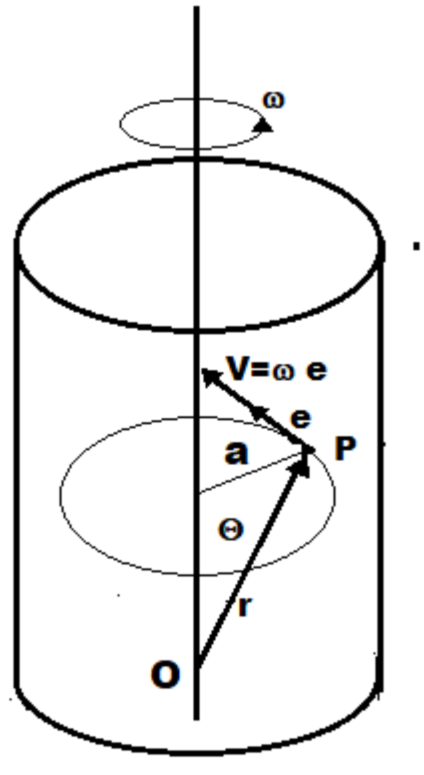
Alfonso Sommacal

ALGEBRA VETTORIALE



Alfonso Sommacal

Algebra vettoriale

it.wikibooks.org
2022

Questo testo proviene dal sito
https://it.wikibooks.org/wiki/Algebra_vettoriale
ed è stato scritto collettivamente dagli utenti di tale sito

Principale autore:
Alfonso Sommacal

Questa versione del libro è aggiornata al
17 marzo 2022

In copertina:
Velocity of a point of a rotating body. *Autore:* Alfonso Sommacal; *licenze:* CC BY-SA 4.0; *fonte:*
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Velocity_of_a_point_of_a_rotating_body.png

Indice

L'algebra applicata ai vettori è nota come algebra vettoriale, mentre il calcolo applicato ai vettori è noto come calcolo vettoriale o analisi vettoriale. Scopo di questo libro è sviluppare le peculiarità importanti dell'analisi vettoriale e dell'analisi tensoriale cartesiana, e illustrare, con specifici esempi, il loro impiego nella formulazione di problemi fisici e nella derivazione di alcuni risultati generici afferenti a questi problemi.

1

Introduzione

Nell'analisi di molti fenomeni fisici, ci si interessa di quantità che possono essere classificate in base alle informazioni necessarie per specificarle completamente. Quantità quali massa, densità, e temperatura richiedono solamente la specificazione della loro grandezza; ovvero, tutto ciò che serve per specificarli è solamente un numero. Tali quantità sono denominate quantità scalari o semplicemente scalari. Le quantità come una forza o una velocità necessitano della specificazione di una grandezza e di una direzione. Le quantità di questo tipo sono denominate quantità vettoriali. Le quantità vettoriali che obbediscono a certe regole sono definite come vettori. Come si vedrà in seguito, non tutte le quantità vettoriali sono dei vettori. In problemi di fisica si possono verificare delle quantità che richiedono più informazioni di quelle necessarie per i vettori. Per esempio, per descrivere una quantità quale lo stress è necessario fornire una forza ed una superficie sulla quale la forza agisce. Tali quantità sono note come tensori.

Operazioni di algebra e calcolo quali quelle che sono note per le quantità scalari, sono pure state sviluppate per i vettori e i tensori. L'algebra applicata i vettori e nota come algebra vettoriale, mentre il calcolo applicato ai vettori è noto come calcolo vettoriale o analisi vettoriale. Similmente abbiamo algebra tensoriale e calcolo tensoriale.

Nell'analizzare un fenomeno fisico, si deve costituire una interrelazione tra le varie quantità che caratterizzano il fenomeno utilizzando le leggi della fisica (le leggi di Newton, le leggi della conservazione dell'energia, etc.). Per scrivere una legge fisica si introduce un sistema di coordinate in un sistema di riferimento scelto e si esprime le varie quantità fisiche coinvolte tramite misurazioni eseguite rispetto a quel sistema. Quando venga scelta una tale procedura, l'espressione della legge contiene termini che dipendono dal sistema di coordinate scelto e conseguentemente ha una forma diversa nei diversi sistemi. Ma le leggi della natura non dipendono dalla scelta artificiale del sistema di coordinate. Pertanto, potrebbe risultare necessario di cercare di esprimer le leggi naturali in una forma che non abbia attinenza con un sistema particolare di coordinate. Un modo di fare ciò è fornito dalle forme vettoriali e tensoriali. La notazione vettoriale esibisce le quantità quali gli spostamenti, le velocità, le forze, le accelerazioni, i momenti, le velocità angolari, etc. nel loro aspetto naturale: cioè, quantità che possiedono direzione, oltre alla grandezza. Similmente, la notazione tensoriale ci consente di trattare quantità che richiedono per la loro specificazione più informazioni dei vettori. Quando sia usata la notazione vettoriale non risulta necessario introdurre un sistema di coordinate. La notazione della analisi generica tensoriale ha a che fare con tutti i possibili sistemi di coordinate. Quindi, l'uso della notazione tensoriale generica e di quella vettoriale nella formulazione delle leggi fisiche le lascia in forma invariante. Lo studio di un fenomeno fisico tramite un sistema di equazioni in forma invariante, sovente conduce ad una sua più profonda comprensione. In più, l'uso della notazione vettoriale o tensoriale porta a una semplificazione notevole nell'analisi dei problemi.

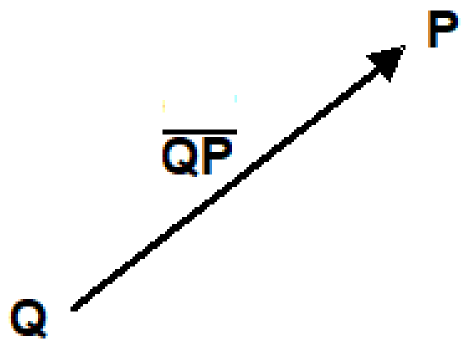
Il nostro obiettivo è duplice: (1) sviluppare le peculiarità importanti della analisi vettoriale e della analisi tensoriale cartesiana, e (2) illustrare, con specifici esempi, il loro impiego nella formulazione di problemi fisici e nella derivazione di alcuni risultati generici afferenti a questi problemi. Con ciò in mente dobbiamo anzitutto intraprendere una spiegazione dell'analisi vettoriale. Poi ci dedicheremo ai tensori cartesiani e illustreremo il loro uso nelle loro applicazioni.

Fonte del testo: https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Algebra_vettoriale/Introduzione&oldid=406169

2

Caratteristiche dei vettori

2.1 Rappresentazione dei vettori



Se Q e P sono due qualsiasi punti dello spazio, il segmento di linea orientato da Q a P localizza la posizione del punto P rispetto al punto Q. Tale segmento di linea orientato si denomina **vettore posizione**. È l'esempio più semplice di una quantità vettoriale. Graficamente rappresentiamo il vettore posizione da Q a P con una freccia che corre da Q a P come mostrato in figura. La lunghezza della freccia fornisce la grandezza della distanza da Q a P mentre il senso della freccia indica la direzione da Q a P. Seguendo l'esempio del vettore posizione rappresentiamo qualsiasi quantità vettoriale (per esempio, velocità, forza...) con una freccia di lunghezza proporzionale alla grandezza della quantità e puntante nella stessa direzione del vettore.

Una opportuna convenzione viene adottata per denotare una quantità vettoriale- Nei lavori tipografici viene usualmente indicata da una lettera in grassetto. Per esempio, la lettera **r** può essere usata per il vettore posizione, la lettera **V** per il vettore velocità e così via di seguito. Per iscritto, è consuetudine porre una freccia o una barra al di sopra della lettera che denota una quantità vettoriale. Pertanto, per un vettore posizione si scrive $\vec{r}$ per un vettore velocità $\vec{V}$ e così di seguito. Se si desidera evidenziare che un segmento di retta orientato da un punto **Q** ad un punto **P** rappresenta una certa quantità vettoriale, talvolta si usa la notazione $Q\vec{P}$ per denotarne il vettore.

La grandezza di un vettore **A** è denotata da |**A**| o semplicemente dalla lettera **A**.

Due vettori **A** e **B** sono uguali se la grandezza di **A** è uguale alla grandezza di **B** e se la direzione di **A** è la stessa della direzione di **B**. Pertanto, un vettore non cambia se viene spostato parallelamente a se stesso. Ciò significa che genericamente la posizione di un vettore nello spazio può venire scelta arbitrariamente. Tuttavia, in certe applicazioni (come nel calcolo del momento di una forza), il punto effettivo di ubicazione può essere importante. Un vettore, quando applicato in un particolare punto. È noto come vettore vincolato. Altrimenti è noto come vettore libero.

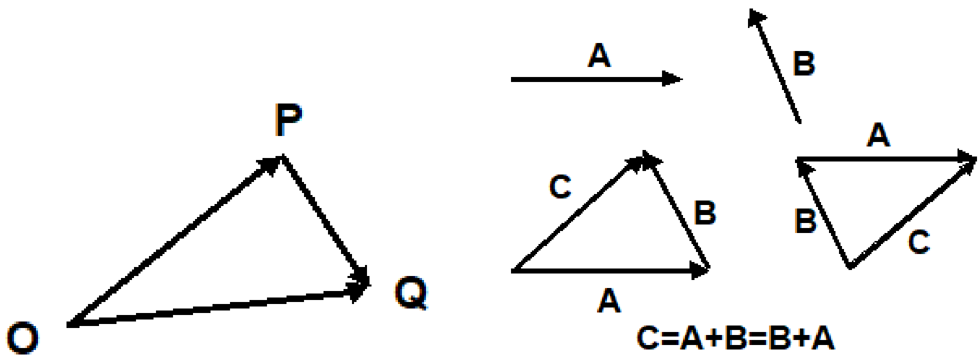
Quando due o più vettori sono paralleli alla medesima linea, si dice che sono collineari. Quando siano paralleli ad uno stesso piano si dice che sono complanari.

2.2 Addizione e sottrazione

Siano P e Q due punti nello spazio e siano $\vec{OP}$ e $\vec{OQ}$ i rispettivi vettori posizione da un punto di riferimento O. $\vec{PQ}$ designa il vettore da P a Q. Da O il punto Q può essere raggiunto lungo il vettore $\vec{OQ}$ o, alternativamente, lungo il vettore $\vec{OP}$ a P e poi lungo il vettore $\vec{PQ}$ a Q. $\vec{OQ}$ viene definito come la somma dei vettori $\vec{OP}$ e $\vec{PQ}$. Conseguentemente scriviamo

$$\vec{OQ}$$

$$= \vec{OP} + \vec{PQ}$$



Il concetto di addizione è applicabile alle quantità vettoriali oltre che al vettore posizione. Se $A\vec{e}B$ sono due qualsiasi vettori, è possibile rappresentarli con delle frecce tracciate talché il punto iniziale di B coincida con il punto terminale di A. Allora, il vettore somma $\vec{A}$ è dato dal vettore $\vec{C}$ che si estende dal punto iniziale di $\vec{A}$ al punto terminale $\vec{B}$. Nello stesso modo $\vec{A}$ può venire aggiunto a $\vec{B}$ e la somma $\vec{A}$+ $\vec{B}$ viene ottenuta come indicato nella figura.

Assiemando le figure, che sono triangoli uguali, otteniamo un parallelogramma come viene mostrato nello spazio accanto. I vettori tracciati da una origine comune formano i lati del parallelogrammo. La diagonale $\vec{C}$ tracciata dall'origine comune rappresenta la somma $\vec{A} + \vec{B}$ oppure la somma $\vec{B} + \vec{A}$.

Pertanto, si dice che i vettori sono stati sommati in accordo con la legge del parallelogrammo. Una applicazione continua della legge del parallelogrammo determina la somma di qualunque numero di vettori.

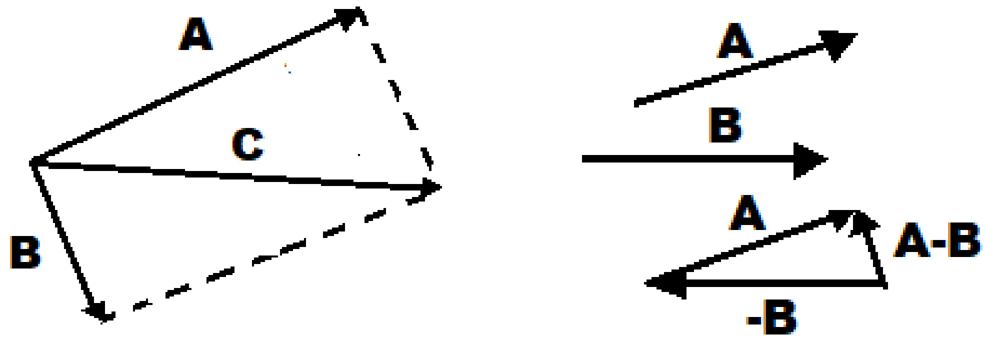
Poiché $A \vec{+} B$=$B \vec{+} A$, i vettori possono essere sommati in qualsiasi ordine possibile. Quindi, l'addizione vettoriale è commutativa.

$\vec{C}$ tracciata dall'origine comune rappresenta la somma $\vec{A} + \vec{B}$ oppure la somma $\vec{B} + \vec{A}$.

La sottrazione di vettori viene effettuata sulla stessa falsariga della loro somma. Per formare il vettore differenza $\vec{A}$- $\vec{B}$ si scrive

$$\vec{A}$$

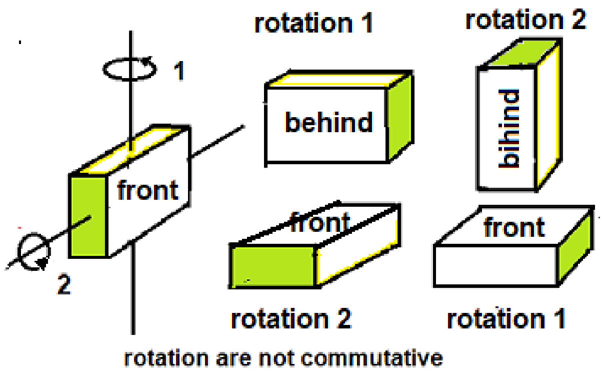
$$-\vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$



e l'operazione di addizione si riduce ad una operazione di addizione. Il vettore negativo($-\vec{B}$) è della medesima ampiezza di $\vec{B}$ ma è rivolto nella direzione opposta di $\vec{B}$

2.3 Definizione di un vettore

Ora definiamo un vettore come una quantità che possiede sia una grandezza sia una direzione e sottostà alla legge del parallelogrammo dell'addizione. Che obbedisca alla legge del parallelogrammo è importante poiché ci sono delle quantità che hanno sia l'ampiezza che la direzione ma non si aggiungono secondo la legge del parallelogramma. Una rotazione portata a termine di un corpo rigido sebbene possegga grandezza e direzione non è un vettore poiché non ubbidisce alla legge del parallelogrammo. D'altra parte, una rotazione infinitesimale di un corpo rigido è un vettore.



Non tutte le grandezze dotate di modulo, direzione e verso sono necessariamente dei vettori. Ad esempio, la rotazione di un corpo rigido attorno ad un particolare asse fisso nello spazio possiede un modulo (l'angolo di rotazione una direzione e un verso (quelli dell'asse); due rotazioni di questo tipo però non si sommano secondo la regola di addizione dei vettori a meno che non si tratti di rotazioni infinitamente piccole. Questo si può controllare facilmente quando i due assi sono perpendicolari fra di loro le rotazioni siano $\frac{\pi}{2}$ radianti (90 gradi). Consideriamo un oggetto, per es. una scatola, che sia disposta come nella figura accanto; facciamoli subire due rotazioni, che chiameremo (1) e (2), la rotazione (1) lo porta nella posizione... e la successiva rotazione (2) in quella della figura... Ma se dopo averla riportata nella posizione iniziale, gli applichiamo prima la rotazione (2) e poi la (1) la sua posizione finale sarà quella della figura ...cioè diversa da quella raggiunta prima. Chiaramente la proprietà commutativa della somma vettoriale non è soddisfatta da queste rotazioni e quindi, anche se posseggono modulo, direzione e verso, le rotazioni finite non possono essere rappresentate da vettori.

