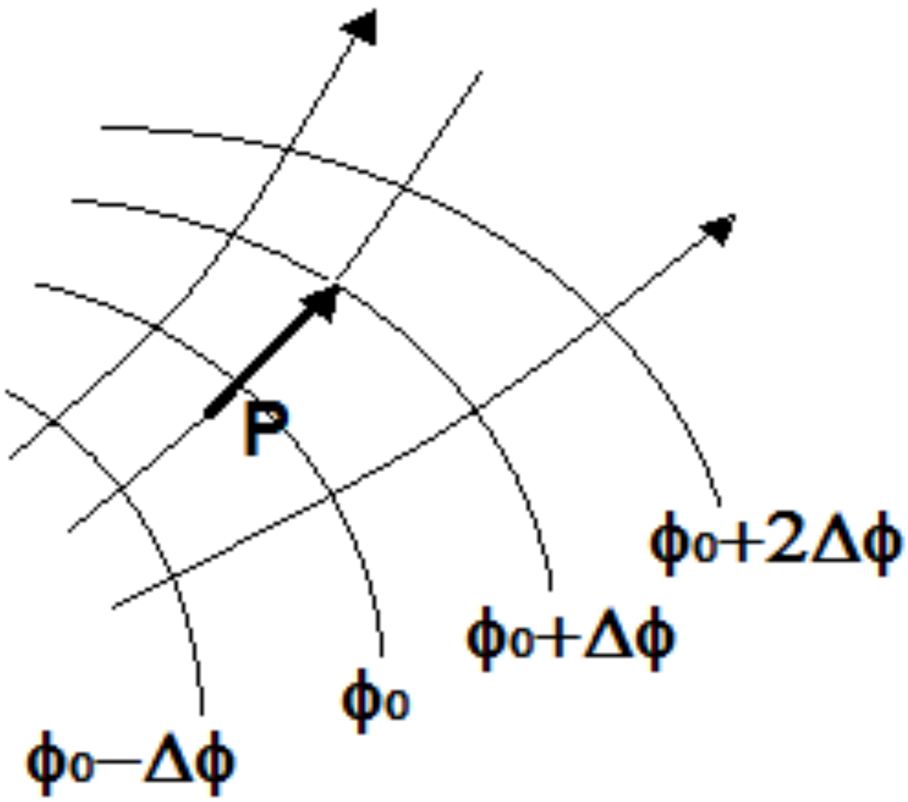
Alfonso Sommacal

ANALISI VETTORIALE



Alfonso Sommacal

Analisi vettoriale

Analisi vettoriale per la teoria dell'elettricità

it.wikibooks.org
2023

Questo testo proviene da
https://it.wikibooks.org/wiki/Analisi_vettoriale

Principale autore:
Alfonso Sommacal

Testo aggiornato al
15 agosto 2023

In copertina:
File:Section of equipotential surfaces.png. *Fonte:*
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Section_of_equipotential_surfaces.png;
autore: Sommacal alfonso; *licenza:* Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International

Indice

L'analisi vettoriale così come tratteggiata in questo volume è considerata essenziale per la comprensione dei testi sulla teoria dell'elettricità e non pretende di essere un trattato fondamentale sulla teoria dei vettori.

1

Algebra vettoriale

Viene assunto che il lettore abbia una discreta conoscenza dell'algebra vettoriale, pertanto gli ricordiamo solamente alcune delle definizioni e formule fondamentali.

1.1 Prodotto scalare

Il prodotto scalare di due vettori

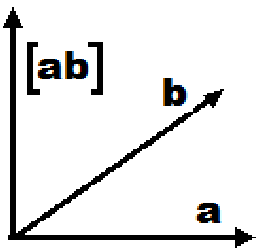
$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$$

dove $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, e $\mathbf{k}$ sono vettori unitari posti sugli assi coordinati $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$, uguaglia:

$$\mathbf{ab} = (\mathbf{ba}) = ab\ cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

1.2 Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale $[\mathbf{ab}]$ dei vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ è un vettore perpendicolare ad $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ con modulo di valore assoluto uguale all'area del parallelogramma formato da questi vettori:



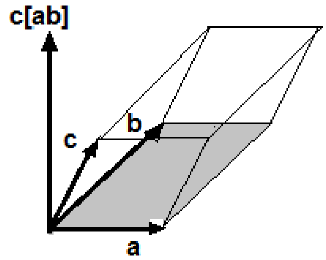
$$[\mathbf{ab}] = ab\ cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

$$[\mathbf{ab}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}$$

$$[\mathbf{ab}] = -[\mathbf{ba}]$$

La direzione del vettore $[\mathbf{ab}]$ è determinata dal requisito che i vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $[\mathbf{ab}]$ costituiscano un sistema destrorso.

1.3 Triplo prodotto scalare

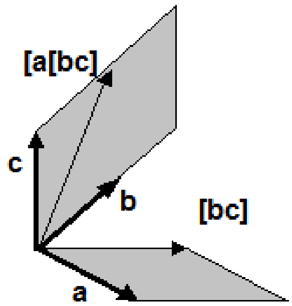


Il triplo prodotto scalare di tre vettori **a**, **b** e **c** è uno scalare numericamente uguale al volume del parallelepipedo costituito da questi tre vettori:

$$\mathbf{a}[\mathbf{bc}] = \mathbf{b}[\mathbf{ca}] = \mathbf{c}[\mathbf{ab}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a}[\mathbf{bc}] = -\mathbf{b}[\mathbf{ac}] = -\mathbf{a}[\mathbf{cb}]$$

1.4 Triplo prodotto vettoriale



$$[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]] = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab}) = -[[\mathbf{bc}]\mathbf{a}]$$

Se i vettori sono una funzione di una variabile scalare **t**, allora i vettori possono venire differenziati rispetto a questa variabile nel rispetto delle usuali condizioni. Qui, le seguenti relazioni si mantengono:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt}$$
$$\frac{d}{dt}(\phi\mathbf{a}) = \phi\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\phi}{dt}\mathbf{a}$$
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{ab}) = (\frac{d\mathbf{a}}{dt}\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\frac{d\mathbf{b}}{dt}), etc.$$

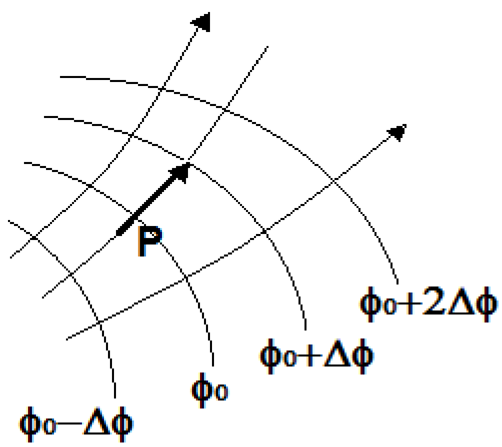
Fonte del testo: `https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Analisi_vettoriale/Algebra_vettoriale&oldid=330761`

2

Campi scalare e vettoriale: gradiente

1. Con campo vettoriale o scalare si intende una regione di spazio a ciascun punto del quale il valore di un certo vettore o scalare è connesso. Poiché ciascun punto di un campo è determinato con il suo raggio-vettore $\mathbf{R}$, la impostazione di un campo scalare o vettoriale è equivalente alla impostazione di una funzione scalare $\phi\mathbf{R}$ o, corrispondentemente, una funzione vettoriale $\mathbf{a}(\mathbf{R})$. Le funzioni $\phi\mathbf{R}$ e $\mathbf{a}(\mathbf{R})$ possono naturalmente pure dipendere, a parte $\mathbf{R}$, da argomenti scalari quali il tempo. Le funzioni $\phi\mathbf{R}$ e $\mathbf{a}(\mathbf{R})$ verranno considerate continue e differenziabili rispetto a tutti i loro argomenti.

Consideriamo un campo scalare della funzione $\phi(R) = \phi(x, y, z)$. Tali campi comprendono, per esempio, il campo della temperatura di un corpo non riscaldato uniformemente ($\phi = T$), il campo della densità di un corpo non omogeneo ($\phi = \tau$), e il campo di un potenziale elettrostatico.



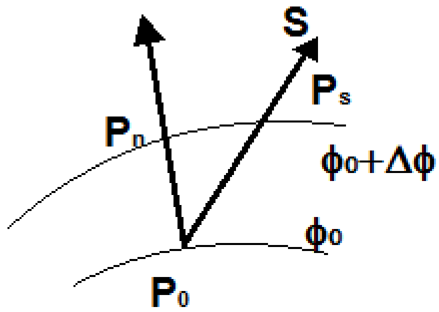
2. Assumiamo che lo scalare ϕ abbia il valore ϕ_0 nel punto P e che a seguito dello spostamento $d\mathbf{s}$ nella direzione del vettore $\mathbf{s}$ si giunga dal punto $\mathbf{P_0}$ al punto $\mathbf{P}$ dove lo scalare ϕ ha il valore ϕ_s. L'incremento di ϕ conseguente a questo spostamento uguaglia $d\phi = \phi_s - \phi_0$. Il limite del rapporto tra questo incremento $d\phi$ ed il valore assoluto ds dello spostamento viene denotato con $\frac{\delta\phi}{ds}$ e viene denominato la derivata dello scalare ϕ nel punto P_0 nella direzione di $\mathbf{s}$:

$$\frac{\delta\phi}{ds} = \lim_{ds\to 0} \frac{\phi_s - \phi_0}{ds} \tag{2.1}$$

È evidente che il valore di questa derivata dipende notevolmente dalla scelta della direzione di $\mathbf{s}$ e che non dovrà mai venire confusa con la derivata parziale convenzionale rispetto al parametro scalare s.

3. Per studiare come la derivata $d\phi = \phi_s - \phi_0$ dipenda dalla direzione del differenziale di $\mathbf{s}$ consideriamo i punti del campo in cui ϕ ha il medesimo valore, uguale, per esempio a ϕ_0. La combinazione di questi punti, genericamente parlando, forma una superficie denominata superficie di livello o equipotenziale. Analiticamente, tale superficie è caratterizzata dalla equazione

$$\phi(x,y,z) = \phi_0$$



La figura mostra una sezione con il piano del disegno di un numero di superfici di livello o equipotenziali corrispondenti ai valori dello scalare ϕ uguali a $\phi_0, \phi_0 \pm \Delta\phi, \phi_0 \pm 2\Delta\phi$, etc. Nel campo di una carica puntiforme o di una sfera elettrizzata le superfici di livello del campo elettrostatico sono sfere concentriche, nel campo di un cilindro carico infinito sono cilindri coassiali, etc. Tuttavia, in generale, nei casi più complessi, superfici equipotenziali consecutive differiscono, non solamente nella loro posizione e dimensione, ma pure nella forma. In ogni modo, la superficie di un conduttore è una superficie equipotenziale poiché il potenziale di un conduttore in un campo elettrostatico è costante su tutta la sua lunghezza.

$\mathbf{n}$ stia per normale a una superficie di livello $\phi = \phi_0$ tendente nella direzione di aumento di ϕ e dimostriamo che conoscendo la derivata $\frac{\delta\phi}{\delta n}$ nella direzione di questa normale, si possa determinare il valore della derivata dello scalare ϕ in qualunque direzione $\mathbf{s}$.

