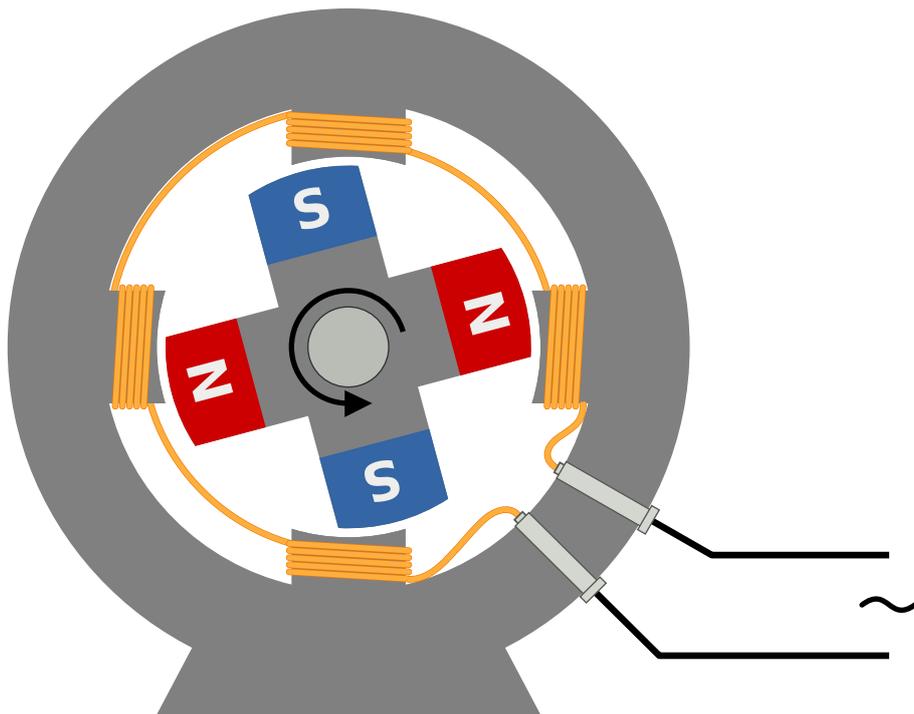




Alfonso Sommacal

# ELETTROTECNICA





Alfonso Sommacal

# Elettrotecnica

it.wikibooks.org

2022

Questo testo proviene dal sito  
<https://it.wikibooks.org/wiki/Elettrotecnica>  
ed è stato scritto collettivamente dagli utenti di tale sito

*Principale autore:*  
Alfonso Sommacal

*Questa versione del libro è aggiornata al*  
16 marzo 2022

*In copertina:*  
Schema di un generatore sincrono. *Autore:* Edoarado; *licenza:* pubblico dominio; *fonte:*  
<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Alternador.svg>

**Wikibooks non dà garanzie sulla validità dei suoi contenuti.** Per i dettagli vedi:  
[https://it.wikibooks.org/wiki/Wikibooks:General\\_disclaimer](https://it.wikibooks.org/wiki/Wikibooks:General_disclaimer)

Quest'opera è soggetta alla licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo  
3.0 Unported. Per leggere una copia della licenza visita il sito:  
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.it>

---

## Indice

|    |   |    |
|----|---|----|
| 1  | Campo elettrostatico                                      | 1  |
| 2  | Capacità  | 5  |
| 3  | Condensatori  | 7  |
| 4  | Correnti costanti nei circuiti                            | 9  |
| 5  | Campo magnetico   | 13 |
| 6  | Campo elettrodinamico                                     | 17 |
| 7  | Comportamento dei materiali immersi in un campo magnetico | 27 |
| 8  | Grandezze alternate sinusoidali                           | 37 |
| 9  | Circuiti percorsi da correnti alternate                   | 41 |
| 10 | Potenza attiva, reattiva, apparente                       | 53 |
| 11 | Grandezze periodiche non sinusoidali                      | 55 |
| 12 | Sistemi polifasi  | 59 |
|    | Elenco delle immagini                                     | 65 |

Elettrotecnica è un settore dell'ingegneria che generalmente si occupa dello studio ed applicazione dell'elettricità. Secondo una tendenza moderna, taluni distinguono la tecnica delle correnti forti e di bassa frequenza da quella delle correnti deboli e di alta frequenza. La parte generale dell'elettrotecnica studia le correnti elettriche, sia continue che alternate e gli effetti che esse producono.

Quanto verrà qui presentato intende essere solamente una esposizione particolareggiata di alcuni aspetti salienti di tale branca dell'ingegneria afferenti alle correnti forti e di bassa frequenza.

## Campo elettrostatico

La legge di Coulomb stabilisce quantitativamente quale è la legge della forza con cui due cariche elettriche, o praticamente due corpi carichi di elettricità, si attraggono o si respingono.

Tale legge è stata ricavata sperimentalmente misurandola forza di repulsione tra due sferette metalliche cariche di elettricità dello stesso segno. La legge di Coulomb è valida solo per corpi carichi di piccole dimensioni rispetto alla loro distanza, al limite per cariche puntiformi:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2}$$

dove  $F$  è la forza misurata in newton (sistema  $MKQS$ ),  $q$  e  $q'$  sono le cariche dei due corpi misurate in Coulomb,  $r$  è la distanza tra i due corpi ed  $\epsilon$  è una costante chiamata costante dielettrica del vuoto.

Vediamo ora, quale è l'origine di queste forze. Quando si carica, per esempio, una sferetta di elettricità si genera in tutto lo spazio circostante un nuovo stato di cose che viene chiamato campo elettrostatico.

Ogni altra carica immersa in questo campo elettrico è soggetta ad una forza che dipende dal particolare valore del campo elettrico nel punto stesso ove è situata la carica.

Si definisce come intensità del campo elettrostatico il rapporto tra la forza a cui è soggetta una carica  $q'$  e la carica stessa. Pertanto l'intensità del campo elettrostatico, indicata con  $E$ , è la forza a cui è assoggetta una carica unitaria, posta nel punto ove si calcola il campo elettrico.

Nel caso che il campo elettrico sia dovuto ad una sola carica puntiforme  $q$ , l'intensità  $E$  del campo sarà perciò:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

tale relazione da il modulo del vettore  $E$ . La sua direzione, ovviamente, è quella della retta congiungente la carica inducente il campo  $q$  ed il punto ove il campo viene calcolato (distante  $r$  da  $q$ ).

La forza che tale campo elettrostatico esercita su una carica  $q'$  è:

$$F = Eq'$$

Calcoliamo ora quale è il lavoro compiuto dalla forza  $F$  quando la carica  $q'$  unitaria si muove nel campo elettrico di un tratto  $dl$ . Si ha notoriamente:

$$dL = F \cos[\theta] dl = E \cos[\theta] dl$$

dove  $\theta$  è l'angolo formato tra la direzione del campo elettrostatico e la direzione dello spostamento elementare  $dl$ .

Se lo spostamento è finito tra due punti  $P_1$  e  $P_2$  il lavoro totale è:

$$L = \int_{P_1}^{P_2} E \cos[\theta] dl$$

Nel caso di campo elettrico dovuto ad una carica concentrata  $q$  il lavoro compiuto dal campo elettrico nello spostamento della carica unitaria da  $P_1$  a  $P_2$  si ottiene sostituendo nella espressione del lavoro il valore ricavato in precedenza per  $E$ . Nel calcolo dell'integrale, si deve notare che  $\cos(\theta)dl$  è uguale all'elemento infinitesimo di distanza tra carica inducente  $q$  e carica unitaria e che i limiti dell'integrale, dopo aver effettuata tale sostituzione, sono  $r_1$  e  $r_2$ , rispettivamente distanze tra carica  $q$  e i due punti  $P_1$  e  $P_2$ :

$$\begin{aligned} L &= \int_{P_1}^{P_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cos[\theta] dl = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = U(r_1) - U(r_2) \end{aligned}$$

dove:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + C$$

è l'integrale indefinito della espressione precedente cambiato di segno. La funzione  $U(r)$  è una funzione scalare che derivata rispetto ad  $r$  e cambiata di segno da l'intensità del campo elettrico  $E$ . La funzione  $U(r)$  si chiama potenziale elettrostatico. La conoscenza di tale grandezza scalare permette di determinare il campo elettrico sulla

carica unitaria secondo le relazioni date.

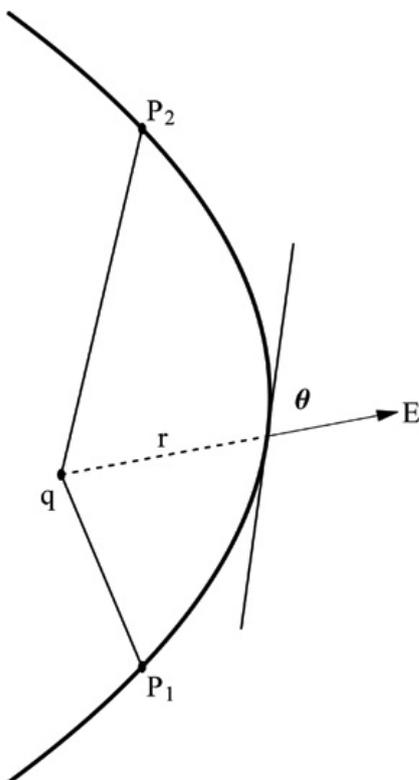
La funzione  $U(r)$  è definita a meno di una costante  $C$  arbitraria, tuttavia nella pratica la costante non ha importanza in quanto si considerano sempre differenze di potenziale.

Nel sistema  $MKQS$ , l'unità di misura del potenziale è il *Volt* =  $1 \text{ Joule} / 1 \text{ Coulomb}$ , l'intensità del campo elettrico si misura perciò in *Volt/metro*.

Se esistono più cariche inducenti si dimostra facilmente che il potenziale totale è la somma dei potenziali parziali:

$$U = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i}$$

Nel caso che le cariche siano distribuite in modo continuo su una superficie o entro un volume si definiscono rispettivamente la densità superficiale di carica  $\sigma = dq/dSup$ , e la densità cubica di carica  $\delta = dq/dVol$ .



Nei due casi, il potenziale totale dovuto alla distribuzione continua di cariche è dato dalla somma di infiniti potenziali infinitesimi (integrale) dovuti rispettivamente alla carica contenuta in un elemento infinitesimo di superficie ( $dq = \sigma dSup$ ) o in un elemento infinitesimo di volume ( $dq = \delta dVol$ ).

Per rappresentare graficamente l'andamento del campo elettrostatico generato da una o più cariche si ricorre ai concetti di linee di forza e superfici equipotenziali. Si definiscono come linee di forza quelle curve aventi la proprietà che in ogni punto la tangente alla curva dà la direzione del campo elettrico  $E$ . Per ogni punto dello spazio (tranne nei punti ove vi sono cariche) passa una e una sola linea di forza. Si definiscono, invece, come superfici equipotenziali quelle superfici nelle quali il potenziale  $U$  ha valore costante. Queste superfici sono in ogni punto normali alla direzione del campo elettrico. Ne segue, perciò, che allo spostarsi di una carica su una superficie equipotenziale il campo produce lavoro nullo.

Mettiamo ora in evidenza una proprietà del campo elettrico. Vogliamo trovare, cioè, qual è il valore del flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa (Teorema di Gauss).

Come flusso del campo elettrico attraverso una superficie  $S$  s'intende il valore dell'integrale:

$$\Phi_s(E) = \int_s E \cos[\theta] ds$$

dove con  $\theta$  si è indicato l'angolo tra la direzione del campo  $E$  e la direzione della normale all'elemento infinitesimo di superficie  $ds$ .

Nel caso di una superficie chiusa contenente una carica puntiforme sostituendo ad  $E$  il valore ricavato in precedenza e scrivendo  $ds$  in funzione dell'angolo solido sotto cui tale superficie elementare è vista dal punto in cui è concentrata la carica, calcolando l'integrale:

$$\int_s E \cos[\theta] ds \quad \text{si ottiene } \Phi_s(E) = \frac{q}{q_0}$$

qualunque sia la forma della superficie racchiudente la carica.

Se le cariche che generano il campo sono distribuite nello spazio con densità  $\delta$  il flusso totale attraverso  $S$  si ottiene sommando i flussi elementari dovuti alle sole cariche elementari contenute entro la superficie  $S$ .

Un altro fenomeno interessante dei campi elettrostatici (dovuti, cioè, a cariche in quiete) è quello per cui le cariche si distribuiscono sulla superficie dei conduttori. Per giungere a questa affermazione si fa uso del teorema di Gauss e del fatto che affinché le cariche rimangano in quiete è necessario che all'interno del conduttore che le possiede sia nullo il campo elettrico, o ciò che è lo stesso, sia costante il potenziale (potenziale del corpo). Scelta, infatti, una superficie chiusa interna al conduttore, in questa è nullo in ogni punto il campo elettrico e quindi il flusso relativo; per il teorema di Gauss, perciò, deve essere nulla la carica contenuta entro la superficie. Il ragionamento può essere ripetuto per qualsiasi superficie interna, per cui si può concludere che se il corpo possiede delle cariche elettrostatiche queste potranno trovarsi solo sulla superficie.

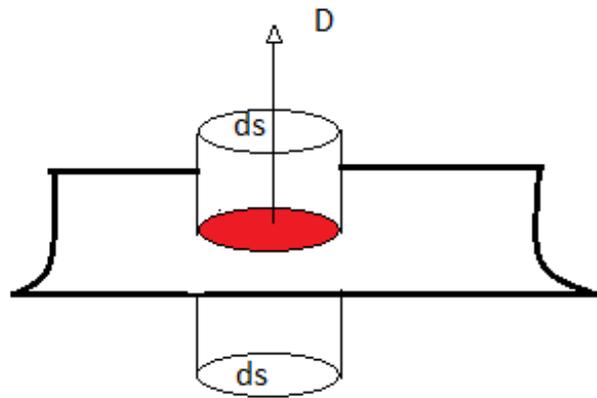
Introduciamo ora un nuovo vettore chiamato induzione elettrostatica o spostamento elettrico ( $D$ ). Tale vettore è diretto come il campo elettrostatico  $E$  ed ha il valore

$$D = \epsilon_0 E$$

La proprietà fondamentale dell'induzione elettrica si ottiene calcolando il flusso attraverso una superficie  $S$  intorno ad una carica. Dalla relazione che da il flusso del campo elettrico:

$$\Phi_s(E) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{si ricava immediatamente, } \Phi_s(D) = q$$

Ora consideriamo un conduttore sulla superficie del quale sia distribuita una carica con densità  $\sigma$ . Calcoliamo il flusso del vettore  $D$  attraverso una superficie chiusa costituita da due superfici elementari  $ds$ , una interna e l'altra esterna al conduttore e a distanza infinitesima dalla superficie del conduttore stesso. Superficie ovvero costituita dal tubo di forza tangente alla superficie  $ds$ .



Attraverso la superficie interna  $ds$  il flusso di  $D$  è nullo in quanto all'interno del conduttore il campo elettrico ( $E = \frac{D}{\epsilon_0}$ ) è nullo. Attraverso la parete laterale del tubo di forza non vi è flusso uscente in quanto  $E$ , e quindi  $D$ , è parallelo alla superficie stessa. Pertanto, il flusso di  $D$  attraverso la superficie chiusa considerata, si riduce al flusso di  $D$  attraverso la superficie elementare  $ds$  esterna (la superficie chiusa contiene la carica  $\sigma ds$ ): si calcola semplicemente per mezzo della relazione prima trovata ( $\Phi_s(D) = q$ ).

$$D ds = \sigma ds$$

Perciò, concludendo, il vettore  $D = \epsilon_0 E$  è un vettore parallelo a  $E$  il cui modulo in un punto infinitamente vicino alla superficie di un conduttore è uguale alla densità superficiale di carica nel punto considerato

$$D = \sigma \quad \left( \frac{\text{Coulomb}}{\text{m}^2} \right)$$

## Capacità

Passiamo adesso a considerare la capacità dei conduttori. È facile riconoscere che il potenziale  $U$  a cui va un corpo quando possiede una carica  $q$  è proporzionale a  $q$ . Infatti l'espressione del potenziale relativo ad un corpo conduttore con carica distribuita sulla superficie  $\sigma$  è:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\sigma dS}{r}$$

Si vede perciò che raddoppiando la carica posseduta dal corpo anche il potenziale raddoppia. Il rapporto costante tra carica e potenziale si chiama capacità:

$$C = \frac{q}{U}$$

La capacità si misura in  $\frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}}$  (*Farad*).

Per calcolare la capacità di un conduttore isolato nello spazio, basta calcolare il potenziale in un qualsiasi punto interno (abbiamo visto che il potenziale all'interno dei conduttori è costante) e applicare la relazione  $C = \frac{q}{U}$ .

Consideriamo ora il caso di più conduttori isolati fissi nello spazio. Indicando con  $q_1, q_2, q_3, \dots$  le cariche possedute dai conduttori e con  $U_1, U_2, U_3, \dots$  i rispettivi potenziali si dimostra che questi ultimi sono funzioni lineari delle cariche:

$$U_1 = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1n}q_n$$

$$U_2 = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2n}q_n$$

.....

$$U_n = a_{n1}q_1 + a_{n2}q_2 + \dots + a_{nn}q_n$$

In queste relazioni i coefficienti  $a$  sono costanti (indipendenti dalle cariche) dipendenti unicamente dalle dimensioni e posizioni relative dei singoli conduttori.

---

Fonte del testo:

<https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Elettrotecnica/Capacit%C3%A0&oldid=386911>



## Condensatori

Il caso più importante dal punto di vista pratico è quello relativo al sistema costituito da due soli conduttori; tale sistema prende il nome di condensatore. Consideriamo il caso semplice (benché importante nella pratica) di condensatore piano costituito da due superfici piane, cariche rispettivamente con densità superficiale  $+\sigma$  e  $-\sigma$  poste a distanza infinitesima.

Consideriamo, analogamente a quanto abbiamo fatto parlando del vettore  $D$ , una superficie chiusa di forma cilindrica avente come basi due elementi infinitesimi  $ds$  paralleli ad una delle superfici del condensatore e giacenti da parti opposte di questa ed avente come superficie laterale il tubo di forza tangente alle  $ds$ .

