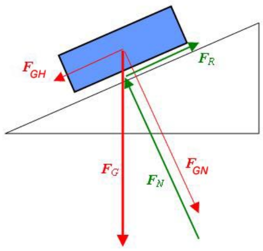
Esercizi di fisica con soluzioni

Benvenuto nel wikibook:

Esercizi di fisica con soluzioni



Indice

Licenze della voce

Esercizi di fisica con soluzioni

Esercizi di fisica con soluzioni

In questo libro troverete dei problemi di fisica di vari livelli di difficoltà a cui segue la spiegazione del procedimento utilizzato per risolverlo.

Gli esercizi sono suddivisi in base all'argomento; l'elenco completo degli argomenti è indicato qui a fianco.

Libri correlati

- Fisica classica
- Termodinamica

...consulta il Ripiano Fisica

Meccanica

Cinematica

Esercizi

Fascio catodico

In un tubo a raggi catodici di un televisore gli elettroni attraversano una regione con moto rettilineo, sottoposti ad una accelerazione costante. Sapendo che la regione è lunga d e che gli elettroni entrano nella regione con velocità v_1 ed escono con velocità v_2.

Determinare: Il valore dell'accelerazione a cui sono sottoposti gli elettroni ed il tempo di attraversamento della regione stessa.

(dati del problema $d = 5\ cm$, $v_2 = 9 \cdot 10^6\ m/s$, $v_1 = 2 \cdot 10^4\ m/s$)

Automobile

Un'auto parte da ferma con accelerazione uguale a 4 m/s^2. Si determini quanto tempo impiega a raggiungere la velocità di 120 km/h e quanto spazio percorre durante la fase di accelerazione.

Treno

Un treno parte da una stazione e si muove con accelerazione costante. Passato un certo tempo dalla partenza la sua velocità è divenuta v_1, a questo punto percorre un tratto d e la velocità diventa v_2.

Determinare accelerazione, tempo per percorre il tratto d e la distanza percorsa dalla stazione al punto in cui la velocità è v_1.

(dati del problema $d = 160\ m$, $v_1 = 33\ m/s$, $v_2 = 40\ m/s$)

Rally

In un tratto speciale di un rally automobilistico un pilota deve percorrere nel tempo minimo un tratto d, partendo e arrivando da fermo. Le caratteristiche dell'auto sono tali che l'accelerazione massima vale a_{max}, mentre in frenata la decelerazione massima vale a_{min}. Supponendo che il moto sia rettilineo, determinare il rapporto tra il tempo di decelerazione ed accelerazione, e la velocità massima raggiunta.

(dati del problema $d = 500\ m$, $a_{max} = 2\ m/s^2$, $a_{min} = -3\ m/s^2$)

Moto armonico semplice

Una particella vibra di moto armonico semplice con ampiezza x_0, attorno all'origine, e la sua accelerazione all'estremo della traiettoria vale a_0. All'istante iniziale passa per il centro.

Determinare: La velocità quando passa per il centro ed il periodo del moto.

(Dati: $x_0 = 2\ mm$, $a_0 = 8 \times 10^3\ m/s^{-2}$)

Caduta con attrito viscoso

Un oggetto viene lasciato cadere, da fermo ad una quota h , sotto l'azione combinata della accelerazione di gravità e di una decelerazione proporzionale alla velocità (dovuta all'attrito viscoso) secondo la legge $b \cdot v$. La velocità di regime vale v_f . Determinare: a)Dopo quanto tempo la decelerazione dovuta all'attrito viscoso vale 0.9 della accelerazione di gravità (ovviamente con segno opposto); b) a quale quota si trova nel caso a); c) il tempo approssimativo di caduta (la formula esatta è non ottenibile semplicemente)

(dati del problema $h = 10\ m$, $v_f = 4.9\ m/s$)

Moto parabolico

Le equazioni parametriche di un punto materiale sono

$x = a + bt$

$y = ct^2$

Determinare l'equazione della traiettoria e la velocità in modulo al tempo t_1

(dati del problema $t_1 = 7\ s$, $a = 0.02\ m$, $b = 2\ m/s$, $c = 3\ m/s^2$).

Moto circolare non uniforme

Un punto materiale si muove su un'orbita circolare, orizzontale di raggio R e la sua velocità angolare segue la legge:

$\omega(t) = A\sqrt{t}$

Determinare: a) il modulo dell'accelerazione quando $t = t_1$; b) il tempo necessario a fare un giro a partire dall'istante iniziale.

(dati del problema $A = 2rads^{-3/2}$, $t_1 = 0.4\ s$, $R = 10\ m$)

Palla in alto

Una palla viene lanciata verso l'alto con velocità iniziale v_0; dopo un tempo $t_1$passa di fronte ad un ragazzo ad altezza $h_1$dal suolo e continua a salire verso l'alto. Determinare: a) velocità iniziale v_0; b) La quota massima h_2.

(dati del problema $t_1 = 0.6\ s$, $h_1 = 4\ m$)

Macchina in frenata

Per fermare un'auto, passa prima di tutto un certo tempo di reazione per dare inizio alla frenata, poi vi è un tempo di frenata fino all'arresto. A parità di accelerazione di frenata e tempo di reazione partendo da una velocità $v_1$la macchina frena in d_1, mentre ad una velocità di regime di $v_2$frena in d_2.

Determinare: a) La decelerazione; b) il tempo di reazione del guidatore

(dati del problema $d_1 = 57\ m$, $v_1 = 80\ km/h$, $v_2 = 52\ km/h$, $d_2 = 25\ m$, il moto dopo il tempo di reazione è un moto accelerato uniforme)

Ampiezza moto armonico

Una particella vibra di moto armonico semplice attorno all'origine. All'istante iniziale si trova in x_1e la sua velocità vale $v_1$ed il periodo vale T. Determinare il massimo allontanamento dalla posizione di equilibrio e dopo quanto tempo dall'istante iniziale la velocità si è annullata.

(Dati: $x_1 = 20\ cm$, $v_1 = 0.3\ m/s$, $T = 3\ s$)

Moto ellittico

Le equazioni parametriche di un punto materiale, che descrive una ellisse intorno all'origine, sono: $x = a \sin \omega t$, $y = b \cos \omega t$.

Determinare, quando si è fatto un quarto di giro a partire dall'istante iniziale, quale sia la distanza dal centro, la velocità e l'accelerazione in modulo del punto materiale.

(dati del problema $a = 2\ m$, $b = 3\ m$, $\omega = 0.2\ rad/s$).

Moto a spirale

Le equazioni parametriche di un punto materiale, che descrive una curva a spirale con partenza nell'origine, sono :

$$x = At \sin \omega t$$
$$y = At \cos \omega t$$

Determinare, quando si è fatto un giro a partire dall'istante iniziale, quale sia la posizione, la velocità e l'accelerazione in modulo del punto materiale.

(dati del problema $A = 0.5\ m/s$, $\omega = 0.2\ rad/s$)

Soluzioni

Fascio catodico

L'equazioni del moto dopo avere attraversato la regione, detto $t_x$il tempo incognito, si ha che:

$$d = \frac{1}{2} a t_x^2 + v_1 t_x$$
$$v_2 = a t_x + v_1$$

Sono due equazioni in due incognite a e t_x, sostituendo $t_x$ricavabile dalla seconda equazione nella prima si ha:

$$d = \frac{1}{2} \frac{(v_2 - v_1)^2}{a} + v_1 \frac{v_2 - v_1}{a}$$
$$a = \frac{1}{2d}(v_2^2 - v_1^2) = 8,1 \cdot 10^{14}\ m/s^2$$
$$t_x = \frac{v_2 - v_1}{a} = 11\ ns$$

Automobile

Poichè il moto è uniformemente accelerato la velocità è regolata dalla legge $v(t) = v(0) + at$.

$v(0)$ vale 0 poiché l'auto parte da ferma, si ricava quindi $t = \frac{v}{a} = 8,3\ s$

Inoltre per un moto uniformemente accelerato la legge del moto è $s(t) = s(0) + v(0) + 1/2at^2$.

Fissiamo il punto $s(0) = 0$ come punto di partenza dell'auto e calcoliamo lo spazio percorso in un tempo $t = 8,3s$.

$$x(t) = \frac{1}{2}\ at^2 = 416\ m$$

Treno

Assunta come origine delle coordinate spaziali la stazione e del tempo l'istante di partenza. L'equazioni del moto sono:

$$x = \frac{1}{2}at^2$$

$$v = at$$

Dai dati del problema:

$$v_1 = at_1$$

$$v_2 = at_2$$

da cui:

$$t_1 = \frac{v_1}{a}$$

$$t_2 = \frac{v_2}{a}$$

Imponendo che:

$$d = \frac{1}{2}at_2^2 - \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2a}(v_2^2 - v_1^2)$$

$$a = \frac{1}{2d}(v_2^2 - v_1^2) = 1.6\ m/s^2$$

Il tempo per fare il tratto d :

$$t = t_2 - t_1 = \frac{v_2}{a} - \frac{v_1}{a} = 4.4\ s$$

La distanza dalla stazione di partenza:

$$t_1 = 20.6\ s$$

$$d_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = 340\ m$$

Rally

Definisco t_1 il tempo di accelerazione e t_2 quello di

decelerazione:

$$v = a_{max}t_1 + a_{min}t_2 = 0$$

da cui:

$$R = \frac{t_2}{t_1} = -\frac{a_{min}}{a_{max}} = 1.5$$

Imponendo che lo spazio percorso sia d :

$$\frac{1}{2}a_{max}t_1^2 + a_{max}t_1t_2 + \frac{1}{2}a_{min}t_2^2 = d$$

$$R^2\frac{1}{2}a_{max}t_2^2 + Ra_{max}t_2^2 + \frac{1}{2}a_{min}t_2^2 = d$$

$$t_2^2 = \frac{2d}{R^2a_{max} + 2Ra_{max} + a_{min}}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2d}{R^2a_{max} + 2Ra_{max} + a_{min}}} = 11.5\ s$$

$$t_1 = Rt_2 = 17.25\ s$$

$$v_{max} = a_{max}t_1 = 34.5\ m/s = 124\ km/h$$

Nota:

nel calcolo del rapporto R il valore 1.5 è corretto, ma questo vale per t1/t2 (mentre nell'esercizio è riportato l'inverso). Si consiglia di ricalcolare i valori che seguono R nell'esercizio stesso.

Moto armonico semplice

Dai dati del problema:

$$x = x_0\sin(\omega t)$$

$$a = -x_0\omega^2\sin(\omega t)$$

Quindi:

$$\omega = \sqrt{\frac{a_0}{x_0}} = 2000\ rad/s$$

Quindi nella posizione centrale:

$$v_0 = \sqrt{x_0a_0} = 4\ m/s$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{x_0}{a_0}} = 3.14 \times 10^{-3}\ s$$

Caduta con attrito viscoso

a)

Da dati del problema (notare che v_f è negativo se g è diretto verso il basso):

$$v_f = \frac{g}{b}$$

Quindi:

$$b = \frac{g}{v_f} = 2\ s^{-1}$$

Se chiamiamo t_1 il tempo per cui;

$$-bv = \frac{g}{2}$$

Ma essendo:

$$v = -\frac{g}{b}\left(1 - e^{-bt}\right)$$

segue che:

$$g\left(1 - e^{-bt_1}\right) = 0.9g$$

Cioè:

$$bt_1 = \ln 10$$

$$t_1 = 1.15\ s$$

b)

$$h_1 = h + \frac{g}{b}\left(\frac{1}{b} - t_1 - \frac{1}{b}e^{-bt_1}\right) = 6.6\ m$$

c)

Il termine esponenziale nell'espressione ha un valore trascurabile per cui:

$$h + \frac{g}{b}\left(\frac{1}{b} - t_2\right) \approx 0$$

Cioè il termine esponenziale è trascurabile.

$$t_2 = \frac{b}{g}h + \frac{1}{b} = 2.54\ s$$

Notare che il valore esatto (tenendo conto del termine esponenziale e risolvendo in maniera numerica per approssimazioni successive) vale:

$$t_{2e} = 2.5377\ s$$

Moto parabolico

Eliminando il tempo tra le due equazioni:

$$y = \frac{c}{b^2}(x - a)^2$$

cioè l'equazione di una parabola.

Derivando rispetto al tempo l'equazioni parametriche:

$$v_x = b$$

$$v_y = 2ct$$

quindi il modulo della velocità:

$$v(t) = \sqrt{b^2 + 4c^2t^2}$$

che per $t = t_o$:

$$v(t_o) = \sqrt{b^2 + 4c^2t_o^2} = 42\ m/s$$

Moto circolare non uniforme

a)

$$a_T = R\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}\frac{AR}{\sqrt{t_1}} = 15.8\ m/s^{-2}$$

$$a_c = \omega^2 R = A^2 tR = 16\ m/s^{-2}$$

quindi in modulo:

$$|a| = \sqrt{a_T^2 + a_c^2} = 22.5\ m/s^2$$

b)

Dai dati del problema essendo:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = A\sqrt{t}$$

$$\theta = \frac{2A}{3}t^{3/2} + \theta_o$$

Imponendo che:

$$2\pi = \frac{2A}{3}2t^{3/2}$$

$$t = 2.8\ s$$

Palla in alto

L'equazione del moto è:

$$x = v_o t - \frac{1}{2}gt^2$$

Essendo $x = h_1$ per $t = t_1$:

$$h_1 = v_o t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$

$$v_o = \frac{2h_1 + gt_1^2}{2t_1} = 9.6\ m/s$$

La massima altezza viene raggiunta quando $v(t_2) = 0$:

$$v_o = gt_2$$

$$t_2 = 0.98\ s$$

Ad una altezza di:

$$h_2 = v_o t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = 4.7\ m$$

Macchina in frenata

Nel caso generale: la velocità iniziale è v, t_r il tempo di reazione, t il tempo di frenata, d lo spazio di frenata, possiamo scrivere che:

$$d = vt_r + vt - \frac{1}{2}at^2$$

Ma nel nostro caso specifico sostituendo nell'equazione del moto i dati del problema:

$$v_1 = at_1$$

$$v_2 = at_2$$

Da cui ricavo $t_1 = v_1/a$ e $t_2 = v_2/a$ di frenata.

Nel nostro caso specifico:

$$d_1 = v_1t_r + v_1t_1 - \frac{1}{2}at_1^2 = v_1t_r + \frac{v_1^2}{2a}$$

$$d_2 = v_2t_r + v_1t_2 - \frac{1}{2}at_2^2 = v_2t_r + \frac{v_2^2}{2a}$$

Risolvendo il sistema nelle due incognite a e t_r:

a)

$$a = \frac{1}{2}\frac{v_1^2 - v_1v_2}{v_2d_1 - v_1d_2} = 4.66\ m/s^2$$

b)

$$t_r = \frac{d_2}{v_2} - \frac{1}{2}\frac{v_2}{a} = 0.18\ s$$

Ampiezza moto armonico

La pulsazione del moto vale:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2.1\ rad/s$$

Mentre posso scrivere in generale che:

$$x(t) = x_o \sin(\omega t + \varphi)$$

ed:

$$v(t) = x_o\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

Dalle condizioni iniziali:

$$x_1 = x_o \sin(\varphi)$$

$$v_1 = x_o\omega \cos(\varphi)$$

Facendo il rapporto:

$$\tan(\varphi) = \frac{x_1\omega}{v_1}$$

$$\varphi = 0.95\ rad = 54^o$$

La massima elongazione vale:

$$x_o = \frac{x_1}{\sin\varphi} = 0.25\ m$$

Mentre la velocità si annulla quando a partire dall'istante iniziale:

$$\omega t_1 + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$t_1 = 0.3\ s$

Moto ellittico

Per compiere un quarto di giro occorre che:

$\omega t_1 = \pi/2$

essendo:

$v_x = a\omega \cos \omega t$

$v_y = -b\omega \sin \omega t$

ed

$a_x = -a\omega^2 \sin \omega t$

$a_y = -b\omega^2 \cos \omega t$

dopo 1/4 di giro si ha che $\sin \omega t_1 = 1$e $\cos \omega t_1 = 0$quindi:

$x(t_1) = a$

$y(t_1) = 0$

$d = a = 2\ m$

e

$v_x(t_1) = 0$

$v_y(t_1) = -b\omega$

$|v| = b\omega = 0.6\ m/s$

e

$a_x(t_1) = -a\omega^2$

$a_y(t_1) = 0$

$|a| = a\omega^2 = 0.08\ m/s^2$

Moto a spirale

La velocità vale:

$v_x = A \sin \omega t + At\omega \cos \omega t$

$v_y = A \cos \omega t - At\omega \sin \omega t$

In modulo:

$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = A\sqrt{1 + t^2\omega^2}$

Mentre la accelerazione vale:

$a_x = 2A\omega \cos \omega t - At\omega^2 \sin \omega t$

$a_y = -2A\omega \sin \omega t - At\omega^2 \cos \omega t$

In modulo vale:

$|a| = A\omega\sqrt{4 + t^2\omega^2}$

Viene fatto un giro quando:

$\omega t_1 = 2\pi$

$t_1 = 31.4\ s$

Quindi:

$x_1 = 0$

$y_1 = At_1 = 15.7\ m$
$|v| = 3.18\ m/s$
$|a| = 0.66\ m/s^2$

Statica e dinamica del punto materiale

Esercizi

Cassa

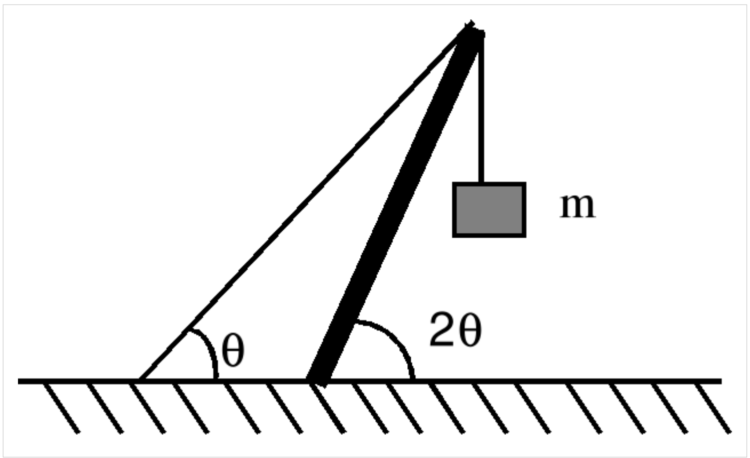
Una cassa di massa M è poggiata al suolo ed ha un coefficiente di attrito statico di μ_s con il suolo. Quale è la minima forza necessaria a spostare la cassa se tale forza viene applicata su una faccia laterale e forma un angolo di θ con il piano orizzontale?

(dati del problema $\mu_s = 0.5$, $M = 15\ kg$, $\theta = 25^o$)

Trave inclinata

Trovare le tensioni nel cavo mostrato in figura e la reazione vincolare della trave. Trascurare la massa della trave di legno. Il sistema è in equilibrio statico.

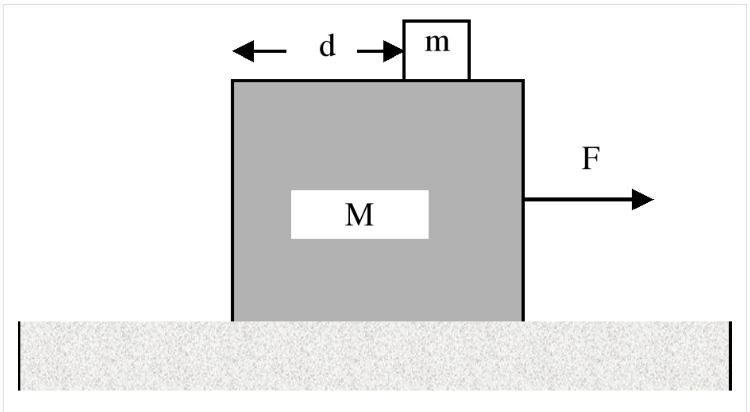
(Dati del problema $m = 1000\ kg$, $\theta = 20^o$)



Due cubi

Sopra un piano orizzontale è poggiato un cubo di massa M, che può scorrere senza attrito sul piano. Sopra il cubo è poggiato un altro cubetto di massa m a distanza d dalla faccia del cubo più grande. All'istante iniziale, quando tutto è fermo, al cubo è applicata una forza F orizzontale; dopo t il cubetto cade. Calcolare il coefficiente di attrito tra i due cubi

(Dati del problema $M = 50\ kg$, $m = 10\ kg$, $d = 50\ cm$, $F = 100\ N$, $t = 2\ s$)



Piastra con sopra un oggetto

Su un piano orizzontale è appoggiata una piastra quadrata di massa m_2, ferma. Il coefficiente di attrito radente piastra-piano vale μ_2. Sulla piastra viene posto un corpo di massa m_1, che si muove con velocità iniziale in modulo $|v|$ (parallela ai lati della piastra). Il coefficiente attrito corpo-piastra è μ_1. Commentare la relazione che deve esistere tra m_1, m_2, μ_1, μ_2 e $|v|$ perché la piastra si muova?
Trovare: a) La distanza $x_1$percorsa dal corpo sulla piastra prima di fermarsi. La distanza $x_2$percorsa dalla piastra sul ripiano prima di fermarsi.

(dati del problema $m_1 = 2\ kg$, $m_2 = 3\ kg$, $\mu_1 = 0.6$, $\mu_2 = 0.2$, $v_o = 3\ m/s$)

Automobile

Una automobile di massa M accelera da fermo. Su di essa agisce una forza data da:

$F = F_o - kt$

Dove t è il tempo dopo la partenza. Trovare la velocità e lo spazio percorso trascorso un tempo Dt.

(dati del problema $M = 900\ kg$, $Dt = 10\ s$, $F_o = 1200\ N$, $k = 60\ N/s$)

Piattaforma ruotante

Un oggetto di massa M poggia su una piattaforma che può ruotare. L'oggetto è trattenuto da una fune, di lunghezza l, la cui massima tensione vale T_{max}. La piattaforma parte da fermo ed accelera con una accelerazione angolare α costante. L'attrito statico tra piattaforma ed oggetto vale μ_s. Quando la fune si spezza?

(dati del problema $M = 1\ kg$, $\mu_s = 1.2$, $T_{max} = 1000\ N$, $l = 6\ m$, $\alpha = 1\ rad/s^2$)

Piano inclinato

Un punto materiale di massa m viene lanciato a partire dalla posizione A con velocità iniziale v_o lungo un piano inclinato di altezza h con angolo θ rispet to alla direzione orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico tra punto e piano inclinato vale μ_d.

Calcolare: a) L'accelerazione del moto (in modulo). b) Il tempo che impiega il punto a raggiungere B. c) Il valore del coefficiente di attrito dinamico per il quale il punto materiale arriva in B con velocità nulla.

(dati del problema $v_o = 4.2\ m/s$, $\theta = \pi/5$, $h = 60\ cm$, $\mu_d = 0.2$)

Oscillazione con elastico

Un elastico è attaccato al soffitto ed ha una massa trascurabile, la sua lunghezza a riposo vale l_o, la costante di richiamo elastico vale k. Al tempo 0una massa M viene attaccata da fermo all'estremo libero della molla (a riposo) e lasciato muovere. Il moto successivo è armonico. Determinare la velocità massima e la posizione più bassa raggiunta.

Pendolo conico elastico

Un pendolo conico, un punto materiale che percorre un'orbita circolare orizzontale, sotto l'azione combinata della forza peso e della tensione del filo. Il filo che sostiene la massa m è elastico con una lunghezza riposo di l_oe costante di richiamo elastica k. Il filo si spezza quando raggiunge una lunghezza due volte maggiore del valore a riposo. Determinare quando il filo si spezza: a) La tensione del filo. b) L'angolo che il filo forma con la verticale. c) La velocità (in modulo) del punto materiale.

(dati del problema $m = 700\ g$, $l_o = 50\ cm$, $k = 50\ N/m$)

Soluzioni

Cassa

Se la forza è applicata uscente, la reazione normale vale:

$$N_1 = Mg - F_1 \sin\theta$$

Imponendo che:

$$\mu_s N_1 = \mu_s(Mg - F_1 \sin\theta) \le F_1 \cos\theta$$

Quindi l'estremo superiore vale:

$$F_1 = \frac{\mu_s Mg}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta} = 66\ N$$

Se la forza è applicata entrante, la reazione normale vale:

$$N_2 = Mg + F_2 \sin\theta$$

Imponendo che:

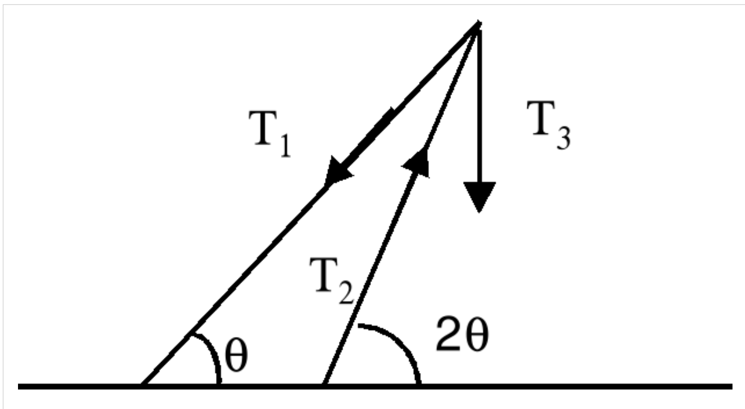
$$\mu_s N_1 = \mu_s(Mg + F_2 \sin\theta) \le F_2 \cos\theta$$

Quindi l'estremo superiore vale:

$$F_2 = \frac{\mu_s Mg}{\cos\theta - \mu_s \sin\theta} = 106\ N$$

Trave inclinata

Prendiamo la direzione della tensione del cavo e della reazione vincolare della trave come mostrato in figura. Assumiamo che le direzioni siano corrette, se avessimo sbagliato il segno verrebbe negativo.



Scomponendo nella direzione orizzontale le forze totali si ha:

$$T_2 \cos(2\theta) - T_1 \cos\theta = 0$$

Quindi:

$$T_2 = 1.22 T_1$$

Nella direzione verticale:

$$T_2 \sin(2\theta) - T_1 \sin\theta - T_3 = 0$$

ma:

$$T_3 = mg$$

$$1.22 T_1 \sin(2\theta) - T_1 \sin\theta - mg = 0$$

$$T_1 = \frac{mg}{1.22 \sin(2\theta) - \sin\theta} = 2.2 \cdot 10^4\ N$$

$$T_2 = 2.7 \cdot 10^4\ N$$

$$T_3 = 9.8 \cdot 10^3\ N$$

Due cubi

L'equazione del moto del cubo grande è:

$$F - \mu_d mg = Ma_1$$

mentre di di quello piccolo:

$$\mu_d mg = ma_2$$

Le due equazioni del moto sono:

$$x_1 = \frac{1}{2}\frac{F - \mu_d mg}{M}t^2$$
$$x_2 = \frac{1}{2}\mu_d g t^2$$

Imponendo che:

$$d = x_1 - x_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{F - \mu_d mg}{M} - \mu_d g\right]t^2$$

Quindi:

$$\mu_d = \left[\frac{F}{M} - \frac{2d}{t^2}\right]\frac{M}{g(m+M)} = 0.15$$

Piastra con sopra un oggetto

Fino a quando il corpo 1 è in moto rispetto alla piastra su di essa agiscono due forze una propulsiva $|F_1| = \mu_1 m_1 g$, eguale e contraria alla forza di attrito radente (se la forza propulsiva è sufficientemente grande) originata dal moto del corpo sulla piastra e la forza di attrito radente che si oppone al moto della piastra sul ripiano $|F_2| = -\mu_2[(m_1 + m_2)g]$.

L'equazione della dinamica per i due corpi sono:

$$m_1 a_1 = -\mu_1 m_1 g$$

$$m_2 a_2 = \mu_1 m_1 g - \mu_2[(m_1 + m_2)g]$$

quindi

$$a_1 = -5.88\ m/s^2$$
$$a_2 = \frac{\mu_1 m_1 g - \mu_2[(m_1 + m_2)g]}{m_2} = 0.65\ m/s^2$$

(per avere moto occorre che a_2 sia positivo, come in questo caso, in maniera che sia dominante il termine propulsivo rispetto a quello resistente).

Il corpo 1 ha una equazione della velocità:

$$v_1 = v_o + a_1 t$$

Si ferma quindi quando:

$$a_1 t_1 = -v_o$$

$$t_1 = 0.46\ s$$

avendo percorso:

$$x_1 = v_o t_1 + \frac{1}{2}a_1 t_1^2 = 0.76\ m$$

La piastra su cui striscia si muove nella stessa direzione e percorre un tratto:

$$x_2 = \frac{1}{2}a_2 t_1^2 = 0.07\ m$$

con una velocità:

$v_2 = a_2 t_2 = 0.3\ m/s$

Il corpo 1 rispetto alla piastra percorre un tratto:

$Ds = x_1 - x_2 = 0.69\ m$

L'equazione della dinamica della piastra 2 quando il corpo si è arrestato diventa:

$(m_1 + m_2)a_2' = -\mu_2(m_2 + m_1)g$

$a_2' = -1.96\ m/s^2$

E si fermano quando:

$a_2' t_2 + v_2 = 0$

$t_2 = 0.154\ s$

Quindi la piastra compirà, in totale un tratto:

$$x_3 = Ds + v_2 t_2 + \frac{1}{2} a_2' t_2^2 = 0.092\ m$$

Automobile

Integrando nel tempo l'equazione del moto:

$$M\frac{dv}{dt} = F_o - kt$$

con la condizione che per $t = 0\ v = 0$:

$$v(t) = \frac{F_o}{M}t - \frac{k}{2M}t^2$$

$v(Dt) = 10\ m/s$

Integrando nel tempo l'espressione della velocità:

$$s(t) = \frac{F_o}{2M}t^2 - \frac{k}{6M}t^3$$

$s(Dt) = 55\ m$

Piattaforma ruotante

L'attrito tra la piattaforma e l'oggetto deve essere tale da una parte a trattenere lungo la traiettoria l'oggetto che è soggetto ad una forza tangenziale pari a:

$M\alpha l = 6\ N$

mentre la forza di attrito massimo vale:

$\mu_s M g = 11.7\ N$

Tale forza è trascurabile rispetto alla tensione della fune che è la forza centripeta, la quale a causa dell'aumento lineare della velocità angolare è sempre maggiore fino a spezzare la fune. Infatti la fune si spezza quando:

$M\omega^2 l = T_{max}$

cioè per:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{T_{max}}{Ml}} = 12.9\ rad/s$$

Tale velocità angolare viene raggiunta dopo un tempo:

$$t_1 = \frac{\omega_1}{\alpha} = 12.9\ s$$

In realtà vi è anche un piccolo effetto dovuto all'attrito statico, dette f_{at} e f_{ar}, le forze di attrito tangenziali e radiali:

$$f_{at}^2 + f_{ar}^2 \leq \mu_s Mg$$

Ma $f_{at} = M\alpha l$ quindi: $f_{armax} = 10\ N$ e di conseguenza:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{T_{max} + f_{armax}}{Ml}} = 13\ rad/s$$

La velocità angolare viene raggiunta dopo un tempo:

$$t_2 = \frac{\omega_2}{\alpha} = 13\ s$$

Piano inclinato

a) L'equazione del moto nella direzione del piano inclinato vale:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg(\sin\theta + \mu_d \cos\theta)$$

Il moto è decelerato uniformemente con equazione del moto:

$$x(t) = v_o t + \frac{1}{2}a_o t^2$$

dove:

$$a_o = g(\sin\theta + \mu_d \cos\theta) = 7.35\ m/s^2$$

b) Imponendo che:

$$x(t)\sin\theta = h$$

segue che si ha una equazione di II grado nel tempo:

$$-\frac{1}{2}a_o t_1^2 + v_o t_1 - \frac{h}{\sin\theta} = 0$$

con soluzione:

$$t_1 = \frac{v_o \pm \sqrt{v_o^2 - 2a_o h/\sin\theta}}{a_o}$$

Le due soluzioni corrispondono al fatto che se il piano inclinato fosse infinito, il punto materiale arriverebbe una prima volta in B e poi supera B va alla massima quota e ripassa in discesa in B. Chiaramente la seconda soluzione non ha senso fisico in questo caso che il piano inclinato è finito, quindi:

$$t_1 = \frac{v_o - \sqrt{v_o^2 - 2a_o h/\sin\theta}}{a_o} = 0.35\ s$$

c)Imponendo che:

$$v_o - a_x t_x = 0$$

e

$$-\frac{1}{2}a_o t_x^2 + v_o t_x = \frac{h}{\sin\theta}$$

Eliminando t_x segue che:

$$a_x = \frac{1}{2}\frac{v_o^2}{h}\sin\theta$$

Ma:

$$a_x = g(\sin\theta + \mu_x \cos\theta)$$

quindi:

$$\mu_x = \left(\frac{v_o^2}{2hg} - 1\right)\tan\theta = 0.36$$

Oscillazione con elastico

Definisco come asse delle z l'asse verticale con origine sul soffitto. Detta:

$$z_o = -l_o$$

L'equazione di Newton:

$$Ma_z = -Mg - k(z - z_o)$$

La coordinata di equilibrio statico del sistema vale:

$$0 = -Mg - k(z_e - z_o)$$

$$z_e = z_o - \frac{Mg}{k}$$

Se faccio un cambiamento di coordinate ponendo per origine tale posizione di equilibrio:

$$z' = z - z_e$$

$$z = z' + z_e$$

L'equazione del moto diviene:

$$Ma_{z'} = -kz'$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico con:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

la cui soluzione generale è:

$$z' = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v' = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

Imponendo le condizioni iniziali:

$$z'(t=0) = \frac{Mg}{k}$$

$$v'(t=0) = 0$$

segue che:

$$A = \frac{Mg}{k}$$

$$\varphi = 0$$

Quindi:

$$z' = \frac{Mg}{k}\cos(\omega t)$$

$$z = \frac{Mg}{k}\cos(\omega t) + z_o - \frac{Mg}{k}$$

Pendolo conico elastico

La tensione del filo e la forza elastica sono la stessa cosa: in questo caso non si ipotizza che il filo sia inestensibile. La forza elastica per cui si spezza il pendolo vale:

$$|F_e| = k(2l_o - l_o) = kl_o = 25\ N$$

Nel pendolo conico la forza peso compensa esattamente la componente della tensione del filo (in questo caso la forza elastica) nella sua direzione:

$$F_e \cos\theta = mg$$

$$\theta = \arccos\frac{mg}{F_e} = 1.3\ rad = 74^o$$

D'altro canto la forza centripeta è la componente della tensione del filo (in questo caso la forza elastica):

$$m\frac{v_t^2}{R} = F_e \sin\theta$$

essendo:

$$R = 2l_o \sin\theta$$

da cui:

$$v_t = \sqrt{\frac{F_e 2l_o}{m}} \sin\theta = 5.8\ m/s$$

Energia meccanica

Esercizi

Pigna

Una pietra viene lanciata con una velocità iniziale di 20.0 m/s contro una pigna all'altezza di 5.0 m rispetto al punto di lancio. Trascurando ogni resistenza, calcolare la velocità della pietra quando urta la pigna.

