ONDE MECCANICHE ELASTICHE

Meccanica newtoniana - 5

WIKIBOOKS
Libri liberi per un mondo aperto

Onde meccaniche elastiche

Meccanica newtoniana, n. 5

it.wikibooks.org
2023

Questo testo proviene dal sito
https://it.wikibooks.org/wiki/Onde_meccaniche_elastiche

La versione originale del testo si trovava su WikiToLearn. Una copia è disponibile su
https://web.archive.org/web/20211207183958/https://it.wikitolearn.org/Corso:Onde_meccaniche_elastiche

Autori principali:
Dan e altri utenti di WikiToLearn

Questo libro è aggiornato al
15 ottobre 2023

In copertina:
Onde d'acqua. *Autore:* Roger McLassus; *licenza:* GFDL / CC BY-SA 3.0; *fonte:*
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:2006-01-14_Surface_waves.jpg

Indice

1

Caratteristiche delle onde

1.1 Onde meccaniche

Quando applichiamo una **perturbazione**, ovvero una variazione, a una qualsiasi grandezza fisica di un determinato mezzo, si verifica una **propagazione ondosa**, ovvero la perturbazione si propaga attraverso il mezzo che riempie lo spazio.

Un esempio classico di un fenomeno d'onda è il lancio di un sasso in uno stagno d'acqua: successivamente all'impatto del sasso con la superficie d'acqua, si possono vedere delle circonferenze d'acqua che si allontanano progressivamente dal punto d'impatto. Quelle circonferenze possono essere considerate un esempio materiale di onda.

Un'osservazione diretta dall'esperienza empirica del lancio del sasso è che, a propagarsi, non è materia, bensì il **moto della materia**: le particelle d'acqua cambiano sia la loro velocità che la loro quota, dando origine così a un propagarsi di energia cinetica e energia potenziale. Gli anelli d'acqua che si formano possono essere considerati come luoghi geometrici dei punti che, in un determinato istante, subiscono la perturbazione; questi luoghi geometrici vengono chiamati comunemente **fronti d'onda**. Quando si ha una propagazione nello spazio si è soliti parlare di **onde sferiche** ma, come nel caso dell'acqua, si può considerarle anche **onde piane**.

La propagazione di un'onda dipende fortemente dalle **caratteristiche fisiche del mezzo**; nell'acqua è presente una forza di richiamo tra le particelle, che possiamo schematizzare come una **forza elastica**. In questi casi, allora, parleremo di onde elastiche in mezzi elastici. La forza elastica, tuttavia, ha degli effetti dissipativi che tendono a smorzare la perturbazione; nella nostra analisi trascureremo questi effetti. Qualora, però, essi risultano impossibili da trascurare, perché troppo forti, parliamo di **onde smorzate**. Un esempio è il lancio di un sasso, invece che in uno stagno d'acqua, in una pozzanghera di fango: in quel mezzo la forza di richiamo ha un effetto dissipativo molto forte, e il risultato è che non possono essere apprezzati fronti d'onda evidenti, quindi la perturbazione viene stroncata quasi sul nascere.

Le onde elastiche descrivono efficacemente molti fenomeni naturali, tra i quali la propagazione del suono nell'aria. Nei mezzi elastici possono crearsi due tipi di onde: le **onde longitudinali**, che si hanno quando le particelle si propagano nella stessa direzione in cui si propaga l'onda, per esempio, quando si comprime una piccola parte di una molla molto lunga e possiamo vedere come, seguendo la direzione della molla, le parti successive adiacenti siano interessate dalla perturbazione contraendosi a loro volta; le **onde trasversali**, invece, si hanno quando le particelle si propagano in direzione ortogonale a quella di propagazione dell'onda, per esempio quando si fa oscillare una corda di chitarra. In questo corso tratteremo approfonditamente entrambi questi fenomeni.

