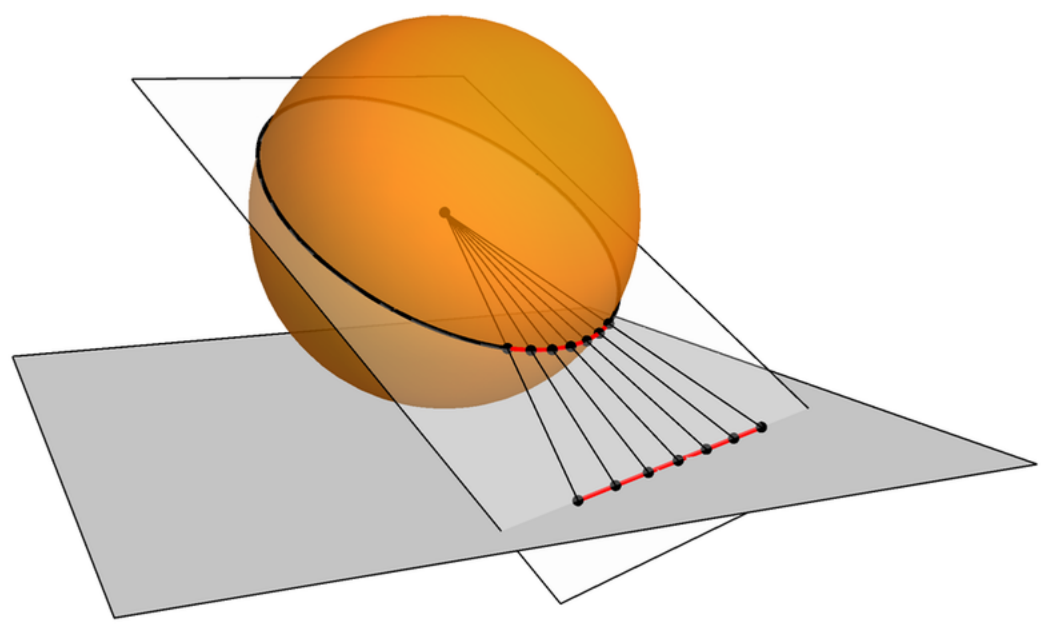
Wikibooks
Libri liberi per un mondo aperto

Alfonso Sommacal • The Doc

MECCANICA RAZIONALE



Alfonso Sommacal - The Doc

Meccanica razionale

it.wikibooks.org
2021

Questo testo proviene dal sito
https://it.wikibooks.org/wiki/Meccanica_razionale
ed è stato scritto collettivamente dagli utenti di tale sito

Principali autori:
Alfonso Sommacal, The Doc

Questa versione del libro è aggiornata al
26 settembre 2021

In copertina:
Gnomonic projection. *Autore:* Marozols; *licenze:* CC BY-SA 3.0; *fonte:*
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gnomonic.png;

Wikibooks non dà garanzie sulla validità dei suoi contenuti. Per i dettagli vedi:
https://it.wikibooks.org/wiki/Wikibooks:General_disclaimer

Quest'opera è soggetta alla licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo 3.0 Unported. Per leggere una copia della licenza visita il sito:
https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.it

GFDL (2021)
Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

Indice

Lo sviluppo deduttivo con procedimenti matematici della meccanica si è evoluto in quel corpo della meccanica noto come meccanica razionale.

Quanto segue sono delle note volte a fornire alcune minime nozioni, peraltro sufficienti, a tutti coloro che la curiosità stimola alla conoscenza e note di richiamo per quanti ne abbiano necessità.

1

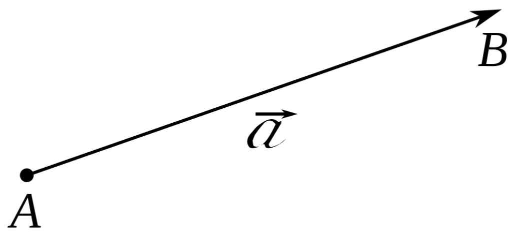
Richiami di calcolo vettoriale

1.1 Definizione di vettore

Un vettore è una grandezza definita dalle seguenti entità:

- modulo
- direzione
- verso

Consideriamo la figura 1: diremo che il modulo è rappresentato dalla distanza AB, la direzione è individuata dalla direzione della retta passante per A, B ed il verso è quello che va da A verso B.



1.1.1 Rappresentazione cartesiana

Scelta a piacere una terna cartesiana ortogonale (O, x, y, z) chiameremo componenti del vettore:

$$\vec{v}(AB)$$

lungo x, y, z le seguenti quantità:

$$\begin{vmatrix} v_x = x_B - x_A \\ v_y = y_B - y_A \\ v_z = z_B - z_A \end{vmatrix}$$

Il modulo di questo vettore è dato dalla seguente quantità:

$$|\vec{v}| = \overline{AB} = \sqrt[2]{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

L'orientamento del vettore, cioè direzione e verso, rimane completamente individuato dai coseni direttori:

$$\alpha = \frac{v_x}{\sqrt[2]{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$
$$\beta = \frac{v_y}{\sqrt[2]{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$
$$\gamma = \frac{v_z}{\sqrt[2]{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

1.1.2 Vettori unitari

Chiamasi vettore unitario o *versore*, il vettore avente modulo $|\vec{v}| = 1$, e poiché:

$$v_x = |\vec{v}|\alpha \qquad v_y = |\vec{v}|\beta \qquad v_z = |\vec{v}|\gamma$$

si vede che le componenti del vettore unitario sono i coseni direttori stessi.

Definiamo come i tre vettori unitari fondamentali, i tre vettori unitari che hanno l'orientamento dei tre assi cartesiani x, y, z e li individuiamo rispettivamente in $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

1.2 Operazioni sui vettori

1.2.1 Somma

Dati n vettori e scelto ad arbitrio il punto O costruiamo la poligonale (in generale, sghemba), $OE_1E_2....E_n$ con la condizione che E_1 sia l'estremo del vettore $\vec{v}_1$ applicato in O, E_2 l'estremo del vettore $\vec{v}_2$ applicato in E_1, allora chiameremo risultato o somma dei $\vec{v}_1, \vec{v}_2...\vec{v}_n$ il vettore $O\vec{E}_n \equiv \vec{R}$

Nella rappresentazione cartesiana si ottiene:

$$R_x = \sum v_x$$
$$R_y = \sum v_y$$
$$R_z = \sum v_z$$

1.2.2 Prodotto scalare

Si definisce come prodotto scalare fra due vettori $\vec{v}, \vec{w}$ la quantità scalare:

$$|\vec{v}| \times |\vec{w}| \cos(\vec{v}, \vec{w})$$

Nella rappresentazione cartesiana $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ e $\vec{w}(w_x, w_y, w_z)$:

$$\vec{v} \times \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$

e ricordando che i coseni direttori sono:

$$\alpha_1 = \frac{v_x}{\sqrt[2]{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \qquad \alpha_2 = \frac{w_x}{\sqrt[2]{w_x^2 + w_y^2 + wz^2}}$$
$$\beta_1 = \frac{v_y}{\sqrt[2]{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \qquad \beta_2 = \frac{w_y}{\sqrt[2]{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}}$$
$$\gamma_1 = \frac{v_z}{\sqrt[2]{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \qquad \gamma_2 = \frac{w_z}{\sqrt[2]{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}}$$

per cui:

$$\vec{v} \times \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}|(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2)$$

Il polinomio $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2$ è, il coseno dell'angolo fra le direzioni di $\vec{v}$ e $\vec{w}$; da questo è quindi facile vedere che se $\vec{v} \perp \vec{w}$ il prodotto scalare $\vec{v} \times \vec{w} = 0$ in quanto $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$

1.2.3 Prodotto vettoriale

Per quanto abbiamo detto precedentemente se $v_x,\ v_y,\ v_z$ sono le componenti di $\vec{v}$, e $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sono i vettori fondamentali unitari, possiamo scrivere:

$$\vec{v} = \ v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_k\vec{k}$$

Premesso ciò, si definisce *prodotto vettoriale* o *vettore*, fra due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$, il vettore definito nella seguente maniera:

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}| \sin(\vec{v}, \vec{w}) \cdot \vec{n}$$

Il versore $\vec{n}$ determina la direzione del prodotto vettoriale, normale al piano formato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

1.2.4 Prodotto misto e prodotto vettoriale doppio

Si definisce prodotto misto dati tre vettori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \wedge \vec{d})$$

che è una quantità scalare. Il prodotto misto si annulla se $\vec{a}$ è parallelo a $\vec{b}$ o a $\vec{d}$.

$$\vec{a} \times (\vec{b} \wedge \vec{d}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ d_x & d_y & d_z \end{vmatrix}$$

Valgono le seguenti proprietà commutatrici:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \wedge \vec{d}) = \vec{b} \times (\vec{d} \wedge \vec{a}) = \vec{d} \times (\vec{a} \wedge \vec{b})$$

Si definisce il prodotto vettoriale doppio il vettore:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{d}) = (\vec{d} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} - (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{d}$$

Infatti $\vec{d} \times \vec{a}$ e $\vec{b} \times \vec{a}$ sono numeri che moltiplicati rispettivamente per i vettori $\vec{b}$ e$\vec{d}$ danno dei vettori.

In coordinate cartesiane si può scrivere sinteticamente:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ d_y & d_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ d_z & d_x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ d_x & d_y \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

1.2.5 Prodotto vettore dei vettori unitari fondamentali

Si ottengono le seguenti formule:

$$\begin{cases} \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \\ \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \end{cases}$$

1.3 Vettori applicati

Si chiama vettore applicato, un qualsiasi vettore $\vec{v}$ applicato in un determinato punto A dello spazio.

Chiamasi coppia l'insieme di due vettori aventi modulo uguale e rette di applicazione parallele a versi opposti. La distanza d fra le due rette è chiamata braccio della coppia.

Momento di un vettore rispetto ad un punto.

Il momento di un vettore applicato rispetto ad un punto è il vettore definito nella seguente maniera. Se B è il punto rispetto al quale si vuole calcolare il momento, dicesi momento di $(A, \vec{v})$ rispetto a B il vettore che ha per modulo:

$$|m_b| = AB \times |\vec{v}|\ sin\theta$$

e direzione normale al piano $\vec{BA}$ e $\vec{v}$. Il verso è definito quello di un osservatore che giacente lungo la normale al piano di $\vec{BA}$ e $\vec{v}$ vede $\vec{BA}$ andare verso $\vec{v}$ con senso indicato dalla regola della mano destra.