Il flusso del vettore  $D$  attraverso la superficie chiusa considerata è uguale, come abbiamo visto in precedenza, alla carica contenuta nella superficie chiusa:

$$D_1 dS + D_2 dS = \sigma dS$$

Data la simmetria del sistema  $D_1$  e  $D_2$  sono di valore uguale ma di verso opposto; si può scrivere perciò:

$$|D_1| = |D_2| = \frac{\sigma}{2} \quad |E_1| = |E_2| = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Analogo ragionamento può essere fatto per l'altra superficie piana del condensatore.

Il campo elettrico  $E$  nell'interno del condensatore è uguale alla somma dei campi dovuti alle superfici cariche con uguale densità  $\sigma$  ma con segno diverso, quindi si ha:

$$E = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} + \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

All'esterno del condensatore il campo elettrico è nullo. Infatti, ogni carica elementare  $+\sigma dS$  posta su una delle superfici del condensatore viene neutralizzata dalla carica  $-\sigma dS$  posta sull'altra superficie del condensatore a distanza infinitesima  $\Delta$  dalla prima.

Le relazioni che legano i potenziali alle cariche in un sistema di conduttori diventano nel nostro caso di condensatore piano con armature di superficie  $S$ , poste a distanza infinitesima  $\Delta$  (o comunque molto piccola rispetto ad  $S$ ), e cariche rispettivamente con  $q_1 = +\sigma S = +q$ ,  $q_2 = -\sigma S = -q$ :

$$\begin{cases} a_{11}q - a_{12}q = U_1 \\ a_{21}q - a_{22}q = U_2 \end{cases}$$

da cui si ottiene:

$$U_2 - U_1 = (a_{12} + a_{21} - a_{11} - a_{22})q = \frac{q}{C}$$

dove con  $C$ , costante di proporzionalità tra  $q$  e  $(U_2 - U_1)$ , si è indicata la capacità del condensatore.

La differenza di potenziale  $(U_2 - U_1)$  si ricava integrando l'espressione del campo elettrico ricavata prima:

$$U_2 - U_1 = \int_0^\Delta \frac{\sigma}{\epsilon_0} ds = \frac{\sigma \Delta}{\epsilon_0}$$

perciò la capacità  $C$  assume il valore:

$$\frac{q}{U_2 - U_1} = \frac{\sigma S}{\sigma \frac{\Delta}{\epsilon_0}} = \epsilon_0 \frac{S}{\Delta} \quad (\textit{farad})$$

Vediamo, infine, di calcolare il lavoro che si deve eseguire per stabilire una differenza di potenziale  $(U_2 - U_1)$  fra le armature di un condensatore. Per fare ciò si devono togliere le cariche positive da una armatura e trasferirle sull'altra.

Indichiamo con  $dq$  la carica infinitesima e con  $(U_2 - U_1)$  la differenza di potenziale raggiunta ad un certo istante.

Il lavoro fatto per trasportare la carica  $dq$  da un punto a potenziale  $U_2$  ad un altro a potenziale  $U_1$  è:

$$dL = (U_2 - U_1)dq = U dq$$

e quindi:

$$L = \int_0^Q U dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

Questo lavoro viene immagazzinato sotto forma di energia potenziale elettrostatica entro il campo elettrico generato dalle cariche elettriche sulle armature. Se le armature sono a distanza infinitesima, il campo è diverso da zero (e costante) solo tra le armature stesse, perciò l'energia specifica per unità di volume è:

$$W = \frac{\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}}{S \Delta}$$

Tale relazione si può scrivere semplicemente, ricordando che è

$$\begin{aligned} Q &= \sigma S, & \sigma &= D = \epsilon_0 E, & Q &= (U_2 - U_1)C \\ \Delta E &= U_2 - U_1 \\ W &= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} ED \quad \frac{\textit{Joule}}{\textit{m}^3} \end{aligned}$$

che rappresenta l'energia dovuta ad un campo elettrostatico contenuta nell'unità di volume.

Fonte del testo:

<https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Elettrotecnica/Condensatori&oldid=415228>

## Correnti costanti nei circuiti

Consideriamo in un conduttore una sezione  $S$ . Definiamo come intensità di corrente la carica che passa attraverso la superficie  $S$  nell'unità di tempo.

Se nel tempo  $dt$  passa la carica  $dq$  si avrà:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

L'intensità di corrente  $i$  si misura evidentemente in  $\frac{\text{Coulomb}}{\text{secondi}}$ . Tale unità di misura si chiama Ampere.

Definiamo ancora come densità di corrente  $J(\frac{\text{Ampere}}{\text{m}^2})$  il rapporto tra l'intensità di corrente che passa attraverso una sezione di un conduttore e il valore della sezione stessa; evidentemente l'intensità di corrente che passa attraverso una sezione si può considerare come il flusso della densità di corrente attraverso la stessa superficie:

$$i = \int_S J \cos \theta \, ds = \Phi_s \quad (J)$$

Passiamo ora a parlare della legge di **Ohm**. Affinché le cariche (gli elettroni) entro un conduttore si muovano è necessario che siano sottoposti ad un campo elettrico  $E$  non nullo. Ciò equivale a dire che tra due punti qualsiasi del conduttore deve venir mantenuta una differenza di potenziale.

La legge di **Ohm** fissa la dipendenza tra corrente  $i$  che scorre in un conduttore e differenza di potenziale che è necessario applicare ai suoi estremi:

$$U_2 - U_1 = R i$$

dove  $R$  è una costante chiamata resistenza del conduttore che si può esprimere in funzione delle caratteristiche fisiche del conduttore:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Con  $\rho$  (resistività) si è indicata una costante che dipende unicamente dal materiale da cui è costituito il conduttore e dalla sua temperatura. L'unità di resistenza è l'**Ohm** ( $\Omega$ ) = 1 Volt/1 Ampere.

Le due relazioni precedenti si possono esprimere più sinteticamente in una sola relazione. Consideriamo, a tale scopo, un elemento infinitesimo di conduttore di sezione  $ds$ , di lunghezza  $dl$ , alle cui estremità sia applicata una differenza di potenziale  $dU$ .

Si può scrivere dalla definizione di densità di corrente:

$$di = J dS$$

La resistenza del conduttore è:

$$R = \rho \frac{dl}{dS}$$

e quindi la legge di **Ohm**:

$$dU = R di = \rho \frac{dl}{dS} J dS = \rho dl J$$

cioè:

$$\frac{dU}{dl} = \rho J$$

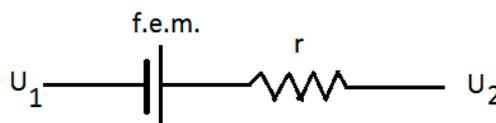
pertanto si ha infine:

$$E = \rho J$$

relazione che lega il campo elettrico nel conduttore alla densità della corrente.

Finora abbiamo considerato elementi passivi, per i quali è necessario applicare dall'esterno una differenza di potenziale ai corpi per farvi circolare una corrente. Vi sono elementi, chiamati generatori, che hanno in se la capacità di creare ai loro estremi (poli) una differenza di potenziale. Ogni generatore è caratterizzato dalla forza elettromotrice (*f.e.m.*), che è la differenza di potenziale che si misura ai suoi capi quando non vi è passaggio di corrente. La definizione di *f.e.m.* discende dal fatto che ogni generatore ha una resistenza interna diversa da zero, per cui la differenza di potenziale ai suoi estremi è minore della *f.e.m.* nel caso di passaggio di corrente per effetto della caduta di potenziale nella resistenza.

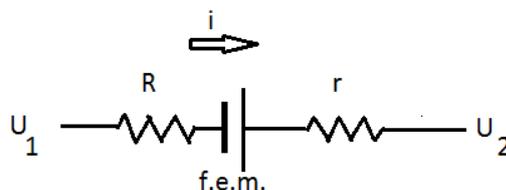
Un generatore può essere, quindi, schematizzato come segue:



$$U_2 - U_1 = f - r$$

dove  $f$  è il valore della *f.e.m.* del generatore ed  $r$  è la sua resistenza interna.

La legge di **Ohm** si può generalizzare al caso in cui un circuito comprenda resistenze e generatori. Consideriamo il circuito della figura seguente



Si è indicato con  $R$  il valore della resistenza del circuito, con  $f$  e  $r$  rispettivamente la *f.e.m.* e la resistenza interna del generatore. La differenza di potenziale  $U_2 - U_1$  sia tale da far circolare la corrente nel senso indicato dalla freccia. Nel caso che la *f.e.m.* sia nulla la legge di **Ohm** dà:

$$U_2 - U_1 = (R + r) i$$

Se la *f.e.m.* è diversa da zero ed è tale da favorire il passaggio di corrente nel senso indicato, è evidente che la  $U_2 - U_1$  necessaria a far circolare la corrente  $i$  sarà minore. Si avrà perciò:

$$U_2 - U_1 = (R + r) i - f$$

Questa relazione è conosciuta sotto il nome di legge di **Ohm** generalizzata.

Passiamo ora a richiamare brevemente le leggi di Kirckoff. Le leggi di Kirckoff permettono di risolvere il problema di determinare le intensità di corrente nei singoli conduttori di una rete comunque complessa comprendente resistenze e *f.e.m.*

Ogni rete è composta di elementi detti nodi e maglie. Un nodo è un elemento ove concorrono più conduttori. Una maglia è costituita da un insieme chiuso di conduttori (comprendenti resistenze e *f.e.m.*) percorsi una sola volta.

La prima legge si riferisce ai nodi e stabilisce che la somma algebrica delle correnti confluenti ad un nodo è nulla.

$$\Sigma i = 0$$

La prima legge discende dal fatto che in corrispondenza del nodo tanta è la corrente che vi arriva quanta è quella che lo lascia, non potendosi avere ivi accumulo di cariche.

La seconda legge di Kirckoff si riferisce alle maglie e asserisce che la somma algebrica delle *f.e.m.* presenti nei rami di una maglia deve uguagliare la somma algebrica delle cadute di potenziale nelle resistenze presenti nei diversi rami:

$$\Sigma f_i = \Sigma (R_i i)$$

L'espressione precedente si ricava facilmente scrivendo per ogni ramo della maglia la legge di **Ohm** generalizzata e sommando le diverse equazioni.



## Campo magnetico

L'esperienza insegna che lo spazio nelle vicinanze di un conduttore percorso da corrente è sempre sede di un particolare campo di forze che prende nome di **campo magnetico**: al punto tale, anzi, che corrente elettrica e campo magnetico appaiono come due grandezze tutt'affatto indivisibili nel senso che la ove circola una corrente elettrica è reperibile nello spazio un campo magnetico.

Di più, può per via sperimentale mettersi in luce un complesso di qualità caratteristiche del campo che può così riassumersi:

- la configurazione del campo magnetico è determinata unicamente dalla forma dei circuiti attraversati da corrente,
- può ottenersi per mezzo di un solenoide rettilineo sufficientemente lungo rispetto al suo diametro un campo magnetico praticamente uniforme per tutta la lunghezza del solenoide stesso,
- un campo magnetico generato da un magnete permanente non è in nulla distinguibile da quello generato dalle correnti elettriche.

È ora possibile definire una grandezza che appare caratteristica di un campo magnetico, nel senso che essa è capace di determinarlo perfettamente una volta nota in ogni suo punto.

Per orientare la mente pensiamo di disporre di un campo magnetico uniforme quale quello, ad esempio, che può essere generato da un solenoide. Si abbia anche a disposizione un apparecchio capace di indicare la presenza di un campo magnetico. Sappiamo che un apparecchio di questo genere può essere costituito da un semplice ago magnetico cui sia lasciata la possibilità di ruotare rispetto ad un asse verticale passante per il baricentro. La posizione di un simile ago, normalmente definita dal campo magnetico terrestre, varierà in presenza di un campo magnetico in conseguenza dell'azione defletttrice che quest'ultimo esercita su di esso.

Se ad un simile apparecchio vuol riservarsi anche la possibilità di indicare o meno l'eguaglianza di due campi, allora sarà necessario sottoporlo ad una coppia antagonista, quale può essere ad esempio quella di una molla, che ne definisca la posizione iniziale.

In presenza di campi magnetici l'ago devierà dalla sua posizione normale di riposo sin tanto che non si sia arrivati all'equilibrio tra coppia deviatrice e coppia antagonista. Essendo quest'ultima costante sarà sempre possibile collegare la deviazione alla intensità del campo che fornisce la coppia di deviazione.

Inseriamo ora nell'interno del nostro solenoide, il magnetoscopio con l'ago in direzione, ad esempio, normale all'asse geometrico del solenoide. Sotto l'azione del

campo magnetico l'ago devierà dalla posizione di equilibrio di una certa deviazione angolare.

Variamo ora in ogni possibile modo le caratteristiche del solenoide: potremo variarne la lunghezza o il diametro o il numero di spire o il numero degli strati. In ogni caso avremo all'interno del solenoide un campo magnetico uniforme la cui intensità sarà in nostro potere di controllare con la semplice regolazione della corrente che attraversa il solenoide.

Regolato ogni volta il valore della corrente in modo che il magnetoscopio subisca la stessa deviazione angolare, eseguiamo per ognuno dei casi sperimentati il rapporto  $\frac{Ni}{l}$ .

Ove:  $N$  è il numero di spire del solenoide;

- $i$  la corrente che lo attraversa
- $l$  la sua lunghezza.

Noteremo che, a parità di deviazione del magnetoscopio, questa grandezza ha un valore costante per tutti i casi sperimentati.

A questa grandezza, che appare perciò caratteristica del campo, ed indipendente dal suo modo di generazione, daremo in nome di **forza magnetica**.

Essa si indica col simbolo  $H$  e si misura in  $\frac{\text{amperspire}}{\text{metro}}$ ; essa ha carattere vettoriale con direzione pari a quella delle linee di forza e verso convenzionalmente individuato dalla direzione **sud-nord** di un ago magnetico posto nel campo.

Poiché una corrente elettrica altro non è che un moto di cariche elettriche è spontaneo pensare che il moto di un portatore di carica abbia anch'esso la possibilità di generare un campo magnetico. Ciò è ampiamente confermato dalla esperienza che stabilisce, anzi, che il campo generato da una carica elettrica  $Q$  che ruoti lungo il percorso del circuito elettrico con velocità pari a  $n$  giri/sec. quando

$$i = Q$$

Esiste infine la possibilità di generare campi magnetici per mezzo di magneti permanenti. Contrariamente a quanto può apparire a prima vista non vi è discordanza tra questo caso e la posizione generale, dianzi accennata, secondo la quale l'esistenza di un campo magnetico è sempre collegabile al moto di cariche elettriche.

Può infatti elaborarsi una teoria dei magneti permanenti che fa risalire il campo magnetico da essi generato alle correnti molecolari presenti nell'interno del magnete; teoria sulla quale sorvoliamo per necessità.

Dobbiamo ora parlare più approfonditamente dei concatenamenti esistenti tra campi elettrici e campi magnetici. Limitandoci ora ai rapporti di tipo qualitativo, che esista un concatenamento tra campo elettrico e campo magnetico è già indicato da una semplice esperienza che possiamo idealizzare al modo seguente:

Prendiamo un condensatore piano carico. Il dielettrico del condensatore è allora sede di un campo elettrico uniforme. Immaginiamo ora di collegare con un circuito metallico le armature del condensatore; fluisce allora nel circuito metallico una corrente la quale perdura per tutto il tempo per il quale esiste ancora un campo elettrico tra le armature del condensatore. Il fluire della corrente coincide con l'insorgere attorno al conduttore di un campo magnetico, il quale perdura fin tanto che perdura la corrente o, che è lo stesso, fintantoché un campo elettrico permane tra le armature del condensatore.

I concatenamenti esistenti tra i due tipi di campi sono peraltro assai più intimi: per giungere a quelle che ne sono le espressioni analitiche, vale a dire alle due leggi

circuitali ed alle equazioni di Maxwell, è necessario seguire più da vicino i fenomeni di induzione.

Lo studio dei fenomeni d'induzione fu portato a compimento da Michele Faraday nel 1831.

Già Oersted aveva messo in evidenza il fatto che una corrente elettrica è in grado di deviare un ago magnetico posto nelle sue vicinanze. Successivamente Ampère e Arago avevano determinato le leggi che presiedono al movimento di circuiti elettrici percorsi da correnti ed immersi in un campo magnetico. Faraday affrontò, per così dire, il problema inverso immaginando che in un conduttore che si muovesse in un campo magnetico avrebbe dovuto generarsi una corrente elettrica.

Una esperienza fondamentale ai fini del riconoscimento delle leggi dell'induzione è quella che prende le mosse da una bobina primaria o inducente a mezzo della quale possa generarsi un campo magnetico e da una bobina secondaria o indotta immersa nel campo magnetico generato dalla prima e chiusa su di un voltmetro.

I mezzi per variare il campo magnetico che, generato dalla bobina primaria, interessa o come si dice si concatena con la bobina secondaria sono molteplici. Può intanto variarsi il campo generato dalla bobina primaria variando la corrente che la percorre.

Sempre mantenendo inalterata la posizione reciproca delle due bobine può introdursi nell'interno della bobina primaria un nucleo di ferro dolce, il che equivale a variare la configurazione del campo.

Può infine, ruotando o allontanando una delle due bobine, variarsi la posizione reciproca delle bobine stesse, come pure può deformarsi la bobina secondaria alterandone la lunghezza o la sezione o la posizione relativa di alcuni tratti di conduttori.

A qualsiasi di queste operazioni si ricorra si noterà che durante la **variazione** di concatenamento, ai capi della bobina secondaria il voltmetro subisce una deviazione. Ed anzi si finirà presto per riconoscere che caratteristico del fenomeno risulta l'impulso o l'impulsione di tensione

$$A_v = \int_{t_1}^{t_2} v dt$$

che si manifesta ai capi della bobina secondaria in corrispondenza della variazione di concatenamento prodotta.

Per definire analiticamente l'impulso  $A_v$  si disponga ora di un solenoide nell'interno del quale si generi un campo magnetico uniforme in cui la forza magnetica sia  $H$ ; e si alloggi nell'interno del solenoide una bobinetta esploratrice di numero di spire  $N$ ; e sia  $S_1$  la sezione del fascio di linee di forza magnetica abbracciata dalla sezione  $S_2$  delle spire della bobina indotta. La bobina secondaria sia chiusa su di un galvanometro balistico, che, come è noto, è lo strumento tipico per la misura di impulsi di tensione.

Si vari ora con qualsiasi mezzo il campo magnetico che si concatena con la bobina rivelatrice. Si troverà che in ogni caso la entità dell'impulso di tensione misurato dal galvanometro balistico è proporzionale, secondo un coefficiente di proporzionalità, al prodotto della forza magnetica, del numero di spire secondarie, della superficie  $S$  dianzi definita,  $S$  che è in definitiva:

$$\int v dt = \mu SNH$$

$\mu$  prende il nome di permeabilità magnetica assoluta ed è una caratteristica del mezzo.