Parliamo adesso in termini matematici. Le onde, oltre che a parole, possono essere descritte da funzioni matematiche. Una funzione d'onda descrive come la perturbazione si propaga nello spazio, ovvero come, all'istante t, si muovono le particelle interessate del mezzo. Avremo quindi che la funzione d'onda può essere scritta:

$$\alpha(x,\, t)$$

Questo tipo di funzione rappresenta, al variare del tempo, come varia la posizione della particella. Le onde possono considerarsi progressive o regressive: a cambiare non è altro che la **direzione di propagazione**. Scelto un verso positivo, si hanno **onde progressive** quando l'onda si propaga verso il semiasse positivo; al contrario, si hanno **onde regressive** quando la direzione di propagazione segue il semiasse negativo. In generale, un'onda che si propaga con una determinata velocità v, la funzione può essere scritta anche come:

$$\alpha(x,\, t) = f(x - vt)$$

nel caso di onde progressive. Se l'onda fosse stata regressiva, avremmo avuto $f(x+vt)$. Per descrivere la velocità possiamo considerare la funzione a due istanti diversi t_1 e t_2; se, in questi due istanti, avremo le posizioni delle particelle $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$, allora la velocità dell'onda può essere scritta come:

$$\frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{t_2 - t_1} = v$$

Matematicamente parlando, una funzione d'onda soddisfa la seguente equazione differenziale alle derivate parziali; diamo per buono questo dato, tenendo conto che, nel corso, per valutare se si ha o meno una funzione d'onda, effettueremo questo test. L'equazione che descrive le funzioni d'onda è:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

1.2 Onde sinusoidali

Un caso interessante da studiare sono quei tipi di onde descritte da una **funzione sinusoidale**:

$$\alpha(x,\, t) = A\,\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\,(x \mp vt)\right]$$

In questa funzione A indica l'ampiezza d'onda, ovvero i valori massimi assunti dalla funzione; possiamo notare come questo parametro sia indipendente sia da x che da t, e quindi parliamo di una **onda non smorzata**. Il parametro λ si chiama lunghezza d'onda e determina il **periodo spaziale** dell'onda, ovvero la distanza tra due massimi consecutivi. Oltre al periodo spaziale, le onde posseggono anche un **periodo temporale** dato da $T = \frac{\lambda}{v}$; possiamo dimostrare come, dopo ogni periodo, l'onda si ripeta:

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left[x \mp v(t+nT)\right] = \frac{2\pi}{\lambda}\left[x \mp v(t+n\frac{\lambda}{v})\right] = \frac{2\pi}{\lambda}\left[x \mp vt + n\lambda\right] = \frac{2\pi}{\lambda}(x \mp vt) + 2\pi n$$

Vale quindi la relazione $\lambda = v\,T$. Un altro modo di scrivere la funzione di un'onda sinusoidale è:

$$\alpha(x,\,t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

In cui ω è detta pulsazione e vale:

$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{2\pi}{T}$$

Mentre φ vale $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\bar{x} + j\pi$, nei casi:

$$\begin{aligned} j = 0 \quad & \text{se } (x - vt) \\ j = 1 \quad & \text{se } (x + vt) \end{aligned}$$

A volte, però, risulta più comodo scrivere la funzione nel seguente modo:

$$\alpha(x,\,t) = A\sin(kx \mp \omega t + \varphi)$$

In questa espresso, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ viene chiamato **numero d'onda**, mentre la pulsazione $\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{2\pi}{T}$. Il fattore φ viene chiamato **fase** e dipende esclusivamente dalle condizioni iniziali del problema.

Un'onda del tipo $\alpha(x,\,t) = \frac{2\pi}{\lambda}(x \mp vt)$ è detta **armonica**. Questa, in teoria, dovrebbe continuare in un grafico all'infinito sia per il tempo che per lo spazio, ovvero $\infty \le t \le +\infty$ e $\infty \le x \le +\infty$; questo caso è quanto mai improbabile, e quindi si studia una porzione d'onda limitata, che viene chiamata treno d'onda sinusoidale. Una caratteristica delle onde armoniche è che questa seguono il principio di sovrapposizione e il teorema di Fourier.