1.4 Differenziazione ed integrazione di vettori

1.4.1 Differenziazione

Una funzione vettoriale di una o più variabili scalari è generalmente chiamata ***campo vettoriale***. La derivata di una funzione vettoriale $\vec{F}$ di una sola variabile t è definita da:

$$\frac{d\vec{F}(t)}{dt} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\vec{F}(t + \Delta t) - \vec{F}(t)}{\Delta t} = \lim \frac{\Delta \vec{F}(t)}{dt}$$

Ora durante l'incremento $\Delta(t)$ il vettore $\vec{F}$ può cambiare semplicemente in direzione, restando il suo modulo inalterato. Ed allora avremo:

$$\vec{F} \times \Delta \vec{F} = \vec{F} \times d\vec{F} = 0.$$

Ovvero può variare il modulo, rimanendo la direzione inalterata. E questo può essere espresso sinteticamente da:

$$\vec{F} \wedge d\vec{F} = 0$$

1.4.2 Regole di differenziazione

$$d(\vec{A} + \vec{B}) = d\vec{A} + d\vec{B}$$
$$d(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times d\vec{B} + \vec{B} \times d\vec{A}$$
$$d(\vec{A} \wedge \vec{B}) = d\vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge d\vec{B} = \vec{A} \wedge d\vec{B} - \vec{B} \wedge d\vec{A}$$

1.4.3 Operatori differenziali

Vogliamo ricordare brevemente i principali operatori differenziali che si usano nei vari campi della Meccanica.

Si definisce l'operatore differenziale ∇ il vettore:

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

mentre l'operatore differenziale "Laplaciano" definito da:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

è uno scalare.

Se $V(P)$ e una funzione scalare dei punti dello spazio $V(x, y, z)$ si chiama gradiente di V o *grad* V il vettore:

$$\vec{\nabla}\ V = \vec{i}\ \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j}\ \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k}\ \frac{\partial V}{\partial z}$$

Se $\vec{A}$ è una funzione vettoriale con componenti $A_x,\ A_y,\ A_z$ si chiama ***divergenza di*** $\vec{A}$ la quantità scalare:

$$div\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Sempre nel caso che $\vec{A}$ sia una funzione vettoriale di componenti $A_x,\ A_y,\ A_z$ si chiama ***rotore di*** $\vec{A}$ il vettore definito da:

$$rot\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i}(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}) + \vec{j}(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}) + \vec{k}(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})$$

N.B. Notare la differenza tra **operatori vettoriali** (aventi le componenti moltiplicate dai versori) e gli **operatori scalari** (privi di un versore associato)

2

Cinematica

2.1 Cinematica del punto

Il moto di P è noto rispetto alla terna O_{xyz} tutte le volte che sono date le sue coordinate x,y,z, come funzioni dell'ascissa temporale t:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

In forma vettoriale potremo dire che le precedenti equazioni si possono riassumere nell'unica

$$\vec{OP} = \vec{OP}(t)$$

Consideriamo il caso che il punto **P** si muova su di una traettoria assegnata **l**, e scelto un sistema di ascissa curvilinea **s**, diremo che il moto del punto dal punto **P** è completamente definito quando diamo le

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases}$$

e la legge oraria

$$S = S(t)$$

Il sistema (2) e (3) è completamente equivalente alle (1). Le equazioni (2) dipendono esclusivamente da come è fatta la traiettoria, mentre la (3) esprime unicamente la legge oraria di 'P' lungo la 'l', cioè in qual maniera nel tempo 'P' percorre gli spazi sulla 'l'.

2.1.1 Velocità scalare

Se è nota la legge oraria *s=s(t)* si definisce come velocità scalare la derivata:

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s}(t)$$

Si dice che il moto di P è uniforme lungo la traettoria definita dalle (1) quando:

$$\dot{s}(t) = cost$$

2.1.2 Velocità vettoriale

Supponendo che la traiettorie di P sia data mediante le equazioni (2) e (3), sono noti i coseni direttori della tangente alla curva nel punto P mediante le seguenti formule:

$$\begin{cases} T_x = \frac{\frac{dx}{ds}}{\sqrt{(\frac{dx}{ds})^2+(\frac{dy}{ds})^2+(\frac{dz}{ds})^2}} = \frac{dx}{ds} \\ T_y = \frac{dy}{ds} \\ T_z = \frac{dz}{ds} \end{cases}$$

Definiamo quindi il vettore unitario della tangente il vettore:

$$\vec{T} = \vec{i}T_x + \vec{j}T_y + \vec{z}T_z$$

Si chiama quindi velocità vettoriale la quantità

$$\vec{v} = \dot{s}(t) \cdot \vec{T}$$

che deriva direttamente dalla derivazione rispetto al tempo delle (2), tenendo conto della (4).

2.1.3 Accelerazione

Si definisce per accelerazione del punto P la derivata rispetto al tempo della velocità vettoriale:

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{d}{dt}\bar{\mathbf{v}(t)} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\bar{\mathbf{T}})$$

Eseguendo la derivazione abbiamo:

$$\bar{\mathbf{a}} = \ddot{s}\bar{\mathbf{T}} + \dot{s}\frac{d}{dt}\bar{\mathbf{T}}$$

e ricordando che:

$$\bar{\mathbf{T}} = \frac{d}{ds}x(s)\hat{\mathbf{i}} + \frac{d}{ds}y(s)\hat{\mathbf{j}} + \frac{d}{ds}z(s)\hat{\mathbf{k}}$$

e derivando rispetto a t:

$$\frac{d}{dt}\bar{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{i}}\frac{d^2}{ds^2}x(s)\frac{d}{dt}s(t) + \hat{\mathbf{j}}\frac{d^2}{ds^2}y(s)\frac{d}{dt}s(t) + \hat{\mathbf{k}}\frac{d^2}{ds^2}z(s)\frac{d}{dt}s(t)$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\mathbf{T}} = \dot{s}(\hat{\mathbf{i}}\frac{d^2}{ds^2}x(s) + \hat{\mathbf{j}}\frac{d^2}{ds^2}y(s) + \hat{\mathbf{k}}\frac{d^2}{ds^2}z(s))$$

Il vettore

$$\hat{\mathbf{i}}\frac{d^2}{ds^2}x(s) + \hat{\mathbf{j}}\frac{d^2}{ds^2}y(s) + \hat{\mathbf{k}}\frac{d^2}{ds^2}z(s)$$

è un vettore che ha per coseni direttori quelli della normale principale alla curva nel punto P e modulo:

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{d^2}{ds^2}x(s)\right)^2 + \left(\frac{d^2}{ds^2}y(s)\right)^2 + \left(\frac{d^2}{ds^2}z(s)\right)^2}$$

che è, come noto, la curvatura della curva nel punto P. Per cui in definitiva si ottiene per l'accelerazione vettoriale:

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{N}$$

Il termine $\ddot{s}\vec{T}$ è l'accelerazione tengenziale, mentre il termine $\frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{N}$ è l'accelerazione normale o centripeta in quanto diretta sempre secondo la normale principale alla curva traiettoria sul punto considerato.

Si chiama moto uniforme quello per cui $\dot{s}(t) = cost.$ e quindi $\ddot{s}(t) = 0$, e di conseguenza l'unica accelerazione presente è quella normale.

I moti rettilinei uniformi sono quelli caratterizzati da

$$\ddot{s} = 0\rho = inf$$

per cui $\vec{a} = 0$.

2.2 Cinematica dei sistemi rigidi

Si dice, che il moto di di S è un moto rigido quando risulta indipendente, dal tempo **t**, ciascuna delle distanze mutue dei punti di S, presi a due a due in tutti i modi possibili.

2.2.1 Moto di traslazione

Chiameremo con S_1 e S_2 due diverse posizioni di uno stesso sistema rigido nello spazio; esse sono due figure congruenti e la loro sovrapposizione avverrà quando tre punti della S_1, non giacenti in una medesima retta verranno a coincidere coi loro corrispondenti della S_2.

Se A_1 e A_2 sono due punti corrispondenti , il vettore $\mathbf{A_1\bar{}A_2}$ dicesi lo spostamento del punto A_1. Se:

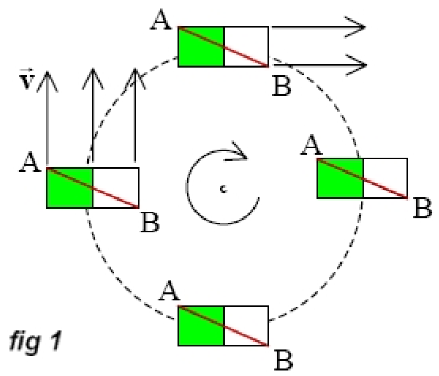
$$\mathbf{A_1\bar{}A_2} = \mathbf{B_1\bar{}B_2} = ... = \mathbf{N_1\bar{}N_2} = \mathbf{\bar{a}}$$

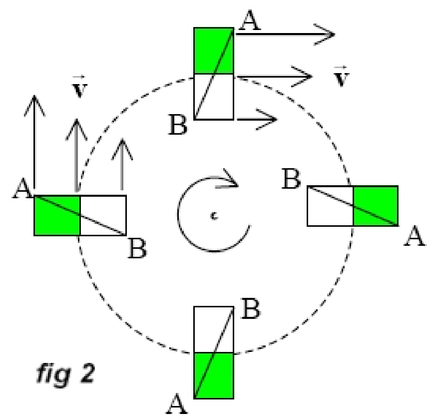
cioè se tutti i vettori spostamenti dei vari punti sono uguali, si dice allora che la posizione S_2 è dedotta da S_1 mediante una traslazione semplice di vettore $\vec{a}$.Se questa proprietà vale per tutte le posizioni intermedie fra S_1 S_2 , vicine quanto si vuole, il moto si chiama allora di traslazione semplice continua. In tal caso se **A** e **B** sono due punti di S_1 ed **A**' e **B**' sono i loro corrispondenti in una qualunque posizione intermedia fra S_1 e S_2, poiché

$$A\vec{A'} = B\vec{B'}$$

e poiché **A** e **B** possono assumersi vicini quanto si vuole, si conclude che la velocità di **A** è eguale a quella di **B** istante per istante. Cioè tutti i punti di S_1 descrivono curve parallele ed hanno in ogni istante la stessa velocità. Se la velocità è costante nel tempo si ha una traslazione rettilinea uniforme.

