k|t(y(0,0,1))} d\sigma_y = \end{aligned}$$

Passando in coordinate sferiche

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{ic|k|t \cos \theta} \sin \theta d\theta d\phi = \frac{4\pi \sin(c|k|t)}{t c|k|}$$

Dunque:

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{g}(k) \frac{\sin(c|k|t)}{c|k|} e^{ikx} dk =$$

Sfruttando l'identità scritta sopra:

$$\begin{aligned} &= \frac{t}{4\pi} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} e^{icty\underline{k}} d\sigma_y e^{ikx} dk = \\ &= \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(k) e^{ik(x+cty)} d^3k \right) d\sigma_y = \end{aligned}$$

Si riconosce nell'integrale in \mathbb{R}^3 la trasformata di Fourier di $g(x+cty)$, quindi:

$$= \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} g(x+cty) d\sigma_y$$

Derivando rispetto a t si ottiene la soluzione dell'equazione delle onde in \mathbb{R}^3 , anche detta formula delle medie sferiche di Kirchhoff. La soluzione dell'equazione delle onde in $n=2$ si ricava usando il metodo della discesa di Hadamard, in cui si usa la soluzione $u(t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ e semplificando si ottiene l'espressione di $u(x, t)$ per \mathbb{R}^2

Un'importante conseguenza del teorema appena ricavato è la seguente: un'onda, quindi un segnale, tridimensionale si propaga sul cono dato dall'unione delle sfere di centro x e raggio (variabile) t ; più precisamente essa si propaga sulla superficie di questo cono, in modo *sharp*. Più delicata è l'interpretazione fisica di quello che avviene per onde in \mathbb{R}^2 : analiticamente $u(x, t)$ presenta una discontinuità in $y = \pm 1$; a livello fisico ciò si traduce nel fatto che la propagazione non sarà più *sharp*, ma avverrà anche all'interno del cono dato dall'involuppo delle sfere di centro x e raggi t , su dischi. In realtà si può dimostrare che questo fatto è ben più generico: ogni propagazione di segnale in spazi di dimensioni pari avverrà in modo discontinuo, mentre avverrà in modo continuo in spazi di dimensione dispari. Questa proprietà si traduce nel dire che l'equazione delle onde propaga le singolarità.

14.6 Considerazioni sull'energia delle onde

In questo modulo si riprendono alcuni risultati riguardanti l'energia per le soluzioni dell'equazione delle onde, quali: conservazione, equipartizione e unicità. In particolare si utilizzeranno la trasformata di Fourier e le sue proprietà per provare che l'energia è una costante di moto.

Innanzitutto si ha la conservazione dell'energia.

14.6.1 Teorema (Conservazione dell'energia)

Sia $u(x, t)$ soluzione dell'equazione delle onde. Detta

$$T(u)(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|^2 dx$$

l'energia cinetica dell'onda, e detta

$$U(u)(t) = \frac{1}{2} c^2 \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla u(x, t)\|^2 dx$$

la sua energia potenziale, si ha che l'energia totale dell'onda è costante sulle soluzioni dell'equazione delle onde:

$$E(u)(t) = T(u)(t) + U(u)(t) = E(u)(0)$$

Dal precedente teorema segue immediatamente anche l'**equipartizione dell'energia**.

14.6.2 Teorema (Equipartizione dell'energia)

Sia $u(x, t)$ soluzione dell'equazione delle onde e sia $E(u)$ la sua energia. Allora si ha che

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} T(u)(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(u)(t) = \frac{1}{2} E(u)(0)$$

Da questi due risultati segue l'unicità dell'energia della soluzione dell'equazione delle onde.

Dimostrazione

Siano u_1, u_2 due soluzioni del problema di Cauchy per l'equazione delle onde:

$$\begin{cases} \square u_i = 0 \\ u_i(0, x) = f \\ \partial_t u_i(0, x) = g \end{cases} \quad \forall i = 1, 2$$

Sia ora $w = u_1 - u_2$. Essa soddisferà il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \square w = 0 \\ w(0, x) = 0 \\ \partial_t w = 0 \end{cases}$$

Dunque si ha che $E(w)(0) = 0$, ma essendo l'energia una costante di moto dovrà essere che $E(w)(t) = 0 \forall t$. Segue che:

$$E(u_1) = E(u_2)$$

Teoria delle distribuzioni

15.1 Introduzione

Nei moduli precedenti abbiamo studiato problemi al bordo, cercando di determinare le soluzioni degli stessi. Più precisamente, si era interessati a trovare soluzioni classiche per le equazioni studiate. È importante osservare che però vi sono dei casi in cui ciò non è possibile, ovvero si possono trovare funzioni particolari che soddisfano le richieste dei problemi analizzati: per questo è necessario introdurre il concetto di **distribuzione**.