1.2.1 Principio di sovrapposizione

Il principio di sovrapposizione afferma che se, in un mezzo elastico, si propagano più onde di funzione α_1, α_2 ... l'onda risultante è descritta da:

$$\alpha(x,\,t) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots$$

Ovvero le singole componenti si sommano solo se la perturbazione risultante non porta il mezzo a lavorare oltre il limite di elasticità. Possiamo dimostrare come la risultante soddisfi l'equazione differenziale delle onde; facciamo il caso di due contributi, valido come esempio generale:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\alpha_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2}\right) \\ \frac{\partial^2(\alpha_1+\alpha_2)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2(\alpha_1+\alpha_2)}{\partial t^2} \end{gathered}$$

Nel secondo passaggio abbiamo sommato membro a membro. Così come la somma di due contributi è una funzione d'onda, lo stesso vale quando i contributi sono in numero maggiore, sempre rispettando il limite di elasticità del mezzo.

Teorema di Fourier

Un'onda periodica di periodo T e lunghezza d'onda λ, quindi avente $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, che sia di forma qualunque, e sia $\alpha(kx \mp \omega t)$ la sua funzione, sotto opportune ipotesi può essere scritta come:

$$\begin{aligned}\alpha(kx \mp \omega t) = A_0 + &A_1 \cos(kx \mp \omega t) + B_1 \sin(kx \mp \omega t) + \\ &+ A_2 \cos(2(kx \mp \omega t)) + B_2 \sin(2(kx \mp \omega t)) + \cdots\end{aligned}$$

I coefficienti A_0, A_1, A_2 ... B_1, B_2 ... decrescono col crescere del numero d'onda k. La scrittura fornita dal teorema è anche chiamata **serie di Fourier** e lo studio di un'onda attraverso lo sviluppo di Fourier è detto **analisi armonica**. Non forniremo qui la dimostrazione del teorema.

1.3 Onde longitudinali

Come già detto, le onde longitudinali si propagano nella stessa direzione di propagazione dell'onda. Prendiamo allora, come esempio, una sbarra di materiale elastico, di sezione costante S; lungo questa si propaga una perturbazione $\alpha(x, t)$. Un elemento di sbarra, di lunghezza dx, viene sottoposto alla **forza di richiamo** $d\vec{F}$ quando è investito dalla perturbazione. Per il **secondo principio della dinamica**:

$$dF = dm\, a = \rho S dx\, a = \rho S dx\, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$$

Abbiamo scritto la massa come $dm = \rho dV$, considerando che il volume dell'elemento vale $dV = Sdx$. L'accelerazione a cui è sottoposto l'elemento è esattamente $a = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$. La forza di richiamo è espressa dalla **legge di Hooke** per materiali metallici sottoposti a compressione, con E **modulo di Young**:

$$F(x) = -ES\frac{dh}{h} = -ES\frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

La compressione si propaga lungo tutto il mezzo; scegliamo un asse orizzontale e poniamo l'elemento considerato tra le posizioni x e $x + dx$; la forza agisce in questo intervallo in versi opposti, quindi:

$$dF = F(x) - F(x + dx) = -\frac{\partial F}{\partial x}dx$$

In questa sostituiamo l'espressione ricavata dalla legge di Hooke, per poi uguagliarla a quella trovata sfruttando il secondo principio della dinamica:

$$\begin{aligned}dF = -\frac{\partial F}{\partial x}dx &= ES\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}dx \\ ES\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}dx &= \rho S dx\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} &= \frac{\rho}{E}\,\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}\end{aligned}$$

Che riconosciamo essere la funzione di un'onda, che ha velocità pari a $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Come possiamo notare, la velocità dell'onda dipende solo da caratteristiche fisiche del mezzo e non dalla perturbazione.

1.3.1 Il suono come onda longitudinale

Lo studio di una compressione che si propaga in un mezzo è strettamente legato al caso del suono, il quale, infatti, trattasi di una compressione delle particelle dell'aria che si propaga nello spazio.