Si Consideri il caso limite di moto rigido puramente traslatorio su traiettoria circolare (fig.1), presi due punti qualsiasi A e B sul corpo rigido, notiamo come la retta che li unisce si mantenga sempre parallela a se stessa. Contrariamente in (fig.2) si vede il corpo essere dotato di moto rotatorio attorno al suo asse e tutti i punti (Elementi) che lo compongono si muovono su circonferenze concentriche.





2.2.2 Moto rotatorio

Supponiamo ora che le due figure componenti S_1 e S_2 abbiano in comune due punti e quindi tutti i punti comuni della congiungente che diremo asse.

Consideriamo ore un punto P_1 di S_1 non appartenente all'asse, e sia P_2 il suo corrispondente in S_2. Mandiamo dal punto P_1 la normale OP_1 all'asse, e conduciamo anche la OP_2, la OP_2 risulterà, essendo P_2 corrispondente di P_1, normale all'asse ed $OS_2 = OS_1$.

Allora facendo descrivere a P_1 l'arco di cerchio P_1P_2, la figura S_1 si sovrapporrà ad S_2, in quanto hanno tre punti comuni non allineati, mediante un movimento che si chiamerà di rotazione semplice. L'angolo θ di cui ha ruotato il piano α_1 formato da P_1 e l'asse, per andare a coincidere con il piano α_2 formato da P_2 e l'asse, chiamasi ampiezza della rotazione.

2.2.3 Definizione di velocità angolare

Preso un piano di riferimento fisso passante per l'asse di rotazione, e se θ è l'angolo che un piano mobile, passante per l'asse, forma con questo piano fisso, si definisce velocità angolare scalare il termine:

$$\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\theta(t) = \omega$$

Nel caso che

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta(t) = \ddot{\theta} = 0$$

si dice che il moto è di rotazione uniforme.

2.2.4 Velocità angolare vettoriale

Si chiama vettore velocità angolare, il vettore $\vec{\Omega}$ che ha per modulo ω, direzione parallela all'asse di rotazione e verso positivo quello anti orario.

Velocità di un punto **P** in un moto rotatorio.

Se **O** è un punto qualsiasi dell'asse e **P** è il punto di cui si vuol conoscere la velocità, questa è data:

$$\vec{v_p} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OP}$$

2.2.5 Moto elicoidale

Il moto rigido costituito da una rotazione del corpo con velocità $\vec{\Omega}$ intorno ad un asse, e da una traslazione lungo questo asse di ampiezza $\vec{a}$, si chiama moto rigido elicoidale. Le traiettorie dei vari punti **S** sono tutte eliche dello stesso passo. Questo è il moto che in genere descrive una vite.

2.2.6 Formule fondamentali di Cinematica dei corpi rigidi

Se **P** e **O** sono due punti qualunque di un sistema rigido in movimento, e chiamiamo con $\vec{v_p}$ e $\vec{v_0}$ le loro velocità ad un certo istante t. Si dimostra che:

$$\vec{v_p} = \vec{v_0} + \vec{\Omega} \wedge \vec{OP}$$

Preso in **O** un sistema di riferimento solidale con **S**, **O**xyz, e scelto un sistema fisso di riferimento $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$,, $\boldsymbol{\zeta}$, e se $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ sono i vettori unitari degli assi mobili **x**, **y**, **z** del corpo rigido abbiamo che

$$\vec{OP} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

Per cui la velocità di **P**, $\vec{v_p}$, è uguale a $\frac{d}{dt}\vec{O_1P}$, mentre quella di **O**, $\vec{v_0}$, è data da $\frac{d}{dt}\vec{O_1O}$. Posto ciò abbiamo che:

$$\frac{d}{dt}\vec{OP} = \frac{d}{dt}\vec{O_1P} - \frac{d}{dt}\vec{O_1O} = \vec{v_p} - \vec{v_0}$$

Se deriviamo la (7) rispetto al tempo otteniamo di conseguenza:

$$\vec{v_p} = \vec{v_0} + \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}} + x\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{i}} + y\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{j}} + z\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{k}}$$

Essendo **P** un punto collegato rigidamente al corpo abbiamo che $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$. La (8) si riduce allora a:

$$\vec{v_p} = \vec{v_0} + x\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{i}} + y\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{j}} + z\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{k}}$$

Vogliamo ora dimostrare che:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{i}} = \vec{\Omega} \wedge \hat{\mathbf{i}} \\ \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{j}} = \vec{\Omega} \wedge \hat{\mathbf{j}} \\ \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{k}} = \vec{\Omega} \wedge \hat{\mathbf{k}} \end{cases}$$

Per dimostrare ciò ricordiamo ora alcune proprietà dei vettori unitari:

Prodotto vettoriale	Prodotto
$\hat{\mathbf{i}} \wedge \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \wedge \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \wedge \hat{\mathbf{k}} = 0$	$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 1$
$\hat{\mathbf{i}} \wedge \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{j}} \wedge \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{k}}$	$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = 0$
$\hat{\mathbf{j}} \wedge \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{k}} \wedge \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}}$	$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0$

Inoltre possiamo scrivere:

$$\frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}}) = \hat{\mathbf{i}} \times \frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} + \frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} \times \hat{\mathbf{i}} = 2(\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} \times \hat{\mathbf{i}}) = 0$$
$$\frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}) = \frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} \times \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{i}} \times \frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} = 0$$
$$\frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}}) = \frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} \times \hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{j}} \times \frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt} = 0$$

$\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} \times \hat{\mathbf{i}} = 0$
$\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}} \times \frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt}$
$\frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}} \times \frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt}$

Il vettore $\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt}$ potrà essere espresso in generale come:

$$\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} = a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}} + c\hat{\mathbf{k}}$$

Se moltiplichiamo scalarmente la (14) rispettivamente per $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ otteniamo:

$$\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} \times \hat{\mathbf{i}} = a\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} + c\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = a = 0$$
$$\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} \times \hat{\mathbf{j}} = a\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} + b\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} + c\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = b$$
$$\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} \times \hat{\mathbf{k}} = a\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} + b\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} + c\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = c$$

Si ottiene

$$\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} = (\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} \times \hat{\mathbf{j}}) \cdot \hat{\mathbf{j}} + (\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} \times \hat{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\mathbf{k}}$$
$$= (\frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} \times \hat{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\mathbf{i}} \wedge \hat{\mathbf{i}} + (\frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt} \times \hat{\mathbf{i}}) \cdot \hat{\mathbf{j}} \wedge \hat{\mathbf{i}} + (\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} \times j) \cdot \hat{\mathbf{k}} \wedge i$$

E se definiamo:

$$\vec{\Omega} = (\frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} \times \hat{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\mathbf{i}} + (\frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt} \times \hat{\mathbf{i}}) \cdot \hat{\mathbf{j}} + (\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} \times \hat{\mathbf{j}}) \cdot \hat{\mathbf{k}}$$

otteniamo le (10):

$$\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \hat{\mathbf{i}}$$

ed analoghe.

2.2.7 Accelerazione di un punto di un corpo rigido

Abbiamo precedentemente visto che la velocità di un punto **P** appartenente ad un corpo rigido è data da:

$$\vec{v_p} = \vec{v_0} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{OP})$$

Essendo **0** la velocità di un punto del corpo rigido assunto come origine degli assi mobili ed $\vec{\Omega}$ il vettore velocità angolare del corpo rigido. Ovviamente per ottenere l'accelerazione di **P** bisogna derivare vettorialmente la (13) rispetto al tempo:

$$\frac{d}{dt}\vec{v_p} = \frac{d}{dt}\vec{v_0} + \vec{\Omega} \wedge \frac{d}{dt}(\vec{OP}) + \frac{d}{dt}\vec{\Omega} \wedge (\vec{OP})$$

Cioè:

$$\vec{a_p} = \vec{a_0} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge (\vec{OP}) + \frac{d}{dt}\vec{\Omega} \wedge (\vec{OP})$$

In quanto per le (13) si ha:

$$\frac{d}{dt}(\vec{OP}) = \vec{v_p} - \vec{V_0} = \vec{\Omega} \wedge (\vec{OP})$$

E ricordando le formule del prodotto vettoriale doppio si ottiene:

$$\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge (\vec{OP})) = (\vec{\Omega} \times (\vec{OP})) \cdot \vec{\Omega} - (\vec{\Omega} \times \vec{\Omega}) \cdot (\vec{OP})$$

Le espressioni cartesiane delle componenti di $\vec{a_p}$ rispetto agli assi mobili **x**, **y**, **z** sono date da:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \dot{u_0} + (px + qy + rz)p - (p^2 + q^2 + r^2)x + (\dot{q}z - \dot{z}y) \\
\ddot{y} &= \dot{v_0} + (px + qy + rz)q - (p^2 + q^2 + r^2)y + (\dot{z}x - \dot{p}z) \\
\ddot{z} &= \dot{w_o} + (px + qy + rz)r - (p^2 + q^2 + r^2)z + (\dot{p}y - \dot{q}x)
\end{aligned}$$

Essendo $p,\ q,\ r$ le componenti di $\vec{\Omega}$ rispetto agli assi mobili $x,\ y,\ z$ e $u_o,\ v_o,\ w_o$ le componenti di $\vec{v_o}$ in definitiva avremo

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \dot{u_o} - (q^2 + r^2)x + (qy - rz)p + (\dot{q}z - \dot{z}y) \\
\ddot{y} &= \dot{v_o} - (p^2 + r^2)y + (px - rz)q + (\dot{r}x - \dot{p}z) \\
\ddot{z} &= \dot{w_o} - (p^2 + q^2)z + (px + qy)r + (\dot{p}y - \dot{q}x)
\end{aligned}$$

2.2.8 Velocità

Se **P** è un punto di un corpo rigido e se x,y e z sono le coordinate di questo punto rispetto agli assi **O x y z** solidali con il corpo, le componenti della velocità assoluta di **P** sugli assi mobili $x_m\ y_m\ z_m$ sono date proiettando la formula fondamentale:

$$\vec{v_p} = \vec{v_o} \wedge (\vec{OP})$$

sugli assi $x,\ y,\ z$.

Chiamando con $u_o,\ v_o,\ w_o$ le componenti della velocità assoluta di O (traslazione) in tre assi $x,\ y,\ z$ (mobili), e con $p,\ q,\ r$ le componenti del vettore velocità angolare $\vec{\Omega}$ in tre assi mobili otteniamo:

$$\dot{x} = u = u_o + (qz - zy)$$
$$\dot{y} = v = v_o + (rx - pz)$$
$$\dot{z} = w = w_o + (py - qz)$$

I valori $u_o,\ v_o,\ w_o,\ p,\ q,\ r$, si chiamano i sei parametri del moto rigido.