Si ricordi, ad esempio, che il teorema di D'Alembert afferma che la soluzione per l'equazione delle onde ha forma:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - vt) + f(x + vt)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} g(s) ds$$

Si nota che però, specie nel caso in cui $g(s) = 0$, anche la somma di due funzioni a gradino coincide analiticamente con l'espressione appena data per la soluzione dell'equazione delle onde, ma non sarà soluzione; ovvero, date f, g funzioni a gradino $u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$ non è soluzione dell'equazione delle onde.

Problemi simili si hanno quando si cercano le soluzioni armoniche di $-\Delta u = 0$ in \mathbb{R}^3 . Infatti, presa $u(x) = \frac{1}{4\pi|x|} + c$ l'equazione:

$$-\Delta \left(\frac{1}{4\pi|x|} \right) = 0$$

Non può essere risolta su \mathbb{R}^3 ma dovrà essere studiata su $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Vediamo quindi che la risoluzione di problemi al bordo talvolta porta a dei problemi, per cui è necessario definire il concetto di distribuzione per cercare di ovviare a questi ed essere in grado di risolvere in maniera completa l'equazione studiata. Iniziamo enunciando il seguente lemma (Fondamentale del calcolo delle variazioni):

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Sia $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$, ovvero integrabile sui compatti di \mathbb{R}^n . Allora f è nulla quasi ovunque in Ω se e solo se

$$\int_{\Omega} f \phi dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Il lemma appena enunciato è estremamente importante perché ci consente, nella sua forma più generale di concludere l'uguaglianza (quasi ovunque) di due funzioni semplicemente sfruttando il fatto che il loro integrale contro una funzione test è nullo, senza doverle confrontare puntualmente. Più precisamente vale la seguente osservazione.

Siano $f, g \in L^1_{Loc}(\Omega)$. Se

$$\int_{\Omega} (f - g)\phi dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Allora $f = g$ quasi ovunque in Ω .

Come già accennato sopra, la funzione $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ che si usa per definire gli integrali di sopra è detta **funzione test**. Il risultato dell'osservazione appena fatta inoltre suggerisce che a ogni funzione f integrabile su compatti si può associare un oggetto, che chiameremo T_f definito dall'integrale di f contro una funzione di test ϕ :

$$f \mapsto T_f = \int_{\Omega} f\phi dx$$

Dato che $C_0^\infty(\Omega)$ è uno spazio vettoriale, si ha che $\forall f, T_f \in (C_0^\infty)^*$, ovvero T_f appartiene al duale algebrico di C_0^∞ . Nel prossimo modulo vedremo più nel dettaglio che l'oggetto appena definito in realtà è un funzionale lineare ed è ciò che chiamiamo distribuzione. Daremo inoltre una caratterizzazione più dettagliata delle proprietà di una distribuzione.

15.2 Caratterizzazione delle distribuzioni

Nel modulo precedente abbiamo osservato che a ogni funzione integrabile su compatti di \mathbb{R}^n è possibile associare un funzionale lineare definito come $T_f = \int_{\Omega} f\phi dx, \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$. In questo modulo vogliamo capire meglio quali siano le proprietà di questo funzionale lineare per darne una caratterizzazione più dettagliata. Innanzitutto è necessario introdurre il concetto di topologia su $(C_0^\infty(\Omega))^*$ per poter poi definire il concetto di continuità di questo funzionale lineare T_f . Per poter definire la **topologia sul duale** si inizia definendo quella su $C_0^\infty(\Omega)$. Tuttavia, data una successione $\{\phi_n\}$ in $C_0^\infty(\Omega)$ si hanno due problemi nel voler definire quando $\phi_n \rightarrow \phi$ perché:

- si deve richiedere che anche $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ e quindi occorre convergenza uniforme su tutte le derivate;
- si deve richiedere che ϕ_n abbiano tutti lo stesso supporto, altrimenti si rischierebbe di avere $\phi_n \rightarrow \phi$ su $\partial\Omega$

Pertanto per definire il concetto di topologia su $C_0^\infty(\Omega)$ è necessario richiedere che tutti i ϕ_n abbiano stesso supporto compatto K e che $\forall x \in K$ si abbia $\sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi_n - \partial^\alpha \phi| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \forall \alpha$ multiindice. Avendo definito il concetto di topologia su $C_0^\infty(\Omega)$, ora è possibile definire quello sul suo duale.

