MECCANICA DEI SISTEMI DI PUNTI E CORPI RIGIDI

Meccanica newtoniana - 2

WIKIBOOKS

Libri liberi per un mondo aperto

Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi

Meccanica newtoniana, n. 2

it.wikibooks.org
2023

Questo testo proviene dal sito
https://it.wikibooks.org/wiki/Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi

La versione originale del testo si trovava su WikiToLearn. Una copia è disponibile su
https://web.archive.org/web/20200919063701/https:/it.wikitolearn.org/Corso:Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi

Autori principali:
Dan e altri utenti di WikiToLearn

Questo libro è aggiornato al
7 ottobre 2023

In copertina:
Pendolo di Newton. *Autore:* Benson Kua from Toronto, Canada; *licenza:* CC BY-SA 2.0; *fonte:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bolitas_(2186855706).jpg

Indice

1 Introduzione **1**
1.1 Sistemi di punti e corpo rigido . . . 1

2 Dinamica dei sistemi di punti **3**
2.1 Centro di massa . . . 3
2.2 Conservazione della quantità di moto . . . 5
2.3 Sistema di riferimento del centro di massa . . . 6
2.4 Mutua interazione: problema dei due corpi . . . 7
2.5 Teorema di König per l'energia cinetica . . . 8
2.6 Sistemi a massa variabile . . . 9
2.7 Moto di un razzo . . . 10

3 Seconda legge cardinale **13**
3.1 La seconda legge cardinale . . . 13
3.2 Teorema di König per il momento angolare . . . 13
3.3 Corpo rigido in rotazione . . . 15
3.4 Momento d'inerzia . . . 16
3.5 Coppia di forze . . . 19
3.6 Sistemi di forze parallele . . . 20
3.7 Pendolo fisico . . . 21
3.8 Moto di una trottola . . . 22

4 Statica, urti e rotolamento **25**
4.1 Sistemi in equilibrio . . . 25
4.2 Esempi di problemi di statica . . . 25
4.3 Moto di rotolamento . . . 29
4.4 Urti elastici e anelastici . . . 30

A Formulario **33**
A.1 Sistemi . . . 33
A.2 Problema dei due corpi . . . 33
A.3 Teorema di Koenig . . . 33
A.4 Seconda equazione cardinale . . . 33
A.5 Momenti di inerzia . . . 34
A.6 Corpi rotanti . . . 35

A.7 Pendolo fisico 35
A.8 Urti 35

Crediti **37**
Fonti dei testi 37

1

Introduzione

1.1 Sistemi di punti e corpo rigido

Dopo aver studiato la meccanica del punto materiale, è immediato pensare che, nella realtà, non esistono punti materiali, ma esistono solo corpi che hanno forma e dimensioni assolutamente non paragonabili a quelle di un punto. La meccanica newtoniana non si ferma quindi allo studio del modello del punto, bensì parte da questo per arrivare a descrivere il moto di tutti i corpi materiali reali.

È bene quindi definire i **sistemi di punti materiali**: essi non sono nient'altro che un insieme di punti materiali che vengono studiati complessivamente. Come vedremo dettagliatamente, lo studio di un sistema si rifà spesso allo studio del punto materiale, tenendo tuttavia conto di movimenti complessivi del sistemi, come nel caso delle rotazioni.

I sistemi di punti possono essere più o meno rigidi, a seconda di come è definito il sistema. Se le distanze interne al sistema tra i punti appartenenti a esso variano nel tempo, allora il sistema sarà non rigido; allo stesso modo, quando le distanze interne restano invece costanti nel tempo, avremo a che fare con un sistema rigido.

Un sistema rigido è anche chiamato **corpo rigido**: esso è un sistema materiale di punti indeformabile. Come è intuitivo pensare, esso è una buona schematizzazione degli oggetti reali. Un corpo rigido presenta, in totale, sei gradi di libertà, di cui tre sono dovuti agli assi del centro di massa, che vedremo meglio nei prossimi moduli, e i restanti tre agli angoli di rotazione di questi assi rispetto a un sistema di riferimento esterno considerato fisso.

2

Dinamica dei sistemi di punti

2.1 Centro di massa

Lo studio della dinamica del punto materiale ci ha permesso di descrivere moltissimi fenomeni. Vogliamo però ora fare un passo avanti, e studiare la dinamica di un sistema costituito da più punti materiali. Facciamo alcune considerazioni generali. Su ogni punto agisce una forza $\vec{F}_i$, risultante delle forze esterne agenti sul punto, che indicheremo con $\vec{F}_i^{(e)}$, e delle forze interne al sistema, esercitate dagli altri punti, $\vec{F}_i^{(i)}$. In generale, la risultante delle forze interne agenti sull'i-esimo punto è diversa da zero, però la somma di tutte le forze interne è nulla. Infatti, in virtù del terzo principio della dinamica, la forza che un punto esercita sull'altro è uguale e opposta alla forza che quest'ultimo esercita sul primo punto. Ora, ogni punto avrà una sua grandezza, cioè una velocità, quantità di moto, accelerazione ecc. Definiamo quindi grandezze analoghe per l'intero sistema. Per esempio, la quantità di moto del sistema sarà la somma delle quantità di moto di ciascun punto:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

O ancora, l'energia cinetica totale del sistema sarà la somma delle energie cinetiche di ciascun punto:

$$E_k = \sum_i E_{k,i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

mentre la velocità del sistema non è la somma delle velocità dei singoli punti, e neanche l'accelerazione del sistema è la somma delle accelerazioni dei punti, come vedremo.

A ben vedere però, descrivere il moto di un insieme di più punti pare complicato. Per esempio, se lanciamo in aria una palla da golf (che possiamo considerare come un insieme continuo di punti, gli atomi che la costituiscono) senza imprimerle rotazioni, il suo moto è facile da descrivere, è parabolico. Se, invece, lanciamo per aria un martello (un altro insieme continuo di punti) il suo moto risulta più complicato. Non possiamo trattare il martello alla stregua di un punto materiale perché ogni sua parte segue traiettorie differenti. Tuttavia, se potessimo scattare molte fotografie durante il suo moto per poi confrontarle, ci accorgeremmo che difatti esiste un punto del martello che si muove di moto parabolico: il suo centro di massa.

◊ **Definizione** In generale definiamo il **centro di massa** di un sistema di n punti materiali come il punto geometrico la cui posizione è individuata, rispetto a un determinato sistema di riferimento, dal vettore

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + ... + m_n \vec{r}_n}{m_1 + ... + m_n}$$

Le componenti di questo raggio vettore lungo tre assi cartesiani orientati saranno quindi

$$x_{cm} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}, \qquad y_{cm} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}, \qquad z_{cm} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

Se i punti si spostano anche la posizione del centro di massa varia. La sua velocità sarà

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{P}}{M}$$

e derivando otteniamo l'accelerazione

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{M}$$

Se il moto del sistema è studiato in un sistema di riferimento inerziale, in assenza di forze apparenti, allora possiamo scrivere la seconda legge della dinamica per un singolo punto come

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)}$$

quindi

$$M\vec{a}_{cm} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i (\vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)}) = \vec{R}^{(e)}$$

dove $\vec{R}^{(e)}$ indica la **risultante delle forze esterne agenti sul sistema** (si noti come la risultante delle forze interne sia nulla). Abbiamo quindi ottenuto la seguente equazione

$$\vec{R}^{(e)} = M\vec{a}_{cm}$$

che esprime il **teorema del centro di massa**. Il centro di massa si muove come un punto materiale a cui è applicata la risultante delle forze esterne e in cui è concentrata tutta la massa del sistema. Ci siamo ricondotti al problema precedente: per studiare la dinamica di un sistema di corpi possiamo studiare il moto di un singolo punto materiale, cosa che sappiamo fare bene. Tornando all'esempio del martello, ogni punto di esso avrà una sua traiettoria, ma quella del centro di massa è semplice: è una parabola. Questo perché l'unica forza esterna agente sul martello è la forza peso. Quindi solo le forze esterne possono modificare il moto del centro di massa. Se siamo fermi e alziamo una braccio, è stata la forza dei nostri muscoli, forza interna al sistema uomo, ad averlo accelerato verso l'alto. Il nostro centro di massa però è rimasto fermo. In altre parole, non possiamo spostarci senza l'aiuto di una forza esterna. Quando camminiamo, è la forza di attrito col pavimento che ci spinge in avanti.

È bene ora fare alcune osservazioni. Il moto del centro di massa rappresenta il **moto globale dei punti materiali** che costituiscono il sistema. Il fatto che il centro di massa abbia una certa velocità $\vec{v}_{cm}$ significa che in media il sistema si sta spostando in una data direzione, anche se nessuna delle velocità dei singoli punti coincide necessariamente con $\vec{v}_{cm}$. Inoltre, dire che il centro di massa si muove come se lì fossero concentrate tutte le forze esterne non significa che tali forze agiscano solo sul centro di massa. Può succedere benissimo che sul centro di massa non agisca nessuna forza, ma agiscano su altri punti del sistema. Per esempio, se siamo in piedi sul pavimento la forza normale agisce sui nostri piedi, e non sul nostro centro di massa, che si trova da qualche parte a metà del nostro corpo. Il teorema ci dice solo che, se vogliamo studiare il moto del centro di massa, possiamo "far finta" che lì agiscano le forze esterne.