2.4 Moltiplicazione per un numero

Se un vettore è moltiplicato per un numero m, si ottiene un altro vettore, la cui grandezza è m volte maggiore di $\vec{A}$ e la cui direzione è uguale a quella di $\vec{A}$.

2.5 Vettore unitario

Un vettore di lunghezza unitaria (cioè, di grandezza unitaria) è denominato vettore unitario. Considerando un vettore qualsiasi $\vec{A}$, formate il vettore

$$\frac{1}{A}\vec{A}$$

Il risultato è semplicemente un vettore unitario orientato nella direzione di $\vec{A}$. Denotando il vettore unitario con e_A scriviamo

$$\vec{e}_A = \frac{\vec{A}}{A}$$

oppure

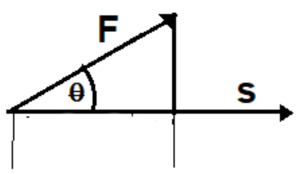
$$\vec{A} = A\vec{e}_A$$

Ovvero, qualsiasi vettore può venire rappresentato come il prodotto della sua grandezza per un vettore unitario. Un vettore unitario è impiegato per indicare una direzione.

2.6 Vettore nullo

Un vettore di grandezza ZERO è denominato vettore nullo. Non possiede alcuna direzione definita.

2.7 Prodotto scalare di due vettori



Oltre all'addizione, alla sottrazione e alla moltiplicazione per un numero, due ulteriori operazioni algebriche possono essere definite per le quantità vettoriali, note come **prodotto scalare** e **prodotto vettoriale**. Per introdurre il prodotto scalare, richiamerò il concetto di lavoro. Se una forza $\vec{F}$ agisce su un punto di massa, e se in conseguenza di questa azione la massa esperimenta uno spostamento elementare $\vec{s}$, il lavoro fatto dalla forza è uguale alla proiezione ortogonale della forza lungo la direzione dello spostamento moltiplicata per la grandezza dello spostamento. Se θ èl'anolo fra $\vec{F}$ e $\vec{S}$, esprimiamo il lavoro fatto come

$$L = |\vec{F}|cos\Theta|\vec{S}| =$$
$$FScos\theta$$

dove F e S denotano, rispettivamente, la grandezza di $\vec{F}$ e $\vec{s}$. Il lavoro compiuto, L, è una quantità scalare ottenuta tramite una operazione di moltiplicazione tra due vettori $\vec{F}$ e $\vec{S}$. Una tale operazione può essere denominata ed essere definita per qualsiasi due vettori. Dato che il risultato è uno scalare, esso è denominato prodotto scalaredei due vettori. Esso è definito come la quantità scalare uguale al prodotto delle grandezze dei vettori per il coseno drll' angolo tra i due vettori. Siano $\vec{A}$ e $\vec{B}$ due vettori. Il loro prodotto scalare è indicato con $\vec{A} \cdot \vec{B}$ e si legge A punto B. Cosicché, scriviamo

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv |\vec{A}||\vec{B}|cos\Theta \equiv ABcos\Theta$$

dove Θ è l'angolo tra i vettori.

Utilizzando la notazione del prodotto scalare il lavoro effettuato da una forza $\vec{F}$ durante uno spostamento infinitesimale $\vec{s}$ può essere rappresentato da

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Dalla definizione data del prodotto scalare derivano alcuni risultati

Poiché $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ il prodotto scalare è commutativo.

Se i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ sono mutuamente ortogonali, il loro prodotto scalare è zero poiché $\Theta = \frac{\pi}{2}$ e il $\cos\Theta = 0$. Al conttario, se il prodotto scalare $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ ne consegue che o i vettori siano mutuamente ortogonali o che uno di loro sia uguale a 0.

Se due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ sono paralleli l'un l'altro, il loro prodotto scalare semplicemente diventa uguale al prodotto delle loro grandezze.

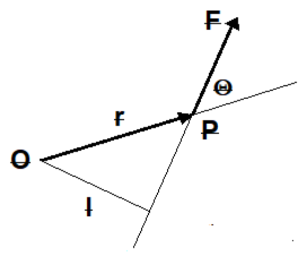
Il prodotto scalare di un vettore per se stesso è uguale al quadrato della sua grandezza. Pertanto abbiamo

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AA = A^2$$

$\vec{A} \cdot \vec{A}$ talvolta viene rappresentato con $\vec{A}^2$.

La proiezione su una direzione qualsiasi $\vec{e}$ di un vettore $\vec{A}$ fornita dal prodotto $\vec{A} \cdot \vec{e}$.

2.8 Prodotto vettoriale di due vettori

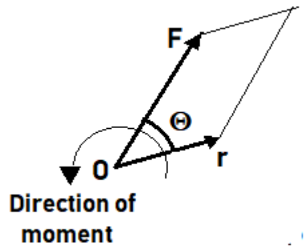


Per introdurre questo prodotto consideriamo il concetto di momento di una forze. Congetturiamo di volere descrivere il momento attorno ad un punto **O** di una forza $\vec{F}$ che agisce su un punto **P**. Per descrivere compiutamente il momento devono essere dati la grandezza e la direzione: ovvero dobbiamo specificare una grandezza vettoriale. Specifichiamo il momento con **M**. Per definizione la grandezza del momento è uguale al prodotto della grandezza della forza e della minima distanza dal punto di riferimento alla linea di azione della forza (il cosiddetto braccio di leva). Indicando queste grandezze rispettivamente con **M**, **F** e **l** si ha

$$M = Fl$$

If $\vec{r}$ indica il vettore $\vec{OP}$ e Θ l'angolo fra $\vec{r}$ e $\vec{F}$ misurato in maniera che $0 \leq \Theta \leq \pi$, la misura del momento diventa

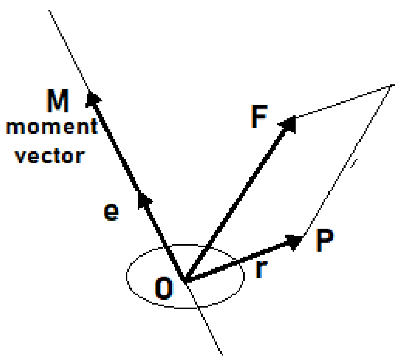
$$M = Fr \sin \Theta$$



La direzione del momento è quella di una rotazione attorno al punto **O** nel piano formato dai vettori $\vec{r}$ e $\vec{F}$. Tracciando i vettori $\vec{r}$ e $\vec{F}$ dalla comune origine **O**, si osserva che la direzione della rotazione causata dal momento tende ad addossare il vettore $\vec{r}$ al vettore $\vec{F}$.Per esprimere simbolicamente queste idee, approntiamo per prima sul punto **O** un asse di rotazione che sia perpendicolare al piano $\vec{r}$ e $\vec{F}$ e che punti nella direzione di avanzamento di una vite destrorsa ruotata nella direzione di rotazione dovuta al momento (cioè, da $\vec{r}$ a $\vec{F}$). Lungo questo asse di rotazione, si disegni allora un vettore unitario $\vec{e_m}$ e si concordi che esso rappresenti la direzione del vettore momento $\vec{M}$. Pertanto, si scriva

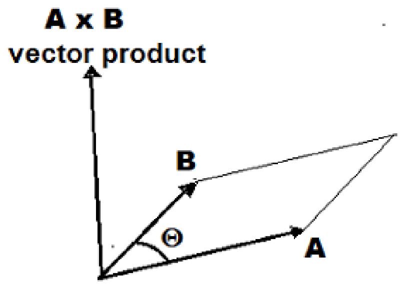
$$\vec{M}$$
$$= Fr \sin \Theta \vec{e_m}$$

e lo si rappresenti come nella figura.



Il vettore momento, conformemente alla equazione xxx, può essere considerato come risultato di un certo tipo di prodotto tra due altri vettori. Pertanto l'equazione xxx può essere la base per definire un prodotto tra due vettori. Poiché il risultato di un tale prodotto è un vettore, può essere chiamato il prodotto vettoriale ed essere definito come segue.

Il prodotto vettoriale di due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ è un vettore $\vec{C}$, la cui grandezza è uguale al prodotto delle grandezze di $\vec{A}$ e $\vec{B}$ per il seno dell'angolo misurato da $\vec{A}$ a $\vec{B}$ tale che $0 \leq \Theta \leq \pi$, e la cui direzione e specificata dalla condizione che $\vec{C}$ sia perpendicolare al piano dei vettori $\vec{r}$ a $\vec{F}$) e che punti nella direzione di avanzamento di una vite destrorsa per portare $\vec{A}$ verso $\vec{B}$.



Il prodotto vettoriale viene normalmente denotato scrivendo i vettori con interposta una croce come

$$\vec{A}$$
$$X\vec{B}$$

e si legge $\vec{A}$ vettore $\vec{B}$.

Usando la notazione del prodotto vettoriale, l'equazione xxx può ora venire abbreviata nella forma

$$\vec{M} = \vec{r}$$
$$X\vec{F}$$

Specifichiamo ora alcuni semplici risultati che conseguono rapidamente dalla definizione del prodotto vettoriale

Il prodotto $\vec{A}$ X $\vec{B}$ e $\vec{B}$ X $\vec{A}$ non sono uguali.

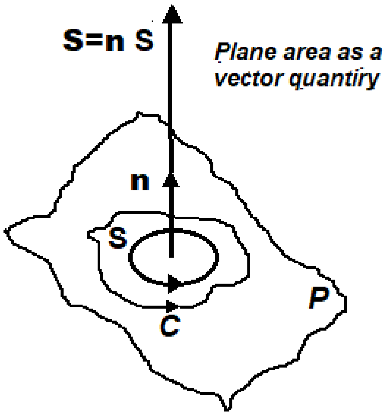
Se due vettori sono paralleli tra loro, il loro prodotto vettoriale è zero. Per contro, se $\vec{A}$ X $\vec{B} = 0$, o due vettori A e B sono paralleli o almeno uno di loro è zero. Ne consegue che il prodotto vettoriale di un vettore per se stesso è zero.

2.9 Vettore area

La grandezza del vettore $\vec{A} \times \vec{B}$ è uguale alla area del parallelogramma formata dai vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

Effettivamente, il vettore $\vec{A} \times \vec{B}$ può essere considerato come rappresentante, sia in grandezza che in direzione, dell'area del parallelogramma i cui lati sono $\vec{A}$ e $\vec{B}$, qualora una area piana possa venire rappresentata come un vettore.

Ora, qualsiasi superficie piana può essere considerata come se possedesse direzione nonché grandezza: il carattere direzionale derivante dalla necessità di specificare l'orientazione nello spazio dell'area piana. È consuetudine di denotare la direzione di una superficie piana tramite un vettore tracciato nella direzione della normale a detto piano. Per stabilire la direzione della normale, per primo determiniamo un dato senso di circolazione lungo il perimetro che costituisce il bordo dell'area piana



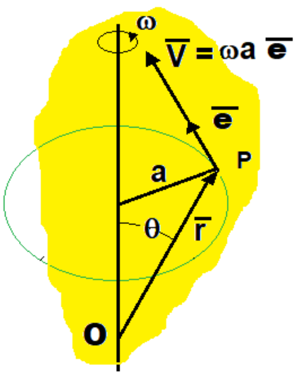
in questione Dunque, se **C** è una curva che racchiude un'area **S** nel pian **P** e la direzione lungo **C** viene assegnata come mostrato nella figura, la direzione dell'area è data dal versore $\vec{n}$ normale al piano e orientato come mostrato nella medesima figura. La stessa area può ora venire rappresentata da un vettore $\vec{S}$ la cui grandezza è S e la cui direzione è $\vec{n}$. Conseguentemente possiamo scrivere simbolicamente

$$\vec{S} = S\vec{n}$$

Stando a queste idee, il prodotto vettoriale $\vec{A} \times \vec{b}$ rappresenta sia in grandezza sia in direzione l'area del parallelogramma i cui lati sono **A** e **B**.

2.10 Velocità di un punto di un corpo rigido ruotante

Il prodotto vettoriale di due vettori trova molte applicazioni generiche e fisiche. La descrizione del momento di una forza attorno ad un punto è un esempio importante. La descrizione della velocità di un punto di un corpo rigido ruotante in una data direzione è un altro esempio importante che verrà cui considerato. Supponiamo che un corpo rigido stia ruotando in una data direzione con una velocità angolare ω attorno ad un dato asse. Intendiamo descrivere la velocità di un punto **P** del corpo.



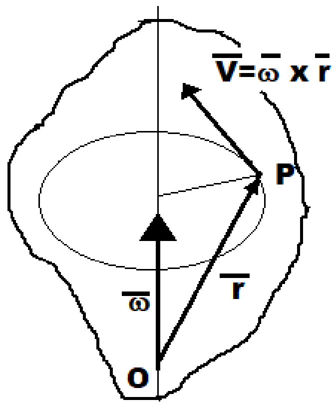
Si ponga che il vettore $\vec{V}$ denoti la velocità del punto. Ogni punto del corpo descrive un cerchio che giace in un piano perpendicolare all'asse e con il suo centro sul medesimo. Il raggio del cerchio è la distanza perpendicolare dal punto d'interesse all'asse. La grandezza della velocità è uguale semplicemente al prodotto della velocità angolare ω e del raggio, diciamo **a**, del cerchio. La velocità $\vec{V}$, diretta come indicato nella figura, è perpendicolare al raggio ed all'asse di rotazione. Denotando la direzione di $\vec{V}$ mediante il versore $\vec{e}$ si ottiene

$$\vec{V} = \omega a\vec{e}$$

Poniamo che**O** sia uno dei punti sull'asse di rotazione e che $\vec{r}$ denoti il vettore posizione $\vec{OP}$. Se θ è l'angolo tra $\vec{r}$ e l'asso il raggio **a** è uguale a $rsen\theta$, **r** essendo la lunghezza di $\vec{r}$. Poi dalla $\vec{V} = \omega a\vec{e}$ si ottiene

$$\vec{V} = \omega r\vec{e}\sin\theta$$

La velocità angolare, come il momento di una forza, è una grandezza vettoriale che possiede una direzione ed una grandezza e, e come si può verificare, obbedisce alla legge del parallelogramma dell'addizione. La velocità angolare è quindi una grandezza vettoriale che si indica indicata con ω. La direzione di ω, come nel caso del momento, è un senso di rotazione attorno ad un certo asse. Per simboleggiare la velocità angolare tramite un vettore si adotta la convenzione della vite destrorsa. Stando a questa convenzione, la direzione della velocità angolare è data da un versore tracciato lungo l'asse di rotazione e che è rivolto nel senso di avanzamento di una vite destrorsa ruotata nel senso di rotazione attorno all'asse. Indicando questo versore con $\vec{e_\omega}$ scriviamo



$$\vec{\omega} = \omega \vec{e_\omega}$$

Se $\vec{e_r}$ è un vrsosre nella direzione di $\mathbf{r}$, si può osservare che

$$\vec{e_\omega} \times \vec{e_r} = \vec{e} \sin \theta$$

Con questa relazione, l'equazione $\vec{V} = \omega r \vec{e} \sin \theta$ può venire scritta come

$$\begin{aligned}\vec{V} &= |\vec{\omega}||\vec{r}|\vec{e_\omega} \times \ \vec{e_r} = |\vec{\omega}|\vec{e_\omega} \times \ |\vec{r}|\vec{e_r} \\ &= \vec{\omega} \times \ \vec{r}\end{aligned}$$

Ciò specifica che la velocità di un punto di un corpo rigido che ruota attorno ad un asse è fornita dal prodotto vettoriale della velocità angolare e del vettore posizione tracciato da qualsiasi punto dell'asse di rotazione al punto in considerazione.