2.3 Cinematica del punto nel moto relativo

2.3.1 Teorema di Coriolis

Consideriamo un punto P in moto nello spazio, e supponiamo che il moto del punto sia individuato dalla conoscenza delle:

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$

rispetto ad una terna mobile di moto più generale (traslazione e rotazione).

Il problema che ora ci proponiamo è quello di determinare le velocità e le accelerazioni del punto P rispetto ad un sistema di assi fissi dalla conoscenza delle velocità e delle accelerazioni rispetto agli assi mobili. La risoluzione di questo problema richiede quindi la conoscenza delle seguenti grandezze:

1. Parametri del moto della terna mobile.
2. Parametri del moto del punto P rispetto alla terna mobile.

2.3.2 Velocità assoluta

O_m,x,y,z è il sistema di assi mobilii ed il suo moto è individuato dalle componenti u_o, v_o, w_o della velocità di traslazione V_o del punto O_m rispetto agli assi fissi, e dal vettore rotazione $\bar{\mathbf{\Omega}}$ diretto come l'asse istantaneo di rotazione e definito dalle sue tre componenti **p**, **q**, **r** rispetto agli assi mobili.

Se O_f è l'origine degli assi fissi avremo:

$$O_f\vec{P} = O_f\vec{O}_m + O_m\vec{P}$$

La velocità assoluta è data da:

$$\frac{d(O_f\vec{P})}{dt} = \frac{d(O_f\vec{O}_m)}{dt} + \frac{d}{dt}(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}) = \frac{dO_f\vec{O}_m}{dt} + x\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} + y\frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} + z\frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt} + \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{V_a} = \vec{V_o} + \vec{\Omega} \wedge \vec{OP} + \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}$$

Il termine

$$\vec{V_r} = \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}$$

di quest'ultima equazione rappresenta la velocità del punto **P** qualora la terna $O_m xyz$ fosse fissa, cioè rappresenta la velocità di **P** relativa alla terna mobile ed è quindi chiamata velocità relativa.

Mentre il termine:

$$\vec{V_t} = \vec{V_o} + \vec{\Omega} \wedge \vec{OP}$$

rappresenta la velocità del punto **P** come se fosse rigidamente collegato con la terna mobile. Questo termine è noto come velocita di trascinamento $\vec{V_t}$. Concludendo possiamo dire che la velocità assoluta è data:

$$\vec{V_a} = \vec{V_t} + \vec{V_r}$$

2.3.3 Accelerazione assoluta

La derivata rispetto al tempo della formula precedente rappresenta ovviamente l'accelerazione assoluta. Pertanto:

$$\begin{aligned}\vec{a_a} &= \frac{d\vec{V_o}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{OP}}{dt} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{OP} + \dot{x}\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} + \dot{y}\frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} + \dot{z}\frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt} + \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}} \\ &= \frac{d\vec{V_o}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge [(\dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}) + (x\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} + y\frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} + z\frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt})] + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{OP} + \dot{x}\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} + \dot{y}\frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} + \\ &+ \dot{z}\frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt} + \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

Sviluppando otteniamo tre termini:

$$(1)[\frac{d\vec{V_o}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge (x\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} + y\frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} + z\frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{OP}]$$

$$(2)[\dot{x}\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} + \dot{y}\frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} + \dot{z}\frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge (\dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}})]$$

$$(3)[\vec{a_r} = \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}}]$$

Il primo termine, ricordando che $\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \hat{\mathbf{i}}$ ed analoghe per $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$, rappresenta l'accelerazione di trascinamento di **P** come rigidamente connesso con $O_m$xyz:

$$\vec{a_t} = \frac{d\vec{V_o}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OP}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{OP}$$

Il secondo termine , ricordando sempre che $\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \hat{\mathbf{i}}$, è quello che si chiama l'accelerazione complementare o di Coriolis:

$$\vec{a_c} = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V_R}$$

Il terzo termine è l'accelerazione di di **P** rispetto ad $O_m$xyz come se questo fosse fermo nello spazio ed è, quindi, l'accelerazione relativa:

$$\vec{a_r} = \ddot{x}\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} + \ddot{y}\frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} + \ddot{z}d\hat{\mathbf{k}}$$

Se la terna mobile si muove di moto di traslazione uniforme, cioè $\frac{d\vec{V_o}}{dt} = 0$ e $\vec{\Omega} = 0$, l'accelerazione assoluta del punto coincide esattamente con l'accelerazione relativa. Se la terna mobile si muove unicamente di moto traslatorio, cioè $\vec{\Omega} = 0$, si ha:

$$\vec{a_a} = \frac{d\vec{V_o}}{dt} + \vec{a_r}$$

Qualora la terna si muova solamente di moto rotatorio uniforme rispetto ad un asse, $\vec{\Omega} = cost.$, vale:

$$\vec{a_a} = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OP}) + \vec{a_c} + \vec{a_r}$$

3

Statica

3.1 Forze

Si chiama forza qualsiasi causa esterna che tende a modificare lo stato di quiete o di moto di un corpo. Essa è un vettore in quanto per definirla occorre conoscere il modulo (intensità della forza), la direzione (retta di azione) ed il verso di azione. In genere le forze sono dei vettori applicati, cioè sono dei vettori posti in ben determinati punti dei corpi (punti di applicazione).

3.1.1 Momento di una forza rispetto ad un asse

Preso un asse **ab** ed un vettore $\vec{AB}$, e chiamato con h la distanza della retta d'azione dall'asse **ab**, si chiama momento di $\vec{AB} = \vec{F}$ (essendo $\vec{AB}$ una forza) il numero

$$M_{ab} = h|\vec{F}| \sin \phi$$

Essendo ϕ l'angolo che forma la retta di azione di $\vec{F}$ con l'asse rispetto a cui stiamo eseguendo il calcolo del momento. Il segno $\pm$ a seconda che $\vec{AB}$ sia antiorario o orario rispetto ad **ab**. Il momento assiale è nullo ogni qualvolta la forza $\vec{F}$ e l'asse sono complanari.

3.1.2 Momento di una forza rispetto ad un punto

Sia **O** un punto dello spazio: si definisce come momento di una forza $\vec{F}$ rispetto ad un polo di riduazione **O** il prodotto vettoriale

$$M_o = (\vec{OA}) \times \vec{F} = |OA| \cdot |F \cdot sen(\alpha)\vec{n}$$

Rispetto ad un asse ab facente un angolo ϕ con $\vec{n}$ avremo

$$M_r = M_o \cos \phi$$

Se in **O** poniamo un riferimento cartesiano, il momento di $\vec{F}$, di componenti F_x, F_y, F_z rispetto ai tre assi, applicata in **P** di coordinate x,y,z, rispetto ad **O**, viene determinato da:

$$\begin{Vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{Vmatrix}$$

che si riduce a:

$$M = (F_z y - F_y z)\hat{\mathbf{i}} + (F_x z - F_z x)\hat{\mathbf{j}} + (F_y x - F_x y)\hat{\mathbf{k}}$$

Mentre i momenti di $\vec{F}$ rispetto ai tre assi sono ovviamente dati da:

$$\begin{aligned} M_x &= F_z \cdot y - F_y \cdot z \\ M_y &= F_x \cdot z - F_z \cdot z \\ M_z &= F_y \cdot x - F_x \cdot y \end{aligned}$$

3.2 Teoremi generali sui sistemi di forze

3.2.1 risultante e momento risultante

Si chiama sistema di forze l'insieme di più forze applicate ad un corpo. Chiamiamo risultante del sistema di forze il vettore $\vec{R}$ di componenti

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{xi} \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{yi} \quad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{zi} \tag{3.1}$$

essendo F_{xi}, F_{yi} e F_{zi} le componenti rispetto ai tre assi della generica forza $\vec{F_i}$.

Mentre chiamiamo momento risultante del sistema rispetto ad un punto P(x_p, y_p, z_p) il vettore $\vec{M}$ di componenti

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} [(y_i - y_p)F_{zi} - (z_i - z_p)F_{yi}] \tag{3.2}$$

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} [(z_i - z_p)F_{xi} - (x_i - x_p)F_{zi}] \tag{3.3}$$

$$M_z = \sum_{i=1}^{n} [(x_i - x_p)F_{yi} - (y_i - y_p)F_{xi}] \tag{3.4}$$

Essendo x_i, y_i, z_i le coordinate del punto di applicazione A_i della generica forza $\vec{F_i}$.

3.2.2 Sistemi di forze particolari

Sistemi di forze coordinate in un punto (teorema di Varignon)

Se tutte le forze concorrono in un punto A, la risultante passa per A, mentre il momento risultante rispetto ad un punto P coincide con il momento della risultante. Invero dalle (2), essendo tutti i punti di applicazione delle forze coincidenti con il punto A, si ottiene

$$M_x = (y_A - y_p)\sum_{i=1}^{n} F_{zi} - (z_A - z_p)\sum_{i=1}^{n} F_{yi}$$
$$M_y = (z_A - z_p)\sum_{i=1}^{n} F_{xi} - (x_A - x_p)\sum_{i=1}^{n} F_{zi}$$
$$M_z = (x_A - x_p)\sum_{i=1}^{n} F_{yi} - (y_A - y_p)\sum_{i=1}^{n} F_{xi}$$

Ricordando le (1) rimane immediatamente dimostrato il teorema.

Sistema nullo

Si dice che il sistema di forze è nullo allorquando accade:

$$\vec{R} = 0$$
$$\vec{M} = 0$$

(rispetto ad un polo qualsiasi)

Sistemi di forze parallele

Se tutte le forze costituenti il sistema sono parallele ad una retta **r** data, il sistema gode di particolari proprietà. In quanto il modulo del risultante è dato direttamente dalla somma delle $|\vec{F}|$

$$|\vec{R}| = \sum |\vec{F}|$$

ed è diretto come la retta r cioè

$$\vec{R} = \sum |\vec{F}|\vec{r}$$

Inoltre il momento risultante ha sole due componenti rispetto a due assi giacenti sul piano normale ad r. Per cui nel caso particolare cka la retta r coincide con l'asse z, si ottiene:

$$R_x = 0 \qquad R_y = 0 \qquad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_i$$
$$M_x = \sum_{i=1}^{n} F_i y_i \qquad M_y = -\sum_{i=1}^{n} F_i x_i \qquad M_z = 0$$

Centro di forze parallele

Le forze parallele ammettono sempre un centro G le cui coordinate sono date da:

$$x_G = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$
$$y_G = \frac{\sum f_i y_i}{\sum f_i}$$
$$z_G = \frac{\sum f_i z_i}{\sum f_i}$$

Il centro di dette forze ha le seguenti proprietà:

1. Esso non dipende dalla direzione delle forze, ma solo dai punti di applicazione.
2. Il punto G non varia se si alterano tutte le forze in un rapporto costante.