Facciamo infine una considerazione sul centro di massa in sé. Il centro di massa di un sistema può non essere un punto del sistema. Per esempio, il centro di massa di una sfera omogenea è il centro della sfera, ma il centro di massa della cupola di San Pietro non è un punto della cupola, ma si trova all'interno della cavità. O ancora, se due punti materiali di massa m si vengono incontro con la stessa velocità, il centro di massa del sistema si trova fermo a metà del segmento che congiunge i due punti. Infatti

$$x_{cm} = \frac{mx_1 + mx_2}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad v_{cm} = \frac{mv - mv}{2m} = 0$$

2.2 Conservazione della quantità di moto

Come caso particolare del teorema del centro di massa abbiamo che, se la risultante delle forze esterne è nulla, allora l'accelerazione del centro di massa è nulla. Quindi

$$\Delta\vec{P} = 0$$

ovvero la quantità di moto del sistema, cioè la quantità di moto del centro di massa, non cambia. Se la risultante delle forze esterne è nulla si dice anche che il sistema è isolato. Questa **legge di conservazione**, nota come **principio di conservazione della quantità di moto**, ci permette di analizzare un gran numero di situazioni. Per esempio, supponiamo che una persona si trovi su un carrello, inizialmente fermo, che si trova su un piano orizzontale con attrito trascurabile. Supponiamo inoltre che la persona tenga in mano un sasso. Cosa succede se lancia il sasso orizzontalmente in avanti?

La forza che esercita sul sasso è una forza interna al sistema costituito da carrello, persona e sasso, quindi non può influenzare il moto del centro di massa. Non essendoci forze esterne, concludiamo che il centro di massa, inizialmente fermo, deve rimanere fermo anche dopo che il sasso è stato lanciato. Se m_1 è la massa totale di persona e carrello, m_2 la massa del sasso e v la velocità (orizzontale) con cui viene lanciato il sasso, possiamo scrivere:

$$m_1\vec{u} + m_2\vec{v} = 0$$

da cui

$$\vec{u} = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}$$

ovvero il carrello si muove con velocità di modulo u nel verso opposto al moto del sasso. Ragionevolmente possiamo supporre che $m_1 >> m_2$, da cui $u << v$: la velocità del carrello è molto più piccola di quella del sasso.

2.3 Sistema di riferimento del centro di massa

Nello studio della dinamica dei sistemi di punti è spesso utile considerare il sistema di riferimento del centro di massa. Un tale sistema di riferimento ha queste caratteristiche:

- l'origine degli assi si trova nel centro di massa;
- gli assi sono sempre paralleli rispetto a quelli di un sistema di riferimento inerziale;
- non è in generale un sistema inerziale, poiché in generale non è nulla la risultante delle forze esterne agenti sul sistema.

Indicando con un apice le grandezze riferite al sistema di riferimento del centro di massa possiamo scrivere per ogni punto

$$\vec{r_i} = \vec{r}'_i + \vec{r}_{cm}$$

dove $\vec{r_i}$ è il raggio vettore che identifica la posizione dell'i-esimo punto rispetto a un sistema di riferimento inerziale e $\vec{r}_{cm}$ è il vettore che unisce le origini dei due sistemi di riferimento. Dal teorema delle velocità relative con $\omega = 0$ abbiamo che

$$\vec{v_i} = \vec{v}'_i + \vec{v}_{cm}$$

Poiché abbiamo assunto il centro di massa come riferimento valgono le relazioni

$$\vec{r}'_{cm} = 0, \quad \vec{v}'_{cm} = 0$$

da cui

$$\sum_i m_i \vec{v}'_i = 0$$

ovvero la quantità di moto del sistema, somma delle quantità di moto dei singoli punti, è nulla se viene calcolata nel sistema di riferimento del centro di massa.

Facciamo ora alcune considerazioni energetiche. L'energia cinetica del sistema così come è misurata nel sistema di riferimento inerziale è:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

che possiamo scrivere come

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}'_i + \vec{v}_{cm}\right)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}'^2_i + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}^2_{cm} + \sum_i m_i \vec{v}'_i \vec{v}_{cm}$$

Il primo termine rappresenta l'energia cinetica del sistema di punti così come è misurata nel sistema di riferimento del centro di massa, il secondo termine è l'energia cinetica del centro di massa, misurata nel sistema di riferimento inerziale, e infine l'ultimo termine è nullo, in quanto sappiamo che la quantità di moto del sistema misurata nel sistema del centro di massa è nulla. In definitiva possiamo scrivere

$$E_k = E'_k + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

che rappresenta il teorema di König per l'energia cinetica. L'energia cinetica di un sistema di punti materiali è uguale alla somma dell'energia cinetica del sistema misurata nel sistema di riferimento del centro di massa più l'energia cinetica del centro di massa stesso, misurata nel sistema inerziale.

2.4 Mutua interazione: problema dei due corpi

Il problema della mutua interazione riguarda casi in cui sono presenti due punti materiali i quali si esercitano a vicenda una forza. Prendiamo un caso semplificato: due corpi di massa m_1 e m_2, posti a distanza $\vec{r}$, esercitando ognuno una forza attrattiva sull'altro, la cui direzione è la retta congiungente i due punti materiali. Avremo che le due forze sono uguali e opposte: chiameremo il loro modulo f.

Prendiamo un sistema di riferimento con l'origine nel centro di massa del sistema. In questo modo il sistema non sarà accelerato, bensì si muoverà di moto costante, pertanto è un sistema di riferimento inerziale per il quale valgono le leggi della dinamica. Avremo quindi che:

$$\begin{aligned}
&\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \vec{0} \\
&m_1\vec{r}_1 = -m_2\vec{r}_2 \\
&\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}
\end{aligned}$$

Dove nell'ultima espressione si è passati al modulo delle distanze. Studiamo a questo punto il moto di uno dei due corpi, prendiamo in analisi quello con massa m_2

$$\vec{f}(r) = m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}$$

Notiamo due cose: primo, che la forza è funzione della distanza tra i due punti. Secondo, che la distanza tra i due punti coincide con la somma delle distanze dei punti dal centro di massa, ovvero: $r = r_1 + r_2$. Per scriverlo in maniera migliore, evidenziamo r_2 come: $r = r_2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)$. Poiché abbiamo visto poco sopra la relazione che lega il rapporto dei due raggi, possiamo a questo punto scrivere:

$$\begin{aligned}
&r = r_2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = r_2 \frac{m_1 + m_2}{m_1} \\
&\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}
\end{aligned}$$

Andiamo adesso a sostituire questa espressione nella formula della forza:

$$\vec{f}(r) = m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Diamo una definizione rapida:

◊ **Definizione** Si definisce **massa ridotta** di un sistema a due punti:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Detto questo, otteniamo infine:

$$\vec{f} = \mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Questa conclusione è importante: il problema di due punti in mutua interazione può essere ridotto a un solo corpo avente come massa la massa ridotta. Questa conclusione riguarda tutti i casi di mutua interazione.

2.5 Teorema di König per l'energia cinetica

Abbiamo visto come, sfruttando il sistema di riferimento del centro di massa, si possano descrivere diverse grandezze fisiche di un sistema. Ma, riguardo all'energia, come possiamo calcolare l'energia cinetica totale di un sistema di punti?

Intuitivamente, vale, per i sistemi discreti, l'espressione:

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Mentre per un sistema continuo:

$$\int \frac{1}{2} v^2 dm$$

Calcolare queste due espressioni può risultare complicato. A semplificare le cose, interviene il **teorema di König per l'energia cinetica**, che dimostriamo qui di seguito. Il teorema afferma che

L'energia cinetica di un sistema di punti materiali è la somma dell'energia cinetica che avrebbe il corpo se tutta la sua massa fosse concentrata nel centro di massa e l'energia cinetica relativa che possiede il sistema rispetto al centro di massa, ovvero:

$$K = \frac{1}{2} M_{tot} v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

2.5.1 Dimostrazione

Prendiamo un sistema di punti materiali; per studiare l'insieme di punti, prendiamo due sistemi di riferimento, uno esterno e inerziale, che chiameremo S_0, il secondo è il sistema del centro di massa S'.

Il primo passo che compiamo è calcolare la velocità v rispetto a S_0. Nei due sistemi di riferimento, sappiamo valere:

$$\begin{cases} \vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i' \\ \vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i' \end{cases}$$

Sostituiamo l'espressione di v_i nell'espressione dell'energia cinetica:

$$
\begin{aligned}
K =& \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i\right) = \\
& \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i^{'}\right)\left(\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i^{'}\right) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{'2} + \sum_i m_i v_{CM} v_i^{'} \\
K =& \frac{1}{2} M_{tot} v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{'2} + v_{CM} \sum_i m_i v_i^{'}
\end{aligned}
$$

Per concludere la dimostrazione, non resta che dimostrare che l'ultimo termine della somma è nullo. Infatti, ricordando che $\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i^{'}$, possiamo scrivere l'espressione $m_i v_i$ come $m_i v_{CM} + m_i v_i^{'}$. Sommando:

$$
\begin{aligned}
\sum_i m_i v_i &= \sum_i m_i v_{CM} + \sum_i m_i v_i^{'} \\
M_{tot} v_{CM} &= M_{tot} v_{CM} + \sum_i m_i v_i^{'}
\end{aligned}
$$

Ovvero l'ultimo termine è nullo. Per questo, è dimostrato il teorema di König e l'energia cinetica di un sistema di punti sarà uguale a:

$$K = \frac{1}{2} M_{tot} v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{'2}$$

2.6 Sistemi a massa variabile

Finora abbiamo visto problemi relativi a punti materiali o sistemi di punti materiali di massa fissata, cioè costante nel tempo. La descrizione dinamica del moto per essi è determinata dall'equazione di Newton $\sum_{i=1}^{n} \vec{F} = m\vec{a}$, riscritta come $\vec{R}^{(e)} = M\vec{a}$ nel caso di più punti materiali. In realtà situazioni in cui la massa varia non sono rare, basti pensare a una scala mobile, o a un razzo che espelle carburante. Per analizzare questi tipi di moto dobbiamo ricordare che la forza è uguale alla derivata temporale della quantità di moto, però ora dobbiamo derivare anche la massa:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

Vediamo subito una situazione concreta. Supponiamo che su un nastro trasportatore di massa m_0 si muova con velocità orizzontale v_0. A un certo punto sul nastro vengono depositate verticalmente delle scatole, di modo che la massa totale aumenti linearmente nel tempo, con k costante di proporzionalità. Nel caso non agisca nessuna forza esterna possiamo applicare la legge di conservazione della quantità di moto tra l'istante iniziale e un istante generico. Quindi

$$m_0 v_0 = m(t) v(t)$$

da cui

$$v(t) = \frac{m_0 v_0}{m_0 + kt}$$

La velocità del nastro trasportatore quindi diminuisce nel tempo. Il punto interessante qui è che, seppur ci sia variazione di velocità, e quindi accelerazione, non c'è forza. Nei sistemi a massa variabile quindi sembra che la seconda legge della dinamica non sia più valida. Il dubbio si risolve subito pensando che la legge a cui dobbiamo far riferimento in generale è $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, che si riduce $\vec{F} = m\vec{a}$ solo se la massa è costante, e questo è vero per i punti materiali.