2.11 Vettori polare e assiale

Potrebbe essere stato osservato, durante le considerazioni precedenti, che c'è una certa differenza tra i vettori come la velocità angolare ed il momento di una forza ed i vettori come forza, velocità, spostamento ed etc. La differenza tra i due tipi di vettori sta nel modo in cui sono rappresentati dai segmenti di linea orientati (frecce) Nel caso di vettori come forza, velocità, etc., la direzione delle freccia è la direzione vera del vettore che rappresenta. I vettori che possono essere rappresentati in questo modo sono denominati vettori polari. Nel caso di grandezza come velocità angolare e momento la direzione della freccia non è la direzione reale della grandezza che rappresenta. In questo caso la direzione effettiva è quella di una rotazione attorno ad un asse e ciò che abbiamo fatto è di scegliere per rappresentare questa direzione mediante un segmento orientato lungo l'asse di rotazione. Per specificare la direzione di detto segmento si è adottato, naturalmente in modo arbitrario, la regola della mano destra (cioè. la convenzione della vite destrorsa). Rappresentati secondo questo modo sono denominati vettori assiali.

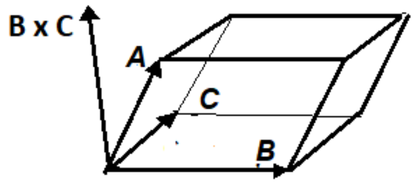
2.12 Prodotti multipli

Ci riportiamo al prodotto di vettori. I prodotti di tre vettori sono denominati prodotti tripli Se $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ sono tre vettori qualsiasi, i prodotti tripli della forma

$$\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C}) \qquad \vec{A}\cdot\vec{B}\times\ \vec{C} \qquad \vec{A}\times\ (\vec{B}\times\ \vec{C})$$

sono facilmente definibili. Il prodotto $\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C})$ è semplicemente una moltiplicazione del vettore $\vec{A}$ per un numero.

Prodotto triplo scalare



Il risultato del prodotto $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\ \vec{C}$ è uno scalare. Pertanto, un tale prodotto è denominato triplo prodotto scalare. Tracciando i vettori $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ da una origine comune, si può facilmente notare che il prodotto

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\ \vec{C}$$

è di fatto uguale al volume del parallelepipedo formato dai vettori$\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$. I semplici risultati che seguono sono importanti nelle applicazioni. In un prodotto scalare triplo il punto e la croce possono venire scambiati senza variare il valore del risultato. Simbolicamente si ha

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\ \vec{C}=\vec{A}\times\ \vec{B}\cdot\ \vec{C}$$

Una permutazione ciclica dell'ordine dei vettori in un prodotto triplo scalare lascia invariato il prodotto. Ciò è espresso con

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\ \vec{C}=\vec{B}\cdot\vec{C}\times\ \vec{A}=\vec{C}\cdot\vec{A}\times\ \vec{B}$$

Ne consegue ulteriormente che

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\ \vec{C}=-\vec{A}\cdot\vec{C}\times\ \vec{B}=-\vec{C}\cdot\vec{B}\times\ \vec{A}=-\vec{B}\cdot\vec{A}\times\ \vec{C}$$

Prodotto triplo vettoriale

Il risultato del prodotto $\vec{A}\times\ (\vec{B}\times\ \vec{C})$ è un vettore. Pertanto, un tale prodotto si denomina prodotto triplo vettoriale.

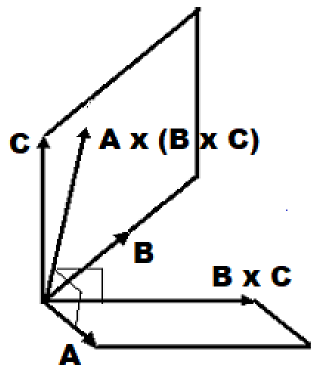
Il vettore $\vec{A}\times\ (\vec{B}\times\ \vec{C})$ è normale al piano formato da $\vec{A}$ e$(\vec{A}\times\ \vec{B})$. Tuttavia, il vettore $\vec{B}\times\ \vec{C}$ è anche normale al piano formato dai vettori $\vec{B}$ *e* $\vec{C}$. Ciò significa che il vettore $\vec{A}\times\ (\vec{B}\times\ \vec{C})$ giace nel piano formato da $\vec{B}$ *e* $(\vec{C}$ ed è normale ad $\vec{A}$. Il vettore $\vec{A}\times\ (\vec{B}\times\ \vec{C})$ può, in un tale caso, venire espresso come una combinazione lineare dei ettori $\vec{B}$ *e* $\vec{C}$. Pertanto possiamo scrivere

$$\vec{A}\times\ (\vec{B}\times\ \vec{C})=m\vec{B}+n\vec{C}$$

in cui **m** e **n** sono numeri. È dimostrabile che

$$m=\vec{A}\cdot\vec{C} \qquad\qquad n=-\vec{A}\cdot\vec{B}$$

Quindi abbiamo



$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

Dato che il prodotto vettoriale di due vettori cambia di segno quando l'ordine dei vettori viene cambiato, ne consegue che

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = -\vec{A} \times (\vec{C} \times \vec{B}) = (\vec{C} \times \vec{B}) \times \vec{A} = -(\vec{B} \times \vec{C}) \times \vec{A}$$

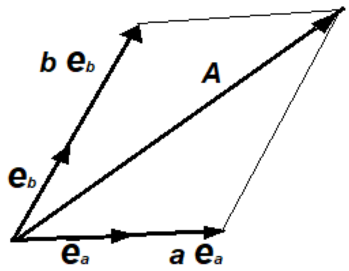
I prodotti che coinvolgono più di tre vettori possono essere facilmente valutati in termini di prodotti tripli.

Fonte del testo: `https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Algebra_vettoriale/Caratteristiche_dei_vettori&oldid=412604`

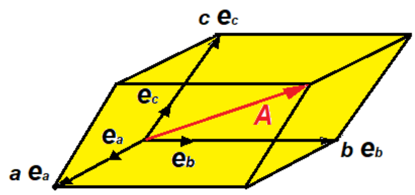
3

Componenti vettoriali

3.1 Componenti vettoriali



Sinora lo studio dell'algebra dei vettori ha proceduto sulla base di una descrizione geometrica del vettore come un segmento di linea orientato. Ora procediamo verso una descrizione analitica del vettore e delle operazioni su di esso. Una tale descrizione apporta una connessione tra vettori e i numeri ordinari, e mette in relazione le operazioni sui vettori a quelle sui numeri. La descrizione analitica di un vettore è fondata sulla nozione delle componenti di un vettore. Dalla idea di addizione, ne segue che ogni vettore può venire rappresentato come somma di un numero di vettori arbitrariamente scelti non complanari. Qualora ciò venga fatto, si esplicita che un certo vettore è risolto in un numero di vettori componenti.



Per esprimere analiticamente la forma composita di $\vec{A}$ si scrive

$$\vec{A} = a\vec{e_a}$$
$$+b\vec{e_b}$$

Si potrebbe, se ciò fosse desiderato, scomporre il vettore $\vec{A}$ in un numero di vettori non paralleli. Tuttavia, selezionando due qualsiasi di questi componenti vettoriali, possiamo esprimere ciascuno degli altri in termini dei due selezionati. Pertanto, il numero delle componenti indipendenti che sono necessarie e sufficienti per scomporre un vettore in un piano sono due. Allo stesso modo, qualsiasi vettore nello spazio può essere risolto in componenti vettoriali non complanari. Il numero di componenti indipendenti che sono necessari e sufficienti per scomporre un vettore nello spazio è tre. Pertanto, se nominiamo tre direzioni non complanari con tre vettori unitari $\vec{e_a}$.

$\vec{e_b}$ e $\vec{e_c}$, come esposto in figura, qualsiasi vettore $\vec{A}$ può venire rappresentato come composto dai vettori $a\vec{e}_a$. $b\vec{e_b}$ e $c\vec{e}_c$, in cui a, b e c sono dei numeri adeguati.

Pertanto, la forma composita di un vettore tridimensionale $\vec{A}$ viene espressa con

$$\vec{A} = a\vec{e}_a \; + \; b\vec{e_b} \; + \; c\vec{e}_c$$

I numeri a, b e c che possono essere negativi o positivi, sono denominati le componenti scalari di $\vec{A}$ oppure le misure delle componenti di $\vec{A}$. Usualmente ci si riferisce semplicemente ai numeri a, b e c come alle componenti di $\vec{A}$ essendo sottointeso che essi sono le componenti scalari di $\vec{A}$ nelle rispettive direzioni $\vec{e_a}$. $\vec{e_b}$ e $\vec{e_c}$.

Per mostrare l'utilità di esprimere i vettori in forma composita, impostiamo un sistema basico di tre vettori non complanari. Poi, tutte le grandezze vettoriali siano espresse nella forma composita rispetto a questo sistema basilare. Una volta che ciò sia fatto, tutte le operazioni implicanti le grandezze vettoriali si ridureranno a operazioni che coinvolgono le loro componenti scalari. Per esempio si consideri la uguaglianza di due vettori $\vec{A_1}$ e $\vec{A_2}$. Se $\vec{e_a}$, $\vec{e_b}$ e $\vec{e_c}$ denotano un sistema basilare di versori, e se a_1, b_1, c_1 sono le rispettive componenti scalari di $\vec{A}$, otteniamo per

$$\vec{A_1} = \vec{A_2}$$

la relazione delle componenti

$$a_1\vec{e_a} + b_1\vec{e_b} + c_1\vec{e_c} = a_2\vec{e_a} + b_2\vec{e_b} + c_2\vec{e_c}$$

Questa si riduce ulteriormente a tre equazioni scalari

$$a_1 = a_2 \qquad b_1 = b_2 \qquad c_1 = c_2$$

Come ulteriore esempio, considerate l'addizione di due vettori $\vec{A_1}$ e $\vec{A_2}$. Se la somma $\vec{A_1}+\vec{A_2}$ si indica con $\vec{A_3}$ e ele sue componenti con a_3, b_3, c_3, otteniamo per

$$\vec{A_3} = \vec{A_1} + \vec{A_2}$$

la forma

$$a_3\vec{e_a} + b_3\vec{e_b} + c_3\vec{e_c} = a_1\vec{e_a} + b_1\vec{e_b} + c_1\vec{e_c} + \; a_2\vec{e_a} + b_2\vec{e_b} + c_2\vec{e_c}$$

Questa può venire riscritta tramite tre equazioni scalari

$$a_3 = a_1 + a_2 \qquad b_3 = b_1 + b_2 \qquad c_3 = c_1 + c_2$$

Questi esempi tra l'altro mostrano come l'uso della notazione vettoriale porti ad una semplificazione delle espressioni. Una notazione vettoriale singola così come $\vec{A_1} = \vec{A_2}$ è equivalente a tre notazioni scalari$a_3 = a_1 + a_2, b_3 = b_1 + b_2, c_3 = c_1 + c_2$. Similmente, $\vec{A_3} = \vec{A_1} + \vec{A_2}$ è rappresentato da tre equazioni $a_3 = a_1 + a_2$, $b_3 = b_1 + b_2$, $c_3 = c_1 + c_2$.

3.2 Specificazione di un vettore

Nella sezione precedente si è visto che se due vettori sono uguali, le loro componenti, rispetto ad un sistema scelto di riferimento di tre vettori non complanari, sono equivalenti. Per converso, se le componenti corrispondenti di due vettori sono equivalenti, essi stessi sono equivalenti per grandezza e direzione. Ciò significa che un vettore è uniquamente determinato da un insieme di tre numeri reali che ne costituiscono le componenti. Per specificare un vettore, grandezze oltre alle sue componenti possono essere usate. Per illustrare ciò, consideriamo un vettore $\vec{A}$. Poniamo che a, b, c denotino le sue componenti rispetto ai vettori unitari $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ e $\vec{e_3}$ e che α, β e γ denotino gli angoli che il vettote A forma con $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ e $\vec{e_3}$. Allora ciascuno degli insiemi (a,b,c), (α, β, γ), (b, γ, α), (c, α, β), (a, b, γ), eccetera, determina completamente la direzione e la grandezza di $\vec{A}$.

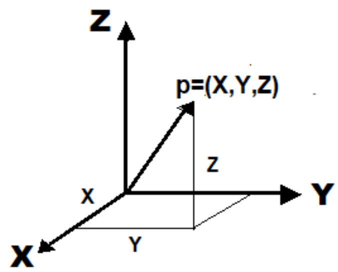
Possiamo pertanto descrivere analiticamente un vettore come un insieme di tre numeri che, in qualche maniera, è collegato ad un sistema di riferimento prescelto di vettori unitari $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ e $\vec{e_3}$. L'insieme dei numeri è ordinato nel senso che il primo numero nell'insieme corrisponde alla direzione $\vec{e_1}$, il secondo alla direzione $\vec{e_2}$ ed il terzo alla direzione $\vec{e_3}$. Inoltre, i tre numeri rappresentanti un vettore devono sottostare a certe specifiche regole, poiché non ciascuno insieme ordinato di tre numeri rappresenta un vettore. Per vedere come tali regole possano essere stabilite, consideriamo qualsiasi vettore e descriviamolo in due sistemi di riferimento diversi. Come si passa da un sistema di riferimento all'altro, il vettore stesso rimane immutato mentre gli insiemi di numeri che lo descrivono saranno diversi nei due sistemi. Tuttavia, poiché gli insiemi descrivono lo stesso vettore, è possibile formulare una regola per esprimere un insieme di numero in termini dell'altro. Quindi è possibile richiedere che i tre numeri che rappresentano un vettore osservino tale regola di trasformazione.

Secondo queste idee, un vettore è definito analiticamente come un insieme ordinato di te numeri che rispettano certe regole specifiche. Se l'insieme dei numeri q_1, q_2 e q_3 rappresenta un vettore ciò viene espresso simbolicamente scrivendo

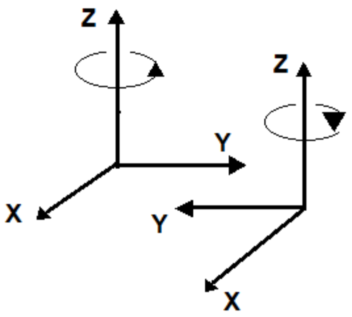
$$\vec{A} : (q_1, q_2, q_3)$$

3.3 Coordinate cartesiane e sistema i, j, k dei vettori unitari

I tre vettori unitari che costituiscono un sistema di riferimento per le varie grandezze vettoriali sotto considerazione sono abitualmente presi lungo le direzioni degli assi di un sistema di coordinate impiegato per definire la posizione di un punto nello spazio. Un esempio famigliare di un sistema di coordinate è il sistema rettangolare delle coordinate Cartesiane. In questo sistema un punto nello spazio è specificato da tre coordinate misurate relativamente a tre assi mutualmente perpendicolari. si denotino gli assi con **X**, **Y**, **Z** e le coordinate con *x*,*y*, *z* (vedasi figura).