Trattiamo quindi il caso di un mezzo elastico omogeneo che occupi tutto lo spazio uniformemente. Chiamato $\frac{1}{k}$ il coefficiente di compressibilità volumica del mezzo, studiamo come varia la pressione dell'aria. Dalla legge di Hooke $dF = -ES\frac{dh}{h}$ sappiamo che questa è la forza di richiamo, che genera quindi una pressione sulle superfici dello spazio:

$$\begin{aligned}
&dP = \frac{dF}{S} = -\frac{ES}{S}\frac{Sdh}{Sh} \\
&dP = -E\frac{dV}{V} \\
&\frac{dV}{V} = -\frac{1}{k}dP
\end{aligned}$$

Dove si è considerato $E = k$: il coefficiente di elasticità coincide con il coefficiente di compressibilità. Attraverso uno sviluppo identico a quello fatto per un mezzo elastico, si può giungere a ricavare la velocità dell'onda, pari a

$$v = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$$

Il caso interessante da considerare è quello dei gas. Quando un oggetto vibra, si presentano locali variazioni di pressione dP corrispondenti a locali variazioni di densità. Dalle leggi della termodinamica, sappiamo valere nei gas la relazione:

$$PV^\gamma = \text{ cost}$$

Dove γ è una costante dei gas, che vale:

$$\begin{cases} \gamma = \frac{5}{3} \text{ gas monoatomico} \\ \gamma = \frac{7}{5} \text{ gas biatomico} \end{cases}$$

Differenziando la relazione tra pressione e volume, otteniamo:

$$\begin{aligned}
&P\gamma V^{\gamma-1}dV + VdP = 0 \\
&P\gamma dV + VdP = 0 \\
&\frac{dV}{V} = -\frac{1}{\gamma P}dP
\end{aligned}$$

In questi casi, il coefficiente di compressibilità volumica vale $k = \gamma P$. La velocità di propagazione di un'onda elastica nei gas, quindi, vale:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

A volte può essere utile scriverla in funzione della temperatura e del peso molecolare del gas presente; sfruttando quindi l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$\frac{m}{M}RT = PV \Rightarrow \frac{RT}{M} = P\frac{V}{m} = \frac{P}{\rho}$$

Possiamo esprimere la **velocità** come:

$$v = \sqrt{\gamma\frac{RT}{M}}$$

Dove R è la **costante universale dei gas**, T la temperatura e M il peso molecolare del gas.

1.4 Onde trasversali

Nelle onde trasversali il moto delle particelle è ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda. Immaginiamo una corda tesa sulla quale imprimiamo una perturbazione: essa inizierà a oscillare. La velocità di propagazione dell'onda, intuitivamente, aumenta all'aumentare della tensione del filo, che rappresenta la forza di richiamo elastica.

Consideriamo una corda omogenea, di tensione $\vec{\tau}$ e densità lineare $\mu = \frac{dm}{dx}$. La massa sarà quindi $dm = \mu dx$, scelto un asse orizzontale parallelo alla corda a riposo. Studiamo un tratto compreso tra x e $x + dx$ sottoposto alla perturbazione, quindi dislocato di una quantità $y = \alpha(x, t)$ dalla posizione di riposo. La tensione del filo può essere schematizzata come $\vec{\tau}(x)$ e $\vec{\tau}(x + dx)$; in modulo le due tensioni sono uguali, ma cambiano direzione e verso:

$$\vec{f} = m\vec{a} => \tau\sin(\theta + d\theta) - \tau sin\theta = dma = \mu dx\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}$$

Gli angoli che vengono a formarsi, però, sono sempre molto piccoli se la tensione è forte; quindi possiamo approssimare a:

$$\tau(\theta + d\theta) - \tau\theta = \mu\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}dx$$
$$\tau d\theta = \mu\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}dx$$

L'angolo θ coincide con la pendenza della corda, ovvero $\theta \approx \tan\theta = \frac{\partial\alpha}{\partial x}$; per ottenere l'espressione di $d\theta$, deriviamo quella appena trovata rispetto al tempo:

$$d\theta = \frac{\partial\theta}{\partial x}dx = \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}dx$$

Lo sostituiamo nell'espressione trovata prima, ottenendo la funzione dell'onda:

$$\tau\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}dx = \mu\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}dx$$
$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} = \left(\frac{\mu}{\tau}\right)\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}$$

Da cui ricaviamo che la velocità di propagazione dell'onda è $\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$ che, come nei casi precedenti, dipende ancora una volta solo dalle caratteristiche del mezzo.

1.5 Energia e intensità d'onda

In questo modulo ci soffermeremo più attentamente sulle questioni energetiche legate alla propagazione di un'onda; in particolare, cercheremo di calcolare in maniera esplicita il valore dell'intensità dell'onda.