2.7 Moto di un razzo

Nel modulo precedente abbiamo introdotto i sistemi a massa variabile. Qui vogliamo discutere un esempio esemplare di tali sistemi, analizzando il moto di un razzo. Il fenomeno è semplice: il motore del razzo espelle il carburante a grande velocità, e, per la conservazione della quantità di moto, il razzo si muove nel verso opposto (si noti che non è il motore in sé che spinge il razzo). Vogliamo dare ora una descrizione quantitativa di questo fenomeno.

Fissiamo dunque un sistema di riferimento inerziale con verso positivo nel verso di moto (orizzontale) del razzo, che a un certo istante ha una massa m e che si muove con velocità v. Se il razzo espelle una massa infinitesima dm la velocità del razzo diventa $v + dv$, mentre dm si muove con velocità in modulo v^* rispetto a quest'ultimo e in senso opposto. Tenendo conto della formula per le velocità relative, la velocità di dm rispetto a un sistema inerziale è pari a $v - v^*$. Assumendo che non ci siano forze esterne nella direzione orizzontale, la quantità di moto si conserva:

$$mv = (m - dm)(v + dv) + dm(v - v^*)$$

da cui, trascurando il prodotto di quantità infinitesime,

$$mdv = v^* dm$$

cioè

$$dv = \frac{dm}{m} v^*$$

Supponendo che la massa venga espulsa con un tasso costante possiamo scrivere:

$$m(t) = m_0 - kt$$

con differenziale $dm = kdt$ positivo, perché abbiamo considerato dm come valore assoluto della massa espulsa. Integrando

$$\Delta v = \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} \frac{v^* k}{m_0 - kt} dt = -v^* \int_{t_0}^{t} \frac{-k}{m_0 - kt} dt = v^* [\ln m_0 - \ln (m_0 - kt)]$$

quindi la legge della velocità è:

$$v(t) = v_0 + v^* \ln \frac{m_0}{m_0 - kt}$$

Supponiamo ora che il razzo venga lanciato verticalmente. Lungo la direzione verticale agisce la forza di gravità, e la quantità di moto del razzo non si conserva. Trascurando la variazione di g con la quota, se prima $dp = mdv - v^* dm = 0$, ora

$$dp = mdv - v^* dm = F dt = -mgdt$$

e

$$dv = v^* \frac{dm}{m} - g dt$$

Integrando

$$\Delta v = \int_{t_0}^{t} \frac{v^* k}{m_0 - kt} dt - \int_{t_0}^{t} g dt$$

E la legge della velocità è:

$$v(t) = v_0 + v^* \ln \frac{m_0}{m_0 - kt} - gt$$

In caso di moto verticale il moto viene rallentato.

3

Seconda legge cardinale

3.1 La seconda legge cardinale

Per quanto riguarda la meccanica del punto materiale, le leggi fondamentali che descrivevano il moto di un punto erano tre; nei sistemi esse diventano due, ricordando però che le tre leggi della dinamica valgono poi per i singoli punti del sistema. Le leggi fondamentali dei sistemi si chiamano **leggi cardinali**; la prima è già stata affrontata nel modulo sul centro di massa, e afferma:

$$\vec{F}^{tot} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

Questa descrive la variazione di moto di un sistema. Per descrivere invece le rotazioni, si utilizza la seconda, ovvero:

$$\vec{\tau}^{ext} = \frac{d\vec{J}}{dt}$$

Questa legge è semplicemente la legge del momento angolare del punto materiale, sommata però sull'indice i. Ricordiamo che:

$$\vec{J} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{f}$$

Come vedremo nei prossimi moduli, la seconda legge cardinale permette di descrivere tutti i diversi tipi di moto di un sistema; il suo utilizzo è di importanza fondamentale nella soluzione di problemi ed esercizi.

La legge è valida sia per un polo fisso che per un qualsiasi tipo di polo mobile, con un'aggiunta che vedremo nel prossimo capitolo.

3.2 Teorema di König per il momento angolare

Come abbiamo visto per l'energia cinetica, anche il momento angolare può essere scritto come:

$$\vec{J}_0 = \vec{J}_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge M\vec{v}_{CM}$$

Questo non è altro che l'equivalente del **teorema di König per il momento angolare**:

Il momento angolare di un sistema rispetto a un polo fisso equivale alla somma del momento angolare del centro di massa e del sistema rispetto ad esso.

$$\vec{J_0} = \vec{J}_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge M\vec{v}_{CM}$$

3.2.1 Dimostrazione

Ricordando che:

$$\begin{aligned}\vec{r_i} &= \vec{r_i}' + \vec{r}_{CM}\\ \vec{v_i} &= \vec{v_i}' + \vec{v}_{CM}\end{aligned}$$

Scriviamo il fattore $\vec{J_0}$:

$$\begin{aligned}\vec{J_0} = \sum_i \left(\vec{r_i} \wedge m_i\vec{v_i}\right) = \sum_i \left[\left(\vec{r_i}' + \vec{r}_{CM}\right) \wedge m_i \left(\vec{v_i}' + \vec{v}_{CM}\right)\right] =\\ =\sum_i \left(m_i\vec{r_i}' \wedge \vec{v}_{CM}\right) + \sum_i \left(\vec{r_i}' \wedge m_i\vec{v_i}'\right) +\\ +\sum_i \left(\vec{r}_{CM} \wedge m_i\vec{v_i}'\right) + \sum_i \left(\vec{r}_{CM} \wedge m_i\vec{v}_{CM}\right) =\\ =M\vec{r}'_{CM} + \vec{J}_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge M\vec{v}'_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge M\vec{v}_{CM}\\ \Rightarrow \vec{J_0} = \vec{J}_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge M\vec{v}_{CM}\end{aligned}$$

Questo teorema è largamente utilizzato in teoria sia in astrofisica, per descrivere il moto di un pianeta che ruota su se stesso e anche attorno a una stella, tipo la Terra con il Sole, ma anche il fisica particellare, per descrivere lo spin di una particella.

Un risultato molto simile è il dimostrare come la seconda legge cardinale valga sia per un polo fisso che per un polo mobile.

3.2.2 Il momento esterno rispetto a un polo qualunque

Prendiamo un polo Ω qualunque, anche mobile; il momento angolare di un sistema $\vec{J}_\Omega$ rispetto a questo polo sarà:

$$\vec{J}_\Omega = \sum_i \vec{r_i}' \wedge m_i\vec{v_i}$$

Dove $\vec{r_i}'$ rappresenta la distanza dell'i-esimo punto del sistema dal polo. Per calcolare il momento delle forze esterne, deriviamo rispetto al tempo:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{J}_\Omega}{dt} =&\frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{r_i}' \wedge m_i\vec{v_i}\right) =\\ =&\sum_i \vec{v_i}' \wedge m_i\vec{v_i} + \sum_i \vec{r_i}' \wedge m_i\vec{a_i}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i \frac{d}{dt}\left[(\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \wedge (m_i \vec{v}_i)\right] + \vec{\tau}_\Omega^{ext} \\
&= \sum_i \vec{v}_i \wedge m_i \vec{v}_i - \sum_i \vec{v}_\Omega \wedge m_i \vec{v}_i + \vec{\tau}_\Omega^{ext} \\
&\Rightarrow - \vec{v}_\Omega \wedge M \vec{v}_{CM} + \vec{\tau}_\Omega^{ext} = \frac{d\vec{J}}{dt} \\
&\Rightarrow \vec{\tau}_\Omega^{ext} = \frac{d\vec{J}}{dt} + \vec{v}_\Omega \wedge M \vec{v}_{CM}
\end{aligned}
$$

Possiamo osservare che, se Ω corrisponde al centro di massa, oppure è un polo fisso, la velocità rispetto a esso $\vec{v}_\Omega = 0$ è nulla, quindi la seconda legge cardinale diventa nella forma con cui la conosciamo, ovvero $\vec{\tau}^{ext} = \frac{d\vec{J}}{dt}$.

3.3 Corpo rigido in rotazione

Prendiamo un corpo rigido, che sia in rotazione attorno a un asse fisso a. Il corpo ruota con velocità angolare ω, che può anche variare nel tempo, ma è uniforme su tutto il corpo; preso un elementino di massa dm, che si trova a distanza h dall'asse di rotazione, avremo che la sua velocità tangenziale è $v = h\omega$.