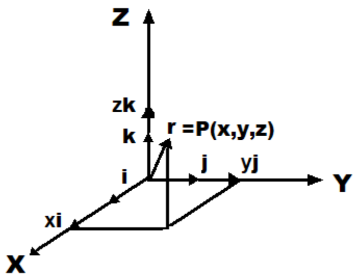
Gli assi coordinati possono venire arbitrariamente designati **X**, **Y** e **Z**, ma è necessario adottare una convenzione costante. Nella figura accanto sono mostrati due modi differenti di disposizione degli assi. Il metodo sulla sinistra della figura può venire caratterizzato dalla convenzione che una rotazione della mano destra attorno alla direzione positiva dell'asse **Z** di 90 gradi porta l'asse positivo **X** sull'asse positivo **Y**. Un sistema di assi orientati secondo la regola della mano destra è noto come sistema destrorso. Sulla destra della stessa figura è mostrato il metodo caratterizzato dalla rotazione della mano sinistra attorno all'asse *Z*. In questo lavoro sarà esclusivamente impiegato il metodo della mano destra.



Sia **P** un punto nello spazio denotato dalle coordinate x, y, z che si riferiscono ad un sistema di coordinate cartesiane **X**, **Y**, **Z**; sia **O** l'origine delle coordinate; ed $\vec{r}$ denoti il vettore posizione $\vec{OP}$.

Per descrivere la forma cartesiana di $\vec{r}$ si scelgano tre vettori unitati lungo le direzioni positive degli assi **X**, **Y**, **Z**. Per descrivere la forma analitica di $\vec{r}$si scelgano tre vettori unitari lungo le direzioni positive degli assi **X**, **Y**, **Z**. Denotiamo questi vettori unitari con $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ rispettivamente. Essi costituiscono un sistema destrorso di vettori mutuamente ortogonali. Le componenti di $\vec{k}$ rispetto al sistema $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sono semplicemente **x**, **y**, **z**. Pertanto scriviamo

$$\vec{r} = \vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} : (x, y, z)$$



Poiché sono mutuamente perpendicolari, la lunghezza di $\vec{r}$ è data da

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$$

Se α, β, γ sono gli angoli che $\vec{r}$ fa con $\vec{i}$, $\vec{j}$,$\vec{k}$ rispettivamente, i coseni direttori di $\vec{r}$ sono dati secondo le seguenti relazioni:

$$x = \vec{r}.\vec{i} = r\cos\alpha$$
$$y = \vec{r}.\vec{i} = r\cos\beta$$
$$z = \vec{r}.\vec{k} = r\cos\gamma$$

Ora, il medesimo sistema $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ di vettori unitari situato in qualsiasi punto **P** ed usato per descrivere la forma cartesiana di qualsiasi vettore associato al punto. Pertanto se $\vec{A}$ è una tale quantità vettoriale, e se a_x, a_y, a_z denotano le componenti di $\vec{A}$ rispetto a $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, possiamo scrivere

$$\vec{A} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} : (a_x, a_y, a_z)$$

La lunghezza di $\vec{A}$ è data da

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$$

3.4 Nozione delle coordinate curvilinee

Analizzando alcuni problemi fisici, sovente è conveniente usare coordinate di maggiore generalita delle coordinate Cartesiane. Ora esamineremo come tali coordinate generali possano venire introdotte e caratterizzate.

Nel sistema Cartesiano, vari punti nello spazio vengono definiti con l'assegnare valori differenti alle coordinate **x,y,z**. In un tale spazio **X,Y,Z**, consideriamo un sistema di tre funzioni indipendenti espresse da

$$q_1 = q_1(x, y, z)$$
$$q_2 = q_2(x, y, z)(1.18)$$
$$q_3 = q_3(x, y, z)$$

tale che ci sia un'unica corrispondenza tra *x,y,z*, e q_1, q_2 e q_3. Per mezzo di queste funzioni, si può determinare, per ogni punto **P** con coordinate **X**, **Y**, **Z**, un insieme di tre nuovi numeri q_1, q_2 e q_3. Per contro, se sono scelti tre numeri q_1, q_2 e q_3, un punto con coordinate **x, y, z** può venire determinato. Ciò significa che la posizione di un punto **P** nello spazio **X**, **Y**, **Z** puo venire specificato o con un insieme di numeri **X**, **Y**, **Z** o con q_1, q_2, q_3. Pertanto, ad ogni punto **P(x,y,z)** possono venire assegnati i corrispondenti valori q_1,q_2,q_3 come insieme di nuove coordinate. In questo senso, il sistema delle funzioni espresse può venire interpretato come definente una trasformazione di coordinate. Le coordinate q_1,q_2,q_3 sono note come coordinate generali di un punto. Si noti che q_1,q_2,q_3 sono coordinate e non è necessario che posseggano la dimensione di una lunghezza. In altri termini , esse non sono necessariamente le componenti del vettore posizione che descrivono il punto **P**.

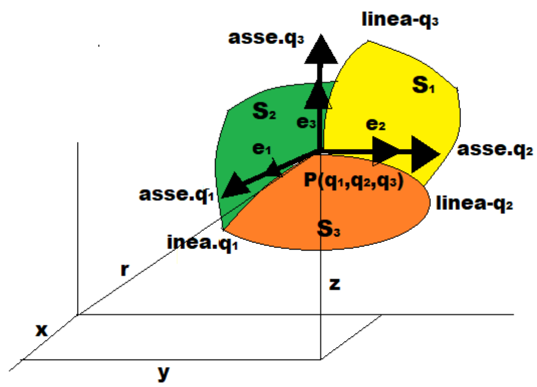
Richiamiamo ora il significato generico di una funzione **f(x,y,z)=costante**. Tae funzione rappresenta una famiglia di superfici con ciascuna superficie della famiglia che corrisponde a valori diversi della costante. Noi ci occupiamo di casi dove una sola superficie della famiglia passa attraverso un punto scelto. Consideriamo ora il sistema di equazioni espresso con

$$q_1 = q_1(x, y, z) = costante$$
$$q_2 = q_2(x, y, z) = costante(1.19)$$
$$q_3 = q_3(x, y, z) = costante$$

Esse rappresentano tre famiglie indipendenti di superfici tali che, in generale, una superficie di ciascuna famiglia passa attraverso un dato punto. Quindi qualsiasi punto nello spazio può venire localizzato come il punto di intersezione di queste superfici indipendenti rappresentate da un sistema di equazioni (1.19). I valori di q_1, q_2,q_3, che appartengono alle tre superfici che passano attraverso un punto, sono pertanto assegnati al punto come coordinate. Questi non sono nulla altro che le coordinate generiche espresse precedentemente dalle funzioni (1.18). Le superfici che sono genericamente descritte dalle equazioni (1.19) sono denominate *superfici coordinate curvilinee.* Pertanto le coordinate q_1,q_2,q_3 sono pure note come **coordinate curvilinee**.

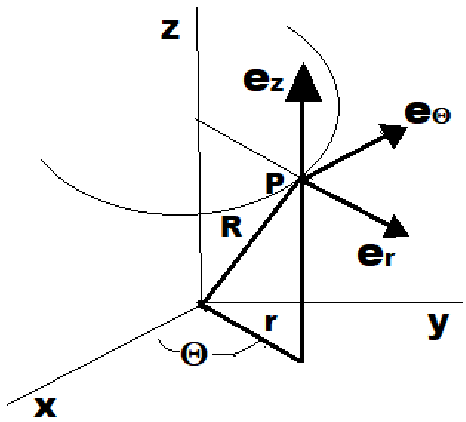
Le superfici coordinate che passano attraverso un qualunque punto P(q_1, q_2, q_3) si intersecano a coppie e danno luogo a tre curve spaziali passanti attraverso quel punto. Queste curve di intersezione sono chiamate linee coordinate **q-line**. Le superfici, q_2=**costante** e q_3=**costante**, si intersecano in una linea lungo la quale varia solamente la coordinata q_1. Pertanto, la curva è chiamata la **linea** q_1 o la **curva** q_1. Similmente, si ha una **linea** q_2 e una **linea** q_3 (vedasi figura: l_2 e l_3).

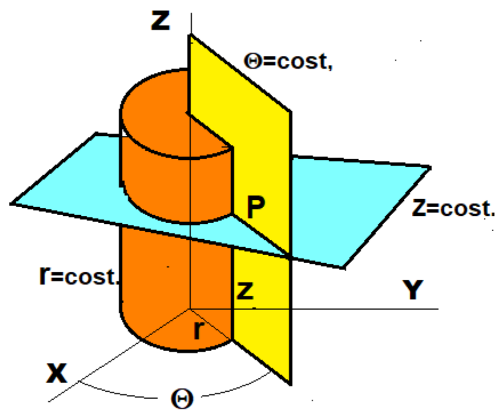
Nel punto **P** tracciamo una tangente su ciascuna delle linee coordinate. Queste tangenti sono assunte come gli assi coordinati nel punto **P** (vedi fig.). Questi assi sono considerati positivi nella direzione in cui q_1,q_2,q_3 aumentano spostandoci dal punto **P**. Lungo gli assi coordinati così formati delineiamo tre vettori unitari e_1, e_2, e_3. Questo sistema di vettori unitari nel punto **P** può servire da sistema di riferimento



per tutte le quantità vettoriali associate al punto **P**. Dovrebbe rapidamente venire notato che in un sistema di coordinate curvilinee che gli assi e il sistema di riferimento di vettori unitari non sono, in generale, di direzioni fisse nello spazio. Le loro direzioni variano da punto a punto. Si dovrà avere a mente questo aspetto delle coordinate curvilinee.

3.5 Coordinate curvilinee ortogonali





In molti problemi, quando siano usate delle coordinate curvilinee, le coordinate sono scelte tali che le superfici coordinate si intersechino ad angolo retto in ogni punto dello spazio. Tali coordinate sono denominate *coordinate curvilinee ortogonali.* In questo studio ci occuperemo soltanto di sistemi ortogonali. Come esempi di tali sistemi impiegheremo i seguenti due casi particolari

3.5.1 Coordinate cilindriche

questo sistema i punti nello spazio sono collocati dalle seguenti coordinate

$$q_1 = rq_2 = \Theta q_3 = z$$

mostrate in figura (si noti che **r** non è il raggio vettore **OP**). Le seguenti equazioni esprimono la trasformazione delle coordinate Cartesiane in coordinate cilindriche e la trasformazione delle coordinate cilindriche in coordinate Cartesiane:

$$r = q_1(x, y, z) = \sqrt{(x^2 + y^2)};$$
$$\Theta = q_2(x, y, z) = arc\ tan(\frac{x}{y})$$
$$z = q_3(x, y, z) = z$$

o inversamente:

$$x = r\cos\Theta;$$
$$y = rsen\Theta;$$
$$z = z$$

Le superfici coordinate date da **r=cost** sono dei cilindri coassiali con l'asse **Z**; con θ costante sono metà superfici attraverso l'asse **Z**; con **z** costante sono piani perpendicolari all'asse **Z**.

In ogni punto **P(x,y,z)** i vettori $\vec{e_r}$, $\vec{e_\Theta}$, $\vec{e_z}$ denotano il sistema di riferimento di vettori unitari tracciati rispettivamente nelle direzioni di incremento di **r**, θ e z. I vettori unitari son ortogonali l'un l'altro, e nell'ordine $\vec{e_r}$, $\vec{e_\Theta}$, $\vec{e_z}$ sono un sistema destrorso. Ad eccezione di eccezione di $\vec{e_z}$, questi vettori unitori sono, generalmente, di direzioni differenti in punti diversi dello spszio.

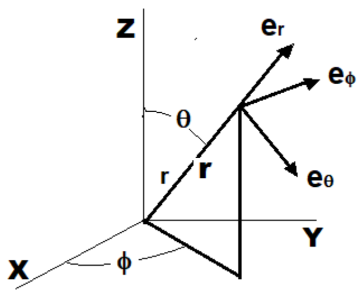
Il vettore $\vec{R}$ indica il vettore $\vec{OP}$ posizione dalla origine**O** al punto **P(x,y,z)**. Quindi, in forma a componenti $\vec{R}$ è data da:

$\vec{R} = r\ \vec{e_r} + z\ \vec{e_z}$

Se $\vec{A}$ è un qualsiasi vettore associato ad un punto **P(r,**θ**,z)** ed A_r, $A_\theta A_z$ sono le componenti di $\vec{A}$ nel sistema di vettori unitari $\vec{e_r}$, $\vec{e_\Theta}$, $\vec{e_z}$ si scrive:

$$\vec{A} = A_r\vec{e_r} + A_\Theta\vec{e_\Theta} + A_z\vec{e_z} : (A_r, A_\Theta, A_z)$$

3.5.2 Coordinate sferiche



In questo sistema un punto nello spazio è localizzato da

$$q_1 = r\ q_2 = \Theta\ q_3 = \Phi$$

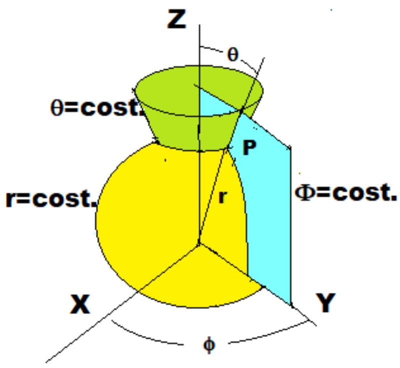
La trasformazione tra coordinate cartesiane e coordinate sferiche è espressa dalle equazioni:

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$$
$$\Theta = arc\cos\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} = arc\sin\frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}$$
$$\Phi = arc\cos\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = arc\sin\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$$

o, inversamente, dalle equazioni:

$$x = r\sin\Theta\cos\Phi$$
$$y = r\sin\Theta\sin\Phi$$
$$z = r\cos\Theta$$

Le superfici coordinate date con **r=costante** è una sfera concentrica attorno all'origine; con θ= costante è un cono circolare con il vertice all'origine e l'asse lungo l'asse **Z**; con ϕ=costante è un mezzo piano attraverso l'asse **Z**.



In ogni punto P(r,θ,ϕ) i vettori $\vec{e_r}$, $\vec{e_\Theta}$, $\vec{e_z}$ designano il sistema di riferimento di vettori initari tracciati rispettivamente nelle direzioni di incremento di **r**, θ e ϕ. I vettori unitari sono l'un l'altro ortogonali e formano, nell'ordine $\vec{e_r}$, $\vec{e_\Theta}$, $\vec{e_z}$, un sistema destrorso. I vettori sono diversamente diretti nei differenti punti nello spazio

La forma Cartesiana di un vettore di posizione $\vec{r} = \vec{OP}$ è espressa da

$$\vec{r} = r\vec{e_r}$$

Se $\vec{A}$ è un qualsiasi vwttore associato al punto **P (r,θ,ϕ)** e se A_r, A_θ, **A**ϕ sono le componenti di $\vec{A}$ in relazione a $\vec{e_r}$, $\vec{e_\Theta}$, $\vec{e_\Phi}$ approntato in**P**, scriviamo

$$\vec{A} = A_r\vec{e_r} + A_\Theta\vec{e_\Theta} + A_\Phi\vec{e_\Phi} : (A_r, A_\Theta, A_\Phi)$$

3.6 Prodotto di vettori in termini delle loro componenti

Ora esprimeremo in forma Cartesiana i vari prodotti che abbiamo precedentemente considerato. A questo fine scegliamo un sistema destrorso ortogonale di vettori unitari. Si denotino i vettori unitari con $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ e le componenti di un qualsiasi vettore $\vec{A}$ rispetto a questi con A_1, A_2 e A_3.

Come prima cosa consideriamo i prodotti scalare e vettoriale dei vettori unitari.