Assumiamo la superficie di livello, che passa attraverso il punto P_s che giace nella direzione di $\mathbf{s}$, di intersecare la normale $\mathbf{n}$ nel punto P_n. Il valore di ϕ nel punto P_n è uguale al valore di ϕ nel punto P_s (cioè $\phi_n = \phi_s$), e

$$P_0P_s = \frac{P_0P_n}{cos(\mathbf{s},\mathbf{n})}.$$

Conseguentemente,

$$(\frac{\delta\phi}{\delta s})_0 = \lim_{P_0P_s \to 0} \frac{\phi_s - \phi_0}{P_0P_s} = cos(\mathbf{s},\mathbf{n}) \lim_{P_0P_s \to 0} \frac{\phi_s - \phi_0}{P_0P_s} = cos(\mathbf{s},\mathbf{n})(\frac{\delta\phi}{\delta s})_0$$

Pertanto

$$\frac{\delta\phi}{\delta s} = \frac{\delta\phi}{\delta n} cos(\mathbf{s},\mathbf{n}) \tag{2.2}$$

Il vettore numericamente uguale a $\frac{\delta\phi}{\delta n}$ e diretto lungo una normale alla superficie di livello nella direzione di aumento di ϕ viene chiamato gradiente dello scalare ϕ:

$$grad\ \phi = \frac{\delta\phi}{\delta n}\mathbf{n} \tag{2.3}$$

Quindi, l'equazione 2.2 può essere scritta come di seguito:

$$\frac{\delta\phi}{\delta s} = |grad\ \phi|.cos(\mathbf{s},\mathbf{n}) = grad_s\phi \tag{2.4}$$

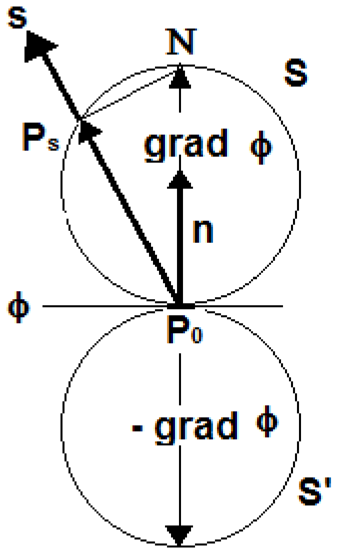
Pertanto, la derivata di ϕ rispetto alla direzione di $\mathbf{s}$ uguaglia la proiezione del vettore gradiente di ϕ sulla direzione di $\mathbf{s}$. Se, in particolare, si introduce il sistema delle coordinate cartesiane x, y e z i cui assi siano paralleli ai vettori unitari $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, allora concordemente alla 2.4, otteniamo

$$grad_x\phi = \frac{\delta\phi}{\delta x},\ grad_y\phi = \frac{\delta\phi}{\delta y},\ grad_z\phi = \frac{\delta\phi}{\delta z} \tag{2.5}$$

ovvero:

$$grad\ \phi = \mathbf{i}\frac{\delta\ \phi}{\delta\ x} + \mathbf{j}\frac{\delta\ \phi}{\delta\ y} + \mathbf{k}\frac{\delta\ \phi}{\delta\ z} \tag{2.6}$$

$$|grad\ \phi| = \sqrt[2]{(\frac{\delta\phi}{\delta x})^2 + (\frac{\delta\phi}{\delta y})^2 + (\frac{\delta\phi}{\delta z})^2} \tag{2.7}$$



Dalla 2.4, come pure direttamente dalla figura, risulta che la direzione $\mathbf{n}$ del gradiente è quella della più rapida variazione dello scalare ϕ, mentre la direzione $-\mathbf{n}$ è la direzione della sua più rapida riduzione di. Nella direzione perpendicolare ad $\mathbf{n}$, cioè tangente alla superficie di livello, il valore di ϕ non cambia per nulla $\frac{\delta\phi}{\delta s} = 0$.

Per illustrare la dipendenza della derivata di ϕ dalla direzione, conduciamo da un dato punto P_0 due vettori opposti $grad\ \phi$ e $-grad\ \ \phi$ e circoscriviamo intorno ad ognuna di loro come attorno ad un diametro delle superfici sferiche. Dunque, il valore assoluto della derivata $\frac{\delta\phi}{\delta s}$ nel punto P_0 per quanto riguarda la direzione $\mathbf{s}$ arbitraria verrà rappresentata con la porzione $P_0\ grad_s\phi$ del raggio condotto da P_0 nella direzione di $\mathbf{s}$ poiché l'angolo P_0P_sn uguaglia 90°, e

$$P_0P_s = P_0N\ cos(\mathbf{s}, \mathbf{n}) = grad\ \phi \cdot \cos(\mathbf{s}, \mathbf{n})$$

Una relazione simile vale pure nel caso in cui $\mathbf{s}$ si proietta nella direzione $-grad\phi$. La superficie tangente alle sfere S e S' nel punto P_0 è chiaramente una superficie di livello.

4. Pertanto, se conosciamo il campo dello scalare ϕ, allora in ciascun punto di questo campo è possibile determinare il vettore $grad\ \phi$ o perpendicolare alle superfici di livello di questo scalare. Se conduciamo un sistema di traiettorie ortogonali della superficie di livello, cioè un sistema di linee perpendicolari a queste superfici, allora in ciascun punto del campo la direzione del gradiente coinciderà con quella di queste linee. Quindi, le traiettorie ortogonali delle superfici di livello sono chiamate linee di gradiente.

Se situiamo le superfici di livello in modo tale che il valore di ϕ sulle superficie consecutive cresca secondo una progressione aritmetica, cioè $\phi_0, \phi_0 \pm \Delta\phi, \phi_0 \pm 2\Delta\phi, ..,$ allora le distanze fre le superfici di livello adiacenti con un valore sufficientemente piccolo di $\Delta\phi$ sarà inversamente proporzionale al valore assoluto del gradiente. Infatti, Δn sta per la distanza tra superfici di livello adiacenti misurata lungo una normale, e quindi dalla relazione approssimativa

$$\Delta\phi = \frac{d\phi}{ds} = grad\ \phi\ \Delta n$$

a $\Delta\phi$ costante ne segue che

$$grad\ \phi = \frac{cost.}{\Delta\ n}$$

Di conseguenza, quando le superfici di livello sono disegnate come indicato di sopra, la densità della loro allocazione fornisce una idea approssimata del valore assoluto del gradiente.

Dovrebbesi notare pure che se lo scalare ϕ è espresso come funzione di uno scalare diverso Φ che sia una funzione di posizione [$\phi = f(\Phi)$], allora

$$grad_s\phi = \frac{\delta\phi}{\delta s} = \frac{\delta\phi}{\delta\Phi}\frac{\delta\Phi}{\delta s} = \frac{\delta\phi}{\delta\Phi} = grad_s\Phi$$

poiché

$$grad\ \phi = \frac{\delta\phi(\Phi)}{\delta\Phi} grad\ \Phi$$

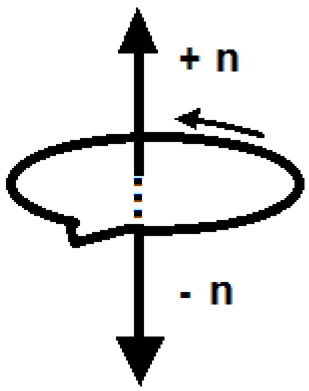
che deriva dalla formula per la differenziazione di una funzione di funzione.

Fonte del testo: https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Analisi_vettoriale/Campi_scalare_e_vettoriale:_gradiente&oldid=3307621

3

Flusso di un vettore attraverso una superficie

Se è dato il campo di uno scalare differenziabile $\phi(\mathbf{R})$, allora è pure dato il campo delle derivate di tale scalare rispetto alle differenti e arbitrarie direzioni in questo. Abbiamo visto che il campo del vettore *grad* ϕ è una caratteristica invariante (cioè, che non dipende dalla scelta del sistema di coordinate) del campo delle derivate. Ora è nostra intenzione stabilire le caratteristiche invarianti del campo delle derivate spaziali del vettore arbitrario $\mathbf{a}(\mathbf{R})$. A queste caratteristiche si perviene naturalmente col considerare gli integrali di superficie e di linea del vettore $\mathbf{a}$. Iniziamo con lo studiare gli integrali di superficie.



Nel campo di un vettore casuale separiamo mentalmente un elemento di superficie di area molto piccola dS, cioè un elemento di superficie che sia così piccolo che in tutti i suoi punti il vettore rimanga invariato sia in modulo che in direzione. Tracciamo una normale a questo elemento e poniamo che una delle direzioni di questa normale $\mathbf{n}$ sia positiva, o rivolta verso l'esterno, e l'altra sia negativa, o rivolta verso l'interno. Se viene data la direzione di percorrenza del perimetro dell'elemento di superficie, allora si dovrà scegliere la direzione della normale positiva tale che essa formi con il perimetro un sistema destrorso. Ciò significa che se avvitiamo una vite con il passo destro nella direzione data per percorrere il perimetro, allora la punta della vite si sposta lungo la normale positiva. Per contro, se ci è data la direzione della normale esterna, allora si dovrà scegliere la direzione di percorrenza del perimetro dell'elemento di superficie.

Infine, se la direzione di spostamento lungo il perimetro e la direzione di una normale al proprio piano sono l'un l'altro dati indipendentemente, allora si dirà per brevità che la direzione di spostamento e quella della normale formano un sistema destrorso se esse soddisfano alla condizione menzionata, e sistema sinistrorso se non la soddisfano.

La direzione della normale viene contraddistinta da un vettore unitario $\mathbf{n}$ coincidente con direzione medesima.

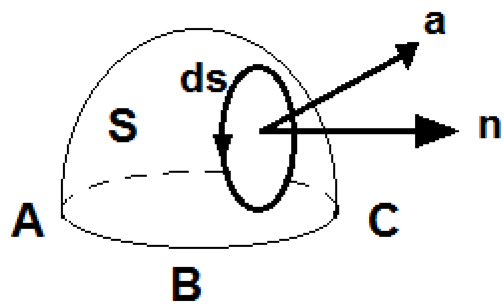
Con flusso del vettore $\mathbf{a}$ attraverso un elemento di superficie infinitamente piccolo dS si intende la quantità

$$dN = \mathbf{an}\ dS = a\ cos(\mathbf{a}, \mathbf{n})\ dS = a_n\ dS \tag{3.1}$$

dove

$\mathbf{a}$ =valore del vettore su dS elemento di area
a_n =la sua componente lungo la direzione di $\mathbf{n}$.

È stato scelto un elemento di superficie dS di area infinitamente piccola in modo di assicurare che il vettore $\mathbf{a}$ abbia un valore certo su questo elemento.



Per determinare il flusso del vettore attraverso una superficie che abbia una dimensione finita, si deve dividerla in elementi di superficie dS di area infinitamente piccola, in modo che non soltanto il vettore $\mathbf{a}$ possa rimanere costante su ciascun elemento, ma anche gli stessi elementi di superficie possano essere considerati piani.