◇ **Definizione** Sia $T_f \in (C_0^\infty(\Omega))^*$. Si dice che esso è **continuo** se

$$T_f(\phi_n) \rightarrow T_f(\phi), \quad \forall \phi_n \xrightarrow{C_0^\infty(\Omega)} \phi$$

Da cui segue la definizione di distribuzione:

◇ **Definizione** Si definisce **distribuzione** un funzionale lineare continuo sulle funzioni di test, ovvero continuo su $C_0^\infty(\Omega)$.

Osserviamo che T_f definito sopra è effettivamente una distribuzione, infatti si ha che:

$$|T_f(\phi_n)| = \left| \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx \right| \leq \sup_{x \in K} |\phi_n(x)| \int f(x)dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Dunque:

$$T_f(\phi_n) \rightarrow T_f(0), \text{ se } \phi_n \rightarrow 0$$

Quindi effettivamente T_f è una distribuzione.

Lo spazio delle funzioni test, $C_0^\infty(\Omega)$, spesso si indica con $\mathcal{D}(\Omega)$, mentre il suo duale algebrico con $\mathcal{D}'(\Omega)$ ed è detto spazio delle distribuzioni. Nel caso in cui $\Omega = \mathbb{R}^n$ si omette in \mathcal{D} e \mathcal{D}' . Diamo ora la definizione di **supporto di una distribuzione**:

◇ **Definizione** $T \in \mathcal{D}'$ si annulla nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ se $T_f(\phi) = 0 \forall \phi \in \mathcal{D}(A)$. Si consideri $\bigcup A$, unione degli aperti su cui T si annulla. Il complementare di questo insieme, che sarà chiuso, si dice supporto di T .

Nel modulo successivo vedremo che in realtà non tutte le distribuzioni sono come T_f . T_f è detta **distribuzione regolare**, tuttavia esistono anche delle distribuzioni singolari, come la δ di Dirac e il valor principale di $\frac{1}{x}$ che saranno oggetto di studio del prossimo modulo.

15.3 La delta di Dirac

Vi sono alcune distribuzioni che non sono della forma T_f vista nei moduli precedenti. Distribuzioni di questo tipo prendono il nome di **distribuzioni singolari**. In questo e nel prossimo modulo ci occuperemo di due importanti distribuzioni singolari: la delta di Dirac e il valor principale.

Si consideri $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $x_0 \in \Omega$. Si definisce **delta di Dirac** la distribuzione

$$\delta_{x_0}(\phi) = \phi(x_0) \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

È chiaro che essa sia un funzionale lineare, infatti:

$$\forall \phi_1, \phi_2 \in C_0^\infty(\Omega); \delta_{x_0}(\phi_1 + \phi_2) = (\phi_1 + \phi_2)(x_0) = \phi_1(x_0) + \phi_2(x_0)$$

$$\forall \phi \in \mathcal{D}, \forall c \in \mathbb{R}; \delta_{x_0}(c\phi) = c\phi(x_0)$$

Tuttavia è evidente che questa distribuzione non è del tipo T_f introdotto nei moduli precedenti. Ci si chiede se sia possibile legare δ a distribuzioni regolari. Per poter rispondere a questa domanda si consideri il seguente teorema.

15.3.1 Teorema (1)

Sia $\{T_n\}$ una successione di distribuzioni in $\mathcal{D}'(\Omega)$ e sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Se $T_n(\phi) \rightarrow T(\phi)$, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, allora:

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$$

In virtù del teorema appena enunciato è possibile concludere che in alcuni casi è possibile definire distribuzioni singolari come limite di distribuzioni regolari, cosa che si può fare anche per la δ di Dirac.

Si consideri $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$. Si consideri poi f_s definita come:

$$f_s(x) = \frac{1}{s^n} f\left(\frac{x}{s}\right)$$

Si assuma poi che $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1$, ad esempio $f(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}}$. Sicuramente $f_s(x)$ soddisfa le seguenti proprietà:

- $\int_{\mathbb{R}^n} f_s(x) dx = 1$
- $\lim_{s \rightarrow 0} \int_{|x| < R} f_s(x) dx = 1$
- $\lim_{s \rightarrow 0} \int_{|x| > R} f_s(x) dx = 0$

Per come è definita f_s è certamente possibile associarle una distribuzione regolare; sia essa T_{f_s} :

$$T_{f_s} = \int_{\mathbb{R}^n} f_s(x) \phi(x) dx$$

Si può provare che una distribuzione siffatta soddisfa le ipotesi del teorema precedente e può essere utilizzata per approssimare una delta di Dirac. Più precisamente, vale il seguente teorema.