Sistemi di forze non complanari

Si abbia un sistema di forze non complanari. Si dimostra che questo sistema è sempre riducibile ad un sistema equivalente. Si chiama sistema equivalente di uno dato, quello che ha lo stesso momento risultante rispetto ad un punto di quello dato. Cioè l'insieme del sistema dato e di quello equivalente cambiato di segno devono formare un sistema nullo di forze.Il sistema equivalente di un sistema di forze comunque nello spazio è dato, scelto un punto G qualunque, da una forza applicata in G La forza applicata in G e da una coppia. La forza applicata in G è il risultante del sistema ed ha quindi componenti rispetto a tre assi fissi, se F_{xi} ed F_{yi} ed F_{zi} sono le componenti della generica forza $\vec{F_i}$, applicata in A_i, date da:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{xi}$$
$$R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{yi}$$
$$R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{zi}$$

La coppia ha invece intensità data dal momento di tutte le forze rispetto al punto di riduzione G. Infatti l'intensità di una coppia di forze è data dal suo momento vettoriale espresso da:

$$\vec{M} = |F \cdot \vec{d} \cdot \vec{n}$$

Essendo $\vec{n}$ la normale al piano della coppia orientata verso l'alto o verso il basso, a seconda che la coppia sia antioraria od oraria. Per cui le componenti della coppia sono date, rispetto a tre assi, da:

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} [(y_i - y_G)F_{zi} - (z_i - z_G)F_{yi}]$$
$$M_y = \sum_{i=1}^{n} [(z_i - z_G)F_{xi} - (x_i - x_G)F_{zi}]$$
$$M_z = \sum_{i=1}^{n} [(x_i - x_G)F_{yi} - (y_i - y_G)F_{xi}]$$

Essendo x_i, y_i, z_i le coordinate del punto di applicazione della generica forza F_i.

3.3 Teoremi generali sull'equilibrio dei corpi

Le condizioni generali per l'equilibrio dei corpi allo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, si conglobano nelle due equazioni vettoriali:

$$\vec{R_e} = 0$$
$$\vec{M_e} = 0$$

Esse dicono che affinché un corpo sia in equilibrio il sistema delle forze applicate, esterne ad esso, deve essere un sistema nullo. Quindi le condizioni scalari da verificare per vedere se il corpo è in equilibrio sono 6. Esse sono:

$$\begin{aligned} R_x &= 0 \qquad & M_x &= 0 \\ R_y &= 0 \qquad & M_y &= 0 \\ R_z &= 0 \qquad & M_z &= 0 \end{aligned}$$

3.3.1 Forze complanari

Nel caso che le forze siano complanari ed agenti nel piano **xy**, le condizioni precedenti si riducono a:

$$R_x = 0$$
$$R_y = 0$$
$$M_z = 0$$

Se sono complanari e tutte concorrenti in un punto perché il corpo stia in equilibrio basta solo che

$$R_x = 0$$
$$R_y = 0$$

3.3.2 Forze non complanari e passanti per un punto

La condizione di equilibrio di un corpo soggetto ad un sistema di forze comunque ma passanti per un punto è data semplicemente dalle seguenti tre equazioni:

$$R_x = 0 \qquad R_y = 0 \qquad R_z = 0$$

3.3.3 Forze parallele ma non complanari

Supponendo che le forze applicate al corpo siano tutte parallele all'asse 'z' di riferimento, le condizioni di equilibrio divengono allora:

$$R_x = 0 \qquad R_y = 0 \qquad R_z = 0$$

4

Dinamica del punto materiale e dei sistemi dei punti materiali

4.1 Dinamica del punto materiale

Le tre leggi fondamentali che regolano il moto dei corpi sotto l'azione di determinate forze sono le seguenti (leggi di Newton):

- **PRIMA**: ogni corpo persevera nel suo stato di quiete o di moto uniforme rettilineo, finché qualche forza impressa non lo costringa a cambiarlo (legge d'inerzia).
- **SECONDA**: la variazione dello stato di moto è proporzionale alla forza motrice impressa ed avviene nella direzione e verso di tale forza.
- **TERZA**: la reazione è sempre uguale e contraria all'azione: cioè le mutue azioni di due corpi qualunque sono sempre uguali e dirette in senso opposto.

4.1.1 Seconda legge della dinamica

La seconda legge della dinamica esprime la proporzionalità in senso vettoriale fra la forza e la derivata vettoriale del vettore $m\bar{\mathbf{v}}$. Cioè:

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{d}{dt}(m\bar{\mathbf{v}})$$

Il vettore $m\bar{\mathbf{v}}$ rappresenta la quantità di moto del punto materiale considerato ed è dato dal prodotto dello scalare $\mathbf{m}$ massa del corpo per il vettore $\bar{\mathbf{v}}$ velocità assoluta del corpo. La massa del corpo è data invece dal rapporto fra il peso $\bar{\mathbf{P}}$ del corpo e l'accelerazione di gravità $\bar{\mathbf{g}}$.

Nel caso che $\mathbf{m}$=cost la (1) si trasforma nella seguente:

$$\bar{\mathbf{F}} = m\frac{d}{dt}\bar{\mathbf{v}}(t) = m\bar{\mathbf{a}}$$

Essendo $\bar{\mathbf{a}}$ l'accelerazione assoluta del punto materiale, cioè l'accelerazione del punto misurata rispetto ad un sistema di riferimento fisso o che si muove di moto uniforme rettilineo (terna di riferimento inerziale).

Quindi la formula:

$$\bar{\mathbf{F}} = m\bar{\mathbf{a}}$$

per essere applicata correttemente deve sempre essere intesa come riferita ad un sistema fisso o che si muove di moto uniforme rettilineo.

4.1.2 Espressione delle equazioni del moto di un punto rispetto ad un riferimento fisso

Se consideriamo una terna di riferimento fissa nello spazio e se chiamiamo con F_x, F_y, F_z, le componenti secondo i tre assi della forza $\vec{F}$ la (2) si riduce alle tre seguenti espressioni scalari:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} &= F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} &= F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{aligned}$$

Essendo le derivate seconde rispettivamente di x,y,z le componenti dell'accelerazione di un centro di riduzione **T** rispetto ai tre assi.

Le F_x, F_y e F_z in generale sono funzioni delle coordinate e delle derivate del centro di riduzione e del tempo, per cui le (3) costituiscono un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine.

La loro intrgrazione fornisce le funzioni incognite $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ che definiscono completamente il moto del punto.

È ovvio che per l'integrazione di queste equazioni devono essere note le condizioni iniziali che devono essere in questo caso 6.

Ad esempio per $t = t_0$

$$\begin{array}{lll} \dot{x} = x_0 & \dot{y} = y_0 & \dot{z} = z_0 \\ x = x_0 & y = y_0 & z = z_0 \end{array}$$

Quindi le (3) insieme alle (4) permettono la risoluzione completa del problema dinamico del punto materiale.

4.1.3 Espressione delle equazioni del moto di un punto rispetto ad un riferimento mobile

Come abbiamo detto l'espressione (2) è valida scritta in quella forma solo se $\vec{a}$ è l'accelerazione assoluta del punto, cioè sia l'accelerazione rispetto ad un sistema fisso o mobile di moto rettilineo. Quindi se il sistema di assi O, x, y, z è mobile di moto qualsiasi non possiamo scrivere le (2) come abbiamo fatto precedentemente perché, come abbiamo visto, $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ rappresentano le componenti dell'accelerazione relativa a O, x, y, z mentre l'accelerazione assoluta è espressa da:

$$\vec{a_a} = \vec{a_r} + \vec{a_t} + \vec{a_c}$$

Per cui le (2), nel caso di un sistema di assi mobili, si riduce alle seguenti equazioni scalari sugli assi mobili:

$$\begin{aligned} m(a_{rx} + a_{tx} + a_{cx}) &= X(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m(a_{ry} + a_{ty} + a_{cy}) &= Y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m(a_{rz} + a_{tz} + a_{cz}) &= Z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{aligned}$$

E ricordando che $a_{rx} = \ddot{x}, a_{ry} = \ddot{y}, a_{rz} = \ddot{z}$, otteniamo le seguenti equazioni:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= X - m(a_{tx} + a_{cx}) \\
m\ddot{y} &= Y - m(a_{ty} + a_{cy}) \\
m\ddot{z} &= Z - m(a_{tz} + a_{cz})
\end{aligned}
$$

Le (5) differiscono dalle (3) solo per i termini, $-m(a_{tx} + a_{cx})$..etc., che possono essere considerate come le componentidi una forza $\vec{F_a}$, detta forza apparente o fittizia del moto relativo. Se la terna **O,x,y,z** si muove di moto rettilineo uniforme $\vec{ac} = \vec{a_t} = 0$ per cui le (5) sono identiche alle (3).

Possiamo quindi concludere che per studiare il moto, nel caso che il sistema di riferimento sia mobile, occorre dire che la massa moltiplicata per l'accelerazione del punto rispetto al sistema mobile è uguale alla forza esterna effettivamente applicata più la forza apparente del moto relativo.