Quando un'onda si propaga in un mezzo, le particelle oscillano acquistando energia cinetica e potenziale. Ogni elemento del mezzo può essere ipotizzato come un oscillatore armonico forzato a oscillare attorno a una posizione fissa; ogni elemento si muove quindi seguendo la legge:

$$\alpha(x,\, t) = A\sin(kx - \omega t)$$

Abbiamo già trattato l'energia di un oscillatore armonico; essa è data da:

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

Sapendo che $\omega^2 = \frac{k}{m}$, possiamo esplicitare $k = \omega^2 m$:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

Prendiamo, allora, per esempio una sbarra di materiale elastico molto lunga. Sollecitata una perturbazione, questa si propaga lungo il mezzo, di cui ogni parte acquista energia, che viene fornita dalla sorgente fino ad arrivare al fronte del treno d'onda. Si definisce **intensità dell'onda** l'energia che fluisce nell'unità di tempo attraverso la superficie unitaria perpendicolare alla propagazione dell'onda, ovvero:

$$I = \frac{dE}{dSdt}$$

L'unità di misura nel SI è il W/m^2 (watt al metro quadro).

Sappiamo che l'onda possiede una velocità v; dE può essere anche espressa come l'energia contenuta in un volumetto di base S e altezza vdt quando questo viene investito dall'onda, quindi definita w l'energia contenuta nel volumetto, avremo:

$$dE = wdSvdt$$

Sostituiamo nella formula dell'intensità, ottenendo:

$$I = \frac{dE}{dSdt} = \frac{wdSvdt}{dSdt} = w\,v$$

Riprendiamo adesso la formula dell'energia di un oscillatore armonico; dividendola per il volume otterremo l'espressione di w in funzione della densità del mezzo e dei parametri dell'onda; la sostituiamo infine nella formula dell'intensità per ricavarne l'espressione finale.

$$\begin{aligned}
dE &= \frac{1}{2}dm\omega^2 A^2 \\
\frac{dE}{dV} &= w = \frac{1}{2}\frac{dm}{dV}\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \\
\Rightarrow I &= v\,w = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 v
\end{aligned}$$

Questo risultato è notevole: l'intensità dell'onda è direttamente proporzionale ai quadrati dell'ampiezza e della pulsazione dell'onda. L'utilità dell'intensità è quella di poter calcolare le soglie di udibilità del suono. L'orecchio umano, infatti, riesce a percepire suoni superiori a determinate intensità; per esempio, la soglia minima è:

$$I_{soglia} = 3 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \text{ per } \nu = 1000 \text{ Hz}$$

(Notiamo come la soglia vari a seconda della frequenza dell'onda). Tuttavia, si è deciso di introdurre la scala in decibel: fissata un'intensità di riferimento pari a $I_0 = 10^{-12} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$, si definisce intensità in decibel:

$$I_{db} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

Quindi la soglia sopra riportata, in decibel, è pari a $I = 4.77db$

Facciamo un'ultima considerazione sull'intensità di un'onda. Soffermiamoci sul caso di una sorgente puntiforme S che abbia potenza W costante; prendiamo due sfere concentriche C_1 e C_2 centrate in S, di raggio r_1 e r_2, le quali vengono attraversate da una certa quantità di W, che può essere definita come il prodotto tra le intensità dell'onda ai due raggi di distanza e le due superfici incontrate, ovvero:

$$W = 4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2$$

Da questa espressione ricaviamo che $I_1 = \frac{W}{4\pi r_1^2}$ e $I_2 = \frac{W}{4\pi r_2^2}$; questo risultato ci dice che l'intensità diminuisce in maniera inversamente proporzionale al quadrato della distanza dalla sorgente. Però noi sappiamo anche che l'intensità è direttamente proporzionale all'ampiezza al quadrato. Possiamo infine affermare che, in un'onda elastica, si ha:

$$A \propto \frac{1}{r}$$

2

L'interferenza e le onde stazionarie

2.1 Interferenza

In questo modulo studieremo cosa accade in un mezzo se si propagano più onde contemporaneamente.