Calcoliamo allora l'energia cinetica del corpo rigido in rotazione; poiché parliamo di corpo rigido, questo è un sistema continuo di punti materiali, quindi:

$$dK = \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} dm h^2 \omega^2$$

Da cui otteniamo la relazione:

$$K = \int \frac{1}{2} h^2 \omega^2 dm = \frac{\omega^2}{2} \int h^2 dm$$

Il termine $\frac{\omega^2}{2}$ è costante; il secondo termine, invece, $\int h^2 dm$, si chiama momento di inerzia del corpo rigido e dipende dalla massa e dalla geometria del corpo. Nel prossimo modulo calcoleremo i momenti di inerzia di solidi noti.

Per quanto riguarda l'energia cinetica, definito il momento di inerzia come $I = \int h^2 dm$, si ha che l'energia cinetica di un corpo rigido, rotante attorno a un asse fisso, è:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Nel caso generale, in cui, oltre a ruotare, stia anche traslando, avremo che, per il teorema di König, l'energia cinetica sarà data:

$$K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Nel caso particolare in cui il corpo ruoti attorno a un punto fisso O diverso dal centro di massa l'energia cinetica è invece pari a:

$$K = \frac{1}{2} I_O \omega^2$$

Dove per I_O si intende il momento di inerzia relativo a un asse passante per O, ma lo vedremo più dettagliatamente nel prossimo modulo.

3.4 Momento d'inerzia

Abbiamo introdotto nello scorso modulo il momento di inerzia.

◊ **Definizione** Si definisce **momento d'inerzia** di un corpo rigido l'integrale:

$$I = \int r^2 dm$$

Dove r è la distanza dall'asse di rotazione dell'elemento infinitesimo di massa dm.

Il momento di inerzia varia a seconda della forma del corpo rigido e della sua massa. In questo modulo calcoleremo i momenti di inerzia di solidi noti. Ricordiamo che ci sono tre modi per esprimere dm, in base al tipo di densità:

$$dm \Rightarrow \begin{cases} \rho\, dV = \rho(x,\, y,\, z) dx\, dy\, dz & \text{volumica} \\ \sigma\, dS = \sigma(x,\, y) dx\, dy & \text{superficiale} \\ \lambda\, dl = \lambda(x) dx & \text{lineare} \end{cases}$$

Ricordiamo infine che, per i corpi rigidi formati da più forme, il momento d'inerzia risulta essere additivo; per fare un esempio, il momento di inerzia del pendolo di un orologio a pendolo sarà la somma del momento della sbarretta e del momento del disco.

3.4.1 Momento d'inerzia di un anello

Prendiamo un anello di raggio R e massa M, che ruota attorno all'asse ortogonale che passa per il suo centro. Avremo che tutti i punti distano dall'asse $Rh = R$; possiamo scrivere $dm = \lambda dl$, dove $\lambda = \frac{M}{2\pi R}$, ovvero la massa totale diviso la lunghezza totale dell'anello. Il momento di inerzia per un asse passante per il centro, quindi, sarà:

$$I_c = \int h^2 dm = \int h^2 \lambda dl = \int R^2 \frac{M}{2\pi R} dl = \frac{MR}{2\pi} \int dl = \frac{MR}{2\pi} \cdot 2\pi R = MR^2$$

Un'osservazione importante è che questo risultato coincide con il momento di inerzia di un cilindro cavo; in questo caso potremmo scrivere $dm = \sigma dS = \sigma\, Ldl = \frac{M}{2\pi RL}\, Ldl = \frac{M}{2\pi R} dl$, che è esattamente uguale al caso dell'anello.

3.4.2 Momento d'inerzia di un disco omogeneo

Prendiamo un disco omogeneo di raggio R e massa M ruotante attorno a un asse ortogonale passante per il suo centro. La densità di massa superficiale sarà $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$. Per calcolare il momento di inerzia del disco, lo dividiamo in tanti piccoli anellini concentrici, i cui raggi r vanno da 0 a R. Allora avremo che $h = r$, $dm = \sigma dS$ e $dS = 2\pi r dr$. Calcoliamo il momento:

$$I_c = \int_0^R h^2 dm = \int_0^R h^2 \sigma dS = \left(\int_0^R r^2 (2\pi r) dr \right) \frac{M}{\pi R^2} = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r^3 dr = 2\frac{M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

Abbiamo fin da subito portato fuori la densità σ poiché non influiva nel calcolo dell'integrale. Notiamo che lo stesso risultato lo si ottiene per un cilindro omogeneo pieno. In questo caso potremmo scrivere $dm = \rho dV = \rho L 2\pi r dr$, dove $\rho = \frac{M}{\pi R^2 L}$. Quindi l'infinitesimo di massa $dm = \frac{M}{\pi R^2 L} L 2\pi r dr = \frac{2M}{R} r dr$, esattamente come il caso appena analizzato.

3.4.3 Momento d'inerzia di una sbarretta

Prendiamo una sbarretta omogenea, di cui larghezza e spessore sono trascurabili (ovvero risulta notevole solo la lunghezza) che ruota attorno a un asse passante per il suo centro. In questo caso $dm = \lambda dl$, e $dl = dx$ semplicemente; la densità $\lambda = \frac{M}{L}$. La distanza dall'asse $h = |x|$, per evitare problemi di segno. Avremo quindi:

$$I_c = \int h^2 dm = \int h^2 \lambda dl = \frac{M}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{ML^2}{12}$$

3.4.4 Momento d'inerzia di un disco bucato

Prendiamo un disco omogeneo, come il caso analizzato prima, solo che questo presenta un buco al suo centro. Chiameremo r_1 il raggio del buco, mentre r_2 sarà la distanza tra la circonferenza esterna del disco e quella del buco. Notiamo che $r_1 + r_2 = r$, ovvero la loro somma dà il raggio del disco.

In questo caso, avremo $\sigma = \frac{M}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}$, poi $dS = 2\pi r dr$ e la distanza dall'asse, come prima, $h = r$. Il metodo utilizzato è lo stesso precedente, ovvero dividere in anellini il disco bucato. Il momento di inerzia sarà:

$$I_c = \int h^2 dm = \int h^2 \sigma dS = \sigma \int_{r_1}^{r_2} r^2\, 2\pi r dr = 2\pi\sigma \int_{r_1}^{r_2} r^3 dr =$$
$$2\pi \cdot \frac{M}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^{r_2} r^3 dr = \frac{2M}{(r_2^2 - r_1^2)} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{M}{2}(r_1^2 + r_2^2)$$

3.4.5 Momento d'inerzia di una sfera

In questo caso, prendiamo una sfera omogenea ruotante attorno a un qualsiasi asse passante per il suo centro. La sua massa M e raggio R. L'infinitesimo $dm = \rho dV$, dove $\rho = \frac{3}{4}\frac{M}{\pi R^3}$.

Per calcolare il momento d'inerzia della sfera, la dividiamo in tanti dischi infinitesimi a posizione x. Il loro raggio sarà: $\bar{R} = R^2 - x^2$ e spessore dx.

A seguire, ogni dischetto viene diviso in tanti piccolini anellini, allo stesso modo del calcolo del momento di inerzia di un disco. Passiamo alla dimostrazione.

$$\begin{aligned}
I_c =& \rho \int h^2 dV = \rho \int_{-R}^{R} dx \int_0^{(\sqrt{R^2 - x^2})} r^2 (2\pi r) dr = \\
=& \rho \int_{-R}^{R} dx\, 2\pi \frac{(R^2 - x^2)^2}{4} = \frac{\pi\rho}{2} \int_{-R}^{R} (R^4 - 2x^2R^2 + x^4) dx = \\
=& \frac{\pi\rho}{2} \left[\int_{-R}^{R} R^4 dx - \int_{-R}^{R} 2x^2R^2 dx + \int_{-R}^{R} x^4 dx \right] = \\
=& \frac{\pi\rho}{2} \left[2R^5 - \frac{4}{3}R^5 + \frac{2}{3}R^5 \right] = \frac{\pi}{2} \frac{3}{4} \frac{M}{\pi R^3} \left(\frac{16}{15} \right) R^5 =
\end{aligned}$$

$$=\frac{2}{5}MR^2$$

3.4.6 Teorema di Huygens-Steiner

Concludiamo il modulo con un teorema di importanza fondamentale. I momenti di inerzia qui sopra calcolati sono rispetto al centro di massa, ovvero i corpi ruotano attorno a un asse che passa nel loro baricentro. Per definizione di momento d'inerzia, però, cambiando l'asse di rotazione, cambia anche il valore di I. Per questo motivo, poiché spesso si ha a che fare con corpi che ruotano attorno a punti diversi dal centro di massa, è opportuno dimostrare il **teorema di Huygens-Steiner**, che afferma:

Il momento d'inerzia di un corpo rigido ruotante attorno a un asse qualsiasi è pari a:

$$I_a = I_c + Md^2$$

Dove I_c è il momento d'inerzia del corpo rispetto al centro di massa e d è invece la distanza tra gli assi.