Bumping jumping

Il cosiddetto Bungee jumping si ha quando un uomo di massa M si appende ad una fune elastica di costante di richiamo elastico k inizialmente a riposo e si lascia cadere (con velocità iniziale nulla). Inizia un moto armonico in cui viene prima raggiunta la massima velocità (nel punto di equilibrio tra le forze) ed infine si ha il massimo allungamento della fune l_1.

Determinare l'allungamento massimo e la relativa accelerazione, inoltre trovare la massima velocità raggiunta durante il moto. Si trascuri ogni forma di attrito.

(dati del problema $k = 50\ N/m$, $M = 75\ kg$)

Macchina in salita

Una automobile, che può schematizzarsi come un punto materiale, viaggia alla velocità v_o, assunto che la forza di attrito viscoso sia $-kv^4$(praticamente a tale velocità l'unica forza che si oppone alla forza di trazione del motore). Inoltre si immagini che la macchina debba percorrere un tratto in salita con pendenza p (rapporto tra innalzamento e percorso fatto sul tratto orizzontale). Determinare il lavoro (minimo) e la potenza minima del motore per percorrere un tratto l .

(dati del problema $k = 9 \cdot 10^{-4}\ kgm^{-3}s^2$, $m = 800\ kg$, $l = 1000\ m$, $p = 10\%$, $v_o = 126\ km/h$
)

Soluzioni

Pigna

Detta v_x la velocità finale dalla conservazione dell'energia segue che:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_x^2$$

e quindi:

$$v_x = \sqrt{v^2 - 2gh} = 17.4\ m/s$$

Bumping jumping

Detta l_1 la massima elongazione (dove la velocità è nulla) dalla posizione di equilibrio, ponendo 0 l'energia potenziale iniziale (gravitazionale ed elastica) applicando la conservazione della energia meccanica:

$$-Mgl_1 + \frac{1}{2}kl_1^2 = 0$$

$$l_1 = \frac{2Mg}{k} = 29.4\ m$$

La accelerazione in tale punto vale:

$$a = \frac{F}{M} = \frac{kl_1}{M} - g = g$$

La velocità ha un massimo per un allungamento tale che:

$$-Mg + Kl_2 = 0$$

$$l_2 = \frac{Mg}{k} = 14.7\ m$$

Imponendo la conservazione della energia:

$$\frac{1}{2}Mv^2 - Mgl_2 + \frac{1}{2}kl_2^2 = 0$$

$$v = g\sqrt{\frac{M}{k}} = 12\ m/s$$

Macchina in salita

L'altezza da superare vale:

$$h = lp = 100\ m$$

Quindi il lavoro minimo fatto contro la forza di gravità vale:

$$L_g = mglp = 784\ kJ$$

mentre quello contro la forza di attrito:

$$L_a = kv^4 l = 1350\ kJ$$

Il lavoto totale:

$$L_T = L_g + L_a = 2130\ kJ$$

Per percorrere il tratto l viene impiegato un tempo:

$t = \frac{l}{v} = 28.6\ s$

Quindi la potenza vale:

$P = \frac{L_T}{t} = 75\ kW$

Moti relativi

Esercizi

Auto

Un'auto parte da ferma con accelerazione uguale a 4 m/s². Si determini quanto tempo impiega a raggiungere la velocità di 120 km/h e quanto spazio percorre durante la fase di accelerazione.

Soluzioni

Auto

Poichè il moto è uniformemente accelerato la velocità è regolata dalla legge $v(t) = v(0) + at$.

$v(0)$ vale 0 poiché l'auto parte da ferma, si ricava quindi $t = \frac{v}{a} = 8,3\ s$

Inoltre per un moto uniformemente accelerato la legge del moto è $s(t) = s(0) + v(0) + 1/2at^2$.

Fissiamo il punto $s(0) = 0$ come punto di partenza dell'auto e calcoliamo lo spazio percorso in un tempo $t = 8,3s$.

$x(t) = \frac{1}{2}\ at^2 = 416\ m$

Dinamica di sistemi di punti materiali

Esercizi

Treno

Un treno è composto di una motrice e da tre vagoni, ed ha, inizialmente, una accelerazione a_o. Supponiamo che la motrice ed i vagoni abbiano ognuno massa M. Determinare: a) la forza motrice F_M della motrice, b) la forza f_1 che esercita la motrice sul I vagone, c) la forza f_3 che esercita il II vagone sul III.

(dati del problema $a_o = 0.5\ m/s^2$, $M = 2 \cdot 10^4 kg$)

Manubrio

Un manubrio è costituito da due masse uguali collegate da una sbarretta di massa trascurabile di lunghezza $2d$: supponiamo che inizialmente esso ruoti liberamente intorno ad un asse ortogonale al centro della sbarretta con velocità angolare ω_i. Se in virtù di forze interne le due masse vengono avvicinate in maniera da distare alla fine solo $d/2$ dal centro dell'asse di rotazione.

Determinare: La velocità angolare finale del sistema ed il lavoro fatto dalle forze interne.

(dati del problema $\omega_i = 20\ rad/s$, $d = 0.5\ m$, $m = 2\ kg$)

Blocchi con molla

Su un piano orizzontale sono posti due blocchi di masse M_1 ed M_2 rispettivamente. Tra i due blocchi, inizialmente fermi, è sistemata una molla, di massa trascurabile, mantenuta compressa con un corto filo di collegamento tra i blocchi. Ad un certo istante il filo viene tagliato ed i due blocchi vengono messi in movimento dalla molla. Si osserva che la velocità acquistata dalla massa M_1 è v_1.

Determinare l'energia elastica della molla nella configurazione iniziale.

(dati del problema $M_1 = 2\ kg$, $M_2 = 3\ kg$, $v_1 = 0.5\ m/s$, si trascuri l'attrito del piano)

Soluzioni

Treno

Il sistema ha un solo grado di libertà, per cui ogni grandezza cinematica o dinamica, può esprimersi come uno scalare nella direzione del moto. Le equazioni del moto sono:

$$F_M - f_1 = Ma_o$$
$$f_1 - f_2 = Ma_o$$
$$f_2 - f_3 = Ma_o$$
$$f_3 = Ma_o$$

Sommandole:

$$F_M = 4Ma_o = 40\ kN$$
$$f_1 = F_M - Ma_o = 30\ kN$$
$$f_3 = Ma_o = 10\ kN$$

Manubrio

Dovendosi conservare il momento della quantità di moto:

$$2dm\omega_i d = 2\frac{d}{2}m\omega_f\frac{d}{2}$$

$$\omega_f = 4\omega_i = 80\ rad/s$$

L'energia cinetica iniziale vale:

$$E_i = m\omega_i^2 d^2$$

$$E_f = m\omega_f^2\frac{d^2}{4} = 4E_i$$

Quindi l'energia cinetica aumenta di:

$$E_f - E_i = 3E_i = 600\ J$$

L'aumento di energia cinetica è dovuto alle sole forze interne.

Blocchi con molla

Le forze che agiscono sono solo interne quindi essendo nulla la quantità di moto iniziale:

$$M_2v_2 + M_1v_1 = 0$$

$$v_2 = -\frac{M_1}{M_2}v_1 = -0.33\ m/s$$

Che è anche l'energia cinetica della massa 2 quindi l'energia cinetica vale:

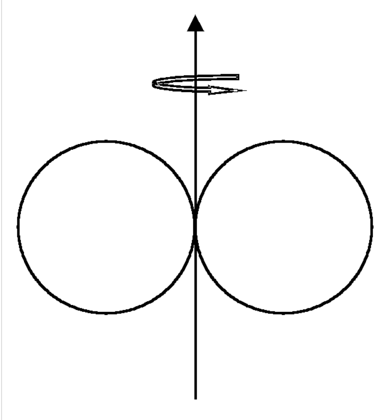
$$E_k = \frac{1}{2}M_1v_1^2 + \frac{1}{2}M_2v_2^2 = 0.42\ J$$

che coincide con l'energia elastica della molla.

Corpi rigidi

Esercizi

Due sfere unite



Determinare il momento di inerzia di due sfere piene di massa M e raggio R, unite sulla superficie esterna, attorno ad un asse normale alla congiungente i loro centri e passante per il punto di contatto.

Pendolo fisico

Un pendolo fisico è costituito da un'asta sottile rigida ed omogenea di lunghezza L e massa m che ruota intorno al suo estremo O. Sull'asta è collocata ad una distanza a dall'estremo O un corpo puntiforme di massa $M = 5m$. Si dete rmini:a) Il periodo delle piccole oscillazioni se M si trova in $a = L/2$. b) Il periodo delle piccole oscillazioni se la massa M viene spostata da un estremo all'altro.

(Dati: $L = 1\ m$)

Freno su disco

Un disco omogeneo di massa M e raggio R ruota liberamente attorno al proprio asse con velocità angolare ω_o. Sul disco viene azionato per un tempo T un freno elettromagnetico che genera una coppia frenante di momento meccanico $|M_f| = -b\omega$, dove ω è la velocità angolare istantanea. Determinare: a) la velocità angolare del disco dopo l'azione del freno; b) l'energia dissipata dal freno

(dati $M = 10\ kg$, $R = 20\ cm$, $b = 0.30\ Nms/rad$, $T = 1\ s$, $\omega_o = 10\ rad/s$)

Anello in discesa

Un anello viene lasciato, con velocità iniziale nulla, sulla cima di un piano inclinato scabro con un angolo α rispetto alla direzione orizzontale. Determinare: a) se il moto dell'anello possa essere di puro rotolamento; b) la velocità dell'anello dopo che il suo centro si è spostato di s

(Dati del problema $\alpha = 50^o$, $\mu_s = 0.5$, $\mu_d = 0.5$, $s = 3\ m$)

Carrucola con due masse

Ad una carrucola di raggio r e momento di inerzia I rispetto al piano verticale in cui giace la carrucola e passante per il suo centro sono sospese tramite un filo inestensibile due masse $m_1$ed m_2. Calcolare: a) l'accelerazione delle masse; b) le tensioni dei fili; c) il tempo impiegato dalla carrucola, partendo dal sistema fermo, a fare un giro.

(dati del problema $I = 1\ kgm^2$, $r = 0.4\ m$, $m_1 = 3\ kg$, $m_2 = 2\ kg$)

Soluzioni

Due sfere unite

applicando il teorema di Huygens Steiner per una sfera:

$$I_1 = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2$$

Per il sistema:

$$I = \frac{14}{5}MR^2$$

Pendolo fisico

a)

Il momento di inerzia totale del sistema e la posizione del baricentro entrambi calcolati rispetto al punto O sono rispettivamente:

$$I_1 = I_a + I_M = \frac{1}{3}mL^2 + Ma^2 = \frac{19}{12}mL^2$$

$$x_1 = \frac{1/2mL + Ma}{m+M} = \frac{L}{2}$$

Quindi, la lunghezza ridotta del pendolo vale:

$$l_{r1} = \frac{I_1}{x_1 6m} = \frac{19}{36} = 0.53l$$

Il periodo delle piccole oscillazioni vale:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_{r1}}{g}} = 1.46\ s$$

b)

Se M viene posto all'estremo opposto ad O :

$$I_2 = \frac{1}{3}mL^2 + ML^2 = \frac{1}{3}mL^2 + 5mL^2 = \frac{16}{3}mL^2$$

$$x_2 = \frac{mL/2 + ML}{m+M} = \frac{mL/2 + 5mL}{m+5m} = \frac{11}{12}L$$

Quindi, la lunghezza ridotta del pendolo vale:

$$l_{r2} = \frac{I_2}{x_2 6m} = \frac{32}{33}l = 0.97l$$

Il periodo delle piccole oscillazioni vale:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_{r2}}{g}} = 1.98\ s$$

Mentre se M viene posto in O :

$$I_3 = \frac{1}{3}mL^2$$

$$x_3 = \frac{mL/2}{m+M} = \frac{1}{12}L$$

Quindi, la lunghezza ridotta del pendolo vale:

$$l_{r3} = \frac{I_3}{x_3 6m} = \frac{2}{3}L$$

Il periodo delle piccole oscillazioni vale:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_{r3}}{g}} = 1.64\ s$$

Freno su disco

a) Il momento di inerzia del disco vale:

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

La II equazione cardinale della dinamica:

$$I\frac{d\omega}{dt} = -b\omega$$

La cui soluzione è:

$$\omega(t) = \omega_o e^{-tb/I}$$

Nel caso di $t = T$:

$$\omega(T) = 2.2\ rad/s$$

b) L'energia dissipata è pari alla variazione di energia cinetica rotazionale:

$$\Delta E_r = \frac{1}{2}I\omega_o^2\left(1 - e^{-2Tb/I}\right) = 9.5\ J$$

Anello in discesa

a) L'equazioni cardinali sono:

$$ma_{CM} = mg\sin\alpha - f$$

$$fr = I\frac{d\omega}{dt}$$

con $I = mr^2$ essendo un anello e per avere puro rotolamento:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{a_{CM}}{r}$$

sostituendo nella seconda equazione cardinale:

$$fr = mr^2\frac{a_{CM}}{r}$$

dalle due equazioni segue che:

$$a_{CM} = \frac{g}{2}\sin\alpha$$

$$f = \frac{mg}{2}\sin\alpha$$

per avere puro rotolamento:

$$\frac{mg}{2}\sin\alpha \leq \mu_s mg\cos\alpha$$

$$\tan\alpha \leq 2\mu_s$$

non essendo verificata il moto non è di puro rotolamento.

b)

$$a_{CM} = g\sin\alpha - \mu_d g\cos\alpha$$

essendo un moto accelerato uniforme:

$$s = \frac{1}{2}a_{CM}t^2$$

$v = a_{CM}t$

da cui:

$v = \sqrt{2sa_{CM}} = 5.1\ m/s$

Carrucola con due masse

L'equazione del moto per la massa 1:

$m_1g - T_1 = m_1a$

L'equazione del moto per la massa $2\ </math>, notare la stessa accelerazione (avendo scelto gli assi opposti):

$T_2 - m_2g = m_2a$

Mentre sulla carrucola agiscono i momenti:

$(T_1 - T_2)r = I\frac{d\omega}{dt}$

Da cui:

$T_1 = m_1(g - a)$

$T_2 = m_2(g + a)$

$(T_1 - T_2)r^2 = Ir\frac{d\omega}{dt}$

In realtà se il filo non slitta:

$r\frac{d\omega}{dt} = a$

a)

Eliminando le tensioni dalle tre equazioni:

$(m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a = \frac{I}{r^2}a$

$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + I/r^2}g = 0.87\ m/s^2$

b)

mentre in modulo:

$T_1 = m_1(g - a) = 26.7\ N$

$T_2 = m_2(g + a) = 21.3\ N$

c)

Essendo il moto delle masse uniforme accelerato, il tempo che impiega a fare una rotazione è:

$2\pi r = \frac{1}{2}at^2$

$t = \sqrt{\frac{4\pi r}{a}} = 2.4\ s$

Quantità di moto

Esercizi

Urto elastico

Un corpo di massa m_1 si muove con velocità costante v_0, quando urta in modo elastico un corpo di massa m_2 inizialmente fermo. Calcolare le velocità v_1 e $_2$ dei due corpi dopo l'urto approssimate alla **prima cifra dopo la virgola**. (se il risultato dovesse venire negativo è necessario far precedere il segno " - " prima del numero senza lasciare spazi, es:" -9 ". Il segno " + " può anche essere omesso

Questa esercitazione si divide in tre casi possibili:

1. $m_1 > m_2$ ($\mathbf{m_1}$ =*6kg*; $\mathbf{m_2}$ =*4kg*; $\mathbf{v_0}$ =*4m/s*)
2. $m_1 = m_2$ ($\mathbf{m_1}$ =*5Kg*; $\mathbf{m_2}$ =*5Kg*; $\mathbf{v_0}$ =*6m/s*)
3. $m_1 < m_2$ ($\mathbf{m_1}$ =*2Kg*; $\mathbf{m_2}$ =*8Kg*; $\mathbf{v_0}$ =*5m/s*)

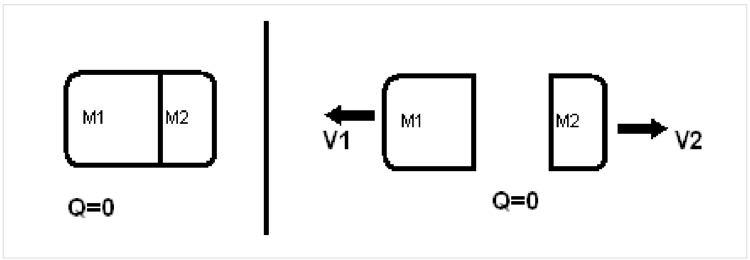
Urto anelastico

In una gara di pattinaggio artistico, due ballerini di massa 70 kg (lui) e 50 kg (lei), si corrono incontro con la stessa velocità di 4 m/s rispetto al suolo. Quando si incontrano,lui solleva lei dal suolo. Con quale velocità proseguono il moto insieme?

Urto anelastico inverso

Questa sezione è ancora vuota; aiutaci [1] a scriverla!

Esplosione



Una massa che inizialmente presenta uno stato di quiete, esplode e si divide in due pezzi, m_1= 15**Kg** e m_2=60**Kg**.

Supponendo che l'energia sprigionata dall'esplosione sia 4500 **J** e che tutta l'energia venga trasferita a m_1 e m_2 sotto forma di energia cinetica, calcolare le velocità v_1 e v_2 delle masse dopo l'esplosione approssimate alla **seconda cifra dopo la virgola**.

Muovendosi in direzioni opposte, una velocità sarà negativa.

Urto vario

Una sfera (un oggetto puntiforme) di massa m con velocità v_o urta in maniera centrale contro una seconda sfera di massa $2m$. Determinare la velocità finale della II pallina e il rapporto tra energia meccanica finale ed iniziale: a) nel caso di urto completamente anelastico; b) nel caso di urto elastico; c) Nel caso di urto anelastico con coefficiente di restituzione e .

(Dati del problema $v_o = 3\ m/s$, $e = 0.5$)

Soluzioni

Urto elastico

Questo esercizio può avere tre soluzioni, a seconda che la massa urtante sia uguale, maggiore o minore di quella urtata.

Prima verrà analizzata la formula generale, successivamente verranno affrontate caso per caso tutte le soluzioni.

Espressione generale

$$\begin{cases} m_1 m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{cases}$$

Possiamo dividere per m_2 la prima equazione (che sicuramente sarà diversa da 0) e moltiplicare per 2 la seconda ottenendo:

$$\begin{cases} \frac{m_1}{m_2} v_0 = \frac{m_1}{m_2} v_1 + v_2 \\ \frac{m_1}{m_2} v_0^2 = \frac{m_1}{m_2} v_1^2 + v_2^2 \end{cases}$$

Isolando il termine in v_2 nelle due equazioni otterremo:

$$\begin{cases} \frac{m_1}{m_2}(v_0 - v_1) = v_2 \\ \frac{m_1}{m_2}(v_0^2 - v_1^2) = v_2^2 \end{cases}$$

Sostituendo v_2 nella seconda equazione otterremo:

$$\frac{m_1}{m_2}(v_0^2 - v_1^2) = v_2 \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 (v_0 - v_1)^2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2}(v_0 - v_1)(v_0 - v_1) = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 (v_0 - v_1)^2$$

Semplificando m_1/m_2 e per $(v_0 - v_1)$ si avrà:

$$(v_0 + v_1) = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)(v_0 - v_1) \frac{m_1 - m_2}{m_2} v_0 \left(\frac{m_1 - m_2}{m_2}\right) = v_1 (\frac{m_1 + m_2}{m_2}$$

per trovare v_1

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0$$

Per trovare v_2

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0$$

Possiamo notare che la velocità v_2 avrà sempre lo stesso segno di v_0, mentre invece v_1 potrà assere negativa, positiva o nulla a seconda che m_1 sia maggiore, minore o uguale a m_2.

Analizziamo ora i casi che possiamo incontrare

$m_1 < m_2$

m_1= 2Kg

m_2= 8Kg

v_0=5m/s

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 = \frac{2 - 8}{2 + 8} 5 = \frac{-6}{10} 5 = -3m/s$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0 = \frac{2 \cdot 2}{2 + 8} 5 = \frac{4}{10} 5 = +2m/s$$

La massa m_1 rimbalza dopo l'urto.

$m_1 > m_2$

m_1=6Kg
m_2=4Kg
v_0=4m/s

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 = \frac{6-4}{6+6} 5 = \frac{+2}{10} 5 = +0.8 m/s$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0 = \frac{2 \cdot 6}{6+4} 5 = \frac{12}{10} 5 = +4.8 m/s$$

La massa m_1 prosegue dopo l'urto e m_2 acquista una velocità maggiore di m_1 prima dell'urto.

$m_1 = m_2$
m_1=5Kg
m_2=5Kg
v_0=6m/s

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 = \frac{5-5}{5+5} 6 = \frac{0}{10} 6 = 0 m/s$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0 = \frac{2 \cdot 5}{5+5} 6 = \frac{10}{10} 6 = +6 m/s$$

La massa m_1 si arresta dopo l'urto e m_2 acquista una velocità UGUALE a quella di m_1 prima dell'urto, cioè la quantità di moto e l'energia cinetica si trasferiscono interamente dalla massa m_1 ad m_2.

Urto anelastico

Poniamo:

$$v_1 = 4\frac{m}{s}$$

$$v_2 = -4\frac{m}{s}$$ (si muove in verso opposto)

Impostiamo poi la conservazione della quantità di moto:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m1 + m2) v_3$$

$$v_3 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{(m1 + m2)} = \frac{70kg \cdot 4\frac{m}{s} - 50kg \cdot 4\frac{m}{s}}{(70kg + 50kg)} = 0.66\frac{m}{s}$$

Urto anelastico inverso

Questa sezione è ancora vuota; aiutaci [1] a scriverla!

Esplosione

La quantità di moto iniziale uguale a 0 perché il sistema è fermo.

L'esplosione, che una forza interna, fa sì che la quantità di moto complessiva resti nulla anche dopo l'esplosione. Se l'energia sprigionata dall'esplosione si trasforma in sola energia cinetica e i due frammenti non ruotano, possiamo scrivere due equazioni. Si noti che i due frammenti si muovono sulla stessa retta.

$$\begin{cases} 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{cases}$$

Dividendo la prima equazione per m_1 e moltiplicando la seconda per 2 si ha:

$$\begin{cases} 0 = v_1 + \frac{m_2}{m_1} v_2 \implies v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2 \\ 2E = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2 \\ 2E = m_1(-\frac{m_2}{m_1} v_2)^2 + m_2 v_2^2 \implies 2E = \frac{m_2^2}{m_1} v_2^2 + m_2 v_2^2 \implies 2E = (\frac{m_2}{m_1}+1) m_2 v_2^2 \end{cases} v_2^2 = \frac{2E}{(\frac{m_2}{m_1}+1)m_2} \; v_2 = \sqrt{=}$$

Le velocità sono inversamente proporzionali alle masse e hanno segno opposto.

Urto vario

La velocità del centro di massa (CM) del sistema vale:

$$v_{CM} = \frac{mv_o}{3m} = \frac{v_o}{3}$$

Nel sistema del CM la quantità di moto dei due oggetti prima dell'urto vale:

$$|p_o'| = m(v_o - v_{CM}) = \frac{2}{3} m v_o$$

Dopo l'urto vale:

$$|p_f'| = e|p_o'| = e\frac{2}{3} m v_o$$

dove e è il coefficiente di restituzione che vale 0 per urto completamente anelastico, 1 urto elastico, e un valore intermedio negli altri casi. Quindi nel sistema del CM la velocità della II sfera dopo l'urto varrà:

$$v_{2f}' = \frac{|p_f'|}{2m} = e\frac{1}{3} v_o$$

Nel sistema del laboratorio:

$$v_{2f} = e\frac{1}{3} v_o + v_{CM} = \frac{v_o}{3}(1+e)$$

Mentre la I sfera:

$$v_{1f}' = -\frac{|p_f'|}{m} = -e\frac{2}{3} v_o$$

Quindi:

$$v_{1f} = -e\frac{2}{3} v_o + v_{CM} = \frac{v_o}{3}(1-2e)$$

L'energia cinetica iniziale vale:

$$E_o = \frac{1}{2} m v_o^2$$

Quella finale:

$$E_f = \frac{1}{2} m v_{1f}^2 + \frac{1}{2} 2 m v_{2f}^2 = \frac{1}{2} m \frac{v_o^2}{9} [2(1+e)^2 + (1-2e)]$$

quindi il rapporto tra energia finale e iniziale vale:

$$R = \frac{1}{9}[2(1+e)^2 + (1-2e)^2] = \frac{1+2e^2}{3}$$

a)

Nel caso completamente anelastico $e = 0$:

$$v_f = \frac{v_o}{3} = 1\ m/s$$

$$R = \frac{1}{3}$$

b)

Nel caso elastico $e = 1$:

$v_f = \frac{2}{3} v_o = 2\ m/s$

$R = 1$

c)

Nel caso anelastico $e = 0.5$:

$v_f = \frac{1}{2} v_o = 1.5\ m/s$

$R = \frac{1}{2}$

Note

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Esercizi_di_fisica_con_soluzioni%2Fquantit%C3%A0_di_moto?action=edit&section=

Proprietà meccaniche dei fluidi

Un cubo di ghiaccio con il lato 40 cm è immerso in un liquido. Quant'è il volume del cubo immerso? Quanto vale la spinta di archimede?

TODO

aggiungere la soluzione

Questo modulo è solo un abbozzo. a migliorarlo secondo le convenzioni di Wikibooks

Termodinamica

Calore

Esercizi

Acqua e ghiaccio

Una certa quantità incognita di acqua a temperatura T_2viene aggiunta ad un bicchiere pieno di m_g grammi di ghiaccio a T_1. Nel processo si sciolgono Δm_g grammi di ghiaccio. Determinare la quantità di acqua aggiunta.
A questo punto il sistema viene lasciato a se stesso e tutto il ghiaccio si scioglie in t_1; quanto vale la potenza termica che entra nel sistema?
(Dati: $m_g = 100\ g$, $\Delta m_g = 30\ g$, $T_2 = 20\ ^oC$, $T_1 = -10\ ^oC$, calore di fusione del ghiaccio $\lambda = 3.3 \dot{1} 0^5 J/kg$, calore specifico del ghiaccio $c_g = 2051\ J/kgK$, $t_1 = 40\ minuti$)

Rame e alluminio

Un blocco di alluminio di massa m_1, temperatura T_1, calore specifico c_1 è posto in contatto con un blocco di rame m_2, temperatura T_2, calore specifico c_2. Determinare la temperatura di equilibrio.
(dati del problema $m_1 = 5\ g$, $T_1 = 250\ K$, $c_1 = 910\ Jkg^{-1}K^{-1}$, $m_2 = 15\ g$, $T_2 = 375\ K$, $c_2 = 390\ Jkg^{-1}K^{-1}$)

Soluzioni

Acqua e ghiaccio

Detto $c_a = 4180 J/kgK$ il calore specifico dell'acqua e $T_0 = 0\ ^oC$. Dovendo essere:

$$m_a c_a (T_2 - T_0) = m_g c_g (T_0 - T_1) + \lambda \Delta m_g$$

segue che:

$$m_a = 143\ g$$

La quantità di calore necessaria a sciogliere tutto il ghiaccio vale:

$$Q_t = \lambda (m_g - \Delta m_g) = 23\ kJ$$

Quindi corrisponde ad una potenza termica di:

$$W = \frac{Q_t}{t_1} = 9\ W$$

Rame e alluminio

$m_1c_1(T_e - T_1) = m_2c_2(T_2 - T_e)$

Quindi:

$$T_e = \frac{m_1c_1T_1 + m_2c_2T_2}{m_1c_1 + m_2c_2} = 321\ K$$

Il I principio della termodinamica

Esercizi

Isobara irreversibile

Alla temperatura T_0e alla pressione $p_0$una certa quantità di idrogeno (gas biatomico, ideale) occupa un volume V_0 . Ad un certo istante il gas viene messo a contatto con una sorgente di calore ad una certa temperatura. Se si aspetta un tempo sufficientemente lungo, il volume del gas raddoppia mentre la pressione rimane eguale. Determinare la temperatura finale del gas e la variazione di energia interna del gas.

(dati del problema $T_0 = 0\ ^oC$, $p_0 = 10^5\ Pa$, $V_0 = 0.0015\ m^3$)

Adiabatica gas perfetto

Una mole di un gas perfetto biatomico si espande adiabaticamente (reversibilmente) fino ad occupare un volume doppio di quello iniziale determinare la temperatura finale e il lavoro fatto.

(dati del problema temperatura iniziale $T_1 = 127\ ^oC$)

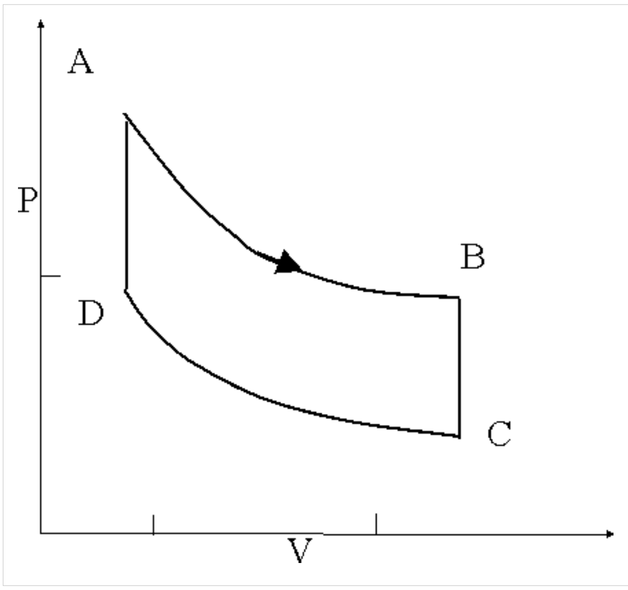
Adiabatica con recipiente

n moli di un gas monoatomico ideale sono contenute in un recipiente metallico di capacità molare $3R$ e di numero di moli αn . Il gas esegue una trasformazione reversibile adiabatica. Determinare il valore del coefficiente γ (equivalente) della trasformazione adiabatica in funzione di α .

(dati del problema $\alpha = 0.1, 1, 10$)

Ciclo di Stirling

Un ciclo di Stirling consiste di due isoterme a temperatura T_1e T_2e due isocore a volume V_A e l'altra a volume V_B . Il ciclo viene eseguito da un gas monoatomico con quindi capacità molare a volume costante pari a $c_v = 3/2R$. Immaginando che il ciclo venga percorso per stati di equilibrio termodinamico ed in particolare che le due isoterme siano reversibili.



Determinare il rendimento del ciclo:

a) Nel caso che le isocore siano reversibili.

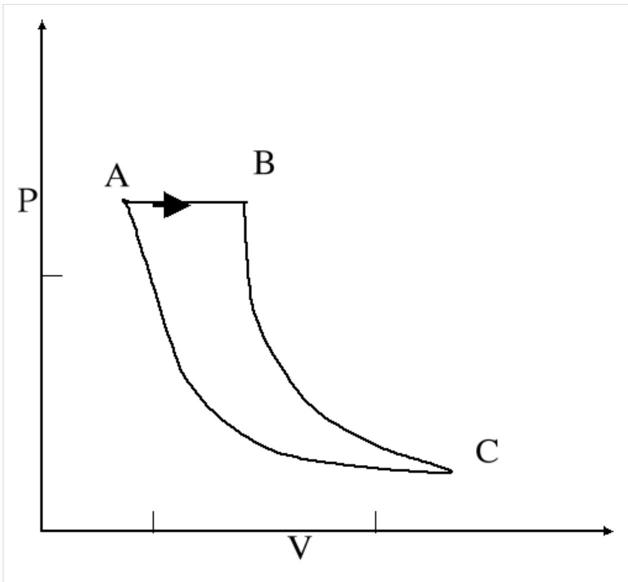
b) Nel caso che vi siano due sole sorgenti di temperatura.

c) Nel caso vi sia una sorgente di calore a temperatura intermedia tra T_1e T_2.

(dati del problema $T_1 = 310\ K$, $T_2 = 500\ K$, $V_A = 0.002\ m^3$, $V_B = 0.004\ m^3$)

Ciclo anomalo

Una mole di elio, gas monoatomico, alla temperatura T_A , occupa inizialmente il volume V_A . Al gas viene fatta compiere una trasformazione isobara, per stati di equilibrio termodinamico, che porta il volume in B , una trasformazione adiabatica reversibile lo porta in C che ha un volume doppio dello stato iniziale. Infine una trasformazione isoterma $C- > A$ reversibile riporta il sistema nello stato iniziale.



Determinare:

a) La temperatura in B.

b) Il lavoro fatto globalmente

c) Il rendimento del ciclo.

(dati del problema $T_A = 300\ K$, $V_A = 0.001\ m^3$)

Ciclo di Carnot in Antartide

Se venisse fatta una macchina termica ideale di Carnot che utilizzasse come sorgente fredda il ghiaccio al punto di fusione T_1(con calore latente di fusione λ) e come sorgente calda l'oceano alla sua temperatura media T_2. Quale sarebbe la quantità di ghiaccio che si scioglierebbe in un'ora per produrre una potenza di P_o ?

(dati del problema $T_1 = 0\ ^oC$, $T_2 = 4\ ^oC$, $P_1 = 10^7\ J/K$, $\lambda = 3.3 \cdot 10^5\ J/kg$, $P_o = 1\ GW$)

Soluzioni

Isobara irreversibile

La trasformazione è isobara irreversibile.