Supponiamo che in una regione di spazio si propaghino due onde di uguale lunghezza d'onda e sfasate tra loro di un fattore δ; queste onde le chiameremo **coerenti** e, ipotizzando abbiamo la stessa ampiezza, possiamo esprimerle come:

$$\alpha_1(x,\, t) = A\sin(kx - \omega t)$$
$$\alpha_2(x,\, t) = A\sin(kx - \omega t - \delta)$$

Vedremo come il risultato delle due onde non sia intuitivo; si è portati a dire che l'ampiezza della risultante sia la somma delle due, e invece vedremo come anche essa non sia uniforme nello spazio. Innanzitutto, le due onde hanno la stessa intensità pari a:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2}A^2\rho\omega^2 v$$

Per il **principio di sovrapposizione**, possiamo scrivere il fenomeno risultante come:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx - \omega t - \delta)$$

Scritta così, non è proprio il massimo, sfruttando le **leggi di prostaferesi**, ovvero $\sin a + \sin b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$, possiamo scrivere la risultante come:

$$\alpha(x,\, t) = 2A\cos\left(\frac{kx - \omega t - kx + \omega t + \delta}{2}\right)\sin\left(\frac{kx - \omega t + kx - \omega t - \delta}{2}\right)$$

Svolgendo i calcoli, otteniamo la funzione dell'onda risultante:

$$\alpha(x,\, t) = 2A\cos\frac{\delta}{2}\sin\left(kx - \omega t - \frac{\delta}{2}\right)$$

Osserviamo che anche la risultante ha una natura ondulatoria. La lunghezza d'onda è pari a quella delle onde generatrici, ma l'ampiezza $\left|2A\cos\frac{\delta}{2}\right|$ non è la somma delle ampiezze precedenti, bensì dipende da δ. Avremo allora

- se $\cos\frac{\delta}{2} = \pm 1$, interferenza costruttiva
- se $\cos\frac{\delta}{2} = 0$, interferenza distruttiva

Ricaviamoci adesso l'intensità dell'onda risultante, ovvero:

$$I_r = \frac{1}{2}\rho\omega^2 vA^2 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 v\left(4A^2\cos^2\frac{\delta}{2}\right) = 4I\cos^2\frac{\delta}{2}$$

Come l'ampiezza, anche l'interferenza dipende da δ; come prima, si hanno **interferenza costruttive o distruttive**.

Come possiamo esprimere lo sfasamento δ? Questo si può fare sia temporalmente che spazialmente. Consideriamo l'istante $t = 0$; le due onde si esprimono:

$$\begin{aligned}
\alpha_1(x,\, 0) &= A\sin kx \\
\alpha_2(x,\, 0) &= A\sin(kx - \delta) = A\sin\left[k\left(x - \frac{\delta}{k}\right)\right]
\end{aligned}$$

Le due onde hanno la stessa ampiezza, stessa lunghezza d'onda ma sono sfasate spazialmente. Allora possiamo ragionare in termini di spazio, quindi:

- se $\frac{\delta}{k} = 0,\, 2\pi,\, 4\pi...$ le ampiezze si sommano, interferenza costruttiva
- se $\frac{\delta}{k} = \pi,\, 3\pi,\, 5\pi...$ le ampiezze si sottraggono, interferenza distruttiva

Oltre allo sfasamento spaziale, può esserci il caso del ritardo temporale; scelta una posizione $x = 0$, le due onde saranno:

$$\begin{aligned}
\alpha_1(0,\, t) &= -A\sin\omega t \\
\alpha_2(0,\, t) &= -A\sin\omega\left(t + \frac{\delta}{\omega}\right)
\end{aligned}$$

Le due onde sono ritardate di un tempo $\tau = \frac{\delta}{\omega}$. Questo vuol dire che le due onde sono coerenti e generate da due punti diversi dello spazio S_1 e S_2, e giungono con tempi diversi in due punti P_1 e P_2. Questo genera un fenomeno di interferenza: in alcune regioni dello spazio si ha un'interferenza costruttiva, in altre distruttiva. La conservazione dell'energia è mantenuta, solo che la densità di energia nello spazio non è più costante, ma varia da regione a regione.