Dimostrazione

Prendiamo, per semplicità, un sistema discreto; di questo analizzo un generico punto P_i. Disegno il piano passante per P_i che sia perpendicolare ai due assi. I punti di intersezione tra piano e assi sono A_i e C_i, dove ricordiamo che l'asse a è l'asse generico, mentre quello passante per il centro è c. Avremo a questo punto:

$$h_i = \vec{C_iP_i}$$
$$d = \vec{C_iA_i}$$
$$h_i^{'} = \vec{A_iP_i}$$

La relazione che lega le tre distanze qui sopra è: $\vec{h_i}^{'} = \vec{h_i} + \vec{d}$. Inoltre, $\vec{h_i}^{'}$ è la distanza del punto P_i dall'asse a, ovvero quella che ci serve per calcolare il momento d'inerzia:

$$\begin{aligned} I_a =& \sum_i m_i(h_i')^2 = \sum_i m_i < \vec{h_i}' \cdot \vec{h_i}' >= \sum_i m_i(\vec{h_i} + \vec{d})(\vec{h_i} + \vec{d}) = \\ =& \sum_i m_i(h_i)^2 + 2d \sum_i m_i h_i + d^2 \sum_i m_i = \\ I_a =& I_c + Md^2 \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio, l'espressione $\sum_i m_i h_i$ viene nulla, poiché essa rappresenta la distanza del centro di massa dall'asse c, ma il centro di massa appartiene all'asse c. È così dimostrato il teorema.

3.4.7 Tabella dei momenti d'inerzia

Solidi	Momenti di inerzia rispetto al centro di massa	Momenti di inerzia rispetto a un estremo
Anello o cilindro cavo	$I_c = MR^2$	$I_a = 2MR^2$
Disco o cilindro pieno	$I_c = \frac{MR^2}{2}$	$I_a = \frac{3}{2}MR^2$
Sbarretta	$I_c = \frac{ML^2}{12}$	$I_a = \frac{ML^2}{3}$
Disco o cilindro bucato	$I_c = \frac{M}{2}(r_2^2 + r_1^2)$	$I_a = \frac{M}{2}(3r_1^2 + r_1 r_2 + 3r_2^2)$
Sfera	$I_c = \frac{2}{5}MR^2$	$I_a = \frac{7}{5}MR^2$

3.5 Coppia di forze

Trattiamo brevemente il caso in cui, a un corpo rigido, è applicata una coppia di forze parallele di verso opposto. Vettorialmente, $\vec{f_2} = -\vec{f_1}$. Nell'esempio più semplice possibile, prendiamo due punti materiali, uniti da una sbarretta rigida di massa trascurabile, ai quali vengono applicate le due forze: il loro effetto è causa una rotazione dell'asta che unisce i due punti con velocità angolare ω.

L'effetto è spiegato dalla seconda legge cardinale. Il momento delle forze esterne non è nullo; chiamata b la lunghezza della corda e $r_1 = r_2$ le distanze dei due punti dal centro di massa, avremo:

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r_i} \wedge \vec{f_i} = \vec{r_1} \wedge \vec{f_1} + \vec{r_2} \wedge \vec{f_2} = (\vec{r_1} - \vec{r_2}) \wedge \vec{f_1} = b\, f$$

Il risultato è, ovviamente, il modulo del momento causato dalla coppia di forze, ovvero il modulo di una delle due forze moltiplicato per la distanza tra i due punti di applicazione. In questo caso abbiamo però considerato le due forze uguali e discordi; se fossero state di modulo differente e verso concorde, andavano calcolati i momenti delle forze, che avrebbero avuto senso discorde (perché avrebbero causato due rotazioni di verso opposto) e il maggiore avrebbe prevalso.

Per chiudere il modulo, sfruttiamo l'esempio del sistema composto da due punti materiali uniti. Calcoliamo allora il momento angolare del sistema:

$$\begin{aligned}\vec{J} = &\sum_i \vec{r_1} \wedge m\vec{v_i} = \vec{r_1} \wedge m\vec{v_1} + \vec{r_2} \wedge m\vec{v_2} = \\ &\frac{b}{2}mv_1 + \frac{b}{2}mv_2\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo considerato i moduli. Ricordiamo che $v = \omega r$ e, in questo caso,$v_1 = v_2 = \omega\frac{b}{2}$; sostituendo:

$$|\vec{J}| = 2\left(\omega m \frac{b^2}{4}\right) = I\omega$$

Infatti il fattore $2m\frac{b^2}{4}$ corrisponde al momento d'inerzia del sistema, definito dalla somma $\sum_i m_i r_i^2$. Vettorialmente avremo:

$$\vec{J} = I\vec{\omega}$$

A questo punto, possiamo scrivere la seconda legge cardinale in un altro modo, che stavolta descrive appieno la rotazione del sistema:

$$\vec{\tau}^{ext} = \frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I\vec{\omega}\right) = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha}$$

Dove $\vec{\alpha}$ è l'accelerazione angolare del sistema.

3.6 Sistemi di forze parallele

Un sistema di forze parallele è un insieme di forze che si applicano tutte lungo la stessa direzione in ogni punto di un sistema di punti materiali.

Preso un sistema di riferimento inerziale centrato in Ω esterno al sistema di punto, calcoliamo il momento delle forze esterne $\vec{\tau}$ rispetto a questo punto. Poiché tutte le forze sono dirette lungo una stessa direzione che indichiamo con $\hat{u}$ possiamo scrivere ogni forza come $\vec{f_i} = f_i\hat{u}$. Inoltre vale $\sum_i m_i = M$.

Il momento delle forze sarà uguale a:

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r_i} \wedge \vec{f_i} = \sum_i \vec{r_i} \wedge f_i\hat{u} = \left(\sum_i f_i\vec{r_i}\right) \wedge \hat{u}$$

Il fattore $\sum_i f_i\vec{r_i}$ corrisponde a $\sum_i f_i\vec{r_c}$, dove $\vec{r_c}$ non è il centro di massa, bensì il centro di applicazione della forza così definito:

◊ **Definizione** In un sistema di forze parallele, esse possono considerarsi come applicate a un unico punto, chiamato **centro di applicazione della forza**, che vale:

$$\vec{r_c} = \frac{\sum_i f_i\vec{r_i}}{\sum_i f_i}$$

Tornando al calcolo del momento delle forze:

$$\vec{\tau} = \left(\sum_i f_i\vec{r_i}\right) \wedge \hat{u} = \left(\sum_i f_i\right)\vec{r_c} \wedge \hat{u} = \vec{r_c} \wedge \sum_i f_i\hat{u}$$
$$\Rightarrow \vec{\tau_\Omega} = \vec{r}_c \wedge \vec{F}$$

Dove con $\vec{F} = \sum_i f_i\hat{u}$. Il caso particolare di notevole interesse è la forza peso, infatti, applicando la definizione di centro di applicazione di una forza, possiamo notare che esso coincide col centro di massa del corpo. Infatti:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i \vec{r_i} \wedge m_i\vec{g}}{\sum_i m_i\vec{g}} = \frac{\sum_i m_i\vec{r_i}}{\sum_i m_i} = \vec{r}_{CM}$$

Quando, quindi, si considera la forza peso come tutta applicata al centro di massa di un sistema o corpo rigido non si sta compiendo alcuna approssimazione: essa è veramente applicata al baricentro del corpo.

3.7 Pendolo fisico

Nella meccanica del punto materiale abbiamo già parlato del pendolo, trattando in quel caso un semplice punto materiale appeso a un filo. Nella realtà, però, abbiamo a che fare con strumenti ben diversi, con caratteristiche fisiche ben diverse che non possono essere approssimabili a punti materiali: trattiamo qui di pendoli fisici, ovvero di oggetti che pendolano.

Qualsiasi oggetto può comportarsi da pendolo fisico; l'esempio più immediato, e rilevante per confronto con il pendolo semplice, è una sbarretta omogenea che può ruotare attorno a un estremo. La variabile che descrive il moto del corpo è l'angolo θ che la sbarretta forma con la verticale, quindi il problema presenta un solo grado di libertà. Come verso positivo, scegliamo l'angolo che forma a destra della verticale.

Le forze agenti sul corpo sono la reazione del vincolo $\vec{R}$, che è applicata al perno attorno al quale ruota il corpo; non conosciamo nulla di questa forza, ne modulo, ne direzione o verso. Conosciamo invece la forza peso $M\vec{g}$ applicata al centro di massa della sbarretta, ovvero al centro geometrico, e diretta verso il basso. Per studiare il moto sfruttiamo la seconda legge cardinale dei sistemi, scegliendo come polo il punto O attorno al quale la sbarretta ruota. Avremo quindi:

$$\vec{\tau}^{ext} = \vec{r_1} \wedge M\vec{g} + \vec{r_2} \wedge \vec{R} = \vec{r_1} \wedge M\vec{g}$$

Avendo scelto come polo O il braccio della forza vincolare è nullo e non contribuisce quindi al momento. Il fattore $\vec{r_1} \wedge M\vec{g}$ ha invece modulo:

$$|\vec{r_1} \wedge M\vec{g}| = \frac{l}{2}\, Mg\, \sin\theta$$

La distanza dal polo del centro di massa è infatti metà sbarretta, e l'angolo formato tra il braccio e la forza peso è lo stesso che l'asta forma con la verticale. Notiamo inoltre che il momento è di richiamo: per angoli positivi esso assume segno negativo e l'asta ruota in senso orario, tendendo a tornare alla posizione d'equilibrio; analogamente, per angoli negativi ha verso positivo, l'asta ruota in senso antiorario e torna sempre verso la posizione di equilibrio. La componente lungo l'asse z sarà quindi:

$$\tau_z = -\frac{l}{2}\, Mg\, \sin\theta$$

Applichiamo ora la legge cardinale:

$$\tau_z = \frac{dJ}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{l}{2}\, Mg\, \sin\theta$$

Otteniamo l'espressione:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{l\, Mg}{2\, I}\, \sin\theta = 0$$