Il numero di moli n vale:

$$n = \frac{p_0 V_0}{R T_0} = 0.066\ moli$$

L'equazione di stato permette di calcolare la temperatura finale T_1:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_0 2 V_0}{T_1}$$

$$T_1 = 2T_0 = 546\ K$$

La variazione di energia interna vale:

$$\Delta U = n c_v (T_1 - T_0) = 367\ J$$

sapendo che:b

$$c_v = \frac{5}{2} R$$

Adiabatica gas perfetto

Essendo:

$$T_1 = 273 + 127 = 400\ K$$

Dalla relazione:

$$T V^{\gamma - 1} = cost$$

segue che essendo $\gamma = 1.4$:

$$T_f = T_1 (0.5)^{0.4} = 302\ K$$

Quindi l'energia interna ò diminuita di:

$$DU = \frac{5}{2} R (T_f - T_1) = -2040\ J$$

che è pari (a meno del segno con il lavoro compiuto):

$$W = -DU = 2040\ J$$

Adiabatica con recipiente

Essendo in questo caso, in un intervallo qualsiasi della trasformazione adiabatica reversibile:

$$dU = n\frac{3}{2}RdT + \alpha n3RdT$$

$$pdV = nRT\frac{dV}{V}$$

Imponendo la condizione di adiabaticità:

$$dU + pdV = 0$$

$$n\frac{3}{2}RdT + \alpha n3RdT + nRT\frac{dV}{V} = 0$$

separando le variabili:

$$\frac{3+6\alpha}{2}\frac{dT}{T} = -\frac{dV}{V}$$

Quindi:

$$VT^{(3+6\alpha)/2} = cost$$

$$TV^{2/(3+6\alpha)} = cost$$

Imponendo, come in tutte le adiabatiche che:

$$\gamma - 1 = \frac{2}{3+6\alpha}$$

$$\gamma = 1 + \frac{2}{3+6\alpha}$$

per $\alpha = 0.1$

$$\gamma = 1.55$$

per $\alpha = 1$:

$$\gamma = 1.22$$

per $\alpha = 10$:

$$\gamma = 1.03$$

Ciclo di Stirling

Detti A e B gli estremi della isoterma superiore, e C e D quelli della isoterma inferiore, per le isocore vale:

$$V_A = V_D$$

$$V_B = V_C$$

quindi nel caso specifico:

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D} = 2$$

Il calore assorbito durante l'isoterma a temperatura più alta vale:

$$Q_{AB} = nRT_2 \ln\frac{V_B}{V_A} = nRT_2 \ln 2$$

Il calore ceduto durante l'isoterma a temperatura più bassa vale:

$$Q_{CD} = nRT_1 \ln\frac{V_D}{V_C} = -nRT_1 \ln 2$$

Il calore scambiato nelle due isocore è sempre eguale e contrario:

$Q_{BC} = -Q_{DA} = nc_v(T_1 - T_2)$ Quindi il lavoro prodotto è lo stesso nei tre casi:

$W = Q_{AB} + Q_{CD} = nR\ln 2(T_2 - T_1)$

a)

Nel primo caso il calore fornito dalla sorgente a temperatura più alta è solo Q_{AB}. Vi deve essere un numero infinito di sorgenti tra temperatura T_1e T_2le quali forniscono calore nella isocora in salita ed assorbono la stessa quantità di calore nella isocora in discesa. Quindi:

$$\eta_1 = \frac{W}{Q_{AB}} = \frac{nR\ln 2(T_2 - T_1)}{nRT_2\ln 2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 0.38$$

b)

Nel secondo caso la sorgente a temperatura maggiore deve fornire anche il calore:

$$Q_{DA} = nc_v(T_2 - T_1)$$

oltre a Q_{AB} quindi:

$$\eta_2 = \frac{W}{Q_{AB} + Q_{DA}} = \frac{\ln 2(T_2 - T_1)}{T_2\ln 2 + 3/2(T_2 - T_1)} = 0.21$$

c)

Nel terzo caso essendovi una sorgente a temperatura intermedia:

$$T_3 = \frac{T_1 + T_2}{2} = 405\ K$$

La sorgente a temperatura più alta fornisce una quantità di calore inferiore rispetto al caso b) in quanto deve portare il gas solo da T_3a T_2. Quindi il calore fornito vale:

$$Q_A = Q_{AB} + nc_v(T_2 - T_3)$$

Il rendimento del ciclo vale:

$$\eta_3 = \frac{W}{Q_{AB} + nc_v(T_2 - T_3)} = \frac{\ln 2(T_2 - T_1)}{T_2\ln 2 + 3/2(T_2 - T_1)} = 0.3$$

Ciclo anomalo

a)

Nello stato C essendo $T_C = T_A$, $V_C = 2V_A$, dovrà essere $p_C = p_A/2$. Essendo l'elio un gas monoatomico $\gamma = 1.67$

Nello stato C $p_B = p_A = 2p_C$ e quindi:

$$p_B V_B^\gamma = p_C V_C^\gamma = \frac{p_B}{2}(2V_A)^\gamma$$

$$V_B = 2V_A(2)^{-1/\gamma} = 0.0013\ m^3$$

$$T_B = 2T_A(2)^{-1/\gamma} = 390\ K$$

b)

Durante la isobara il calore assorbito vale:

$$Q_{AB} = nc_p(T_B - T_A) = \frac{5}{2}R(T_B - T_A) = 1871\ J$$

Durante la adiabatica non viene scambiato calore. Mentre durante la isoterma:

$$Q_{CA} = L_{CA} = nRT_A\ln\frac{V_A}{V_C} = -1729\ J$$

Quindi il lavoro prodotto per il primo principio della termodinamica vale:

$$W_{ciclo} = Q_{AB} + Q_{CA} = 142\ J$$

c)

Il rendimento vale:

$$\eta = \frac{W_{ciclo}}{Q_{AB}} = 0.076$$

Ciclo di Carnot in Antartide

Il rendimento massimo possibile vale:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 0.014$$

Questo vuol dire che dato che in un'ora:

$$W = P_o \times 3600 = 3.6 \cdot 10^{12}\ J$$

$$Q_A = \frac{W}{\eta} = 2.6 \cdot 10^{14}\ J$$

$$Q_C = W - Q_A = (1 - \frac{1}{\eta})W$$

Se divido per λ :

$$m_g = \frac{-Q_C}{\lambda} = \frac{(1/\eta - 1)W}{\lambda} = 7.7 \cdot 10^8\ kg/h$$

Elettromagnetismo

Elettrostatica

Esercizi

Forza elettrica e gravitazionale

Calcolare il rapporto tra l'attrazione elettrica F_e tra un protone ed un elettrone e l'attrazione gravitazionale F_g.

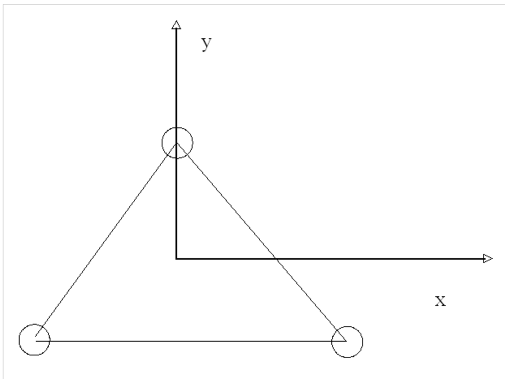
Quattro cariche eguali

Quattro cariche eguali Q sono poste su ognuno degli spigoli di un quadrato di lato l (piano xy). Determinare il modulo del campo elettrico generato da una singola carica e dall'insieme delle cariche in un punto sull'asse del quadrato a distanza l (cioè sull'asse z nel punto $(0, 0, l)$ se l'origine è al centro del quadrato).
(dati del problema $Q = 6\ \mu C$, $l = 1\ m$)

Tre cariche eguali

Tre cariche eguali q praticamente puntiformi sono poste nel vuoto ai vertici di un triangolo equilatero di lato l. Quale carica q_o va posta nel centro del triangolo affinché la forza che agisce su ciascuna carica risulta nulla.?

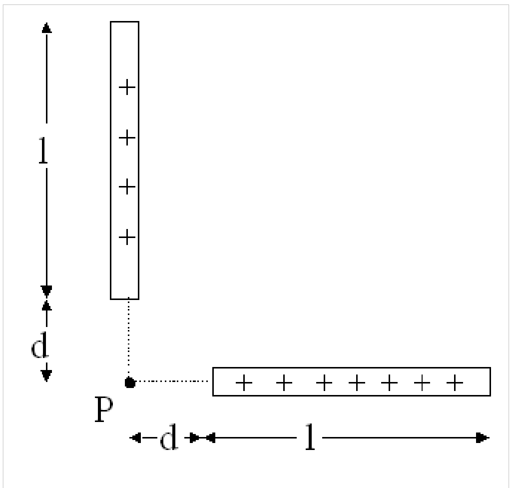
(dati del problema $q = 0.1\ \mu C$)



Due sbarrette perpendicolari

Due sbarrette sottili di materiale isolante, lunghe l, sono disposte perpendicolarmente tra di loro. Detta d la distanza del punto P dalla estremità delle due sbarrette. Su ciascuna sbarretta è distribuita uniformemente una carica q. Determinare l'intensita' del campo elettrico in P.

(dati del problema $l = 1\ m$, $q = 5\ nC$, $d = 0.1\ m$)



Dipoli differenza di potenziale

Un dipolo: due cariche q di segno opposto nel vuoto, sono poste ad una distanza d. Determinare la differenza di potenziale (rispetto all'infinito) esatta ed approssimata, in un punto a distanza $3d$, la cui congiungente con il centro delle cariche forma un angolo di θ con la congiungente delle cariche stesse.

(dati del problema $q = 5\ nC$, $d = 3\ cm$, $\theta = 20^o$)

Un disco uniformemente carico

Calcolare il campo elettrico generato sull'asse di un disco di raggio R posto nel vuoto su cui è distribuita uniformente una carica Q .

Un disco sottile conduttore

Un disco sottile conduttore di raggio R ha una carica totale Q . La densità di carica superficiale varia con la distanza r dal centro secondo la legge:

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi R\sqrt{R^2 - r^2}}$$

Dimostrare che la carica totale sia davvero Q e determinare il valore del campo elettrico lungo l'asse del disco.

Otto cariche eguali

Otto cariche eguali Q sono disposte sui vertici di un cubo di lato a . Assunto un sistema di riferimento con origine al centro del cubo e con assi delle coordinate paralleli agli spigoli del cubo. Determinare il campo elettrico su uno qualsiasi degli assi delle coordinate a distanza αa dall'origine, confrontando tale valore con il campo calcolato approssimativamente (ipotesi di una carica puntiforme equivalente al centro). Inoltre scrivere la formula esatta per α generico.

(dati del problema: $a = 1\ cm$, $Q = 1\ nC$, $\alpha = 3$)

Quattro cariche di segno opposto

Sui vertici di un quadrato di lato l sono disposte delle cariche eguali in modulo Q , ma di segno opposto. In maniera che vertici vicini hanno carica opposta. Determinare il modulo della forza elettrica che agisce su ogni carica.

(dati del problema $Q = 6\ mC$, $l = 1\ m$)

Un dipolo

Un dipolo: due cariche q di segno opposto nel vuoto, sono poste ad una distanza d . Determinare il rapporto tra l'intensità esatta ed approssimata del campo elettrico ad una distanza $2d$ dal loro centro, in un punto la cui congiungente con il centro delle cariche forma un angolo di θ con la congiungente delle cariche stesse.

(dati del problema $q = 1\ nC$, $d = 1\ cm$, $\theta = 45^o$)

Due condensatori incrociati

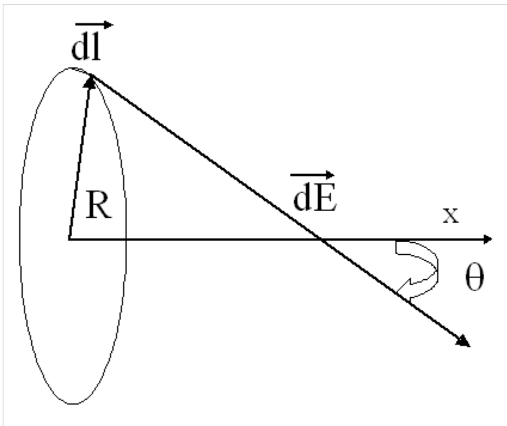
Due condensatori C_1 e C_2 sono separatamente portati alle tensioni V_1 e V_2. A un certo istante il morsetto positivo di ognuno viene connesso a quello negativo dell'altro tramite dei fili resistivi (il cui valore non interessa ai fini del problema). Determinare la tensione di C_1 e C_2 dopo il collegamento.
(dati del problema $C_1 = 1\ \mu F$, $C_2 = 10\ \mu F$, $V_1 = 20\ V$, $V_2 = 30\ V$)

Un condensatore a facce piane

Un condensatore a facce piane e parallele ha una capacità a vuoto C_o, è collegato ad una batteria di f. Se tra le armature del condensatore viene inserito un materiale isolante si trova che la carica varia di ΔQ . Determinare la costante dielettrica dell'isolante ed il lavoro compiuto dalla batteria per mantenere costante la differenza di potenziale ai capi del condensatore.
(dati del problema $\Delta Q = 40\ nC$, $f = 12\ V$, $C_o = 50\ nF$)

Una spira circolare carica

Calcolare il campo elettrico generato sull'asse di una spira circolare filiforme di raggio R posta nel vuoto in cui è distribuita uniformente una carica Q . Discutere i casi limite: $x \longrightarrow 0$ e $x >> R$

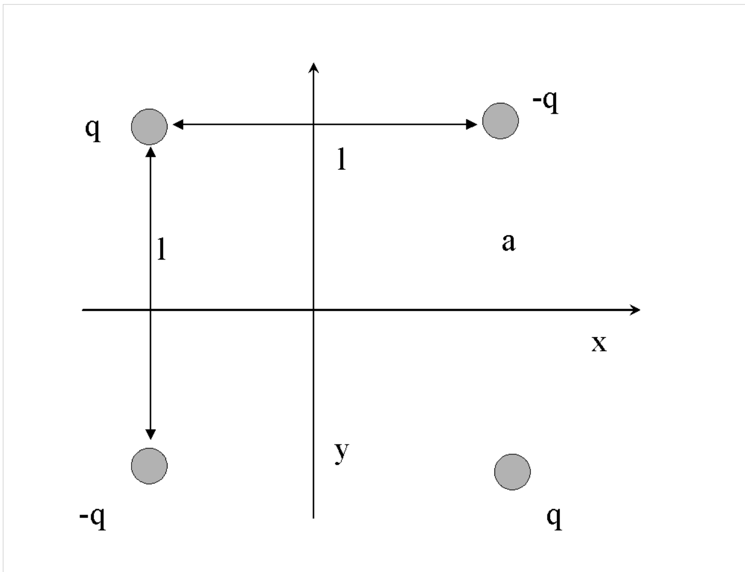


Un semplice quadrupolo

Sui vertici di un quadrato di lato l sono disposte delle cariche eguali in modulo q, ma di segno opposto. In maniera che vertici vicini hanno carica opposta.

Scrivere l'espressione del campo elettrico lungo l'asse delle x, ed in particolare calcolarne il valore per $x = 0, l, 10l$.

(dati del problema $q = 4\ \mu C$, $l = 10\ cm$)

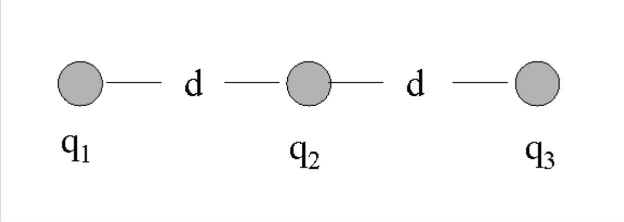


Una sbarretta sottile isolante

Una sbarretta sottile di materiale isolante ha una lunghezza l . Su di essa è distribuita uniformente una carica q. Assunto un riferimento cartesiano con asse x coincidente con la direzione della sbarretta e origine nel suo centro. Trovare per quali d sono di pari intensità i campi elettrici in (d,0) e (0,d) a meno dell'1\%. (dati del problema $l = 1\ m$, $q = 5\ nC$)

Tre particelle cariche

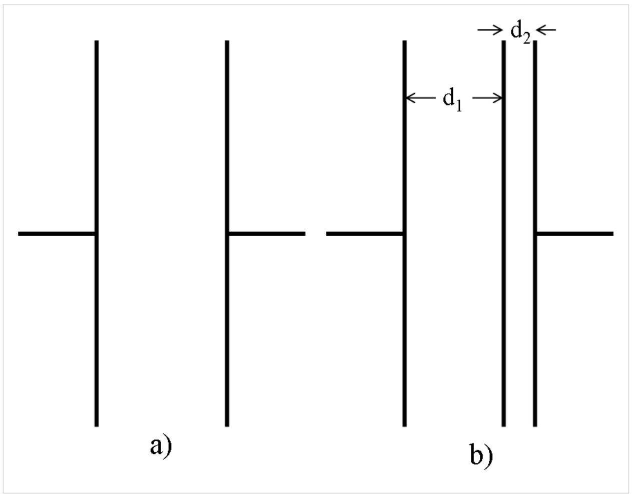
Tre particelle cariche sono poste come in figura, separate da una distanza d. Le cariche q_1 e q_2 sono tenute ferme, da forze non elettriche, mentre la carica q_3 soggetta alla sola forza elettrica è in equilibrio. Si determini il valore di q_1 e la forza elettrica che agisce sulla carica 1.



(dati del problema $q_2 = 1\ nC$, $q_3 = 2\ nC$, $d = 1\ cm$)

Un condensatore con una lastra

Un condensatore a facce piane e parallele ha una capacità C_o (figura a). Tra le sue armature viene inserita come in figura b) una lastra metallica di spessore trascurabile. Se la lastra viene mantenuta isolata mentre tra le armature estreme viene messa una carica Q e $-Q$ determinare la differenza di potenziale della lastra centrale con le due armature. Determinare inoltre la capacità totale se la lastra inserita viene messa in contatto con l'armatura di destra.



(dati del problema $Q = 3\ nC$, $d_1 = 4d_2$, $C_o = 100\ pF$)

Spessore strato carico in un conduttore

Una lastra di rame, in cui il numero di elettroni liberi nell'unità di volume nale n, genera un campo elettrico sulla sua superficie di intensità pari a E_o. Determinare lo spessore dello strato di elettroni necessario a generare un tale campo.

(dati del problema $n = 8.5 \cdot 10^{28}\ m^{-3}$, $E_o = 10^7\ V/m$)

Anello carico

Su un anello di raggio R è distribuita uniformemente la carica q. Una particella di carica $-q$ viene posta con velocità nulla a distanza R dal centro. Determinare la velocità della particella quando passa per l'origine (immaginando che la particella sia vincolata a muoversi sull'asse normale al piano passante per il centro dell'anello).

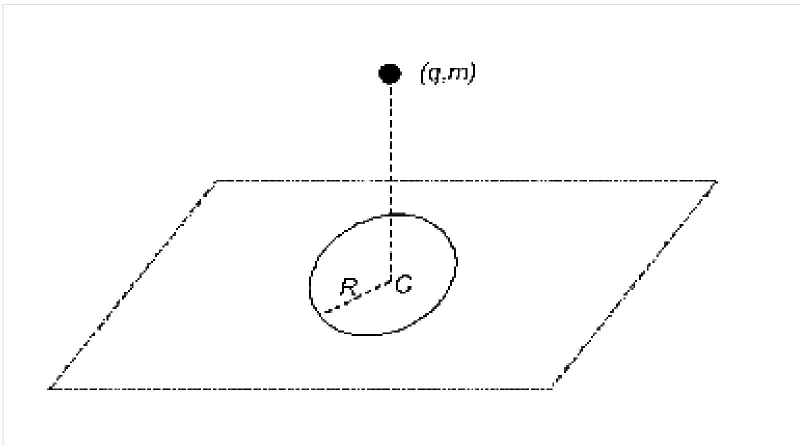
(dati del problema $q = 10^{-6}\ C$, $R = 10\ cm$, $m = 1\ g$)

Due dipoli

Due dipoli elettrici di piccole dimensioni sono eguali e posti sullo stesso asse a distanza z. a) Determinare la forza con cui attraggono. b) Se invece sono sempre posti alla stessa distanza, ma ortogonali, quale è il momento della forza che si esercita tra di loro?

(dati del problema $|p| = 10^{-10}\ Cm$, $z = 1\ cm$)

Piano con foro



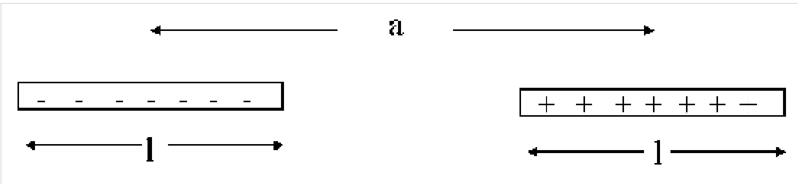
Una particella dotata di carica q e massa m si trova in prossimità di un piano orizzontale isolante carico con densità di carica uniforme σ in cui è praticato un foro circolare di raggio R e centro C.

1) Si calcoli l'altezza h_o rispetto a C del punto lungo l'asse del foro in cui la particella è in equilibrio.

2) Se la particella è inizialmente ferma lungo l'asse ad un'altezza $h_o/2$ rispetto a C, osservando che la particella attraversa il centro del foro, quale sarà la sua velocità?

(Dati del problema: $q = 1\ nC$, $m = 1\ mg$, $\sigma = 1\ \mu C/m^2$, $R = 1\ m$. Si intende che agiscono sulla particella sia le forze elettrostatiche che la forza peso)

Due sbarre allineate



Due sbarrette sottili di lunghezza l sono cariche uniformemente con una carica $-q$ e q come mostrato in figura. Le sbarrette sono disposte secondo l'asse delle x con i loro centri distanti a.

Determinare il campo generato nel centro del sistema (origine delle coordinate) e nel punto $10a$ (sull'asse delle x). (Nel secondo punto eventualmente si può approssimare il sistema con un dipolo equivalente).

(Dati del problema $l = 5\ cm$, $q = 10\ nC$, $a = 20\ cm$)

Anello con distribuzione dipolare

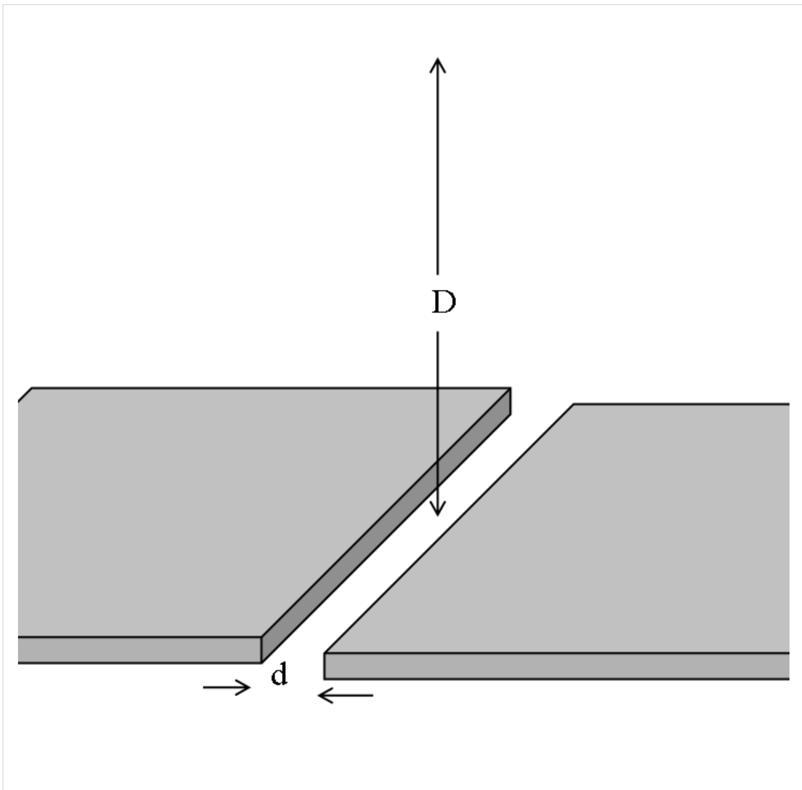
Un anello che giace nel piano x,y ed ha raggio R, ha una carica che varia lungo la circonferenza secondo la legge:

$\lambda = A \sin\theta$

dove θ è l'angolo con l'asse delle x per cui la carica è positiva per $y > 0$ e negativa per $y < 0$. Determinare 1) la carica totale di mezzo anello per $y > 0$; 2) l'espressione del campo elettrico nei punti lungo l'asse z ed in particolare per $z = R$; 3) il dipolo elettrico equivalente del sistema .
(dati del problema $R = 1\ cm$, $A = 10^{-9}\ C/m$)

Piano tagliato

Un piano infinito carico con una densità di carica uniforme σ ha uno stretto taglio di dimensioni d. Determinare il campo generato sulla normale al taglio a grande distanza da D ($d \ll D$).



Goccia d'olio

Una goccia sferica di olio (liquido isolante) ha una carica distribuita uniformemente al suo interno di Q_o e sulla sua superfice un campo elettrico pari a E_o. Determinare a) il raggio R_o della sfera b) la differenza di potenziale tra la superfice della goccia ed il suo centro c) l'energia necessaria a creare tale distribuzione di carica e come cambria tale energia se la goccia di spezza in due frammenti identici sferici di pari densità (elettrica e di massa) separati ad una distanza molto maggiore delle loro dimensioni (praticamente all'infinito).

(dati del problema $Q_o = 1\ nC$, $E_o = 10^6\ V/m$)

Soluzioni

Forza elettrica e gravitazionale

L'attrazione gravitazionale tra un protone ed un elettrone può essere espressa come:

$$F_g = G\ \frac{m_p\ m_e}{r^2}$$

Con m_p abbiamo indicato la massa del protone,

$$m_p = 1.672623 \cdot 10^{-27}\ kg$$

mentre con m_e indichiamo la massa dell'elettrone,

$$m_e = 9.109389 \cdot 10^{-31}\ kg$$

L'attrazione elettrostatica, sempre tra un protone ed un elettrone, vale:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\ \frac{e^2}{r^2}$$

Con e abbiamo indicato sia la carica del protone che la carica dell'elettrone,

$$e = 1.60217733 \cdot 10^{-19}\ C$$

Dato che le due forze dipendono nello stesso modo dalla distanza, il loro rapporto ne è indipendente, a qualsiasi distanza, quindi:

$$R = \frac{F_e}{F_g} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\ \frac{e^2}{G\ m_p m_e} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{6.7 \cdot 10^{-11} \cdot (1.67 \cdot 10^{-27}) \cdot (9.1 \cdot 10^{-31})} \approx 2 \cdot 10^{39}$$

Quattro cariche eguali

La distanza di ogni carica dal punto dato vale:

$$r = \sqrt{l^2/2 + l^2} = l\sqrt{3/2}$$

Ognuna delle cariche genera un campo in modulo pari a:

$$|E| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{Q}{6\pi\varepsilon_o l^2} = 3.6 \cdot 10^3 \ V/m$$

La componente di tale campo nella direzione del piano del quadrato si annulla con quella dello spigolo opposto. Per cui solo la componente lungo l'asse del quadrato non è nulla ed eguale per tutti gli spigoli:

$$E_a = |E|\frac{l}{r} = \frac{Q}{6\pi\varepsilon_o l^2}\frac{l}{r} = \frac{Q}{6\pi\varepsilon_o l^2}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Quindi sommando i 4 contributi:

$$|E_t| = \frac{4Q}{6\pi\varepsilon_o l^2}\sqrt{\frac{2}{3}} = 1.17 \cdot 10^5 \ V/m$$

Tre cariche eguali

Se definiamo 1 e 2 le cariche in basso e 3 quella in alto disponendole come in figura. Detto l il lato del triangolo:

$$|F_{13}| = |F_{23}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{l^2}$$

Le componenti delle due forze nella direzione x si annullano a vicenda per cui rimane solo la componente lungo y se definisco θ l'angolo formato dalla verticale con i lati obliqui del rettangolo. Tale angolo vale 30^o. Quindi la componente lungo l'asse y di tali forze valgono:

$$F_{13y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{l^2}\cos\theta$$

Quindi la forza totale vale:

$$F_{ty} = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{l^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{l^2}\sqrt{3}$$

Mentre la forza della carica al centro che dista dai vertici: $x = l/\sqrt{3}$ è diretta verso la direzione y e vale:

$$F_{0y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_o q}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_o q}{(l/\sqrt{3})^2}$$

Affinché la forza totale sia nulla:

$$\frac{qq_o}{4\pi\epsilon_o(l/\sqrt{3})^2} + \frac{q^2\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_o l^2} = 0$$

quindi:

$$q_o = -q\frac{\sqrt{3}}{3} = -58 \ nC$$

Due sbarrette perpendicolari

Detto:

$$\lambda = \frac{q}{l}$$

Il campo generato dalla prima barretta vale:

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_d^{d+l}\frac{\lambda dx}{x^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{l}\left[\frac{1}{d}-\frac{1}{d+l}\right] = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o d(d+l)}$$

Per simmetria quello generato dall'altra sbarretta vale:

$$E_y = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o d(d+l)}$$

Quindi l'intensità del campo vale: $|E| = \frac{q\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_o d(d+l)} = 578\ V/m$

Dipoli differenza di potenziale

Assunta origine sul centro del dipolo e asse delle x coincidente con l'asse del dipolo. Le coordinate del punto valgono:

$$x_1 = 3d\cos\theta = 0.085\ m$$

$$y_1 = 3d\sin\theta = 0.031\ m$$

Quindi il punto dista dalla carica positiva:

$$d_1 = \sqrt{(x_1 - d/2)^2 + y_1^2} = 0.076\ m$$

e da quella negativa:

$$d_2 = \sqrt{(x_1 + d/2)^2 + y_1^2} = 0.104\ m$$

Il potenziale esatto vale:

$$V_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}q\left(\frac{1}{d_1}-\frac{1}{d_2}\right) = 160\ V$$

Mentre quello approssimato vale:

$$V_a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qd3d\cos\theta}{(3d)^3} = 156\ V$$

Un disco uniformemente carico

La densità di carica superficiale vale: $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$

Seguendo la falsariga dell'esercizio sulla spira carica in cui una spira di raggio r e con carica Q distribuita uniformemente sull'anello $\lambda = Q/2\pi r$, generava un campo su un punto generico dell'asse:

$$E_x = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_o}\frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

Se consideriamo i differenziali equivalenti:

dE_x invece di E_x.

e $dQ = \sigma 2\pi r dr = (2Qrdr)/(R^2)$ invece di Q .

Si ha che:

$$dE_x = \frac{Q2rdr}{4\pi R^2\varepsilon_o}\frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

Quindi:

$$E_x = \frac{Qx}{4\pi R^2\varepsilon_o}\int_0^R \frac{2rdr}{(x^2+r^2)^{3/2}} = \frac{Qx}{4\pi R^2\varepsilon_o}\left[\frac{-2}{(r^2+x^2)^{1/2}}\right]_0^R = \frac{2Q}{4\pi R^2\varepsilon_o}\left[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right]$$

Notare che per $x \ll R$ si può approssimare E_x facendo lo sviluppo di Taylor del termine all'interno delle parentesi quadre con: $\left[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right] \approx \frac{R^2}{2x^2}$

quindi quando $x \ll R$ si ha che lungo l'asse il campo vale:

$$E_x = \frac{Q}{4\pi x^2\varepsilon_o}$$

come quello di una carica puntiforme posta sull'asse.

Un disco sottile conduttore

Un generico elemento della superficie del disco in cui la densità di carica ha lo stesso valore è una corona circolare di raggio r e larghezza dr la cui superficie vale $dS = 2\pi r dr$ e quindi la carica in tale superficie vale:

$$dQ = 2\pi r dr\sigma = \frac{Qrdr}{R\sqrt{R^2-r^2}}$$

La carica totale sul disco si ottiene integrando tale espressione tra 0 ed r :

$$\frac{Q}{R}\int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{R^2-r^2}} = \frac{Q}{R}\left[-\sqrt{R^2-r^2}\right]_0^R = Q$$

che è quanto si voleva dimostrare.

Tale elemento elementare di superficie può considerarsi a tutti gli effetti un anello di carica dQ e raggio $0 \geq r \leq R$ che genera in un punto generico x del suo asse un campo (diretto lungo l'asse) di intensità:

$$dE_x = \frac{dQx}{4\pi\varepsilon_o(x^2+r^2)^{3/2}}$$

Ma essendo $dQ = 2\pi r dr\sigma$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Qrdr}{R\sqrt{R^2-r^2}(x^2+r^2)^{3/2}}$$

Quindi il campo totale vale:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Qx}{R}\int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{R^2-r^2}(x^2+r^2)^{3/2}} = = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Qx}{R}\left[-\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{\sqrt{r^2+x^2}(R^2+x^2)}\right]_0^R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{QxR}{Rx(R^2+x^2)} =$$

Otto cariche eguali

La distanza tra il punto e le 4 cariche vicine del cubo vale:

$$d_1 = \sqrt{(a\alpha - a/2)^2 + a^2/4} = 0.0255\ m$$

L'unica componente del campo che non si compensa tra spigolo opposti è quella lungo l'asse delle x quindi essendo il coseno dell'angolo formato con l'asse delle x :

$$\cos\theta_1 = \frac{\alpha a - a/2}{\sqrt{(a\alpha - a/2)^2 + a^2/4}} = 0.981$$

Analogamente per le cariche lontane:

$$d_2 = \sqrt{(a\alpha + a/2)^2 + a^2/4} = 0.035\ m$$

$$\cos\theta_2 = \frac{\alpha a + a/2}{\sqrt{(a\alpha + a/2)^2 + a^2/4}} = 0.99$$

Quindi il valore del campo esatto, nella sola direzione x, vale:

$$E_e = \frac{q}{\pi\varepsilon_o}\left(\frac{\cos\theta_1}{d_1^2} + \frac{\cos\theta_2}{d_2^2}\right) = 8.3\cdot 10^4\ V/m$$

Mentre quello approssimato vale:

$$E_a = \frac{2q}{\pi\varepsilon_o(\alpha a)^2} = 8\cdot 10^4\ V/m$$

La formula generale vale: $E_e = \frac{q}{\pi\varepsilon_o a^2}\left\{\frac{\alpha - 1/2}{[(\alpha-1/2)^2+1/4]^{3/2}} + \frac{\alpha+1/2}{[(\alpha+1/2)^2+1/4]^{3/2}}\right\}$

che per α grande diventa:

$$E_e \approx \frac{2q}{\pi\varepsilon_o(\alpha a)^2}$$

Quattro cariche di segno opposto

$$F_x = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o l^2}[1 - \frac{\cos 45^o}{2}] = 210\ kN$$
$$F_y = 210\ kN$$
$$|F| = 300\ kN$$

Un dipolo

Assunto come origine il centro delle due cariche e la loro congiungente come asse delle x, mentre la perpendicolare sul piano è l'asse delle y: $-q$ è in $(-d/2,0,0)$, $+q$ è in $(d/2,0,0)$, mentre il punto è in ($\sqrt{2}d, \sqrt{2}d, 0$).