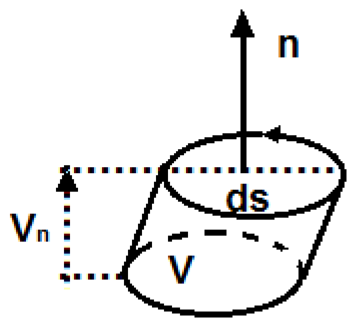
Chiamiamo uno dei lati della superficie S lato interno e l'altro esterno, e conseguentemente scegliere la direzione delle normali esterne di ciascun elemento dS. Il flusso $\mathbf{N}$ del vettore $\mathbf{a}$ attraverso la superficie $\mathbf{S}$ è la somma algebrica dei flussi $a_n\ dS$ attraverso gli elementi distinti di questa superficie. Questa operazione è identica alla determinazione dell'integrale di superficie definito

$$N = \int \int_S a_n dS$$

Il termine flusso di campo vettoriale dato alla quantità $\mathbf{N}$ è stato mutuato dalla idrodinamica. Quest'ultima studia il campo vettoriale della velocità dei liquidi: in ogni dato momento un valore definito del vettore $\mathbf{V}$ è associato a ciascun punto dello spazio riempito con un fluido, precisamente, il valore di quella velocità che il liquido possiede in quel punto. Il flusso del vettore velocità del fluido attraverso l'elemento di superficie di area dS, è:

$$dN = v_n\ dS$$

non è niente altro che il volume del liquido che fluisce attraverso detto elemento nell' unità di tempo nella direzione della normale esterna a dS. Invero, durante una unità di tempo ciascun elemento del liquido si muove sulla distanza $\mathbf{V}$: quindi, tutte le particelle del liquido e soltanto quelle che all'inizio dell'intervallo unitario di tempo che viene considerato occupavano il volume del cilindro di base dSe generatrice $\mathbf{V}$ attraverseranno l'elemento superficiale dS. Il volume di questo cilindro è $v_n\ dS$ se $v_n > 0$. Quando i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{n}$ formano un angolo ottuso, allora $v_n < 0$, ed il flusso idrico è negativo. Ciò significa che il liquido fluisce attraverso dS in direzione opposta a quella della normale $\mathbf{n}$ esterna.



Il flusso di un liquido attraverso una superficie finita S ovviamente uguaglia il flusso del vettore **V** velocità attraverso questa superficie:

$$\int_s v_n \; dS$$

Sovente è necessario calcolare il flusso di un vettore attraverso una superficie chiusa (la superficie di una sfera, di un cubo, etc.). Quando si calcola l'integrale su una superficie chiusa si deve segnalare tale circostanza impiegando un cerchio sul simbolo di integrazione cosicché, il flusso di un liquido attraverso una superficie S chiusa verrà scritto come segue:

$$N = \oint_s v_n \; dS$$

Questo flusso è evidentemente uguale alla quantità di liquido che defluire dal volume circoscritto dalla superficie S chiusa nell'unità di tempo.

Se $N < 0$, ciò significa che è più il liquido che entra di quello che esce.

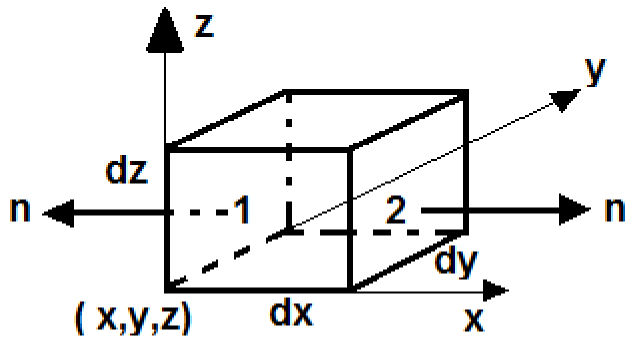
Fonte del testo: https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Analisi_vettoriale/Flusso_di_un_vettore_attraverso_una_superficie&oldid=330763

4

Teorema di Gauss: divergenza

1. L'integrale $\oint a_n \; dS$ di superficie può essere trasformato in uno di volume.

Questo è il contenuto di uno dei più importanti teoremi della analisi vettoriale: il **teorema di Gauss**.



Primo, consideriamo il flusso dN di un arbitrario, ma differenziabile vettore **a** attraverso la superficie di un parallelepipedo infinitamente piccolo e per convenienza dei calcoli scegliamo la direzione degli assi cartesiani x, y e z in modo che essi risultino coincidenti con i lati dx, dy, e dz di questo parallelepipedo. L'integrale

$$dN = \oint a_n \; dS$$

consiste in questo caso nella somma di sei integrali su ciascun dei lati delle facce del parallelepipedo. Facendo ricorso al teorema del valore medio noto dal calcolo integrale, si può rappresentare ciascuno di questi sei integrali come il prodotto dell'area della faccia per un certo valore medio della componente normale del vettore **a** sulla data faccia.

Consideriamo per primail flusso del vettore **a** attraverso le due facce parallele *1* e *2* perpendicolari all'asse x. Il flusso attraverso la faccia frontale *2* è:

$$a_{2n}(x + dx, \bar{y}, \bar{z})dS = a_{2n}(x + dx, \bar{y}, \bar{z})dy \; dz$$

dove $\bar{y}$ e $\bar{z}$ sono valori determinati medi delle coordinate y e z sulla faccia *2*, e $\mathbf{a_2}$è il modulo del vettore **a** pure sulla faccia *2*. Il flusso attraverso la faccia posteriore *1* è:

$$a_{1n}dS = -a_{1x}dy \; dz \quad [qui \; a_{1n=} \; a_{1n}(x, \bar{y}, \bar{z})]$$

dove $\mathbf{a_1}$ è il valore del vettore **a** sulla faccia *1* poiché la normale esterna a questa faccia è direttamente opposta all'asse x. Perciò, il flusso totale attraverso le facce *1* e *2* è:

$$(a_{2x} - a_{1x})dy \; dz$$

La differenza $(a_{2x} - a_{1x})dy\ dz$ è l'incremento della componente a_x del vettore quando la coordinata x si incrementa di *dx zf*, la distanza tra la faccia *1* e *2*. Con una precisione fino agli infinitesimi di secondo ordine, questo incremento è:

$$a_{2x}(x + dx, y, z) - a_{1x}(x, y, z) = \frac{\delta a_x}{\delta x}$$

dove, stante la dimensione infinitesima del parallelepipedo, con $\frac{\delta a_x}{\delta x}$ possiamo supporre il valore di questa derivata in qualsiasi punto del parallelepipedo. Cosicché, il flusso totale attraverso entrambe le facce perpendicolari all'asse x è:

$$\frac{\delta a_x}{\delta x} dx\ dy\ dz.$$

Per i flussi attraverso le paia di facce perpendicolari agli assi y e z analogamente otteniamo

$$\frac{\delta a_y}{\delta y} dx\ dy\ dz \quad e \quad \frac{\delta a_z}{\delta z} dx\ dy\ dz.$$

Sommando le espressioni ottenute, otteniamo il flusso totale del vettore **a** attraverso le sei facce di un parallelepipedo elementare:

$$dN = \oint a_s\ dS = (\frac{da_x}{dx} + \frac{da_y}{dy} + \frac{da_z}{dz}) dx\ dy\ dz \tag{4.1}$$

È consuetudine per brevità denotare la somma delle derivate del vettore **a** rispetto agli assi coordinati con il simbolo *div* **a**:

$$div\ \mathbf{a} = \frac{da_x}{dx} + \frac{da_y}{dy} + \frac{da_z}{dz} \tag{4.2}$$

Se introduciamo, in aggiunta, per l'elemento infinitesimale di volume, il simbolo dV:

$$dN = div\ \mathbf{a}\ \ dV \tag{4.3}$$

2. Non è difficile estendere questa formula, che esprime il flusso di un vettore **a** attraverso la superficie di un parallelepipedo infintamente piccolo, ad una superficie di forma e dimensioni arbitrarie. Consideriamo una superficie **S** chiusa arbitraria. Dividiamo il volume **V** da essa delimitato con un sistema di piani mutuamente ortogonali in un insieme di elementi cubici infinitamente piccoli. È naturale che gli elementi estremi del volume adiacenti alla superficie **S** non avranno, genericamente parlando, una forma cubica. Tramite una ulteriore suddivisione, tuttavia, le facce di questi cubi estremi possono essere fatti coincidere con la data superficie **S** con qualsiasi grado di accuratezza. Usiamo la equazione (A.16) per calcolare il flusso di un vettore **a** attraverso la superficie di ciascuno di questi cbi interni ad S e sommiamo le espressioni ottenute:

$$\sum dN = \sum dv\ \mathbf{a}\ dV = \int \int \int_v div\ \mathbf{a}\ dV$$

In questa equazione, l'integrale triplo significa che la sommatoria dell'integrando deve essere eseguita su tutti gli elementi del volume **V** circoscritto dalla superficie S.

Le facce di tutti i cubi elementari la cui combinazione forma il volume V possono venire divise in due classi-facce esterne che coincidono con gli elementi d'area della superficie S, e facce interne che formano le frontiere tra cubi adiacenti. È evidente che il flusso del vettore **a** attraverso ogni faccia interna entrerà doppiamente nella somma $\sum dN$: quando si conta il flusso attraverso la superficie del cubo su uno de lati di questa faccia e quando lo si conta attraverso la superficie dell'altro suo lato. Poiché la normale alla faccia che è esterna rispetto al primo cubo è opposta alla normale alla stessa faccia che è esterna relativa al secondo cubo, allora i due flussi attraverso questa faccia avranno segno opposto. Di conseguenza, tutti i termini della sommatoria $\sum dN$ che sono collegati alle facce interne si annulleranno, e questa sommatoria consterà della sommatoria dei flussi del vettore **a** attraverso le sole facce esterne dei cubi che coincidono con gli elementi di aree della superficie S. Quindi, $\sum dN$ uguaglia il flusso N del vettore **a** attraverso la data area della superficie S, di conseguenza:

$$N = \oint_s a_n \, ds = \int_V div \; \mathbf{a} \; dV \tag{4.4}$$

Questa espressione è la formulazione matematica del teorema di Gauss: il flusso di un vettore **a** funzione continua di un punto, attraverso una superficie S arbitraria, uguaglia l'integrale della divergenza del vettore sul volume V confinato da questa superficie.

3. Se la superficie S è così piccola che *div* **a** possa essere considerata costante in tutti i suoi punti interni. allora nella equazione 4.4 *div* **a** può venire posta all'esterno dell'integrale. Pertanto, il flusso dN attraverso una superficie chiusa S infinitamente piccola può venire espressa con la medesima formula 4.3:

$$dN = \oint a_n \; dS = div \; \mathbf{a} \; dV$$

come il flusso attraverso la superficie di un parallelepipedo elementare. Poiché questa formula vale solamente nel caso limite di una superficie infinitamente piccola, per essa allora sarà più corretta la seguente forma:

$$div \; \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint a_n \; dS}{\Delta V} \tag{4.5}$$

È più corretto considerare questa formula come *definizione* di *divergenza*: la divergenza di un vettore **a** in un dato punto di un campo è il limite al quale tende il rapporto del suo flusso attraverso una superficie qualunque che circonda detto punto ed il volume ΔV confinato dalla superficie tendete a *0*. Ne segue da questa definizione della divergenza che il suo valore non dipende per nulla dalla scelta del sistema di coordinate, ovvero che la divergenza di un vettore è un vero scalare. Sulla base della 4.5 ed impiegando 4.3 per il particolare caso delle coordinate cartesiane, si arriva ovviamente di nuovo alla 4.1.