Per angoli piccoli approssimiamo $\sin\theta \approx \theta$, ottenendo l'equazione differenziale di un oscillatore armonico:

$$\ddot{\theta} + \frac{l\, Mg}{2\, I}\, \theta = 0$$

La pulsazione del moto sarà $\omega = \sqrt{\frac{l\, Mg}{2\, I}}$, mentre la soluzione del problema è data dall'equazione:

$$\theta(t) = \theta_{MAX}\ \sin(\omega t + \varphi)$$

Ricordiamo che il momento d'inerzia di una sbarretta ruotante attorno a un asse passante per l'estremo è $I = \frac{Ml^2}{3}$; sostituendolo nell'espressione della pulsazione:

$$\omega = \sqrt{\frac{l}{2}\,\frac{M}{Ml^2}\,3g} = \sqrt{\frac{3}{2}\,\frac{g}{l}}$$

Che è molto simile a quella ottenuta per il pendolo semplice, che ricordiamo essere $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

3.7.1 Pendolo fisico a cono

Come per il pendolo semplice, anche per il pendolo fisco può esserci il caso in cui l'oggetto non oscilli bensì ruoti attorno a una quota fissa, mantenendo l'angolo θ con la verticale costante. Le forze agenti restano sempre $\vec{R}$, reazione vincolare, e $M\vec{g}$, forza peso, applicata al centro della sbarretta. Come polo scegliamo anche questa volta il punto di vincolo O, per cui la reazione vincolare non contribuisce al momento in questo caso. Quindi sarà:

$$\vec{\tau}^{ext} = \vec{r} \wedge M\vec{g}$$

In modulo avremo che $\tau = \frac{l}{2}Mg\sin\theta$. Per il momento angolare, invece:

$$\vec{J} = \int \vec{r} \wedge dm\vec{v} \Rightarrow |\vec{J}| = \int_0^l rdmv = \lambda \int_0^l rdrv$$

Però, come già sappiamo, questo procedimento porta a

$$|\vec{J}| = I\omega = \left(\frac{Ml^2}{3}\sin\theta\right)\omega$$

La componente verticale del momento angolare sarà data da $J_z = J\sin\theta = \frac{Ml^2}{3}\sin^2\theta\omega$

Il momento delle forze esterne, in modulo, è uguale a $|\vec{\tau}| = \left|\frac{d\vec{J}}{dt}\right| = J_z\,\omega = \frac{Ml^2}{3}\sin^2\theta\omega^2$; uguagliandolo al momento sopra calcolato:

$$\frac{Ml^2}{3}\sin^2\theta\omega^2 = \frac{l}{2}Mg\sin\theta \Rightarrow \omega^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{l\sin\theta}$$

3.8 Moto di una trottola

Il moto di una trottola è largamente studiato in meccanica razionale, con uno studio matematicamente più rigoroso e approfondito. Qui forniremo le conoscenze di base che introducono alla variazione del momento angolare $\vec{J}$ di un corpo rigido.

Una trottola è un oggetto di dimensioni fisiche apprezzabili, di solito una sfera o, in ogni caso, una forma simmetrica che ne permetta una buona rotazione, capace di poter stare in equilibrio, ruotando, su un solo punto. Le uniche forze agenti sulla trottola, quando questa è in rotazione, sono la reazione normale al piano $\vec{N}$, applicata nel punto di contatto col piano, e la forza peso $m\vec{g}$, applicata al suo centro di massa.

3.8.1 Il moto di precessione

Data una velocità di rotazione ω alla trottola, calcoliamone i momenti delle forze, scegliendo come polo il punto di contatto col piano; in questo caso il contributo della reazione vincolare è nullo, e il momento totale delle forze è:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge m\vec{g}$$

Il corpo, in rotazione, possiede un momento angolare $J = I\omega$. L'effetto del momento della forza peso è quello di far ruotare l'asse di rotazione: infatti, se mettiamo la trottola in rotazione verticale sul punto di appoggio, questa si trova in equilibrio precario: l'asse di rotazione tende ad inclinarsi, iniziando anch'esso a ruotare attorno alla verticale. Questo processo viene chiamato **moto di precessione**, ed è descritto dalla seconda legge cardinale dei sistemi. Infatti, come sappiamo:

$$\vec{\tau}^{ext} = \frac{\Delta J}{\Delta t}$$

In questo caso abbiamo preferito parlare di **intervalli di tempo** piuttosto che di infinitesimi: questo perché gli intervalli di tempo che andiamo a considerare sono apprezzabili quantitativamente. Sostituendo nella precedente formula il momento calcolato prima, troveremo che

$$(\vec{r} \wedge m\vec{g})\Delta t = \Delta\vec{J}$$

Ovvero, dopo un certo intervallo di tempo Δt, possiamo apprezzare una variazione nel vettore momento angolare $\Delta\vec{j}$, che coincide con lo spostamento di questo dall'asse verticale. Dalla precedente formula è immediato che, più è grande il momento angolare, più lungo sarà il tempo impiegato a inclinare l'asse di rotazione. Poiché il modulo del momento di rotazione è dato da $J = I\omega$, maggiore sarà la velocità di rotazione, maggiore sarà il tempo necessario a inclinare l'asse.

Notiamo anche che, a variare, sono solo direzione e verso del momento; in questo caso approssimiamo la velocità di rotazione al caso in cui essa si mantenga costante. In realtà non è così, ma ne parleremo a fine modulo.

Dopo un certo tempo, il vettore $\vec{J}$ formerà con la verticale un angolo $\Delta\theta$; inoltre, mantenendo questo angolo costante, esso girerà attorno alla verticale, spostandosi di un angolo $\Delta\varphi$. Notiamo che le componenti del vettore $\vec{J}$ restano costanti in modulo; inoltre la proiezione sulla verticale $J\cos\theta$ resta costante anche in direzione e verso, mentre la componente orizzontale $J\sin\theta$ ruota assieme all'asse, segnando appunto l'angolo $\Delta\varphi$. Avremo quindi che:

$$\frac{\Delta J}{J\sin\theta} = \Delta\varphi$$

Dividendo rispetto al tempo, otteniamo:

$$\frac{\Delta J}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right) J\sin\theta$$

Il fattore $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ lo chiamiamo Ω_p, **omega di precessione**, ovvero la velocità di rotazione dell'asse.

Ricordando il momento della forza peso calcolato all'inizio, è possibile ricavarsi esplicitamente Ω_p:

$$
\begin{aligned}
|\vec{r} \wedge m\vec{g}| = & r\, mg \sin\theta \\
& r\, mg \sin\theta = \frac{dJ}{dt} = J \sin\theta\, \Omega_p \\
& r\, mg = J\Omega_p = I\omega\, \Omega_p \\
& \Omega_p = \frac{r\, mg}{I\omega}
\end{aligned}
$$

Anche da questo risultato notiamo che più è grande il momento angolare del corpo, più lentamente esso precede.

Un caso particolare è il moto della Terra attorno al Sole. Infatti, come sappiamo, anche la Terra presenta un asse di rotazione inclinato, per cui anche in questo caso c'è un moto di precessione, causato inoltre anche da:

- la presenza della Luna e di altri corpi celesti;
- il fatto che la Terra non è perfettamente rigida;
- il fatto che la Terra non è perfettamente sferica.

Conosciamo la velocità di rotazione della Terra, pari a $\omega = \frac{2\pi}{1\,\mathrm{d}}$; è possibile inoltre calcolare la velocità di precessione, che è uguale a:

$$\Omega_T = \frac{2\pi}{26\,000\,\mathrm{y}}$$

Notiamo che è lentissima, e infatti non risentiamo, nella nostra vita quotidiana, di questo effetto. Tuttavia questo c'è, e comporta diversi problemi che si manifestano a lungo tempo, che sono già in fase di studio.

3.8.2 Il moto di nutazione

Nel precedente calcolo del moto di precessione abbiamo considerato la velocità di rotazione attorno all'asse ω come se fosse costante; in realtà essa non lo è, e infatti:

$$\vec{J} = I\vec{\omega} \neq \text{ cost}$$

Questo perché il moto di precessione influenza la rotazione del corpo: in generale, $\vec{\omega}$ varia istante per istante, sia in modulo che direzione, causando un moto assai complesso da studiare. Avremo quindi, oltre a un moto di precessione che fa ruotare l'asse attorno alla verticale, un ulteriore moto, detto di nutazione, che fa oscillare quest'asse di rotazione.

4

Statica, urti e rotolamento

4.1 Sistemi in equilibrio

Parliamo ora di sistemi o corpi rigidi in equilibrio. Mentre per i punti materiali la statica si studia prima della dinamica, per i sistemi essa è, solitamente, approcciata per ultima, perché risulta più facile studiarne prima la dinamica. Le condizioni di un sistema in equilibrio, infatti, prevedono conoscenze approfondite della dinamica: insomma, per capire se un corpo è fermo, è importante sapere come esso si muove, così da poter vedere che esso, in realtà, non si muove. Ovvero si studia l'assenza di movimento. In pratica, un corpo in equilibrio non si muove. Se sappiamo come si muove, possiamo vedere che non si muove e vedere che in equilibrio. Insomma s'è capito.

◊ **Definizione** Se un sistema si trova nella **configurazione di equilibrio** in un certo istante, vi permane nei tempi successivi.