Un prodotto scalare di forma $\vec{e_1} \cdot \vec{e_1}$ è uguale all'unità. Un prodotto scalare di forma $\vec{e_1} \cdot \vec{e_2}$ è uguale a zero.Pertanto, si ha

$$\begin{aligned} \vec{e_1} \cdot \vec{e_1} = \vec{e_2} \cdot \vec{e_2} = \vec{e_3} \cdot \vec{e_3} = 1 \\ \vec{e_1} \cdot \vec{e_2} = \vec{e_2} \cdot \vec{e_3} = \vec{e_3} \cdot \vec{e_1} = 0 \end{aligned}$$

Un prodotto vettoriale della forma $\vec{e_1} \times \vec{e_1}$ è uguale a **0**.Un prodotto vettoriale dei forma $\vec{e_1} \times \vec{e_2}$ è uguale a $\vec{e_3}$ e di forma $\vec{e_2} \times \vec{e_1}$ è ugale a $-\vec{e}_3$. Pertanto si ha

$$\vec{e_1} \times \vec{e_1} = \vec{e_2} \times \vec{e_2} = \vec{e_3} \times \vec{e_3} = 0$$

e

$$\begin{aligned} \vec{e_1} \times \vec{e_2} = -\vec{e}_2 \times \vec{e_1} = \vec{e_3} \\ \vec{e_2} \times \vec{e_3} = -\vec{e}_3 \times \vec{e_2} = \vec{e_1} \\ \vec{e_3} \times \vec{e_1} = -\vec{e}_1 \times \vec{e_3} = \vec{e_2} \end{aligned}$$

Viene ora considerato il prodotto di due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Per il prodotto scalare $\vec{A} \cdot \vec{B}$ si ha:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_1\vec{e_1} + A_2\vec{e_2} + A_3\vec{e_3}) \cdot \ (B_1\vec{e_1} + B_2\vec{e_2} + B_3\vec{e_3})$$

Usando le relazioni () e (), questo si trasforma in

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

che esprime che il prodotto scalare di due vettori è uguale alla somma dei prodotti delle loro corrispondenti componenti.

Per il prodotto vettoriale $\vec{A} \times \vec{B}$ si ha

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_1\vec{e_1} + A_2\vec{e_2} + A_3\vec{e_3}) \times \ (B_1\vec{e_1} + B_2\vec{e_2} + B_3\vec{e_3})$$

Usando le relazioni ()() ciò si trasforma in

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_2B_3 - A_3B_2)\vec{e_1} + (A_3B_1 - A_1B_3)\vec{e_2} + (A_1B_2 - A_2B_1)\vec{e_3}$$

Questo può venire scritto nella forma di determinante

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

che è più facile da ricordare.

Si consideri ora un prodotto triplo di tre vettori $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$. Il risultato del prodotto scalare triplo $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$ si può scrivere in forma di determinante

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

che è facile da ricordare.

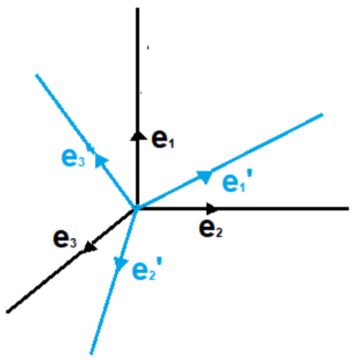
Il risultato di un prodotto vettoriale triplo $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ può venire scritto in forma di determinante

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ (B_2C_3 - B_3C_2) & (B_3C_1 - B_1C_3) & (B_1C_2 - B_2C_1) \end{vmatrix}$$

Con ciò si conclude l'algebra vettoriale.

3.7 Trasformazione delle componenti di un vettore con la rotazione del sistema di coordinate rettangolari

Si è visto che un ve ttore può venire descritto analiticamente tramite un insieme dinumeri che, in un qualche modo, sono correlati a un sistema di riferimento scelto di vettori unitari. Tali tre numeri devono ubbidire a certe specifiche regole, poiché non tutti gli insiemi di tre numeri costituiscono un vettore. Una di tali regole, per esempio, è la relazione con cui le componenti di un vettore si trasformano ruotando un sistema di coordinate rettangolari.



Siano x_1, x_2, x_3,le componenti del vettore posizione $\vec{r}$ rispetto ad un sistema di riferimento di vettori ortogonali unitari $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$. Se si ruota questo sistema, mantenendo fissa l'origine, si ottiene un nuovo sistema ortogonale. Si denoti il nuovo sistema con $\vec{e_1'}, \vec{e_2'}, \vec{e_3'}$. Riguardo a questo sistema indicizzato x_1, x_2'Si ha x_3' siano le componenti le componenti del vettore posizione. Allora si ha

$$\vec{r} = \sum_{x=1}^{3} x_i \vec{e_i} = \sum_{j=1}^{3} x_j \vec{e_j} (26)$$

Si voglia ora esprimere le componenti x_j' in termini delle componenti x_i e viceversa. Per le componenti x_j' in cui **j** può essere 1, 2 e 3, si ha:

$$\vec{r} = \vec{e_j'} \cdot \vec{r} = \sum_{i=1}^{3} (\vec{e_j'} \cdot \vec{e_i}) x_i$$
$$= \sum_{i=1}^{3} (\vec{e_i} \cdot \vec{e_j'}) x_i (27)$$

Introducendo la notazione

$$\alpha_{ij} = \vec{e_j} \cdot \vec{e'_j}$$

l'equazione (27) si può esprimere come:

$$x'_j = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ij} x_i$$

Ugualmente si ha:

$$x_i = \vec{e_i} \cdot \vec{r} = \sum_{j=1}^{3} (\vec{e_i} \cdot \vec{e'_j}) x'_j$$
$$= \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} x'_j (30)$$

Le equazioni (29) e (30) costituiscono la regola di trasformazione secondo la quale le componenti di un vettore si trasformano nella rotazione di un sistema di coordinate rettangolari.

Se $\vec{r}$ è un vettore e A_1, A_2, A_3 e a'_1, a'_2, a'_3 sono le sue componenti con riferimento al sistemi non indicizzato e non indicizzato, si hanno le seguenti relazioni di trasformazione per queste componenti:

$$a'_j = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ij} a_i (31)$$
$$a_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} a'_j (32)$$

I α_{ij} formano un insieme di nove numeri ottenuti dando a ciascuno **i** ed a ciascuno **j**, indipendentemente, i valori 1,2,3. Essi sono i coseni direttori rispettivi dei vettori unitari del sistema indicizzato con quelli del sistema non indicizzato. Così, α_{ij} è il cpseno dell'angolo tra $\vec{e_i}$ e $\vec{e'_j}$. Si noti che secondo la nostra notazione, il primo pedice, **i**, in $\alpha_i j$ denota il sistema non indicizzato ed il pedice **j** mentre il secondo, **j**, denota il sistema indicizzato. La totalità dei $\alpha_i j$ è nota come matrice di trasformazione.

Gli elementi di $\alpha_i j$ non sono tutti indipendenti. Otteniamo ora alcune relazioni tra di loro. La grandezza del vettore $\vec{A}$ è data da:

$$A^2 = \sum_{i=1}^{3} a_i a_i = \sum_{j=1}^{3} a'_j a'_j$$

Consideriamo prima la espressione nel sistema con apice. Otteniamo, usando l'equazione (31),

$$\sum_{j=1}^{3} a'_j a'_j = \sum_{j=1}^{3} (\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ij} a_i)(\sum_{k=1}^{3} \alpha_{ij} a_k)$$
$$\sum_k \sum_i (\sum_j \alpha_{ij} \alpha_{kj}) a_i a_k$$

Ma il lato destro di questa relazione deve eguagliare $\sum_i a_i a_i$ oppure $\sum_k a_k a_k$. Ciò significa che si deve avere

$$\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\alpha_{kj} = 1 \ if \ i = k$$
$$\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\alpha_{kj} = 0 \ if \ i \neq k$$

Introducendo la notazione

$$\delta_{ik} = 1 if \ i = k$$
$$\delta_{ik} = 0 if \ i \neq k$$

esprimiamo il risultato (35) come

$$\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\alpha_{kj} = \delta_{ik}$$

Con ciò l'elemento destro della equazione (34) diventa, come dovrebbe

$$\sum_k \sum_i \delta a_i a_k = \sum_{i=1}^{3} a_i a_i = \sum_{k=1}^{3} a_k a_k = A^2$$

Considerando ugualmente l'espressione $\sum_i a_i a_i = A^2$ e trasformandola nei termini delle componenti indicizzate si ottiene

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ij}\alpha_{ik} = \delta_{jk}$$

Infine, consideriamo il triplo prodotto $\vec{e_1'} \cdot (\vec{e_2'} \times \vec{e_3})$ che è uguale all'unità. Si ha

$$\vec{e_1'} \cdot (\vec{e_2'} \times \vec{e_3}) = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} & \delta_{31} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{32} \\ \delta_{13} & \delta_{23} & \delta_{33} \end{vmatrix} = 1$$

Fonte del testo: `https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Algebra_vettoriale/Componenti_vettoriali&oldid=387833`

4

Derivazione dei vettori

4.1 Funzioni coinvolgenti vettori e scalari

Se volessimo descrivere il moto di un punto massa lo faremo specificando in istanti diversi di tempo la sua posizione rispetto ad un qualche punto fisso di una struttura di riferimento prescelta. Cioè, descriviamo il vettore posizione r come una funzione del tempo, una variabile scalare. Questa relazione funzionale viene espressa simbolicamente da

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Questo è un esempio di un vettore come funzione di uno scalare. Ugualmente, Se per ciascun valore di una variabile scalare t vi corrisponde un dato valore di un vettore $\vec{A}$, diciamo che il vettore $\vec{A}$ è una funzione dello scalare t e si scrive

$$\vec{A} = \vec{A}(t)$$

Supponiamo che si voglia descrivere la temperatura di un corpo riscaldato su ogni suo punto. Per fare ciò si specifichi ciascun punto del corpo tramite un vettore posizione tracciato da un punto di riferimento scelto arbitrariamente e si enunci che la temperatura **T** sia una funzione del vettore $\vec{A}$ di posizione. Simbolicamente si scriva

$$T = T(\vec{r})$$

Qui si ha un esempio di uno scalare come una funzione di un vettore. Similmente, se per ciascun valore di un vettore $\vec{r}$ vi corrisponde un certo valore di un scalare ϕ, si dice che il valore ϕ è una funzione del vettore $\vec{r}$ e scriviamo

$$\phi = \phi(\vec{r})$$

Quando $\vec{r}$ indica il vettore posizione enunciamo che ϕ è una funzione scalare di posizione. Le distribuzioni di pressione, densità e temperatura nell'atmosfera sono esempi di funzioni scalari di posizione.

Consideriamo ora un corpo rigido che ruoti ad una velocità angolare costante ω. La velocità di un punto del corpo è fornita da:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

dove $\vec{r}$ è il vettore posizione da un punto di riferimento preso sull'asse di rotazione. Differenti valori di $\vec{r}$ forniscono le velocità dei differenti punti del corpo. Diciamo che la velocità è una funzione del vettore posizione e scriviamo simbolicamente

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{r})$$

Questo è un esempio di un vettore funzione di un altro vettore. Se per ciascun valore di $\vec{r}$ vi corrisponde un certo valore di un altro vettore $\vec{A}$, dciamo che $\vec{A}$ è una funzione di $\vec{r}$ e scriviamo

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$$

Quando $\vec{A}$ denota il vettore posizione, $\vec{A}$viene detto di essere una funzione vettoriale di posizione. La forza di grvità sperimentata da un corpo in presenza di un altro corpo è un esempio di una funzione vettoriale di posizione. Similarmente, la forza di Coulumb che agisce su un corpo carico di elettricità in presenza di un altro corpo carico è una funzione di posizione vettoriale,

Le relazioni funzionali che sono state introdotte sono semplicemente delle forme particolari delle espressioni più generiche espresse da

$$\phi = \phi(\vec{r}, t)$$

(uno scalare come funzione di un altro scalare e di un vettore) e

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$$

(Un vettore è una funzione di un altro vettore e di uno scalare). Quando $\vec{r}$ e t *significano rispettivamente posizione e tempo, diciamo che ϕ è una funzione scalare di posizione e tempo. e che $\vec{A}$ è una funzione vettoriale di posizione e tempo. Se nel caso di un corpo riscaldato la temperatura varia in ogni suo punto col tempo, diciamo che la temperatura* T è una funzione scalare di posizione e tempo e scriviamo$T = T(\vec{r}, t)$. In simile modo, se nel caso di un corpoconsideriamo la funzione rigido ruotante la velocità angolare varia col tempo, in ogni suo punto, diciamo che la velocità $\vec{V}$ e una funzione vettoriale di posizione e tempo e scriviamo $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t)$.

Facendo uso del principio di scomposizione di un vettore nelle sue componenti scalari, le precedenti funzioni che coinvolgono dei vettori possono venire interpretate nei termini di funzioni scalari di variabili scalari. Una tale interpretazione istituisce una corrispondenza tra le operazioni del calcolo vettoriale e quelle del calcolo scalare.

Prima consideriamo la funzione $\vec{A} = \vec{A}(t)$. Siano A_1 A_2 e A_3 le componenti di $\vec{A}$ rispetto ad un sistema fissato di vettori unitari che sono indicati con $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ e $\vec{e_3}$. Scriviamo quindi

$$\vec{A} = A_1\vec{e_1} + A_2\vec{e_2} + A_3\vec{e_3} : (A_1, A_2, A_3)$$

Con questa rappresentazione, la funzione $\vec{A}(t)$ può venire interpretata quale equivalente a tre funzioni

$$A_1(t)A_2(t)A_3(t)$$

Quindi, una funzione vettoriale di una variabile scalare è equivalente ad un sistema di tre equazioni scalari indipendenti della medesima variabile scalare.

Ora consideriamo la funzione $\phi = \phi(\vec{r})$. Se q_1, q_2, q_3 sono le componenti di $\vec{r}$ rispetto a un sistema di vettori unitari $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ e $\vec{e_3}$, $\phi(\vec{r})$ può essere considerata equivalente alla funzione

$$\phi = \phi(q_1, q_2, q_3)$$

Ci significa che una funzione scalare di un vettore è equivalente ad una funzione scalare di tre variabili scalari indipendenti.

Poi ora consideriamo la funzione $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$. Se come prima A_1 A_2, A_3 sono le componenti di $\vec{A}$ e q_1, q_2, q_3 sono le componenti di $\vec{r}$, $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ può essere scritto come equivalente al sistema di equazioni espresso con

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1(\vec{r}) = A_1(q_1, q_2 q_3) \\ A_2 &= A_2(\vec{r}) = A_2(q_1, q_2 q_3) \\ A_3 &= A_3(\vec{r}) = A_3(q_1, q_2 q_3) \end{aligned}$$

Perciò una funzione vettoriale di un vettore è equivalente a un sistema di tre funzioni scalari indipendenti di tre variabili scalari.

Ugualmente, le funzioni $\phi = \phi(\vec{r}, t)$ e $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$ possono venire espresse in termini di funzioni scalari di variabili scalari.

4.2 Campi scalari e vettoriali

Una funzione di posizione scalare o vettoriale associa un valore definito di una grandezza scalare o vettoriale ad ogni punto di una porzione di spazio. I vari punti della data regione, insieme ai valori corrispondenti della grandezza scalare o vettoriale, formano ciò che è chiamato un *campo*. Se la grandezza in questione è scalare, il campo e chiamato **campo scalare** se la gandezza è un vettore, il campo e chiamato **campo vettoriale**. Se abbiamo a che fare con una funzione scalare o vettoriale di posizione e del tempo, i valori della grandezza scalare o vettoriale nei vari punti della regione variano da istante ad istante ed il campo diventa un campo instabile o non stazionario. Se abbiamo da che fare con un campo funzione della sola posizione, il campo conserva la medesima struttura per tutto il tempo e viene detto campo stabile o stazionario. Il concetto di campo ci aiuta a mostrare ciò che sta accadendo simultaneamente in tutti i punti di una regione dellospazio.