2.1.1 Battimenti

Anche il fenomeno dei battimenti rientra nelle interferenze; questi si hanno quando i numeri d'onda delle due onde sono diversi, ma di una quantità molto piccola, ovvero:

$$\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \approx 10^{-2}$$

Possiamo scrivere le due onde come sappiamo fare e ricavarne la risultante sfruttando ancora una volta prostaferesi:

$$\begin{aligned}
\alpha_1(x,\, t) &= A\sin(k_1 x - \omega_1 t) \\
\alpha_2(x,\, t) &= A\sin(k_2 x - \omega_2 t)
\end{aligned}$$

$$\alpha(x,\,t) = 2A\cos\left[\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right)x - \left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right]\sin\left[\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)x - \left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\right]$$

Se sono soddisfatte le ipotesi del problema, ovvero che i numeri d'onda differiscano di poco, possiamo allora approssimare:

$$\omega_1 \approx \omega_2 \approx \frac{\omega_1+\omega_2}{2} = \omega$$

$$k_1 \approx k_2 \approx \frac{k_1+k_2}{2} = k$$

Quindi scriviamo l'onda risultante come:

$$\alpha(x,\,t) = 2A\cos\left[\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right)x - \left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right]\sin(kx-\omega t)$$
$$\alpha(x,\,t) = B(x,\,t)\sin(kx-\omega t)$$

L'onda $B(x,\,t)$ ha ampiezza modulata e velocità:

$$v_B = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega_1\omega_2}{k_1-k_2}$$

Ricordando che $\omega_1 = k_1 v$ e $\omega_2 = k_2 v$, allora otteniamo che:

$$v_B = \frac{k_1 v - k_2 v}{k_1-k_2} = v$$

In conclusione, nel fenomeno dei battimenti, l'onda risultante è il prodotto tra un'onda modulata e un'onda modulante, con la stessa velocità; sentiremo quindi un suono che scompare periodicamente.

2.2 Onde stazionarie

A differenza dei tipi di onde finora studiate, le onde stazionarie non si propagano nello spazio. Queste nascono dalla sovrapposizione di onde aventi stessa frequenza, stessa lunghezza d'onda e stessa ampiezza, ma si propagano in direzioni opposte. Le due onde hanno, genericamente, funzione:

$$\alpha_1(x,\,t) = A\sin(kx-\omega t)$$
$$\alpha_2(x,\,t) = A\sin(kx+\omega t)$$

L'onda risultante ha funzione quindi (utilizzando le espressioni di prostaferesi):

$$\alpha(x,\,t) = 2A\cos\omega t\,\sin kx$$

L'onda, quindi, non si propaga, ma rimane in una porzione limitata dello spazio. Un punto di generica coordinate x oscilla di moto armonico con pulsazione ω e ampiezza $2A\sin kx$. Vi saranno anche punti fermi che non oscillano, quelli per i quali $\sin kx = 0$, ovvero quando:

$$kx = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = n\frac{\lambda}{2}$$

Con n numero intero. Questi punti si troveranno, quindi, a multipli interi di metà lunghezza d'onda, e vengono chiamati nodi dell'onda stazionaria. Così come questi punti non oscillano, altri punti oscilleranno di ampiezza massima; per questi vale $sinkx = 1$, quindi:

$$kx = \frac{2n+1}{2}\pi \Rightarrow x = \frac{(2n+1)\frac{\pi}{2}}{\frac{2\pi}{\lambda}} = n\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$$

Questi punti vengono invece chiamata **ventri dell'onda stazionaria**.

In un'onda stazionaria, quindi, ogni punto oscilla con pulsazione $\omega = kv = \frac{2\pi v}{\lambda}$, e avranno frequenza pari a $nu = \frac{v}{\lambda}$.

Un esempio classico di onda stazionaria è una corda vibrante, i cui estremi sono fissati, come le corde di uno strumento musicale; la lunghezza L della corda sarà tale che $L = n\frac{\lambda}{2}$, ovvero conterrà un numero intero di mezze lunghezze d'onda. Quando è presente un solo ventre, avremo che $L = \frac{\lambda}{2}$, e la corda si trova alla sua armonica fondamentale; per $n > 2$, si dice che la corda si trova alle armoniche superiori.