Concludendo, notiamo che in idrodinamica la divergenza della velocità **v** di un liquido ha un significato fisico immediato. Infatti, in ciascun punto del liquido

$$div \; \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint a_n \; dS}{\Delta V}$$

uguaglia l'ammontare del liquido che fuoriesce dall'elemento di volume dV che contiene il punto preso in considerazione per unità di volume.

Il nome *divergenza* fu scelto per questa quantità esattamente perché il liquido spruzzava fuori o divergeva da quelli e solamente quei punti o porzioni di spazio che occupava che occupava in cui *div* $\mathbf{v} > 0$. È evidente che le sorgenti del liquido debbano essere dispostein questi punti. Per analogia, i punti del campo di un qualsiasi vettore **a** in cui *div* **a**?0 sono genericamente chiamati sorgenti di questo campo. Il valore numerico della *div* **a** è chiamato *forza della sorgente del campo*; in dipendenza del segno della divergenza, la forza della sorgente può essere positiva o negativa. Talvolta le sorgenti negative di un campo sono chiamate scarichi del campo. I campi vettoriali per i quali *div* $\mathbf{a} = 0$ sono chiamati campi senza sorgenti o *solenoidali.*

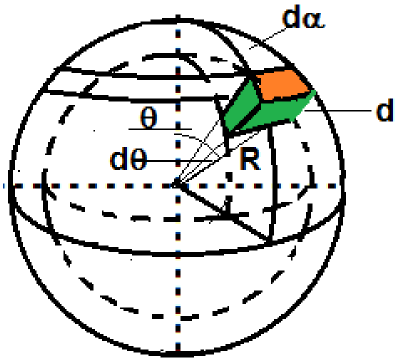
Esempio 1. Determinare la divergenza di un vettore $[a]$ che in ciascun suo punto di un campo è diretto parallelamente o anti-parallelamente al raggio-vettore R condotto a questo punto dal punto *0*.

Si applichi a tale fine la 4.5 all'elemento di volume dV ritagliato dallo strato sferico fra le sfere che hanno i raggi R e R+dR con un cono con il suo centro i O che intersecano queste sfere lungo gli archi di meridiani α e $\alpha + d\alpha$ e gli archi dei cichi paralleli θ e $d\theta$. Poiché è stato dato che il vettore **a** è parallelo ad R, allora il flusso attraverso il lato (formato dal cono)della superficie del volume V è zero. Inoltre, poiché l'area dell'elemento di superficie dS della superficie della sfera avente raggio R intersecato dal cono è:

$$dS = R^2\ sin\theta\ d\theta\ d\alpha$$

pertanto, il flusso del vettore **a** attraverso dS è:

$$a_n\ dS = -a_R\ R^2\ sin\theta\ d\theta\ d\alpha$$



dove a_R è la componente di di **a** nella direzione di R poiché la normale esterna a dS è diretta in senso opposto al raggio-vettore R. Il flusso attraverso un elemento di superfici della sfera avente il raggio R+dR, fino all'infinitesimale di secondo ordine, evidentemente uguaglia:

$$a_R\ R^2\ sin\theta\ d\theta\ d\alpha + \frac{\delta(a_R\ R^2\ sin\theta\ d\theta\ d\alpha)dR}{\delta R}$$

Pertanto, il flusso totale è:

$$\oint a_n\ dS = \frac{\delta(a_R\ R^2)\ sin\theta\ d\theta\ d\alpha\ dR}{\delta R}$$

D'altra parte,

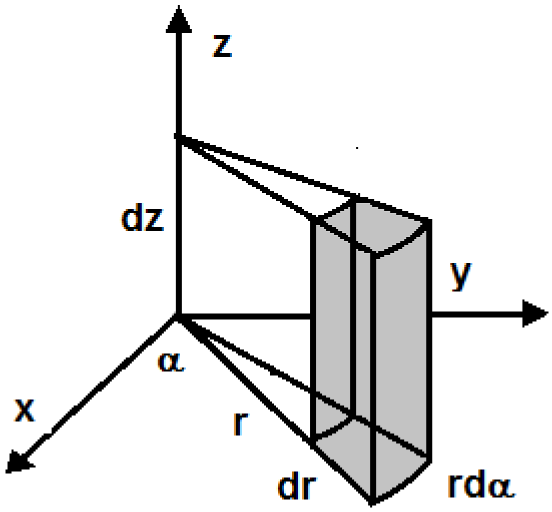
$$dV = dS \cdot dR = R^2\ sin\theta\ d\theta\ d\alpha\ dR$$

cosicché:

$$div\ \mathbf{a} = \lim_{dV\to 0} \frac{\oint_S v_n\ dS}{dV} = \frac{1}{R^2}\frac{\delta(R^2\ a_R)}{\delta R} = \frac{\delta a_R}{\delta R} + \frac{2}{R}\alpha R \tag{4.6}$$

Invitiamo il lettore a mostrare che l'espressione della divergenza per un vettore **a** arbitrario assume la forma

$$div\ \mathbf{a} = \frac{1}{R^2}\frac{\delta}{\delta R}(R^2\ a_R) + \frac{1}{R\ sen\ \theta}\frac{\delta}{\delta\ \theta}(sen\ \theta a_0) + \frac{1}{R\ sen\ \theta}\frac{\delta a_\alpha}{\delta\alpha} \tag{4.7}$$



Esempio 2. Determinare la divergenza di un vettore **a** arbitrario in un sistema cilindrico di coordinate *z, r, e* α (fig. accanto)

Siano a_z, a_r e a_α le componenti rispettivamente, del vettore **a**, nella direzione di crescita delle coordinate z, r e α.

Applichiamo l'equazione 4.5 al volume confinato tra due superfici cilindriche aventi i raggi r e r+dr, due piani meridiani $\alpha = \alpha_1$ e $\alpha = \alpha_1 + d\alpha$, e due piani perpendicolari all'asse z: $z = z_1$ e $z = z_1 + dz$. Il flusso del vettore **a** attraverso un elemento d'area della superficie cilindrica avente il raggio **r** è $-a_r r d\alpha dz$; per una superficie cilindrica avente il raggio $r + dr$ è (con una accuratezza fino al secondo ordine infinitesimale), mentre la somma dei flussi attraverso le entrambe superfici cilindriche è

$$\frac{\delta}{\delta\ r}(ra_r)\ d\alpha\ dz\ dr$$

Calcolando nella medesima maniera il flusso del vettore attraverso gli elementi d'area rimanenti della superficie del volume dV, otteniamo

$$\oint a_n\ dS = [\frac{\delta}{\delta r}(ra_r) + r\frac{\delta a_z}{\delta z} + \frac{\delta a_\alpha}{\delta \alpha}]\ dr\ dz\ d\alpha$$

Poiché $dV = r\ d\alpha dz dr$, allora l'equazione 4.5 porta al risultato

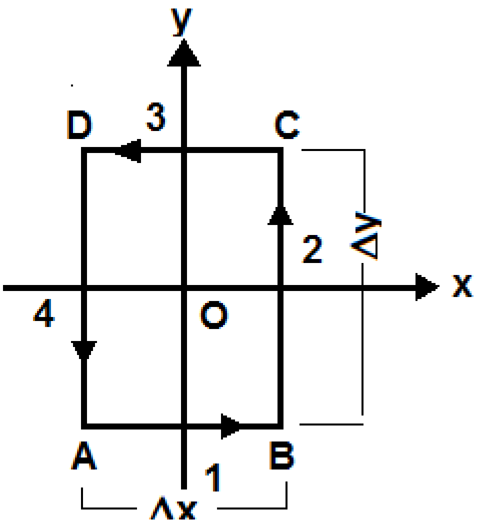
$$div\ \mathbf{a} = \frac{\delta a_z}{\delta z} + \frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta r}(ra_r) + \frac{1}{r}\cdot\frac{\delta a_\alpha}{\delta \alpha}$$

Fonte del testo:
`https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Analisi_vettoriale/Teorema_di_Gauss:_divergenza&oldid=350542`

5

Circolazione di un vettore, rotore, teorema di Stoke

La trasformazione dell'integrale di superficie chiusa di un vettore in un integrale di volume ha portato al concetto di divergenza di un vettore. Consideriamo ora l'integrale di linea chiusa di un vettore.



Assumiamo che una linea L sia data nel campo di un vettore $\mathbf{a}(R)$ e che pure sia data la direzione positiva, delle due possibili del moto lungo questa linea. Dividiamo la curva L in infinitamente piccoli elementi $d\mathbf{s}$ la cui direzione coincida con quella del moto lungo la curva, e moltiplichiamo ciascun elemento $d\mathbf{s}$ scalarmente per il valore del vettore $\mathbf{a}$ nel corrispondente punto del campo. Il limite della somma di questi prodotti $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = a_s\, ds$ quando $ds < 0$ comprendente tutti gli elementi della curva è denominato *integrale di linea* del vettore $\mathbf{a}$ lungo la linea L:

$$\int_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \int_L a_s \; ds$$

Se la linea è *chiusa*, la qual cosa è indicata da un cerchio sul simbolo di integrazione, allora l'integrale di linea del vettore $\mathbf{a}$ lungo di essa è chiamato *rotazione* o *circolazione* di $\mathbf{a}$ lungo L:

$$C_{(a)} = \oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \oint_L a_s \; ds \tag{5.1}$$

Assumiamo che il contorno L sia quello di un rettangolo piano $ABCD$ e scegliamo gli assi x e y di un sistema di coordinate cartesiane così che siano paralleli ai lati del rettangolo ed intersechino al suo centro.

Siano Δx e Δy, rispettivamente, i lati del rettangolo. Se si sceglie la direzione positiva attorno al perimetro così che la corrispondente normale positiva allìarea del rettangolo sia diretta lungo l'asse z, allora

$$C = \oint a_s \; ds = \int_A^B a_x \; dx + \int_B^C a_y \; dy + \int_C^D a_x \; dx + \int_D^A a_y \; dy$$

Facendo ricorso al teorema del valore medio del calcolo infinitesimale, si ottiene (quando **n** è parallela all'asse z)

$$\oint a_s \; ds = a'_x \Delta x + a''_y \Delta y - a'''_x \Delta x - a''''_y \Delta y$$

dove a'_x, a''_y sono i valori medi delle componenti a_x e a_y sui lati primo, secondo ect. del rettangolo. Il segno negativo, per esempio, sull'ultimo termine della somma è giustificato dal fatto che la integrazione sul lato AD è eseguita nella direzione riducente la coordinata y.

Facciamo ora tendere a zero la lunghezza dei lati del rettangolo. Il valore medio del componente a_y sul segmento BC ad una distanza Δx dal segmento AD nella direzione dell'asse x differirà dal valore di a_y sul segmento AD di un ammontare $\frac{\delta a_y}{\delta x}\Delta x$ con una accuratezza pari ad un infinitesimo di secondo ordine:

$$a''_y = a''''_y + \frac{\delta a_y}{\delta x}\Delta x$$

In corrispondenza,

$$a'''_x = a'_x + \frac{\delta a_x}{\delta y}\Delta y$$

dato che CD si trova alla distanza Δy da AB nella direzione dell'asse y.