Un arbitrario punto nel campo è denominato field point.

Consideriamo un campo scalare rappresentato da una funzione biiettiva $\phi = \phi(\vec{r})$. È possibile tracciare su tale campo una famiglia di superfici tale che ciascuna superficie attrversa tutti quei punti che anno lo stesso valore della grandezza scalare ϕ. Le superfici sono, pertanto, superfici a ϕ costante, e sono rappresentate da

$$\phi = \phi(\vec{r}) = cost.$$

con la costante che assume un valore diverso per ciascuna superficie. Tali superfici sono chiamate normalmente superfi di livello. Superfici di densità costante o di pressione costante o di temperatura costante sono tutti esempi di superfici di livello. Se il campo scalare è stabile le sue superfici di livello rimangono costanti nel tempo. Se il campo scalare è instabile le superfici di livello variano istante per istante.

Ci si può raffigurare un campo vettoriale immaginando delle frecce collocate nei vari punti delle regioni dello spazio, ciascuna freccia puntante nella direzione della

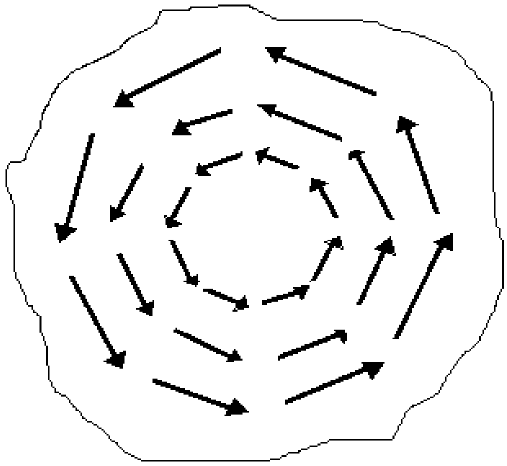


Fig. 4.1: Campo velocità di un corpo rigido rotante visto in un piano normale all'asse di rotazione

grandezza vettoriale associata al punto ed avente una lunghezza proporzionale alla grandezza stessa. Come esempio, il campo di velocità di un corpo rigido ruotante con una velocità angolare costante è mostrato nella figura affiancata.

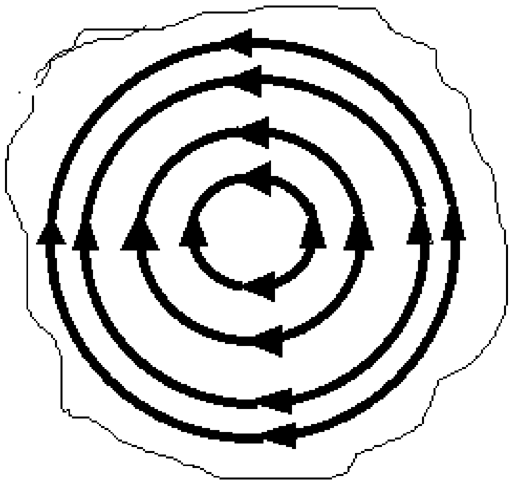


Fig. 4.2: Linee di campo di un campo di velocità di un corpo rigido che ruota

Un sistema di curve può essere tracciato in un campo vettoriale tale che la tangente in cogni suo punto abbia la direzione della grandezza vettoriale associata ad esso. Tali curve sono denominate linee di campo. Se il campo vettoriale è un campo di forze, le linee di campo sono note come linee di forza; se il campo è il campo della velocitò di un fluido in movimento esse sono note come linee di flusso.

Se in qualsiasi momento tracciamo una linea arbitraria nel campo vettoriale e tracciamo le linee di campo che la attraversano, si da luogo ad una superficie nota come superficie di campo. Se consideriamo una linea chiusa e tracciamo tutte le linee di campo che la attraversano si forma un tubo noto come tubo di flusso.

Un esempio famigliare di linee di campo è l'immagine delle curve formate dalla limatura di ferro in presenza di un magnete. Le linee di campo di un campo di velocità di un corpo rigido che ruota a velocità costante è mostrato nella figura accanto.

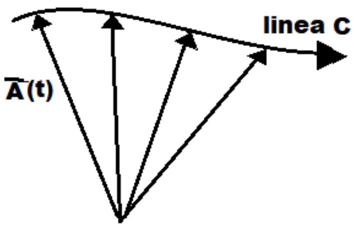
Se il campo vettoriale di cui ci occupiamo è stazionario, la immagine di queste linee di campo rimangono invariate nel tempo; altrimenti l'immagine cambia istante per istante. Per formulare analiticamente le linee di campo di un capo vettoriale $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$ si procede come segue. Si consideri, in un certo istante, la linea di campo che passa attraverso un punto $\vec{r}$. Sia $\vec{ds}$ un elemento della linea attraverso $\vec{r}$. Per definizione $\vec{ds}$ ha la stessa direzione del vettore $\vec{A}$ assocato al punto $\vec{r}$ nell'istante considerato. Cioè, $\vec{ds}$ e $\vec{A}$ sono vettori paralleli. Ricordando che il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è *zero*, scriviamo

$$\vec{ds} \times \vec{A} = 0$$

Questa, quindi, è l'equazione differenziale che determina, in qualsiasi istante, le linee di campo del campo vettoriale $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$. Facendo ricorso al principio della scomposizione di un vettore nelle sue componenti, questa equazione può venire rapidamente..............ad ogni sistema di coordinate prescelto.

Dato che la funzione $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$ è equivalente a tre funzioni scalari di posizione e tempo qualsiasi campo vettoriale può venire considerato equivalente a tre capi scalari.

4.3 Derivazione di un vettore funzione di una variabile scalare



Se un vettore $\vec{A}$ varia da un valore $\vec{A}_1$ ad un valore $\vec{A}_2$ l'incremento di $\vec{A}$ indicato con $\Delta\vec{A}$ è semplicemente la differenza vettoriale tra

$$\vec{A}_1$$

e $\vec{A}_2$. Cioè

$$\Delta\vec{A} = \vec{A}_2\vec{A}_1$$

Un cambiamento in un vettore può essere causato da un cambiamento nella sua grandezza o da un cambiamento nella sua direzione o da un cambiamento in entrambe.

Se un vettore $\vec{A}$ è una funzione di una variabile scalare t l'ncremento $\Delta\vec{A}$ in $\vec{A}$ corrispondente ad un incremento Δt da t, $t + \Delta t$, è dato da

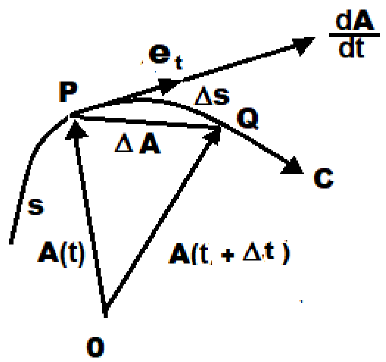
$$\Delta\vec{A} = \vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t)$$

Se il rapporto(la variazione media di $\vec{A}$ rispetto a **t** nell'intervallo Δt) tende adz un limite come Δt tende a **0**, quel limite è denotato la derivata di $\vec{A}$ rispetto a **t** (comparare l a definizione della derivata di una funzione scalare di una variabile scalare).

Seguendo le convenzioni usuali del calcolo differenziale, denotiamo questa derivata con $\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}$ e verghiamo

$$\frac{\Delta\vec{A}}{dt} = \lim_{dt\to 0}\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t} = \lim_{dt\to 0}\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}$$

Vediamo ora l'interpretazione geometrica di questa derivata. Se rappresentiamo i valori differenti del vettore $\vec{A}$ continuamente variabile con delle frecce tracciate da un punto comune **O** l'estremità del vettore descriverà nell o spazio una curva **C**. Facciamo che $\vec{OP}$ rappresenti $\vec{A}$ nell'istante **t** e $\vec{OQ}$ lo rappresenti nell'istante $t+\Delta t$ al tempo $t+\Delta t$



Allora l'incremento ΔA è rappresentato dalla corda vettore $\vec{PQ}$ della cirva **C**. Così abbiamo

$$\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t} = \frac{corda\vec{PQ}}{\Delta t}$$

o

$$\frac{\vec{A}}{dt} = \lim_{dt\to 0}\frac{\vec{A}}{\Delta t} = \lim_{dt\to 0}\frac{\vec{PQ}}{\Delta t}$$

Per interpretare il limite si proceda come segue. Un punto come **P** o **Q**' sulla curva **C** puo venire specificato dando sia i l vettore $\vec{A}$ sia la distanza **s** misurata lungo la curva da un qualche punto iniziale preso come riferimento. Poiché t varia, S cambierà quando A varia; quindi S=S(t) e $\vec{A}$ possono essere considerate come dipendente da S. Lasciamo Δs rappresentare l'incremento di **S** da **P** a **Q**. Pertanto,

$$\Delta s = lunghezzadell'arcoPQ$$

Immettendo Δs, riscriviamo l'equazione () come

$$\begin{aligned}\frac{\vec{A}}{dt} &= \lim_{dt\to 0}\frac{\vec{PQ}}{\Delta s}(\frac{\Delta s}{\Delta t}) = (\lim_{ds\to 0}\frac{\vec{PQ}}{\Delta s})(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t})\\ &= \frac{ds}{dt}(\lim_{ds\to 0}\frac{\vec{PQ}}{\Delta s})\end{aligned}$$

Ora, $\frac{\vec{PQ}}{\Delta s}$ è un vettore lungo $\vec{PQ}$ con una grandezza uguale a

$$\frac{lunghezza\ della\ corda \vec{PQ}}{lunghezza\ dell'arco\ PQ}$$

Quando $\Delta s \longrightarrow 0$

$$\frac{\vec{PQ}}{\Delta s} = 1,$$

e la direzione di $\vec{PQ}$ diventa quella della tangente alla curva **C** nel punto **P**. Designando con e_s un vettore unitario tangente in **P** si scriva

Con ciò, l'equazione (2.3a) diventa

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{e_s}(2.4)$$

che esprime la derivata come il prodotto di una grandezza e di una direzione.

Come un esempio delle considerazioni precedenti, si consideri il moto di una particella massiva. La sua posizione, in ogni istante, sia denotata da $\vec{r} = \vec{r}(t)$ misurato da un punto fisso prescelto di un sistema di riferimento. La traiettoria della particella è data dalla curva **C** tracciata dal vettore $\vec{r}$ mentre **t** varia. La velocità $\vec{V}$ della particella in ogni momento è fornita dalla derivata $\frac{\vec{r}}{dt}$. Pertanto si ha

$$\vec{V} = \frac{dr\vec{(t)}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{e_s} = V\vec{e_s}$$

asserente che la velocità è tangente alla traiettoria nell'istante considerato, e che la grandezza della ve **V** della velocità è uguale al rapporto della variazione della distanza lungo la traiettoria (cioè della velocità).

Come semplice conseguenza della equazione (2.4) possiamo fare notare che la direzione della derivata $\frac{d\vec{A}}{dt}$ quando $\vec{A}$ é di lunghezza costante ma di direzione variabile sia perpendicolare al vettore $\vec{A}$.

Consideriamo ora la derivata della somma e del prodotto di funzioni vettoriali, funzioni tutte che dipendono dalla medesima variabile. In entrambi questi casi i metodi formali di derivazione utilizzati nel calcolo numerico sono ugualmente applicabili. ad eccezione dei casi che implicano dei prodotti vettoriali, in cui l'ordine dei vettori deve essere mantenuto. Ciò. naturalmente, è una conseguenza del fatto che i prodotti vettoriali non sono commutativi. Ne conseguono i seguenti risultati:

1. Le derivate di ordine superiore di una funzione $\vec{A} = A\vec{(t)}$ sono elaborate tramite successive derivazioni come nel calcolo numerico.

2. Se $\vec{U} = U\vec{(t)}$ è la somma di due funzioni tali che

$$\vec{U} = A\vec{(t)} + B\vec{(t)}$$

si ha che

$$\frac{dU\vec{(t)}}{dt} = \frac{dA\vec{(t)}}{dt} + \frac{dB\vec{(t)}}{dt}$$

3. Se $u = u(t)$ $e\vec{A} = A\vec{(t)}$ abbiamo

$$\frac{d(u\vec{A})}{dt} = u \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\ u}{dt} \cdot \vec{A}$$

4. Se $\vec{A} = A\vec{(t)}$ $e\vec{A} = A\vec{(t)}$ ricaviamo

$$\frac{d\ (\vec{A}\cdot\vec{B})}{dt} = \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B}$$

Poiché il prodotto scalare è commutativo, l'ordine dei vettori in questa derivazione non è necessario che sia preservato

5. La derivata del prodotto vettoriale $\vec{A(t)} \times \vec{B(t)}$ è data da

$$\frac{d\ (\vec{A}\times\vec{B})}{dt} = \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}$$

e non è uguale a

$$\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{B}\times\frac{d\vec{A}}{dt}$$

poiché il prodotto vettoriale non è commutativo, e qui l'ordine dei vettori deve essere mantenuto.

6. Considerando un prodotto vettotiale triplo otteniamo

$$\frac{d\ (\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B}\times\vec{C} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}\times\vec{C} + \vec{A}\cdot\vec{B}\times\frac{d\vec{C}}{dt}$$

e

$$\frac{d\ [\vec{A}\times(\vec{(B}\times\vec{C})]}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt}\times(\vec{B}\times\vec{C}) + \vec{A}\times(\vec{B}\times\frac{d\vec{C}}{dt}) + \vec{A}\times(\vec{B}\times\frac{d\vec{C}}{dt})$$

Nuovamente, anche qui l'ordine dei vettori deve venire conservato.

Concludendo questo capitolo colleghiamo le derivate del vettore $\vec{A(t)}$ alle derivate delle sue componenti. Per fare ciò, scegliamo un sistema di vettori unitari $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ e formuliamo

$$\vec{A(t)} = A_1\vec{e_1} + A_2\vec{e_2} + A_3\vec{e_3}$$

Cosi otteniamo

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\ (A_1\vec{e_1})}{dt} + \frac{d\ (A_2\vec{e_2})}{dt} + \frac{d\ (A_3\vec{e_3})}{dt}$$

Se i vettori unitari sono costanti, questa espressione diventa

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\ A_1}{dt}\vec{e_1} + \frac{d\ A_2}{dt}\vec{e_2} + \frac{d\ A_3}{dt}\vec{e_3}$$

Se invece pure i vettori unitari sono variabili con lo scalare **t** si ottiene

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\ A_1}{dt}\vec{e_1} + A_1\frac{d\vec{e_1}}{dt} + \frac{d\ A_2}{dt}\vec{e_2} + A_2\frac{d\vec{e_2}}{dt} + \frac{d\ A_3}{dt}\vec{e_3} + A_3\frac{d\vec{e_3}}{dt}$$

Per illustrare il caso in cui i vettori unitari di riferimento sono pure variabili, si consideri la descrizione in coordinate cilindriche del moto di un punto materiale.