Alla quantità  $\mu SH$  relativa ad una sola spira si dà il nome di flusso magnetico ( $\Phi^I$ ) mentre alla quantità  $N\Phi^I = \Phi$  si dà il nome di flusso magnetico totale.

Risulta allora:

$$A_v = \int v \, dt = \Phi = \mu SNH$$

o anche

$$V = \frac{d}{dt} \int v \, dt = \mu NS \frac{dH}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}$$

ossia la *tensione indotta* è uguale alla *variazione nell'unità di tempo del flusso concatenato*.

Quanto al verso di questa tensione, per chi guarda nella direzione e verso del campo e veda il flusso diminuire, la *f.e.m.* ha verso orario e viceversa. Ciò che impone con le convenzioni in uso di premettere alla derivata del flusso un segno meno. In definitiva è:

$$V = -\frac{d\Phi}{dt}$$

## Campo elettrodinamico

Immaginiamo un campo magnetico uniforme e di intensità variabile.

Sappiamo che un voltmetro inserito ai capi di una spira che abbracci la superficie  $S$  di linee di forza denuncia, in corrispondenza di una variazione del flusso concatenato, una tensione:

$$V = \mu S \frac{dH}{dt}$$

Ora è evidente che la spira materiale non è che un mezzo per rivelare uno stato effettivamente esistente nello spazio circostante al campo magnetico, nel senso che la variazione del campo magnetico induce in qualsiasi linea ideale concatenata col flusso  $\Phi^I = \mu SH$  una forza elettromotrice il cui valore è dato dalla equazione:

$$V = \mu S \frac{dH}{dt}$$

Non solo, ma, se mai, l'introduzione di un conduttore reale altera parzialmente il fenomeno dandoci la differenza di potenziale agli estremi della spira in luogo della forza elettromotrice vera e propria.

Ci troviamo di fronte a campi elettrici le cui linee di forza sono chiuse e non terminanti su cariche elettriche. A campi di questo genere si dà il nome di **campi elettrodinamici**.

A differenza dei campi elettrostatici possiamo allora affermare che la forza elettromotrice totale che si induce in una spira chiusa in un campo elettrodinamico è l'integrale lineare o circuitazione della forza elettrica lungo la spira stessa.

Possiamo dire cioè che:

$$e = V = \oint E dl$$

ove con  $E$  abbiamo indicato la componente tangenziale alla spira considerata del vettore forza elettrica.

Vediamo così una importante differenza tra campi elettrostatici e campi elettrodinamici. Mentre nei primi la circuitazione del vettore forza elettrica lungo una qualsiasi linea chiusa era nulla, nei secondi essa ha un valore preciso definito dalla espressione precedente; non solo, ma se la linea si chiude su se stessa dopo essersi concatenata  $n$  volte col flusso magnetico il valore della circuitazione diventa  $n$  volte maggiore.

In termini matematici tutto ciò si esprime dicendo che l'integrale lineare del vettore forza elettrica è una funzione sonodroma delle coordinate, in un campo elettrostatico; una funzione polidroma delle coordinate in un campo elettrodinamico.

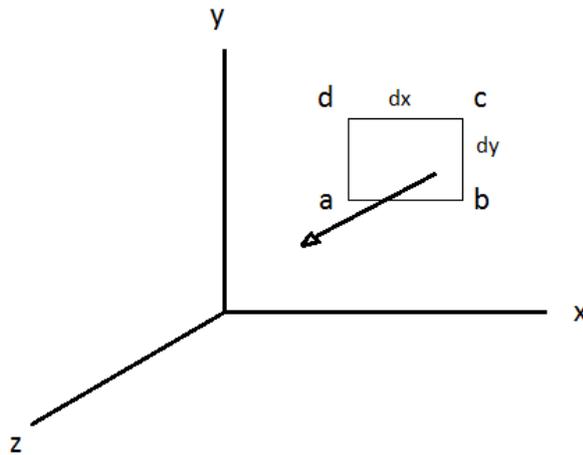
Se è,  $V = \oint E dl$ , ed anche  $V = \mu S \frac{dH}{dt}$ , è allora:

$$\oint E dl = \mu S \frac{dH}{dt} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Questa relazione esprime la *seconda legge circuitale* e la sua importanza risiede nel fatto che essa collega il campo elettrico con la velocità di variazione del campo magnetico. In parole, la seconda legge circuitale può esprimersi dicendo che la circuitazione della forza elettrica lungo una linea chiusa qualsiasi è uguale alla variazione, nell'unità di tempo, del flusso magnetico concatenato con la medesima linea.

L'applicazione della seconda legge circuitale al contorno di un elemento superficiale porta direttamente alla **seconda equazione di Maxwell**.

Sia un punto  $A$  nello spazio e siano  $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$  le componenti dei vettori forza elettrica e forza magnetica nel punto  $A$  rispetto ad una terna cartesiana di riferimento quale quella segnata in figura.



Consideriamo un elemento superficiale piano rettangolare  $ABCD$  contenente il punto  $A$  e giacente in un piano parallelo al piano  $xy$ .

Lungo tutto il tratto  $AB$ , a meno di infinitesimi d'ordine superiore, la componente del vettore forza elettrica rimane inalterata ed uguale a  $E_x$ .

Lungo il tratto  $BC$  la componente del vettore forza elettrica è:

$$E_y + \frac{\partial E_y}{\partial x} dx$$

lungo il tratto  $CD$  la componente del medesimo vettore è:

$$E_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} dy$$

lungo il tratto  $DA$ , infine, la componente del vettore che ci interessa è, a meno di infinitesimi d'ordine superiore, uguale ad  $E_y$ .

Applicando allora la seconda legge circuitale al contorno dell'elemento  $ABCD$  è:

$$\begin{aligned}
\oint E \, dl &= E_x \, dx - \left[ E_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] dx - E_y dy + \left[ E_y + \frac{\partial E_y}{\partial x} dx \right] dy = \\
&= -\frac{\partial E_x}{\partial y} dx \, dy + \frac{\partial E_y}{\partial x} dx \, dy = \\
&= \left[ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] dx \, dy
\end{aligned}$$

e poiché:

$$\oint E \, dl = \mu_0 S \frac{d H_z}{dt} = \mu_0 \, dx \, dy \frac{d H_z}{dt}$$

è infine:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \mu \frac{d H_z}{dt}$$

avendo indicato con  $\mu_0$  la permeabilità magnetica del vuoto.

L'equazione precedente è, appunto, la seconda equazione di Maxwell. Essa esprime analiticamente il fatto che; **un campo magnetico variabile crea intorno a se un campo elettrico vorticoso.**

Abbiamo avuto occasione di notare fin dall'inizio come legami molto intimi leghino il campo magnetico e la corrente elettrica. Per poter arrivare a formulare la legge più generale che collega il campo magnetico alla corrente elettrica - prima legge circuitale - dobbiamo ora introdurre una nuova grandezza: la tensione magnetica.

È proprio la necessità della introduzione di una nuova grandezza che ha consigliato come processo logico di ricavare prima la seconda legge circuitale che non la prima legge circuitale. In analogia con la tensione elettrica, la tensione magnetica ( $F$ =forza magnetomotrice: f.m.m.) viene definita con

$$F = \int_A^B H \, dl$$

Si misura in amperspire e può facilmente misurarsi col tensiometro magnetico, sulle cui caratteristiche è necessario sorvolare. Ma è proprio con l'aiuto di questo apparecchio che possiamo in sostanza individuare alcune caratteristiche di questa grandezza.

- Anzitutto si vede che la tensione magnetica misurabile tra due punti  $A$  e  $B$  di un campo magnetico (distinti) dipende esclusivamente dalla posizione di  $A$  e  $B$ .
- In secondo luogo si osserva che se si portano  $A$  e  $B$  a coincidere possono darsi tre casi distinti.

Se il tensiometro non si concatena con correnti elettriche la tensione magnetica da esso indicato ha sempre un valore nullo. Se il tensiometro si concatena una sola volta con la corrente  $i$  esso indica una tensione magnetica uguale ad  $i$ .

Se esso è portato a concatenarsi un numero  $n$  di volte con la corrente  $i$ , la sua indicazione è  $n$  volte la precedente. Ciò che analiticamente può esprimersi con:

$$F = \oint H \, dl = n \, i$$

Questa relazione è, in sostanza, la **prima legge circuitale**. Essa può esprimersi dicendo che l'integrale circuitale della forza magnetica lungo una linea chiusa qualsiasi è uguale alla corrente concatenata.

La sua importanza risiede nel fatto che essa collega l'integrale lineare del campo magnetico con la velocità di variazione della quantità di elettricità. Non si dimentichi, infatti, che è:

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

e che, pertanto, la prima legge circuitale può scriversi:

$$\oint H \, dl = n \frac{dQ}{dt}$$

Una particolare applicazione della legge circuitale consente di ricavare la prima equazione di Maxwell. Ma è necessario, prima, esprimere la legge circuitale ora ricavata nella sua forma più generale.

Riprendiamo quindi in esame il caso di un condensatore carico, le cui armature siano ad un certo istante connesse per il tramite di un collegamento metallico. Attraverso tale collegamento il condensatore inizia a scaricarsi col risultato che nel collegamento circola una corrente elettrica, mentre tra le armature del condensatore varia la intensità del campo elettrico fino al suo annullarsi.

Possiamo anzitutto domandarci se nelle vicinanze del campo elettrico variabile, presente nel dielettrico del condensatore, si manifesta un campo magnetico.

Mentre l'intuito ci spinge ad accettare una simile ipotesi come molto plausibile, dobbiamo subito notare che fondamentali difficoltà sperimentali ne impediscono la verifica immediata per il caso in esame.

Anticipando nozioni che verranno in seguito acquisite, diremo che la prova sperimentale più completa di un campo magnetico in corrispondenza di un campo elettrico variabile risiede nei fenomeni di propagazione delle onde elettromagnetiche.

Accettata quindi l'esistenza di un campo magnetico generato da un campo elettrico variabile, è evidente che da questo punto di vista nessuna differenza esiste tra il campo magnetico variabile e la corrente che circola nel circuito esterno. È per questo che Maxwell denominò col nome di corrente di spostamento i campi elettrici variabili, riservando il nome di corrente di conduzione alla corrente derivante dall'effettivo movimento di cariche elettriche.

Sorge intanto da qui l'importante constatazione che non esistono se non correnti chiuse su se stesse. Potremo avere circuiti elettrici costituiti da sole correnti di conduzione o da sole correnti di spostamento, nel caso più generale avremo circuiti misti, ma è certo che la ove terminano le correnti di conduzione, la iniziano le correnti di spostamento e viceversa.

Vediamo ora di arrivare ad una espressione quantitativa delle correnti di spostamento.

Considerando sempre il caso della scarica di un condensatore, non appena si chiude il circuito metallico esterno, diminuisce all'interno del condensatore lo spostamento elettrico specifico  $D$  e perciò la forza elettrica.

Ad un determinato istante è:

$$Q = S D = S \epsilon_0 E \quad \text{coulomb}$$

la carica esistente in ciascuna armatura del condensatore.

La derivata rispetto al tempo di questa quantità di carica elettrica è, appunto, la corrente di spostamento

$$i_s = \epsilon_0 S \frac{\delta E}{\delta t} \quad \text{ampere}$$

Ricordiamo ora la prima equazione circuitale

$$\oint H \, dl = i$$

ricavata sperimentalmente per le correnti di conduzione.

Maxwell suppose che essa fosse applicabile anche alle correnti di spostamento. Cosicché essa assume la forma:

$$\oint H \, dl = i_s = S \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

ed esprime il fatto che l'integrale della forza magnetica lungo una qualsiasi linea chiusa è uguale alla variazione nell'unità di tempo, della forza elettrica concatenata. Si noti la perfetta dualità tra questa espressione della prima legge circuitale e l'espressione già data della seconda legge circuitale.

Alla prima equazione di Maxwell si perviene in modo assolutamente analogo a quello che portò alla seconda equazione di Maxwell applicando la prima equazione circuitale espressa in quest'ultima forma ad un elemento superficiale, piano, rettangolare.

Risulta analogamente:

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \, dx \, dy = \oint H \, dl$$

e poiché

$$\oint H \, dl = \epsilon_0 S \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

risulta

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

È necessario introdurre ora una ulteriore grandezza atta a determinare un campo magnetico.

Questa grandezza è il vettore induzione magnetica.

Riprendiamo la legge dell'induzione

$$A_v = \mu S H N$$

e dividendo tutto per  $N S$

$$\frac{A_v}{N S} = \mu H$$

alla grandezza  $\frac{A_v}{N S}$ , rapporto tra impulso di tensione ed area totale indotta, si dà il nome di induzione magnetica; essa si indica col simbolo  $B$  e risulta:

$$B = \mu H$$

e si esprime in *weber*/ $m^2$ .

Almeno finché  $\mu$  è costante - e quando tratteremo del comportamento dei materiali nel campo magnetico vedremo quando ciò è verificato o meno -  $B$  è rigorosamente proporzionale ad  $H$ .

L'induzione magnetica è pertanto, come la forza magnetica, atta a determinare completamente un campo magnetico.

Ne essa deve sembrare una inutile ripetizione non foss'altro perché in alcuni casi dove è materialmente impossibile la misura di  $H$  risulta invece agevole la misura della induzione dalla conoscenza della quale è in seguito possibile risalire con estrema rapidità al valore cercato di  $H$ .

Inoltre non va dimenticato che essa consente la semplificazione formale di alcune formule, avuto presente che:

$$\Phi = N \Phi^I = \mu H N S$$

e poiché  $B = \mu H$  è  $B = \frac{\Phi}{N S}$

Lo studio dei fenomeni d'induzione nei conduttori mobili può essere affrontato in modo analogo a quello con cui affrontammo a suo tempo lo studio dell'induzione elettromagnetica nelle bobine in quiete.

Se mai esso è complicato da alcuni fatti nuovi quale quello che non è necessario, al manifestarsi di fenomeni d'induzione, che si abbia una variazione visibile della sezione  $S$ : è sufficiente che si abbia il moto di alcune parti del circuito indotto rispetto alle rimanenti.

La conclusione cui si perviene è però sempre che la tensione indotta è uguale alla variazione, nell'unità di tempo, del flusso abbracciato dalla bobina.

La regola che consente di individuare il verso della tensione indotta in un conduttore che si muova in un campo magnetico è quella così detta della mano destra.

Disposti ad angolo retto il pollice, l'indice ed il medio della mano destra se si individua con l'indice il senso del campo, col pollice quello del moto, il medio da la direzione ed il verso della *f.e.m.*.

L'esperienza infine ci consente di appurare un particolare fenomeno, cui abbiamo già avuto modo di accennare parlando delle esperienze di **Ampere**.

Un campo magnetico esercita forze ponderomotrici sulle cariche in movimento, cioè sulle correnti elettriche.

Dal punto di vista quantitativo diremo che la forza che un campo magnetico di induzione  $B$  e direzione trasversale ad un conduttore lungo  $l$  e percorso dalla corrente  $i$  esercita sul conduttore stesso è:

$$F = B i l$$

la forza risulta in newton se  $B$  è in  $m^2$ ,  $i$  in Ampere,  $l$  in metri. Il senso della forza è definito dalla regola della mano sinistra: disposti secondo gli spigoli di un triedro retto il pollice, l'indice e il medio della mano sinistra, quando il medio sia fatto coincidere con la direzione della corrente e l'indice con quella del campo il pollice da senz'altro la direzione e il verso della forza ponderomotrice.

Una prima applicazione di queste nozioni ci consente di calcolare la forza tra due conduttori paralleli di lunghezza indefinita percorsi da corrente.

Come applicazione della prima legge circuitale può calcolarsi il campo  $H$  generato da una corrente rettilinea e indefinita a distanza  $r$  dall'asse del conduttore. Risulta

$$H = \frac{i_1}{2\pi r}$$

se  $i_1$  è l'intensità della corrente.

Possiamo allora calcolare l'induzione in un punto lontano  $r$  dall'asse del conduttore **1** semplicemente moltiplicando per  $\mu_0$  la forza magnetica. E cioè

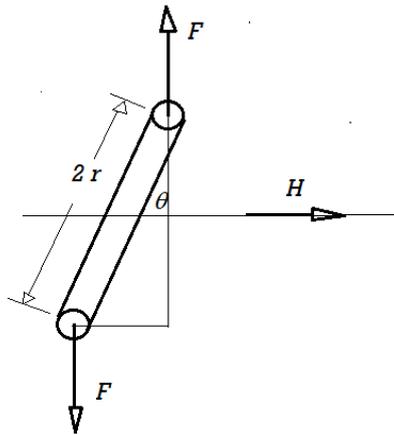
$$B = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}$$

Se allora immaginiamo che per il punto  $r$  passi un conduttore **2** in cui transita una corrente  $i_2$  questo subirà una forza ponderomotrice

$$F = B i_2 l = \frac{\mu_0 i_1 i_2 l}{2\pi r}$$

L'applicazione delle semplici regole direzionali permette di assodare che la forza così calcolata sarà d'attrazione per correnti equiverse, di repulsione per correnti dirette in senso contrario.

Un caso semplice, ma più fecondo di risultati, è quello di una spira in un campo magnetico.



Si immagini la spira disposta come in figura.

Sui due lati trasversali alla direzione del campo, quando la spira è attraversata da corrente si esercitano due forze, aventi direzione perpendicolare alla direzione del campo e sensi discordi.

È comunque

$$F = B i l$$

e il momento di coppia che ne deriva è

$$C_\theta = B i l 2r \cos[\theta]$$

poiché è  $2rl = S$ , è anche

$$C_\theta = B i S \cos[\theta]$$

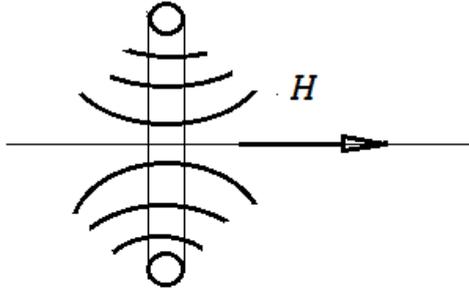
in presenza di una sola spira è

$$B = \frac{\Phi_m}{S}$$

ne deriva

$$C_\theta = \Phi_m i \cos[\theta]$$

ove  $\Phi_m$  è il massimo flusso che può concatenarsi con la spira, il che avviene, non solo quando la spira è perpendicolare alla direzione del campo, ma quando i flussi prodotti dalle correnti che vi circolano la attraversano nel medesimo senso del flusso principale.