Al limite, con un rettangolo di dimensioni infinitamente piccole, $\frac{\delta a_y}{\delta x}$ e $\frac{\delta a_x}{\delta y}$ possono venire considerate i valori di queste quantità al centro *0* del rettangolo. Introducendo queste espressioni nella precedente equazione, si ottiene (quando **n** sia parallela all'asse z)

$$dC = \oint a_s ds = (a''_y - a''''_y)\Delta y - (a'''_x - a'_x)\Delta x = \frac{\delta a_y}{\delta x}\Delta x \; \Delta y - \frac{\delta a_x}{\delta y}\Delta x \; \Delta y$$

dove è stato sostituito C da dC per far notare che questa relazione è valida solamente per rettangoli infinitamente piccoli. (Naturalmente, dC non è per nulla il differenziale totale di C). Denotando, alla fine, l'area del rettangolo $\Delta\Delta y$ con dS, otteniamo

$$dC = \oint a_s ds = (\frac{\delta a_y}{\delta x} - \frac{\delta a_x}{\delta y})dS \tag{5.2}$$

Siccome gli assi x, y e x formano un sistema destrorso, allora, ruotando i pedici x, y e z evidentemente otteniamo la circolazione del vettore **a** lungo il perimetro di un rettangolo infinitamente piccolo, la cui normale positiva è diretta lungo gli assi x o y:
quando **n** è parallela all'asse x

$$dC = \oint a_s ds = (\frac{\delta a_z}{\delta y} - \frac{\delta a_y}{\delta y})dS \tag{5.3}$$

quando **n** è parallela all'asse y

$$dC = \oint a_s ds = (\frac{\delta a_x}{\delta z} - \frac{\delta a_z}{\delta x})dS \tag{5.4}$$

Vogliamo dimostrare che la combinazione delle derivate delle componenti del vettore **a** nelle equazioni 5.2, 5.3 e 5.4 sono componenti di un certo vettore che viene comunemente denominato *rot* **a**:

$$\begin{cases} rot_x\ \mathbf{a} = \frac{\delta a_z}{\delta y} - \frac{\delta a_y}{\delta z} \\ rot_y\ \mathbf{a} = \frac{\delta a_x}{\delta z} - \frac{\delta a_z}{\delta x} \\ rot_z\ \mathbf{a} = \frac{\delta a_y}{\delta x} - \frac{\delta a_x}{\delta y} \end{cases} \tag{5.5}$$

Il vettore *rot* **a** la derivata spaziale vettoriale del vettore **a** (differente dalla sua derivata spaziale scalare *div* **a**).

Usando i simboli 5.5, le espressioni 5.2 possono venire scritte come segue:

$$dC = \oint_L a_s\ ds = curl_n\ \mathbf{a}\ dS \tag{5.6}$$

Qui con **n** intendiamo una normale dell'elemento di area dS positiva che forma un sistema destrorso con la direzione positiva attorno al contorno di questo elemento. Consecutivamente assumendo che **n** sia parallela agli assi x, y e z, si ottengono le equazioni 5.2, 5.3, 5.4 dalle Equazioni 5.6 e 5.5.

Poiché gli assi coordinati possono sempre essere scelti in modo tale che uno di loro sia perpendicolare all'elemento di area dS, allora 5.6 permane ovviamente corretta per la circolazione di **a** lungo il contorno di un rettangolo arbitrariamente infinitamente piccolo.

Ora passiamo a considerare la circolazione di un vettore su un contorno avente forma e dimensione qualsiasi. Arrangiamo la superficie S in modo tale che L ne sia il proprio contorno. Poi dividiamo la superficie in un insieme di infinitamente piccoli elementi che possano essere considerati piani per la loro piccolezza con due sistemi mutuamente perpendicolari di linee parallele. Applicando la 5.6 a ciascuno di questi elementi e sommando le espressioni ottenute, troviamo che

$$\sum dC = \sum \oint a_s\ ds = \sum curl_n\mathbf{a}\ dS = \int_S curl_n\mathbf{a}\ dS$$

in cui **n** è la normale al lato esterno della superficie dS. Il lato esterno della superficie S deve essere scelto secondo la direzione positiva di circolazione sul contorno (metodo della mano destra).

Al momento della integrazione sui contorni delle aree elementari, ciascun confine fra due elementi adiacenti sarà passato due volte e in direzione opposta. Conseguentemente, la somma $\sum \oint a_s\ ds$ conterrà entrambi i termini $\int_A^B a_s ds$ e $\int_B^A a_s ds$, i quali quando presi assieme si azzerano.

Pertanto, $\oint a_s\ ds$ consiste della somma dei termini che sono in relazione soltanto con le frontiere esterne degli elementi superficiali, cioè in relazione all'integrale del vettore **a** lungo il contorno L esterno dell'area S, da cui

$$\sum dC = \sum \oint a_s\ ds = \oint a_s\ ds = C$$

dove C sta per la circolazione del vettore **a** sul contorno L. Usando questa espressione nella equazione precedente, si ottiene:

$$C = \oint_S a_s\ ds = \int_S curl_n\ \mathbf{a}\ dS \tag{5.7}$$

Nel derivare questa formula, non abbiamo tenuto in considerazione che gli elementi di superficie esterni (confinanti con il contorno L), generalmente parlando, non saranno rettangolari, laddove la correttezza della equazione 5.6 è stata dimostrata solo per elementi rettangolari. In seguito ad riduzione drastica della dimensione dei rettangoli, tuttavia, la linea tratteggiata formata dai lati esterni dei rettangoli estremi coinciderà tanto vicino quanto desiderato con il contorno L della superficie S.

Su questa base si può dare alla equazione 5.7 una forma assolutamente accurata. Quindi, per la correttezza della 5.7 consiste nel solo requisito di differenziabilità e continuità del vettore **a** in tutti i punti della superficie S.

Questa espressione esprime il teorema di Stokes secondo il quale la circolazione di un qualunque vettore **a** attorno ad una curva chiusa L uguaglia il flusso del rotore di questo vettore attraverso la superficie S indipendente dalla curva L.

La forma della superficie S rimane qui assolutamente ambigua. Quindi, attraverso due superfici S_1 e S_2 passa l'identico flusso del rotore di un qualsiasi vettore continuo **a** soltanto se hanno lo stesso contorno L. Questo flusso uguaglia la circolazione del vettore attorno al contorno comune delle due superfici.

A proposito, segue immediatamente dalla 5.7, che

$$\oint curl_n \mathbf{a} \; dS = 0 \tag{5.8}$$

poiché quando la superficie è chiusa, il contorno L si contrae in un punto e C=0.

Tornando dalla 5.7 all'elemento dS talmente piccolo della superficie S che può venire considerato come un elemento piano, in tutti punti del quale il rot_n **a** conserva un valore costante, possiamo tirare fuori il rotore dall'integrale e scrivere

$$dC = \oint a_s \;\; ds = curl_n \; \mathbf{a} \; dS$$

che coincide con l'equazione 5.6. Dato che 5.7 può essere impiegata su una superficie avente qualsiasi forma, allora 5.6 può pure venire impiegata su elementi di superficie infinitamente piccola e di qualunque forma.

$$\lim_{dS \to 0} \frac{\oint a_s \; ds}{dS} \tag{5.9}$$

Pertanto, la componente del vettore rot**a** in un dato punto P di un campo in direzione data **n** uguaglia il limite del rapporto fra la circolazione del vettore **a** lungo il contorno di un elemento arbitrario di area dSche passa attraverso **P** e ortogonale a **n** ed il valore dell'area di questo elemento dS.

Da qui ne segue che il valore della componente *curl* **a** non dipende affatto dalla scelta dei sistemi di coordinate, cioè che *curl* **a** è infatti un vero vettore. Possiamo così considerare la invariabilità del vettore*curl* **a** provata.

Questa asserzione non è del tutto vera in sostanza, poiché, prima, nel derivare le equazioni 5.6 e 5.7 abbiamo già usato la proprietà di invariabilità del vettore *curl* **a** in relazione alla trasformazione delle coordinate che vogliamo utilizzare. È esattamente a questa invariabilità del*curl* **a** a cui ci riferiamo quando asseriamo che la equazione 5.6 può essere applicata ad una superficie che abbia una direzione arbitraria. In secondo luogo, abbiamo omesso una prova esatta della applicabilità della equazione 5.7 [e, conseguentemente della 5.6] ad un contorno che abbia una forma casuale. La correttezza di queste affermazioni può venire dimostrata col calcolare direttamente la circolazione di un vettore attorno al contorno di una superficie arbitraria in coordinate Cartesiane. Tuttvia, è più semplice e corretto di considerare la relazione 5.9, che è invariante rispetto alla trasformazione delle Coordinate, come la definizione del concetto di *rot* **a**. Non è difficile dimostrare tutte le formule derivate sopra sulla base di questa definizione invertendo l'ordine del nostro ragionamento.

Concludendo, per spiegare il significato geometrico del **rotore**, consideriamo la rotazione di un corpo solido con velocità angolare **omega**. Come al solito, consideriamo il vettore **omega** diretto lungo l'asse di rotazione così che la direzione di rotazione formi con il vettore **omega** un sistema destrorso. Scegliamo l'asse **z** in modo che coincida con l'asse di rotazione e sia diretto lungo **omega**. Quindi, la velocità lineare **V** di un punto (x,y,z) del corpo uguaglierà numericamente

$$v = r\ \omega = \omega\sqrt{x^2 + y^2}$$

e le sue componenti lungo gli assi coordinati saranno

$$v_x = -\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = -y\omega$$
$$\frac{v_y = vx}{\sqrt{x^2+y^2} = x\omega}$$
$$v_z = 0$$

Le componenti del vettore $rot\mathbf{V}$, secondo la 5.5, sono

$$rot_x\mathbf{V} = rot_y\mathbf{V} = 0 \qquad rot_z\mathbf{V} = \frac{dv_y}{dx} - \frac{dv_x}{dy} = 2\omega$$

quindi

$$rot\ \mathbf{V} = 2\omega \tag{5.10}$$

Pertanto, il rotore della velocità lineare dei punti di un corpo solido ha il medesimo valore in tutti i punti del corpo ed uguaglia il doppio della velocità angolare della sua rotazione.

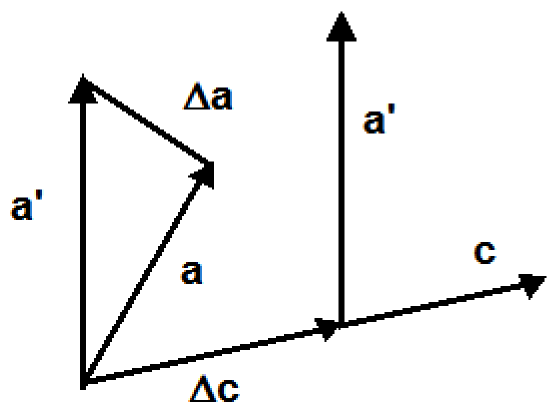
L'equazione 5.10 vale pure se un corpo a parte il moto di rotazione sta esguendo anche un moto di traslazione. Infine, nella teoria dell'elasticità è dimostrato che 5.10 vale non solamente per i corpi rigidi, ma pure per i corpi che si deformano genericamente (per esempio un liquido), ed n questo caso con ω intendiamo la velocità angolare di rotazione di un elemento di liquido infinitamente piccolo che si trova nel punto dello spazio in considerazione.