Quindi la distanza dalla carica positiva vale:

$$|r_-| = 2.4d$$

Mentre da quella negativa:

$$|r_+| = 1.7d$$

Il campo esatto vale:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{d^2}0.049$$
$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{d^2}0.191$$
$$|E| = 0.19753\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{d^2}$$

Mentre quello approssimato:

$$p = (qd, 0, 0)$$
$$r = (\sqrt{2}d, \sqrt{2}d, 0)$$

Quindi: $E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{d^2}0.0625$

$$E_y = 0.187\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{d^2}$$

per cui:

$$|E| = 0.19764 \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{d^2}$$

Quindi il rapporto vale:

$$R = 0.9994$$

Due condensatori incrociati

Prima del collegamento:

$$Q_{10} = C_1 V_1 = 2 \cdot 10^{-5} C$$
$$Q_{20} = C_2 V_2 = 3 \cdot 10^{-4} C$$

Poiché il collegamento avviene tra armature con carica opposta, la carica totale su ogni ramo si conserva, ma con il suo segno, quindi dove prevale la carica positiva rimane una carica positiva, mentre dove vi è dominante quella negativa rimane quella negativa. In definitiva la carica finale su ogni lato è in modulo:

$$Q_f = Q_{20} - Q_{10} = 2.8 \cdot 10^{-4} C$$

Se chiamiamo (Q_{1f} e Q_{2f}) le cariche finali sui due condensatori, sulle armature collegate all'armatura dominante positiva del condensatore 2, per la conservazione della carica:

$$Q_{1f} + Q_{2f} = Q_f$$

Passato un tempo sufficientemente lungo la somma delle differenze di potenziale tra i due condensatori (che era inizialmente di $V_1 + V_2$) diviene:

$$\frac{Q_{1f}}{C_1} - \frac{Q_{2f}}{C_2} = 0$$

notare che si è usato il segno meno per tenere conto delle polarità delle cariche sui condensatori.

Da tale sistema di equazioni:

$$Q_{1f} = Q_f \frac{C_1}{C_1 + C_2} = 2.5 \cdot 10^{-5} C$$
$$Q_{2f} = Q_f \frac{C_2}{C_1 + C_2} = 2.5 \cdot 10^{-4} C$$

La differenza di potenziale che è eguale tra le armature:

$$V_f = \frac{Q_{1f}}{C_1} = \frac{Q_f}{C_1 + C_2} = 25.5\ V$$

Un condensatore a facce piane

La capacità diviene:

$$C_1 = \epsilon_r C_o$$

Quindi essendo:

$$Q_o = C_o f$$
$$Q_1 = C_1 f = \epsilon_r C_o f$$
$$\Delta Q = C_o f(\epsilon_r - 1)$$
$$\epsilon_r = 1 + \frac{\Delta Q}{C_o f} = 1.07$$

La variazione di energia immagazzinata nel condensatore è:

$$\Delta E = \frac{1}{2} C_1 f^2 - \frac{1}{2} C_o f^2 = \frac{1}{2} C_o f^2 (\epsilon_r - 1) = 0.25\ \mu J$$

Una spira circolare carica

La densità di carica vale:

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$$

Assunta come origine il centro della spira e asse delle x l'asse della spira. Il campo elettrico generato dal generico elementino $\vec{dl}$ di circonferenza vale in modulo:

$$|dE| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda dl}{r^2}$$

Dove:

$$r^2 = R^2 + x^2$$

Interessa calcolare solo la componente dE_x di $\vec{dE}$. Infatti per ogni elemento $\vec{dl}$ esiste una altro elemento, diametralmente opposto, che genera una componente normale all'asse x uguale ed opposta a quella generata dall'elemento considerato.

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda dl}{r^2}\cos\vartheta$$

Detto ϑ l'angolo formato dalla congiungente l'elementino dl con il punto sull'asse e l'asse delle x. Integrando su dl lungo tutta la circonferenza, e considerando che, fissato x, sia R, che ϑ sono costanti:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{r^2}\cos\vartheta\int dl = \frac{2\pi R}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{r^2}\cos\vartheta$$

Geometricamente è facile mostrare che:

$$\cos\vartheta = \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

Quindi:

$$E_x = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_o}\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

Essendo:

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R} \quad E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

Tale campo vale per $x = 0$:

$$E_x(x=0) = 0$$

Inoltre:

$$E_x(x >> R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{x^2}$$

Un semplice quadrupolo

Solo la componente y del campo elettrico è diversa da 0, in particolare le due cariche più distanti (rispetto un punto sull'asse delle x positivo) generano un campo:

$$E_{1y} = \frac{2ql/2}{4\pi\varepsilon_o\left[(x+l/2)^2+(l/2)^2\right]^{3/2}}$$

mentre le più lontane:

$$E_{1y} = -\frac{2ql/2}{4\pi\varepsilon_o\left[(x-l/2)^2+(l/2)^2\right]^{3/2}}$$

Quindi in totale:

$$E_y = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_o}\left\{\frac{1}{[(x-l/2)^2+(l/2)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+l/2)^2+(l/2)^2]^{3/2}}\right\}$$

Ovviamente tale funzione vale 0 per $x = 0$, mentre per gli altri due casi:

$$E_y(x = l) = 9.3\ kV/m$$
$$E_y(x = 10l) = 1.1\ kV/m$$

A grande distanza si comporta come un quadrupolo il cui campo diminuisce con la quarta potenza della distanza.

Una sbarretta sottile isolante

a) Detto :

$$\lambda = \frac{q}{l}$$

Il campo generato dalla sbarretta nel punto (d,0), vale:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{\lambda dx}{(x-d)^2} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{d+l/2} - \frac{1}{d-l/l2}\right] = \frac{\lambda l}{4\pi\varepsilon_o(d^2-l^2/4)}$$

Nel punto (0,d) per ragioni di simmetria il campo può essere solo diretto secondo l'asse delle y, per cui:

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{\lambda dx}{(x^2+d^2)}\frac{d}{\sqrt{x^2+d^2}} = \frac{\lambda d}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{x}{d^2\sqrt{x^2+d^2}}\right]_{-l/2}^{l/2} = \frac{\lambda l}{4\pi\varepsilon_o d\sqrt{l^2/4+d^2}}$$

Notare come a parità di distanza sempre nel punto (0,d) il campo sia inferiore al valore in (d,0).

A grande distanza i due valori coincidono e tendono a:

$$\frac{\lambda l}{4\pi\varepsilon_o d^2}$$

Quindi imponendo che:

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_o(d^2-l^2/4)} = 1.01\frac{q}{4\pi\varepsilon_o d\sqrt{l^2/4+d^2}}$$
$$\frac{1}{d^2-l^2/4} = \frac{1.01}{d\sqrt{l^2/4+d^2}}$$

Segue che la condizione viene realizzata se:

$$d \geq 6.14\ m$$

Tre particelle cariche

Il problema è unidimensionale per cui si omette il segno di vettore. Perché la forza elettrica che agisce sulla carica 3 sia nulla occorre che:

$$f_{13} + f_{23} = 0$$

Quindi essendo:

$$f_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1q_3}{(2d)^2}$$
$$f_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_2q_3}{(d)^2}$$

Occorre che:

$$\frac{q_1}{(2d)^2} = -\frac{q_2}{d^2}$$
$$q_1 = -4q_2 = -4\ nC$$

La forza elettrica che agisce sulla carica 1 vale (diretta da sinistra a destra):

$$f_{31} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_3}{(2d)^2} = -0.18\ mN$$

Mentre quella dovuta alla carica 2 vale (diretta da sinistra a destra):

$$f_{21} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_2}{d^2} = -0.36\ mN$$

In totale quindi:

$$f_1 = f_{31} + f_{21} = -0.54\ mN$$

Un condensatore con una lastra

a) La tensione totale tra le armature estreme vale (e non cambia con l'inserimento della lastra)

$$V_o = \frac{Q}{C_o} = 30\ V$$

Immaginando che la carica sia $+Q$ sull'armatura di sinistra. Tale differenza di potenziale è dovuto all'integrale del campo elettrico uniforme all'interno del condesatore quindi la lastra interna ha con l'armatura di sinistra una d.d.p. pari a:

$$V_1 = -V_o\frac{d_1}{d_1 + d_2} = -24\ V$$

mentre con quella di destra:

$$V_2 = V_o\frac{d_2}{d_1 + d_2} = 6\ V$$

b) Se viene messo in contatto la lastra con l'armatura di destra la d.d.p., si annulla la d.d.p. come il campo tra di loro, quindi la capacità aumenta e diviene:

$$C = C_o\frac{d_1 + d_2}{d_1} = 125\ pF$$

Spessore strato carico in un conduttore

La densità di carica della nuvola di elettroni liberi (che è compensata esattamente dalle cariche ioniche positive fisse) vale:

$$\rho = en = 1.35 \cdot 10^{10}\ C/m^3$$

La legge di Coulomb si può scrivere in realtà in due forme equivalenti:

$$E_o = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} = \frac{\rho t}{\varepsilon_o}$$

Indicando con t l'allontanamento dalla posizione di equilibrio delle cariche libere necessario a generare il campo E_o. Quindi:

$$\sigma = \rho t$$

$$t = \frac{E_o\varepsilon_o}{en} = 6.4 \cdot 10^{-15}\ m$$

Per quanto l'intensità del campo sia così elevata lo spostamento della nuvola elettronica è talmente piccolo, che a tutti gli effetti giustamente si considera una densità di carica superficiale.

Anello carico

La densità di carica vale:

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$$

Assunta come origine il centro della spira ed asse delle x l'asse della spira. La d.d.p. tra un punto a distanza x dal centro della spira vale:

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^{2\pi R}\frac{\lambda dl}{\sqrt{R^2+x^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

Quindi:

$$V(0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o R}$$

$$V(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o R\sqrt{2}}$$

Quindi:

$$E_c = q\left[V(0) - V(R)\right] = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o R}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 0.026\ J$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = 7.2\ m/s$$

Due dipoli

Scegliamo un sistema di coordinate sul cntro del primo dipolo e con l'asse z diretto come l'asse del dipolo. Il campo sull'asse di un dipolo, a grande distanza dal centro, vale:

$$E_z = \frac{p}{2\pi\varepsilon_o z^3}$$

Quindi la derivata:

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{3p}{2\pi\varepsilon_o z^4}$$

$$F_z = -\frac{3p^2}{2\pi\varepsilon_o z^4} = 0.054\ N$$

Mentre se sono ortogonali, assunto come asse delle x , asse lungo cui sono disposti i loro centri. Il primo genera un campo su tale asse:

$$E_z = \frac{p}{4\pi\varepsilon_o x^3}$$

che quindi produce un momento sull'altro pari a:

$$|M| = \frac{p^2}{4\pi\varepsilon_o x^3} = 9\cdot 10^{-5}\ Nm$$

Piano con foro

Il campo generato dal piano lungo l'asse del foro si calcola usando il principio di sovrapposizione, infatti per quanto riguarda il piano, assunto come z, l'asse verticale:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Mentre, per quanto riguarda un disco di carica $-\sigma$:

$$E_z = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]$$

Quindi in totale:

$$E_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}$$

La condizione di equilibrio è:

$$qE_z - mg = 0$$

Da cui si ricava:

$$h_o = \frac{R}{\sqrt{(q\sigma/2\epsilon_0 mg)^2 - 1}} \approx 17.6\ cm$$

la differenza di potenziale tra 0 e $h_o/2$ vale:

$$V(h_0/2) - V(0) = -\int_0^{h_0/2} E(z)dz = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{z^2+R^2}\right]_0^{h_0/2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(R - \sqrt{(h_0/2)^2+R^2}\right)$$

Agendo solo forze conservative si ha:

$$\frac{1}{2}mv^2 = q[V(h_0/2) - V(0)] + mg\frac{h_o}{2}$$

Quindi:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{q[V(h_0/2) - V(0)] + mgh_o/2} = 1.12\ m/s$$

Due sbarre allineate

Detto: $\lambda = \frac{q}{l}$

Se chiamiamo r la posizione generica sulla prima sbarretta. Il campo generato, da un tratto infinitesimo della prima barretta sull'asse delle x al centro vale:

$$dE_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dr}{r^2}$$

Quindi genera al centro in totale:

$$E_x(x=0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda\int_{-a/2-l/2}^{-a/2+l/2}\frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda\left[-\frac{1}{r}\right]_{-a/2-l/2}^{-a/2+l/2} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{a-l} - \frac{1}{a+l}\right]$$

Al centro l'altra sbarretta genera lo stesso campo in intensità e verso per cui:

$$E_{xt}(x=0) = -\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{a-l} - \frac{1}{a+l}\right] = -19\ kV/m$$

In un punto generico dell'asse delle x per $x > a/2 + l/2$: La prima sbarretta genera un campo:

$$E_x^-(x) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda\int_{-a/2-l/2}^{-a/2+l/2}\frac{dr}{(r-x)^2}$$

Facendo un cambiamento di variabile:

$$E_x^-(x) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda \int_{-x-a/2-l/2}^{-x-a/2+l/2} \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda \left[-\frac{1}{y}\right]_{-x-a/2-l/2}^{-x-a/2+l/2} =$$

$$E_x^-(10a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda \left[\frac{1}{-10a - a/2 + l/2} - \frac{1}{-10a - a/2 - l/2}\right] = -19.18\ V/m$$

Analogamente per l'altra sbarretta:

$$E_x^+(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda \int_{a/2-l/2}^{a/2+l/2} \frac{dr}{(r-x)^2}$$

Facendo un cambiamento di variabile:

$$E_x^+(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda \int_{-x+a/2-l/2}^{-x+a/2+l/2} \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda \left[-\frac{1}{y}\right]_{-x+a/2-l/2}^{-x+a/2+l/2} =$$

$$E_x^+(10a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda \left[\frac{1}{-10a + a/2 - l/2} - \frac{1}{-10a + a/2 + l/2}\right] = 24.91\ V/m$$

In totale quindi:

$$E_{xt}(x = 10a) = E_x^-(10a) + E_x^+(10a) = 4.52\ V/m$$

Mentre il dipolo equivalente vale:

$$p = qa$$

Quindi il campo generato vale:

$$E_x \approx \frac{qa}{2\pi\epsilon_0(10a)^3} = 4.49\ V/m$$

Praticamente eguale al valore approssimato.

Anello con distribuzione dipolare

La carica per $y > 0$è quella che si ha se $0 \leq \theta \leq \pi$:

$$q^+ = \int_0^\pi \lambda dl$$

Ma $dl = Rd\theta$ e $\lambda = A\sin\theta$ quindi:

$$q^+ = RA\int_0^\pi \sin\theta d\theta = RA\left[-\cos\theta\right]_0^\pi = 2RA = 20\ pC$$

Il campo elettrico in modulo generato da un elemento dl vale:

$$|dE| = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_o(R^2+z^2)} = \frac{AR\sin\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_o(R^2+z^2)}$$

$$dE_z = |dE|\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{ARz}{4\pi\varepsilon_o(R^2+z^2)^{3/2}}\sin\theta d\theta$$

$$E_z = \int_0^{2\pi} dE_z = \frac{ARz}{4\pi\varepsilon_o(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta = 0$$

$$dE_x = |dE|\frac{R}{(R^2+z^2)^{3/2}}\cos\theta d\theta$$

$$E_x = \frac{AR^2}{4\pi\varepsilon_o(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta = 0$$

$$dE_y = -|dE|\frac{R}{(R^2+z^2)^{3/2}}\sin\theta d\theta$$

$$E_y = -\frac{AR^2}{4\pi\varepsilon_o(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta = -\frac{AR^2}{4\varepsilon_o(R^2+z^2)^{3/2}}$$

Quindi nel caso di $z = R$:

$$E_y = -\frac{A}{4\varepsilon_o R2^{3/2}} \approx 1000\ V/m$$

mentre per quanto riguarda il dipolo equivalente, basta prendere due tratti infinitesimi simmetrici opposti rispetto all'asse delle x, che distano $2R\sin\theta$ con una carica $dq = RA\sin\theta d\theta$:

$$dp_y = RA\sin\theta d\theta 2R\sin\theta = 2R^2 A\sin^2\theta d\theta$$

Ed integrare su metà della circonferenza:

$$p_y = 2R^2 A\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta = R^2 A\pi = 3.14\cdot 10^{-13}\ Cm$$

Avendo sostituita l'espressione dell'integrale:

$$\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Si poteva ottenere lo stesso risultato calcolando E_y a grande distanza sull'asse.

Piano tagliato

Il campo generato dal piano sulla verticale si calcola usando il principio di sovrapposizione: un piano infinito con densità σ ed una striscia carica con densità $-\sigma$. Per quanto riguarda il piano, assunto come z, l'asse verticale:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

Mentre, per quanto riguarda una striscia di larghezza d e densità di carica $-\sigma$, è equivalente al campo generato da un insieme di fili a distanza $\sqrt{z^2+D^2}$, per ciascuno dei quali:

$$|dE| = \frac{\sigma dz}{2\pi\varepsilon_o\sqrt{z^2+D^2}}$$

La componente lungo l'asse delle z di tale campo è l'unica che non si annulla per ragioni di simmetria quindi:

$$dE_z = \frac{\sigma D dz}{2\pi\varepsilon_o(z^2+D^2)}$$

$$E_z = \frac{\sigma D}{2\pi\varepsilon_o}\int_{-d/2}^{d/2}\frac{dz}{z^2+D^2} = \frac{2\sigma D}{2\pi\varepsilon_o D}\arctan(d/2D)$$

Se $d \ll D$:

$$E_z \approx \frac{\sigma d}{\pi\varepsilon_o 2D}$$

Quindi in totale:

$$E_z \approx \frac{\sigma}{\varepsilon_o}[1 - d/(2\pi D)]$$

Goccia d'olio

Per il teorema di Gauss, il campo elettrico che attraversa una sfera di raggio r , avente lo stesso centro della goccia, è radiale e vale:

$$E(r) = \frac{Q_r}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

con Q_r pari alla carica contenuta all'interno della sfera.

a)

Quindi, sulla superficie della goccia, vale:

$$E_0 = \frac{Q_o}{4\pi\varepsilon_o R_o^2}$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{Q_o}{4\pi\varepsilon_o E_0}} = 0.003\ m$$

b)

Poiché la carica è distribuita uniformemente, la densità di carica è costante, pertanto

$$\rho = \frac{Q_r}{v_r} = \frac{Q_o}{v_o}$$

per ogni r > 0, indicando con v_r il volume della sfera di raggio r e con v_o il volume della goccia d'olio.

$$Q_r = \frac{Q_o v_r}{v_o} = \frac{Q_o r^3}{R_o^3}$$

La differenza di potenziale vale:

$$\Delta V = \int_0^{R_o} E(r)dr = \int_0^{R_o} \frac{Q_r}{\varepsilon_o 4\pi r^2}dr = \int_0^{R_o} \frac{Q_o r}{4\pi\varepsilon_o R_o^3}dr = \frac{Q_o}{8\pi\varepsilon_o R_o} = 1.5\ kV$$

c)

Quindi la densità di carica vale:

$$\rho = 8.85 \cdot 10^{-3}\ C/m^3$$

Immaginiamo di costruire la goccia sferica, quando il raggio vale r con $0 < r < R_0$, il potenziale (rispetto all'infinito della superficie della sfera vale:

$$V(r) = Q(r)/(4\pi\varepsilon_o r)$$

con $Q(r) = \rho 4/3\pi r^3$, quindi:

$$V(r) = \rho r^2/(3\varepsilon_o)$$

Se aggiungiamo una carica dq :

$$dq = \rho 4\pi r^2 dr$$

L'energia necessaria sarà:

$$dU = dqV(r) = \frac{\rho^2 4\pi r^4}{3\varepsilon_o}dr$$

$$U_0 = \int_0^{R_0} \frac{\rho^2 4\pi r^4}{3\varepsilon_o}dr = \frac{\rho^2 4\pi R_0^5}{15\varepsilon_o} = \frac{3Q_0^2}{20\pi\varepsilon_o R_0} = 1.8 \cdot 10^{-6}\ J$$

Se la sfera si spezza in due sfere di stessa densità:

$$2R_1^3 = R_0^3$$

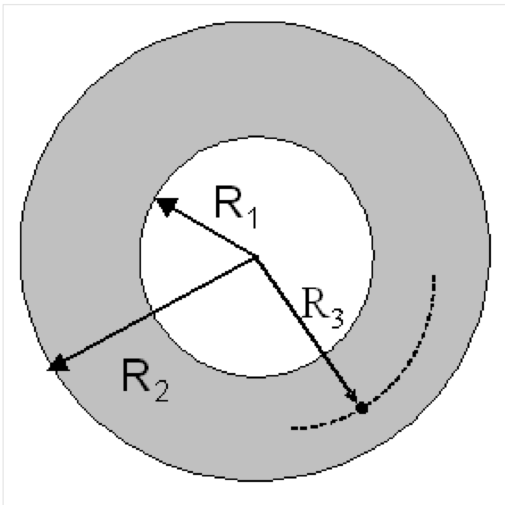
$$R_1 = R_0/\sqrt[3]{2} = 0.0021\ m$$

$$U_f = 2\frac{3(Q_0/2)^2}{20\pi\varepsilon_o R_1} = \frac{3(Q_0)^2}{40\pi\varepsilon_o R_1} = 1.3 \cdot 10^{-6}\ J$$

La legge di Gauss

Esercizi

Guscio sferico



Una carica Q è distribuita uniformemente su un guscio sferico di raggio interno R_1e raggio esterno R_2. Determinare il campo nel punto R_3equidistante tra le due superfici del guscio sferico e la differenza di potenziale tra le due superfici del guscio.
(dati del problema $Q = 1\ nC$, $R_1 = 10\ cm$, $R_2 = 30\ cm$.)

Guscio sferico con foro

Una guscio sferico di raggio R e carica Q ha un piccolo foro di raggio r_o.
Tale foro non modifica la distribuzione uniforme di carica sulla sfera ed ai fini del calcolo si approssima ad una carica puntiforme (di valore opportuno e di segno chiaramente negativo). Determinare il campo nel centro della sfera e in che posizione dello spazio il campo elettrico è nullo. Discutere se l'approssimazione con una carica puntiforme sia giusta.
(Dati del problema $Q = 1\ \mu C$, $R = 1.5\ m$, $r_o = 5\ cm$)

Campo elettrico terrestre

Il campo elettrostatico sulla superficie della terra in condizioni di bel tempo vale circa E_t, diretto verso il centro della terra. La terra che ha un raggio R_tè globalmente neutra, per cui fino ad una quota di h vi è una densità volumetrica approssimatiavemente distributa uniformenente, tale carica deve essere eguale e contraria alla carica superficiale. Determinare a) la carica totale sulla superficie della terra, b)La differenza di potenziale tra il punto a quota h e la superficie della terra. c) la capacità equivalente della terra in senso lato.
(dati del problema $R_t = 6350\ km$, $h = 10\ km$, $E_t = 100\ V/m$)

Tre gusci sferici

Tre gusci sferici concentrici conduttori hanno raggi R, $1.5R$ e $2R$. Il guscio esterno ed interno sono allo stesso potenziale nullo (rispetto all'infinito). Sul guscio intermedio è depositata una carica Q. Determinare la d.d.p tra il guscio intermedio e gli altri due, la capacità elettrica del sistema ed il campo elettrico massimo.
(dati del problema $Q = 3\ \mu C$ $\quad R = 10\ m$, suggerimento perché il potenziale sia nullo occorre che la carica totale sui tre gusci sia nulla)

Nuvola cilindrica

Una nuvola cilindrica di raggio R ha una densità di carica che varia con la distanza dall'asse secondo la legge:

$\rho = A + Br$

Se il campo ad $R/2$ vale in modulo E_1 mentre a $5R$ vale E_2. Determinare il campo elettrico sul bordo della nuvola e la d.d.p. tra il bordo della nuvola ed il centro della nuvola.

(Dati del problema: $R = 10\ m$, $E_1 = 10^4\ V/m$, $E_2 = 5 \cdot 10^3\ V/m$)

Doppio strato

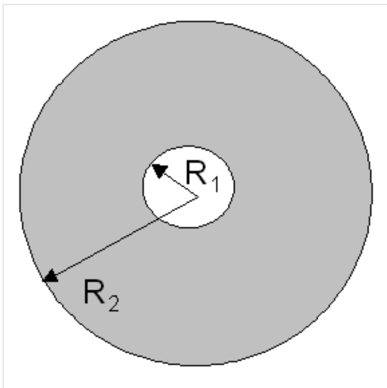
Un doppio strato è costituito da due regioni planari (ai fini dei conti infinite) di densità di carica ρ e $-\rho$ e di spessore *d*. Determinare il campo massimo e la d.d.p. tra -*d* e *d*.

(Dati del problema: $\rho = 50\ C/m^3$, $d = 0.3\ \mu m$)

Un guscio spesso isolante

Una sfera non conduttrice di raggio R_2 contiene una cavità sferica concentrica di raggio R_1. Tra R_1 ed R_2 è distribuita uniformemente una carica Q. Determinare il valore del campo massimo ed il potenziale del centro della distribuzione di carica rispetto all'infinito.

(dati del problema $Q = 18\ nC$, $R_1 = 2\ cm$, $R_2 = 9\ cm$)



Differenza di potenziale di una nuvola sferica

Una nuvola sferica carica ha un raggio R ed ha una densità di carica uniforme, la carica totale della nuvola è Q. Determinare la differenza di potenziale tra il centro della nuvola ed il bordo della nuvola.

(Dati del problema: $R = 3\ Km$, $Q = 1\ C$.)

Due sfere

Una sfera conduttrice isolata di raggio R viene caricata ad un potenziale rispetto all'infinito di V_0(e isolata dall'alimentatore). In seguito viene connessa mediante un filo ad una sfera lontana scarica di raggio la metà: Determinare il potenziale a cui si portano le sfere.

(dati del problema $V_0 = 500\ V$, $R = 10\ cm$)

Regione tra due piani

In una regione di spazio, limitata da due piani paralleli ed infiniti, a distanza d, vi è una distribuzione di carica costante ρ, il piano cartesiano yz coincide con uno dei due piani limitanti la regione carica.

Calcolare il campo elettrico nella regione di spazio compresa tra i due piani e la differenza di potenziale (in modulo) tra il centro della regione di spazio ed un estremo.

(dati del problema: $\rho = 10^{-8}\ C/m^3$, $d = 1\ m$)

Una goccia d'acqua

Una goccia sferica di acqua, un conduttore liquido, su cui è presente una carica q_o, ha un potenziale V_0rispetto all'infinito.

Determinare il raggio della sfera.

(dati del problema $q_o = 10\ pC$, $V_0 = 100\ V$)

Una nuvola sferica carica

Una nuvola sferica carica ha un raggio R. La densità di carica è uniforme tra 0ed $R/2$e vale $\rho/2$, mentre nel resto della nuvola (il guscio esterno restante) la densità è ancora uniforme, ma vale ρ. La carica totale della nuvola è nota e vale Q.

(Dati del problema: $R = 1\ m$, $Q = 4 \cdot 10^{-6}\ C$)

Un corpo di massa m e carico

Un corpo di massa m e carica $-e$ si muove all'interno di una sfera di raggio R sulla quale è distribuita uniformemente una carica e.

La forza esercitata è di tipo elastico (come si può dimostrare), calcolarne la frequenza.

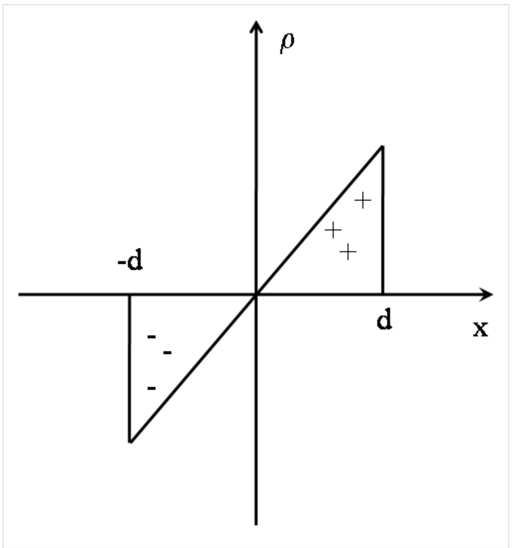
(dati del problema $m = 9.11 \cdot 10^{-31}\ Kg$, $-e = -1.6 \cdot 10^{-19}\ C$, $R = 10^{-10}\ m$)

Giunzione p-n graduale

Una giunzione p-n tra due semiconduttori è rappresentabile come un doppio strato (piano) di spessore $2d$ ha una densità di carica volumetrica che varia secondo la legge: $\rho = At \qquad -d < t < d$. Al di fuori dello strato la carica è nulla.

Determinare il campo elettrico sulla superficie dello strato e la differenza di potenziale tra i due estremi dello strato

(Dati del problema: $d = 1\ \mu m$, $A = 1 \cdot 10^{7}\ C/m^{4}$)



Due gusci concentrici

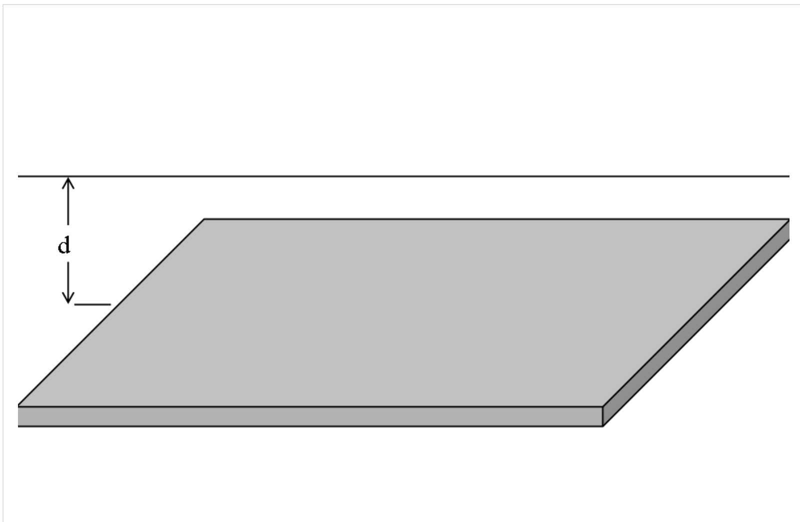
Due gusci sferici concentrici conduttori (di spessore trascurabile) hanno raggio R_1ed R_2, sono carichi con cariche eguali ed opposte (lo spazio tra di loro è vuoto).

Se la differenza di potenziale tra i due gusci vale $V_o$determinare la loro carica, il campo elettrico massimo e l'energia elettrica immagazzinata dal sistema.

(dati del problema $R_1 = 30\ cm$, $R_2 = 40\ cm$, $V_o = 45\ kV$)

Filo su piano

Un filo rettilineo, di lunghezza infinita, uniformemente carico, con una densità di carica lineare λ , è parallelo ed è ad una distanza d da una superficie piana isolante (di spessore trascurabile) uniformente carica con una densità di carica di σ .



Deteminare: a) la forza per unità di lunghezza che si ha tra il filo e la superficie. b) la distanza dal piano, sulla verticale passante per il filo, per la quale il campo elettrico è nullo.

(dati del problema $\sigma = 10^{-5}\ C/m^2$, $\lambda = -4 \cdot 10^{-6}\ C/m$, $d = 3\ cm$)

Moto in nuvola cilindrica

Una nuvola cilindrica molto lunga (lunghezza praticamente infinita) di raggio R , ha una densità di carica uniforme pari a ρ . Una particella di carica q e massa m inizialmente ferma va da una posizione a distanza $R_1 = R/2$ dall'asse fino a $R_2 = 4R$. Determninare a) l'accelerazione nel punto R_1, b) l'accelerazione nel punto R_2, 3) La velocità con cui la particella arriva nel punto R_2.
(dati del problema $R = 1\ m$, $\rho = 10^{-6}\ C/m^3$, $m = 10^{-19}\ kg$, $q = 1.6 \cdot 10^{-19}\ C$)

Soluzioni

Guscio sferico

La densità di carica vale:

$$\rho = \frac{Q}{4/3\pi(R_2^3 - R_1^3)}$$

Quindi dal teorema di Gauss ad una distanza generica R tra R_1ed R_2:

$$4\pi R^2 E(R) = \frac{1}{\varepsilon_o}\int_{R_1}^{R} \rho 4\pi r^2 dr = \frac{1}{\varepsilon_o}\rho 4\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_{R_1}^{R} = \frac{\rho 4\pi}{3\varepsilon_o}[R^3 - R_1^3]$$

$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)$$

Quindi per $R = R_3 = (R_1 + R_2)/2 = 20\ cm$:

$$E(R_3) = 61\ V/m$$

mentre ovviamente la d.d.p. tra i gusci, in modulo vale:

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(R - \frac{R_1^3}{R^2}\right) dR = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\left[\frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2) + \frac{R_1^3}{R_2} - R_1^2\right] = 12\ V$$

Guscio sferico con foro

Il campo elettrico è quello di una sfera carica con una densità di carica:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

più una carica puntiforme posta sulla superficie esterna di carica:

$$q_o = -\sigma\pi r_o^2 = -Q\frac{r_o^2}{4R^2} = -0.28\ nC$$

Quindi il campo al centro è quello dovuto alla sola carica puntiforme (come direzione diretto verso il foro) e vale:

$$E(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{|q_o|}{R^2} = 1.1\ V/m$$

All'interno della sfera in nessun punto il campo è nullo, all'esterno sulla retta passante per il centro della sfera e per il foro vi è un punto a distanza x dalla superficie della sfera per cui i campi prodotti dalla sfera:

$$E(R+x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{(R+x)^2}$$

e dalla carica puntiforme:

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_o}{x^2}$$

Si compensano, da cui segue con semplici passaggi che:

$$4R^2x^2 = r_o^2(R+x)^2$$

Con due soluzioni, rigettando la negativa che corrisponde a stare dentro la sfera dove non vale il sistema:

$$x = 0.025\ m$$

La distanza trovata di $x = 2.5\ cm$ è chiaramente non trscurabile rispetto alle dimensioni del foro $r_o = 5\ cm$. Quindi l'esercizio richiedeva un calcolo più sofisticato essendo la combinazione non di una carica puntiforme e di un guscio uniformemente carico, ma il caso più complesso di un disco uniformemente carico e di un guscio sferico.