In queste condizioni la spira è sottoposta ad una coppia nulla e rimane in equilibrio; non solo, ma la posizione è una posizione di equilibrio stabile poiché è sufficiente una qualsiasi rotazione dalla posizione di equilibrio per determinare l'insorgere di una coppia che tende a riportare in questa posizione la spira.

È il caso però di notare che esiste una seconda posizione di equilibrio - spira ruotata di  $180^\circ$  - peraltro instabile; e che un semplice gioco di inversione sincrona nel senso delle correnti consente di mantenere indefinitamente la rotazione. È questo il principio che presiede alla realizzazione dei motori a corrente continua.

Possiamo, per questo caso, calcolare infine il lavoro necessario a raggiungere la posizione di equilibrio a partire da una posizione iniziale caratterizzata da un angolo  $\theta_1$ .

È chiaramente

$$W = \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} C_\theta d\theta$$

e poiché

$$C_\theta = \Phi_m i \cos[\theta]$$

$$\int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} C_\theta d\theta = \Phi_m i \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \cos[\theta] d\theta = \Phi_m i [1 - \sin[\theta_1]] = i[\Phi_m - \Phi_m \sin[\theta_1]]$$

ove  $\Phi_m$  è il flusso concatenato con la spira nella posizione finale mentre  $\Phi_m \sin[\theta_1]$  è il flusso concatenato nella sua posizione iniziale; così che in generale potrà dirsi:

$$W = i(\Phi_2 - \Phi_1)$$

il lavoro compiuto dalla spira nel passare da una posizione **1** ad una posizione **2**.

A conclusione di queste note sull'induzione elettromagnetica vogliamo citare una legge della massima importanza. Formulata da **Lenz** nel 1834 essa può esprimersi dicendo che:

**I campi elettrici, le correnti e le forze nate per induzione, sono sempre tali da opporsi alla causa che origina l'induzione stessa.**

La legge citata, che, sotto alcuni aspetti, sintetizza tutto il lavoro sulla induzione, consente l'esplicazione in forma chiara e razionale di tutti i fenomeni che traggono origine appunto da fenomeni d'induzione. Non possiamo, in questa sede dilungarci in esempi; ma ad uno tipico vogliamo accennare.

Se si suppone di creare un campo magnetico rotante e di immergere nel campo stesso una bobina, in essa per induzione circolano delle correnti. Ebbene poiché le forze ponderomotrici che allora si destano debbono, per la legge di **Lernz**, opporsi alla causa che le ha generate, esse non hanno altra possibilità di opporvisi se non quella di impedire in qualche modo che vari il flusso concatenato con la bobina, determinando così la cessazione del fenomeno d'induzione. Ciò che non può significare, in presenza di un campo magnetico rotante, che la rotazione, nello stesso senso del campo, della bobina. Rotazione che oltre ad avere lo stesso senso deve anche avere **quasi** la stessa velocità. Il che è perfettamente confermato dall'esperienza.

Infine prima di abbandonare questi richiami sui fenomeni d'induzione dobbiamo accennare alla esistenza delle correnti che in presenza di un campo magnetico variabile si inducono nell'interno di masse omogenee di materiale conduttore. Isolata infatti idealmente una spira nell'interno del materiale è chiaro che in essa si induce una *f.e.m.* il cui valore è stabilito dalla seconda legge circuitale. Come già quando parliamo dei campi elettrodinamici non ha alcuna importanza il fatto che esista una spira materiale ben definita perché il fenomeno della induzione magnetica si manifesti. Ma il fatto che il fenomeno avvenga in un materiale a bassa resistività determina, come conseguenza della forza elettromotrice indotta in ogni spira ideale la circolazione, nella medesima spira, di una corrente elettrica nota quale **corrente di Foucault**. A parità d'induzione, e quindi di *f.e.m.*, questa corrente sarà tanto più intensa quanto più bassa sarà la resistività del materiale.

Il risultato finale sarà la dissipazione di una quantità di energia che verrà trasformata integralmente in calore con conseguente possibilità di danneggiamento del materiale stesso.

È dovuta al desiderio di diminuire le correnti di Foucault la pratica di **laminare** i circuiti magnetici delle macchine sottoposti a campi magnetici variabili. Sfruttano lo stesso principio alcune applicazioni quali gli smorzatori elettromagnetici per strumenti ed i freni elettromagnetici.



## Comportamento dei materiali immersi in un campo magnetico

L'argomento che ci apprestiamo a trattare è il comportamento dei materiali nel campo magnetico.

Per agevolare questa parte della trattazione torna utile l'introduzione di alcune grandezze: prima di tutte la permeabilità relativa.

La permeabilità relativa di un certo materiale si definisce come rapporto tra la induzione  $B$  misurabile nell'interno di un solenoide avvolto su un anello torico del materiale in prova e la

induzione  $B_0$  che può misurarsi nell'interno del medesimo solenoide quando da esso si sia tolto il materiale stesso.

È quindi  $\mu_r = B/B_0$  ed esso è quindi un numero adimensionale. Sappiamo che, con riferimento allo spazio vuoto, è  $B_0 = H_0\mu_0$  e pertanto:

$$\mu_r\mu_0 H_0 = B \quad (1)$$

ossia ponendo  $\mu = \mu_r\mu_0$  si ha

$$B = \mu H_0. \quad (2)$$

Con riferimento alla medesima esperienza ideale si definisce **intensità di magnetizzazione** di un certo materiale la grandezza

$$J = B - B_0 \quad (3)$$

è anche

$$J = \mu H_0 - \mu_0 H_0 = H_0(\mu - \mu_0) \quad (4)$$

oppure

$$J = B_0(\mu_r - 1). \quad (5)$$

Infine si definisce **suscettibilità magnetica** la grandezza:

$$X = \frac{J}{B_0} = \frac{B - B_0}{B_0} = \mu_r - 1. \quad (6)$$

Ciò premesso, notiamo che i materiali possono, dal punto di vista del loro comportamento in un campo magnetico, suddividersi in tre categorie.

- *Corpi diamagnetici*: per essi la permeabilità è una costante caratteristica del materiale indipendente dalla temperatura: ha valore di poco inferiore alla unità.
- *Corpi paramagnetici*: anche per essi la permeabilità è una costante caratteristica del materiale. Il suo valore è di poco maggiore dell'unità. Dipende dalla temperatura diminuendo al crescere di questa.
- *Corpi ferromagnetici*: per essi la permeabilità non è una costante del materiale: dipende con legge complessa dal valore della induzione e dalla storia magnetica del materiale.

Il valore della permeabilità relativa è sempre di alcune migliaia o di alcune decine di migliaia di unità. Esso dipende, inoltre, dalla temperatura diminuendo al crescere di questa. Esiste anzi per ogni materiale un valore critico della temperatura, che assume il nome di punto di Curie, e che è quasi sempre nella gamma di temperature al disopra di  $800^\circ$ , per il quale il materiale ferromagnetico assume un comportamento paramagnetico.

L'appartenenza o meno di un determinato corpo ad una delle tre categorie su enunciate è denunciata dal suo comportamento, quando viene immerso in un campo magnetico.

- Corpi diamagnetici vengono respinti verso le zone più deboli del campo;
- Corpi paramagnetici vengono debolmente attratti verso le zone più intense;
- Corpi ferromagnetici sono infine attratti violentemente verso le zone più intense del campo.

Di queste differenze di comportamento è possibile dare una spiegazione connessa alle caratteristiche strutturali della materia: l'analisi di tali teorie esce, peraltro, dai limiti del nostro lavoro.

Se ora sottoponiamo un materiale diamagnetico o paramagnetico (purché quest'ultimo, a temperatura costante) ad un campo magnetico di forza magnetica variabile e rileviamo per ogni valore di  $H$  il valore della induzione magnetica  $B$ , il grafico relativo risulta una retta la cui inclinazione è legata al valore della permeabilità magnetica del materiale in prova.

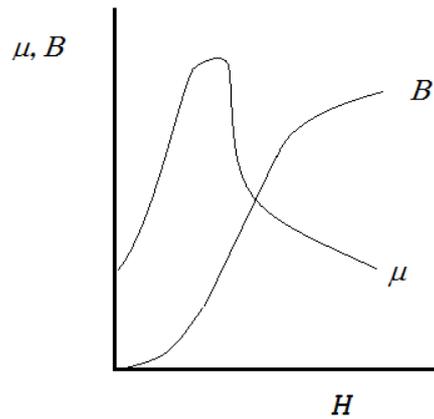
Non così, per la non costanza di  $\mu_r$ , avviene per un materiale ferromagnetico.

Si supponga di avere un materiale magnetico del tipo ferromagnetico che sia stato precedentemente accuratamente smagnetizzato. Esso inizia, per così dire la sua storia magnetica con la nostra esperienza.

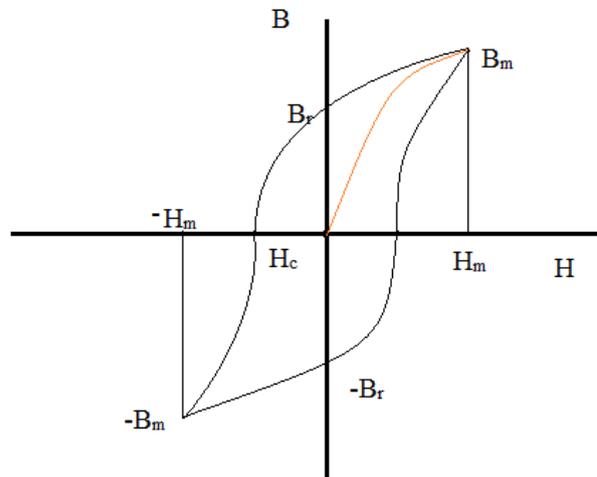
Sottoponiamolo ad un campo di forza magnetica variabile e rileviamo per ogni valore della forza magnetica il corrispondente valore della induzione. Se ne deduce la curva di prima magnetizzazione o curva normale di magnetizzazione. Questa curva ha alcune caratteristiche che è necessario richiamare.

Essa esce dall'origine tangente ad una retta inclinata d'un certo angolo rispetto alle ascisse e con la concavità rivolta verso l'alto. L'induzione cresce quindi rapidamente, in un primo tempo, al crescere della forza magnetica. Si ha, quindi, un flesso cui segue il così detto ginocchio della curva di prima magnetizzazione. Essa rivolge ora la sua concavità verso il basso e ben presto si raggiunge un valore della induzione che rimane costante al successivo aumentare della forza magnetica.

L'andamento della curva di prima magnetizzazione è quello della permeabilità magnetica relativa in funzione della forza magnetica, riportata nella figura seguente:



Se allora, per quanto si è visto si inizia a magnetizzare un materiale ferromagnetico a partire da uno stato di completa indifferenza magnetica esso segue la curva di prima magnetizzazione (tratto  $OB_m$  della seguente figura).



Giunti in corrispondenza del valore  $H_m$  della forza magnetica, si diminuisce ora tale forza fino a tornare a  $\mathbf{O}$ , provvedendo contemporaneamente alla misura di  $B$ . Ci accorgiamo che il valore della induzione diminuisce ma non più seguendo la curva tracciata in salita, bensì una nuova curva che a questa si mantiene sempre superiore finché giunti al valore  $\mathbf{0}$  della forza magnetica si ha ancora un valore positivo e finito della induzione,  $B_r$ , che prende il nome di **induzione residua**.

Invertendo ora il senso della forza magnetica il valore della induzione continua a diminuire fino ad annullarsi in corrispondenza di un certo valore  $-H_c$  denominato **forza coercitiva**. Il ciclo si completa poi simmetricamente.

La curva ciclica disegnata nel piano  $H, B$  dal vettore induzione magnetica in corrispondenza di una magnetizzazione alternativa prende il nome di **ciclo d'isteresi** e **isteresi magnetica** viene chiamato il fenomeno che la determina.

Il ciclo d'isteresi da atto in primo luogo della straordinaria complessità del fenomeno magnetico. Esso spiega perfettamente inoltre perché il comportamento dei materiali ferromagnetici e più specificatamente il valore della permeabilità relativa risenta della **storia magnetica** del materiale.

Infine può trarsi qualche indicazione sui criteri che presiedono alla scelta dei materiali da utilizzare nella costruzione di magneti permanenti.

Anzitutto è da notare il fatto che i magneti permanenti trovano nel fenomeno di isteresi magnetica, per così dire, la loro ragione stessa di esistenza. Solo infatti il fenomeno della induzione residua consente la preparazione dei magneti permanenti. Ma non sarà solamente una elevata induzione residua a dover essere ricercata in un magnete permanente. È necessario anche che esso abbia una intensa forza coercitiva, si che non si possa arrivare alla facile smagnetizzazione del magnete in presenza di casuali forze magnetiche esterne di verso contrario.

È per questa ragione, ad esempio, che si preferisce normalmente l'acciaio al ferro per la costruzione dei magneti.

Il fenomeno di isteresi rappresenta, però, come tutti i fenomeni irreversibili, una dispersione d'energia. Ed è facile rendersi conto che l'area del ciclo di isteresi rappresenta, proporzionalmente, l'energia necessaria per produrre la variazione ciclica nell'unità di volume del materiale.

Non abbiamo ancora ricavato una espressione della energia contenuta nell'unità di volume di un mezzo sottoposto ad un campo magnetico di forza  $H$  che provochi una induzione  $B$ .

Tale espressione è:

$$W = \frac{1}{2} B H \quad (7)$$

L'energia elementare corrispondente ad una variazione  $dH$  della forza magnetica, cui corrisponde una variazione  $dB$  della induzione, è allora:

$$dW = \frac{1}{2} (B dH + H dB) \quad (8)$$

Sappiamo, d'altronde, che è

$$B = \mu H \quad (9)$$

ossia

$$dB = \mu dH \quad (10)$$

allora

$$dW = \frac{1}{2} (B dH + \mu H dH) = \frac{1}{2} (2B dH) = B dH = H dB \quad (11)$$

in definitiva il lavoro elementare può essere rappresentato dalla areola tratteggiata. Per una variazione di  $B$  tra gli estremi  $B_1$  e  $B_2$  il lavoro necessario risulta pertanto proporzionalmente rappresentato dalla superficie della porzione di piano  $H - B$  compresa tra la curva di magnetizzazione effettiva e l'asse delle ordinate.

Si può allora applicare il principio al ciclo d'isteresi riscontrando la verità di quanto affermato.

L'importanza ai fini pratici del fenomeno lamentato ha spinto più di un sperimentatore a ricercare una formula pratica, e quindi approssimata, capace di dare il lavoro di isteresi in funzione di un parametro caratteristico.

La più usata è la formula di *Steinmetz*. Essa risulta da una lunga serie di esperienze condotte sui ferri industriali ed è rappresentabile con la seguente relazione:

$$W = \eta B_m^{1.6} \frac{joule}{m^3} \quad (12)$$

ove  $\eta$  è un coefficiente caratteristico del materiale usato e sta a rappresentare il lavoro di isteresi per unità di volume e per ciclo, quando l'induzione varia entro i limiti di  $+1weber/m^2$ .

Trattiamo ora dei circuiti magnetici e delle principali leggi che al loro studio presiedono. Il punto di partenza è la constatazione che ai circuiti magnetici è applicabile il principio della continuità; intendendosi per circuito magnetico la porzione di spazio attraverso la quale si chiude un certo numero di linee di forza. L'applicabilità del principio deriva dal fatto che le linee di forza di un campo magnetico debbono in ogni caso considerarsi chiuse. Infatti ciò è ovvio per il caso in cui a generare il campo magnetico sia una corrente elettrica od un movimento qualsiasi di cariche elettriche: meno evidente risulta il caso in cui la fonte generatrice del campo sia un magnete permanente. In questo caso però è sufficiente porre mente a quanto a suo tempo avemmo occasione di dire circa la teoria della generazione di un campo magnetico da parte di un magnete permanente, perché l'affermazione acquisti un carattere di piena generalità.

La applicabilità del principio di continuità consente allora di affermare che se in una regione dello spazio converge un fascio di linee di forza cui corrisponde un flusso magnetico totale  $\Phi$  e se dalla nominata regione si dipartono un certo numero di fasci di linee di forza cui corrispondono flussi  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  ecc., è certamente

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots \quad (13)$$

ossia

$$\Sigma \Phi = 0 \quad (14)$$

È manifesta l'analogia tra questa espressione e il *1° principio di Kirchoff*, non appena si sostituisca alla grandezza *flusso magnetico* la grandezza *corrente elettrica*.

In questo senso si parla di un *1° principio di Kirchoff dei circuiti magnetici*.

La seconda legge relativa ai circuiti magnetici può dedursi dalla prima legge circuitale dopo opportune manipolazioni.

Noi conosciamo la prima legge circuitale nella forma:

$$\oint H dl = N i \quad (15)$$

tenendo conto del fatto che è per definizione

$$B = \mu H \quad (16)$$

essa può scriversi

$$\oint \frac{B}{\mu} dl = N i \quad (17)$$

o, nei circuiti a permeabilità magnetica costante:

$$\oint B dl = \mu N i \quad (18)$$

Se il circuito si svolge in un mezzo a permeabilità non costante, può ottenersi ancora una formula di pratico uso introducendo il flusso magnetico totale, il che può farsi agevolmente quando si ricordi che è

$$B = \frac{\Phi}{S} \quad (19)$$

La precedente espressione della legge circuitale diviene allora

$$\oint \frac{\Phi}{\mu S} dl = N i \quad (20)$$

Consideriamo ora che il circuito magnetico sia suddivisibile in tronchi per ognuno dei quali il flusso magnetico si mantenga costante. E allora

$$\Sigma \int_A^B \frac{dl}{\mu S} = N i \quad (21)$$

Se  $A$  e  $B$  sono gli estremi del tratto a flusso costante.

Alla quantità  $\int_A^B \frac{dl}{\mu S}$  si dà il nome di *resistenza magnetica* o più semplicemente *riluttanza*. Essa si indica col simbolo  $R$  e nel caso, frequente nella pratica, che il tratto del circuito magnetico considerato abbia sezione e permeabilità magnetica costante, può più semplicemente scriversi

$$R = \frac{l}{\mu S} \quad (22)$$

essendo  $l$  la lunghezza del tratto considerato.