Perciò $rot\ \mathbf{v} \neq 0$ solamente nei punti del corpo che appartengonoai ai suoi elementi ruotanti.

6

Derivata direzionale di un vettore

Lo scalare *div* **a** e il vettore *rot* **a**, come abbiamo già indicato, possono venire chiamati le derivate spaziali vettoriali e scalari del vettore **a**, rispettivamente. Esse hanno un significato geometrico diretto che consegue dalle equazioni 4.5 e 5.9, e insieme con il gradiente di uno scalare sono i concetti fondamentali dell'analisi vettoriale.



L'associazione dei valori dello scalare *div* **a** e del vettore *rot* **a** ad un dato punto, tuttavia, non è sufficiente per determinare in questo punto la derivata direzionale arbitraria del vettore **a** (laddove la derivata direzionale arbitraria dello scalare ϕ è determinata inequivocabilmente con il collocamento del vettore *grad* ϕ).

Infatti, la derivata di un vettore **a** rispetto ad una direzione arbitraria **C** può venire determinata procedendo secondo la seguente costruzione geometrica. Assumiamo che i valori di un vettore **a** in due punti vicini **P** e **P'** uguaglino i valori **a** e **a'**, rispettivamente, e che la direzione del segmento Δc sia quella di **c**. Se la differenza tra **a** e **a'** uguaglia $\Delta\mathbf{a}$, allora la derivata $\frac{\delta \mathbf{a}}{\delta c}$ sarà

$$\frac{\delta \mathbf{a}}{\delta c} = \lim_{PP' \to 0} \frac{\mathbf{a}' - \mathbf{a}}{PP'} = \lim_{\Delta c \to 0} \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta c} \tag{6.1}$$

Così, la direzione del vettore $\frac{\delta \mathbf{a}}{\delta c}$ coincide con la direzione limite del vettore $\Delta\mathbf{a}$, ma generalmente differisce dalla direzione dei vettori **a** e **c**

Inoltre, se le coordinate dei punti **P** e **P'** differiscono l'uno dall'altro di Δ_x, Δ_y e Δ_z, allora con una accuratezza fino al secondo ordine infinitesimale, otteniamo

$$\mathbf{a}' - \mathbf{a} = \frac{\delta \mathbf{a}}{\delta x}\Delta x + \frac{\delta \mathbf{a}}{\delta y}\Delta y + \frac{\delta \mathbf{a}}{\delta z}\Delta z$$

Introducendo ciò nella equazione precedente e prendendo in considerazione che

$$\frac{\Delta x}{PP'} = cos(x, \mathbf{c}) \ , \frac{\Delta y}{PP'} = cos(y, \mathbf{c}) \ , \frac{\Delta z}{PP'} = cos(z, \mathbf{c})$$

otteniamo

$$\frac{\delta \mathbf{a}}{\delta c} = \lim_{PP' \to 0} \frac{\mathbf{a}' - \mathbf{a}}{PP'} = cos(x, \mathbf{c})\frac{\delta \mathbf{a}}{\delta x} + cos(x, \mathbf{c})\frac{\delta \mathbf{a}}{\delta y} + cos(x, \mathbf{c})\frac{\delta \mathbf{a}}{\delta z} \tag{6.2}$$

Perciò, per determinare la derivata direzionale casuale di un vettore **a** in un dato punto, si deve set nove quantità: le tre componenti $\frac{\delta a_x}{\delta x}$, $\frac{\delta a_x}{\delta x}$, $\frac{\delta a_x}{\delta x}$ della quantità $\frac{\delta \mathbf{a}}{\delta x}$ e, corrispondentemente, tre componenti di ciascuna delle quantità $\frac{\delta \mathbf{a}}{\delta y}$ e $\frac{\delta \mathbf{a}}{\delta z}$.

La combinazione di queste nove quantità forma le componenti di un tensore stabilendo le quali si determinano entrambe le derivate direzionali casuali del vettore **a** e i valori delle quantità *div* **a** e *rot* **a**

Fonte del testo: `https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Analisi_vettoriale/Derivata_direzionale_di_un_vettore&oldid=357406`

7

Operatore vettoriale, derivate seconde, derivate di un prodotto

1. Precedentemente ci siamo famigliarizzati con un numero di operazioni differenziali su vettori e scalari: la formazione del gradiente di uno scalare 2.6, la divergenza di un vettore 4.5, il rotore di un vettore 5.9, etc. L'operare con queste espressioni può venire semplificato e disposto in uno schema armonioso e semplice introducendo *l'operatore differenziale hamiltoniano simbolico*. Questo operatore è designato col simbolo ∇ (operatore **Nabla**). Nel sistema cartesiano di coordinate ha la forma

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\delta}{\delta x} + \mathbf{j}\frac{\delta}{\delta y} + \mathbf{k}\frac{\delta}{\delta z} \tag{7.1}$$

in cui **i**, **j** e **k** sono i versori lungo gli assi **x**, **y** e **z**. In altri termini, ∇ è un operatore vettoriale le cui componenti lungo le coordinate sono

$$\nabla_x = \frac{\delta}{\delta x},\ \nabla_y = \frac{\delta}{\delta y},\ \nabla_z = \frac{\delta}{\delta z} \tag{7.2}$$

Questo operatore vettoriale corrisponde nella analisi vettoriale al simbolo di derivazione nella analisi convenzionale. Nella analisi convenzionale il differenziale di una funzione può essere considerato come il prodotto dell'operatore differenziale **d** e la funzione differenziabile. Analogamente, moltiplicando scalari e vettori funzioni di posizione per l'operatore ∇, si ottengono le derivate spaziali di queste quantità.

Per esempio, il prodotto di ∇ per lo scalare ϕ ovviamente dovrebbe venire dato per scontato di uguagliare

$$\Delta\phi = (\mathbf{i}\frac{\delta}{\delta x} + \mathbf{j}\frac{\delta}{\delta y} + \mathbf{k}\frac{\delta}{\delta k})\phi = \mathbf{i}\frac{\delta\phi}{\delta x} + \mathbf{j}\frac{\delta\phi}{\delta y} + \mathbf{k}\frac{\delta\phi}{\delta k}$$

Perciò, secondo l'equazione 2.6, si ha

$$\nabla\phi = grad\ \phi \tag{7.3}$$

Perciò, $\nabla\phi$ può effettiva,emte venire chiamato la derivata spaziale di ϕ perché il vettore $grad\phi$ caratterizza totalmente le variazioni che lo scalare ϕ subisce sullo spostamento del **punto di osservazione** (su un cambiamento nelle coordinate **x**, **y** e **z**). Allo stesso modo, alte espressioni che includono l'operatore ∇ pure caratterizzano varie relazioni tra i valori delle funzioni scalari e vettoriali in punti adiacenti dello spazio.

Con certe limitazioni che verranno trattate di seguito, possiamo formare dei prodotti di ∇ con altri vettori e scalari come se ∇ fosse un vero vettore e non un simbolo. Come quando si impiega il simbolo del differenziale, si dà per scontato che l'operatore ∇ *agisce* solamente sulle quantità alla sua destra.

Per esempio, il prodotto scalare di ∇ vettore simbolico ed un qualunque vettore **a** è

$$\nabla \mathbf{a} = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \frac{\delta a_x}{\delta x} + \frac{\delta a_y}{\delta y} + \frac{\delta a_z}{\delta z}$$

Parimenti secondo la equazione 4.2

$$\nabla\ \mathbf{a} = div\ \mathbf{a} \tag{7.4}$$

A parte il prodotto scalare del vettore simbolico ∇ed un vettore **a**, è possibile pure formare il prodotto vettoriale di questi vettori che, come può essere facilmente visto, è il rotore del vettore **a**:

$$[\nabla \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = rot\ \mathbf{a} \tag{7.5}$$

Pertanto, la componente del vettore $[\nabla \mathbf{a}]$ lungo l'asse **x** è

$$[\nabla \mathbf{a}]_x = \nabla_y a_x - \nabla_z a_y = \frac{\delta a_z}{\delta y} - \frac{\delta a_y}{\delta z} = rot_x\ \mathbf{a}$$

2. La utilizzazione dell'operatore ∇ semplifica grandemente l'ottenimento della derivata seconda ed successive delle quantità scalari e vettoriali. Per esempio, il quadrato del vettore ∇ è

$$\nabla^2 = \nabla_x^2 + \nabla_y^2 + \nabla_z^2 = \frac{\delta}{\delta x}\frac{\delta}{\delta x} + \frac{\delta}{\delta y}\frac{\delta}{\delta y} + \frac{\delta}{\delta z}\frac{\delta}{\delta z} = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2}$$

Pertanto, discutendo sul significato del prodotto $\nabla(\nabla\phi)$ secondo le regole dell'algebra vettoriale

$$\mathbf{b}(\mathbf{b}\phi) = \mathbf{b}^2\phi$$

si ottiene

$$div\ grad\ \phi = \nabla(\nabla\phi) = \nabla^2\phi = \frac{\delta^2\phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\phi}{\delta y^2} + \frac{\delta^2\phi}{\delta z^2} \tag{7.6}$$

(l'operatore ∇^2 viene sovente designato con Δ e chiamato operatore laplaciano.)

Ci possiamo convincere della validità di questa equazione tramite dei calcoli diretti con l'aiuto delle equazioni 2.5 e 4.2:

$$div\ grad\ \phi = \frac{\delta\ grad_x\ \phi}{dx} + \frac{\delta\ grad_y\ \phi}{dy} + \frac{\delta\ grad_z \phi}{dz} = \frac{\delta^2\ \phi}{dx} + \frac{\delta^2\ \phi}{dy} + \frac{\delta^2\ \phi}{dz}$$

La espressione per *grad div* **a** ha un significato assolutamente differente:

$$grad\ div\ \mathbf{a} = \nabla(\nabla \mathbf{a}) = (\mathbf{i}\ \frac{\delta}{\delta x} + \mathbf{j}\ \frac{\delta}{\delta y} + \mathbf{k}\ \frac{\delta}{\delta z}) \times (\frac{\delta a_x}{\delta x} + \frac{\delta a_y}{\delta y} + \frac{\delta a_z}{\delta z})$$

Non uguaglia affatto ∇^2 **a**, giusto come quando si opera con i vettori convenzionali

$$\mathbf{b}\ (\mathbf{ba}) \neq b^2\ \mathbf{a}$$

La espressione ∇^2 **a** ovviamente ha il seguente significato:

$$\nabla^2\ \mathbf{a} = (\nabla\nabla)\mathbf{a} = \frac{\delta^2\mathbf{a}}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\mathbf{a}}{\delta y^2} + \frac{\delta^2\mathbf{a}}{\delta z^2} \tag{7.7}$$

ossia è un vettore la cui componente lungo l'asse **x**, per esempio, è

$$(\nabla^2\ \mathbf{a})_x = \nabla^2 a_x = \frac{\delta^2 a_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\ a_x}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 a_x}{\delta z^2} \tag{7.8}$$

Ovviamente, $\nabla^2\phi$ e $\nabla^2\mathbf{a}$ non devono venire scambiati per $(\nabla\phi)^2)$ e $(\nabla\mathbf{a})^2$; per esempio

$$(\nabla\phi)^2 = (grad\ \phi)^2 = (\frac{\delta\phi}{\delta x})^2 + (\frac{\delta\phi}{\delta y})^2 + (\frac{\delta\phi}{\delta z})^2$$