Quando una corda vibra, il contributo maggiore alla vibrazione è dato dalla sua **armonica fondamentale**, mentre le **armoniche superiori** contribuiscono in minor modo. Il mescolamento dei vari modi di vibrazione, chiamati **modi normali**, definisce il **timbro** di uno strumento musicale.

Come abbiamo visto, la lunghezza d'onda di un'onda stazionaria è determinata da vincoli geometrici. La frequenza del suono generato da una corda oscillante, tuttavia, dipende dalla velocità di propagazione dell'onda che, come abbiamo visto meglio trattando le onde trasversali, vale

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

Da cui deriva che la frequenza del suono generato da una corda vibrante è:

$$\nu = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

Dove λ è la lunghezza d'onda dell'onda, mentre τ e μ sono caratteristiche fisiche della corda vibrante.

A

Formulario

A.1 Onde meccaniche

Funzione generale di un'onda meccanica:

$$\alpha(x,\, t)$$

Equazione differenziali alle coordinate parziali che ogni funzione d'onda soddisfa:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

A.2 Onde sinusoidali

Funzione generale di un'onda sinusoidale:

$$\alpha(x,\, t) = A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x \mp vt)\right]$$

Lunghezza d'onda: $\lambda = vT$
Altri modi per scrivere le onde sinusoidali:

$$\alpha(x,\, t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\alpha(x,\, t) = A\sin(kx \mp \omega t + \varphi)$$

Con numero d'onda $K = \frac{2\pi}{\lambda}$, pulsazione $\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{2\pi}{T}$

A.2.1 Principio di sovrapposizione

La risultante di più onde che si propagano nello stesso mezzo è:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots$$

A.3 Onde longitudinali

Equazione differenziale delle onde longitudinali:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$$

Con $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$
In un mezzo omogeneo che riempie uniformemente lo spazio (aria o gas):

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{k} dP$$

Con velocità: $v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$, oppure, in funzione dei parametri del gas: $v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$

A.4 Onde trasversali

Equazione differenziale delle onde trasversali:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = \frac{\mu}{\tau} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$$

Con velocità: $v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$

A.5 Intensità e energia

L'intensità definita come:

$$I = \frac{dE}{dSdt}$$

Esprimibile in funzione dei parametri dell'onda

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$$

Intensità di riferimento per la scala in decibel $I_0 = 10^{-12} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$; intensità in decibel:

$$I_{db} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

Proporzionalità tra ampiezza dell'onda e distanza: $A \propto \frac{1}{r}$

A.6 Interferenza

Risultante di due onde che si propagano nello stesso mezzo con stesso lunghezza d'onda, stessa pulsazione e stessa ampiezza:

$$\alpha(x,\, t) = 2A \cos \frac{\delta}{2} \sin \left(kx - \omega t - \frac{\delta}{2} \right)$$

Intensità dell'onda risultante:

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 v \, 4A^2 \cos^2 \frac{\delta}{2} = 4I \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

A.6.1 Battimenti

Risultante di un battimento:

$$\alpha(x,\, t) = 2A \cos\left[\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right) x - \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) t\right] \sin(kx - \omega t) = B(x,\, t) \sin(kx - \omega t)$$

A.7 Onde stazionarie

Espressione generale di un'onda stazionaria:

$$\alpha(x,\, t) = 2A \cos \omega t \, \sin kx$$

Posizione dei nodi: $x_N = n\frac{\lambda}{2}$ e dei ventri: $x_V = n\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$

Frequenza del suono generato da una corda vibrante:

$$\nu = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

Crediti

Fonti dei testi

- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Onde_meccaniche_elastiche/Onde_meccaniche&oldid=442694
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Onde_meccaniche_elastiche/Onde_sinusoidali&oldid=442693
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Onde_meccaniche_elastiche/Onde_longitudinali&oldid=442700
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Onde_meccaniche_elastiche/Onde_trasversali&oldid=442701
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Onde_meccaniche_elastiche/Energia_e_intensit%C3%A0_d%27onda&oldid=442702
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Onde_meccaniche_elastiche/Interferenza&oldid=442710
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Onde_meccaniche_elastiche/Onde_stazionarie&oldid=442704
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Onde_meccaniche_elastiche/Formulario&oldid=442706