In formule, questo si traduce sfruttando le due leggi cardinali dei sistemi; se il centro di massa è fermo, e il corpo non ruota attorno a esso. Quindi:

$$\vec{Q} = 0$$
$$\vec{J} = 0$$

O, per utilizzare le due leggi cardinali:

$$\begin{cases} \vec{F}^{tot} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = 0 \\ \vec{\tau}^{ext} = \frac{d\vec{J}}{dt} = 0 \end{cases}$$

Per studiare l'equilibrio di un corpo, quindi, basta imporre le condizioni di equilibrio. Come vedremo nel prossimo modulo, dove forniremo degli esempi di problemi di statica, vedremo che le cose non sono così immediate.

4.2 Esempi di problemi di statica

Tratteremo in questo modulo di esempi di problemi di statica. Tratteremo casi particolari, discutibili in vari modi.

4.2.1 Appoggio al piano

Un corpo rigido viene poggiato a un piano orizzontale senza attrito. Le uniche forze agenti sono la reazione normale $\vec{N}$ e la forza peso $M\vec{g}$. Quest'ultima sappiamo essere applicata al centro di massa, ma la reazione del piano? La definizione di reazione vincolare afferma che essa è una forza che il piano esercita su ogni punto d'appoggio del corpo, tale da contrastare la forza peso e permettere al piano di reggere il corpo. Secondo quanto detto, quindi, anche la forza vincolare, come la forza peso, si comporta come un sistema di forze parallele: ogni punto di contatto tra piano e corpo è soggetto a una reazione vincolare, e la somma di tutti i singoli contributi deve essere tale da contrastare la forza peso. L'insieme dei punti del corpo a contatto con il piano viene chiamato **poligono d'appoggio**.

Ora, che la somma di tutti i contributi sia, in modulo, uguale alla forza peso lo sapevano già da tempo; l'unica cosa che non sappiamo con certezza, però, è il punto di applicazione della forza. Sempre secondo la definizione di reazione vincolare, questa si esercita lungo la verticale del centro massa, ovvero sul punto, appartenente al poligono d'appoggio, ortogonale al baricentro del corpo. Il problema è: e se il centro di massa si trovasse, verticalmente, esterno al poligono d'appoggio?

In questo caso, il corpo non è in quiete. La reazione vincolare, infatti, viene applicata al punto più vicino alla verticale del centro di massa, qualora questa cada fuori dal poligono d'appoggio. Allora il momento delle forze non è più nullo: se chiamo P il punto in cui si applica la reazione vincolare, il momento delle forze rispetto a quel punto è diverso da zero, il corpo presenta quindi una rotazione dovuta al momento della forza peso e cade a terra.

In questi casi, può risultare interessante controbilanciare le cose, e applicare una forza, diretta verso il basso come la forza peso, in un altro punto A del poligono d'appoggio diverso da P: per far sì che vi sia equilibrio, deve essere soddisfatta la legge:

$$\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{r} \wedge m\vec{g} - \vec{r}_2 \wedge \vec{f_a} = 0$$

4.2.2 Esercizi di statica

Esempio 1

Iniziamo a parlare di problemi di statica. Il primo esempio che diamo è quello di una sbarra poggiata a un muro. Tra la scala e il muro verticale non vi è attrito, mentre tra la scala e il pavimento sì. Si richiede di trovare il coefficiente di attrito statico μ_s minimo affinché vi sia equilibrio.

Le forze agenti sulla sbarra sono $\vec{P}$ forza peso, applicata al centro geometrico della sbarra; $\vec{r}$ reazione vincolare del muro verticale, applicata nel punto di contatto tra sbarra e muro; $\vec{R}$ reazione vincolare del pavimento, applicata nel punto di contatto Ω tra sbarra e pavimento; $\vec{f}_{att}$ forza di attrito, applicata anch'essa nel punto Ω di contatto tra pavimento e sbarra; supponendo che la scala scivoli allontanandosi dal muro, questa si oppone allo spostamento. Applichiamo la prima condizione di equilibrio:

$$\vec{R} + \vec{P} + \vec{r} + \vec{f}_{att} = \vec{0}$$

Come polo scegliamo il punto Ω dove la sbarra è a contatto col pavimento. Calcoliamo i momenti delle forze relativamente a questo punto; le forze che si applicano in questo punto, ovvero $\vec{R}$ e $\vec{f}_{att}$ non contribuiscono al momento. Applichiamo la seconda condizione di equilibrio:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_P + \vec{\tau}_r = 0$$

Per comodità, ci scriviamo le forze agenti in coordinate cartesiane. Il problema permette che le forze possano essere scritte solo nelle coordinate x e y:

$$\begin{aligned} \vec{P} =& (0,\, -mg) \\ \vec{R} =& (0,\, R) \\ \vec{r} =& (r,\, 0) \\ \vec{f}_{att} =& (-f,\, 0) \end{aligned}$$

Le coordinate della forza risultante saranno quindi:

$$\begin{aligned} F_x &= r - f = 0 \quad \Rightarrow f = r \\ F_y &= -mg + R = 0 \quad \Rightarrow R = mg \end{aligned}$$

Passiamo al calcolo del momento. Facciamo un po' di considerazioni di segno: consideriamo il caso in cui il muro si trovi a sinistra della sbarra; la reazione del muro fornisce un momento sull'asse z negativo, perché mette il corpo in rotazione oraria. La forza peso, invece, ne fornisce un contributo positivo, poiché causa una rotazione antioraria. Possiamo quindi scrivere:

$$\tau_z = -lr\cos\theta + mg\frac{l}{2}\sin\theta$$

Dove θ è l'angolo che la sbarra forma col muro verticale. La distanza tra il polo e il punto di applicazione della reazione $\vec{r}$ è tutta la lunghezza della sbarra, mentre per la forza peso è la metà, ovvero $\frac{l}{2}$, esattamente il punto in cui si applica la forza peso. A questo punto, poniamo $\tau_z = 0$:

$$rl\cos\theta = mg\frac{l}{2}\sin\theta \quad \Rightarrow r = \frac{mg}{2}\tan\theta$$

Grazie al calcolo delle forze fatto prima, possiamo porre $f = r$ e $mg = R$:

$$\begin{aligned} & f = \frac{mg}{2}\tan\theta < \mu_s R \\ & \mu_s R > \frac{mg}{2}\tan\theta \\ & \mu_s mg > \frac{mg}{2}\tan\theta \\ & \mu_s > \frac{\tan\theta}{2} \end{aligned}$$

Il problema può considerarsi risolto.

Esempio 2

Prendiamo questa volta un'asta di lunghezza L fissata a un muro attraverso vincolo girevole, che ne permette la rotazione; l'altro estremo dell'asta è fissato, tramite una corda tesa, allo stesso muro, tale che l'asta sia in posizione di equilibrio orizzontale. Consideriamo la massa della sbarra trascurabile. Su di essa viene poggiato un punto materiale di massa m. L'angolo che la corda forma con l'asta orizzontale sia θ. Inoltre, la corda ha un limite di tensione T_{max} dopo il quale essa si spezza. In funzione dei parametri dati, ricavare le componenti della forza vincolare $\vec{F}$ e la distanza massima x_{max} in cui può essere poggiato il punto materiale (suggerimento: x_{max} corrisponde col punto di rottura della corda).

L'asta è in equilibrio, quindi la somma delle forze è nulla. Studiamo le forze agenti: $m\vec{g}$ è la forza peso del punto materiale, applicata nella posizione x del punto; $\vec{T}$ è la tensione della corda, applicata lungo la corda stessa nell'estremo dell'asta e $\vec{F}$ è la reazione del vincolo, applicata nel punto A di contatto tra asta e muro. Avremo quindi:

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F} = 0$$

È utile, anche stavolta, scrivere le forze in coordinate cartesiane; scelto il punto A come origine, facciamo coincidere l'asse x con l'asta orizzontale, mentre l'asse y sarà il muro. Le componenti delle forze sono quindi:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= (F_x,\, F_y)\\ \vec{T} &= (-T\cos\theta,\, T\sin\theta)\\ \vec{P} &= (0,\, -mg)\end{aligned}$$

Avremo quindi che la somma delle componenti lungo ogni asse è nulla:

$$\begin{cases} F_x - T\cos\theta = 0 & \text{lungo } x\\ F_y + T\sin\theta - mg = 0 & \text{lungo } y\end{cases}$$

Lungo l'asse z, invece, abbiamo il momento delle forze. Come polo scegliamo il punto di contatto tra asta e muro, così da rendere nulla la componente della forza vincolare. Avremo che:

$$\tau_z = TL\sin\theta - mgx = 0$$

Ricordiamo che il punto materiale si trova nella posizione incognita x, corrispondente al braccio della forza peso. Dall'ultima relazione possiamo ricavarci la tensione del filo in funzione di x:

$$T(x) = \frac{mg}{L\sin\theta}\,x$$

Questo valore di T va riportato nelle componenti scritte sopra; avremo quindi che:

$$\begin{aligned}F_x &= T\cos\theta = \frac{mg}{L}\cot\theta\, x\\ F_y &= mg - T\sin\theta = mg - \frac{mg}{L}\,x = mg\left(1 - \frac{x}{L}\right)\end{aligned}$$

L'ultimo punto è calcolare il punto di rottura; poniamo nell'espressione della tensione $T = T_{max}$, ottenendo:

$$\frac{mg}{L\sin\theta} = T_{max} \Rightarrow x_{max} = \frac{T_{max}\,L\sin\theta}{mg}$$

Il problema è risolto.