Concordemente, denotiamo con **x, y, z** la posizione, istante per istante, di tale punto, e con $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ i corrspondenti vettori unitari. Ricerchiamo la velocità **V** del punto in un istante determinato. Per definizione la velocità del punto è uguale al tasso di cambiamento della sua posizione. Pertanto, se $\vec{R} = \vec{R(t)}$ fornisce la posizione del punto rispetto ad un determinato punto, scriviamo

$$V = v(t) = \frac{d\vec{R}}{dt} +$$

In coordinate cilindriche

$$\vec{R} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$$

Di conseguenza, si ottiene

$$\vec{V} = \frac{d\ (r\vec{e_r} + z\vec{e_z})}{dt}$$

Poiché la direzione dell'unità vettoriale cambia con il cambiamento di posizione, questa equazione si sviluppps in

$$\vec{V} = \frac{d\ r}{dt}\vec{e_r} + r\frac{d\vec{e_r}}{dt} + \frac{d\ z}{dt}\vec{e_z}$$

Per valutare il rateo di variazione del versore $\vec{e_r}$, si procede nella medesima maniera usata nel ricavare l'Equazione (2.4) ottenendo

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}\vec{e_\theta}$$

Con questa relazione, la velocità espressa in coordinate cilindriche diviene

$$\vec{V} = \frac{d\ r}{dt}\vec{e_r} + \frac{d\ \theta}{dt}\vec{e_\theta} + \frac{d\ z}{dt}\vec{e_z}$$

Se non avessimo riconosciuto che $\vec{e_r}$ è variabile, saremmo giunto ad un risultato non corretto cioè che la velocità della particella sarebbe uguale a

$$\frac{d\ r}{dt}\vec{e_r} + \frac{d\ z}{dt}\vec{e_z}$$

4.4 Cambiamenti nei versori nelle coordinate cilindriche e sferiche

Quando ci si muove da un punto ad un altro punto nelle coordinate cilindriche o sferiche, delle variazioni si verificano nei versori di riferimento. Dobbiamo ore determinare questi cambiamenti.

4.4.1 Coordinate cilindriche

Ci si sposti da un punto $\vec{R}(r, \theta, z)$ di un infinitesimo di distanza

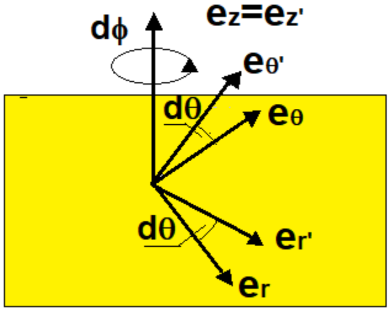
$$d\vec{S} = dr\vec{e_r} + r\ d\theta\vec{e_\theta} + dz\vec{e_z}$$

in qualche direzione. Qui $\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z}$ sono i versori associati al punto $\vec{R}$. Siano $\vec{e'_r}, \vec{e'_\theta}, \vec{e'_z}$ i versori associati a

$$\vec{R} + d\vec{s}$$

Come viene mostrato nella fig.2-4a, il sistema $\vec{e'_r}, \vec{e'_\theta}, \vec{e'_z}$
deriva da una rotazione infinitesimale

$$d\vec{\phi} = d\theta\vec{e_z}$$



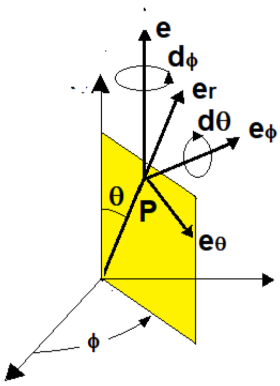
ove il pedice **i** può essere del sistema $\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z}$. Pertanto, il cambiamento in ognuno dei vettori unitari è dato da

$$d\vec{e_i} = \vec{e_i'} - \vec{e_i} = d\vec{\Phi} \times \vec{e_i}$$

in cui il pedice **i** può essere r, θ *o* z. Ricorrendo all'uso della relazione (2.7) e della relazione (2.8) si ottengono le variazioni dei versori come

$$\begin{aligned} d\vec{e_r} &= d\theta\vec{e_z} \times \vec{e_r} = d\theta\vec{e_\theta} \\ d\vec{e_\theta} &= d\theta\vec{e_z} \times \vec{e_\theta} = -d\theta\vec{e_r} \\ d\vec{e_z} &= d\theta\vec{e_z} \times \vec{e_z} = 0 \end{aligned}$$

4.4.2 Coordinate sferiche



Ora indichiamo un punto nello spazio con $\vec{e_r}(r, \theta, \phi)$. Ci spostiamo di un infinitesimo di distanza in una direzione qualunque

$$d\vec{s} = dr\vec{e_r} + r\ d\theta\vec{e_\theta} + rsen\theta d\phi\vec{e_\phi}$$

Dove $\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$, $\vec{e_\phi}$ sono i versori associati con il punto $\vec{e_\theta}$. Indichiamo con $\vec{e_r'}$, $\vec{e_\theta'}$, $\vec{e_\phi'}$ i versori associati con $\vec{r} + d\vec{s}$.Osserviamo, come indica la figura accanto, che il sistema $\vec{e_r'}$, $\vec{e_\theta'}$, $\vec{e_\phi'}$ risulta da una infinitesima rotazione

$$d\vec{\phi} = d\phi\vec{e} + d\theta\vec{e_\phi}$$

del sistema $\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z}$, dove $\vec{e}$ è un versore orientato nella direzione dell'asse da cui si misura θ. Esprimendo $\vec{e_\phi}$ in termini di $\vec{e_r}$ e $\vec{e_\theta}$ con la relazione

$$\vec{e} = cos\theta\vec{e_r} - sen\theta\vec{e_\theta}$$

si scrive l'equazione (2.10) come

$$d\vec{\phi} = d\phi\ cos\theta\vec{e_r} - d\phi\ sen\theta\vec{e_\theta} + d\theta\vec{e_\phi}$$

Con questa relazione per $d\vec{\phi}$, i cambiamenti nei vettori unitari possono venire determinati dalla equazione

$$d\vec{e_i} = \vec{e_i'} - \vec{e_i} = d\vec{\phi} \times \vec{e_i}$$

dove il pedice **i** può essere **r**, θ o ϕ. Si ottiene quindi

$$d\vec{e_r} = d\theta\vec{e_\theta} + d\phi\ sen\theta\vec{e_\phi}$$
$$d\vec{e_\theta} = d\theta\vec{e_r} + d\phi\ cos\theta\vec{e_\phi}$$
$$d\vec{e_\phi} = d\phi\ sen\theta\vec{e_\theta} + d\phi\ cos\theta\vec{e_\theta}$$

4.5 Sistemi di riferimento

Nelle precedenti argomentazioni le quantità vettoriali sono state descritte con riferimento ad una origine scelta. Una tale origine è un punto fisso in un qualche sistema di riferimento. Con sistema di riferimento intendiamo una struttura spazio-tempo che ci consente, tramite opportune misurazioni, di descrivere fenomeni fisici tali come la posizione di centri di massa ed il trascorrere del tempo.

$$\frac{|K_0|d}{dx} la\ derivata\ nella\ struttura\ |K_0|$$
$$\frac{|K|d}{dx} la\ derivata\ nella\ struttura\ |K|$$

Sia $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ un sistema di versori fissato in K, e siano a_1, a_2, a_3 le componenti scalari rispettive di $\vec{A}$. Osserviamo che i versori

$$\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$$

non sono funzioni della variabile **t** nella struttura **K**, mentre lo sono se osservati dalla struttura K_0. Le componenti scalari sono semplicemente funzioni scalari della variabile scalare in entrambe le strutture di riferimento; in questo caso la distinzione tra le strutture di riferimento diventa irrilevante.

Esprimendo $\vec{A}$ nella forma composita scrivamo

$$\frac{|K_0|d}{dt}\vec{A} = \frac{|K_0|d}{dt}(a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}) =$$
$$= (\vec{e_1}\frac{|K_0|d}{dt}a_1 + \vec{e_2}\frac{|K_0|d}{dt}a_2 + \vec{e_3}\frac{|K_0|d}{dt}a_3) + (a_1\frac{|K_0|d}{dt}\vec{e_1} + a_2\frac{|K_0|d}{dt}\vec{e_2} + a_3\frac{|K_0|d}{dt}\vec{e_3})$$

Consideriamo il termine $\frac{|K_0|d}{dt}a_1$. Dato che la derivata di una funzione scalare di una variabile scalare non dipende dalla struttura di riferimento, rileviamo che

$$\frac{|K_0|d}{dt}a_1 = \frac{|K|}{dt}a_1 = \frac{d}{dt}a_1$$

Possiamo quindi scrivere che

$$\vec{e_1}\frac{|K_0|d}{dt}a_1 = \vec{e_1}\frac{|K|}{dt}a_1 = \frac{|K|d}{dx}(a_1\vec{e_1})$$

dato che $\vec{e_1}$) è indipendente da **t** nella struttura **K**. Ugualmente, si ha

$$\vec{e_2}\frac{|K_0|d}{dt}a_2 = \frac{|K|d}{dt}(a_2\vec{e_2})$$

e

$$\vec{e_3}\frac{|K_0|d}{dt}a_3 = \frac{|K|d}{dt}(a_3\vec{e_3})$$

Combinando le equazioni (1),(2) e (3) si giunge al isultato

$$\vec{e_1}\frac{K_0d}{dt}a_1 + \vec{e_2}\frac{K_0d}{dt}a_2 + \vec{e_3}\frac{K_0d}{dt}a_3 = \frac{K_0d}{dt}(a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}) = \frac{Kd}{dt}\vec{A}$$

Consideriamo ora il termine

$$\frac{K_0d}{dt}\vec{e_1}$$

Poiché $\vec{e_1}$ è un vettore fisso nella struttura **K** che sta ruotando con una velocità angolare $\omega(t)$ rispetto alla struttura K_o, si può verificare che

$$\frac{K_od}{dt}\vec{e_1} = \vec{\omega} \times \vec{e_1}$$

Possiamo quindi scrivere

$$a_1\frac{K_0d}{dt}\vec{e_1} = a_1\vec{\omega} \times \vec{e_1} = \vec{\omega} \times a_1\vec{e_1}$$

Allo stesso modo, otteniamo

$$a_2\frac{K_0d}{dt}\vec{e_2} = \vec{\omega} \times a_2\vec{e_2}$$

e

$$a_3\frac{K_0d}{dt}\vec{e_3} = \vec{\omega} \times a_3\vec{e_3}$$

Combinando le relazioni AAA, arriviamo al risultato

$$a_1\frac{K_0d}{dt}\vec{e_1} + a_2\frac{K_0d}{dt}\vec{e_2} + a_3\frac{K_0d}{dt}\vec{e_3} = \vec{\omega} \times (a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}) = \vec{\omega} \times \vec{A}$$

Usando le relazioni g g g, l'equazione AA può essere riscritta come

$$\frac{K_0d}{dt}\vec{A} = \frac{Kd}{dt}\vec{A} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

Ciò fornisce la relazione richiesta tra le derivate di $\vec{A(t)}$ nelle strutture di riferimento **K** e K_o.

Fonte del testo: `https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Algebra_vettoriale/Derivazione_dei_vettori&oldid=415221`

5

Integrali

5.1 Integrali

In questo capitolo ci occuperemo dei differenti tipi di integrali che si presentano quando si trattano funzioni che hanno a che fare con scalari e vettori e introdurremo alcune nozioni associate. Quando si ha a che fare con funzioni vettoriali di uno scalare, come $\vec{A}(t)$, c'è un solo integrale da considerare. Quando ci si occupa di funzioni scalari o vettoriali di un vettore,quali le funzioni di posizione $\phi(\vec{r})$ e $\vec{A}(\vec{r})$, dobbiamo distinguere tra integrali di linea, di superficie e di volume.

5.2 Integrazione di una funzione vettoriale di uno scalare

Se un vettore $\vec{A}$ è funzione di una variabile scalare **t**, si può formare il così detto integrale indefinito

$$\int \vec{A}(t)dt$$

nello stesso modo come si forma la integrazione di uno scalare (integrazione di una funzione scalare funzione di una variabile scalare). Il risultato della integrazione è un'altre funzione vettoriale dello scalare **t**, che è determinata nei limiti di una costante additiva e che è, generalmente un vettore. Scrivamo quindi

$$\int \vec{A}dt = \vec{B}(t) + \vec{C}$$

Ne consegue che

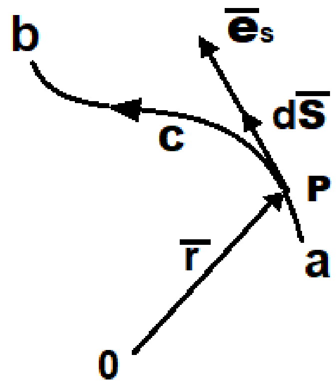
$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{A}(t)$$

Se la variabile **t** varia continuamente da un particolare valore t_1 ad un altro particolare valore t_2 l'integrale

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{A}(t)dt$$

è l'integrale definito di $\vec{A}$ tra i limiti t_1 e t_2.

5.3 Integrali di linea



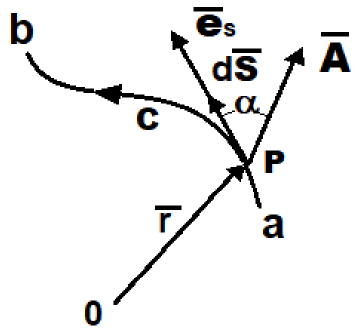
Si consideri una funzione scalare di posizione $\phi = \phi(\vec{r})$ ed il campo da essa descritto. In un tale campo **C** rappresenti una curva tracciata da un punto a ad un punto b. Si assegni alla curva una direzione di percorrenza come quella spostamento dal punto a al punto b. Poniamo che $\vec{r}$ denoti la posizione da qualche origine di un punto **P** sulla curva e che $d\vec{s}$ denoti un elemento di lunghezza lungo la curva dal punto **P**. Se $\vec{e_s}$ è un versore tangente alla linea nel punto **P**, si ha che $d\vec{s} = ds\ \vec{e_s}$. L'integrale

$$\int_a^b \phi(\vec{r})d\vec{s}$$

o l'equivalente

$$\int_a^b \phi(\vec{r})\vec{e_s}ds$$

preso lungo la curva **C** è chiamato *integrale di linea*. Il valore di questo integrale è un vettore.



Ora consideriamo una funzione vettoriale di posizione $\vec{A}(\vec{r})$. Se **C** e una linea curvilinea come prima può venire formato un integrale di linea

$$\int_a^b \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

oppure $\int_a^b \vec{A} \cdot \vec{e_s}ds$ lungo la curva **C** tra i punti estremi dati. L'integrale è semplicemente l'integrale lungo **C** delle componenti di $\vec{A}$ tangenti alla curva. Se, come mostra la figura, α è l'angolo tra $\vec{e_s}$ ed $\vec{A}$, questo integrale può pure venire riscritto

$$\int_a^b Acos\alpha ds$$

in cui **A** è la grandezza di $\vec{A}$. Il risultato di questo integrale è uno **scalare**. In genere questo integrale di linea. come qualunque altro integrale di linea, dipende dalla funzione $\vec{A}(\vec{r})$, il sentiero lungo il quale l'integrale viene computato ed i punti terminali della linea. Tuttavia, sotto certe condizioni, il valore dell'integrale dipende soltanto dai punti limite estremi e diventa indipendente dal tracciato di curva che li unisce.

Notiamo che un altro integrale di linea di $\vec{A}(\vec{r})$ può venire impostato come segue

$$\int_a^b \vec{A}(\vec{r}) \times d\vec{s} \; oppure \int_a^b \vec{A}(\vec{r}) \times \vec{e_s} ds$$

il risultato di questo integrale è un vettore.