15.3.2 Teorema (2)

Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e sia $f_s(x) = \frac{1}{s^n} f\left(\frac{x}{s}\right)$. Sia T_{f_s} la distribuzione regolare associata a f_s , allora si ha che:

$$T_{f_s} \xrightarrow{s \rightarrow 0} \delta_0(\phi)$$

Dimostrazione

Sia $\phi \in \mathcal{D}$. Si vuole provare che $T_{f_s}(\phi(x) - \phi(0)) \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0$. Si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_s(x) (\phi(x) - \phi(0)) dx = \int_{|x| \leq R} f_s(x) (\phi(x) - \phi(0)) dx + \int_{|x| > R} f_s(x) (\phi(x) - \phi(0)) dx$$

Per le proprietà di ϕ si ha che:

- $\phi(x) - \phi(0)$ è limitata su \mathbb{R}^n da M ;
- sia $N(R) = \sum_{|x| \leq R} |\phi(x) - \phi(0)|$, e $N(R) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$.

Si può dunque scrivere una disuguaglianza per $T_{f_s}(\phi(x) - \phi(0))$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_s(x) (\phi(x) - \phi(0)) dx \leq N(R) + M \int_{|x|>R} f_s(x) dx$$

Data l'arbitrarietà di $N(R)$ lo si sceglie in modo tale che $N(R) < \frac{\epsilon}{2}$. Inoltre si prende s tale che $\int_{|x|>R} f_s(x) dx < \frac{\epsilon}{2M}$. Fatte queste scelte la disuguaglianza scritta sopra diventa:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_s(x) (\phi(x) - \phi(0)) dx \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Dalla definizione di limite segue che $\forall \phi \in \mathcal{D}$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_s(x) \phi(x) dx \xrightarrow{s \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f_s(x) \phi(0) dx = \phi(0) = \delta_0(\phi)$$

In definitiva si ha che:

$$T_{f_s}(\phi) \xrightarrow{s \rightarrow 0} \delta_0(\phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}$$

Chiaramente, seguendo la strategia appena usata, è anche possibile dimostrare che:

$$\frac{1}{s^n} f\left(\frac{x - x_0}{d}\right) \xrightarrow{s \rightarrow 0} \delta_{x_0}(\phi)$$

Nei prossimi moduli vedremo come diverse proprietà delle distribuzioni regolari si riportano nel caso di distribuzioni singolari come la delta di Dirac. Prima di proseguire si tenga presente anche la seguente osservazione.

La distribuzione di Dirac ha per supporto $\{x_0\}$. Si osserverà anche che la classe delle distribuzioni con supporto $\{x_0\}$ è data da una combinazione lineare della δ di Dirac e di tutte le sue derivate.

15.4 Il valor principale

In questo modulo ci occuperemo di un'altra distribuzione singolare: il **valor principale**. Si consideri $f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Si definisce valore principale di $\frac{1}{x}$ la quantità

$$P_{\frac{1}{x}}(\phi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx$$

Quella appena usata non è l'unica rappresentazione del valor principale, infatti se si considera ϕ con supporto $[-r, r]$ si ha:

$$\int_{|x|>\epsilon} \frac{\psi(x)}{x} dx = \int_{\epsilon}^r \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{x} dx \leq 2r \sup_{x \in [-r, r]} |\phi'(x)| < +\infty$$

Segue che $\int_{\epsilon}^r \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx$ è limitato in ϵ . Si può concludere che:

$$P_{\frac{1}{x}}(\phi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^r \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx$$

La distribuzione di Dirac e il valor principale rientrano nella determinazione di quella che si chiama **formula di Plemelj-Sochozki**.