4.3 Moto di rotolamento

Il moto di rotolamento riguarda solo ed esclusivamente i corpi rigidi; un punto materiale, infatti, non ha dimensioni notevoli da poter essere considerato rotolante. Consideriamo un cilindro su un piano inclinato. Come premessa, diciamo che in assenza di attrito si ha un rotolamento perfetto, ovvero il corpo scivola sul piano senza ruotare attorno al suo centro di massa, che si muove con accelerazione costante:

$$a_{CM} = g\sin\theta$$

Per schematizzare bene una rotazione reale, immaginiamo che il cilindro non sia perfettamente liscio, bensì sia una ruota dentata: in ogni istante del moto il punto di appoggio rimane fisso . Questo particolare è importante, ed è proprio questa caratteristica a permettere il rotolamento. Chiamiamo A il punto di appoggio al piano, O il centro del corpo e B il punto opposto a A; data ω velocità angolare di rotazione, avremo che:

$$\begin{aligned} v_A &= 0 \\ v_O &= \omega r \\ v_B &= 2\omega r \end{aligned}$$

Studiamo il moto del corpo e le forze agenti; supponiamo ci sia attrito sul piano inclinato, così da permettere il rotolamento. Le forze agenti saranno $\vec{N}$ reazione vincolare del piano, $\vec{g}$ forza peso e $\vec{f}_{att}$ la forza di attrito. Studiamo le condizioni affinché il corpo possa rotolare, sfruttando le due leggi cardinali.

$$\begin{aligned} \vec{F}^{tot} &= m\vec{a}_{CM} \\ \vec{\tau} &= \frac{d\vec{J}}{dt} \end{aligned}$$

Come polo scegliamo il punto A: i contributi delle reazione vincolare e della forza di attrito al momento sono nulli. Avremo quindi:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge m\vec{g} \Rightarrow \tau_y = rmg\,\sin\theta \quad \tau_x = \tau_z = 0$$

Applicando la seconda legge cardinale:

$$rmg\,\sin\theta = \frac{dJ}{dt} = \frac{d(I_A\omega)}{dt} = I_A\alpha = I_A\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Il momento di un cilindro ruotante attorno a un estremo è $I_A = \frac{3}{2}MR^2$; possiamo calcolare l'accelerazione del centro di massa, che sarà diretta lungo il piano inclinato:

$$I_A \alpha = rmg \, \sin\theta$$
$$\alpha = \frac{rmg \, \sin\theta}{I_A} = \frac{2}{3}\frac{g\sin\theta}{r}$$
$$a_{CM} = \alpha\, r = \frac{2}{3} g \sin\theta$$

Passiamo adesso alla prima legge cardinale:

$$F = ma_{CM} \Rightarrow ma_{CM} = mg\sin\theta - f_{att}$$

Lungo il piano, infatti, la reazione normale non ha componente; possiamo calcolare la forza di attrito, ovvero:

$$f_{att} = mg\sin\theta - ma_{CM} = mg\sin\theta - \frac{2}{3}mg\sin\theta = \frac{1}{3}mg\sin\theta$$

L'attrito, però, non è dinamico, ma è da considerarsi statico: il punto di appoggio è sempre fisso, quindi non vi è attrito dinamico; per questo motivo vale:

$$f_{att} \leq \mu_s N = \mu_s \, mg\cos\theta$$

Sostituendo nella formula l'espressione della forza d'attrito ricavata otteniamo:

$$\mu_s \, mg\cos\theta \geq \frac{1}{3}mg\sin\theta \;\Rightarrow\; \mu_s \geq \frac{1}{3}\tan\theta$$

Questa è la condizione affinché vi sia rotolamento senza che il corpo scivoli sul piano. Ovviamente, se avessimo preso come sistema di riferimento il centro di massa e non un sistema esterno, avremmo notato che, dal quel punto di vista, il cilindro ruotava semplicemente attorno al suo centro.

4.4 Urti elastici e anelastici

Parliamo adesso di urti. Si ha un urto quando due oggetti in movimento relativo entrano a contatto; si possono avere due tipi di urti: urti elastici o urti anelastici, in quest'ultimo caso totalmente o parzialmente.

In un **urto elastico** viene conservata sia la quantità di moto che l'energia cinetica di un sistema; in un **urto anelastico**, invece, non vi è conservazione di energia cinetica: se l'urto è parzialmente anelastico vi è una perdita, di solito percentuale, di energia cinetica; se invece si ha un urto totalmente anelastico, non è possibile scrivere una relazione dell'energia cinetica tra prima e dopo l'urto.

In un urto vanno considerate le forze agenti; si distingue tra **forze impulsive** e **non impulsive**, ovvero quelle forze per le quali vale il teorema dell'impulso. Possiamo affermare che, se una forza rimane limitata nel corso del tempo, essa è impulsiva, e gioca quindi a favore di un urto elastico: ad esempio, se mandiamo a sbattere una pallina contro una scatola non fissata su un piano, vi sarà un urto elastico (sotto opportune condizioni) tra i due oggetti; se invece fisso la scatola con un chiodo, la forza vincolare esercitata dal chiodo non rimane limitata nel tempo, e la scatola, dopo l'urto, non si muoverà, quindi non vi sarà presente un urto elastico.

In generale, in un problema d'urti, è bene porre l'attenzione a tutte le forze agenti sul sistema e ai momenti di queste; se vi sono forze dissipative, come forze d'attrito o momenti rallentanti, non potranno esserci urti completamente elastici; quando invece tutte le forze agenti sono di tipo conservativo, ad esempio la forza peso, allora ci sono le condizioni affinché avvengano urti elastici. È bene, però, porre sempre una particolare attenzione alle condizioni del problema: possono essere presenti particolari, anche minimi, che alterano l'impulsività delle forze in gioco.

A

Formulario

A.1 Sistemi

Centro di massa:

$$\vec{r}_{CM} = \sum_i \frac{m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$\vec{v}_{CM} = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{M}$$

$$\vec{a}_{CM} = \sum_i \frac{m_i \vec{a}_i}{M}$$

Prima equazione cardinale:

$$\vec{F}^{tot}_{CM} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

A.2 Problema dei due corpi

Massa ridotta:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

A.3 Teorema di Koenig

$$K = \frac{1}{2} M_{tot} v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Il secondo fattore è l'energia cinetica del sistema rispetto al centro di massa.

A.4 Seconda equazione cardinale

$$\vec{\tau}^{ext} = \frac{d\vec{J}}{dt}$$

A.4.1 Coppia di forze

$$C = bf$$

Dove b è la distanza tra le due forze applicate e f il modulo di una delle due (si considerano forze che producono momento concorde e di modulo uguale)

A.4.2 Rispetto a un polo qualsiasi

Dato un polo $\Omega \neq$ centro di massa:

$$\vec{\tau}_\Omega^{ext} = \frac{d\vec{J}_\Omega}{dt} + \vec{v}_\Omega \wedge M\vec{v}_{CM}$$

A.5 Momenti di inerzia

A.5.1 Rispetto al centro di massa

Anello omogeneo o cilindro cavo di massa M e raggio R (valido per tutti i prossimi casi):

$$I_c = MR^2$$

Disco omogeneo o cilindro pieno omogeneo:

$$I_c = \frac{MR^2}{2}$$

Sbarretta omogenea di lunghezza l:

$$I_c = \frac{Ml^2}{12}$$

Disco di raggio r_2 con buco di raggio r_1 (dove si considera $r_1 + r_2 = r$, ovvero il raggio totale del disco se fosse pieno):

$$I_c = \frac{M}{2}(r_1^2 + r_2^2)$$

Sfera omogenea:

$$I_c = \frac{2}{5}MR^2$$

A.5.2 Teorema di Huygens-Steiner

$$I_a = I_c + Md^2$$

Dove d è la distanza tra l'asse c passante per il centro di massa e l'asse a a generico rispetto al quale si calcola il momento d'inerzia.

A.6 Corpi rotanti

Abbiamo:

$$J = I\omega$$

Vettorialmente:

$$\vec{J} = I\vec{\omega}$$

Energia cinetica di un corpo ruotante:

$$K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

A.7 Pendolo fisico

Equazione del moto:

$$\ddot{\theta} + \frac{lMg}{2I}\theta = 0$$

Dove

$$\omega = \sqrt{\frac{lMg}{2I}}$$

Caso particolare: sbarretta omogenea ruotante attorno a un estremo:

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}}$$

A.8 Urti

Urto elastico: si conservano quantità di moto e energia cinetica:

$$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = \text{ cost} \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \text{ cost} \end{cases}$$

Se l'urto è anelastico si conserva solo la quantità di moto, mentre l'energia cinetica viene ridotta di un fattore percentuale.

Crediti

Fonti dei testi

- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Sistemi_di_punti_e_corpo_rigido&oldid=442840
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Centro_di_massa&oldid=442845
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Conservazione_della_quantit%C3%A0_di_moto&oldid=442847
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Sistema_di_riferimento_del_centro_di_massa&oldid=442848
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Mutua_interazione:_problema_dei_due_corpi&oldid=442849
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Teorema_di_K%C3%B6nig_per_l%27energia_cinetica&oldid=442850
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Sistemi_a_massa_variabile&oldid=442851
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Moto_di_un_razzo&oldid=442852
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/La_seconda_legge_cardinale&oldid=442853
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Teorema_di_K%C3%B6nig_per_il_momento_angolare&oldid=442854
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Corpo_rigido_in_rotazione&oldid=442855
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Momento_d%27inerzia&oldid=442857
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Coppia_di_forze&oldid=442858
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Sistemi_di_forze_parallele&oldid=442859
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Pendolo_fisico&oldid=442860
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Moto_di_una_trottola&oldid=442862

- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Sistemi_in_equilibrio&oldid=442864
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Esempi_di_problemi_di_statica&oldid=442865
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Moto_di_rotolamento&oldid=442866
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Urti_elastici_e_anelastici&oldid=442867
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Formulario&oldid=442606