La prima legge circuitale, nella forma ora considerata, viene talvolta indicata come *secondo principio di Kirchoff dei circuiti magnetici*.

Torniamo ora con la mente a quanto a suo tempo detto studiando il fenomeno della induzione. Risultò allora che là ove esiste una variazione del flusso magnetico concatenato con una spira, o più generalmente con un circuito, in questo stesso circuito si induce una forza elettromotrice, comunque la accennata variazione sia stata prodotta.

Si dà il nome di *fenomeno di induzione mutua*, al fenomeno di induzione quando la variazione di flusso concatenato con un circuito sia prodotta dalla presenza di altri circuiti percorsi da correnti variabili.

Si è visto più volte che il campo magnetico generato da una corrente  $i_1$  è proporzionale alla corrente stessa; per cui se il fenomeno di mutua induzione ha sede in un mezzo a permeabilità magnetica costante, alla corrente  $i_1$  risulta proporzionale anche l'induzione magnetica  $B$ . In ultima analisi, dati i legami notoriamente esistenti tra  $B$  e  $\Phi$ , anche  $\Phi$  risulta proporzionale alla corrente.

Per cui chiamato con  $\Phi_2$  il flusso che si concatena con un circuito 2 per il fatto che in un circuito 1 circola una corrente  $i_1$  è

$$\Phi_2 = M_{21} i_1 \quad (23)$$

essendo  $M_{21}$  un coefficiente di proporzionalità.

Analogamente, facendo circolare una corrente  $i_2$  nel circuito 2, si concatenerà con il circuito 1 un flusso magnetico totale

$$\Phi_1 = M_{12} i_2 \quad (24)$$

Interessa mostrare che è sempre

$$M_{12} = M_{21} \quad (25)$$

per il che sarà sufficiente ricordare che l'energia elettromagnetica afferente al sistema in conseguenza delle forze che l'uno dei circuiti esplica sull'altro e viceversa, può rappresentarsi con il prodotto della corrente che percorre uno dei circuiti per il flusso che col medesimo circuito si concatena.

È, insomma,

$$W = \Phi_1 i_1 = \Phi_2 i_2 \quad (26)$$

ciò che conduce alle due espressioni

$$W = \Phi_1 i_1 = M_{12} i_2 i_1 \quad (27)$$

$$W = \Phi_2 i_2 = M_{21} i_1 i_2 \quad (28)$$

da cui deriva l'uguaglianza di  $M_{12}$  e  $M_{21}$ ; indicando allora con  $M$  il valore comune di  $M_{12}$  e  $M_{21}$ , sarà

$$\Phi_2 = M i_1 \quad (29)$$

$$\Phi_1 = M i_2 \quad (30)$$

$$W = M i_1 i_2 \quad (31)$$

$M$  assume il nome di coefficiente di mutua induzione tra i circuiti  $1$  e  $2$ ; esso si misura in *Henry=weber/ampere*.

Ricavando dalle precedenti espressioni il coefficiente di mutua induzione, è

$$M = \frac{\Phi_2}{i_1} = \frac{\Phi_1}{i_2} \quad (32)$$

$$M = \frac{W}{i_1 i_2} \quad (33)$$

il che conduce alle seguenti definizioni del coefficiente di mutua induzione.

1°) - Il coefficiente di mutua induzione  $M$  tra due circuiti percorsi da correnti  $i_1$  e  $i_2$  è misurato dal flusso che si concatena con uno qualsiasi dei due circuiti quando l'altro sia percorso da una corrente unitaria.

2°) - Il coefficiente di mutua induzione è misurato dalla energia elettromagnetica associata al sistema quando entrambi i circuiti siano percorsi da correnti unitarie. Se ora si suppone di variare la corrente in uno dei due circuiti - supponiamo ad esempio nel circuito  $1$  - nell'altro si desta per induzione una forza elettromotrice data da:

$$e_2 = \frac{-d\Phi_2}{dt} = -M \frac{di_1}{dt} \quad (34)$$

analogamente è:

$$e_1 = \frac{-d\Phi_1}{dt} = -M \frac{di_2}{dt} \quad (35)$$

il che consente una terza definizione della induttanza mutua.

3°) - Il coefficiente di mutua induzione è misurato dalla forza elettromotrice che si desta in uno dei circuiti, quando la corrente varia nell'altro in ragione di *un ampere*

al secondo.  $M$  risulta  $> 0$  se una  $i > 0$  genera un *flusso*  $> 0$  che si concatena con l'altro circuito.

Il coefficiente di mutua induzione tra due circuiti è sempre misurabile con i ben noti metodi trattati dalle *misure elettriche*; esso può, peraltro, essere calcolato nel caso in cui i circuiti abbiano forma e posizione relativa particolarmente semplice.

È ora facile introdurre il concetto di *induzione propria* di un circuito.

Si è visto che, nel processo di induzione mutua, si manifesta una forza elettromotrice in un circuito che indicammo con  $2$  quando variava la corrente  $i_1$  in un circuito che indicammo con  $1$ ; e ciò perché veniva a concatenarsi col circuito  $2$  un flusso variabile al variare della corrente  $i_1$ . Ora è evidente che il flusso variabile generato dalla corrente variabile  $i_1$  oltre a concatenarsi col circuito  $2$  e con ogni altro circuito posto nelle vicinanze del circuito  $1$ , si concatena anche con lo stesso circuito inducente. Così che in questo stesso si desta una *f.e.m.* che per la *legge di Lenz* è tale da opporsi alla variazione del flusso.

Con ragionamento analogo a quello fatto a suo tempo per il processo di induzione mutua potremo dire anche qui che, ove il fenomeno di induzione propria o autoinduzione si manifesti in un mezzo a permeabilità magnetica costante, il flusso che si concatena con un circuito in cui scorra una corrente  $i$  è, in definitiva, proporzionale alla corrente stessa. E cioè

$$\Phi = L i \quad (36)$$

ed al fattore di proporzionalità  $L$ , misurato come  $M$  in *henry*, si dà il nome di induttanza del circuito o coefficiente di autoinduzione.

Se varia la corrente nel circuito varia allora, come si è visto, il flusso che con esso stesso si concatena e ne nasce una *f.e.m.* di induzione espressa da

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt} \quad (37)$$

moltiplicando per  $i dt$  ambo i membri è

$$e i dt = -L i di = dW \quad (38)$$

il lavoro elementare che la sorgente di energia dovrà compiere. Immaginando ora che la variazione di corrente avvenga tra un valore  $0$  ed un valore  $i$ , ed integrando il lavoro elementare da  $0$  a  $i$  è:

$$W = \int_0^i dW = \int_0^i L i di = L \int_0^i i di = \frac{1}{2} L i^2 \quad (39)$$

o anche:

$$W = \frac{1}{2} \Phi i \quad (40)$$

Il che ci dice che la energia potenziale di un circuito immerso nel campo che esso stesso produce per mezzo della corrente  $i$  è uguale alla metà della energia che lo stesso circuito, percorso dalla medesima corrente, possiede quando per fenomeno di mutua induzione si concatena col medesimo flusso  $\Phi$ .

L'energia  $\frac{1}{2} L i^2$  è in sostanza la energia che il circuito nella fase di accrescimento della corrente cede al mezzo circostante per la sua polarizzazione magnetica.

La medesima energia viene dal mezzo immagazzinata e permane inalterata per tutto il periodo di funzionamento a corrente costante. Essa viene infine restituita dal mezzo al momento della interruzione della corrente e si estrinseca sotto forma di scintilla o arco.

Si è già detto che, per la legge di *Lenz*, la forza elettromotrice indotta deve in qualche modo opporsi alla causa che la genera. Il che significa che se immaginiamo la variazione di corrente generata dalla brusca applicazione di una *f.e.m.*  $E$  ad un certo circuito di resistenza  $R$  la corrente  $i$  che ne deriva non è semplicemente data da  $E/R$ . La *f.e.m.* effettivamente agente sarà infatti la  $E$  meno la  $L di/dt$  che si desta nel circuito per autoinduzione. Ossia

$$i = \frac{E - L \frac{di}{dt}}{R} \quad (41)$$

Mettiamo allora in evidenza  $E$

$$E = R i + \frac{L di}{dt} \quad (42)$$

e moltiplicando ambo i membri per  $i dt$  è

$$E i dt = R i^2 dt + L i di \quad (43)$$

o anche, essendo

$$L i di = d\left(\frac{1}{2} L i^2\right) \quad (44)$$

$$E i dt = R i^2 dt + d\left(\frac{1}{2} L i^2\right) \quad (45)$$

ciò che chiaramente esprime il bilancio energetico prima accennato.

Nel tempo elementare  $dt$  l'energia fornita dal generatore solo in parte viene dissipata in calore per effetto *Joule*, il resto rappresentando l'energia necessaria all'incremento della polarizzazione magnetica del mezzo.

Analogamente a quanto fatto per il coefficiente di induzione mutua, è possibile dare ora alcune definizioni del coefficiente di autoinduzione la cui origine è, peraltro, evidente.

1. Il coefficiente di autoinduzione di un circuito è misurato dal flusso che si concatena col circuito medesimo quando la corrente che lo percorre è unitaria.
2. Il coefficiente di autoinduzione è misurato dal doppio dell'energia conferita al mezzo quando l'intensità della corrente che attraversa il circuito è unitaria.
3. Il coefficiente di autoinduzione di un circuito è rappresentato dal valore della tensione che nel circuito medesimo si desta per induzione quando la corrente che lo percorre varia in ragione di una unità nell'unità di tempo.

Anche l'induttanza propria di un circuito può essere, in via generale, misurata con gli ordinari metodi delle *Misure elettriche*; analogamente al coefficiente di induzione mutua, essa può essere calcolata quando si tratti di circuiti di conformazione particolarmente semplice.

A conclusione di queste brevi note su questa parte della *Elettrotecnica* vogliamo accennare, senza peraltro entrare maggiormente nel merito alla questione, alla espressione della energia potenziale di un sistema di correnti.

Nel caso più generale essa consiste della somma delle energie proprie dei due circuiti e della energia potenziale di mutua induzione risultando in definitiva:

$$W = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 \pm M i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \quad (46)$$

Infine accenniamo alle relazioni che esistono in un circuito magnetico tra la induttanza propria dei circuiti e la induttanza mutua. Tali relazioni mutano se il circuito magnetico considerato è perfetto, e cioè non esistono flussi dispersi, o imperfetto, e cioè esistono flussi dispersi.

Risulta, nel primo caso

$$M^2 = L_1 L_2 \quad (47)$$

mentre è, nel secondo caso

$$M^2 < L_1 L_2 \quad (48)$$

## Grandezze alternate sinusoidali

Dobbiamo ora occuparci dello studio di circuiti elettrici sottoposti a tensioni alternative.

È necessario pertanto premettere in breve alcune semplici nozioni nei confronti delle grandezze periodiche, periodiche e alternative sinusoidali, limitandoci, per le consuete ragioni, alle sole principali definizioni.

Si definisce funzione periodica una funzione che assume lo stesso valore per valori della variabile che stanno tra loro in progressione aritmetica. Se la variabile è il tempo, ed è questo il caso che ci interessa, si indica con nome di *periodo* l'intervallo di tempo che intercorre tra due istanti nei quali la funzione e tutte le sue derivate assumono gli stessi valori

Il rapporto tra qualsiasi numero intero di periodi e il tempo necessario che questi periodi si verifichino o, che è lo stesso, l'inverso del periodo, prende il nome di *frequenza*. Essa si misura, pertanto, in periodi o cicli al secondo.

Si denomina valore efficace di una grandezza periodica la quantità:

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T a^2 dt} \quad (1)$$

e valore medio la quantità:

$$A_{med.} = \frac{1}{T} \int_0^T a dt \quad (2)$$

Alternativa è una funzione periodica il cui valore medio sia nullo.

Sinusoidale è una particolare funzione alternativa analiticamente esprimibile con una relazione del tipo

$$a = A_m \sin[\omega t] \quad (3)$$

ove con  $a$  si indica il *valore istantaneo* della funzione e con  $A_m$  il suo valore massimo.

Dalla periodicità delle funzioni sinusoidali deriva immediatamente:

$$\omega T = 2 \pi \quad (4)$$

e quindi

$$\omega = \frac{2 \pi}{T} = 2 \pi f \quad (5)$$

$\omega$  assume il nome di pulsazione. rappresenta il numero di periodi che si verificano in  $2\pi$  secondi.

La rappresentazione analitica ora data di una funzione sinusoidale presuppone che al tempo  $t = 0$  la funzione medesima abbia valore nullo. Il che non è, evidentemente, che un caso particolare e la questione assume particolare interesse quando debbono prendersi in considerazione due funzioni sinusoidali che non seguono le stesse vicissitudini in funzione della scelta arbitraria dell'istante iniziale.

Nella sua forma più generale la rappresentazione analitica di una funzione sinusoidale è, pertanto:

$$a = A_m \sin[\omega](t \pm \theta) = A_m \sin[\omega t] \pm \phi \quad (6)$$

avendo posto:  $\omega \theta = \phi$ .

$\phi$  prende il nome di fase della funzione sinusoidale e ad essa si attribuisce segno positivo o negativo a seconda che la funzione risulti in anticipo o in ritardo rispetto ad una funzione con sfasamento nullo, che inizi cioè con valore zero al tempo zero.

In una funzione sinusoidale il valore medio è, per definizione, nullo. Risultando, comunque, comodo, per alcune questioni, parlare egualmente del valore medio, lo si considera esteso al solo semiperiodo: pertanto è:

$$A_{med} = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} a \, dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A_m \sin[\omega t] dt = \frac{2A_m}{\pi} \quad (7)$$

Il valore efficace di una funzione sinusoidale risulta invece:

$$\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T a^2 dt} = \frac{A_m}{\sqrt{2}} \quad (8)$$

Vari sono i modi in cui le funzioni sinusoidali possono essere rappresentate e, conseguentemente, vari i metodi adottabili per il loro calcolo.

Ricordiamo, qui, solo che una funzione sinusoidale può sempre rappresentarsi con un vettore ruotante e che, qualora tutte le grandezze sinusoidali che interessano un medesimo problema abbiano la medesima pulsazione, può prescindersi dal comune fattore  $\omega t$  e rappresentare le varie funzioni con vettori fissi complanari le cui relazioni angolari rappresentano relazioni di fase tra le varie grandezze.

A loro volta i vettori possono rappresentarsi analiticamente, e come tali essere portati in calcolo, vuoi per il tramite delle loro proiezioni, vuoi per il tramite, nelle rappresentazioni polari, del loro modulo e del loro argomento.

Inoltre una funzione sinusoidale può essere rappresentata da un numero complesso: si pensi infatti al *piano di Gauss* in cui ogni punto è rappresentabile con un numero complesso; d'altronde è chiaro che ogni punto di tale piano può essere visto come estremo di un vettore avente l'origine nell'origine degli assi coordinati, vettore che, per quanto si è detto, può essere chiamato a rappresentare una grandezza sinusoidale.

Accettata la rappresentazione a mezzo di numeri complessi ne deriva la possibilità di una doppia rappresentazione analitica delle funzioni sinusoidali ai fini della esecuzione delle operazioni fondamentali: la rappresentazione trigonometrica e quella esponenziale.

Al metodo che fa uso dei numeri complessi si dà il nome di metodo simbolico ad indicare che, per tal via, ci si distacca totalmente dal significato fisico delle questioni considerate.

È questa anzi una delle ragioni che determina, in alcuni paesi, una notevole avversione a questo metodo che pure ha il pregio di una particolare semplicità ed eleganza.

Tutti i metodi citati possono, comunque, ed anzi debbono, essere indifferentemente applicati alla risoluzione matematica di problemi riguardanti le grandezze sinusoidali, non essendo raro il caso in cui alcune parti di uno stesso problema siano di più rapida ed immediata risoluzione con uno particolare dei metodi indicati.

Vediamo ora come sia possibile realizzare fisicamente una *f.e.m.* ad andamento sinusoidale nel tempo.

Si abbia un campo magnetico uniforme ed in esso si disponga una spirale piana. Se  $B$  è la induzione magnetica nel campo, risulta:

$$\Phi = B S \cos \alpha \quad (8)$$

il flusso che in queste considerazioni si concatena con la spira  $AB$  che racchiude la superficie  $S$ .

Potremo scrivere anche:

$$\Phi = \Phi_m \cos \alpha \quad (9)$$

avendo indicato con  $\Phi_m$  il flusso massimo

$$\Phi_m = B S \quad (10)$$

Il flusso che si concatena con la spira varia quindi in funzione dell'angolo  $\alpha$ , così che, se si imprime alla spira una rotazione intorno all'asse  $O$  con velocità angolare costante ed uguale ad  $\omega$ , risulta

$$\alpha = \omega t \quad (11)$$

e quindi

$$\Phi = \Phi_m \cos \omega t \quad (12)$$

La variazione del flusso concatenato induce allora nella spira  $AB$  una *f.e.m.* data da

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega \Phi_m \sin \omega t = E_m \sin \omega t \quad (13)$$

avendo posto

$$E_m = \omega \Phi_m \quad (14)$$

che è, appunto, di tipo sinusoidale.

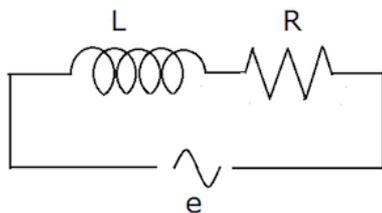
Accennato così, brevemente, alle definizioni caratteristiche delle *f.e.m.* sinusoidali, alla loro rappresentazione ed ai conseguenti metodi di calcolo, alla possibilità fisica di generare tensioni siffatte, affrontiamo, ora, lo studio del comportamento di circuiti tipici sottoposti a *f.e.m.* di tale tipo.



## Circuiti con resistenza, capacità, induttanza percorsi da correnti alternate

### 9.1 Circuito con resistenza e induttanza

Sia dato un circuito del tipo in figura, costituito, cioè, dall'aggregato in serie di una resistenza  $R$  e di una induttanza  $L$ , al quale sia applicata una *f.e.m.*  $e$  comunque variabile nel tempo.



Sappiamo che, con riferimento ai valori istantanei, la *f.e.m.* risultante della *f.e.m.* effettivamente applicata e della *f.e.m.* di autoinduzione che si desta nella induttanza del circuito, è:

$$e' = e - L \frac{di}{dt} \quad (1)$$

Il segno meno deriva dal fatto, ormai noto, che, per la legge di *Lenz* la *f.e.m.* di autoinduzione deve essere tale da opporsi alla causa che l'ha generata, ossia alla *f.e.m.* applicata al circuito.