Si calcoli

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x)}{x \pm i\epsilon} dx$$

La funzione integrata contro $\phi(x)$ è definita in campo complesso, pertanto la si riscrive distinguendo parte reale e immaginaria:

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} \mp \frac{i\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$

Per la parte immaginaria si ha che:

$$\frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{\left(\frac{x}{\epsilon}\right)^2 + 1}$$

Detta $\frac{x}{\epsilon} = s$ quella che si ottiene altro non è che una rappresentazione della delta di Dirac:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \mp \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \pm i\pi \delta_0(\phi)$$

Per la parte regolare occorre calcolare

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} \phi(x) dx$$

Si osserva che l'integranda è una distribuzione regolare della forma T_f . Definiamo $h_\epsilon(x) = \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, distribuzione regolare dispari. Moltiplicando e dividendo per x , l'integrale che definisce la parte reale della funzione di cui stiamo calcolando il limite si può riscrivere come:

$$\int_0^{+\infty} x h_\epsilon(x) \frac{(\phi(x) - \phi(0))}{x} dx$$

Volendo passare al limite sotto il segno di integrale è necessario considerare il problema della convergenza dominata. In realtà si osserva che esiste una maggiorante integrabile per l'integranda:

$$|x h_\epsilon(x)| = \left| \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} \right| \leq 1$$

Dunque $\frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x}$ è la maggiorante integrabile che permette di concludere che vi è convergenza dominata e quindi che le operazioni di limite e di integrale possono essere scambiate, quindi:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} = P_{\frac{1}{x}}$$

Così da poter concludere la formula di Plemelj-Sochozki:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x \pm i\epsilon} dx = \mp i\pi \delta_0(\phi) + P_{\frac{1}{x}}$$

L'esempio appena studiato ci ha permesso anche di determinare un'altra espressione per il valore di $P_{\frac{1}{x}}$, infatti si è arrivati a:

$$P_{\frac{1}{x}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} dx$$

15.5 Operazioni con le distribuzioni

Vogliamo ora studiare le distribuzioni da un punto di vista più analitico, occupandoci delle operazioni tra distribuzioni. Innanzitutto definiamo il **prodotto di una distribuzione per una funzione**:

◇ **Definizione** Sia $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e sia $f \in C^\infty(\Omega)$, si definisce $fT(\phi)$ la quantità:

$$fT(\phi) = T(f\phi)$$

Se $f = \text{cost}$ la definizione appena data rimanda al caso della definizione di funzionale lineare. Ad esempio, per la delta di Dirac si ha che:

$$f\delta_0(\phi) \stackrel{Def.}{=} \delta_0(f\phi) = [f\phi](0) = f(0)\phi(0)$$

Dunque se $T \equiv \delta$ per poter definire il prodotto tra distribuzione e funzione è sufficiente che $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $f \in C(\mathbb{R})$

Non è possibile definire il prodotto tra distribuzioni, dal momento che non è possibile dare una definizione consistente per questa operazione. Occupiamoci quindi della derivazione di distribuzioni.

◇ **Definizione** Sia $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n |_{\partial\Omega})$, allora la sua derivata è definita da:

$$\partial^\alpha T_f(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T_f(\partial^\alpha \phi)$$

Dalla definizione appena data, che per altro è una generalizzazione della formula di Green, è possibile notare come una distribuzione sia derivabile un numero qualsiasi di volte. Inoltre si osserva che la definizione di derivata di una distribuzione è una proprietà globale, a differenza di quella per una funzione che è locale. Studiamo con il seguente esempio un caso abbastanza particolare.

Sia

$$T = \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$$

La distribuzione $T_\theta(\phi)$ quindi sarà:

$$T_\theta(\phi) = \theta(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \theta(x)\phi(x)dx$$

Calcoliamone la derivata applicando la definizione appena data:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} T_\theta(\phi) &= (-1)T \left(\frac{d}{dx} \phi \right) = (-1) \int_{\mathbb{R}} \theta(x)\phi'(x)dx = \\ &= (-1) \left[\int_{-\infty}^0 0\phi'(x)dx + \int_1^{+\infty} \phi'(x)dx \right] = \\ &= - \int_1^{+\infty} \phi'(x)dx = -(\phi(+\infty) - \phi(0)) = \phi(0) = \delta_0(\phi) \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{d}{dx} T_\theta(\phi) = \delta_0(\phi)$$

Quanto appena visto può essere generalizzato dal seguente teorema.

15.5.1 Teorema (1)

Sia $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{x_0\})$ e sia T_f la sua distribuzione associata. Allora:

$$T'_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \{f'\} \phi dx + \delta_{x_0}(\phi) [f](x_0)$$

dove $[f]$ rappresenta il salto della funzione nel punto di discontinuità x_0 e

$$\{f'\} = \begin{cases} f'(x), & \forall x \neq x_0 \\ \text{cost}, & x = x_0 \end{cases}$$