Le note formule dell'algebra vettoriale

$$[\mathbf{b}(\mathbf{b}\phi)] = 0, \quad \mathbf{b}[\mathbf{ba}] = 0 \quad e \quad [\mathbf{b}[\mathbf{ba}]] = \mathbf{b}(\mathbf{ba}) - (\mathbf{bb})\mathbf{a}$$

permangono corrette quando il vettore **b** viene sostituito con il vettore simbolico ∇, qualunque sia il valore di **a** e di ϕ:

$$\begin{cases} [\mathbf{b}(\nabla\phi)] = [\nabla\ grad\ \phi] = rot\ grad\ \phi = 0 \\ \nabla[\nabla\mathbf{a}] = \nabla\ rot\ \mathbf{a} = div\ rot\ \mathbf{a} = 0 \\ \nabla[\nabla\mathbf{a}]] = \nabla(\nabla\mathbf{a}) - \nabla^2\mathbf{a}\ ,\ o\ \ rot\ rot\ \mathbf{a} = grad\ div\ \mathbf{a} - \nabla^2\ \mathbf{a} \end{cases} \tag{7.9}$$

Ci possiamo facilmente convincere che queste relazioni sono corrette calcolandole direttamente nelle coordinate cartesiane. Per esempio:

$$div\ rot\ \mathbf{a} = \frac{\delta\ rot_x\ \mathbf{a}}{\delta x} + \frac{\delta\ rot_y\ \mathbf{a}}{\delta y} + \frac{\delta\ rot_z\ \mathbf{a}}{\delta z} =$$
$$= \frac{\delta}{\delta x}(\frac{\delta a_z}{\delta y} - \frac{\delta a_y}{\delta z}) + \frac{\delta}{\delta y}(\frac{\delta a_x}{\delta z} - \frac{\delta a_z}{\delta x}) + \frac{\delta}{\delta z}(\frac{\delta a_y}{\delta x} - \frac{\delta a_x}{\delta y}) = 0$$

3. Così, dato che l'operatore ∇ è un moltiplicatore nei prodotti che contengono solamente un singolo vero scalare o vettore, questi prodotti possono venire trasformati in base alle convenzionali regole dell'algebra vettoriale. In qualunque modo, dovesse un prodotto contenere due o più scalari o vettori veri, allora queste regole non possono essere più a lungo applicate e richiedono delle modifiche. Assolutamente lo stesso accade pure nelle analisi convenzionali quando delle quantità algebriche siano simbolicamente moltiplicate dal segno di differenziale **d**.

Simile a come

$$d(\phi\ \Phi) = \Phi\ d\phi + \phi\ d\Phi$$

$$\begin{cases} \nabla\ (\phi\ \Phi) = \phi(\nabla\ \Phi) + \Phi(\nabla\ \phi) \\ \nabla\ (\phi\ \mathbf{a}) = \phi(\nabla\ \mathbf{a}) + \mathbf{a}(\nabla\ \phi) \\ \nabla(\phi\ \mathbf{a})] = \phi\ [\nabla\ \mathbf{a}] \end{cases} \tag{7.10}$$

La correttezza di queste relazioni può venire verificata con una valutazione diretta. Per esempio:

$$\nabla(\phi\ \Phi) = \mathbf{i}\frac{\delta}{\delta x}(\phi\ \Phi) + \mathbf{j}\frac{\delta}{\delta y}(\phi\ \Phi) + \mathbf{k}\frac{\delta}{\delta z}(\phi\ \Phi) =$$
$$= \mathbf{i}(\phi\frac{\delta\Phi}{\delta x} + \Phi\frac{\delta\phi}{\delta x}) + \mathbf{j}(\phi\frac{\delta\Phi}{\delta x} + \Phi\frac{\delta\phi}{\delta y}) + \mathbf{k}(\phi\frac{\delta\Phi}{\delta x} + \Phi\frac{\delta\phi}{\delta z}) = \Phi(\nabla\ \phi) + \phi(\nabla\Phi)$$

Gli argomenti sono in qualche modo più complessi in merito alla differenziazione scalare del prodotto di due vettori.

Ci rivolgiamo, anzitutto, all'espressione

$$\nabla\ [\mathbf{ab}] = div\ [\mathbf{ab}]$$

Per vettori convenzionali, le seguenti espressioni sono valide:

$$\mathbf{c}[\mathbf{ab}] = \mathbf{b}[\mathbf{ca}] = -\mathbf{a}[\mathbf{cb}]$$

cioè che

$$div\ [\mathbf{ab}] = \mathbf{b}\ rot\ \mathbf{a} - \mathbf{a}\ rot\ \mathbf{b} \tag{7.11}$$

È noto che nel calcolare il prodotto $\mathbf{c}(\mathbf{ab})$ di tre vettori si deve prima eseguire la moltiplicazione scalare dei vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ e poi moltiplicarli per $\mathbf{c}$. Di conseguenza, l'espressione

$$\nabla\ (\mathbf{ab} = grad\ (\mathbf{ab})$$

non può essere scritta nella forma della somma di due termini in ciascuno dei quali solo uno dei fattori viene differenziato. Possiamo inoltre mostrare che tale trasformazione non può pure essere eseguita riguardo alla espressione:

$$[\nabla\ [\mathbf{ab}]] = rot\ [\mathbf{ab}]$$

Le relative formule sono:

$$grad\ (\mathbf{ab}) = (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + [\mathbf{b}\ rot\ \mathbf{a}] + [\mathbf{a}\ rot\ \mathbf{b}] \tag{7.12}$$

$$rot\ [\mathbf{ab}] = (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}\ div\ \mathbf{b} - \mathbf{b}\ div\ \mathbf{a} \tag{7.13}$$

Nel caso particolare quando $\mathbf{b} = costante$ ed $\mathbf{a} = \mathbf{R}$, in cui $\mathbf{R}$ è un vettore posizione, non è difficile mostrare che l'equazione 7.12 diventa la medesima cosa della equazione E.11:

$$\nabla(\mathbf{bR}) = grad_a\ (\mathbf{bR}) = \mathbf{b}$$

Inoltre, assumendo che nella equazione 7.12 $\mathbf{a}$ sia uguale a $\mathbf{b}$,si ottiene

$$\frac{1}{2}\nabla\ a^2 = (\mathbf{a}\ \nabla)\mathbf{a} + [\mathbf{a}\ rot\ \mathbf{a}] \tag{7.14}$$

4. Ci rimane da considerare l'operatore scalare $\mathbf{a}\nabla$ ottenuto con la moltiplicazione di un vettore generico $\mathbf{a}$ per l'operatore hamiltoniano ∇ sulla destra di $\mathbf{a}$ (differente da $\nabla\ \mathbf{a} = div\ \mathbf{a}$) :

$$\mathbf{a}\nabla = a_x\frac{\delta}{\delta x} + a_y\frac{\delta}{\delta y} + a_z\frac{\delta}{\delta z} \tag{7.15}$$

Nel particolare caso in cui *a=1* l'operatore $\mathbf{a}\nabla$ è ovviamente l'equivalente di trovare la derivata $\frac{\delta}{\delta a}$ rispetto alla direzione del vettore unitario **a**. Genericamente, l'adempimento dell'operatore $\mathbf{a}\nabla$ su una funzione di posizione arbitraria equivale alla moltiplicazione della derivata di questa funzione rispetto alla direzione del vettore **a** per il valore assoluto del suo modulo. In altre parole:

$$\mathbf{a}\nabla = a\frac{\delta}{\delta a} \tag{7.16}$$

Infatti, nell'eseguire l'operazione $\mathbf{a}\nabla$ su uno scalare ϕ si ottiene lo scalare

$$\mathbf{a}\nabla\phi = a_x\frac{\delta\phi}{\delta x} + a_y\frac{\delta\phi}{\delta y} + a_z\frac{\delta\phi}{\delta z} = \mathbf{a}\nabla\phi$$

ovvero sulla base della 2.4 si ottiene $\mathbf{a}\nabla\phi = \mathbf{a}\ grad\ \phi = a\frac{\delta\phi}{\delta a}$ conforme alla 7.16.

Al termine dell'operazione $\mathbf{a}\nabla$ sul vettore arbitrario **b**, tuttavia, otteniamo il vettore

$$(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{a} = \mathbf{a}\nabla\ \mathbf{b} = a_x\frac{\delta\mathbf{b}}{\delta x} + a_y\frac{\delta\mathbf{b}}{\delta y} + a_z\frac{\delta\mathbf{b}}{\delta z} \tag{7.17}$$

la cui componente, per esempio, lungo l'asse **x** è

$$(\mathbf{a}\nabla\mathbf{b})_x = a_x\frac{\delta b_x}{\delta x} + a_y\frac{\delta b_x}{\delta y} + a_z\frac{\delta b_x}{\delta z} = (\mathbf{a}\nabla)b_x \tag{7.18}$$

D'altra parte, la derivata del vettore **b** rispetto alla direzione di **a**, secondo la 6.2, è

$$\frac{\delta\mathbf{b}}{\delta a} = cos(x,\mathbf{a})\frac{\delta\mathbf{b}}{\delta x} + cos(y,\mathbf{a})\frac{\delta\mathbf{b}}{\delta y} + cos(z,\mathbf{a})\frac{\delta\mathbf{b}}{\delta z}$$

Moltiplicando questa equazione per a e comparando il risultato con l'equazione 7.17, si nota infatti che

$$\mathbf{a}\nabla\mathbf{b} = a\frac{\delta\mathbf{b}}{\delta a} \tag{7.19}$$

CVD - Quindi, se il vettore **a** è piccolo a sufficienza, allora $\mathbf{a}\nabla\phi$ e $\mathbf{a}\nabla\mathbf{b}$ uguagliano rispettivamente, con una precisione fino agli infinitesimi di secondo ordine, l'incremento dello scalare ϕ ed il vettore **b** quando il punto di osservazione è spostato su una distanza uguale in grandezza e direzione al vettore **a**.

5. Le operazioni elementari di differenziazione spaziale consistono della formazione del gradiente, della divergenza, del rotore e della derivata $\frac{\delta\mathbf{b}}{\delta a}$. Tutte queste operazioni, come abbiamo visto, per esempio, nelle Equazioni 2.3, 4.5, 5.9 e 6.1, hanno un significato geometrico definito e sono pertanto invarianti rispetto alla trasformazione del sistema di coordinate. In altri temini, il valore delle espressioni $grad\ \phi, div\ \mathbf{a}, rot\ \mathbf{a}, \frac{\delta\mathbf{b}}{\delta a}$ non dipendono sulla scelta del sistema di coordinate. Tutte le relazioni tra le espressioni differenziali che abbiamo derivato sono pure di natura invariante poiché, anche se quando le abbiamo provate abbiamo sempre impiegato il sistema cartesiano di coordinate. le medesime relazioni comprendono solamente tali espressioni invarianti quali *grad* ϕ, *div* $\mathbf{a}$, *rot* $\mathbf{a}$. Conseguentemente, la forma di queste relazioni non possono variare quando si passi su altri sistemi ci coordinate.