Poiché d'altro canto è:

$$e' = R i \quad (2)$$

si avrà che:

$$e = R i + L \frac{di}{dt} \quad (3)$$

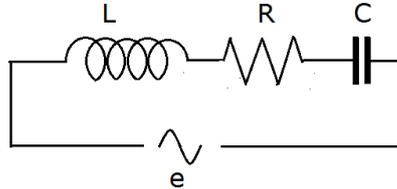
o anche:

$$e - R i - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (4)$$

la equazione caratteristica del circuito.

## 9.2 Circuito con resistenza, induttanza e capacità

Si consideri ora un circuito costituito da una resistenza  $R$ , una induttanza  $L$ , e una capacità  $C$ , connesse in serie (vedi figura), sottoposto anch'esso a una *f.e.m.* variabile nel tempo con una legge che supporremo alternativa.



In un circuito del genere l'interruzione della continuità metallica costituita dal condensatore non comporta, ovviamente, l'interruzione della continuità elettrica, il condensatore, infatti, si caricherà e si scaricherà successivamente in sensi alterni a seconda del senso della *f.e.m.* impressa.

Il campo elettrico variabile che si ha in conseguenza nell'interno del condensatore equivale, si è visto, a una corrente e prende il nome di corrente di spostamento.

Sia  $q$  la quantità di elettricità presente in un determinato istante in una delle armature del condensatore.

Se indichiamo con  $v$  la *d.d.p.* esistente in quell'istante tra le armature del condensatore è:

$$q = C v$$

essendo  $C$  la capacità del condensatore.

Se a questo punto  $v$  varia di una quantità infinitesima  $dv$ , anche  $q$  varia di una quantità  $dq$  data da

$$dq = C dv$$

Tutto allora avviene come se nel dielettrico passasse, in corrispondenza della variazione  $dv$  della tensione, una corrente

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt}$$

D'altro canto si è visto or ora che è

$$v' = R i + L \frac{di}{dt} \quad (8)$$

la *d.d.p.* che si localizza ai capi del circuito resistenza-induttanza e poiché deve in ogni caso essere

$$v + v' = e \quad (9)$$

sarà anche:

$$R i + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = e \quad (10)$$

e, sostituendo nella precedente espressione,

$$q = \int i dt \quad (11)$$

si ha infine, quale equazione caratteristica del circuito in esame:

$$R i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = e \quad (12)$$

Si supponga ora che la *f.e.m.*  $e$ , che sinora abbiamo indicato genericamente come variabile nel tempo, vari in effetti con legge sinusoidale.

È allora:

$$e = E_m \sin \omega t \quad (13)$$

e pertanto:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = E_m \sin \omega t \quad (14)$$

è la equazione risolutiva del più generale circuito *serie* che possa essere sottoposto a una *f.e.m.* sinusoidale.

È noto che la soluzione di una equazione del genere di quella ora ricavata risulta dalla somma di due termini  $i_1$  e  $i_2$  di cui il primo rappresenta la soluzione generale della equazione ausiliaria:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 0 \quad (15)$$

e il secondo una soluzione particolare della equazione completa.

Sarebbe possibile rendersi conto che il termine  $i_1$  sta a rappresentare il regime transitorio che si stabilisce all'atto della chiusura del circuito.

Esso si smorza nel tempo, divenendo in breve trascurabile rispetto al termine  $i_2$  che, solo, rappresenta la soluzione cercata, con riferimento al regime permanente.

La corrente  $i$  che, in conseguenza dell'applicazione della *f.e.m.*  $e$ , circola nel circuito è allora della forma:

$$i = I_m \sin(\omega t - \phi) \quad (16)$$

di cui è necessario definire ampiezza e fase.

Risulta:

$$\frac{di}{dt} = \omega I_m \cos(\omega t - \phi) \quad (17)$$

$$i dt = -\frac{I_m}{\omega} \cos(\omega t - \phi) \quad (18)$$

Queste espressioni possono essere sostituite nella equazione generale; questa deve poi subire alcune manipolazioni di natura analitica (sulle quali ci è necessario soprassedere) per pervenire, infine, alla conclusione che è:

$$\operatorname{tg}(\phi) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (19)$$

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (20)$$

O anche:

$$I_{eff} = \frac{E_{eff}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (21)$$

Alla quantità

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (22)$$

si dà il nome di *reattanza* del circuito e la si indica con la lettera  $X$ .

Con le posizioni accennate, i risultati dianzi conseguiti sogliono esprimersi nella forma seguente:

$$I = E \quad (23)$$

$$tg\phi = \frac{X}{R} \quad (24)$$

Quello cui abbiamo accennato a grandi linee è, ricordiamo, il metodo trigonometrico per il calcolo delle grandezze sinusoidali.

Possiamo eseguire il calcolo della corrente che attraversa un circuito a costanti concentrate sottoposto a una *f.e.m.* sinusoidale con uno qualsiasi degli altri metodi di calcolo a suo tempo citati: giungeremmo in ogni caso a una espressione del tipo:

$$\vec{I} = \frac{\vec{E}}{\vec{Z}} \quad (25)$$

Dove col segno  $\rightarrow$  abbiamo voluto contrassegnare le grandezze vettoriali.

Assume perciò carattere di generalità l'affermazione che in un qualsiasi circuito a costanti concentrate cui sia applicata una *f.e.m.* sinusoidale di valore efficace  $E$ , circola una corrente, anch'essa sinusoidale, di valore efficace:

$$I = \frac{E}{Z} \quad (26)$$

e la cui differenza di fase col vettore tensione è definita dalla relazione:

$$tg\phi = \frac{X}{R} \quad (27)$$

Lo sfasamento della corrente rispetto alla tensione è da intendersi in ritardo se nel calcolo della reattanza del circuito prevale la reattanza di autoinduzione, in anticipo nel caso in cui prevale la reattanza di capacità.

In ogni caso, poiché è:

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

e

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

si nota subito che la corrente, in un circuito che già contenga resistenza e induttanza, cresce quando si inserisce, in serie con gli anzidetti elementi, una capacità.

In particolare esistono un valore dell'induttanza e un valore della capacità per i quali, per una determinata frequenza, si perviene all'annullamento della reattanza.

In queste condizioni il circuito si comporta come puramente resistivo, pur non essendolo, e la corrente assume, in relazione alla *f.e.m.* applicata, il suo massimo valore, non intervenendo allora, che la sola resistenza a limitarla.

Questa particolare e importante condizione di funzionamento di un circuito prende il nome di condizione di risonanza.

Tale condizione è analiticamente esprimibile e si dirà che un circuito contenente induttanza, capacità e resistenza si trova in condizioni di risonanza quando per esso vale la relazione:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

ed è manifesto, per la presenza della pulsazione  $\omega$ , che, fissati i valori di  $L$  e di  $C$  la condizione di risonanza sussiste solo per un ben preciso valore della frequenza.

Altre considerazioni importanti, atte a chiarire il comportamento di un circuito che si trovi nelle particolari condizioni accennate, possono trarsi dalla condizione di risonanza scritta nella forma

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

Da essa, infatti, moltiplicando primo e secondo membro per la corrente  $I$ , si deduce immediatamente la relazione:

$$\omega LI = \frac{1}{\omega C} I$$

Si localizzano, cioè, ai capi dell'induttanza e della capacità due tensioni eguali tra loro in valore assoluto, la cui entità dipende direttamente dal valore della corrente.

Poiché è, in queste condizioni:

$$I = \frac{E}{R}$$

sarà anche:

$$V = \omega L \frac{E}{R} = \frac{1}{\omega C} \frac{E}{R}$$

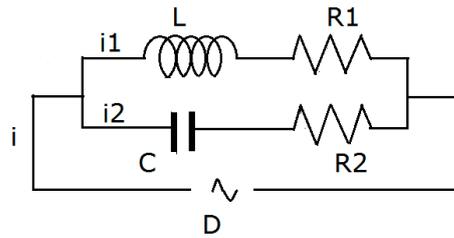
il valore comune delle *d.d.p.* che si localizzano ai capi degli elementi reattivi di un circuito cui sia applicata dall'esterno una *f.e.m.*  $E$ .

Si vede chiaramente che, per resistenza del circuito trascurabile, è possibile localizzare ai capi degli elementi reattivi notevoli differenze di potenziale, pur applicando dall'esterno *f.e.m.* di modesta entità.

Per questa ragione al fenomeno della risonanza in un circuito del tipo *serie* viene dato comunemente il nome di *risonanza di tensione*.

### 9.3 Circuiti derivati contenenti resistenza, induttanza e capacità

Il caso di circuiti derivati, comunque complessi, può facilmente essere trattato a partire da un semplice circuito derivato quale quello in figura.



Sappiamo che a circuiti sottoposti a correnti variabili sono applicabili i due principi di Kirchoff a condizione che si faccia riferimento ai valori istantanei e che si considerino, come agenti nelle maglie, oltre alle *f.e.m.* applicate anche le cadute di potenziale ai capi delle resistenze e delle reattanze di autoinduzione e di capacità presenti nel circuito.

Si può allora scrivere, per il nodo A:

$$i = i_1 + i_2$$

e per le maglie A, L, R<sub>1</sub>, B, D e A, C, R<sub>2</sub>, D, le due equazioni ormai note:

$$e = R_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt}$$

$$e = R_2 i_2 + \frac{1}{C} i_2 dt$$

Dove

$$e = E_m \sin \omega t$$

Dalla seconda delle tre relazioni precedenti ricaviamo allora  $i_1$ ; si ottiene

$$i_1 = \frac{E_m}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R_1})$$

mentre dalla terza si ricava  $i_2$ , ottenendo

$$i_2 = \frac{E_m}{\sqrt{R_2^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}} \sin(\omega t + \arctg \frac{1}{\omega C R_2})$$

Per la prima equazione la somma delle due correnti dà il valore della corrente erogata.

Si ottiene, applicando il teorema di Carnot al triangolo delle correnti:

$$I_m^2 = I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + 2I_{1m}I_{2m} \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

A mostrare l'estrema semplicità del metodo simbolico per calcoli di questo tipo, e a conferma di quanto già detto circa la convenienza di avere indiscriminatamente presenti tutti i metodi di calcolo a disposizione per l'analisi di circuiti sottoposti a grandezze alternative, applichiamo alla risoluzione di questo caso anche il metodo in questione.

Si indichi con la notazione:

$$\vec{Y} = \frac{1}{\vec{Z}}$$

l'inverso della impedenza di un circuito.

Questa grandezza assume il nome di ammettenza del circuito considerato ed è una grandezza complessa la cui unità di misura è il **siemens**.

Le tre equazioni precedenti assumono allora la forma,

$$\begin{aligned}\vec{I}_1 + \vec{I}_2 &= \vec{I} \\ \vec{I}_1 &= \frac{\vec{E}}{\vec{Z}_1} = \vec{E}\vec{Y}_1 \\ \vec{I}_2 &= \frac{\vec{E}}{\vec{Z}_2} = \vec{E}\vec{Y}_2\end{aligned}$$

Poiché è, evidentemente,

$$\begin{aligned}\vec{Z}_1 &= R_1 + j\omega L \\ \vec{Z}_2 &= R_2 - j\frac{1}{\omega C}\end{aligned}$$

noti gli elementi costitutivi del circuito, sono facilmente calcolabili le ammettenze dei due rami del circuito e, conseguentemente, i valori delle tre correnti incognite

$$\vec{I}, \vec{I}_1, \vec{I}_2$$

È interessante notare che anche in circuiti del tipo ora esaminato la condizione di risonanza

$$\omega^2 LC = 1$$

determina, ove realizzata, una particolare condizione di funzionamento del sistema. Consideriamo, intero, il semplice circuito derivato precedentemente studiato e supponiamo trascurabili le resistenze  $R_1$  e  $R_2$  dei due rami in parallelo.

E allora

$$\begin{aligned}I_{1m} &= \frac{E_m}{\omega L} & \phi_1 &= \frac{\pi}{2} \\ I_{2m} &= \omega C E_m & \phi_2 &= -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

dalla

$$I_m^2 = I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + 2I_{1m}I_{2m}\cos(\phi_1 - \phi_2)$$

si ottiene in queste condizioni

$$I_m^2 = I_{1m}^2 + I_{2m}^2 - 2I_{1m}I_{2m}$$

ossia:

$$I_m^2 = (I_{1m} - I_{2m})^2$$

in condizioni di risonanza è, chiaramente:

$$I_{1m} = I_{2m}$$

e quindi:

$$I_m = 0$$

il che significa che in un circuito derivato del tipo in figura la realizzazione della condizione di risonanza comporta la circolazione nei due rami di correnti per quanto intense con una erogazione di corrente, da parte della sorgente di energia, che, al limite (per resistenze trascurabili), può essere nulla.

Al particolare fenomeno si dà usualmente il nome di risonanza di corrente.

Non ci è possibile soffermarci sulle molteplici considerazioni, soprattutto energetiche, cui i circuiti studiati e le particolari loro condizioni che abbiamo indicato come condizioni di risonanza aprono la via.

Prima di abbandonare l'argomento è necessario, però, almeno notare che non esiste contrasto alcuno tra le condizioni di risonanza e il principio di conservazione dell'energia. Nelle condizioni di risonanza pura ( $R = 0$ ) infatti, il circuito assorbe energia solo nella fase iniziale, immagazzinandola, a seconda dei casi, sotto forma elettromagnetica o elettrostatica. In seguito, a regime, non si ha che un periodico trasferimento dell'energia immagazzinata dall'una all'altra forma.

## 9.4 Circuiti affetti da mutua induzione

Abbiamo sin ora esaminato il caso di circuiti percorsi da correnti alternate e contenenti resistenze, induttanze e capacità.

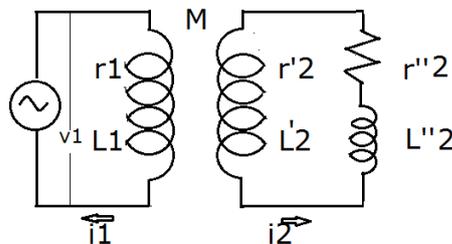
Dobbiamo ora esaminare il comportamento di quei circuiti che, contenendo gli stessi elementi in precedenza accennati, siano anche affetti da mutua induzione.

La loro importanza risulta chiara non appena si pensi che rientrano in questa categoria di circuiti i cosiddetti trasformatori il cui uso nel campo degli impianti elettrici è ben noto.

Trascurando, per necessità, il comportamento di circuiti consimili in fase transitoria all'atto dell'apertura o della chiusura del circuito, consideriamo il caso di due circuiti accoppiati per il tramite di una mutua induzione  $M$  in regime permanente sinusoidale.

Denominiamo **primario** il circuito connesso con il generatore di energia; **secondario** il circuito con esso induttivamente accoppiato per il tramite della mutua induzione  $M$ .

Con riferimento a quanto segnato in figura, siano  $r_1$ ,  $L_1$  la resistenza e la induttanza primaria,  $r_2 = r'2 + r_2eL2=L'2+L2$  la resistenza e induttanza complessiva secondaria.



Supposte costanti le resistenze e le induttanze, propria e mutua, primarie e secondarie e con riferimento ai valori istantanei delle tensioni e delle correnti, è evidentemente:

$$\begin{aligned}v_1 &= r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 &= r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}\end{aligned}$$

nelle quali, per la ipotesi ammessa di sinusoidalità del regime permanente è:

$$\begin{aligned}v_1 &= V_{1m} \sin \omega t \\ i_1 &= I_{1m} \sin(\omega t - \alpha_1) \\ i_2 &= I_{2m} \sin(\omega t - \alpha_2)\end{aligned}$$

In tal modo è possibile risolvere il problema di esprimere le correnti in grandezza e fase; infatti sostituendo le espressioni della tensione e delle correnti nelle due equazioni dei circuiti queste si scindono in due equazioni indipendenti dando luogo a un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite  $I_{1m}$ ,  $I_{2m}$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ .

Più semplice risulta la soluzione del problema per il tramite del metodo simbolico. Le equazioni dei circuiti possono infatti semplicemente porsi nella forma

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 &= (r_1 + jx_1)\vec{I}_1 + j\mu\vec{I}_2 \\ 0 &= (r_2 + jx_2)\vec{I}_2 + j\mu\vec{I}_1\end{aligned}$$

ove si siano indicate con  $x_1$ ,  $x_2$ , e  $\mu$  rispettivamente le grandezze

$$\omega L_1 \quad \omega L_2 \quad \omega M$$

Può allora ricavarsi dalla seconda la  $I_2$

$$\vec{I}_2 = \vec{I}_1 \frac{-j\mu}{r_2 + jx_2} = \vec{I}_1 \frac{\mu x_2 + j\mu r_2}{r_2^2 + x_2^2}$$

e, sostituendo nella prima, ottenersi:

$$\vec{V}_1 = \vec{I}_1 \left( (r_1 + \frac{\mu^2 r_2}{r_2^2 + x_2^2}) + j(x_1 - \frac{\mu^2 x_2}{r_2^2 + x_2^2}) \right)$$

che può facilmente porsi nella forma:

$$\vec{V}_1 = \vec{Z}_{e1} \vec{I}_1$$

ove alle espressioni in parentesi a grappa si riconoscono le dimensioni di una impedenza.

Si tratta però di una impedenza che contiene a lato degli elementi primari anche gli elementi del circuito secondario, per tale ragione essa assume il nome di **impedenza primaria equivalente**.

Dalla posizione ora fatta risulta chiaramente

$$\vec{E}_{e1} = A + jB$$

con

$$A = r_1 + \frac{\mu^2 r_2}{r_2^2 + x_2^2} \quad B = x_1 - \frac{\mu^2 x_2}{r_2^2 + x_2^2}$$

Alcune considerazioni interessanti possono farsi sul comportamento dei circuiti mutuamente accoppiati propri a partire dalla espressione della impedenza primaria equivalente.

È anzitutto chiaro che la impedenza primaria è nettamente influenzata dalla presenza del circuito secondario, nel senso di un aumento della resistenza e di una diminuzione della reattanza, riducendosi la reattanza primaria equivalente alla impedenza primaria quando per assenza o interruzione del circuito secondario possa porsi  $\mu = 0$ .