4.2 Dinamica dei sistemi di punti

4.2.1 Equazioni del moto per un sistema di punti e teorema del baricentro

Se consideriamo un sistema **S** di punti materiali, e sia m_i la massa e $\vec{v_i}$ la velocità del generico punto m_i, l'equazione del moto per questo punto può esere scritta:

$$\frac{d}{dt}(m_i\vec{v_i}) = \vec{F_e} + \vec{F_i}$$

Essendo $\vec{F_e}$ la forza esterna applicata a questo punto mentre $\vec{F_i}$ è il risultante di tutte le azioni che i punti circostanti esercitano sul punto considerato. Se scriviamo la precedente equazione per tutti i vari punti avremo **n** equazioni vettoriali che sommate si riducono alla unica

$$\frac{d}{dt}(\sum m_i\vec{v_i}) = \sum \vec{F_e} + \sum \vec{F_i}$$

Questa equazione proiettata in tre assi dà le seguenti tre equazioni scalari:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\sum m_i\dot{x}_i) &= \sum X_i + \sum X_e \\
\frac{d}{dt}(\sum m_i\dot{y}_i) &= \sum Y_i + \sum Y_e \\
\frac{d}{dt}(\sum m_i\dot{Z}_i) &= \sum Z_i + \sum Z_e
\end{aligned}
$$

Ma il risultante delle forze interne per il principio di azione e reazione è un sistema nullo, cioè $\sum X_i = \sum y_i = \sum Z_i = 0$, in quanto le forze interne a due a due costituiscono dei sistemi nulli.

Allora le equazioni (8) divengono:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\sum m_i\dot{x}_i) &= \sum X_e \\
\frac{d}{dt}(\sum m_i\dot{y}_i) &= \sum Y_e \\
\frac{d}{dt}(\sum m_i\dot{z}_i) &= \sum Z_e
\end{aligned}
$$

Ricordando la definizione di baricentro di un sistema di masse cioè come quel punto **G** tale che le sue coordinate sono date dalle seguenti espressioni:

$$x_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$
$$y_G = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$$
$$z_G = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

e considerando $m_i = cost$

$$(\sum m_i)\dot{x_G} = \sum m_i \dot{x}_i$$
$$(\sum m_i)\dot{y_G} = \sum m_i \dot{y}_i$$
$$(\sum m_i)\dot{z_G} = \sum m_i \dot{z}_i$$

E tenendo conto che la massa totale del sistema è data da $M = \sum m_i$ si ottengono le tre seguenti equazioni

$$\frac{d}{dt}(M\dot{x_G}) = \sum X_e$$
$$\frac{d}{dt}(M\dot{y_G}) = \sum Y_e$$
$$\frac{d}{dt}(M\dot{z_G}) = \sum Z_e$$

da cui deriva il teorema fondamentale del baricentro. Cioè che il baricentro del sistema si muove come un punto materiale avente la massa totale M del sistema e su cui agisce una forza eguale alla somma vettoriale delle forze agenti su tutti i vari punti di massa.

Concludendo possiamo dire che se Q è la quantità di moto totale del sistema dato da

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i$$

il teorema della quantità di moto si esprime dicendo che il derivato delle quantità di moto è uguale al risultante delle sole forze esterne applicate al sistema, cioè

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R_e}$$

4.2.2 Momento delle quantità di moto

Consideriamo un punto 'C' ed un punto materiale P_i a cui compete il vettore quantità di moto $m_i\vec{v_i}$. Il momento di $m_i\vec{v_i}$ è per definizione il vettore:

$$\vec{H_i} = C\vec{P_i} \wedge m_i\vec{v_i}$$

Il momento risultante rispetto a 'C' è dato da:

$$\sum \vec{H_i} = \sum (C\vec{P_i} \wedge m_i\vec{v_i})$$

eseguiamo il derivato:

$$\frac{d}{dt}\sum \vec{H_i} = \sum(\frac{d}{dt}C\vec{P_i} \wedge m_i\vec{v_i}) + \sum(C\vec{P_i} \wedge \frac{d}{dt}m_i\vec{v_i})$$

Tenendo conto della relazione:

$$C\vec{P_i} = O\vec{P_i} - O\vec{C}$$

e derivando si ottiene:

$$\frac{d}{dt}O\vec{P_i} = \frac{d}{dt}O\vec{P_i} - \frac{d}{dt}O\vec{C} = \vec{v_i} - \vec{v_c}$$

che sostituite nell'espressione del momento della quantità di moto dà:

$$\frac{d}{dt}\sum \vec{H_i} = \sum (\vec{v_i} - \vec{v_c}) \wedge m_i\vec{v_i} + \sum C\vec{P_i} \wedge \frac{d}{dt}(m_i\vec{v_i})$$

ma osservando che:

$$\sum(\vec{v_i} - \vec{v_c}) = \sum v_i \wedge m_i\vec{v_i} - \sum \vec{v_c} \wedge m_i\vec{v_i}$$

e che il termine vettoriale:

$$\sum \vec{v_i} \wedge m_i\vec{v_i} = 0$$

e che per il teorema del baricentro:

$$\sum m_i\vec{v_i} = M\vec{v_G}$$

otteniamo in definitiva:

$$\frac{d}{dt}\sum \vec{H_i} = \sum C\vec{P_i} \wedge \vec{F_e} - \vec{v_c} \wedge M\vec{v_G}$$

E tenendo presente che $\sum C\vec{P_i} \wedge \vec{F_e}$ è il momento delle forze esterne rispetto a 'C', possiamo scrivere:

$$\frac{d}{dt}\sum \vec{H_i} = \vec{M_e} - \vec{v_c} \wedge M\vec{v_G}$$

È da notare che il termine $\vec{v_c} \wedge M\vec{v_G}$ è zero solo se 'C' è fermo o è il baricentro, allora solo in questo caso possiamo scrivere semplicemente:

$$\frac{d}{dt}\sum \vec{H_i} = \vec{M_e}$$

Concludendo che il vettore derivato del momento della quantità di moto è uguale al momento delle forze esterne rispetto al punto fisso o rispetto al baricentro.

4.3 Energia cinetica e teorema dell'energia

4.3.1 Energia cinetica di un punto materiale

Le definizioni di quantità di moto e di momento della quantità di moto sono di fondamentale importanza per la risoluzione dei problemi di dinamica.

Vediamo ora come sia importante anche la definizione di energia cinetica di una particella materiale. L'energia cinetica è la quantita scalare

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

4.3.2 Lavoro di una forza

Si definisce lavoro elementare quello fatto da una forza **F** su una particella **m** data durante un suo spostamento infinitesimale **ds** ed espresso dalle seguenti quantità scalari:

$$dL = \vec{F} \times \vec{ds} = Xdx + Ydy + Zdz$$

Tenendo conto che:

$$\begin{cases} dx = \dot{x}dt \\ dy = \dot{y}dt \\ dz = \dot{z}dt \end{cases}$$

usando le relazioni date dalla II legge della dinamica sui tre assi di riferimento:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = X \\ m\ddot{y} = Y \\ m\ddot{z} = Z \end{cases}$$

si ottiene che:

$$\vec{F} \times \vec{ds} = m(\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z})dt = d(\frac{1}{2}mv^2)$$

Se abbiamo un sistema di particelle, avremo per un punto materiale generico P_i di massa m_i e di velocità $\vec{v_i}$:

$$d(\frac{1}{2}m_i v_i^2) = \vec{F_{ei}} \times \vec{ds} + \vec{F_{ii}} \times \vec{ds}$$

essendo $\vec{F_{ei}}$ e $\vec{F_{ii}}$ i risultanti delle forze esterne ed interne.

Per tutto il sistema avremo:

$$dT = \sum d(\frac{1}{2}m_i v_i^2) = \sum \vec{F_e} \times \vec{ds} + \sum \vec{F_i} \times \vec{ds}$$

Integrando tra due posizioni del sistema **A** e **B**

$$T_B - T_A = \sum \int_A^B \vec{F_e} \times \vec{ds} + \sum \int_A^B \vec{F_i} \times \vec{ds}$$

cioè

$$T_B - T_A = L_e + L_i$$

La formula esprime che la variazione di energia cinetica è uguale al lavoro delle forze esterne e di quelle interne agenti sul e nel sistema.

4.3.3 Potenziale

Molte volte nello studio della dinamica siamo portati a considerare dei sistemi di punti soggetti a forze tali che durante lo spostamento da una posizione **A** ad una posizione **B** il lavoro fatto dalle forze dipende solo dalle posizioni iniziale e finale del sistema ed è indipendente dal percorso che le varie particelle descrivono durante lo spostamento. Tali forze sono dette forze che ammettono un potenziale **V(x,y,z)**. Cioè il lavoro è espresso da una formula del tipo:

$$\int_A^B \vec{F_e} \times \vec{ds} = -(V_B - V_A)$$

Per definizione di potenziale abbiamo:

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$
$$\text{o vettoriale } \vec{F_e} = -grad$$

che sostituite nella formula del lavoro danno:

$$-\int_A^B (\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz) = -(V_B - V_A)$$

L'eqazione dell'energia nel caso di forze esterne che ammettono potenziale, si riduce alla seguente:

$$(T_B - T_A) = -(V_B - V_A)$$

cioè:

$$T_B + V_B = T_A + V_A$$

Tutti i sistemi che verificano la precedente equazione si chiamano sistemi conservativi.

4.4 Teorema dei lavori virtuali

4.4.1 Vincoli

Si chiama vincolo una qualsiasi condizione imposta al moto di un punto. Quindi da un punto di vista matematico il vincolo è una qualsiasi relazione aggiuntiva alle equazioni del moto espressa come una funzione delle **x**,**y**,**z** e del tempo **t**.

Questi vincoli impedendo il moto del punto in certe direzioni esercitano sul punto certe reazioni eguali per la terza legge della Dinamica, alle azioni che il punto esercita su di essi. Queste reazioni si chiamano quindi reazioni vincolari.

Se x_1, y_1, z_1..... e x_n, y_n, z_n sono le coordinate degli **n** punti costituenti il sistema di punti considerati, si chiama vincolo olonomo quel vincolo rappresentato da una relazione fra le sole coordinate del sistema

$$f = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n) = 0$$

e se non contiene la variabile tempo esplicitamente si dice anche vincolo olonomo indipendente dal tempo.

In generale per un sistema di punti soggetto ad "m" vincoli avremo che le "3n" coordinate dei punti del sistema dovranno soddisfare "m" relazioni del tipo anzidetto.

4.4.2 Reazioni vincolari

Come abbiamo detto le azioni che il vincolo esercita sul punto si chiama reazione vincolare, questa in generale è sempre diretta secondo la normale alla superficie o alla linea definente il vincolo. Il vincolo si chiama perfetto quando la reazione è sempre diretta secondo la normale alla superficie o alla linea. In caso contrario la componente tangenziale che si oppone sempre al moto, è detta attrito. Si definisce coefficiente d'attrito **f** il rapporto fra la componente tangenziale **T** della reazione e la componente normale **N** della reazione:

$$f = \frac{T}{N}$$

4.4.3 Metodo dei lavori virtuali

Un qualsiasi spostamento dei punti del sistema compatibile con i vincoli dicesi spostamento virtuale. Il metodo dei lavori virtuali consente di scrivere le equazioni di equilibrio o quelle del moto in modo che le reazioni vincolari non appaiano affatto: ciò è possibile nel caso dei vincoli perfetti ossia nel caso in cui le reazioni non compiono lavoro quando il sistema si muove compatibilmente coi vincoli.