Fonte del testo: https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Analisi_vettoriale/Operatore_vettoriale,_derivate_seconde,_derivate_di_un_prodotto&oldid=437120

8

Teorema di Green

1. Le formule di Gauss e Stokes 4.4 e 5.7 sono relazioni fondamentali tra integrali in analisi vettoriale. Si possono pure ottenere, sulla loro base, un numero di altre relazioni importanti tra gli integrali di volume, di superficie e di linea (integrali spaziali) di quantità scalari e vettoriali.

La formula 4.4 di Gauss ci permette di dimostrare, senza alcuna difficoltà, il *teorema di Green*, che è importante per l'analisi vettoriale e le sue applicazioni. A tal fine, assumiamo che nella formula di Gauss 4.4.

$$\int div\ \mathbf{a}\ dV = \oint a_n\ dS$$

$\mathbf{a} = \Psi\ div\ grad\ \phi = \Psi \nabla \phi$, dove $'\psi$ e ϕ sono scalari casuali.

Secondo le equazioni A.432 e 7.6, abbiamo

$$div\ \mathbf{a} = \Phi\ grad\ \phi + grad\ \Phi \cdot grad\ \phi = \Phi \nabla^2 \phi + (\nabla \phi)(\nabla \Phi)$$

Inoltre, $a_n = \Phi\ grad_n\ \phi = \Phi \frac{\delta \phi}{\delta n}$. Ne segue pertanto dalla 4.4 che

$$\int [\Phi \nabla^2 \phi + (\nabla \phi)(\nabla \Phi)] dV = \oint \Phi \frac{\delta\ \phi}{\delta n} dS \tag{8.1}$$

in cui l'integrale nel lato destro deve venire determinato sulla superficie **S** chiusa che confina la regione di integrazione **V**. Questa formula esprime esattamente il teorema di Green.

Per alcuni scopi, è conveniente trasformare l'equazione 8.1 sostituendo in essa ϕ con Φ, e viceversa. Sottraendo l'equazione ottenute in questo modo dalla equazione 8.1, ne risulta

$$\int (\Phi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \Phi) dV = \oint (\Phi \frac{\delta \phi}{\delta n} - \ \phi \frac{\delta \Phi}{\delta n}) dS \tag{8.2}$$

È stato già indicato che l'applicazione del teorema di Gauss è limitata dal requisito di continuità del vettore **a** e la circoscrizione delle sue derivate prime nella regione di integrazione **V**. Conseguentemente, può solo venire applicato direttamente alle funzioni di posizione scalari continue e finite ϕ e Φ che abbiano derivate di primo e secondo ordine nella regione di integrazione **V**.

2. Consideriamo l'integrale di linea $\oint \phi\ d\mathbf{s}$ di uno scalare arbitrario avente derivate finite su un contorno chiuso **L** arbitrario. Questo integrale è un vettore poiché con dS intendiamo il valore del modulo di un elemento di lunghezza del contorno.

Per trasformare questo integrale, dobbiamo moltiplicarlo scalarmente per un vettore arbitrario **c** che sia costante in grandezza e direzione:

$$\mathbf{c} \oint_L \phi \, d\mathbf{s} = \oint_L \phi \, \mathbf{c} \, d\mathbf{s} = \oint_L \phi \, c_s \, ds$$

Possiamo usare la formula di Stokes 5.7 per trasformare qest'ultimo integrale in uno sulla superficie S arbitraria giacente sul contorno L. Per fare ciò, è sufficiente assumere nella equazione 5.7 che $\mathbf{a} = \phi \, \mathbf{c}$

$$\mathbf{c} \oint_L \phi \, d\mathbf{s} = \int_S rot_s \, (\phi \, \mathbf{c}) dS$$

Usando questa espressione nella relazione integrale ultima, e collocando il vettore **c** costante all'esterno del segno di integrazione, si ottiene

$$\mathbf{c} \oint_L \phi \, d\mathbf{s} = \mathbf{c} \int_S [\mathbf{n} \cdot grad \; \phi] dS$$

In considerazione della natura del vettore **c**, questa equazione può solo valere se entrambi gli integrali sono uguali. Con ciò arriviamo alla richiesta formula

$$\oint_L \phi \, d\mathbf{s} = \int_S [\mathbf{n} \cdot grad \; \phi] dS \tag{8.3}$$

dove come consegue dalla derivazione, **n** è normale alla superficie S formante un sistema destrorso con la direzione positiva attorno al contorno L.

Se si presume che l'elemento dS elementare di superficie sia una quantitù vettoriale la cui direzione coincida con quella di una normale positiva a questo elemento dS, allora l'equazione 8.3 può venire scritta come segue:

$$\oint_L \phi d\mathbf{s} = \int_S [d\mathbf{S} \cdot grad \; \phi] \tag{8.4}$$

3. Verifichiamo la relazione

$$\int_V rot \; \mathbf{a} \; dV = \oint_S [\mathbf{na}] dS = \oint_S [d\mathbf{S} \cdot \mathbf{a}] \tag{8.5}$$

Moltiplichiamo l'integrale volumetrico da trasformare scalarmente per il vettore **c** arbitrario che è costante in grandezza e direzione.

Secondo l'equazione 7.11, abbiamo

$$\mathbf{c} \; rot \; \mathbf{a} = \mathbf{a} \; rot \; \mathbf{c} + div \; [\mathbf{ac}] = div \; [\mathbf{ac}]$$

dato che il rotore del vettore **c** costante è uguale a zero. Quindi,

$$\mathbf{c} \int_V rot \; \mathbf{a} \; dV = \int_V div \;\; [\mathbf{ac}] \; dV = \oint_S [\mathbf{ac}]_n \; dS$$

dove abbiamo usufruito del teorema di Gauss 4.4.

Finalmente, $[ac]_n = [ac]n = c[na]$, e, pertanto,

$$\mathbf{c} \int_V rot \; \mathbf{a} \;\; dV = \mathbf{c} \oint_S [\mathbf{na}] \; dS$$

Dato che il vettore **c** è arbitrario, l'equazione 8.5 discende da questa equazione.

Fonte del testo: `https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Analisi_vettoriale/Teorema_di_Green&oldid=330768`

9

Le formule più importanti dell'analisi vettoriale

$$\frac{\delta \phi}{\delta s} = \frac{\phi_s - \phi_0}{ds} \qquad 2.1$$

(la derivata dello scalare ϕ rispetto alla direzione $\mathbf{s}$)

$$grad\ \phi = \frac{\delta \phi}{\delta n}\mathbf{n} \qquad 2.3$$

$$\nabla\ \phi = grad\ \phi = \mathbf{i}\frac{\delta \phi}{\delta x} + \mathbf{j}\frac{\delta \phi}{\delta y} + \mathbf{k}\frac{\delta \phi}{\delta z} \qquad 2.6$$

$$grad_s\ \phi = \frac{\delta \phi}{\delta s} \qquad 2.4$$

$$grad\ \phi = \frac{\delta \phi(\Phi)}{\delta \Phi} grad\ \Phi \qquad 2$$

$$grad_q R = -\frac{\mathbf{R}}{R} = -grad_a R \qquad (E.8)$$

$$grad_q(\frac{1}{R}) = \frac{\mathbf{R}}{R^3} = -grad_a(\frac{1}{R}) \qquad (E.10)$$

$$grad_a(\mathbf{bR}) = \mathbf{b}(\mathbf{b} = costante) \qquad (E.11)$$

$$\oint_s a_n\ dS = \int_V div\ \mathbf{a}\ \ dV \quad (teorema\ di\ Gauss) \qquad 4.4$$

$$div\ \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint a_n dS}{\Delta\ V} \qquad 4.5$$

$$\nabla\ \mathbf{a} = div\ \mathbf{a} = \frac{\delta a_x}{\delta x} + \frac{\delta a_y}{\delta y} + \frac{\delta a_z}{\delta z} \qquad 4.2$$

$$div\ \mathbf{a} = a_{2n} - a_{1n} \qquad 5.9$$

$$\oint a_s ds = \int_L rot_n \mathbf{a}\ dS \quad (teorema\ di\ Stokes) \qquad 5.7$$

$$rot_n \mathbf{a} = \lim_{ds \to 0} \frac{\oint a_s\ ds}{dS} \qquad 5.9$$

$$[\nabla\ \mathbf{a}] = rot\ \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \qquad 5.5$$

$$rot\ \mathbf{a} = [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{a_2} - \mathbf{a_1})]$$

$$\oint_S rot_n \, \mathbf{a} \; ds = 0 \qquad 5.8$$

$$\frac{\delta \mathbf{b}}{\delta a} = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\mathbf{b}' - \mathbf{b}}{\Delta a} \qquad 6.1$$

Derivate seconde:

$$div \;\; grad \; \phi = \nabla^2 \phi = \frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \phi}{\delta z^2} \qquad 7.6$$

$$\nabla^2 f(R) = \frac{\delta^2 f}{\delta R^2} + \frac{2}{R} \frac{\delta f}{\delta R} \qquad (E.21)$$

$$\nabla^2 (\frac{1}{R}) = 0$$

Derivate di prodotto:

$$grad(\phi \; \Phi) = \Phi \; grad \; \phi + \phi \; grad \; \Phi$$

$$div(\phi \; \mathbf{a}) = \phi \; div \; \mathbf{a} + \mathbf{a} \; grad \; \phi$$

$$rot(\phi \; \mathbf{a}) = \phi \; rot \; \mathbf{a} + [grad \; \phi \cdot \mathbf{a}]$$

$$div[\mathbf{ab}] = \mathbf{b} \; rot \; \mathbf{a} - \mathbf{a} \; rot \; \mathbf{b} \qquad 7.11$$

$$grab(\mathbf{ab}) = (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + [\mathbf{b} \; rot \; \mathbf{a}] + [\mathbf{a} \; rot \; \mathbf{b}] \qquad 7.12$$

$$rot[\mathbf{ab}] = (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a} \; div \; \mathbf{b} - \mathbf{b} \; div \; \mathbf{a} \qquad 7.13$$

$$\frac{1}{2}\nabla a^2 = (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{a} + [\mathbf{a} \; rot \; \mathbf{a}] \qquad 7.14$$

Teorema di Green:

$$\int [\Phi \nabla^2 \phi + (\nabla \phi)(\nabla \Phi)] dV = \oint \Phi \frac{\delta \phi}{\delta n} dS \qquad 8.1$$

$$\int (\Phi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \Phi) dV = \oint (\Phi \frac{\delta \phi}{\delta n} - \phi \frac{\delta \Phi}{\delta n}) dS \qquad 8.2$$

$$\oint_L \phi \; d\mathbf{s} = \int_S [\mathbf{n} \cdot grad \; \phi] dS \qquad 8.3$$

$$\int_V rot \; \mathbf{a} \; dV = \oint_S [\mathbf{na}] dS = \oint_S [d\mathbf{S} \cdot \mathbf{a}] \qquad 8.5$$

Fonte del testo: https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Analisi_vettoriale/Formule_pi%C3%B9_importanti_dell%27analisi_vettoriale&oldid=3348291

Elenco delle immagini

Algebra vettoriale

Campi scalare e vettoriale: gradiente

Flusso di un vettore attraverso una superficie

Teorema di Gauss: divergenza

Circolazione di un vettore, rotore, teorema di Stoke

Derivata direzionale di un vettore