È infatti in questo caso

$$A = r_1 \quad B = x_1 \\ \vec{Z}_{e10} = r_1 + jx_1$$

E poiché nelle pratiche realizzazioni la resistenza primaria risulta sempre fortemente minore della reattanza primaria ne deriva che la impedenza a vuoto del trasformatore  $Z_{e10}$  (a circuito secondario aperto) è sempre notevolmente maggiore della impedenza primaria equivalente in funzionamento a secondario chiuso.

Dalla equazione

$$\vec{V}_1 = \vec{Z}_{e1} \vec{I}_1$$

è, comunque, sempre possibile ricavare il valore efficace e la fase della corrente primaria.

Infatti da essa si ricava:

$$\vec{I}_1 = \frac{\vec{V}_1}{\vec{Z}_{e1}} = \frac{\vec{V}_1}{A + jB} = \vec{V}_1 \frac{A - jB}{A^2 + B^2}$$

e quindi

$$I_1 = \frac{V_1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B}{A}$$

Dalla espressione della corrente  $\vec{I}_2$  in funzione della corrente  $\vec{I}_1$ , precedentemente riportata si ottiene poi il rapporto

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\mu}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

rapporto che si semplifica notevolmente se si ammette che la reattanza secondaria sia fortemente prevalente nella resistenza totale secondaria.

Risulta, allora:

$$\frac{\mu^2}{r^2 + x^2} = \frac{\mu^2}{x^2} = \left(\frac{M}{L}\right)^2 = \frac{N_1^2}{N_2^2}$$

e in definitiva risulta:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

Quanto alla differenza di fase relativa tra le due correnti primaria e secondaria la sua espressione corretta è:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \operatorname{arctg} \frac{r_2}{x_2}$$

nella ipotesi ora accennata essa risulta:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \pi$$

Si rifletta ora al fatto che la ipotesi di chiara equivalenza della reattanza sulla resistenza complessiva secondaria risulta con fortissima approssimazione soddisfatta nelle condizioni nelle quali la resistenza secondaria si riduca alla sola resistenza propria dell'avvolgimento; vale a dire nelle condizioni di corto circuito secondario.

Potremo allora affermare che: *in tali condizioni le correnti primaria e secondaria di un trasformatore risultano tra loro in opposizione di fase e di ampiezza tale che il loro rapporto è uguale al rapporto inverso del numero delle spire.*

Riprendiamo ora in esame la equazione del circuito secondario in termini simbolici:

$$0 = (r_2 + jx_2)\vec{I}_2 + j\mu\vec{I}_1$$

è chiaro che essa può scriversi:

$$j\mu\vec{I}_1 = -(r'_2 + j\omega L'_2)\vec{I}_2 - (r''_2 + j\omega L''_2)\vec{I}_2$$

ove si voglia porre in luce il fatto che la *f.e.m.* indotta nel secondario,  $j\mu\vec{I}_1$ , serve in parte a compensare la caduta interna dell'avvolgimento secondario, in parte a compensare la caduta nella impedenza esterna di utilizzazione.

Aumentando la impedenza di utilizzazione, diminuisce, ovviamente, il valore della corrente  $\vec{I}_2$  e perciò gradualmente diminuisce la caduta di potenziale interno; per contro aumenta la caduta esterna che tende a diventare uguale alla *f.e.m.* di mutua induzione.

Al limite per  $\vec{I}_2 = 0$  (circuito secondario aperto) sarà:

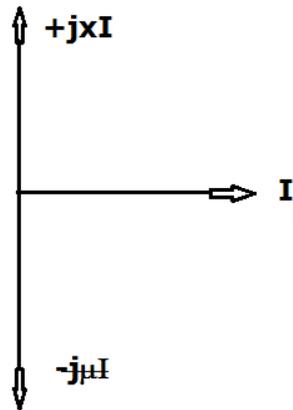
$$\vec{V}_2 = -j\mu\vec{I}_1$$

la tensione presente ai morsetti secondari.

Quanto alla tensione primaria  $\vec{V}_1 = +jx_1\vec{I}_1$

Qualora si immagini la resistenza primaria  $r_1$  trascurabile, in queste condizioni, rispetto alla reattanza primaria  $x_1$ .

Tutto ciò può esprimersi graficamente nel modo seguente:



Immaginando anche qui nullo il flusso disperso, si può scrivere ancora:

$$x_1 = \omega L_1 = \omega K N_1^2 \quad \mu = \omega M = \omega K M_1 N_2$$

Dalle quali, in concomitanza con le precedenti, risulta:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

ciò che può esprimersi dicendo che: *nel funzionamento a vuoto di un trasformatore tensione primaria e secondaria risultano tra loro in opposizione di fase; le ampiezze stanno fra loro nel rapporto diretto del numero delle spire.*

---

Fonte del testo:

[https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Elettrotecnica/Circuiti\\_con\\_resistenza,\\_capacit%C3%A0,\\_induttanza\\_percorsi\\_da\\_correnti\\_alternate&oldid=415232](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Elettrotecnica/Circuiti_con_resistenza,_capacit%C3%A0,_induttanza_percorsi_da_correnti_alternate&oldid=415232)

## Potenza attiva, reattiva, apparente

In un circuito sottoposto ad una *f.e.m.* sinusoidale:

$$e = E_m \text{sen}(\omega t)$$

nel quale transiti una corrente pur essa sinusoidale

$$i = I_m \text{sen}(\omega t + \phi)$$

la potenza istantanea è data dalla espressione:

$$P_i = E_e I_e [\cos \phi - \cos(2\omega t + \phi)]$$

mentre la potenza media assume la forma:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = E_e I_e \cos \phi$$

Se il circuito in questione è del tipo di quelli studiati sin ora, contenente resistenza, induttanza e capacità, l'energia istantanea dissipata sotto forma di calore nella resistenza  $R$  può esprimersi sotto forma:

$$P_{R,i} = R i^2 = R I_e^2 [1 - \cos 2(\omega t + \phi)]$$

la quale avuto presente il fatto che:

$$\cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

può scriversi:

$$P_{R,i} = E_e I_e \cos[\phi] [1 - \cos 2(\omega t + \phi)]$$

La differenza tra la totale potenza istantanea  $P_{i,t}$  fornita al circuito e la potenza istantanea  $P_{i,R}$  dissipata per effetto Joule nella resistenza del circuito da una grandezza che è pur essa una potenza ed il cui significato fisico è quello di rappresentare la energia potenziale istantanea che deve essere fornita al circuito per la polarizzazione elettrica e magnetica.

Tale potenza risulta pertanto espressa dalla differenza:

$$P_{i,t} - P_{i,R} = P_r = -E I \text{sen}[\phi] \text{sen}[2(\omega t + \phi)]$$

L'integrale di questa espressione rispetto ad un numero intero di periodi è nullo, mentre la integrazione durante un semiperiodo dà il lavoro impiegato dalla sorgente per la generazione dei campi elettrico e magnetico.

Alla espressione  $P_r = EI \sin \phi$  si dà il nome di potenza reattiva.

Per contrapposizione la potenza media  $P_m = EI \cos \phi$  viene indicata col nome di potenza attiva, mentre alla grandezza  $E I$  si dà il nome di potenza apparente.

## Grandezze periodiche non sinusoidali

La ammissione, implicitamente fatta sin ora, che i problemi relativi alle grandezze periodiche si limitino alla trattazione di circuiti interessati da grandezze semplicemente sinusoidali, trova nella pratica scarso riscontro. In effetti, per quanto si faccia, le inevitabili dissimmetrie costruttive e di funzionamento del macchinario generatore, specie quello a poli salienti, comportano sempre un certo discostarsi della forma di onda della tensione da esso ottenibile dalla desiderata forma d'onda sinusoidale pura. D'altro canto la già notevole difficoltà della trattazione dei problemi in corrente alternata verrebbe talmente aggravata dalla considerazione della forma d'onda effettiva, che, in tutti quei casi, e sono la maggioranza, nei quali lo scarto tra l'andamento effettivo della tensione e l'andamento sinusoidale non è molto sensibile, si rinuncia ad ogni ulteriore precisione di indagine.

Esistono però dei casi nei quali non è assolutamente lecito confondere l'effettivo andamento nel tempo delle grandezze elettriche con funzioni sinusoidali; è con riferimento a questi casi che, in questa sede, verranno brevemente dati i cenni generali di come possono essere trattate grandezze elettriche periodiche di forma qualsiasi.

La trattazione prende lo spunto dal noto teorema di **Fourier** secondo il quale qualsiasi funzione continua di una variabile indipendente può essere sviluppata in una serie indefinita di termini, ciascuno dei quali è una funzione sinusoidale della variabile, di frequenza crescente secondo la serie naturale dei numeri. Ciò che, con riferimento ad una funzione del tempo  $y(t)$ , può esprimersi affermando che:

$$y(t) = A_0 + A_1 \text{sen}(\omega t + \alpha_1) + A_2 \text{sen}(2\omega t + \alpha_2) + \dots$$

dove:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T y \, dt$$

è il valore medio della funzione.

I successivi termini della serie prendono ordinatamente il nome di armonica fondamentale, seconda, terza ecc. armonica.

Per la completa conoscenza della funzione  $y$ , comunque variabile nel tempo, risulta pertanto necessario e sufficiente conoscere le ampiezze e le fasi delle singole armoniche.

Senza entrare nel merito della trattazione analitica del problema diremo qui solo che, posto:

$$S_n = A_n \operatorname{sen}(\alpha_n) \quad C_n = A_n \operatorname{cos}(\alpha_n)$$

la funzione  $y(t)$  può esprimersi nella forma:

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n \operatorname{sen}(n\omega t) + \sum_{n=1}^{n=\infty} S_n \operatorname{cos}(n\omega t)$$

e che la conoscenza dei termini  $C_n$  e  $S_n$  relativi all'armonica di ordine  $n$  è sufficiente alla completa definizione dell'armonica stessa.

Infatti è chiaramente:

$$A_n = \sqrt{S_n^2 + C_n^2} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{S_n}{C_n}$$

Nello stesso teorema di Fourier precedentemente citato, è dimostrato che i termini  $C_n$  e  $S_n$  assumono le seguenti espressioni in funzione della  $y(t)$ :

$$C_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \operatorname{sen}(n\omega t) dt$$

$$S_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \operatorname{cos}(n\omega t) dt$$

così che, nota la espressione analitica della  $y(t)$ , la integrazione delle espressioni precedenti consente il calcolo dei coefficienti  $C_n$  e  $S_n$  per le armoniche di qualsiasi ordine e, per quel che si è visto, la determinazione della ampiezza e della fase di una armonica di ordine qualsiasi della funzione data.

In pratica è raro il caso in cui sia nota la espressione analitica della funzione  $y(t)$ . Più frequente è il caso che della funzione in parola si conosca graficamente l'andamento nel tempo: ciò che può aversi, ad esempio, ogni qualvolta della funzione data possa ottenersi l'oscillogramma.

Si ricorre allora a metodi grafico-analitici tra i quali ricordiamo quello di **Thompson** in cui si usa, essenzialmente, per il calcolo dei coefficienti  $C_n$  e  $S_n$ , l'artificio di ricondurre gli integrali a sommatorie di un numero finito di addendi.

Non abbiamo qui il tempo necessario alla completa esposizione del metodo e rinviando ai testi di elettrotecnica per un più approfondito esame dell'argomento.

Notiamo solo che la laboriosità di metodi simili ha portato, nella tecnica delle misure elettriche, allo sviluppo di speciali apparecchi che prendono, appunto, il nome di analizzatori di armoniche, per mezzo dei quali è possibile di una data tensione o corrente, individuare il contenuto armonico fino ad ordini sufficientemente elevati e con precisioni che tenuto conto dei possibili errori di graficismo sono spesso dell'ordine di grandezza, se non maggiori, di quelli ottenibili con i citati metodi grafico-analitici.

Per qualsiasi via si pervenga ad esprimere una grandezza elettrica funzione periodica non sinusoidale del tempo in una serie di Fourier, interessa estendere a queste grandezze quelle definizioni fondamentali che furono a suo tempo date per le grandezze sinusoidali.

Anche qui per **valore massimo** o **ampiezza** si intende l'ordinata massima della curva rappresentativa.

Per il **valore medio**, la media delle ordinate di un periodo. Risulta:

$$y_{med} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y dt$$

e non ha bisogno di particolari spiegazioni l'osservazione che le armoniche d'ordine pari non danno alcun contributo al valore medio, così definito.

Quanto al valore efficace esso è dato dalla espressione:

$$y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2 dt}$$

ed, esprimendo in serie di Fourier la funzione  $y = y(t)$ , si deduce semplicemente che è:

$$y = \sqrt{y_1^2 + y_3^2 + y_5^2 + \dots} = y_1 \sqrt{1 + \left(\frac{y_3}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{y_5}{y_1}\right)^2 \dots}$$

Non è più possibile, evidentemente, affermare che esista una proporzionalità tra valore medio, valore efficace e valore massimo, **fattore di vertice** e **fattore di forma** mantengono inalterate la propria definizione, ma variano, ovviamente, il proprio valore.

Si intende, infine, per sinusoidale equivalente quella funzione sinusoidale che abbia lo stesso periodo e lo stesso valore efficace della funzione data e per **coefficiente di deformazione** il rapporto tra la differenza massima tra le ordinate dell'area considerata e della sinusoidale equivalente.

Per la determinazione del coefficiente di deformazione la sinusoidale equivalente deve essere sovrapposta alla curva effettiva in modo tale da ridurre al minimo la differenza predetta.

Vediamo ora come sia possibile risalire al calcolo della corrente che circola in un circuito sottoposto ad una *f.e.m.* alternativa non sinusoidale. Sia:

$$e = E_{1m} \text{sen}(\omega t + \alpha_1) + E_{3m} \text{sen}(3 \omega t + \alpha_3) + \dots$$

la *f.e.m.* in questione di valore efficace:

$$E_{eff} = E_1 \sqrt{1 + \left(\frac{E_3}{E_1}\right)^2 + \dots}$$

Nel caso più generale di circuito contenente resistenza, induttanza e capacità, la relazione tra i valori istantanei della *f.e.m.* e della corrente sarà del tipo:

$$e_i - L \frac{di}{dt} - \frac{1}{C} \int i dt - R i = 0$$

Anche la corrente avrà in generale un andamento non sinusoidale e la sua espressione sarà del tipo:

$$i = I_{1m} \text{sen}(\omega t + \alpha_1 + \phi_1) + I_{3m} \text{sen}(3 \omega t + \alpha_3 + \phi_3) + \dots$$

ed il problema è risolto non appena siano determinate le ampiezze e le fasi delle singole armoniche che compaiono nella espressione della corrente.

Sostituendo nella equazione che lega i valori istantanei le due espressioni della *f.e.m.* e della **corrente** si vede subito che essa si scinde in tante equazioni indipendenti quante sono le sinusoidi di frequenza diversa nella *f.e.m.* e nella corrente. Così che in definitiva, dalla soluzione di queste equazioni si ottiene, per ogni armonica della tensione, l'ampiezza e la fase nella generica forma seguente (riferita alla ennesima armonica):

$$I_{n,m} = \frac{E_{n,m}}{\sqrt{R^2 + (n\omega L - \frac{1}{n\omega C})^2}} \quad \text{tg } \phi_n = \frac{n\omega L - \frac{1}{n\omega C}}{R}$$

Da questa espressione si trae immediatamente che l'ampiezza di una armonica di corrente è definita in funzione della ampiezza della armonica di tensione di pari ordine e delle caratteristiche elettriche e magnetiche del circuito alla frequenza che caratterizza l'armonica in questione. Se ne deduce che in generale, salvo il caso di circuiti puramente ohmici, la forma d'onda della corrente risulterà diversa da quella della tensione: e non è difficile accorgersi che in circuiti prevalentemente induttivi la corrente risulterà meno deformata della tensione, laddove in circuiti prevalentemente capacitivi il contenuto armonico percentuale della corrente risulterà più accentuato di quello della tensione.

Ciò posto, se tensione e corrente in un circuito assumono la forma:

$$\begin{aligned} e &= E_{1m} \text{sen}(\omega t + \alpha_1) + E_{3m} \text{sen}(3 \omega t + \alpha_3) + \dots \\ i &= I_{1m} \text{sen}(\omega t + \alpha_1 - \phi_1) + I_{3m} \text{sen}(3 \omega t + \alpha_3 - \phi_3) + \dots \end{aligned}$$

la potenza istantanea, che è data dal prodotto

$$p = e i$$

assume ovviamente una forma analitica quanto mai complessa, contenendo oltre che tutte le frequenze dispari, anche quelle pari e dei termini costanti.

Più semplice è, fortunatamente, la espressione analitica della potenza attiva, in quanto si ha:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T e i dt = E_1 I_1 \cos(\phi_1) + E_3 I_3 \cos(\phi_3) + \dots$$

Se ne deduce l'importante conseguenza che, in circuiti nei quali resistenza induttiva e capacitiva siano costanti ogni armonica di corrente deriva dalla corrispondente armonica di tensione e compare a lato di questa a definire la potenza attiva: ciò che in sostanza significa che ogni armonica agisce sul circuito come se tutte le altre non esistessero.

La potenza apparente mantiene la forma  $P_a = EI$  ove  $E_e$  ed  $I_e$  rappresentano, come si è visto, i valori efficaci delle onde, non sinusoidali, di tensione e di corrente e il fattore di potenza può essere ancora espresso come rapporto tra potenza attiva e potenza apparente. La sua espressione analitica diviene una funzione molto complicata degli elementi del circuito.

## Sistemi polifasi

È di grande interesse, nel campo degli impianti e delle macchine elettriche, lo studio dei sistemi polifasi.

Sistema polifase è l'insieme di più grandezze alternative le quali possono o meno essere tra loro legate da relazioni di grandezza o di fase.

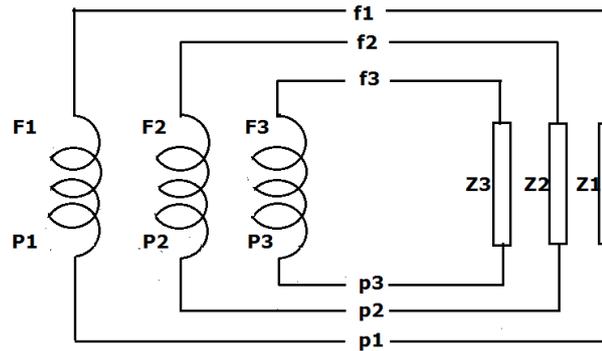
1. *Pari o dispari* - verrà detto il sistema a seconda che pari o dispari sia il numero delle grandezze che lo costituiscono.
2. *Puro o spurio* - a seconda che la somma vettoriale dei vettori rappresentativi delle grandezze alternative abbia una somma nulla o diversa da zero.