Consideriamo un sistema di **n** punti materiali soggetti all'azione di certe forze esterne date, e di certi vincoli olonomi perfetti definiti da **r** relazioni del tipo:

$$f_r(x, y, z, \dot{.......}x_n, y_n, z_n) = 0$$

Se le forze date si indicano con X_i, Y_i, Z_i mentre le componenti delle reazioni dei vincoli sono X_{ir}, Y_{ir}, Z_{ir}, allora il sistema sarà in equilibrio quando si annulla il risultante della forza agente su qualsiasi degli **n** punti, cioè:

$$X_i + \sum x_{ir} = 0$$

$||Y_i + \sum Y_{ir} = 0||Z_i + \sum Z_{ir} = 0$

È ovvio che se $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ sono spostamenti arbitrari dello i_{smo} punto si ha:

$$(X_i + \sum_{i=1}^{r} X_{ir})\delta x_i + (Y_i + \sum_{i=1}^{r} Y_{ir})\delta y_i + (Z_i + \sum_{i=1}^{r} Z_{ir})\delta z_i = 0$$

in quanto le $(X_i + \sum_{i=1}^{r} X_{ir})$, $(Y_i \sum_{i=r}^{r} Y_{ir})$, $(Z_i + \sum_{i=1}^{r} Z_i)$ sono sempre identicamente nulle.

Per cui la (5) è semplicemente un modo per riassumere in unica equazione le equazioni (4).

Per tutti gli **n** punti del sistema si ha allora:

$$\sum_{i=1}^{n}[(X_i + \sum_{j=1}^{r} X_{jr})\delta x_i + (Y_i + \sum_{j=1}^{r} Y_{jr})\delta y_i + (Z_i + \sum_{j=1}^{r} Z_{jr})\delta z_i] = 0$$

Ora se δx_i, δy_i, e δz_i è uno spostamento virtuale, se il vincolo è perfetto, il temine:

$$\delta W_r = \sum_{i=1}^{n}(\delta x_i \sum_{j=1}^{r} X_{jr} + \delta y_i \sum_{j=1}^{r} Y_{jr} + \delta z_i \sum_{j=1}^{r} Z_{jr})$$

che rappresenta il lavoro fatto dalle reazioni vincolari per uno spostamento virtuale δx_i, δy_i, δz_i e quindi il lavoro virtuale delle reazioni, lavoro che si annulla in quanto le X_{jr}, Y_{jr} e Z_{jr} sono sempre normali rispettivamente alle δx_i, δy_i e δz_i per cui la (12) si riduce alla seguente:

$$\delta W_v = \sum_{i=1}^{n}(X_{i\delta x_i} + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0$$

che esprime il fatto che affinché il sistema sia in equilibrio il lavoro virtuale delle forze esterne deve essere zero.

Si intende per lavoro virtuale il lavoro delle forze esterne per un qualsiasi spostamento arbitrario, ma compatibile con i vincoli esterni.

Cioè $\delta x_,$, δy_i, δz_i non sono fra loro indipendenti ma devono soddisfare ad "r" relazioni del tipo:

$$\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial f_r}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_r}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_r}{\partial z_i}\delta z_i) = 0$$

che si ottengono differenziando le condizioni (9). Per cui è possibile esprimere "r" degli spostamenti δx_i, δy_i, δz_i in funzione delle rimanenti 3n-r.

Allora la (13) esprime che i coefficienti di queste 3n-r relazioni si devono annullare, cioè equivale a 3n-r equazioni che, insieme alle "r" esprimenti i vincoli, permette di risolvere completamente il problema.

4.4.4 Principio di d'Alembert

Il principio dei lavori virtuali può essere esteso a problemi di dinamica, cioè alla determinazione delle equazioni del moto. Questa estensione è basata sul principio di d'Alembert, il quale stabilisce che , in ogni istante, ogni stato del moto può essere considerato come uno stato di equilibrio, qualora siano introdotte delle appropriate forze d'inerzia.

La seconda legge della dinamica dice che per un punto di massa **m** vale la seguente relazione:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

o meglio:

$$\vec{F} - m\vec{a} = \vec{R_i} = 0$$

Cioè chiamando forze di inerzia il prodotto della massa del punto per la sua accelerazione cambiato di segno, possiamo dire che il risultante di questa forza e di quelle esterne agenti sul punto deve essere in ogni istante nullo.

Se scriviamo le tre equazioni cartesiane potremo dire:

$$X_i = X_{ie} - m\ddot{x} = 0$$
$$Y_i = Y_{ie} - m\ddot{y} = 0$$
$$Z_i = Z_{ie} - m\ddot{z} = 0$$

Se il punto è soggetto all'azione di un vincolo definito da una espressione:

$$f(x, y, z) = 0$$

e se x_i, y_i, z_i sono le componenti di uno spostamento virtuale, potremo dire:

$$X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i = 0$$

e per tutti i punti del sistema:

$$\sum_{n=1}^{n} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0$$

che equivale perfettamente alla (1).

5

Dinamica dei sistemi rigidi

5.1 Teoria dei momenti d'inerzia

Consideriamo un punto materiale **P** ed una retta **a**. Dicesi momento d'inerzia del punto materiale **P** rispetto alla retta **a**:

$$i = \ m\delta^2$$

essendo δ la distanza di **P** da **a** ed m la sua massa.

Nel caso di un sistema di n masse:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i \delta_i^2$$

Nel caso che si abbia un sistema continuo, la definizione è perfettamente valida; basta introdurre la densità ρ del sistema e scrivere:

$$I = \int_V^{\cdot} \rho \delta^2 dv$$

essendo ***dv*** l'elemento infinitesimo di volume.

Si chiama raggio d'inerzia:

$$\sigma = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

Essendo:

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

o, nel caso di un sistema continuo:

$$M = \int_V^{\cdot} \rho dv$$

La ricerca del momento d'inerzia di un sistema **S** rispetto ad un asse generico dello spazio può in ogni caso effettuarsi direttamente in base alla definizione. Questa ricerca è spesso molto agevolata dalle due proposizioni seguenti.

5.1.1 Teorema di Huygens

Se **I** è il momento d'inerzia di **S** rispetto ad **a**, I_0 il momento d'inerzia **S** rispetto ad a_0, retta parallela ad **a** passante per il baricentro **G**, e se infine **d** è la distanza fra queste due rette:

$$I = I_0 + M \cdot d^2$$

5.1.2 Teorema sul modo di variare di I al variare dell'asse 'a' entro una stella di centro 'O'

Fissato un punto 'O' prendiamo una terna ortogonale 'Oxyz' di centro 'O' e consideriamo una retta generica 'r' passante per 'O', definita dai suoi tre coseni direttori 'α', 'β', 'γ' rispetto agli assi 'x','y', 'z'.

Si dimostra abbastanza facilmente che

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2A_1\beta\gamma - 2B_1\gamma\alpha - 2C_1\alpha\beta$$

Consideriamo ora l'elissoide d'equazione:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2A_1yz - 2B_1xz - 2C_1yx = 1$$

questo elissoide ha la proprietà che se si indica con 'L' un suo punto, la quantità:

$$\frac{1}{|OL|^2}$$

dà il momento d'inerzia rispetto alla retta 'OL'

Ora se come terna di assi di riferimento si prendono i tre assi principali dell'elissoide si ottiene:

$$A_1 = B_1 = C_1 = 0$$

e l'elissoide si riduce a:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

mentre il momento d'inerzia è dato semplicemente da:

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2$$

Ora 'A','B','C' prendono il nome di momenti principali d'inerzia. Se 'O'='G' baricentro l'elissoide si chiama elissoide centrale ed 'A','B', 'C' si chiamano momenti centrali d'inerzia.

La ricerca degli assi principaliè assai semplificata nei seguenti casi particolari che si presentano di frequente.

a Se 'S' ammette un piano di simmetria in ogni punto di questo piano la normale al piano coincide con uno degli assi principali d'inerzia.

b Se un corpo ha due piani di simmetria ortogonali, sono assi principali la retta $r1$ e le due rette in 'O' normali ai piani π_1 e π_2.

5.2 Energia cinetica di un corpo rigido

Se abbiamo un corpo rigido la velocità di ogni suo singolo punto è data, rispetto ad una terna di riferimento generico solidale con il corpo, dalla nota formula(6)

$$\vec{v_p} = \vec{v_o} + \vec{\Omega} \wedge \vec{OP}$$

Se prendiamo la terna di riferimento con origine nel baricentro (terna centrale) 'G', abbiamo:

$$\vec{v_p} = \vec{v_G} + \vec{\Omega} \wedge \vec{GP}$$

L'energia cinetica che compete quindi alla massa 'dm' con centro nel punto 'P' è data secondo la definizione da:

$$dT = \frac{dm}{2}(\vec{v_G} + \vec{\Omega} \wedge \vec{GP})^2$$

Ora possiamo anche scrivere:

$$\vec{v_p} - \vec{v_G} = \vec{\Omega} \wedge \vec{GP}$$

cioè

$$dT = \frac{dm}{2}[\vec{v_G} + (\vec{v_p} - \vec{v_G})]^2 = \frac{dm}{2}[\vec{v_G}^2 + (\vec{v_p} - \vec{v_G})^2 + 2\vec{v_G} \times (\vec{v_p} - \vec{v_G})]$$

ed ancora

$$dT = \frac{dm}{2}v_G^2 + \frac{dm}{2}(\vec{v_p} - \vec{v_G})^2 - \vec{v_G} \times (\vec{v_p}dm - \vec{v_G}dm)$$

ed integrando

$$T = \frac{v_G^2}{2}\int_V^{\cdot} dm + \frac{1}{2}\int_V^{\cdot}(\vec{v_p} - \vec{v_G})^2 - \vec{v_G} \times (\int_V^{\cdot} \vec{v_p}dm - \vec{v_G}\int_V^{\cdot} dm)$$

avremo quindi in definitiva:

$$T = \frac{1}{2}M{v_G}^2 + \frac{1}{2}\int_V^{\cdot}(\vec{\Omega} \wedge \vec{GP})^2 dm$$

in quanto per definizione di quantità di moto totale di un sistema

$$\int_V^{\cdot} \vec{v_p}dm - \int_V^{\cdot} \vec{v_G}dm = M\vec{v_G} - M\vec{v_G} = 0$$