Campo elettrico terrestre

a) Dal teorema di Coulomb:

$$\sigma = -E_t\varepsilon_o = -8.86\cdot 10^{-10}\ C/m^2$$

Quindi:

$$Q_t = \sigma 4\pi R_t^2 = -4.6\cdot 10^5\ C$$

b) Detta la densità di carica nell'atmosfera ρ_t, poiché lo spessore dell'atmosfera utile ai fini del calcolo h è piccolo rispetto al raggio della terra, si può approssimare il suo volume con $4\pi R_t^2 h$ e quindi:

$$\rho_t \approx \frac{-Q_t}{4\pi R_t^2 h}$$

Quindi detta z una quota generica tra 0 ed h, considerando una sfera concentrica alla terra all'interno dell'atmosfera, l'applicazione del teorema di Gauss:

$$-E_z 4\pi(R_t+z)^2 = \frac{Q_t}{\varepsilon_o} + \frac{\rho_t 4\pi R_t^2 z}{\varepsilon_o}$$

Trascurando z rispetto a R_t e sostituendo

$$-E_z 4\pi R_t^2 = \frac{Q_t}{\varepsilon_o} - \frac{Q_t z}{h\varepsilon_o}$$

Quindi:

$$E_z = \frac{Q_t}{\varepsilon_o 4\pi R_t^2}\left(\frac{x}{h} - 1\right)$$

Quindi la d.d.p. tra la quota h e la superficie della terra vale:

$$\Delta V = -\int_h^0 E_z dz = -\frac{Q_t}{4\pi\varepsilon_o R_t^2}\left(h - \frac{h^2}{2h}\right) = -\frac{Q_t h}{8\pi\varepsilon_o R_t^2} = 500\ kV$$

c) Quindi la capacità in senso lato vale:

$$C = \frac{Q_t}{\Delta V} = 0.9\ F$$

Tre gusci sferici

Chiamiamo Q_1 e Q_2 la carica sulle sfere interna ed esterna dovrà essere che:

$$Q_1 + Q_2 = -Q$$

Inoltre dal teorema di Gauss essendo radiale tra R_1 ed R_2 vale:

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_o r^2}$$

Quindi la d.d.p. tra la sfera interna e quella intermedia vale:

$$\Delta V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_o}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

mentre tra quella esterna e quella intermedia vale:

$$\Delta V_2 = \frac{Q + Q_1}{4\pi\epsilon_o}\frac{R_3 - R_2}{R_2 R_3}$$

Imponendo che:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2$$

$$\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_o}\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} = \frac{Q + Q_1}{4\pi\epsilon_o}\frac{R_3 - R_2}{R_2 R_3}$$

$$Q_1 = -\frac{Q}{3} = -1\ \mu C$$

$$\Delta V = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_o}\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} = 300\ V$$

La capacità elettrica vale dunque:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 10\ nF$$

La densità di carica sulla sfera interna vale:

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R^2}$$

Quindi nelle immediate vicinanze il campo vale:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_o} = -90\ V/m$$

che è il massimo campo presente nello spazio tra le sfere, è facile verificare come nelle immediate vicinanze della sfera intermedia il campo sia minore: $80\ V/m$.

Nuvola cilindrica

per r<R si ha dal Teorema di Gauss, detta h l'altezza di un cilindro Gaussiano, che: UNIQ-math-168-3b7d007aae91dbf1-QINU da cui: UNIQ-math-169-3b7d007aae91dbf1-QINU mentre per r>R si ha dal Teorema di Gauss:

$$E_r h 2\pi r = \frac{1}{\epsilon_o}\int_0^R (A+Br)2\pi r dr h$$

da cui:

$$E_r = \frac{1}{\epsilon_o}(A\frac{R^2}{2r}+B\frac{R^3}{3r})$$

Dai dati iniziali del problema si ha che:

$$10^4\epsilon_o = 2.5A + 8.3B$$

$$510^3\epsilon_o = A + 6.66B$$

Da cui:

$$A = 3.54\cdot 10^{-8}\ C/m^3$$

$$B = 2.65\cdot 10^{-9}\ C/m^4$$

Quindi per r=R:

$$E(R) = 3000\ V/m$$

Mentre la d.d.p. vale:

$$d.d.p = \int_0^R E_r dr = \frac{1}{\epsilon_o}(A\frac{R^2}{4}+B\frac{R^3}{9}) = 13.3\ kV$$

Doppio strato

Consideriamo un solo stato e spostiamo l'origine nel suo centro come mostrato in figura Distinguiamo tre zone di spazio. La prima è $-d/2 < x' < d/2$consideriamo un cilindro perpendicolare al piano di sezione S ed altezza $2x$ con il suo centro coincidente con il centro della regione.

Attraverso le basi del cilindro il campo è uscente e vale in modulo $|E|$. Il flusso attraverso la superficie laterale è identicamente nullo poiché il campo è parallelo alla superficie. Quindi applicando il teorema di Gauss:

$$|E^+|2S = \frac{\rho S 2x'}{\epsilon_o} \qquad per\ \ -d/2 < x' < d/2$$

Quindi:

$$E^+ = \frac{\rho x'}{2\epsilon_o} \qquad per\ \ -d/2 < x' < d/2$$

Mentre se $|x'| > d/2$:

$$|E^+|2S = \frac{\rho S d}{\epsilon_o}$$

Quindi:

$$E^+ = \frac{\rho d}{2\epsilon_o} \qquad per\ x' \geq d/2$$

$$E^+ = -\frac{\rho d}{2\epsilon_o} \qquad per\ x' \leq -d/2$$

Se la densità di carica fosse stata negativa avrei avuto:

$$E^- = -\frac{\rho x'}{2\epsilon_o} \qquad per\ \ -d/2 < x' < d/2$$

$$E^- = -\frac{\rho d}{2\epsilon_o} \qquad per\ x' \leq -d/2$$

$$E^- = -\frac{\rho d}{2\epsilon_o} \qquad per\ x' \geq d/2$$

Ritorniamo al problema reale facendo due cambiamenti di coordinare per x' in maniera diversa tra + e -.

$$x' = x + \frac{d}{2}$$

Le equazioni divengono: $E^+ = -\frac{\rho d}{2\epsilon_o} \qquad per\ x \leq -d$

$$E^+ = \frac{\rho(x + d/2)}{\epsilon_o} \qquad per\ -d < x < 0$$

$$E^+ = \frac{\rho d}{2\epsilon_o} \qquad per\ x \geq 0$$

$$x' = x - \frac{d}{2}$$

Le equazioni divengono:

$$E^- = \frac{\rho d}{2\epsilon_o} \qquad per\ x \leq 0\ E^- = -\frac{\rho(x - d/2)}{\epsilon_o} \qquad per\ 0 < x\ < d$$

$$E^- = -\frac{\rho d}{2\epsilon_o} \qquad per\ x \geq d$$

Quindi il campo totale nelle 4 regioni di spazio diviene:

$$E = -\frac{\rho d}{2\epsilon_o} + \frac{\rho d}{2\epsilon_o} = 0 \qquad per\ x \leq -d$$

$$E = \frac{\rho(x + d/2)}{\epsilon_o} + \frac{\rho d}{2\epsilon_o} = \frac{\rho(x + d)}{\epsilon_o} \qquad per\ -d < x < 0$$

$$E = -\frac{\rho(x - d/2)}{\epsilon_o} + \frac{\rho d}{2\epsilon_o} = \frac{\rho(-x + d)}{\epsilon_o} \qquad per\ 0 < x < d$$

$$E = \frac{\rho d}{2\epsilon_o} - \frac{\rho d}{2\epsilon_o} = 0 \qquad per\ x \geq d$$

Quindi il massimo di E si ha nell'origine in cui:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\rho(x + d)}{\epsilon_o} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{\rho(-x + d)}{\epsilon_o} = \frac{\rho d}{\epsilon_o} = 3.4\ \cdot 10^6\ V/m$$

Mentre la d.d.p. tra i due lati vale:

$$\Delta V = -\int_{-d}^{0} \frac{\rho(x + d)}{\epsilon_o} dx - \int_{0}^{d} \frac{\rho(-x + d)}{\epsilon_o} = -\frac{\rho}{\epsilon_o} \left\{ \left[\frac{x^2}{2} + xd\right]_{-d}^{0} + \left[xd - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{d} \right\} = \frac{\rho d^2}{\epsilon_o} = 1.02\,V$$

Un guscio spesso isolante

Il campo elettrico, sempre radiale, si ricava dal teorema di Gauss. All'esterno della distribuzione si ha che:

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad per \quad r > R_2$$

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

Nella cavità il campo è nullo.

Mentre la densità di carica, nella regione dove è uniforme, vale:

$$\rho = \frac{Q}{4/3\pi(R_2^3 - R_1^3)} = 6 \cdot 10^{-6}\ C/m^3$$

Quindi applicando Gauss:

$$E_r 4\pi r^2 = \rho\frac{4\pi}{3\varepsilon_o}\left(r^3 - R_1^3\right) \qquad per \quad R_1 < r < R_2$$

$$E_r = \rho\frac{1}{3\varepsilon_o r^2}\left(r^3 - R_1^3\right) \qquad per \quad R_1 < r < R_2$$

Il campo è ovviamente massimo per $r = R_2$dove vale:

$$E_m = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r_2^2} = 20\ kV/m$$

$$V = -\int_\infty^0 E_r dr = -\int_\infty^{R_2} E_r dr - \int_{R_2}^{R_1} E_r dr = = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{R_2} + \frac{\rho}{6\varepsilon_o}\left[R_2^2 - R_1^2\right] + \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_o}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right] = 2732\ V$$

Differenza di potenziale di una nuvola sferica

Dal teorema di Gauss essendo il campo elettrico radiale la sua intensità all'interno della sfera vale:

$$|E| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R^3} r$$

Quindi:

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R^3}\int_0^R r dr = \frac{Q}{8\pi\epsilon_o R} = 1.5 \cdot 10^6\ V$$

Due sfere

La carica cui si porta la prima sfera è:

$$Q_0 = 4\pi\epsilon_o R V_0 = 5.6\ nC$$

Dovendo portarsi allo stesso potenziale, detta Q_1e Q_2le cariche finali delle due sfere:

$$\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_o R} = \frac{Q_2 2}{4\pi\epsilon_o R}$$

ma anche:

$$Q_1 + Q_2 = Q_0$$

da cui:

$$Q_2 = \frac{Q_0}{3} = 1.86\ nC$$

$$Q_1 = \frac{2Q_0}{3} = 3.74\ nC$$

Il potenziale finale (comune) vale:

$$V_f = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_o R} = 337\ V$$

Regione tra due piani

Assunta come origine dell'asse delle x il centro e normale ai piani. Consideriamo un cilindro gaussiano di base S con asse parallelo all'asse delle x di altezza $2x < d$. Applicando il teorema di Gauss, vi è flusso del campo elettrico solo attraverso le due superfici di base ed è eguale ed uscente per entrambe le superfici per cui

$$2|E_x|(x)S = \frac{\rho S 2x}{\varepsilon_o}$$

Quindi:

$$E_x = \frac{\rho x}{\varepsilon_o}$$

La differenza di potenziale tra il centro della distribuzione e l'estremo vale:

$$|\Delta V| = \int_0^{d/2} \frac{\rho x}{\varepsilon_o} dx = \frac{\rho d^2}{8\varepsilon_o} = 141\ V$$

Una goccia d'acqua

Una sfera conduttrice con carica q_o genera un campo radiale di intensità, applicando il teorema di Gauss:

$$|E| = \frac{q_o}{4\pi\epsilon_o r^2}$$

Per cui la d.d.p. tra la superficie della goccia e l'infinito: vale:

$$V = \int_R^{\infty} \frac{q_o}{4\pi\epsilon_o r^2} = \frac{q_o}{4\pi\epsilon_o R}$$

quindi:

$$R = \frac{q_o}{4\pi\epsilon_o V} = 900\ \mu m$$

Una nuvola sferica carica

La carica totale vale:

$$Q = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 \frac{\rho}{2} + \frac{4}{3}\pi \left[R^3 - \left(\frac{R}{2}\right)^3\right] \rho = \frac{5}{4}\pi\rho R^3$$

quindi:

$$\rho = \frac{4Q}{5\pi R^3} = 1 \cdot 10^{-6}\ C/m^3$$

$$Q_i = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 \frac{\rho}{2} = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 \frac{2Q}{5\pi R^3} = \frac{Q}{15} = 2.7 \cdot 10^{-7}\ C$$

Nel guscio sferico compreso tra $R/2$ e $2R/3$ vi è una carica:

$$Q_e = \frac{4}{3}\pi \left[\left(\frac{2R}{3}\right)^3 - \left(\frac{R}{2}\right)^3\right] \rho = 7.3 \cdot 10^{-7}\ C$$

Dal teorema di Gauss:

$$E = \frac{Q_i + Q_e}{4\pi\epsilon_o \left(\frac{2}{3}R\right)^2} = 2 \cdot 10^4\ V/m$$

Un corpo di massa m e carico

La densità di carica vale:

$$\rho = \frac{3e}{4\pi R^3}$$

Dal teorema di Gauss:

$$4\pi r^2 E_r = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\rho}{\epsilon_o} \qquad r < R$$

$$E_r = \frac{er}{4\pi\epsilon_o R^3}$$

L'equazione del moto per quanto riguarda la componente radiale dello spostamento vale:

$$m\ddot{r} = -eE_r$$

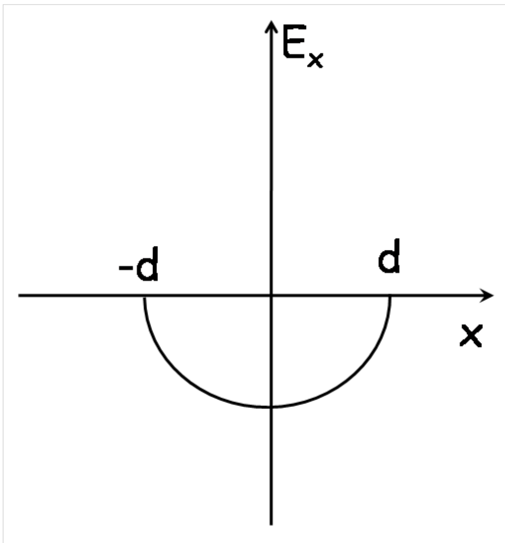
$$m\ddot{r} = -\frac{e^2 r}{4\pi\epsilon_o R^3}$$

Che l'equazione di un oscillatore armonico con pulsazione:

$$\omega = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_o R^3 m}}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_o R^3 m}} = 2.5 \cdot 10^{15} Hz \}\}$$

Giunzione p-n graduale



Avendo il problema simmetria piana. Si hanno tre regioni di spazio, di cui due in cui il campo è nullo $x < -d$, $x > d$ e una regione centrale $-d < x < d$ in cui in cui il campo è diverso da 0. La ragione per cui al di fuori dello strato il campo è identicamente nullo dipende dal fatto che la zona carica ha carica totale nulla, e quindi al di fuori della zona le cariche opposte da esse possedute si bilanciano completamente. All'interno della distribuzione invece non si ha un bilanciamento. Per ragioni di continuità sulle superfici dello strato il campo elettrico è nullo.

A partire da questo fatto si calcola mediante il teorema di Gauss il campo elettrico nella regione centrale. Si considera un cilindro gaussiano retto di superfice di base S. Disponiamo il cilindro con le generatrici ortogonali al piano dello strato e con una superfice all'esterno dello strato (dove il campo è nullo) e l'altra in un punto generico della regione centrale (di coordinata x), applicando il teorema di Gauss:

$$E_x S = \frac{S}{\varepsilon_o}\int_{-d}^{x} \rho dt = S\frac{Ax^2}{2\varepsilon_o} - Cost$$

da cui imponendo che per $x = -d$ sia $E_x = 0$:

$$E_x(x) = \frac{A}{2\varepsilon_o}(x^2 - d^2)$$

La d.d.p. tra un estremo e il centro della distribuzione vale:

$$\Delta V(d,0) = \int_{-d}^{d} E_x dx = \int_{-d}^{d} \frac{Ax^2 dx}{2\varepsilon_o} = \frac{A}{3\varepsilon_o} d^3 = 0.38\ V$$

Si risolveva ancora più semplicemente ricorrendo al teorema di Gauss in forma locale che all'interno della nuvola si riduce in:

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{Ax}{\varepsilon_o}$$

Che integrato diviene:

$$E_x = \frac{Ax^2}{2\varepsilon_o} + Cost$$

da cui imponendo che per $x = -d$ sia $E_x = 0$:

$$E_x(x) = \frac{A}{2\varepsilon_o}(x^2 - d^2)$$

Due gusci concentrici

Posta una carica Q nel guscio interno di raggio R_1a causa del teorema di Gauss nell'interspazio tra i gusci il campo elettrico è radiale e vale:

$$|E| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

Quindi la differenza di potenziale tra i due gusci vale:

$$V_o = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

Da cui:

$$Q = V_o 4\pi\varepsilon_o \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 60\ \mu C$$

Dal teorema di Coulomb la massima densità di carica è sulla armatura interna vale:

$$\sigma_{max} = E_{max}\varepsilon_o$$

Quindi:

$$E_{max} = \frac{Q}{\varepsilon_o 4\pi R_1^2} = 0.6\ MV/m$$

la capacità vale:

$$C = 4\pi\varepsilon_o \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 133\ pF$$

quindi l' energia immagazzinata vale:

$$U = \frac{1}{2} C V_o = 0.135\ J$$

Filo su piano

a) Il campo elettrico generato nella parte superiore della superficie piana, diretto verso l'alto visto il segno di σ , vale:

$$E_p = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

Quindi la forza che agisce sulla carica dq posta a distanza d vale:

$$dF = E_p dq = E_p \lambda dl = \frac{\sigma\lambda dl}{2\varepsilon_o}$$

di conseguenza, la forza attrattiva vale:

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\sigma\lambda}{2\varepsilon_o} = -2.26\ N/m$$

b) Il campo elettrico, diretto verso il filo per il segno della carica su di esso, creato a distanza r dal filo vale:

$$E_f = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}$$

Tra il piano ed il filo il campo elettrico generato dalle due distribuzioni di carica sono concordi e quindi la risultante non si annulla mai. Mentre al di sopra del filo, scelta l'origine sul piano, sulla verticale del filo, si ha che $r = z - d$, per cui il campo risultante vale:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o(z-d)} \qquad z > 0$$

Che si annulla per:

$$z = d - \frac{\lambda}{\pi\sigma} = 15.7\ cm$$

Mentre sotto il piano:

$$E_z = -\frac{-\sigma}{2\varepsilon_o} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o(z-d)} \qquad z < 0$$

che si annulla per:

$$z = d + \frac{\lambda}{\pi\sigma} = -9.7\ cm$$

Moto in nuvola cilindrica

Applicando il teorema di Gauss per $r < R$ si ha che:

$$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_o}$$

$$E(r = R/2) = \frac{\rho R}{4\varepsilon_o}$$

$$a_1 = \frac{q\rho R}{4m\varepsilon_o} = 4.5 \cdot 10^4\ m/s^2$$

Applicando il teorema di Gauss per $r>R\ </math> si ha che:

$$E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o r}$$

$$E(r = 4R) = \frac{\rho(R)^2}{2\varepsilon_o 4R} = \frac{\rho R}{8\varepsilon_o}$$

$$a_2 = \frac{q\rho R}{8m\varepsilon_o} = 2.25 \cdot 10^4\ m/s^2$$

La d.d.p. tra R e $4R$ vale:

$$V_1 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\int_R^{4R}\frac{dr}{r} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\ln 4$$

La d.d.p tra $R/2$ ed R vale:

$$V_2 = \frac{\rho}{2\varepsilon_o}\int_{R/2}^{R} r dr = \frac{\rho}{4\varepsilon_o}(R^2 - R^2/4) = \frac{\rho 3R^2}{16\varepsilon_o}$$

Quindi:

$$DV = V_1 + V_2 = \frac{\rho R^2}{\varepsilon_o}\left(\frac{\ln 4}{2} + \frac{3}{16}\right) = 10^5\ V$$

$$v = \sqrt{2qDV/m} = 564\ m/s$$

La corrente elettrica

Esercizi

Filo a tronco di cono

Un filo conduttore di rame di lunghezza l , (ad esempio a causa della corrosione) è ben descritto da un tronco di cono che inizia con una sezione di raggio a e finisce con un raggio b in maniera lineare. Se il filo è percorso da una corrente I . Determinare:

1. Il campo elettrico massimo e minimo nel filo.
2. la resistenza del filo.
3. La massima corrente che può scorrere se la potenza massima dissipabile per unità di volume vale

P_{max} .

(dati del problema $\rho_{Cu} = 1.7\cdot 10^{-8}\ \Omega\cdot m$, $a = 2\ mm$, $b = 4\ mm$, $I = 10\ A$, $l = 100\ m$, $P_{max} = 1\ W/cm^3$)

Un filo di materiale conduttore

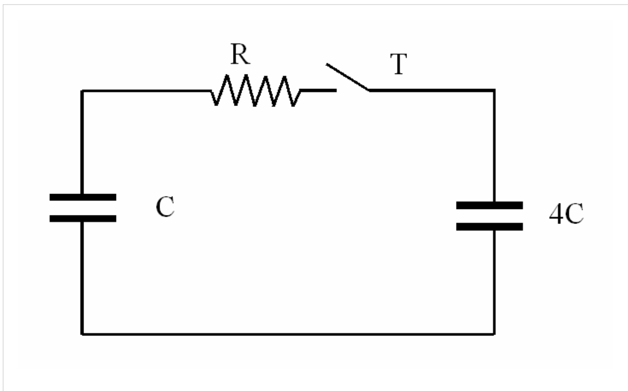
Un filo di materiale conduttore di raggio r , resistività ρ ha una lunghezza l . Determinare a) la resistenza del filo, b) la potenza massima dissipabile per unità di volume sapendo che la massima corrente che può passare vale I_{max} e c) se la velocità di drift dei portatori di carica per tale valore della corrente vale v_d quale è la densità dei portatori? (dati del problema $r = 0.5\ mm$, $\rho = 1.7\cdot 10^{-8}\ \Omega\cdot m$, $l = 100\ m$, $I_{max} = 5\ A$, $v_d = 0.6\ mm/s$).

Un faro abbagliante

Calcolare la resistenza a caldo $R_2 1\ (T_2 = 2700\ ^o\ C)$ e a freddo $R_1(T_1 = 20\ ^o\ C)$ di un faro abbagliante di una automobile da $P = 40\ W$ alimentato con $V = 12\ V$. Il tungsteno di cui è fatto il filamento ha un coefficiente di temperatura $\alpha = 0.0045\ ^oC^{-1}$.

Un condensatore carico

Le armature di un condensatore di capacità C sono portate ad una differenza di potenziale V_o. A questo punto attraverso una resistenza R una armatura viene connessa alla armatura di un condensatore scarico di capacità $4C$. Le altre due armature erano in contatto sin dall'inizio. Determinare:



a) L'energia elettrostatica dissipata nella resistenza in tale processo.

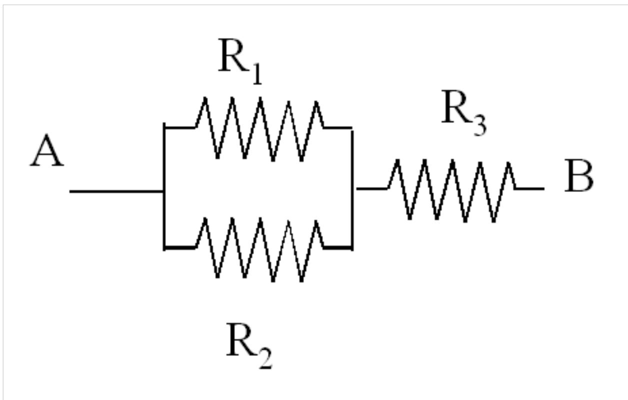
b) La costante di tempo del processo di scarica/carica (a seconda di quale condensatore si considera).

(dati del problema $V_0 = 200\ V$, $R = 1\ M\Omega$, $C = 1\ \mu F$)

Tre resistenze

Ciascuna delle tre resistenze della figura ($R_1 = R_2 = R_3$) può dissipare al massimo P_{max}; quale è la corrente massima e di conseguenza la potenza totale dissipata dalle tre resistenze?

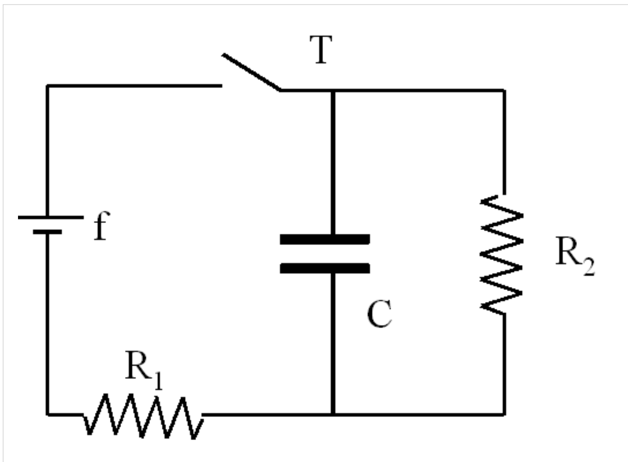
(Dati del problema $P_{max} = 100\ W$, $R_1 = 1\ \Omega$)



Carica di un condensatore

All'istante $t = 0$ viene chiuso l'interruttore del circuito mostrato in figura. Calcolare la differenza di potenziale presente ai capi del condensatore dopo $20\ ms$ dalla chiusura dell'interruttore

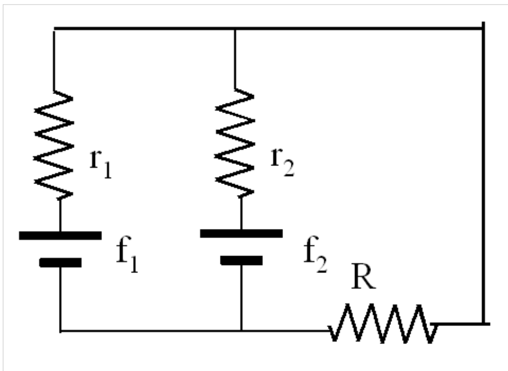
(Dati del problema $f = 1000\ V$, $R_1 = 5\ k\Omega$, $C = 10\ \mu F$, $R_2 = 15\ k\Omega$)



Due generatori di f.e.m.

Determinare nel circuito mostrato in figura la corrente che scorre nella resistenza R e la potenza fornita dai due generatori.

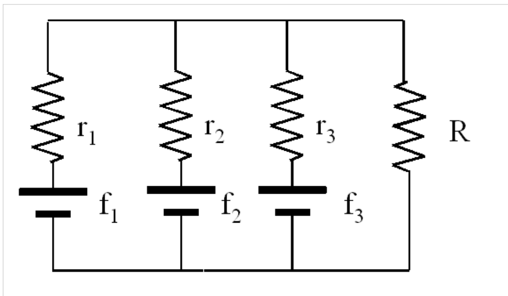
(Dati del problema $R = 10\ \Omega$, $f_2 = 11.5\ V$, $r_2 = 5\ \Omega$, $f_1 = 12\ V, r_1 = 3\ \Omega$)



Tre generatori su una resistenza R

Determinare nel circuito mostrato in figura la corrente che scorre nella resistenza R e la corrente che scorre nel generatore più a destra.

(Dati del problema $R = 5\ \Omega$, $f_1 = 7\ V$, $r_1 = 1\ \Omega$, $f_2 = 10\ V$, $r_2 = 2\ \Omega$, $f_3 = 9\ V$, $r_3 = 3\ \Omega$,)



RC con r interna

Ai capi di una resistenza R ed un condensatore C in serie viene posto un generatore di f.e.m. di valore f_1. All'istante iniziale la potenza dissipata nella resistenza vale P_0. Trascorso un tempo $t_1$la potenza dissipata nella resistenza diventa P_1. Determinare la resistenza interna del generatore ed il valore di C.

(Dati del problema $R = 1\ \Omega$, $f_1 = 12\ V$, $P_0 = 5\ W$, $P_1 = 0.2P_0$, $t_1 = 1\ ms$)

Telefonino semiscarico

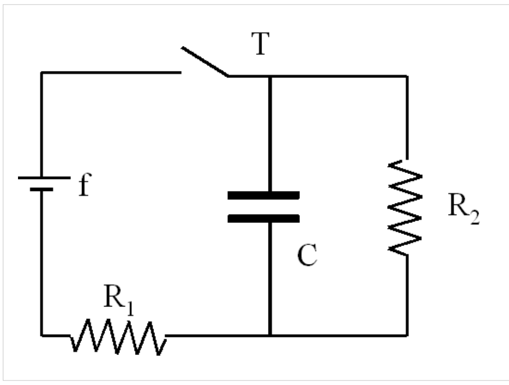
Ad una batteria ricaricabile semiscarica (rappresentabile come un generatore di f.e.m. $f_2$con resistenza interna r_2), a cui estremi è connesso il circuito di un telefonino acceso (rappresentabile come una resistenza R), viene collegato, in parallelo, un alimentatore opportuno tale che garantisca sia una corrente di ricarica di I_2della batteria che una tensione ai capi del carico (R) pari a V_R. Inoltre, se viene staccato il carico (telefonino spento), l'alimentatore fornisce una corrente di ricarica di I_4. Calcolare le caratteristiche dell'alimentatore: f.e.m. (f_1) e resistenza interna r_1.

(Dati del problema $R = 500\ \Omega$, $f_2 = 2.8\ V$, $r_2 = 15\ \Omega$, $I_2 = 50\ mA$, $I_4 = 100\ mA$, $V_R = 4.5\ V$)

Carica condensatore con 2 R

All'istante $t = 0$ viene chiuso l'interruttore del circuito mostrato in figura. Calcolare la variazione massima della potenza fornita dal generatore. Determinare inoltre il tempo necessario a dimezzare (dall'istante iniziale) la corrente che scorre nel ramo del condensatore.

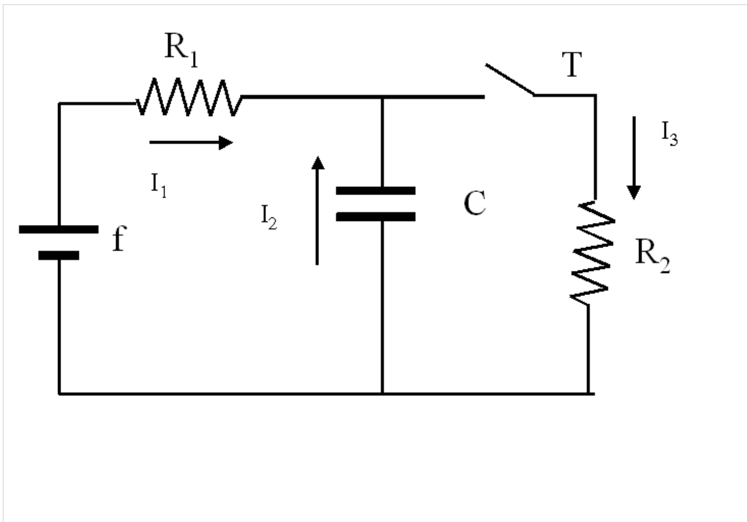
(Dati del problema $f = 14\ V, R_1 = 18\ \Omega,$ $C = 1\ mF$, $R_2 = 90\ \Omega$)



Scarica condensatore con 2 R

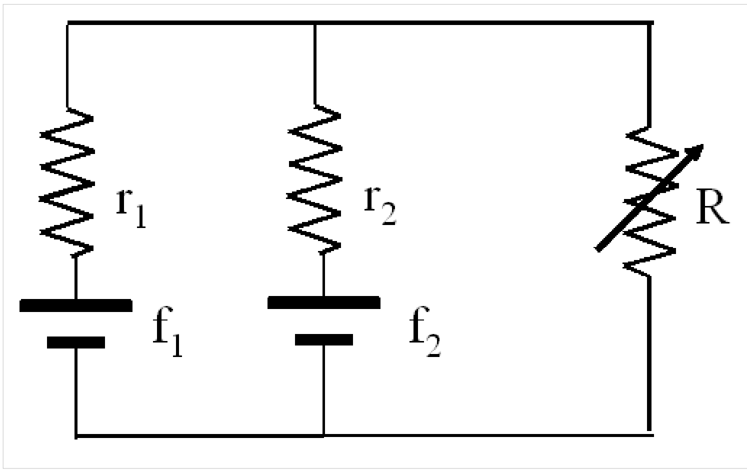
Il circuito mostrato in figura è a regime con l'interruttore aperto. All'istante $t = 0$ viene chiuso l'interruttore ed il sistema raggiunge una nuova situazione di regime. Determinare la carica ai capi del condensatore nelle due condizioni di regime. Determinare quando la corrente fornita dal generatore eguaglia quella fornita dal condensatore.

(Dati del problema $f = 9\ V$, $R_1 = 900\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$, $C = 1\ mF$, come aiuto al calcolo sono indicati i versi delle correnti dopo la chiusura dell'interruttore)



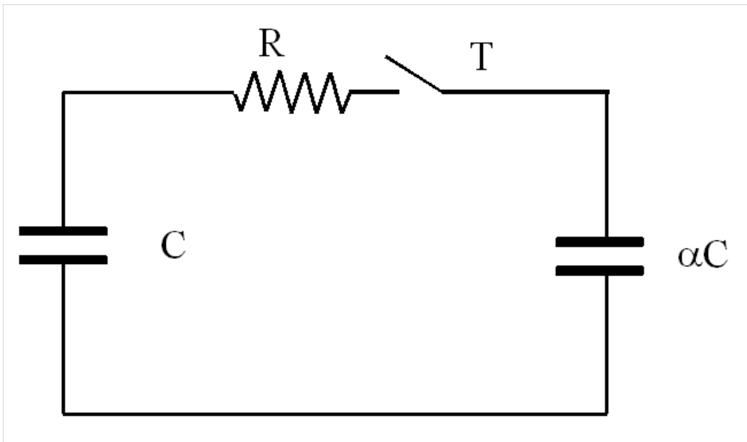
Due generatori reali su una R variabile

Nel circuito mostrato in figura la resistenza R è variabile. Al suo variare la corrente fornita dal generatore f_2 passa da concorde al verso del generatore stesso a discorde. Determinare il valore di R per cui avviene tale cambiamento di comportamento ed in particolare per $R = R_f$ determinare la potenza fornita dal generatore f_2.
(dati del problema $R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R_f = 9\Omega$, $f_1 = 8\ V$, $f_2 = 7\ V$.)



Due condensatori con una resistenza

Nel circuito indicato in figura il condensatore di sinistra ha una capacità C ed è portato ad una d.d.p di V_o(mediante un generatore non mostrato in figura in quanto inessenziale). Infine viene collegato attraverso la resistenza R alla armatura di un altro condensatore inizialmente scarico. Dimostrare che l'energia elettrostatica persa coincide con quella dissipata nella resistenza.



ES1

Un filo conduttore di rame di lunghezza l , (ad esempio a causa della corrosione) è ben descritto da un tronco di cono che inizia con una sezione di raggio a e finisce con un raggio b in maniera lineare. Se il filo è percorso da una corrente I . Determinare: a) Il campo elettrico massimo e minimo nel filo. b)la resistenza del filo. c) La massima corrente che può scorrere se la potenza massima dissipabile per unità di volume vale P_{max} .