Dimostrazione

Applicando la definizione e svolgendo i conti si ottiene:

$$\begin{aligned} T'_f(\phi) &= (-1)T_f(\phi') = (-1) \left[\int_{-\infty}^{x_0} d\phi' dx + \int_{x_0}^{+\infty} f\phi' dx \right] = \\ &= - \left[- \int_{-\infty}^{x_0} f'\phi dx + f(x_0^-)\phi(x_0) - \int_{x_0}^{+\infty} f'\phi dx - f(x_0^+)\phi(x_0) \right] = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \{f'\} \phi dx + \phi(x_0) [f(x_0^+) - f(x_0^-)] \end{aligned}$$

Un'interessante osservazione si può fare calcolando le derivate della δ di Dirac. Applicando la definizione si ha:

$$\delta'_{x_0}(\phi) = -\delta_{x_0}(\phi') = -\phi'(x_0)$$

$$\delta''_{x_0}(\phi) = \phi''(x_0)$$

$$\delta^\alpha_{x_0}(\phi) = (-1)^{|\alpha|} \phi(x_0)$$

Si osserva che la distribuzione di Dirac e tutte le sue derivate hanno per supporto $\{x_0\}$. Risultato che deriva dal seguente teorema.

15.5.2 Teorema (2)

La classe delle funzioni con supporto $\{x_0\}$ è data da una combinazione lineare della distribuzione di Dirac $\delta_{x_0}(\phi)$ e di tutte le sue derivate.

15.6 Soluzioni fondamentali e distribuzioni

Si è visto che le soluzioni fondamentali dell'equazione di Laplace e dell'equazione del calore possono essere scritte nella forma:

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x|, & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases}$$

$$E(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Vogliamo chiederci quale sia il significato degli operatori laplaciano Δ e $\mathcal{H} = \partial_t - \Delta$, ovvero gli operatori che definiscono le equazioni di cui le funzioni appena scritte sono soluzioni fondamentali, in teoria delle distribuzioni.

Iniziamo considerando il caso di Δ . $\Phi(x, y) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, dunque è possibile associarle la distribuzione $T_\Phi(v)$:

$$T_\Phi(v) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)v(x)dx$$

Ora, su T_Φ si vuole studiare l'azione di Δ :

$$\begin{aligned} \Delta T_\Phi(v) &= T_\Phi(v) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\Delta v(x)dx = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \epsilon)} \Phi(x)\Delta v(x)dx = -v(0) = \delta_0(v) \end{aligned}$$

Si conclude quindi che, in teoria delle distribuzioni, l'azione dell'operatore laplaciano su una sua soluzione fondamentale corrisponde a una distribuzione singolare: la delta di Dirac. Ovvero:

$$-\Delta\Phi(x) = \delta_0(v(x))$$

Chiaramente varrà la stessa proprietà anche nel caso in cui si consideri $\Phi(x - x_0)$:

$$-\Delta\Phi(x - x_0) = \delta_{x_0}(v(x))$$

Si consideri ora il caso dell'equazione del calore:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = \phi(x) \end{cases}$$

Con $u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \phi(y)dy$. Definiamo $E(x, t)$ come:

$$E(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Essa è detta **soluzione fondamentale dell'equazione del calore** perché si ha la possibilità di scrivere:

$$\mathcal{H}E = (\partial_t - \Delta)E = 0, t > 0, \forall x$$

Ci si chiede quale sia il significato di $\mathcal{H}E$ in teoria delle distribuzioni. In analogia con il caso dell'equazione di Laplace è lecito aspettarsi che $\mathcal{H}E = \delta_{(0,0)}$.

$E(x, t)$ è localmente integrabile, dunque:

$$\mathcal{H}E(\phi) = -E(\partial_t \phi + \Delta \phi) = - \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} E(x, t) \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta \phi \right] dx dt$$

Dunque:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} -E(x, t) \left[-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta \phi \right] dx dt =$$

Integrando per parti:

$$\begin{aligned} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left[-\frac{\partial E \phi}{\partial t} + \underbrace{\phi \left[\frac{\partial E}{\partial t} - \Delta E \right]}_{=0} \right] dx dt = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} [-E(x, t)\phi(x)]_{\epsilon}^{+\infty} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} E(x, \epsilon)\phi(x, \epsilon) dx = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi\epsilon)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4\epsilon}} \phi(x, \epsilon) dx = \end{aligned}$$

Effettuando la sostituzione $\frac{x}{2\sqrt{\epsilon}} = y$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi\epsilon)^{\frac{n}{2}}} e^{-|y|^2} \phi(2\sqrt{2}y, \epsilon) (2\sqrt{2})^n dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-|y|^2}}{\pi^{\frac{n}{2}}} \phi(0, 0) dy = \delta_{(0,0)} \end{aligned}$$

Rimane quindi provato che:

$$\mathcal{H}E(x, t) = \delta_{(0,0)}(\phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$$

Si osserva inoltre che:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \phi(y) dy = \phi(x) = \delta_x(\phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Si ha che la soluzione fondamentale soddisfa l'equazione del calore con dato iniziale $\delta_x(\phi)$.