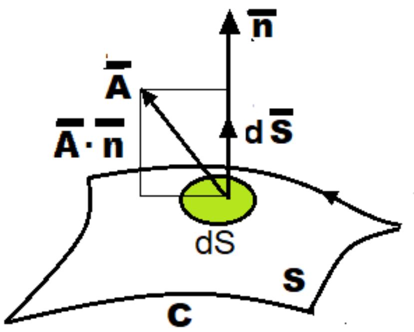
5.4 Circolazione

Gli integrali di linea del tipo appena descritto possono essere formati lungo delle linee curve chiuse. Di particolare interesse è l'integrale

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{s} \; oppure \oint \vec{A} \cdot \vec{e_s} ds oppure \; \oint A \; cos\alpha \; ds$$

lungo una curva spaziale **C**. Un tale integrale è noto come *circolazione vettoriale* del vettore $\vec{A}$ lungo la curva **C**. Generalmente, il valore della circolazione è diverso da zero e dipende dalla funzione $\vec{A}(\vec{r})$ e dalla curva **C**. In taluni casi , tuttavia, la circolazione svanisce e risulta indipendente dalla curva.

5.5 Integrale di superficie



Si prenda in considerazione una superficie non chiusa **S** tracciata in un campo descritto da una funzione di posizione scalare $\phi(\vec{r})$. Si divida la superficie in elementi infinitesimali. Ciascuno degli elementi della superficie può venire ora considerato come una superficie piana e denotato come un vettore

$$d\vec{S} = \vec{n} dS$$

laddove $\vec{n}$ è un versore normale all'elemento di superficie. Il versore $\vec{n}$ è tracciato arbitrariamente da un lato o dall'altro della superficie **S**. Tuttavia, se prima viene assegnato un verso di circolazione lungo il perimetro **C** della superficie, la direzione di $\vec{n}$ viene scelta secondo la regola della mano destra a seconda del verso di percorso lungo **C**. Impiegando queste notazioni diamo forma all'integrale

$$\iint_S \phi(\vec{r})d\vec{S} \; oppure \; \iint_S \phi(\vec{r})\vec{n}dS$$

sull'intera superficie **S**. Un tale integrale è nominato integrale di superficie della funzione ϕ sulla sperfice **S**. Il risultato dell'integrale è un vettore.

Consideriamo il prossimo vettore funzione di posizione $\vec{A}(\vec{r})$ e poniamo che **S** sia una superficie aperta nel suo campo. Allora l'integrale

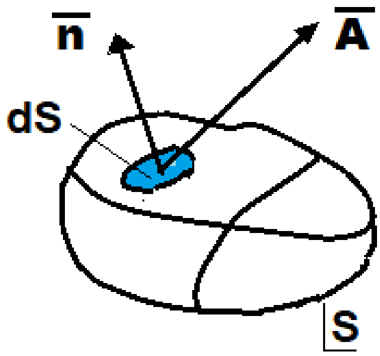
$$\iint_S \vec{A} \cdot dS \; oppure \; \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n}\; dS$$

computato sulla superficie **S** è nominato integrale di superficie di $\vec{A}$sulla superficie **S**. Poiché $\vec{A} \cdot \vec{n}$ è la componente di $\vec{A}$ nella direzione della normale all'elemento di superficie, questo integrale è semplicemente l'integrale di superficie di questa componente. Il valore di questo integrale è quindi uno scalare.

Per il campo vettoriale $\vec{A}(\vec{r})$ si può formare un altro integrale espresso da

$$\iint_S \vec{A}(\vec{r}) \times d\vec{S} \; oppure \; \iint_S \vec{A}(\vec{r}) \times \vec{n}\; dS$$

Il risultato di un tale integrale è un vettore



O

Integrali di superficie descritti sopra possono venire pure composti su superfici chiuse. Come mostrato nella figura sia **S** una superficie chiusa e, come prima, si ponga che $d\vec{S} = \vec{n}dS$ denoti un elemento di *'S. Per una superficie chiusa*, la normale sarò sempre tracciata in tale modo che esca dalla regione racchiusa dalla superficie e ci si riferirà ad essa come la normale uscente. Facendo uso di questa convenzione diamo forma ai seguenti integrali di superficie.

$$\iint_{S.c} \phi d\vec{S} \; oppure \; \iint_{S.c} \phi\vec{n}dS$$

Il risultato di questo integrale è un vettore.

Per un campo vettoriale $\vec{A}(\vec{r})$

$$\iint_{S.c} \vec{A} \cdot d\vec{S} \; oppure \; \iint_{S.c} \vec{A} \cdot \vec{n}\; dS$$

il risultato del quale è uno scalare. L'altro integrale è

$$\iint_{S.c} \vec{A} \times d\vec{S} \; oppure \; \iint_{S.c} \vec{A} \times \vec{n} \; dS$$

I risultato del quale è un vettore.

Questi ultimi tre integrali si presentano frequentemente nei problemi di fisica.

5.6 Flusso di un vettore uscente da una superficie

La quantità $\vec{A} \cdot d\vec{S}$ oppure $\vec{A} \cdot \vec{n} \; dS$ è abitualmente chiamata flusso di un vettore $\vec{A}$ uscente da un elemento superficiale $d\vec{S}$. Con flusso uscente di $\vec{A}$intendiamo il flusso di $\vec{A}$in direzione della regione che contiene la nornale a $d\vec{S}$. Questo è il caso in cui la componente $\vec{A} \cdot \vec{n}$ è positiva. Con questa interpretazione, l'integrale di superficie $\iint_S \vec{A} \cdot dSo \; \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \; dS$ è denominato *flusso uscente del vettore* $d\vec{A}$ *dalla superficie.* Dato che $\vec{A} \cdot \vec{n}$ puo essere positiva in taluni punti e negativa in altri della superficie S, con flusso uscente di $d\vec{A}$ dalla superficie S intendiamo di fatto il flusso netto uscente di $\vec{A}$.

L' integrali$\iint_{S.c} \vec{A} \cdot d\vec{S}o \quad \iint_{S.c} \vec{A} \cdot \vec{n} dS$ è il flusso di $\vec{A}$ attraverso la superficie **S** della regione delimitata da **S**.

5.7 Integrale di volume

Consideriamo una regione di spazio R nel campo di una funzione scalare di posizione $\phi(\vec{r})$. Poniamo che la regione sia divisa in un numero di elementi volumetrici infinitesimali $d\tau$. Allora l'integrale

$$\iiint_s \phi(\vec{r}) d\tau$$

assunto in ogni parte del volume, è noto come integrale volumetrico di ϕ nella regione R. Il risultato dell'integrale è uno scalare.

Analogamente, se **R** è una regione dello spazio nel campo di una funzione vettoriale di posizione $\phi(\vec{r})$, l'integrale

$$\iiint_s \vec{A}(\vec{r}) d\tau$$

è noto come integrale volumetrico di $\vec{A}$ nella regione **R**. Il risultato di un tale integrale è un vettore.

6

Notazione tensoriale cartesiana

Nella analisi di tanti problemi fisici, assai uso si fa delle coordinate Cartesiane. Le equazioni che governano un problema e le manipolazioni susseguenti vengono elaboraste nella forma di componenti Cartesiane. Una tale forma è abitualmente complessa, qualora ciascun termine debba essere esplicitamente scritto e conseguentemente comporta il danno di occultare la semplicità strutturale delle equazioni, delle manipolazioni e dei risultati. Per sormontare ciò, è sta introdotta una notazione abbreviata fondata su poche semplici convenzioni. Tale notazione è nota come notazione indicizzata di Cartesio. In questo capitolo descriviamo tale notazione, ed esprimiamo nei suoi termini le varie relazioni dell'algebra vettoriale e calcolo.

La notazione indicizzata, con indici che appaiono come apici e pedici sui termini considerati, è essenziale nello studio dei tensori. Pertanto tale notazione è nota anche come notazione indicizzata tensoriale cartesiana. L'impiego della notazione indicizzata che presentiamo qui non richiede una conoscenza dei tensori e della analisi tensoriale. La presente notazione è semplicemente una maniera conveniente di operare in forma compatta in termini di coordinate Cartesiane. In ogni modo, la medesima notazione viene usata nello studio dei tensori Cartesiani. Quindi la notazione indicizzata presente è pure nota come notazione tensoriale Cartesiana.

6.1 Notazioni per le coordinate cartesiane e per le componenti vettoriali

Si utilizza un sistema di coordinate Cartesiane destrorso. Indichiamo gli assi con X_1, X_2, X_3, le coordinate con x_1, x_2, x_3 ed i versori di riferimento con $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$. Pertanto, in combinazione lineare, il vettore posizione $\vec{r}$ viene espresso con

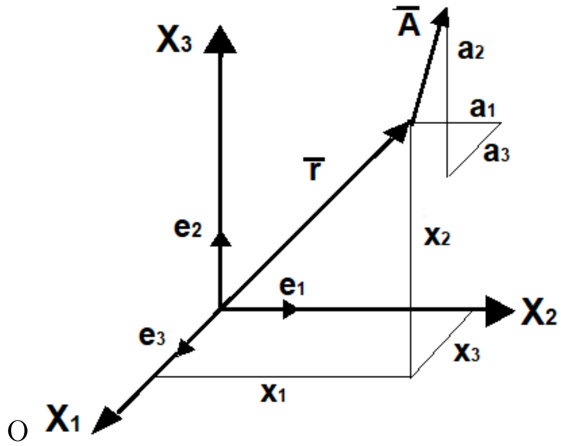
$$\vec{r} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3} = \sum_{k=1}^{3} x_i\vec{e_i} \qquad (1a)$$

Diciamo, in modo equivalente, che $\vec{r}$ è specificato con un insieme di numeri (x_1, x_2, x_3) e scriviamo in maniera simbolica

$$\vec{r} : (x_1, x_2, x_3) \qquad (1b)$$

per significare che x_1, x_2, x_3 sono le componenti di $\vec{r}$.

Ugualmente, se a_1, a_2, a_3 sono le componenti di un vettore $\vec{A}$, abbiamo



$$\vec{A} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} = \sum_{k=1}^{3} a_i\vec{e_i} \qquad (2a)$$

o, parimenti,

$$\vec{A} : (a_1, a_2, a_3) \qquad (2b)$$

È possibile abbreviare le espressioni (1) e (2) introducendo la notazione che x_i indica un insieme di numeri (x_1, x_2, z_3) in cui l'indice **i** assume i valori 1,2,3, e che a_i similmente denota di fatto l'insieme di numeri (a_1, a_2, a_3). Con una tale notazione rappresentiamo il vettore $\vec{r}$ con x_i ed il vettore $\vec{A}$ con a_i; in modo simbolico scriviamo

$$\vec{r} : x_i \qquad\qquad \vec{A} : a_i$$

Quindi, con questa notazione, un vettore è denotato da un termine con un singolo indice, usato qui come pedice. Per converso, un termine con un singolo indice come, diciamo, b_k, deve essere inteso che rappresenti un vettore le cui componenti cartesiane sono b_1, b_2, b_3. È irrilevante quale nome (o carattere) venga dato all'indice: un termine come $a_i o$ $a_k o$ a_α rappresenterà sempre un vettore le cui componenti sono a_1, a_2, a_3.

A questa notazione ci si riferisce come ad una notazione indicizzata o tensoriale cartesiana, dal momento che ci occupiamo esclusivamente di un sistema di coordinate cartesiane.

Uno scalare, come al solito, verrà indicato con un termine senza indice.

6.2 Operazioni algebriche elementari

Per illustrare subito l'uso della notazione con gli indici e la semplicità apportata dalla sua utilizzazione, consideriamo alcune semplici operazioni algebriche.

Nella forma di combinazione lineare l'uguaglianza di due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ viene espressa da

$$a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3} \qquad (1)$$

oppure dalle tre equazioni scalari

$$a_1 = b_1 \qquad\qquad a_2 = b_2 \qquad\qquad a_3 = b_3 \qquad (2)$$

Facendo uso della notazione ad indici, le espressioni (1) e (2) possono venire espresse in modo compatto scrivendo

$$a_i = b_i$$

Questa equazione sottintende di fatto tre di tali equazioni. cioè, il sistema che si ottiene dando agli indici i valori 1,2,3 (eq.2)

In forma di combinazione lineare la somma di due vettori è espressa da

$$\vec{A} + \vec{B} = (a_1 + b_1)\vec{e_1} + (a_2 + b_2)\vec{e_2} + (a_3 + b_3)\vec{e_3} = \sum_{k=1}^{3}(a_i + b_i)\vec{e_i}$$

Nella notazione con indici la somma è espressa semplicemente da

$$a_i = b_i \qquad (3)$$

che significa un vettore le cui componenti sono date dalla espressione (3) quando ad **i** siano dati i valori 1,2,3.

Per concludere, consideriamo un vettore $\vec{c}$ dato da

$$\vec{c} = m\vec{A}$$

in cui **m** è uno scalare. Nel formato di combinazione lineare si ha

$$c_1\vec{e_1} + c_2\vec{e_2} + c_3\vec{e_3} = m(a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3})$$

o, in modo equivalente, le tre equazioni scalari

$$c_1 = ma_1 \qquad c_2 = ma_2 \qquad c_3 = ma_3$$

Usando la notazione ad indici, il contenuto di () e () viene espresso in modo compatto da

$$c_i = ma_i$$

Ripetiamo che una notazione come () significa uguaglianza di due vettori, una espressione quale () significa addizione di due vettori, ed un termine come ma_i sottintende la moltiplicazione di un vettore per uno scalare.

6.3 Prodotto scalare

Nella forma componenti il prodotto scalare è espresso da

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Ricorrendo alla notazione ad indici, ciò può essere riscritto come

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{k=1}^{3} a_ib_i$$

Parimenti, si ha

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = \sum_{k=1}^{3} a_ia_i$$

6.4 Convenzione della sommatoria

Il lato destro di $\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{k=1}^{3} a_i b_i$, come quello di $\vec{A} \cdot \vec{A} = \sum_{k=1}^{3} a_i a_i$, è la somma di tre termini ottenuti dando a turno, alla **i** i valori 1,2,3,e procedendo alla somma. Notiamo che l'indice nel termine generico della somma viene ripetuto come nel caso di **i** in $a_1 b_1$. La somma, diciamo, è su un indice ripetuto.Essendo questo il caso, una semplificazione viene raggiunta se sopprimiamo il simbolo Σ della sommatoria e lo sostituiamo con la convenzione che quando un indice è ripetuto in un termine un tale termine è da sommare a tutti i valori di tale indice.In molte situazioni, come si vedrà, la sommatoria si verifica sempre su un indice ripetuto. Questa convenzione è nota come convenzione della sommatoria. Essa venne introdotta da Einstein e viene indicata pure come convenzione della sommatoria di Einstein.

Con questa convenzione i prodotti scalari $\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{k=1}^{3} a_i b_i$ e $\vec{A} \cdot \vec{A} = \sum_{k=1}^{3} a_i a_i$ possono venire espressi in forma compatta

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_i b_i \qquad \vec{A} \cdot \vec{A} = a_i a_i$$

A proposito, le quazioni

$$\vec{r} = x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2} + x_3 \vec{e_3} = \sum_{k=1}^{3} x_i \vec{e_i}$$
$$\vec{A} = a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2} + a_3 \vec{e_3} = \sum_{k=1}^{3} a_i \vec{e_i}$$
$$\vec{A} + \vec{B} = (a_1 + b_1)\vec{e_1} + (a_2 + b_2)\vec{e_2} + (a_3 + b_3)\vec{e_3} = \sum_{k=1}^{3} (a_i + b_i)\vec{e_i}$$

possono ora venire scritte come

$$\vec{r} = x_i \vec{e_i}$$
$$\vec{A} = a_i \vec{e_i}$$
$$\vec{A} + \vec{B} = (a_i + b_i)\vec{e_i}$$

Fonte del testo: https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Algebra_vettoriale/Notazione_tensoriale_cartesiana&oldid=357516

Elenco delle immagini

Caratteristiche dei vettori

Componenti vettoriali

Derivazione dei vettori

Integrali

Notazione tensoriale cartesiana

- 6.1, fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Notazione_tensoriale_cartesiana.png