(dati del problema $\rho_{Cu} = 1.7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot m$, $a = 2\ mm$, $b = 4\ mm$, $I = 10\ A$, $l = 100\ m$, $P_{um} = 1\ W/cm^3$)

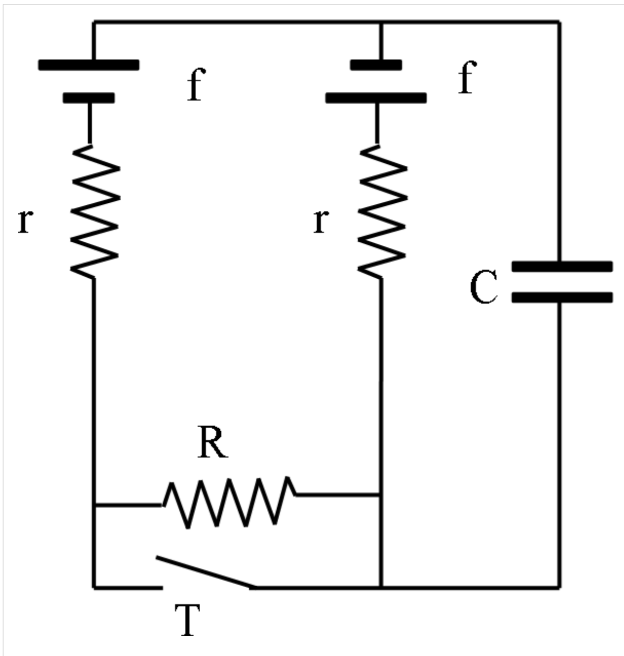
Resistenze serie parallelo

Un differenza di potenziale ΔVapplicata ad una resistenza R_1produce una potenza dissipata in calore $P_1 = 25\ W$ pari al doppio di P_2di quella generata se applicata ad una seconda resistenza R_2. Calcolare la potenza dissipata se la stessa ΔVviene applicata, invece che alle singole resistenze, ai capi del sistema delle resistenze R_1e R_2messe a) in serie o b) in parallelo.

Generatori serie parallelo

Un generatore di f.e.m. (f_1e resistenza interna r_1) e posto in serie ad un altro generatore con f_2, r_2(non noti) ed entrambi alimentano una resistenza R (costituiscono una maglia). Se i morsetti sono collegati in una polarità la corrente che scorre è I_A , collegando i morsetti di $f_1$in direzione opposta la corrente che scorre cambia verso e diviene I_B .
Determinare A) la differenza di potenziale ai capi di $f_1$nel caso A, b) il valore di f_2e r_2, c) la differenza di potenziale ai capi di $f_2$nel caso A e B .
Dati del problema $f_1 = 2.8\ V$, $r_1 = 1.4\ \Omega$, $R = 1.5\ \Omega$, $I_A = 1.5\ A$, $I_B = -0.26\ A$ (preso a riferimento positivo il verso della corrente nella condizione A).

Scarica di un condensatore con due generatori



Dopo che l'interruttore T è rimasto aperto per lungo tempo a $t = 0$ viene chiuso. Determinare 1) la carica iniziale del condensatore; 2) la carica finale del condensatore dopo il transiente iniziale; 3) l'istante nel quale la corrente che scorre nel ramo del condensatore vale I_o.

(dati del problema $R = 2r$, $r = 1\ \Omega$, $f = 20\ V$, $C = 1\ \mu F$, $I_o = 1\ A$)

Una nuvola di pioggia

Una nuvola di pioggia è approssimabile come una sfera di diametro d con una tipica differenza di potenziale di V_o tra un punto generico nella nuvola e il punto in cui si scarica un fulmine. Per effetto del fulmine la densità degli ioni presenti diminuisce di Δn. Immaginando che la corrente del fulmine sia stazionaria (costante nel tempo) durante la sua durata t_o, determinare a) la carica trasferita, b) la corrente c) l'energia e la potenza dissipata durante il fulmine.

(dati del problema $V_o = 5 \times 10^7\ V$, $d = 6\ km$, $t_o = 0.2\ s$, $\Delta n = 110\ cm^{-3}$)

Soluzioni

Filo a tronco di cono

1)

La densità di corrente è massima sulla sezione minore:

$$J_{max} = \frac{I}{\pi a^2} = 8 \cdot 10^5\ A/m^2$$

minima in quella maggiore:

$$J_{min} = \frac{I}{\pi b^2} = 2 \cdot 10^5\ A/m^2$$

Applicando la legge di Ohm in forma locale, di conseguenza il campo elettrico vale:

$$E_{max} = \rho_{Cu} J_{max} = 1.35 \cdot 10^{-2}\ V/m$$
$$E_{min} = \rho_{Cu} J_{min} = 3.5 \cdot 10^{-3}\ V/m$$

2)

Il raggio del filo segue la legge:

$$r = a + (b-a)\frac{x}{l} \qquad 0 < x < l$$

La resistenza vale:

$$R = \int_0^l \rho_{Cu} \frac{dx}{\pi r^2} = \frac{\rho_{Cu}}{\pi} \int_0^l \frac{dx}{\left[a + (b-a)\frac{x}{l}\right]^2}$$

Facendo il cambiamento di variabile:

$$y = a + (b-a)\frac{x}{l}$$

segue che:

$$R = \frac{\rho_{Cu} l}{\pi(b-a)} \int_a^b \frac{dy}{y^2} = \frac{\rho_{Cu} l}{\pi ab} = 0.068\Omega$$

3)

Imponendo che:

$$\rho |J_{max}|^2 \leq P_{max}$$

$$|J_{max}| = \sqrt{\frac{P_{max}}{\rho}}$$

Quindi essendo la massima densità di corrente sulla sezione più piccola:

$$I_{max} = |J_{max}|\pi a^2 = \sqrt{\frac{P_{max}}{\rho}}\pi a^2 = 99 \ A$$ }}

Un filo di materiale conduttore

Ovviamente:

$$R = \rho \frac{l}{\pi r^2} = 2.16 \ \Omega$$

Dopo avere convertito le grandezze nell' MKSA.

$$J_{max} = \frac{I_{max}}{\pi r^2} = 6.4 \cdot 10^6 \ A/m^2$$

Dalla legge di Joule in forma microscopica:

$$P_u = \rho J_{max}^2 = 0.7 \ W/cm^3$$

$$|J_{max}| = \sqrt{\frac{P_u}{\rho}} = 7.7 \cdot 10^6 \ A/m^2$$

Mentre da:

$$|J_{max}| = nev_d$$

segue che:

$$n = 6.6 \cdot 10^{28} m^{-3}$$

Un faro abbagliante

Essendo un oggetto ohmico:

$$R_2 = \frac{V^2}{P} = 3.6 \ \Omega$$

Essendo la resistività una funzione lineare della temperatura:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha T)$$

Potrò anche scrivere, trascurando la dilatazione termica del filo:

$$R_1 = R_o(1 + \alpha T1)$$

$$R_2 = R_o(1 + \alpha T2)$$

Quindi facendo il rapporto tra queste due equazioni:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1 + \alpha T_1}{1 + \alpha T_2}$$

$$R_1(20\ ^oC) = R_2 \frac{1+\alpha T_1}{1+\alpha T_2} = 0.3\ \Omega$$

Un condensatore carico

a)

Sulle armature del I condensatore vi è una carica iniziale:

$$Q_0 = CV_o = 200\ \mu C$$

Con una energia iniziale pari a:

$$E_0 = \frac{1}{2}CV_o^2 = 20\ mJ$$

Alla fine del processo tale carica si deve conservare, quindi le cariche finali valgono:

$$Q_{1f} + Q_{2f} = Q_0$$

Inoltre le differenze di potenziale ai capi dei due condensatori debbono equivalersi:

$$\frac{Q_{1f}}{C} = \frac{Q_{2f}}{4C}$$

Cioè:

$$Q_{1f} = \frac{Q_o}{5} = 40\ \mu C$$

$$Q_{2f} = \frac{4}{5}Q_o = 160\ \mu C$$

Per cui:

$$E_f = \frac{1}{2}\frac{Q_{1f}^2}{C} + \frac{1}{2}\frac{Q_{2f}^2}{4C} = \frac{1}{5}\frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$$

Quindi l'energia dissipata vale:

$$\Delta E = E_0 - E_f = 16\ mJ$$

b)

L'equazione della maglia:

$$\frac{Q_1}{C} + RI - \frac{Q_2}{4C} = 0$$

Con in ogni istante:

$$Q_1 + Q_2 = Q_0$$

Quindi:

$$\frac{Q_1}{C} + RI - \frac{Q_0 - Q_1}{4C} = 0$$

$$Q_1 + \frac{4}{5}RC\frac{dQ_1}{dt} - \frac{Q_0}{5} = 0$$

Quindi la costante di tempo vale:

$$\tau = \frac{4}{5}RC = 0.8\ s$$

e separando le variabili:

$$\frac{dQ_1}{Q_1 - Q_0/5} = -\frac{dt}{\tau}$$

$$\ln \frac{Q_1 - Q_0/5}{Q_0 - Q_0/5} = -\frac{t}{\tau}$$

$$Q_1 = \frac{Q_0}{5} + \frac{4Q_0}{5} e^{-t/\tau}$$

'E facile vedere come per $t = 0$e $t = \infty$ assume i valori dati nel punto a).

Tre resistenze

Da come è fatto il circuito l'elemento critico è la resistenza R_3, in quanto in esso scorre tutta la corrente.

Nelle resistenze R_1ed R_2scorre la stessa corrente:

$$I_1 = I_2 = \frac{I}{2}$$

Quindi:

$$P_{tot} = \sum_{i=1}^{3} RI_i^2 = \frac{3}{2} RI^2$$

Quindi la massima corrente dipende dalla massima potenza dissipabile:

$$I = \sqrt{\frac{P_{max}}{R}} = 10\ A$$

quindi:

$$P_{tot} = \frac{3}{2} P_{max} = 150\ W$$

Carica di un condensatore

Utilizzando il teorema di Thevenin il condensatore vede ai suoi capi un dipolo attivo con:

$$f_{th} = \frac{f}{R_1 + R_2} R_2 = 750\ V$$

ed un resistenza di Thevenin di:

$$R_{th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 3.75\ K\Omega$$

Quindi la costante di tempo di carica vale:

$$\tau = R_{th} C = 0.04\ s$$

Quindi dopo $t_1$la tensione ai capi del condensatore vale:

$$V = \frac{Q}{C} = f_{th} \left(1 - e^{-t_1/\tau}\right) = 310\ V$$

Due generatori di f.e.m.

Se definiamo rispettivamente I_1, I_2ed I le correnti nei tre rami, tutte in senso orario.

Dalle legge di Kirchhoff applicate al nodo:

$$I_1 + I_2 = I$$

Dalle legge di Kirchhoff applicate alle due maglie:

$$f_1 = I_1 r_1 + IR$$

$$f_2 = I_2 r_2 + IR$$

Eliminando I_1e I_2nel sistema:

$$I(R/r_1 + R/r_2 + 1) = \frac{f_1}{r_1} + \frac{f_2}{r_2}$$

da cui:

$I = 1\ A$

quindi:

$$I_1 = \frac{f_1 - IR}{r_1} = 0.68\ A$$

$$I_2 = \frac{f_2 - IR}{r_2} = 0.31\ A$$

$$P_1 = f_1 I_1 = 8.2\ W$$

$$P_2 = f_2 I_2 = 3.6\ W$$

Tre generatori su una resistenza R

Applicando il teorema di Thevenin ai generatori 1 e 2, diventano equivalenti ad unico gene\-ratore di resistenza interna e f.e.m.:

$$r' = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 0.66\ \Omega$$

$$f' = f_2 - \frac{f_2 - f_1}{r_1 + r_2} r_2 = 8\ V$$

Quindi scrivendo l'equazioni di Kirkhhoff per le maglie (detta I' la corrente nella maglia del generatore equivalente e I_3 la corrente nel ramo del generatore 3 e I la corrente nel ramo di R):

$$I' + I_3 = I$$

$$f' = I'r' + IR$$

$$f_3 = I_3 r_3 + IR$$

Da cui eliminando I' :

$$f' = (I - I_3)r' + IR$$

$$I_3 = \frac{f_3 - IR}{r_3}$$

Quindi:

$$I = \frac{f' + f_3 r'/r_3}{r' + Rr'/r_3 + R} = 1.47\ A \quad I_3 = \frac{f_3 - IR}{r_3} = 0.54\ A$$

RC con r interna

Nel transitorio iniziale la capacità si comporta come un corto circuito per cui la corrente circolante vale:

$$i_o = \frac{f_1}{R + r}$$

Quindi essendo:

$$P_0 = i_o^2 R = \frac{f_1^2}{(R+r)^2} R$$

$$r = f_1 \sqrt{\frac{R}{P_0}} - R = 4.4\ \Omega$$

Mentre la corrente che scorre nel circuito vale nel generico istante di tempo t :

$$i(t) = i_o e^{-t/\tau}$$

con $\tau = (R + r)C$, $i_o = f_1/(R + r) = 2.2\ A$. Quindi se:

$$P_1 = i_o^2 e^{-2t_1/\tau} R$$

$$\tau = \frac{2t_1}{\ln \frac{i_o^2}{P_1 R}} = 2.9\ ms$$
$$C = \frac{\tau}{r + R} = 0.53\ mF$$

Telefonino semiscarico

Dai dati del problema nel primo caso il generatore fornisce una corrente pari a:

$$I_1 = I_2 + \frac{V_R}{R} = 59\ mA$$

Posso scrivere che:

$$f_1 - I_1 r_1 = V_R$$

Inoltre nel secondo caso:

$$f_1 - f_2 = I_4(r_1 + r_2)$$

Quindi con semplici passaggi:

$$r_1 = \frac{V_R - f_2 - I_4 r_2}{I_4 - I_1} = 4.9\ \Omega$$
$$f_1 = 4.8\ V$$

Carica condensatore con 2 R

Nell'istante iniziale il condensatore si comporta come un corto circuito per cui la corrente che fornisce il generatore è massima:

$$I_{max} = \frac{f}{R_1} = 0.78\ A$$

Quindi:

$$P_{max} = fI_{max} = 11\ W$$

Mentre, passato un tempo sufficiente lungo, la corrente diventa:

$$I_{min} = \frac{f}{R_1 + R_2} = 0.13\ A$$
$$P_{min} = fI_{min} = 1.8\ W$$

Mentre per quant riguarda la seconda domanda, utilizzando il teorema di Thevenin, ai capi del condensatore:

$$f_{th} = \frac{f}{R_1 + R_2} R_2 = 11.7\ V$$
$$R_{th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 15\ \Omega$$

Detta $\tau = R_{th} C = 15\ ms$

Imponendo che:

$$\frac{f_{th}}{2R_{th}} = \frac{f_{th}}{R_{th}} e^{-t_1/\tau}\ t_1 = \tau \ln 2 = 10.4\ ms$$

Scarica condensatore con 2 R

La carica iniziale vale:

$$Q_o = Cf = 9\ mC$$

Mentre una volta andato a regime il sistema con l'interruttore chiuso, la tensione ai capi di R_2 vale ovviamente:

$$f' = \frac{f}{R_1 + R_2} R_2 = 1\ mV$$

E quindi la carica finale ai capi di C vale:

$$Q_f = Cf' = 10\ \mu C$$

Se definisco I_1 la corrente in R_1, I_3 quella in R_2 ed I_2 la corrente nel ramo del condensatore tale che la carica istantanea nel condensatore:

$$I_2 = -\frac{dQ}{dt}$$

L'equazione dei nodi e della maglie sono:

$$f = I_1 R_1 + I_3 R_2$$

$$I_3 = I_1 + I_2$$

$$\frac{Q}{C} = R_2 I_3$$

Da cui eliminando I_1 ed I_3:

$$f'C = I_3 R' C + Q$$

con $R' = R_2 - R_1/R_2 \approx 900\ \Omega$ da cui, definendo $\tau = R'C = 0.9\ s$:

$$-\frac{dQ}{dt}\tau = Q - f'C$$

Separando le variabili ed integrando:

$$\int_{Q_o}^{Q} \frac{dQ}{Q - Q_f} = -\int_o^t \frac{dt}{\tau}$$

$$Q(t) = Q_f + (Q_o - Q_f)e^{-t/\tau}$$

Da cui:

$$I_2 = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_o}{\tau} e^{-t/\tau}$$

$$I_1 = \frac{f - I_2 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{f}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Imponendo che:

$$I_2 = I_1$$

$$\frac{e^{-t_1/\tau}}{R_2} = \frac{1}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-t_1/\tau}\right)$$

$$t_1 = \tau \ln\left(\frac{R_1 + 2 \cdot R_2}{R_2}\right) = 0.62\ s$$

Due generatori reali su una R variabile

Detta I_1 la corrente nel ramo di f_1, I_2 la corrente concorde al generatore f_2 ed I_3 la corrente in R.

Le equazioni delle due maglie sono:

$$I_1 + I_2 = I_3$$
$$f_1 = I_1 R_1 + I_3 R$$
$$f_1 - I_1 R_1 = f_2 - I_2 R_2$$

La inversione di corrente avviene quando: $I_2 = 0$ cioè dall'ultima quando:

$$f_1 - I_1 R_1 = f_2$$
$$I_1 = \frac{f_1 - f_2}{R_1} = 0.33\ A$$

di conseguenza dalla prima:

$$I_3 = 0.33\ A$$
$$R = \frac{f_1 - I_1 R_1}{I_3} = 21\ \Omega$$

Nel caso generale invece eliminando dal sistema di tre equazioni prima I_1:

$$f_1 = I_3 R_1 - I_2 R_1 + I_3 R_f$$
$$f_1 - I_3 R_1 + I_2 R_1 = f_2 - I_2 R_2$$

da cui:

$$I_3 = \frac{f_1 - I_2 R_1}{R_1 + R_f}$$
$$I_3 = \frac{f_1 - f_2 + I_2(R_1 + R_2)}{R_1}$$

Eliminando I_3:

$$\frac{f_1 - I_2 R_1}{R_1 + R} = \frac{f_1 - f_2 + I_2(R_1 + R_2)}{R_1}$$

da cui:

$$I_2(\frac{R_1 + R_2}{R_1} + \frac{R_1}{R_1 + R_f}) = \frac{f_1}{R_1 + R_f} - \frac{f_1 - f_2}{R_1}$$
$$I_2 = \left(\frac{f_1}{R_1 + R_f} - \frac{f_1 - f_2}{R_1}\right) / \left(\frac{f_1}{R_1 + R_f} - \frac{f_1 - f_2}{R_1}\right) = 0.16\ A$$
$$P_2 = f_2 I_2 = 1.12\ W$$

Due condensatori con una resistenza

La carica iniziale del primo condensatore vale:

$$Q_{10} = CV_o = Q_o$$

Mentre sul secondo:

$$Q_{20} = 0$$

Nello stato finale la carica si conserva (la positiva sull'armatura superiore la negativa sulle inferiori) in maniera che:

$$Q_{1f} + Q_{2f} = Q_o$$

Ma anche la d.d.p. ai capi dei due condensatori deve essere eguale:

$$\frac{Q_{1f}}{C} = \frac{Q_{2f}}{\alpha C}$$

Dall'insieme di queste due equazioni risulta che:

$$Q_{1f} = \frac{CV_o}{1+\alpha}$$

$$Q_{2f} = \frac{\alpha CV_o}{1+\alpha}$$

Ora mentre l'energia elettrostatica iniziale vale:

$$E_0 = \frac{1}{2}CV_o^2$$

quella finale vale:

$$E_f = \frac{1}{2}\frac{Q_{1f}^2}{C} + \frac{1}{2}\frac{Q_{2f}^2}{\alpha C} = \frac{1}{2}\frac{CV_o^2}{\alpha+1}$$

Quindi la energia elettrostatica è diminuita di:

$$E_0 - E_f = \frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{1}{2}CV_o^2$$

Determiniamo ora l'energia dissipata per effetto Joule durante il transitorio, definita la corrente in senso orario, e Q_1 la carica istantanea sulla armatura di sopra del I condensatore, Q_2quella sulla armatura superiore del II condensatore:

$$\frac{Q_1}{C} = IR + \frac{Q_2}{\alpha C}$$

Ma per la conservazione della carica:

$$Q_2 + Q_1 = Q_o$$

$$Q_2 = Q_o - Q_1$$

Chiaramente la corrente (al limite per $\alpha = \infty$ deve coincidere con un corto circuito cioè il caso visto nella scarica)

$$I = -\frac{dQ_1}{dt}$$

Sostituendo:

$$\frac{Q_1}{C} + \frac{dQ_1}{dt}R - \frac{Q_o - Q_1}{\alpha C} = 0$$

$$\alpha Q_1 + \frac{dQ_1}{dt}\alpha CR - Q_o + Q_1 = 0$$

Separando le variabili:

$$\frac{dQ_1}{(\alpha+1)Q_1 - Q_o} = -\frac{dt}{\alpha RC}$$

Integrando, tra il tempo 0 ed il tempo t, viene:

$$\frac{1}{\alpha+1}\ln\frac{(\alpha+1)Q_1(t) - Q_o}{\alpha Q_o} = -\frac{t}{\alpha RC}$$

$$Q_1(t) = \frac{Q_o}{1+\alpha}\left(1 + \alpha e^{-t(\alpha+1)/\alpha RC}\right)$$

La sua derivata:

$$I = \frac{dQ_1}{dt} = -\frac{Q_o}{RC}e^{-t(\alpha+1)/\alpha RC}$$

L'energia dissipata per effetto Joule vale:

$$E_d = \int_0^\infty R \frac{Q_o^2}{R^2C^2} e^{-2t(\alpha+1)/\alpha RC} dt = \int_0^\infty \frac{V_o^2}{R} e^{-2t(\alpha+1)/\alpha RC} dt = \frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{1}{2}CV_o^2$$

ES1

a)

La densità di corrente è massima sulla sezione minore:

$$J_{max} = \frac{I}{\pi a^2} = 8 \cdot 10^5\ A/m^2$$

minima in quella maggiore:

$$J_{min} = \frac{I}{\pi b^2} = 2 \cdot 10^5\ A/m^2$$

Applicando la legge di Ohm in forma locale, di conseguenza il campo elettrico vale:

$$E_{max} = \rho_{Cu} J_{max} = 1.35 \cdot 10^{-2}\ V/m$$

$$E_{min} = \rho_{Cu} J_{min} = 3.5 \cdot 10^{-3}\ V/m$$

b)

Il raggio del filo segue la legge:

$$r = a + (b-a)\frac{x}{l} \qquad 0 < x < l$$

La resistenza vale:

$$R = \int_0^l \rho_{Cu} \frac{dx}{\pi r^2} = \frac{\rho_{Cu}}{\pi} \int_0^l \frac{dx}{\left[a + (b-a)\frac{x}{l}\right]^2}$$

Facendo il cambiamento di variabile:

$$y = a + (b-a)\frac{x}{l}$$

segue che:

$$R = \frac{\rho_{Cu} l}{\pi(b-a)} \int_a^b \frac{dy}{y^2} = \frac{\rho_{Cu} l}{\pi ab} = 0.068\ \Omega$$

c)

Imponendo che: $\rho |J_m|^2 \leq P_{um} \quad |J_m| = \sqrt{\frac{P_{um}}{\rho}}$ Quindi essendo la massima densità di corrente sulla sezione più piccola: $I_m = |J_m| \pi a^2 = \sqrt{\frac{P_{um}}{\rho}} \pi a^2 = 99\ A$

Resistenze serie parallelo

Dai dati del problema: $P_1 = \Delta V^2/R_1$

$$P_2 = \Delta V^2/R_2$$

$$P_1 = 2P_2$$

Quindi:

$$R_2 = 2R_1$$

Se vengono disposte in serie:

$$P_a = \Delta V^2/(R_1 + R_2) = P_1/3 = 8.34\ W$$

Mentre se sono disposte in parallelo:

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2}{3} R_1$$

Quindi:

$$P_b = \frac{3}{2} \Delta V^2 / R_1 = \frac{3}{2} P_1 = 37.5\ W$$

Generatori serie parallelo

a) Essendo $|I_A| > |I_B|$ il caso indipendentemente dal valore della f.e.m. dei due generatori implica che sono disposti con i morsetti $-+-+$, quindi:

$$V_{1A} = f_1 - I_A r_1 = 0.7\ V$$

b)

Nel primo caso l'equazione della maglia è:

$$f_2 + f_1 = I_A (r_1 + r_2 + R)$$

Nel secondo caso:

$$f_2 - f_1 = I_B (r_1 + r_2 + R)$$

Facendo quindi il rapporto tra queste due equazioni:

$$\frac{f_2 + f_1}{f_2 - f_1} = \frac{I_A}{I_B} = r$$

Detto : $r = \frac{I_A}{I_B} = -5.8$

Da cui:

$$f_2 = f_1 \frac{1+r}{r-1} = 1.97\ V$$

Con semplici passaggi dalla prima equazione:

$$r_2 = 0.28\ \Omega$$

c) Nel primo caso:

$$V_{2A} = f_2 - I_A r_2 = 1.55\ V$$

Nel secondo caso:

$$V_{2B} = f_2 - I_B r_2 = 2.04\ V$$

Scarica di un condensatore con due generatori

Prima della chiusura dell'interruttore la corrente che scorre nella maglia dove sono presenti entrambi i generatori vale:

$$i_c = \frac{2f}{2r + R} = \frac{2f}{4r} = 10\ A$$

La tensione ai capi del condensatore vale:

$$V_c = f - i_c r = \frac{f}{2} = 10\ V$$

Quindi la carica iniziale vale:

$$Q_o = C V_c = C \frac{f}{2} = 10\ \mu C$$

Mentre quella finale è:

$$Q_f = 0$$

Da cui la variazione di carica sul condensatore vale:

$$\Delta Q = Q_o = 10\ \mu C$$

La costante di tempo di scarica è pari a:

$$\tau = rC/2 = 0.5\ \mu s$$

Quindi essendo:

$$Q(t) = Q_o e^{-t/\tau}$$

$$I(t) = -\frac{Q_o}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{f}{r} e^{-t/\tau}$$

Imponendo che:

$$I(t_x) = \frac{f}{r} e^{-t_x/\tau} = I_o$$

Si ha che:

$$t_x = \tau \log(20) = 1.5\ \mu s$$

Una nuvola di pioggia

Riscrivendo nel SI:

$$\Delta n = 1.10 \cdot 10^8\ 1/m^3$$

Quindi la variazione di densit\'a di carica vale:

$$\Delta\rho = e\Delta n = 1.8 \cdot 10^{11}\ C/m^3$$

Quindi la carica trasferita durante una scarica vale:

$$\Delta Q = \Delta\rho \frac{4}{3}\pi (d/2)^3 = 2C$$

La corrente vale:

$$I = \frac{\Delta Q}{t_o} = 10\ A$$

Quindi l'energia dissipata vale:

$$E_d = V_o \Delta Q = 1 \cdot 10^8\ J$$

La potenza invece vale:

$$P = IV_o = 5 \cdot 10^8\ W$$ }}

Magnetismo

Esercizi

Un elettrone in un campo magnetico

Un elettrone, accelerato da una differenza di potenziale V viene a trovarsi in un campo di induzione magnetica $|B|$. La sua velocità forma un angolo ϑ con la direzione di $\overrightarrow{B}$. Determinare:

a) Il periodo T di rotazione

b) Il passo p (la distanza percorsa nella direzione del campo dopo ogni giro)

c) Il raggio r dell'elica cilindrica descritta.

(dati del problema $V = 100V$, $|B| = 10^{-4}\ T$, $\vartheta = \pi/3$)

Spira circolare

Determinare il rapporto tra il campo magnetico nel centro di una bobina circolare di raggio R e quello in un punto sul suo asse a distanza $R/2$.

Un dipolo ruotante

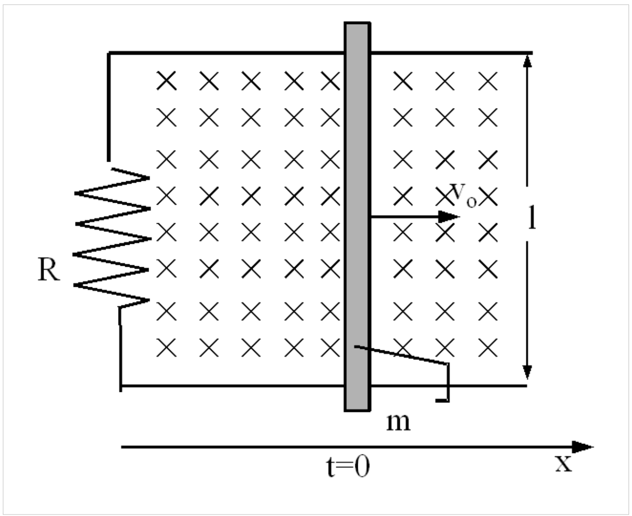
Un dipolo elettrico di momento p è formato da due cariche separate da una distanza d. Se il dipolo è posto in rotazione attorno ad un asse ortogonale alla congiungente che dista $d/4$ dalla carica negativa compiendo n giri al secondo.

Determinare: a) Il momento di dipolo magnetico equivalente del sistema. b) Il campo di induzione magnetica a $100d$ dal centro di rotazione (anche solo approssimato) sull'asse di rotazione. c) Il campo di induzione magnetica nel centro di rotazione.

(dati del problema: $p = 10^{-3}\ Cm$, $d = 2 \cdot 10^{-2}\ m$, $n = 1000$)

Una sbarretta metallica

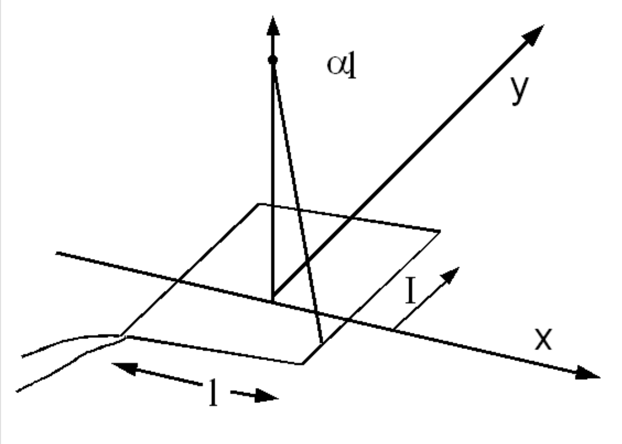
Una sbarretta metallica, di massa, $m = 1\ kg$, scivola senza attrito su due lunghe guide parallele e conduttrici, poste a distanza $l = 1\ m$ l'una dall'altra. Esse sono collegate ad una delle estremità per mezzo di una resistenza $R = 10\ \Omega$ (La resistenza della sbarretta e delle guide è trascurabile rispetto a R) Un campo uniforme di induzione magnetica $|B| = 1\ T$ è applicato perpendicolarmente al piano della figura. All'istante $t = 0$, la sbarretta di massa m viene lanciata con una velocità di $v_o = 10\ m/s$ verso destra.



Determinare: a) L'andamento della velocità in funzione del tempo. b) L'andamento nel tempo della corrente che scorre nel circuito c) Dimostrare come l'energia dissipata per effetto Joule sia in totale pari alla energia cinetica iniziale della sbarretta.

Una spira quadrata

Dato un punto a distanza αl sull'asse di una spira quadrata di lato l percorsa da una corrente I. Determinare il rapporto tra il campo magnetico generato dalla spira e quello del dipolo magnetico equivalente. In particolare eseguire il calcolo per $\alpha = 2$.



Un disco ruotante

Un disco conduttore di raggio R ruota attorno al proprio asse con velocità angolare ω. La carica totale è Q, essendo il disco sottile, la densità di carica superficiale sopra il disco varia con la distanza dal centro r con la legge: $\sigma = \frac{A}{\sqrt{R^2 - r^2}}$. Determinare: a) Il valore di A. b) Il campo di induzione magnetica generato nel centro di un anello di pari carica e raggio, ruotante alla stessa velocità angolare. c) Il campo di induzione magnetica nel centro del disco.

(dati del problema $Q = 3.14\ nC$, $\omega = 10^3\ rad/s$, $R = 2\ m$)

Mutua induzione tra spire quadrate

Determinare la mutua induzione in funzione delle distanza per due spire quadrate rispettivamente di $n_1 = 10$ e $n_2 = 100$ spire, di lato $l = 1\ cm$ a distanza $d \gg l$. Approssimare le spire come dei dipoli magnetici.

a) $d = 10l$ sullo stesso piano

b) $d = 10l$ sullo stesso asse

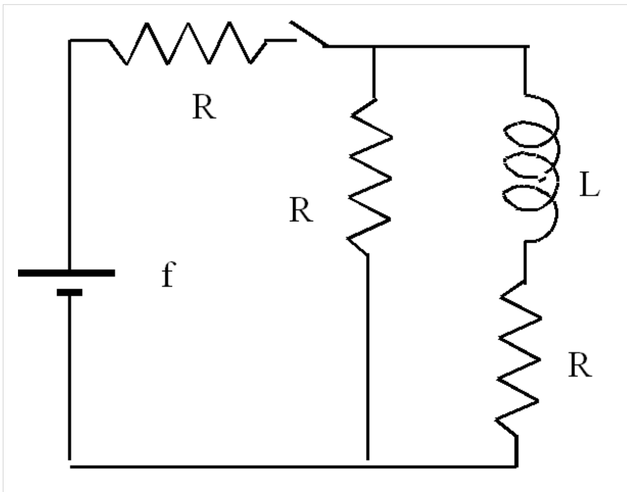
Spira filo

Una spira quadrata indeformabile soggetta alla forza peso con massa $m = 1\ g$ e lato a ed un filo rettilineo infinito sono situati nel medesimo piano verticale e percorsi dalla stessa corrente i. Il filo è parallelo ad uno dei lati della spira. Quale deve essere il valore della corrente perché la spira si trovi in equilibrio ad una distanza $x = a$ (dove x è la distanza dal lato più vicino alla spira al filo)

Induttanza con 2 Resistenze

All'istante iniziale viene chiuso l'interruttore del circuito mostrato in figura. Determinare la corrente che a regime scorre nei tre rami e quella quando è trascorso un tempo t_1 dalla chiusura dell'interruttore.