15.7 Trasformata di Fourier di una distribuzione

Nel definire la **trasformata di Fourier per una distribuzione**, si potrebbe essere tentati dal seguire la definizione di derivata di una funzione e assumere che data una certa distribuzione $T(\phi)$ la sua trasformata di Fourier possa essere definita come:

$$\mathcal{F}T(\phi) = T(\mathcal{F}\phi)$$

In realtà questa definizione presenta un problema di fondo. Infatti se $\phi \in \mathcal{D}$, non si avrà che pure $\mathcal{F}\phi \in \mathcal{D}$, perché una funzione olomorfa non potrà essere C_0^∞ . La definizione di trasformata di Fourier di una distribuzione necessita dunque alcune

accortezze. Prendendo come classe di funzioni test delle funzioni di classe Schwarz, si ovvia a questo problema. Chiaramente una scelta di questo tipo vincola lo spazio delle distribuzioni, che non potrà più essere tutto \mathcal{D}' ma sarà uno spazio più piccolo, detto delle distribuzioni temperate. Quindi, a patto di prendere funzioni test di classe Schwarz e distribuzioni temperate è possibile definire la trasformata di Fourier in questo caso:

◇ **Definizione** Sia $T \in \mathcal{S}'$ una distribuzione temperata e sia $\phi \in \mathcal{S}$ una funzione di test. Allora la trasformata di Fourier di T si definisce come segue:

$$\mathcal{F}T(\phi) = T(\mathcal{F}\phi)$$

Ad esempio, per la delta di Dirac, sia $T = \delta_0$. Applicando la definizione appena data si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\delta_0(\phi) &= \delta_0(\mathcal{F}\phi) = \delta_0\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx}\phi(x)dx\right) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = T_{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}}(\phi) \end{aligned}$$

Quindi, la trasformata di Fourier di una delta di Dirac è una costante:

$$\mathcal{F}\delta_0 = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

15.8 Convoluzioni

In questo modulo definiremo il concetto di convoluzione e ne daremo una caratterizzazione nel contesto della teoria delle distribuzioni.

◇ **Definizione** Date $f, g \in C^0(\mathbb{R}^n)$ si definisce **convoluzione** la quantità:

$$f \star g = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

Così come per la trasformata di Fourier, anche l'estensione di questo concetto in teoria delle distribuzioni risulta leggermente problematico. Infatti, definendo per estensione la distribuzione associata alla convoluzione $f \star g$ si avrebbe:

$$\begin{aligned} (f \star g)\phi &= \int_{\mathbb{R}^n} (f \star g)(x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy\right)\phi(x)dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)\phi(x+y)dx dy \end{aligned}$$

Tuttavia non si ha la possibilità di concludere che se $\phi(x)$ è a supporto compatto, anche $\phi(x+y)$ lo sia e quindi non si può concludere che quella scritta sopra sia una distribuzione. Essa lo è a patto che almeno una tra f e g sia a supporto compatto.

◇ **Definizione** Siano S, T due distribuzioni, di cui almeno una a supporto compatto. Si definisce convoluzione di S e T la quantità:

$$S_y \star T_x(\phi) = S_y(T_x(\phi(x+y)))$$

Nel caso in cui T sia a supporto compatto.

Nella definizione, a pedice delle due distribuzioni, è indicata la variabile da cui esse dipendono.

Per esempio, sia S_y una generica distribuzione e $T_x = \delta_0$. In questo caso si ha:

$$S_y \star \delta_0(\phi) = S_y \delta_0(\phi(x+y)) = S_y \phi(y)$$

Ovvero: $S \star \delta = S$, $\forall \phi \in C_0^\infty$. Si può provare che pure $\delta \star S = S$, così da poter concludere che la delta di Dirac è l'unità rispetto alla convoluzione di distribuzioni.