Particolarmente importante è il caso in cui gli  $m$  vettori costituenti il sistema siano uguali in grandezza e sfasati l'uno rispetto al successivo di angoli uguali tra loro ed ognuno di valore  $2\pi/m$ .

Un simile sistema si dice **simmetrico** o **equilibrato**; esso è sempre, evidentemente, anche puro.

Nelle considerazioni che seguono ci si riferirà esclusivamente al sistema trifase; esso è infatti il più interessante dal punto di vista industriale assumendo in sé, nella maggioranza dei casi, i vantaggi degli altri sistemi polifasi, senza averne, peraltro, la maggiore complicazione.

Se si considera, dunque, il caso di un generatore trifase, in ogni fase del quale, cioè, si generi una delle tensioni del sistema e lo si vuole connettere con una utenza pure trifase (costituita da tre impedenze) è facile rendersi conto del fatto che, nel caso più generale, sono necessari allo scopo sei conduttori. Von riferimento alla figura seguente, nella quale del generatore sono state distintamente indicate le tre fasi ciascuna individuata dal proprio *principio*  $P$  e dalla propria *fine*  $F$ , le tre correnti che devono essere considerate in un sistema del genere sono:  $I_1, I_2, I_3$ , che costituiscono un sistema trifase, in generale spurio e che circolano nelle tre fasi del generatore come pure nelle tre impedenze dell'utilizzatore; e le sei correnti di linea,  $I_{p1}, I_{f1}, I_{p2}, I_{f2}, I_{p3}, I_{f3}$ , le quali transitano nei sei conduttori di collegamento e costituiscono in ogni caso un sistema trifase puro.



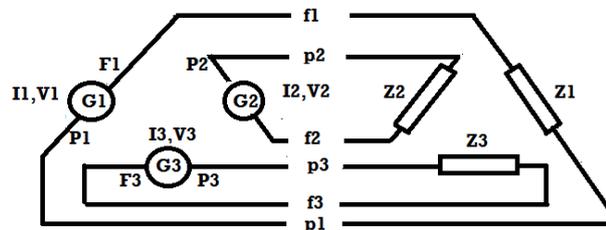
Per la potenza complessiva inerente al sistema si ha, ovviamente, l'espressione:

$$P = V_1 I_1 \cos(\phi_1) + V_2 I_2 \cos(\phi_2) + V_3 I_3 \cos(\phi_3)$$

L'indubbia complicazione del collegamento tramite sei conduttori, può in qualche caso, con opportuni collegamenti essere notevolmente ridotta senza che, peraltro, abbia con questo a turbarsi il regime elettrico preesistente nelle tre fasi del generatore e dell'utilizzatore.

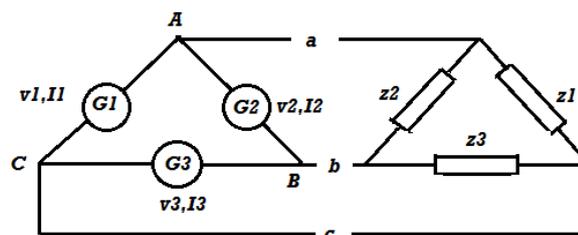
I concatenamenti che prenderemo in considerazione sono due: concatenamento a triangolo e quello a stella.

Per ciascuno dei due esamineremo quali condizioni debbano essere verificate perché la semplificazione che esso comporta non turbi in alcun modo il regime elettrico preesistente nelle fasi. Riprendiamo dunque la figura precedente che per semplice comodità presentiamo in un nuovo assetto topografico. (vedi figura sotto).



e domandiamoci se non sia possibile collegare elettricamente tra loro i punti come  $P_1, F_3$ ;  $F_1, P_2$ ;  $P_3, F_2$  e relativi dal lato dell'utilizzatore. Se ciò fosse possibile il collegamento tra generatore e utilizzatore ne risulterebbe notevolmente semplificato passando i conduttori necessari dal numero di 6 al numero di 3.

Il circuito si presenterebbe allora come nella figura seguente



Si vede subito che tale connessione non è in ogni caso possibile senza che per questo si alteri il regime elettrico del generatore. Infatti, eseguendo materialmente le connessioni progettate, le tre fasi del generatore vengono a costituire un circuito chiuso (che prima non esisteva) nel quale può circolare una corrente di circolazione. Poiché peraltro è chiaro che tale corrente in ogni caso si annulla se nulla è la somma delle *f.e.m.* delle tre fasi (somma che è, in effetti, l'unica possibile causa della corrente medesima) ne concluderemo che il concatenamento a triangolo è possibile sempre che il sistema trifase delle tensioni generate sia un sistema a risultante nulla e cioè puro.

In questa ipotesi e sotto questa unica condizione il regime elettrico che si stabilisce nelle tre fasi del generatore come pure nelle tre impedenze dell'utilizzatore è lo stesso di quello che si avrebbe col più generale collegamento a 6 conduttori. Le relazioni che si stabiliscono tra le tensioni e le correnti di linea e quelle delle fasi del generatore sono, invece, le seguenti:

$$\begin{aligned} \text{per le tensioni} &= \begin{cases} V_{ac} = V_1 \\ V_{ab} = V_2 \\ V_{bc} = V_3 \end{cases} \\ \text{per le correnti} &= \begin{cases} I_a = I_1 - I_2 \\ I_b = I_2 - I_3 \\ I_c = I_3 - I_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Di queste, quelle relative alle tensioni sono immediate, mentre quelle relative alle correnti sono chiarissime non appena si pensi che il conduttore *a*, ad esempio, risulta ora dalla unione dei conduttori  $f_1$  e  $p_2$  della disposizione più generale così che la corrente che in esso transita può sempre intendersi come somma delle correnti che nella disposizione allora considerata transitavano, appunto, nei conduttori  $f_1$  e  $p_2$ ; e analogamente per gli altri conduttori.

È importante notare che le tre correnti di linea costituiscono in ogni caso un sistema puro.

A relazioni particolari tra le grandezze elettriche di linea e quelle di fase si perviene in quei casi nei quali particolari relazioni intercorrono tra i tre vettori del sistema di tensioni generato: è facile vedere, ad esempio, che, ove il sistema delle tensioni del generatore sia oltreché puro anche simmetrico e ove si possa fare la ipotesi che le tre impedenze dell'utilizzatore siano tra loro uguali, le relazioni che intercorrono tra tensioni e correnti di linea e tensioni e correnti di fase sono le seguenti, con riferimento ai soli valori numerici:

$$\begin{cases} V_l = F_f \\ I_l = \sqrt{3} I_f \end{cases}$$

La potenza complessiva assume allora l'espressione:

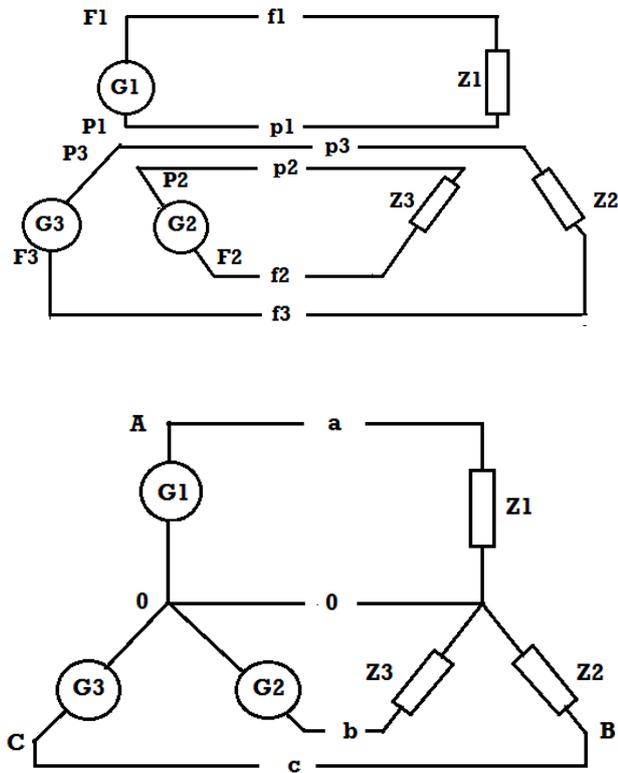
$$P = 3 V_f I_f \cos(\phi)$$

o anche:

$$P = \sqrt{3} V_l I_l \cos(\phi)$$

Il secondo dei concatenamenti ai quali si è a suo tempo accennato nasce dalla possibilità di vincolare i tre inizi delle fasi del generatore, ed i punti corrispondenti

delle tre impedenze di utilizzazione ad avere il medesimo potenziale. Si vedano le seguenti figure:



È chiaro che nessuna nuova condizione si introduce, per tal via, nel sistema elettrico del generatore; ed è chiaro pertanto che, in ogni caso, un generatore trifase richiede per essere connesso ad un utente trifase una conduttura con non più di quattro fili. Quanto alle relazioni che intercorrono tra le grandezze elettriche di linea e quelle di fase si ha:

$$\text{per le correnti} = \begin{cases} I_a = I_1 \\ I_b = I_2 \\ I_c = I_3 \\ I_0 = -(I_{f1} + I_{f2} + I_{f3}) = -(I_1 + I_2 + I_3) = -(I_a + I_b + I_c) \end{cases}$$

Quanto alle tensioni si deve distinguere tra il sistema di tensioni esistenti tra ogni conduttore ed il neutro (è questo il nome che si dà al conduttore **0** che unisce i punti centrali delle due stelle), per il quale valgono evidentemente le relazioni:

$$\begin{cases} V_{a0} = V_1 \\ V_{b0} = V_2 \\ V_{c0} = V_3 \end{cases}$$

e quello che si stabilisce tra i conduttori di collegamento per il quale valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} V_{ab} = V_1 - V_2 \\ V_{bc} = V_2 - V_3 \\ V_{ca} = V_3 - V_1 \end{cases}$$

Ad una ulteriore semplificazione si previene qualora sia rispettata la condizione che le tre correnti  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  costituiscano un sistema puro. In tal caso il neutro, che verrebbe ad essere percorso da una corrente nulla, può essere semplicemente soppresso.

Con i simboli già a suo tempo utilizzati la espressione della potenza in un sistema trifase concatenato a stella, nella ipotesi che il sistema delle tensioni di fase sia simmetrico e che le impedenze di utilizzazione  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$  siano tutte uguali tra loro, non differisce da quella a suo tempo trovata per il concatenamento a triangolo:

$$P = \sqrt{3} V_l I_l \cos(\phi_f)$$

Infatti, si ha chiaramente in questo caso che il sistema delle correnti di fase quindi di linea risulta equilibrato mentre simmetrico risulta il sistema delle tensioni di linea. Si ha allora, con riferimento ai valori assoluti:

$$\begin{cases} I_l = I_f \\ V_l = 3 V_f \\ P = 3 V_f I_f \cos(\phi_f) \end{cases}$$

o anche:

$$P = \sqrt{3} V_l I_l \cos(\phi_f)$$

A conclusione di queste brevi note sui sistemi polifasi noteremo che la loro caratteristica peculiare è quella di consentire la creazione di campi magnetici rotanti.

Per rendersi conto della questione supponiamo che due spire disposte su due piani tra loro ortogonali siano percorse da due correnti sinusoidali uguali in ampiezza ed in frequenza ma sfasate fra loro di  $90^\circ$ . Col che le due correnti assumono l'espressione:

$$i_1 = I_m \text{sen}(\omega t) \quad i_2 = I_m \text{cos}(\omega t)$$

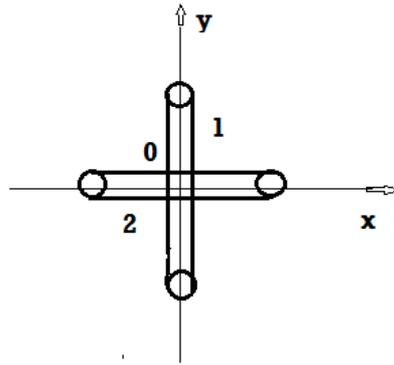
Con riferimento alla figura seguente il campo magnetico indotto dalla spira **1** nel punto **0**, con direzione  $OX$  può essere espresso con la

$$H_x = G I_m \text{sen}(\omega t)$$

mentre quello indotto dalla spira **2** nello stesso punto dello spazio con direzione  $OY$  può esprimersi con:

$$H_y = G I_m \text{cos}(\omega t)$$

$G$  è una costante di proporzionalità che dipende dalla forma delle spire.



Il campo magnetico totale nel punto **0** risulta allora dalla composizione vettoriale delle due componenti:

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = G I_m$$

Esiste pertanto nel punto **0** un campo magnetico di intensità  $G I_m$  la cui direzione è chiaramente variabile nel tempo essendo diverse da istante a istante le sue componenti ortogonali.

Può anzi specificarsi che, in funzione del tempo, la forza magnetica avrà una direzione definibile in funzione dell'angolo  $\alpha$  che essa forma con l'asse delle  $Y$ , secondo la relazione:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H_x}{H_y} = \operatorname{tg} \omega t$$

dalla quale derivano:

$$\alpha = \omega t \quad \frac{d\alpha}{dt} = \omega$$

Si può pertanto concludere che in conseguenza del fatto che un sistema bifase di corrente attraversa due spire disposte a **90°** nello spazio si genera un campo magnetico di intensità costante e di direzione variabile ruotante con velocità costante ed uguale alla pulsazione.

Sarebbe facile dimostrare che tali considerazioni si estendono con facilità a casi di campi polifasi più complessi per giungere alla conclusione generale che: *se si combinano  $q$  campi magnetici sinusoidali di uguale ampiezza  $H_q$  e uguale pulsazione  $\omega$ , le cui direzioni formino a due a due l'angolo  $\frac{2\pi i}{q}$  e le cui fasi differiscono di  $\frac{2\pi i}{q}$ , (quale appunto possono ottenersi facendo circolare un sistema polifase di corrente d'ordine  $q$  in  $q$  bobine disposte nello spazio secondo piani formanti tra loro a due a due angoli  $\frac{2\pi i}{q}$ ), si otterrà sempre un campo risultante di ampiezza  $(q/2)H_q$  e di direzione ruotante uniformemente nello spazio con velocità angolare  $\omega$ .*

---

## Elenco delle immagini

Tutte le immagini sono di Alfonso Sommacal e rilasciate con licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo 3.0.

### Campo elettrostatico

- <https://it.wikibooks.org/wiki/File:WorkInElectricFieldExample1.png>
- [https://it.wikibooks.org/wiki/File:Vector\\_electric\\_induction.png](https://it.wikibooks.org/wiki/File:Vector_electric_induction.png)

### Correnti costanti nei circuiti

- [https://it.wikibooks.org/wiki/File:CCGenerator\\_scheme.png](https://it.wikibooks.org/wiki/File:CCGenerator_scheme.png)
- [https://it.wikibooks.org/wiki/File:Ohm\\_law\\_example.png](https://it.wikibooks.org/wiki/File:Ohm_law_example.png)

### Campo elettrodinamico

- [https://it.wikibooks.org/wiki/File:Second\\_Maxwell\\_law\\_Example.png](https://it.wikibooks.org/wiki/File:Second_Maxwell_law_Example.png)
- [https://it.wikibooks.org/wiki/File:Ponderomotive\\_forces.png](https://it.wikibooks.org/wiki/File:Ponderomotive_forces.png)
- [https://it.wikibooks.org/wiki/File:Concatenated\\_flux\\_in\\_a\\_wire.png](https://it.wikibooks.org/wiki/File:Concatenated_flux_in_a_wire.png)

### Comportamento dei materiali immersi in un campo magnetico

- [https://it.wikibooks.org/wiki/File:First\\_magnetization\\_curve.png](https://it.wikibooks.org/wiki/File:First_magnetization_curve.png)
- [https://it.wikibooks.org/wiki/File:Hysteresis\\_loop.png](https://it.wikibooks.org/wiki/File:Hysteresis_loop.png)

### Circuiti con resistenza, capacità, induttanza percorsi da correnti alternate

- [https://it.wikibooks.org/wiki/File:Diagram\\_of\\_a\\_circuit\\_with\\_resistor\\_and\\_inductance.png](https://it.wikibooks.org/wiki/File:Diagram_of_a_circuit_with_resistor_and_inductance.png)
- [https://it.wikibooks.org/wiki/File:Circuit\\_R\\_C\\_L\\_in\\_AC.png](https://it.wikibooks.org/wiki/File:Circuit_R_C_L_in_AC.png)

- [https://it.wikibooks.org/wiki/File:IR\\_and\\_CR\\_circuit\\_in\\_parallel.png](https://it.wikibooks.org/wiki/File:IR_and_CR_circuit_in_parallel.png)
- [https://it.wikibooks.org/wiki/File:Circuit\\_with\\_transformator.png](https://it.wikibooks.org/wiki/File:Circuit_with_transformator.png)
- [https://it.wikibooks.org/wiki/File:Diagramma\\_vettoriale\\_delle\\_tensioni\\_a\\_circuito\\_aperto.png](https://it.wikibooks.org/wiki/File:Diagramma_vettoriale_delle_tensioni_a_circuito_aperto.png)

## Sistemi polifasi

- [https://it.wikibooks.org/wiki/File:Sistema\\_trifase.png](https://it.wikibooks.org/wiki/File:Sistema_trifase.png)
- [https://it.wikibooks.org/wiki/File:Diagramma\\_propedeutico\\_al\\_concatenamento\\_a\\_triangolo.png](https://it.wikibooks.org/wiki/File:Diagramma_propedeutico_al_concatenamento_a_triangolo.png)
- [https://it.wikibooks.org/wiki/File:Concatenamento\\_a\\_triangolo.png](https://it.wikibooks.org/wiki/File:Concatenamento_a_triangolo.png)
- [https://it.wikibooks.org/wiki/File:Concatenamento\\_a\\_stella.png](https://it.wikibooks.org/wiki/File:Concatenamento_a_stella.png)
- [https://it.wikibooks.org/wiki/File:Concatenamento\\_a\\_stella\\_2.png](https://it.wikibooks.org/wiki/File:Concatenamento_a_stella_2.png)
- [https://it.wikibooks.org/wiki/File:Spire\\_ortogonali\\_in\\_un\\_sistema\\_bipolare.png](https://it.wikibooks.org/wiki/File:Spire_ortogonali_in_un_sistema_bipolare.png)