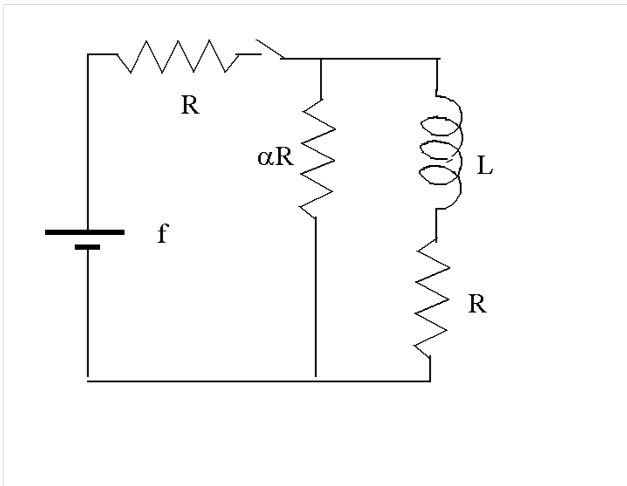
(dati del problema $f = 9\ V$, $R = 10\ \Omega$, $L = 1\ H$, $t_1 = 50\ ms$)



Induttanza con 3 Resistenze

All'istante iniziale viene chiuso l'interruttore del circuito mostrato in figura. Determinare la corrente che a regime scorre nei tre rami, la costante di tempo del circuito, e la massima corrente che scorre nel ramo di αR.

(dati del problema $f = 21\ V$, $R = 10\ \Omega$, $L = 19\ H$, $\alpha = 9$)



Spira e solenoide

Una spira circolare di raggio r_0, resistenza R_0, si trova all'interno di un solenoide di lunghezza l di N spire e raggio r_1. Il piano della spira forma un angolo di θ con l'asse del solenoide.

Nel solenoide scorre una corrente di I_0 e al tempo $t = 0$ viene staccato l'alimentatore e fatta scaricare la corrente su una resistenza R_1.

a) Determinare la mutua induzione tra spira e solenoide.

b) Determinare la corrente indotta nella spira al tempo $t = t_1$, trascurando l'induttanza della spira stessa.

c) Determinare l'energia totale dissipata durante il periodo $0 - t_1$ nella spira.

(dati del problema $N = 3000$, $r_1 = 10\ cm$, $r_0 = 5\ cm$, $R_0 = 0.1\ \Omega$, $R_1 = 1\ \Omega$, $t_1 = 0.5\ s$, $I_0 = 10\ A$, $\theta = 45°$, $l = 50\ cm$).

Due spire

Due bobine circolari compatte rispettivamente di raggio R_1ed R_2, formate da N_1ed N_2spire, sono coassiali parallele ad una distanza di d.

Determinare la loro mutua induzione.

b) La forza che si esercita tra di loro se sono percorse da correnti eguali I_1.

dati del problema $R_1 = 20\ cm$, $R_2 = 1\ cm$, $N_1 = 200$, $N_2 = 20$, $d = 20\ cm$, $I_1 = 10\ A$, il campo generato dalla bobina più grande è praticamente costante lungo il piano della seconda).

Dipolo magnetico e spira

Determinare il rapporto tra i campo magnetico tra il centro di una bobina circolare di raggio R ed un punto sul suo asse a distanza $R/2$.

Spira dentro solenoide

Un solenoide molto lungo ha un numero di spire N ed è lungo l. La corrente al suo interno cresce linearmente nel tempo secondo la legge: $I(t) = mt$. Al suo interno è posto un anello conduttore di raggio r e resistenza R.

Determinare la potenza dissipata nell'anello ed il campo magnetico al suo interno trascorso un tempo t_1

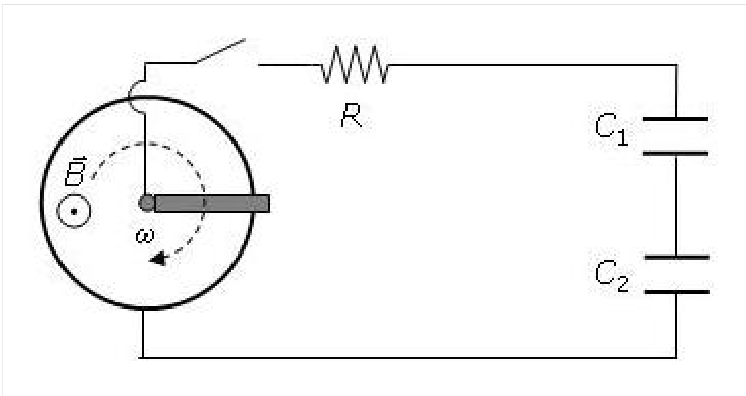
(dati del problema: $N = 1000$, $l = 1\ m$, $m = 10^4\ A/s$, $R = 0.001\ \Omega$, $r = 10\ cm$, $t_1 = 1\ ms$)

Spira in un campo magnetico ruotante

Una bobina, chiusa, di resistenza R, costituita da N spire quadrate di lato a, è posta fra le espansioni polari di un magnete che produce un campo magnetico B costante ed uniforme nella regione occupata dalla bobina. Il magnete viene fatta ruotare con velocità angolare costante ω in maniera tale che il campo magnetico ruota con velocità angolare ω. A regime la corrente massima che scorre nella babina vale I_o. Determinare l'intensità del campo magnetico, la potenza massima istantanea dissipata e la potenza media che deve fornire il motore per mantenere la velocità angolare costante.

(Dati del problema $R = 2.5\ \Omega$, $I_o = 0.5\ A$, $N = 200$, $a = 1\ cm$, $\omega = 200\ rad/s$, l'induttanza della bobina è trascurabile)

Sbarretta ruotante



Una barretta di lunghezza h è solidale con un perno che ruota a velocità angolare costante ω ed è collegata ad una spira circolare mediante un contatto strisciante. La spira è immersa in un campo di induzione magnetica di ampiezza B, perpendicolare al piano in cui giace la spira ed uscente da esso. Il perno e la spira chiudono, tramite un interruttore, il circuito in figura composto da una resistenza e due condensatori scarichi. Si calcoli: 1. la differenza di potenziale su ciascun condensatore a regime (ossia molto tempo dopo la chiusura dell'interruttore), specificando quali sono le facce a potenziale più alto; 2. l'energia dissipata sulla resistenza per effetto Joule durante la carica dei condensatori.

Dati: $h = 20\ cm$; $\omega = 200\ rad/s$; $B = 0.25\ T$; $R = 20\ \Omega$; $C_1 = 1\ \mu F$; $C_2 = 2\ \mu F$.

Spira in campo variabile

Una spira circolare di raggio a è immersa in un campo magnetico, normale al suo piano, che varia con la legge:

$$B = B_o\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

La spira ha una resistenza per unità di lunghezza pari a λ . Determinare 1) la corrente massima generata nella spira; 2) l'energia totale dissipata nella spira stessa.

(Dati del problema $a = 4\ cm$, $B_o = 0.1\ T$, $\tau = 1\ ms$, $\lambda = 0.5\ \Omega/m$, si trascuri l'induttanza della spira)

Campo magnetico terrestre

Il campo magnetico terrestre è simile a quello di un dipolo magnetico m disposto al centro della terra diretto da Sud a Nord. Determinare con questa ipotesi a) Il campo magnetico al polo Nord b) Il campo magnetico all'equatore c) Quale dovrebbe essere l'intensità di corrente in una spira che circondasse la terra all'equatore per annullare il campo magnetico terrestre a grande distanza.

(dati del problema: $m = 8 \cdot 10^{22}\ Am^2$, il raggio terrestre medio vale $r_T = 6367\ Km$)

Si ricorda che il campo di induzione magnetica di un dipolo magnetico vale:

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi r^5}\left[3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}\right]$$

Soluzioni

Un elettrone in un campo magnetico

Essendo:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV$$

$$|v| = \sqrt{\frac{2eV}{m}} = 5.93 \cdot 10^6\ m/s$$

quindi la componente di v nella direzione del campo vale:

$$v_{pa} = |v|\cos\vartheta = 2.96 \cdot 10^6\ m/s$$

mentre in quella perpendicolare vale:

$$v_\perp = |v|\sin\vartheta = 5.13 \cdot 10^6\ m/s$$

a) quindi:

$$T = \frac{2\pi m}{e|B|} = 358\ ns$$

b)

$$p = v_{pa}T = 1.06\ m$$

c)

$$R = \frac{v_\perp}{\omega} = \frac{v_\perp}{2\pi}T = 0.292\ m$$

Spira circolare

Non si può usare l'approssimazione del dipolo magnetico in quanto entrambi i punti sono troppo vicini alla spira per $z = 0$: $|B| = \frac{\mu_o I}{2R}$

mentre per $z = R/2$:

$$|B| = \frac{\mu_o I R^2}{2(R^2 + R^2/4)^{3/2}} = \frac{\mu_o I}{2R(5/4)^{3/2}}$$

Quindi il rapporto vale:

$$(5/4)^{3/2} = 1.40$$

Un dipolo ruotante

a) Il periodo vale:

$$T = \frac{1}{n} = 1\ ms$$

Quindi la carica positiva

$$q = \frac{p}{d} = 0.05\ C$$

equivale ad una spira di raggio $3d/4$percorsa da una corrente

$$I = \frac{q}{T} = \frac{np}{d} = 50\ A$$

Quindi ha un momento magnetico:

$$m^+ = \pi \left(\frac{3d}{4}\right)^2 I = 3.53 \times 10^{-2}\ Am^2$$

mentre, la carica negativa equivale ad una spira di raggio $d/4$percorsa da una corrente di segno opposto a prima pari a:

$$I = \frac{np}{d}$$

Quindi ha un momento magnetico:

$$m^- = -\pi \left(\frac{d}{4}\right)^2 I = -3.93 \times 10^{-3}\ Am^2$$

Il momento magnetico totale quindi vale:

$$m = m^+ + m^- = 3.14 \times 10^{-2}\ Am^2$$

b) Quindi a grande distanza genera un campo di induzione magnetica pari a:

$$B_a = \frac{\mu_o m}{2\pi\,(100d)^3} = 7.85 \times 10^{-10}\ T$$

Eguale, nei limiti della precisione del calcolo, al valore esatto:

$$B = \frac{\mu_o I \left(\frac{3d}{4}\right)^2}{2\left[\left(\frac{3d}{4}\right)^2 + (100d)^2\right]^{3/2}} - \frac{\mu_o I \left(\frac{d}{4}\right)^2}{2\left[\left(\frac{d}{4}\right)^2 + (100d)^2\right]^{3/2}} = 7.85 \times 10^{-10}\ T$$

c) Al centro non posso usare l'approssimazione del dipolo, ma debbo calcolare la sovrapposizione dei campi delle due spire:

$$B = \frac{\mu_o I}{2} \cdot \left[\frac{1}{\left(\frac{3d}{4}\right)} - \frac{1}{\left(\frac{d}{4}\right)} \right] = -4.19 \times 10^{-3}\ T$$

Una sbarretta metallica

Il movimento della sbarretta della sbarretta nel campo magnetico determina una variazione del flusso concatenato al circuiti. Quindi si genera una forza elettromotrice pari a, (non occupandosi ancora dei segni)

$$|f.e.m.| = \frac{d\phi}{dt}|B|\frac{dS}{dt}$$

dove S è la superficie istantanea del circuito, quindi $S = lx$ (scelta come origine di x la posizione al tempo $t = 0$ della sbarretta). Per cui:

$$f.e.m. = Bl\frac{dx}{dt} = Blv_x$$

Tale $f.e.m.$ provoca una corrente I il cui verso è tale da opporsi alla causa che la genera, cioè opporrà una forza resistente la cui direzione è determinata proprio da tale condizione. La forza risultante sulla sbarretta è:

$$F_x = -IBl$$

Il verso della corrente è quindi nel disegno antiroario. Il problema dinamico è unidimensionale a questo punto e la II equazione della dinamica è:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -IBl$$

Mentre per la maglia:

$$f.e.m = RI$$

$$Blv_x = RI$$

$$I = \frac{Blv_x}{R}$$

Sostituita nell'equazione della dinamica:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\frac{B^2 l^2 v_x}{R}$$

Cioè un moto viscoso, che corrisponde ad una velocità che diminuisce esponenzialmente nel tempo:

$$v_x = v_o e^{-B^2 l^2 t/mR}$$

Quindi con una costante di tempo pari a:

$\tau = \frac{mR}{B^2 l^2} = 10\ s$ (i freni dei treni sono ottenuti avvicinando dei grossi magneti alle ruote conduttrici e le correnti indotte provocano un frenamento dolce proporzionale in tale caso alla velocità angolare istantanea delle ruote, ma con un meccanismo simile a quello descritto qui).

b)

La corrente ovviamente ha lo stesso andamento esponenziale nel tempo:

$$I = \frac{Blv_o}{R} e^{-B^2 l^2 t/mR}$$

c)

L'energia cinetica iniziale vale:

$$\frac{1}{2} m v_o^2 = 50\ J$$

L'energia dissipata per effetto Joule nella resistenza vale:

$$E_d = \int_0^\infty I^2 R dt = \int_0^\infty \frac{B^2 l^2 v_o^2}{R} e^{-2B^2 l^2 t/mR} = \frac{1}{2} m v_o^2 = 50\ J$$

Una spira quadrata

Scelto un sistema di coordinate cartesiane con centro coincidente con l'asse della spira ed assi x ed y paralleli alle spire stesse. Un elemento del lato di destra parallelo all'asse y ha coordinate $\vec{dl_1} = (0, dy, 0)$ è a distanza $\vec{r} = (-l/2, y, \alpha l)$ dal punto sull'asse per cui:

$$\vec{dl_1} \times \vec{r} = \alpha l dy \vec{i} + \frac{l}{2} dy \vec{k}$$

Quindi la componente parallela all'asse, l'unica esistente per ragioni di simmetria, generata da tutto il lato vale:

$$B_z^1 = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{l}{2} I \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dy}{\left[(\frac{l}{2})^2 + y^2 + (\alpha l)^2\right]^{3/2}} \quad B_z^1 = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{l}{2} I \left[\frac{y}{(\frac{l}{2})^2 + (\alpha l)^2} \frac{1}{\sqrt{(\frac{l}{2})^2 + y^2 + (\alpha l)^2}} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}$$

Quindi per i 4 lati: $B_z = 4B_z^1 = \frac{\mu_o}{2\pi l} I \frac{4\sqrt{2}}{(1+4\alpha^2)\sqrt{1+2\alpha^2}}$

Mentre il campo generato sull'asse del dipolo equivalente vale: $B_{dz} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{I l^2}{\alpha^3 l^3} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{I}{\alpha^3 l}$

Quind il loro rapporto vale:

$$R = \frac{B_z}{B_{dz}} = \frac{4\alpha^3\sqrt{2}}{(1+4\alpha^2)\sqrt{1+2\alpha^2}}$$

In particolare per $\alpha = 2$ vale;

$$R = 0.89$$

Un disco ruotante

a)

$$Q = \int_0^R \frac{A 2\pi r dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 2\pi A R$$

$$A = \frac{Q}{2\pi R} = 2.5 \times 10^{-10}\ C/m$$

b) Nel caso dell'anello

$$I = \frac{Q}{T} = \frac{Q}{2\pi} \omega$$

$$B_z = \mu_o \frac{I}{2R} = \mu_o \frac{Q\omega}{4\pi R} = 1.57 \times 10^{-13}\ T$$

c) Nel caso del disco, consideriamo una generica corona circolare di spessore infinitesimo dr :

$$dQ = \sigma 2\pi r dr$$

$$dI = \frac{dQ}{2\pi} \omega = \frac{\sigma 2\pi r dr \omega}{2\pi} = \frac{A}{\sqrt{R^2 - r^2}} r dr \omega$$

$$dB_z = \mu_o \frac{dI}{2r} = \mu_o \frac{A dr \omega}{2\sqrt{R^2 - r^2}} = \mu_o \frac{Q\omega dr}{4\pi R\sqrt{R^2 - r^2}}$$

quindi:

$$B_z = \mu_o \int_0^R \frac{Q\omega dr}{4\pi R\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{\mu_o Q\omega}{4\pi R} \left[\arcsin \frac{r}{R}\right]_0^R = \frac{\mu_o Q\omega}{8R} = 2.5 \times 10^{-13}\ T$$

Mutua induzione tra spire quadrate

Approssimando e le due spire come due dipoli magnetici di modulo:

$$m_1 = n_1 I_1 l^2$$

$$m_2 = n_2 I_2 l^2$$

A causa della reciprocità della mutua induzione possiamo calcolare il campo generato dalla prima sulla seconda.

a) Sul piano l'unica componente dell'induzione magnetica generata da un dipolo magnetico è la componente entrante normale al piano delle spire:

$$B_{1z} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{m_1}{d^3} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{n_1 I_1 l^2}{d^3}$$

Quindi il flusso concatenato con la seconda spira vale:

$$\phi_2 = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{n_1 I_1 l^2}{d^3} n_2 l^2$$

$$M = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{n_1 n_2 l^4}{d^3} = \frac{\mu_o}{4\pi} l = 1\ nH$$

b) Sull'asse l'unica componente dell'induzione magnetica generata da un dipolo magnetico è la componente uscente normale al piano delle spire:

$$B_{1z} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{2m_1}{d^3} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{2n_1 I_1 l^2}{d^3}$$

Quindi il flusso concatenato con la seconda spira vale:

$$\phi_2 = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{2n_1 I_1 l^2}{d^3} n_2 l^2$$

$$M = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{2n_1 n_2 l^4}{d^3} = \frac{\mu_o}{2\pi} l = 2\ nH$$

Spira filo

Il campo generato dal filo vale, nel lato superiore in modulo:

$$B_1 = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{1}{x}$$

in quello inferiore sempre in modulo:

$$B_2 = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{1}{x+a}$$

La corrente sulla spira deve essere tale da essere concorde sul lato superiore a quella del filo. Le forze agenti sui lati verticali della spira sono opposte e contrarie, per cui la risultante è nulla, mentre sul lato superiore agisce una forza diretta come la verticale in modulo eguale a:

$$F_1 = \frac{\mu_o i^2 a}{2\pi x}$$

sul lato inferiore in senso opposto e in modulo:

$$F_2 = \frac{\mu_o i^2 a}{2\pi(x+a)}$$

imponendo quindi che:

$$F_1 - F_2 = mg$$

$$\frac{\mu_o i^2}{4\pi} = mg$$

$$i = \sqrt{\frac{4\pi mg}{\mu_o}} = 313\ A$$

Induttanza con 2 Resistenze

Applicando il teorema di Thevenin alla parte di circuito ai capi dell'induttanza:

$$f_{th} = f - \frac{f}{R+R}R = \frac{f}{2}$$
$$R_{th} = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$$

A regime la corrente nel ramo dell'induttanza come in quello centrale vale quindi:

$$I_{20} = I_{30} = \frac{f_{th}}{R_{th}} = \frac{f}{3R} = 0.3\ A$$

Mentre ovviamente il ramo del generatore fornirà una corrente doppia:

$$I_{10} = 0.6\ A$$

Scrivendo l'equazione della maglia equivalente nel ramo dell'induttanza la corrente che scorre sarà:

$$I_3 = I_{30}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = 0.16\ A$$

con $\tau = L/R_{th} = 0.066\ s$. Scrivendo la legge di Kirkkoff per il nodo e la prima maglia:

$$I_1 = I_2 + I_3$$
$$f = RI_1 + RI_2$$

Da cui eliminando I_1:

$$I_2 = \frac{f}{2R} - \frac{I_3}{2} = 0.37\ A$$
$$I_1 = I_2 + I_3 = 0.53\ A$$

Induttanza con 3 Resistenze

Applicando il teorema di Thevenin alla parte di circuito ai capi dell'induttanza:

$$f_{th} = f - \frac{f}{R+\alpha R}R = f\frac{\alpha}{\alpha+1} = 18\ V$$
$$R_{th} = R + \frac{\alpha}{\alpha+1}R = \frac{2\alpha+1}{\alpha+1}R = 19\ \Omega$$

A regime la corrente nel ramo dell'induttanza vale quindi:

$$I_{3f} = \frac{f_{th}}{R_{th}} = \frac{f\alpha}{R(1+2\alpha)} = 1\ A$$

Dovendo essere eguali:

$$I_{2f}\alpha R = I_{3f}R$$

Si ha che:

$$I_{2f} = \frac{f}{R(1+\alpha)} = 0.11\ A$$

Quindi nel ramo del generatore a regime:

$$I_{1f} = I_{2f} + I_{3f} = 1.11\ A$$

La costante di tempo vale:

$$\tau = \frac{L}{R_{th}} = \frac{L}{R}\frac{1+\alpha}{1+2\alpha} = 1\ s$$

Ovviamente all'istante iniziale comportandosi l'induttanza come un circuito aperto la corrente fornita dal generatore scorre nel solo ramo di αR e quindi la corrente vale:

$$I_{20} = \frac{f}{R(1+\alpha)} = 0.17\ A$$

Spira e solenoide

a) Il campo prodotto al centro del solenoide vale:

$$B = \frac{\mu_o N I}{l}$$

e quindi il flusso concatenato con la spira vale:

$$\phi = B\pi r_0^2 \cos\theta = \frac{\mu_o N I}{l}\pi r_0^2 \cos\theta$$

Quindi la mutua induzione vale:

$$M = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_o N}{l}\pi r_0^2 \cos\theta = 42\mu H$$

b) L'induttanza del solenoide vale

$$L_1 = \frac{\mu_o N^2 \pi r_1^2}{l} = 0.71\ H$$

Il solenoide si scarica secondo la legge:

$$I = I_0 e^{-t/\tau}$$

dove $\tau = L_1/R_1 = 0.71\ s$. La corrente indotta, trascurando l'induttanza della spira, vale:

$$I_{in} = \frac{1}{R_0}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{M}{R_0}\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{MR_1}{L_1 R_0} I_0 e^{-t/\tau}$$

che per $t = t_1$quindi:

$$I_{in} = 2.92\ mA$$

c) L'energia totale dissipata nella spira tra $t = 0$e $t = t_1$:

$$E = \int_0^{t_1} I_{in}^2 R_0 dt = \int_0^{t_1} \frac{M^2 R_1^2}{L_1^2 R_0} I_0^2 e^{-2t/\tau} dt = \frac{M^2 R_1}{2L_1 R_0} I_0^2 (1 - e^{-2t_1/\tau}) = 0.94\ \mu J$$

Due spire

a) Il campo generato dalla prima bobina sul suo asse, nel punto in cui si trova al prima bobina vale, in modulo:

$$|\vec{B}_1| = \frac{\mu_o}{2}\frac{R_1^2 I_1 N_1}{(R_1^2 + d_1^2)^{3/2}}$$

Quindi il flusso concatenato sulla seconda vale:

$$\Phi_c = N_2 |\vec{B}_1| \pi R_2^2$$

quindi la mutua induzione vale:

$$M = \frac{\mu_o}{2}\frac{\pi R_1^2 R_2^2 N_1 N_2}{(R_1^2 + d_1^2)^{3/2}} = 14.5\ \mu H$$

b) La seconda spira ha un momento di dipolo magnetico di:

$$|m_2| = \pi R_2^2 N_2 I_1$$

quindi la forza vale:

$$\vec{F} = grad(\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1)$$

quindi la forza è diretta secondo l'asse, attrattiva se le bobine sono equiverse, e di valore:

$$|F| = \frac{\mu_o}{2}\pi R_1^2 R_2^2 N_1 N_2 I_1^2 \left| \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(R_1^2 + z^2\right)^{-3/2}\right]\right|_{z=d} = 3\mu_o \pi R_1^2 R_2^2 N_1 N I_1^2 \frac{d}{\left(R_1^2 + d^2\right)^{3/2}} = 8.4\ N$$

Dipolo magnetico e spira

Non si può usare l'approssimazione del dipolo magnetico in quanto entrambi i punti sono troppo vicini alla spira, quindi per $z = 0$:

$$|B| = \frac{\mu_o I}{2\pi R}$$

mentre per $z = R/2$:

$$|B| = \frac{\mu_o I R^2}{2\pi (R^2 + R^2/4)^{3/2}} = \frac{\mu_o I}{2\pi R (5/4)^{3/2}}$$

Quindi il rapporto vale:

$$(5/4)^{3/2} = 1.39$$

Spira dentro solenoide

Il numero di spire per unità di lunghezza vale:

$$n = \frac{N}{l} = 1000\ m^{-1}$$

Il campo magnetico generato dal solenoide, in assenza dell'anello, vale:

$$B_s = \mu_o n I = \mu_o n m t$$

Quindi il flusso concatenato all'anello vale:

$$\phi_c = \mu_o n m \pi r^2 t$$

Quindi la f.e.m. indotta vale:

$$f.e.m = -\mu_o n m \pi r^2 = 0.39\ V$$

quindi la corrente circolante è costante e vale:

$$I_c = \frac{f.e.m.}{R} = -\frac{\mu_o n m \pi r^2}{R} = 395\ A$$

Quindi la potenza dissipata istantaneamente per effetto Joule vale:

$$P = I_c^2 R = 156\ W$$

La corrente circolante genera al centro dell'anello un campo pari a:

$$B_a = \frac{\mu_o I_c}{2r} = -\frac{\mu_o^2 n m \pi r}{2R}$$

Quindi il campo totale B_t vale:

$$B_t = B_s + B_a = \mu_o n m \left(t - \frac{\mu_o \pi r}{2R}\right)$$

quindi dopo t_1:

$$B_t = 0.01\ T$$

(notare come per $t \longrightarrow 0$ il campo, avendo trascurato l'induttanza, diventa negativo, tale risultato non fisico dipende dall'avere trascurato l'induttanza dell'anello, che non può essere trascurata nel momento iniziale)

Spira in un campo magnetico ruotante

La f.e.m: massima vale:

$$V_o = NBa^2\omega$$

La corrente massima che scorre è:

$$I_o = \frac{V_o}{R} = \frac{NBa^2\omega}{R}$$

$$B = \frac{RI_o}{Na^2\omega} = 0.31\ T$$

Mentre il valore della massima potenza istantanea vale:

$$P_m = V_o I_o = 0.62\ W$$

Mentre quella media:

$$P_e = \frac{P_m}{2} = 0.31\ W$$

Sbarretta ruotante

Detta θ l'angolo al tempo generico tra la sbarretta ed il filo che va dal perno al circuito. L'area attreversata dal campo magnetico B vale:

$$A = \frac{1}{2}h^2\theta$$

Ma ruotando la sbarretta a velocità angolare costante:

$$A = \frac{1}{2}h^2\omega t + \theta_o$$

(dove θ_o è l'angolo al tempo $t = 0$. Quindi il flusso concatenato al circuito istante per istante vale:

$$\Phi_c = B(\frac{1}{2}h^2\omega t + \theta_o)$$

La forza elettromotrice (f.e.m.) indotta sulla barretta è data da:

$$f = \frac{d\Phi_c}{dt} = (1/2)\omega h^2 B = 1\ V$$

1. A regime, nel circuito non scorre corrente, pertanto la tensione del generatore si ripartisce tra i condensatori 1 e 2 nelle proporzioni di $C_{1,2}/C_1$e $C_{1,2}/C_2$rispettivamente, essendo $C_{1,2} = C_1C_2/(C_1 + C_2)$la capacità equivalente della serie. Dunque:

$$V_{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}f = (2/3)f = 0.67VeV_{C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}f = (1/3)f = 0.33\ V$$

2. L'energia dissipata per effetto Joule si può calcolare come differenza tra il lavoro svolto dal generatore di f.e.m., pari a $L_{gen} = fQ$, ove $Q = C_{1,2}f$ è la carica accumulata su ciascun condensatore, e l'energia accumulata nei due condensatori:

$$E = fQ - (1/2)C_{1,2}f^2 = (1/2)C_{1,2}f^2 = 0.33\ \mu J$$

Spira in campo variabile

Il flusso concatenato con la spira vale:

$$\phi_c = B_o \pi a^2 \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Quindi la f.e.m. indotta nella spira vale:

$$f(t) = \frac{d\phi_c}{dt} = \frac{B_o \pi a^2}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Mentre la corrente vale:

$$I(t) = \frac{B_o \pi a^2}{2\pi a \lambda \tau} e^{-t/\tau} = \frac{B_o a}{2\lambda\tau} e^{-t/\tau}$$

Che è massima all'istante iniziale e vale:

$$\frac{B_o a}{2\lambda\tau} = 4\ A$$

La potenza dissipata vale:

$$P(t) = f(t)I(t) = \frac{B_o^2 \pi a^3}{2\lambda\tau^2} e^{-2t/\tau}$$

Quindi l'energia totale dissipata vale:

$$E_d = \frac{B_o^2 \pi a^3}{2\lambda\tau^2} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = \frac{B_o^2 \pi a^3}{4\lambda\tau} = 1\ mJ$$

Campo magnetico terrestre

a) In questo al polo Nord:

$$B_z = \frac{\mu_\circ |m|}{2\pi r_T^3} = 62\mu T$$

b) Mentre all'equatore:

$$B_z = -\frac{\mu_\circ |m|}{4\pi r_T^3} = -31\mu T$$

c) Nella spira dovrà circolare una corrente oraria e imponendo che il momento di dipolo magnetico sia eguale a quello della terra:

$$I\pi r_T^2 = m$$

da cui segue che:

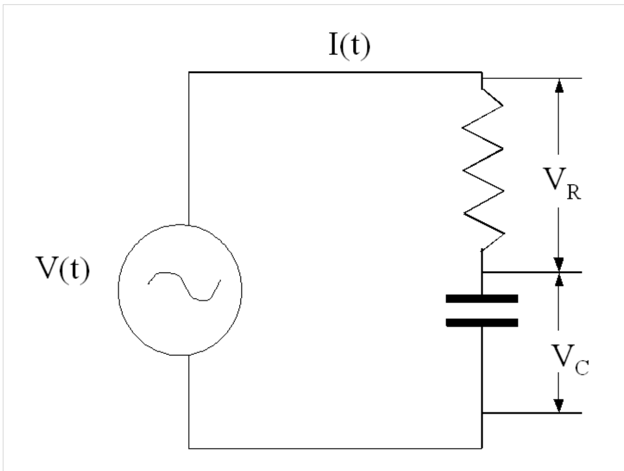
$$I = \frac{m}{\pi r^2} = 0.62 \cdot 10^9\ A$$ }}

Correnti alternate

Esercizi

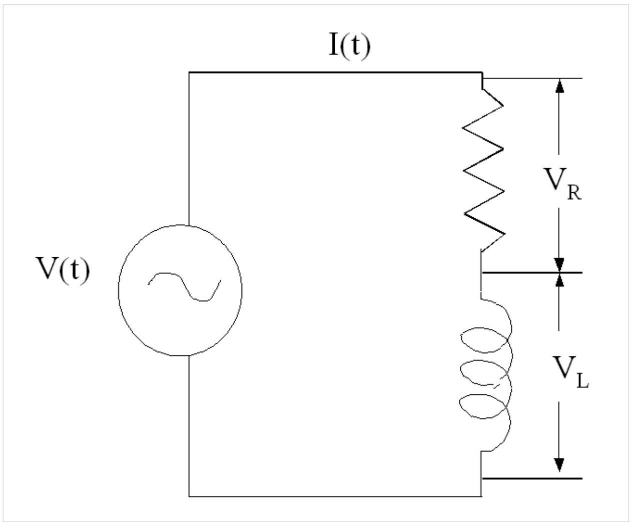
Circuito RC in corrente alternata

Consideriamo un generatore di corrente alternata come in figura che funziona a $\nu = 50\ Hz$, $V_{eff} = 220\ V$ con in serie una resistenza $R = 1\ k\Omega$, $C = 1\ \mu F$. Determinare la corrente I_{eff}, la tensione efficace ai capi della resistenza R e del condensatore C e lo sfasamento tra corrente φ_1 e generatore, tra $V_R(t)$ e generatore, tra $V_C(t)$ e generatore.



Circuito RL in corrente alternata

Consideriamo un generatore di corrente alternata come in figura che funziona a $\nu = 50\ Hz$, $V_{eff} = 220\ V$ con in serie una resistenza $R = 1\ k\Omega$, $L = 0.5\ H$. Determinare la corrente I_{eff}, la tensione efficace ai capi della resistenza R e dell'induttanza L e lo sfasamento tra corrente φ_1 e generatore, tra $V_R(t)$ e generatore, tra $V_L(t)$ e generatore.



Motore in corrente alternata

Un motore in corrente alternata si può rappresentare come una induttanza con in serie una resistenza. Il motore è alimentato a una presa normale di abitazione (ν, V_{eff}). Se la potenza assorbita dal motore è P_m (Potenza media), e vi è uno sfasamento di θ_0 tra corrente e tensione. Determinare:

a) L'impedenza totale del motore.

b) La resistenza e l'induttanza del motore.

c) Il valore della capacità di rifasamento, cioè una capacità da porre in serie al circuito in maniera da diminuire lo sfasamento portandolo a θ_1.

(dati del problema $\nu = 50\ Hz$, $V_{eff} = 220\ V$, $\theta_0 = -60^o$, $\theta_1 = -20^o$, $P_m = 150\ W$)

Circuito RCL in corrente alternata

Un circuito RCL serie è alimentato alla frequenza di risonanza. Nella induttanza può al massimo scorrere una corrente I_0. In tale condizione estrema determinare:

a) La differenza di potenziale massima ai capi dei vari elementi circuitali.

b) L'energia fornita in un periodo dal generatore.

c) La frequenza per cui la differenza di potenziale ai capi dell'induttanza sia due volte quella ai capi della capacità.

(dati del problema $I_0 = 1\ A$, $R = 10\ \Omega$, $L = 10\ mH$, $C = 100\ nF$)

Circuito RCRL in corrente alternata

Un circuito costituito da una resistenza R_1in parallelo con un condensatore C, in serie con un resistenza R_2ed una induttanza L.

a) Determinare percentualmente quanto la frequenza di risonanza esatta si discosti da quella approssimata.

b) L'impedenza del circuito alla frequenza di risonanza.

c) Il fattore di merito del circuito.

(dati del problema $R_1 = 1000\ \Omega$, $L = 10\ \mu H$, $C = 100\ nF$, $R_2 = 1\ \Omega$)

Limite circuito risonante

Un circuito è costituito da una resistenza R in parallelo con un condensatore C ed in serie una induttanza L. In quali limiti il circuito può considerarsi un circuito risonante?

Se in particolare la resistenza vale $R = 1\ k\Omega$quanto vale il fattore di merito?

(dati del problema $C = 1\ \mu F$, $L = 0.1\ mH$)

Solenoide ruotante

Un solenoide di raggio r, lunghezza l, di Nspire, ruota con velocità angolare $\omega = 10^3\ rad/s$ costante attorno ad un asse normale al suo asse di simmetria e passante per il centro del solenoide. Se è immerso in un campo magnetico uniforme il cui vettore di induzione magnetica è diretto all'istante iniziale lungo l'asse del solenoide con intensità $|B|$.

a) Determinare il valore efficace della forza elettromotrice indotta ai capi del solenoide.