Le convoluzioni sono assai utili nella risoluzione di particolari equazioni differenziali alle derivate parziali. Innanzitutto si consideri la seguente definizione:

◇ **Definizione** Dato un qualsiasi operatore differenziale $P(\partial)$, una funzione Φ si definisce soluzione fondamentale per $P(\partial)$ se si ha

$$P(\partial)\Phi = \delta_0$$

Vediamo l'utilità di quanto appreso in questo modulo. Data

$$P(\partial)[\Phi \star f] = \underbrace{(P(\partial_x)\Phi_x)}_{\delta_0} \star f = f$$

dove il secondo passaggio è giustificato dal fatto che l'operatore $P(\partial)$ vedrà solo una tra Φ e f , a seconda di quale sia la variabile su cui esso agisce. In sostanza si ha che

$$P(\partial)[\Phi \star f] = f$$

Dunque, se Φ , soluzione fondamentale di $P(\partial)$, è nota, si potrà concludere che pure $u = \Phi \star f$ è soluzione di $P(\partial)u = f$.

Crediti

Fonti dei testi

- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Scopo_del_corso&oldid=458416
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/L%27equazione_dei_fluidi_perfetti&oldid=458418
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Modello_di_D%27Alembert&oldid=458419
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Considerazioni_sull%27energia_cinetica&oldid=458778
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Modello_di_Lagrange&oldid=458449
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/L%27equazione_di_Fourier&oldid=458450
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/L%27equazione_del_calore&oldid=458451
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Considerazioni_sull%27inversione_temporale&oldid=458453
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Il_moto_browniano&oldid=458724
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Il_teorema_di_D%27Alembert&oldid=458470
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/L%27equazione_delle_onde_sulla_retta&oldid=458471
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Il_problema_della_corda_vibrante_con_condizioni_al_bordo_di_Dirichlet&oldid=458472
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/L%27energia_per_la_corda_vibrante&oldid=458473
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/L%27equazione_del_calore_con_condizioni_al_bordo_di_Neumann&oldid=458474
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/L%27equazione_del_calore_con_condizioni_al_bordo_periodiche&oldid=458475
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/L%27operatore_derivata_seconda&oldid=458476

- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Sviluppi_di_Fourier_e_identit%C3%A0_di_Parseval&oldid=458678
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Propriet%C3%A0_dell%27operatore_di_Sturm-Liouville&oldid=458730
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Le_soluzioni_del_problema_di_Sturm-Liouville&oldid=458728
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Richiami_sulla_teoria_operatoriale&oldid=458774
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Operatore_di_Hilbert-Schmidt&oldid=458487
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Conclusioni&oldid=458489
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Alcuni_casi_particolari&oldid=458490
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Formule_di_Green&oldid=458492
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Le_soluzioni_dell%27equazione_di_Laplace:_funzioni_armoniche&oldid=458493
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Propriet%C3%A0_generali_delle_funzioni_armoniche&oldid=458497
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Propriet%C3%A0_della_media&oldid=458496
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Principio_del_massimo&oldid=458498
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Regolarit%C3%A0_delle_funzioni_armoniche&oldid=458500
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Teorema_di_Liouville&oldid=458501
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Le_soluzioni_dell%27equazione_di_Poisson&oldid=458729
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Soluzioni_limitate_dell%27equazione_di_Poisson&oldid=458585
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/La_formula_di_rappresentazione&oldid=458727
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Il_metodo_delle_cariche_immagine_nel_semipiano&oldid=458723
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Il_metodo_delle_cariche_immagine_in_pi%C3%B9_dimensioni&oldid=458668
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Cariche_immagine_per_la_sfera:_la_riflessione_di_Kelvin&oldid=458669
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Il_principio_di_Dirichlet&oldid=458775
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Propriet%C3%A0_generali&oldid=458672
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Il_quoziente_di_Rayleigh&oldid=458673

- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/L%27equazione_delle_onde_sul_disco&oldid=458674
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Dipendenza_dai_dati_iniziali&oldid=458676
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/La_trasformata_di_Fourier&oldid=458703
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Definizione_della_trasformata_di_Fourier&oldid=458777
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Propriet%C3%A0_della_trasformata_di_Fourier&oldid=458707
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/L%27equazione_del_calore_con_Fourier&oldid=458708
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/L%27equazione_delle_onde&oldid=458726
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Considerazioni_sull%27energia_delle_onde&oldid=458721
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Introduzione&oldid=458713
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Caratterizzazione_delle_distribuzioni&oldid=458714
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/La_delta_di_Dirac&oldid=458715
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Il_valor_principale&oldid=458716
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Operazioni_con_le_distribuzioni&oldid=458717
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Soluzioni_fondamentali_e_distribuzioni&oldid=458718
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Trasformata_di_Fourier_di_una_distribuzione&oldid=458719
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Equazioni_differenziali_alle_derivate_parziali/Convoluzioni&oldid=458722