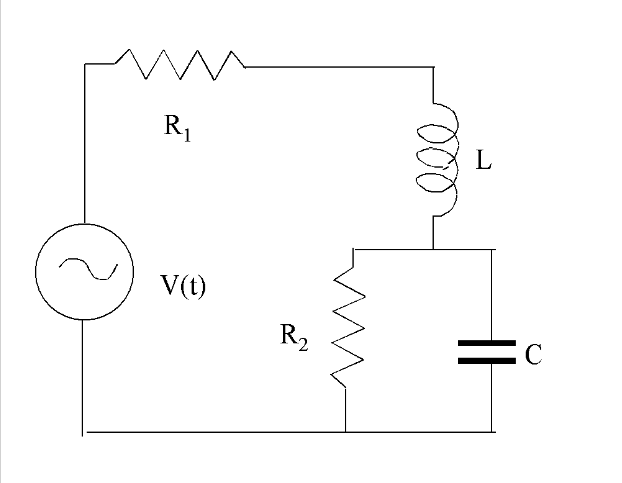
b) Se viene chiuso su una resistenza R (grande rispetto alla resistenza del filo del solenoide che quindi si trascura) quanto vale la potenza media dissipata (l'induttanza del solenoide non è trascurabile a queste frequenze).

(dati del problema $r = 7\ mm$, $l = 15\ cm$, $N = 1200$, $|B| = 10^{-3}\ T$, $R = 1.5\ \Omega$, $\omega = 10^3\ rad/s$)

Circuito risonante con 2 R

Consideriamo un generatore di corrente alternata come in figura l'ampiezza del generatore vale $V_o = 1\ mV$ con in serie una resistenza $R_1 = 0.001\ \Omega$, una induttanza $L = 1\ \mu H$ e in serie un condensatore $C = 1\ \mu F$ con in parallelo la sua resistenza di perdita R_2 che può avere tre valori $10\ k\Omega$, $1\ k\Omega$ e $10\ M\Omega$.

Determinare la frequenza di risonanza, il fattore di merito e la tensione ai capi della capacità nei tre casi: detti a), b) e c).

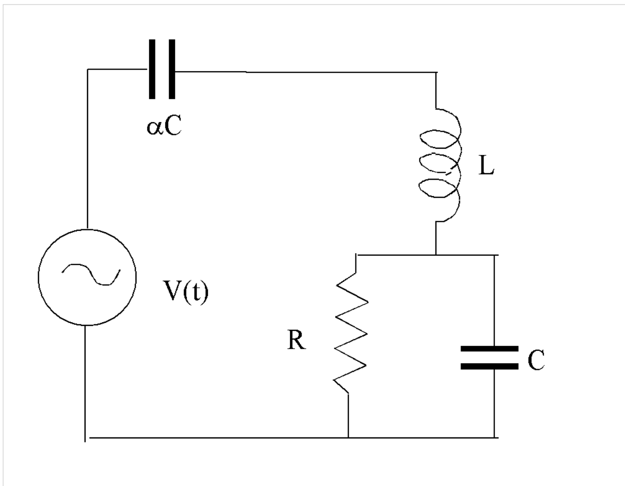


Circuito risonante con 2 C

Il circuito mostrato in figura è composto di un generatore in tensione alternata di ampiezza costante e pulsazione variabile:

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

La maglia è composta di una induttanza L e due condensatori in serie il primo, con perdite, rappresentate dalla resistenza R in parallelo, ed il secondo di capacità αC praticamente senza perdite.



a) Determinare la frequenza ν_R per cui la corrente efficace nella maglia sia massima

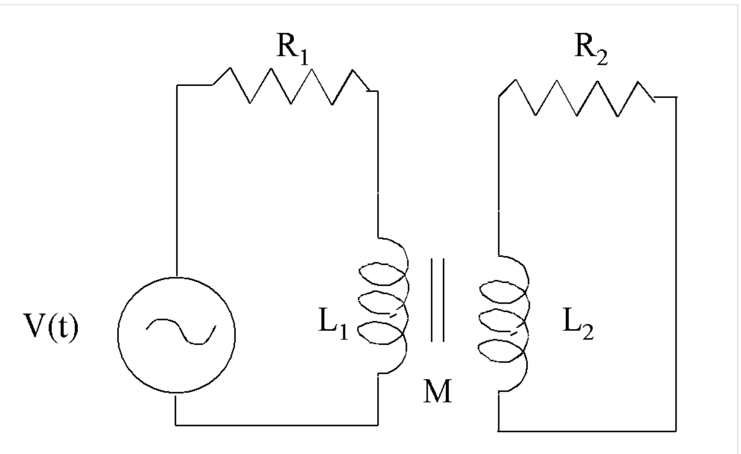
b) Il valore di tale corrente efficace.

c) Il valore del fattore di merito Q, di valore elevato, ipotesi che si può verificare a posteriori.

Suggerimento dai dati numerici l'intervallo di interesse è quello per cui $\omega RC \gg 1$, approssimare i conti ove possibile tenendo conto di tale fatto.

(dati del problema: $\alpha = 100$, $C = 1\ nF$, $L = 1\ H$, $R = 100\ M\Omega$, $V_o = 1\ V$).

Trasformatore con carico



Un generatore di tensione alternata a ω con tensione efficace V_{eff} è collegato ad un trasformatore come in figura.

Determinare la potenza fornita dal generatore per i due valori di R_2 dati.

(dati del problema $\omega = 50\ Hz$, $V_{eff} = 220\ V$, $L_1 = L_2 = M = 20\ H$, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_{2a} = 10\ \Omega$, $R_{2b} = 10\ k\Omega$)

Soluzioni

Circuito RC in corrente alternata

Soluzione:

L'equazione della maglia è (eliminando la variabile tempo esplicitamente dall'equazione):

$$V = IR + \frac{I}{j\omega C}$$

$$I = \frac{V}{R - \frac{j}{\omega C}}$$

Quindi:

$$I_{eff} = \frac{V_{eff}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} = 0.066\ A$$

Per quanto riguarda lo sfasamento tra corrente e generatore:

$$I = \frac{V}{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}(R + \frac{j}{\omega C})$$

quindi dall'algebra dei numeri complessi:

$$\varphi_1 = arctan\frac{1}{\omega CR} = 72^o$$

Quindi:

$$V_R = RI$$

$$V_{Reff} = I_{eff}R = 66\ V$$

Lo sfasamento con il generatore è lo stesso della corrente, essendo R un numero reale. Mentre:

$$V_c = \frac{I}{j\omega C}$$

$$V_{Ceff} = \frac{I_{eff}}{\omega C} = 210\ V$$

In questo caso:

$$V_c = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}}\frac{1}{j\omega C}(R + \frac{j}{\omega C}) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}}(-j\frac{R}{\omega C} + \frac{1}{\omega^2 C^2})$$

Quindi lo sfasamento tra tensione ai capi del condensatore e generatore vale:

$\varphi_2 = -arctan(\omega CR) = -17^o$

Se la frequenza diminuisse la parte della impedenza dovuta alla capacità in serie aumenterebbe al limite rendendo trascurabile la resistenza: il circuito diventerebbe molto simile ad un semplice condensatore, la tensione ai capi della resistenza sarebbe trascurabile: un circuito di questo genere, si usa per elimare le basse frequenze e si chiama infatti taglia basso. Notiamo come la pulsazione che delimita il passaggio tra la bassa e l'alta frequenza è quella per cui in modulo le due impedenze in modulo si equivalgono:

$R = \frac{1}{\omega C}$ cioè:

$\omega = \frac{1}{RC} = 1000\ rad/s$

$\nu = 159\ Hz$ Quindi a $50\ Hz$ la frequenza è bassa.

Circuito RL in corrente alternata

L'equazione della maglia è (eliminando la variabile tempo esplicitamente dall'equazione):

$$V = IR + j\omega LI$$

$$I = \frac{V}{R + j\omega L}$$

Quindi:

$$I_{eff} = \frac{V_{eff}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = 0.217\ A$$

Per quanto riguarda lo sfasamento tra corrente e generatore:

$$I = \frac{V}{R^2 + \omega^2 L^2}(R - j\omega L)$$

quindi dall'algebra dei numeri complessi:

$$\varphi_1 = arctan\frac{\omega L}{R} = -9^o$$

Quindi:

$$V_R = RI$$

$$V_{Reff} = I_{eff} R = 217\ V$$

Lo sfasamento con il generatore è lo stesso della corrente, essendo R un numero reale. Mentre:

$$V_L = j\omega LI = \frac{V\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}(jR + \omega L)$$

$$V_{Leff} = \omega L I_{eff} = 34\ V$$

Quindi lo sfasamento tra tensione ai capi dell'induttanza e del generatore vale:

$$\varphi_3 = arctan\left(\frac{R}{\omega L}\right) = 81^o$$

Se la frequenza aumentasse la parte della impedenza dovuta alla induttanza in serie aumenterebbe al limite rendendo trascurabile la resistenza: il circuito diventerebbe molto simile ad un semplice condensatore, la tensione ai capi della resistenza sarebbe trascurabile: un circuito di questo genere, si usa per eliminare le alte frequenze e si chiama infatti circuito taglia alto.

Motore in corrente alternata

definendo $\omega = 2\pi\nu$

a) Essendo:

$$P_m = V_{eff} I_{eff} \cos\theta_0$$

$$I_{eff} = \frac{P_0}{V_{eff}\cos\theta_0} = 1.36\ A$$

$$Z = \frac{V_{eff}}{I_{eff}} = \frac{V_{eff}^2\cos\theta_0}{P_0} = 161\ \Omega$$

b)

Quindi:

$$R = Z\cos\theta_0 = 81\ \Omega$$

ed $\omega L = -Z\sin\theta_0 = 140\ \Omega$ $L = 0.44\ H$

c)

L'impedenza totale nel caso della capacità di rifasamento vale:

$$Z = \frac{R}{\cos\theta_1} = 86\ \Omega$$

questo vuol dire che:

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2 = Z^2$$

Eliminando la soluzione $-\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \sqrt{Z^2 - R^2}$

Che corrisponde a $\theta_1 > 0$, escluso dai dati del problema. Rimane:

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \sqrt{Z^2 - R^2}$$

da cui:

$$\frac{1}{\omega C} = \omega L - \sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$C = \frac{1}{\omega\left(\omega L - \sqrt{Z^2 - R^2}\right)} = 29\ \mu F$$

Circuito RCL in corrente alternata

a) La corrente che scorre alla risonanza, per cui il generatore fornisce una

$$I_0 R = f_{max} = 10\ V$$

ai capi della resistenza vi sono quindi $V_R = 10\ V$ mentre detta:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^6\ rad/s$$

La tensione ai capi del condensatore vale:

e ovviamente la stessa ai capi dell'induttanza:

$$V_L = I_0 \omega_r L = 10^4\ V$$

b)

La potenza media vale:

$$P_m = I_0 f_{max}/2 = 5\ W$$

quindi in un periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_r}$$

da cui:

$$E = 31.4\ \mu J$$

c)

Basta imporre che:

$$2\frac{I_x}{\omega_x C} = I_x \omega_x L$$

$$\omega_x = \omega_r/\sqrt{2}$$

$$\nu_x = \omega_r/2\pi\sqrt{2} = 112.5\ kHz$$

Circuito RCRL in corrente alternata

a)

L'impedenza totale del circuito vale:

$$Z_{tot} = R_2 + j\omega L + \frac{1}{1/R_1 + j\omega C} = R_2 + j\omega L + \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C} = R_2 + j\omega L + \frac{R_1(1 - j\omega R_1 C)}{1 + \omega^2 R_1^2 C^2}$$

la parte immaginaria vale:

$$Z_{imm} = \omega L - \frac{\omega R_1^2 C}{1 + \omega^2 R_1^2 C^2}$$

che si annulla per:

$$\omega_r = 9.9995 \cdot 10^5\ rad/s$$

mentre la pulsazione approssimata di risonanza vale:

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1 \cdot 10^6\ rad/s$$

quindi:

$$\frac{\omega_r - \omega_a}{\omega_a} = -0.005\%$$

b)

$$Z_r = R_2 + \frac{R_1}{1 + \omega_r^2 R_1^2 C^2} = 1.1\ \Omega$$

c)

$$Q = \frac{\omega_r L}{Z_r} = 9.1$$

Limite circuito risonante

La parte reale dell'impedenza vale:

$$Z_R = \frac{R}{1+\omega^2 C^2 R^2}$$

Mentre quella immaginaria:

$$Z_{imm} = \omega L - \frac{\omega C R^2}{1+\omega^2 C^2 R^2}$$

La parte immaginaria si annulla se:

$$\omega = \frac{1}{RC}\sqrt{\frac{CR^2}{L} - 1}$$

Cioè solo se:

$$\frac{CR^2}{L} > 1$$

$$R > 10\ \Omega$$

In questo caso specifico con $R = 1\ k\Omega$:

$$\omega_R = 10^5\ rad/s$$

$$Z_R = 0.1\ \Omega$$

ed il fattore di merito vale:

$$Q = \frac{\omega_R L}{Z_R} = 100$$

Solenoide ruotante

a) Il flusso che attraversa ogni spira del solenoide vale:

$$\phi = |B| \pi r^2 \cos \omega t$$

Quindi dalla legge di Faraday-Newman-Lentz applicata al solenoide di N spire:

$$V = -\frac{d\phi}{dt} = N B_o \pi r^2 \omega \sin \omega t$$

$$V_{eff} = \frac{N B_o \pi r^2 \omega}{\sqrt{2}} = 56.4\ mV$$

b) L'induttanza del solenoide vale:

$$L = \mu_o \frac{N^2}{l} \pi r^2 = 0.536\ mH$$

L'impedenza totale del circuito vale:

$$Z = j\omega L + R$$

Quindi la corrente efficace:

$$I_{eff} = \frac{V_{eff}}{|Z|} = \frac{V_{eff}}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} = 35.5\ mA$$

Lo sfasamento tra corrente e tensione vale:

$$\varphi = -\arctan \frac{\omega L}{R} = -0.34\ rad$$

Quindi della potenza totale dissipata:

$$P_{tot} = I_{eff} V_{eff} \cos \varphi = 1.89\ mW$$

Circuito risonante con 2 R

L'impedenza del parallelo tra capacità e resistenza R_2vale:

$$1/Z_p = j\omega C + \frac{1}{R_2}$$

$$Z_p = \frac{R_2}{1+\omega^2 C^2 R_2^2} - j\frac{\omega C R_2^2}{1+\omega^2 C^2 R_2^2}$$

Quindi la parte reale dell'impedenza vale:

$$Z_R = R_1 + \frac{R_2}{1+\omega^2 C^2 R_2^2}$$

mentre la immaginaria:

$$Z_{imm} = \omega L - \frac{\omega C R_2^2}{1+\omega^2 C^2 R_2^2}$$

La immaginaria si annulla se:

$$\omega L - \frac{\omega C R_2^2}{1+\omega^2 C^2 R_2^2} = 0$$

cioè se:

$$L = \frac{C R_2^2}{1+\omega_r^2 C^2 R_2^2}$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{C R_2^2}{L} - 1}\frac{1}{C R_2}$$

ma essendo in tutti e tre i casi:

$CR_2^2/L \gg 1$(nel caso b) vale $1E6$) si ha che trascurando nella radice 1rispetto a CR_2^2/L .

$$\omega_r \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^6\ rad/s$$

Alla frequenza di risonanza la parte reale vale:

$$Z_R = R_1 + \frac{R_2}{1+\omega_r^2 C^2 R_2^2}$$

In questo caso si ha che: a) $Z_R = 0.0011\ \Omega$, b) $Z_R = 0.002\ \Omega$e c) $Z_R = 0.001$

Quindi essendo il fattore di merito:

$$Q = \frac{\omega_r L}{Z_R}$$

nei tre casi vale:

a) $Q = 909$, b) $Q = 500$e c) $Q = 1000$

La corrente massima che scorre nel circuito alla risonanza vale:

$$I_o = \frac{V_o}{Z_R}$$

nei tre casi vale: a) $I_o = 0.909\ A$, b) $I_o = 0.5\ A$ e c) $I_o = 1\ A$

Essendo in ogni caso:

$$\frac{1}{\omega C} \ll R_2$$

Una frazione minima della corrente va nel ramo resistivo quindi con buona approssimazione:

$$V_c = \frac{I_o}{\omega C}$$

nei tre casi vale: a) $V_c = 0.909\ V$, b) $V_c = 0.5\ V$ e c) $V_c = 1\ V$

Circuito risonante con 2 C

L'impedenza totale della maglia utilizzando l'algebra dei numeri complessi:

$$Z_{tot} = j\omega L + \frac{1}{1/R + j\omega C} + \frac{1}{j\omega\alpha C} = Z_R + jZ_{imm}$$

dove:

$$Z_{imm} = \omega L - \frac{\omega R^2 C}{1+\omega^2 R^2 C^2} - \frac{1}{\omega\alpha C}$$

$$Z_R = \frac{R}{1+\omega^2 R^2 C^2}$$

quando siamo in bassa frequenza:

$$\omega RC \ll 1$$

$$Z_R \approx R$$

Quindi la parte reale è costante.

Mentre quella immaginaria:

$$Z_{imm} \approx \omega L - \omega R^2 C - \frac{1}{\omega\alpha C}$$

diverge a bassa frequenza essendo nel nostro caso:

$$L \ll R^2 C$$

Ad alta frequenza invece:

$$\omega RC \gg 1$$

$$Z_R \approx \frac{1}{\omega^2 R C^2}$$

mentre la parte immaginaria:

$$Z_{imm} \approx \omega L - \frac{1}{\omega C} - \frac{1}{\omega\alpha C}$$

è composto da una induttanza L ed una capacità equivalente:

$$C_{eq} = \frac{1}{1/C + 1/(\alpha C)} = \frac{\alpha C}{\alpha + 1}$$

a) Quindi la pulsazione di risonanza:

$$\omega_R = \sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha L C_{eq}}} = 3.14 \cdot 10^4\ rad/s$$

la frequenza di risonanza:

$$\nu_R = \frac{\omega_R}{2\pi} = 5\ kHz$$

b) A tale frequenza la parte immaginaria si annulla quindi rimane solo la parte reale:

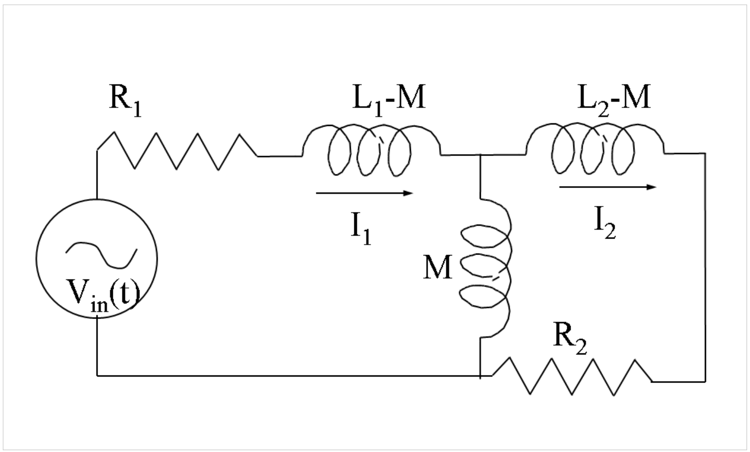
$$I_{eff} = \frac{V_{eff}}{Z_R} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}\omega_R^2 R C_{eq}^2 = 0.07\ A$$

c) Il fattore di merito vale:

$$Q = \frac{\omega_R L}{Z_R} = 1000$$

Trasformatore con carico

Il circuito equivalente è mostrato in figura. Quindi l'impedenza vista dal generatore è:



$$Z = R_1 + \frac{j\omega M R_2}{j\omega M + R_2}$$

Razionalizzando:

$$Z = R_1 + \frac{j\omega M R_2 (R_2 - j\omega M)}{\omega^2 M^2 + R_2^2}$$

Quindi la parte immaginaria vale:

$$Z_i = \frac{j\omega M R_2^2}{\omega^2 M^2 + R_2^2}$$

e quella reale:

$$Z_r = R_1 + R_2 \frac{\omega^2 M^2}{\omega^2 M^2 + R_2^2}$$

Lo sfasamento vale:

$$\varphi = -arctan \frac{Z_i}{Z_r}$$

Mentre:

$$|Z| = \sqrt{Z_i^2 + Z_r^2}$$

Quindi essendo:

$$I_{eff} = \frac{V_{eff}}{|Z|}$$

La potenza vale:

$$P = I_{eff} V_{eff} \cos\varphi$$

nei due casi (sostituendo i dati numerici):

$$P_a = 1.63\ kW$$

$$P_b = 6.3\ W$$

Onde

Onde

Esercizi

Radiazione del Sole

Sulla superficie della terra a causa del sole arriva energia sotto forma di un vettore di Poynting di intensità $|I_T|$, il sole dista dalla terra d_S ed ha un raggio di R_S. Determinare la pressione della radiazione solare sulla terra, la potenza totale emessa dal sole e la pressione di radiazione sulla superficie del sole.

(dati del problema $|I_T| = 1400\ W/m^2$, $d_S = 1.5 \times 10^{11}\ m$, $R_S = 6.98 \times 10^8\ m$)

Componenti del campo e.m.

Sapendo che l'ampiezza del vettore di Poynting, dovuto alla radiazione solare, vale $|I_T|$ determinare l'ampiezza quadratica media della componente elettrica e magnetica.

(dati del problema $|I_T| = 1400\ W/m^2$)

Vento solare

Immaginando di avere delle particelle di densità ρ che si trovano di fronte ad una stella tipo il sole che ha una massa M_S. La radiazione che arriva sulla terra che dista d_S dal sole vale $|I_T|$. Determinare al di sotto di quale raggio le particelle vengono respinte dalla pressione di radiazione invece che essere attratte dalla forza di Gravitazione universale. Supporre che tutta la radiazione venga assorbita dalle particelle.

(dati del problema $|I_T| = 1400\ W/m^2$, $d_S = 1.5 \times 10^{11}\ m$, $\rho = 1\ g/cm^3$, $G = 6.67 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$, $M_S = 2 \times 10^{30}\ kg$)

Linea di trasmissione

Calcolare la velocità delle onde in una linea di trasmissione coassiale costituita da due cilindri conduttori (molto lunghi) coassiali, l'interno ha un raggio esterno r_1 mentre l'esterno ha raggio interno $r_2 > r_1$. Tra i due cilindri vi è un mezzo isolante di costante dielettrica relativa pari ad ϵ_r e permabilità relativa eguale a quella del vuoto.

(dati del problema $\epsilon_r = 4$)

Onda piana su disco

Si supponga che su un disco di raggio R incide normalmente al suo asse un'onda piana polarizzata linearmente il cui valore del campo magnetico efficace di H_{eff}. Dell'onda e.m. una frazione a viene assorbita mentre il resto $r = 1 - a$ viene riflessa. Determinare:

a) L'ampiezza (non il valore efficace) del vettore di Poynting dell'onda e.m.

b) L'energia depositata sul disco in un tempo t_1.

c) La forza esercitata dalla radiazione sul disco.

(dati del problema $H_{eff} = 100\ A/m$, $R = 1\ cm$, $a = 0.2$, $t_1 = 10\ s$)

Soluzioni

Radiazione del Sole

La pressione di radiazione sulla terra vale semplicemente:

$$P_T = \frac{|I_T|}{c} = 4.7 \cdot 10^{-6}\ Pa$$

Assolutamente trascurabile rispetto alla pressione atmosferica che vale circa $10^5\ Pa$. Per calcolare la pressione reale si sarebbe dovuto tenere conto della percentuale di luce riflessa dalla terra il cosidetto albedo che vale nel caso della Terra 0.38 questo comporta che la pressione

sia in realtà un poco maggiore $P_v = 1.38 P_T = 6.4 \cdot 10^{-6}\ Pa$

La potenza totale emessa dal sole viene ottenuta moltiplicando l'intensità del vettore di Poynting per la superficie di una sfera di raggio pari alla distanza Terra Sole:

$$W_S = |I_T| 4\pi d_S^2 = 4 \cdot 10^{26}\ W$$

Sulla superficie del sole l'intensità del vettore di Poynting (emettendo il sole una onda sferica che quindi diminisce di ampiezza con il quadrato della distanza), vale:

$$|I_S| = |I_T| \frac{d_S^2}{R_S^2} = 6.5 \cdot 10^7\ W/m^2$$

Quindi la pressione di radiazione sulla superficie del sole vale:

$$P_S = \frac{|I_S|}{c} = 0.22\ Pa$$

Componenti del campo e.m.

La radiazione solare non è polarizzata per cui posso scrivere che:

$$|I_T| = \left| \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_o} \right| \approx \frac{E_m^2}{c\mu_o} \approx \frac{cB_m^2}{\mu_o}$$

Avendo supposto che tutte le direzioni sono equiprobabili e quindi che le componenti normali di E sono mediamente eguali. Essendo la componente di $B_\perp = E/c$.

Quindi:

$$E_m = \sqrt{I_T c \mu_o} \approx 726\ V/m$$

$$B_m = \sqrt{\frac{I_T \mu_o}{c}} \approx 2.4\ \mu T$$

Vento solare

La forza dovuta alla gravità, detto r_x il raggio incognito e r la distanza dal sole,

vale:

$$F_G = G \frac{M_S \rho \frac{4}{3} \pi r_x^3}{r^2}$$

Mentre la forza dovuta alla pressione di radiazione vale:

$$F_P = \frac{1}{c} \frac{I_T \pi r_x^2 d_S^2}{r^2}$$

Imponendo che:

$$F_P > F_G$$

si ha che:

$$\frac{1}{c}\frac{I_T \pi r_x^2 d_S^2}{r^2} > G\frac{M_S \rho 4/3 \pi r_x^3}{r^2}$$
$$r_x < \frac{3 I_T d_S^2}{G M_S 4 \rho} = 0.59\ \mu m$$

Linea di trasmissione

La velocità delle onde sarà pari a quella che vale per tutte le linee di trasmissione:

$$c' = \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}}$$

Dove L_l è l'induttanza per unità di lunghezza e C_l è la capacità per unità di lunghezza.

Presupponendo che la stessa corrente ma di segno opposto scorra nel cilindro interno ed in quello esterno. Il campo di induzione magnetica nella regione di spazio tra i due cilindri vale

$$|B| = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \qquad r_1 < r < r < r_2$$

per la legge di Ampère. L'energia del campo di induzione magnetica nel tratto di lunghezza l vale:

$$U = \frac{1}{2} L_l l I^2 = \frac{1}{2}\int_T \frac{|B|^2}{\mu_o} d\tau$$

Dove T è la regione di spazio compresa tra i due cilindri. Quindi l'induttanza per unità di lunghezza vale:

$$L_l = \frac{1}{\mu_o l I^2}\int_{r_1}^{r_2} |B|^2 l 2\pi r dr = \frac{1}{\mu_o I^2}\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{\mu_o I}{2\pi r}\right)^2 2\pi r dr = \frac{1}{\mu_o 2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

La capacità per unità di lunghezza viene calcolata dalla differenza di potenziale presente tra le due armature: il cilindro esterno e quello interno. Il campo elettrico per ragioni di simmetria è radiale e detta λ la densità di carica eguale ed opposta sulle due armature, attraverso il teorema di Gauss si ha che:

$$|E| = \frac{\lambda l}{2\pi \epsilon_o \epsilon_r r}$$

Quindi la differenza di potenziale tra l'armatura esterna e quella interna vale:

$$V = \int_{r_1}^{r_2} |E| dr = \frac{\lambda l}{2\pi \epsilon_o \epsilon_r}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

Quindi la capacità per unità di lunghezza vale:

$$C_l = \frac{Q}{Vl} = \frac{\lambda l}{Vl} = \frac{2\pi \epsilon_o \epsilon_r}{\ln r_2/r_1}$$

Quindi la velocità con cui si propagano le onde elettromagnetica nel cavo coassiale vale:

$$c' = \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}} = \frac{1}{\sqrt{1/(\mu_o 2\pi)(\ln r_2/r_1)(2\pi \epsilon_o \epsilon_r)/(\ln r_2/r_1)}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \epsilon_o \epsilon_r}} \approx 1.5 \cdot 10^8\ m/s$$

Onda piana su disco

a)

Dato che:

$$E_{eff} = cB_{eff} = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \epsilon_o}} \mu_o H_{eff} = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} H_{eff}$$

$$S_{eff} = E_{eff} H_{eff} = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \epsilon_o}} H_{eff}^2 = 3.8 \cdot 10^6 \ W/m^2$$

$$S_o = 2S_{eff} = 7.54 \cdot 10^6 \ W/m^2$$

b)

$$E_d = \pi R^2 t_1 S_{eff} a = 2387 \ J$$

c)

$$F = \frac{S_{eff}}{c}(2-a)\pi R^2 = 7.2 \cdot 10^{-6} \ N$$

Cristallografia

Cristallografia

Esercizi

Primi vicini

Determinare la distanza tra i primi vicini in un cristallo di Alluminio che ha una densità di $2.75\ g/cm^3$, il peso molecolare dell'Alluminio è 27 in u.a. ed il suo reticolo è cubico a facce centrate.

Densità

Determinare la densità del Litio (Li) che ha una struttura cristallina b.c.c. che un peso atomico di 6.9 u.a. ed ha un passo reticolare di 0.35 nm.

Tungsteno

Determinare la struttura del Tungsteno (W) che è un materiale cubico che ha p.m. 189 u.a., densità $\rho = 19.25\ g/cm^3$, passo reticolare $a = 0.315\ nm$.

Diffrazione

Si usano dei raggi X di lunghezza d'onda $\lambda = 0.154\ nm$ e si trova che i due più piccoli angoli di Bragg sono $19.4\ ^o$ e $28\ ^o$. Determinare il passo reticolare a ed il tipo di reticolo cristallino, nell'ipotesi di reticolo cubico.

Soluzioni

Primi vicini

La massa nel S.I. di un atomo di Alluminio vale:

$$m_{Al} = 27 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27}\ kg$$

In una cella convenzionale di un reticolo cubico a facce centrate (f.c.c.), costituito da un cubo di lato a), vi sono quattro elementi quindi la densità vale:

$$\rho = \frac{4m_{Al}}{a^3}$$

da cui:

$$a = \sqrt[3]{4m/\rho} = 0.402\ nm$$

La distanza tra i primi vicini nel reticolo f.c.c. dell'Alluminio:

$$d = \frac{a}{\sqrt{2}} = 0.284\ nm$$

Densità

essendo nel b.c.c:

$$\rho = \frac{2m}{a^3} = 2 \times 6.9 \times 1.66 \cdot 10^{-27}/(0.35 \cdot 10^{-9})^3 = 0.535 g/cm^3$$

Tungsteno

Se fosse cubico semplice avrebbe una densità di:

$$\rho_1 = \frac{m}{a^3} = 10 \ g/cm^3$$

Se fosse bcc:

$$\rho_2 = \frac{2m}{a^3} = 20 \ g/cm^3$$

Mentre se fosse fosse fcc:

$$\rho_3 = \frac{4m}{a^3} = 40 \ g/cm^3$$

Quindi è bcc.

Diffrazione

Si mostra facilmente come il secondo angolo di Bragg è eguale per tutti i reticoli cubici, quindi semplicemente si ha che, la dimensione del secondo vettore reciproco più corto in dimensioni vale:

$$\vec{G}_2 = \frac{4\pi}{a}\hat{i}$$

Se riscriviamo la legge di Bragg in funzione del reticolo reciproco:

$$2k \sin\theta_2 = |G_2|$$

essendo $k = 2\pi/\lambda$ segue che:

$$a = \frac{\lambda}{\sin\theta_2} = 0,328 \ nm$$

Essendo:

$$\sin\theta_1 = 0.33$$

Per quanto riguarda il reticolo se fosse un reticolo bbc (reciproco fcc):

$$|G_1| = \frac{2\pi}{a}\sqrt{2}$$

da cui:

$$\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{a\sqrt{2}} = 0.33$$

quindi è bcc.

Infatti se fosse stato fcc:

$$|G_1| = \frac{2\pi}{a}\sqrt{3}$$

$$\sin\theta_1 = \frac{\lambda\sqrt{3}}{a2} = 0.406$$

Fonti e autori delle voci

Fonte:: http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=97558 *Autori:*: G4, Ramac

Esercizi di fisica con soluzioni *Fonte:*: http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=220955 *Autori:*: Albmont, Diablo, Enzo D'Ambrosio, Pasquale.Carelli, Pietrodn, Ramac, The Doc, Vituzzu, Wim b, 12 Modifiche anonime

Cinematica *Fonte:*: http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=222508 *Autori:*: LoStrangolatore, Pasquale.Carelli, The Doc

Statica e dinamica del punto materiale *Fonte:*: http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=222509 *Autori:*: LoStrangolatore, Pasquale.Carelli, Ramac, 2 Modifiche anonime

Energia meccanica *Fonte:*: http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=222510 *Autori:*: Diablo, LoStrangolatore, Pasquale.Carelli, 2 Modifiche anonime

Moti relativi *Fonte:*: http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=222511 *Autori:*: LoStrangolatore, The Doc

Dinamica di sistemi di punti materiali *Fonte:*: http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=222512 *Autori:*: LoStrangolatore, Pasquale.Carelli

Corpi rigidi *Fonte:*: http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=222513 *Autori:*: LoStrangolatore, Pasquale.Carelli, Ramac

Quantità di moto *Fonte:*: http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=222514 *Autori:*: Airon90, LoStrangolatore, Pasquale.Carelli, Wim b, 1 Modifiche anonime

Proprietà meccaniche dei fluidi *Fonte:*: http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=144189 *Autori:*: Ramac, 1 Modifiche anonime

Calore *Fonte:*: http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=222515 *Autori:*: LoStrangolatore, Pasquale.Carelli, Ramac

Il I principio della termodinamica *Fonte:*: http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=222516 *Autori:*: LoStrangolatore, Pasquale.Carelli, Ramac, 1 Modifiche anonime

Elettrostatica *Fonte:*: http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=222517 *Autori:*: Diablo, LoStrangolatore, Pasquale.Carelli, The Doc, 5 Modifiche anonime

La legge di Gauss *Fonte:*: http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=222518 *Autori:*: Diablo, LoStrangolatore, Pasquale.Carelli, The Doc, 1 Modifiche anonime

La corrente elettrica *Fonte:*: http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=222519 *Autori:*: Diablo, LoStrangolatore, Pasquale.Carelli, The Doc, 5 Modifiche anonime

Magnetismo *Fonte:*: http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=222520 *Autori:*: Diablo, LoStrangolatore, Pasquale.Carelli, The Doc, 3 Modifiche anonime

Correnti alternate *Fonte:*: http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=222521 *Autori:*: LoStrangolatore, Pasquale.Carelli, 1 Modifiche anonime

Onde *Fonte:*: http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=222522 *Autori:*: Diablo, LoStrangolatore, Pasquale.Carelli

Cristallografia *Fonte:*: http://it.wikibooks.org/w/index.php?oldid=222523 *Autori:*: LoStrangolatore, Pasquale.Carelli

Fonti, licenze e autori delle immagini

Licenza