Considerando che:

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{GP} = (qz - ry)\vec{i} + (rx - pz)\vec{j} + (py - qx)\vec{k}$$

abbiamo di conseguenza:

$$(\vec{\Omega} \wedge \vec{GP})^2 = (\vec{v_p} - \vec{v_G})^2 = (qz - ry)^2 + (rx - pz)^2 + (py - qx)^2 =$$
$$(z^2 + x^2)q^2 + (z^2 + y^2)p^2 + (x^2 + y^2)r^2 - 2qrzy - 2rpxz - 2pqxy$$

E quindi eseguendo l'integrale abbiamo:

$$\frac{1}{2}[q^2 \int_V^{\cdot} (z^2 + x^2)\rho dv + p^2 \int_V^{\cdot} (z^2 + y^2)\rho dv + r^2 \int_V^{\cdot} (x^2 + y^2)\rho dv -$$
$$2qr \int_V^{\cdot} zy\rho dv - 2rp \int_v^{\cdot} xzdv - 2pq \int_V^{\cdot} xydv] =$$
$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2qrA_1 - 2rpB_1 - 2pqC_1)$$

Se la terna di riferimento è principale di inerzia $A_1 = B_1 = C_1 = 0$ l'energia cinetica totale del corpo rigido è data da:

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \frac{1}{2}M{v_G}^2$$

5.3 Equazione della dinamica dei corpi rigidi

5.3.1 Teorema del derivato della quantità di moto

L'equazione della quantità di moto si scrive dicendo:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R_e}$$

essendo:

$$\vec{Q} = \sum_i m_i \vec{v_i} = \vec{v_G} \sum_i m_i$$

Ora consideriamo un sistema rigido e prendiamo una terna solidale al corpo come terna di riferimento. Questa terna durante il moto rigido traslerà e ruotera per cui l'equazione:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{Re}$$

essendo riferita ad assi fissi dovrà essere opportuanmente cambiata.

La velocità del baricentro, se x_G, y_G, z_G ne sono le coordinate, è data da:

$$\vec{v_G} = \vec{v_o} + \vec{\Omega} \wedge \bar{O}G$$

per cui la quantità di moto totale del sistema è data da:

$$\vec{Q} = \vec{v_G} \int_V dm = \int_V (\vec{v_o} + \vec{\Omega} \wedge \vec{OG})dm$$

Ora se la terna di riferimento è una terna centrale $\vec{OG} = 0$ per cui:

$$\vec{Q} = \vec{v_G} \int_V dm = \int_V \vec{v_o} dm$$

Se 'u', 'v', 'w' sono le componenti di $\vec{v_G}$ sui tre assi mobili avremo:

$$\vec{Q} = M(u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k})$$

Eseguendo il derivato di $\vec{Q}$ rispetto al tempo e considerando che gli assi di riferimento sono mobili:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = M(\frac{du}{dt}\vec{i} + \frac{dv}{dt}\vec{j} + \frac{dw}{dt}\vec{k} + u\frac{d\vec{i}}{dt} + v\frac{d\vec{j}}{dt} + w\frac{d\vec{k}}{dt})$$

Da cui derivano le tre equazioni scalari che rappresentano l'equazioni della quantità di moto sui tre assi mobili solidali al corpo $x,\ y,\ x$:

$$M(\frac{du}{dt} + qw - rv) = R_x$$
$$M(\frac{dv}{dt} + ru - pw) = R_y$$
$$M(\frac{dw}{dt} + pv - qu) = R_z$$

5.3.2 Teorema del momento della quantità di moto

La seconda equazione cardinale della dinamica è data da:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}_e$$

sempre che il punto di riduzione dei momenti sia un punto fisso o il baricentro.

Nel caso di un corpo rigido assumiamo senz'altro che la terna solidale col corpo abbia origine nel baricentro (Terna Centrale). In questo caso $x_G,\ y_G,\ z_G$ sono nulli.

Allora la velocità di un punto 'P' del sistema è data:

$$\vec{v} = \vec{v_G} + \vec{\Omega} \wedge \vec{PG}$$

a cui compete una quantità di moto elementare:

$$d\vec{Q} = dm(\vec{v_G} + \vec{\Omega} \wedge \vec{PG})$$

ed un momento della quantità di moto elementare rispetto al baricentro:

$$d\vec{K} = \vec{PG} \wedge\ dm(\vec{v_G} + \vec{\Omega} \wedge \vec{PG}).$$

Il momento della quantità di moto totale è dato ovviamente da:

$$\vec{K} = \int_V \vec{PG} \wedge \vec{v_G} dm + \int_V \vec{PG} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{PG}) dm.$$

Il termine $\int_V \vec{PG} \wedge \vec{v_G} dm$ è zero in quanto la quantità di moto totale è un vettore che passa per il baricentro, per cui:

$$\vec{K} = \int_V \vec{PG} \wedge (\Omega \wedge \vec{PG}) dm.$$

Se $x,\ y,\ z$ sono le coordinate di P e $p,\ q,\ r$ le componenti di $\vec{\Omega}$:

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{PG} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = (qz - zy)\vec{i} + (rx - pz)\vec{j} + (py - qx)\vec{k}$$

ed ancora:

$$\vec{PG} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{PG} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ (qz - ry) & (rx - pz) & (py - qz) \end{vmatrix} =$$

$$[y(py - qx) - z(rx - pz)]\vec{i} + [z(qz - ry) - x(py - qx)]\vec{j} +$$
$$+ [x(rx - pz) - y(qz - ry)]\vec{k}.$$

Per cui possiamo scrivere che:

$$K_x = p \int_V \rho\ (x^2 + z^2) dv - r \int_V xz\rho\ dv - q \int_V xy\rho\ dv$$
$$K_y = q \int_V \rho\ (z^2 + x^2) dv - r \int_V yz\rho\ dv - p \int_V xy\rho\ dv$$
$$K_z = r \int_V \rho\ (x^2 + y^2) dv - p \int_V xz\rho\ dv - q \int_V zy\rho\ dv$$

Ora se la terna di riferimento è una terna principale di inerzia tutti gli integrali del tipo $\int_V xz\ dm$ sono nulli quindi il momento della quantità di moto rispetto agli assi mobili è dato da:

$$\vec{K} = Ap\vec{i} + Bq\vec{j} + Cr\vec{k}$$

Applicando ora l'equazione del momento della quantità di moto e tenendo conto che gli assi sono mobili otteniamo:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = A\dot{p}\vec{i} + B\dot{q}\vec{j} + C\dot{r}\vec{k} + \Omega \wedge (Ap\vec{i} + Bq\vec{j} + Cr\vec{k}) = \vec{M}_e$$

E quindi le tre equazioni scalari:

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)rq = \vec{M}_x$$
$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)pr = \vec{M}_y$$
$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = \vec{M}_z$$

Concludendo possiamo dire che un motorigido rimane individuato dalla conoscenza dei suoi sei parametri u, v, w, p, q, che corrispondono a sei gradi di libertà del corpo. Per cui note le cause esterne che producono il moto $\vec{R}_e$ e $\vec{M}_e$ che potranno essere in generale funzioni di u, v, w, p, q, r e delle coordinate, è possibile attraverso l'integrazione delle equazioni differenziali scritte e con le opportune condizioni ai limitiindividuare completamente il mptp rigido.

È facile vedere che se il corpo deve stare in equilibrio $u = v = w = p = q = r = 0$ le equazioni precedenti si riducono ad:

$$R_x = 0 \qquad M_x = 0$$
$$R_y = 0 \qquad M_y = 0$$
$$R_z = 0 \qquad M_z = 0$$

Le quali rappresentano come abbiamo già visto le equazioni fondamentali della statica. Inoltre si intende precisare che tali equazioni sono sufficienti a determinare il moto di un corpo solo nel caso esso sia rigido.

5.3.3 Lavoro di una forza in uno spostamento rigido

Uno spostamento rigido è individuato come abbiamo detto da sei parametri. Infatti lo spostamento di un punto 'P' è dato da:

$$\vec{ds} = \vec{v}dt = (\vec{v_o} + \vec{\Omega} \wedge \vec{OP})dt$$

Se $\vec{F_e}$ è la forza esterna applicata sul punto 'P', questa compie un lavoro:

$$dL = \vec{F_e} \times \vec{ds} = (\vec{F_e} \times \vec{v_o})dt + (\vec{F_e} \times \Omega \wedge \vec{OP})dt$$

Ricordando che:

$$\vec{F_e} \times \vec{\Omega} \wedge \vec{OP} = \vec{\Omega} \times \vec{OP} \wedge \vec{F_e}$$

il lavoro elementare si può esprimere in definitiva come:

$$dL_e = \vec{F_e} \times \vec{ds} = [\vec{F_e} \times \vec{v_o} + \vec{\Omega} \times \vec{OP} \wedge \vec{F_e}]dt = \vec{F_e} \times \vec{v_o} + \Omega\vec{dt} \times \vec{OP} \wedge \vec{F_e}$$

Se sul corpo agisce un sistema di forze:

$$\sum dL_e = \sum \vec{F_e} \times \vec{v_o}dt + \vec{\Omega}dt \times \vec{OP} \wedge \sum \vec{F_e}$$

$$L_e = \int_{t_1}^{t_2} \sum dL_e = \int_{t_1}^{t_2} \vec{R_e} \times \vec{v_o}dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{M_e} \times \vec{\Omega}dt$$

La potenza, cioè il lavoro nella unità di tempo, risulta:

$$\frac{dL_e}{ds} = \vec{R_e} \times \vec{v_o} + \vec{\Omega} \times \vec{M_e}$$

Se chiamiamo inoltre con:

$$\begin{aligned} dx_G &= udt \qquad & d\varphi &= pdt \\ dy_G &= vdt \qquad & d\psi &= qdt \\ dz_G &= wdt \qquad & d\theta &= rdt \end{aligned}$$

avremo per il lavoro, in definitiva, la seguente espressione

$$L = \int (R_x dx_G + R_y dy_G + R_z dz_G) + \int (M_x d\varphi + M_y d\psi + M_z d\theta)$$

Se 'u', 'v', 'w' sono le componenti della velocità del baricentro, per la potenza si ottengono in definitiva le seguenti forme:

$$W = (R_x u + R_y v + R_z w) + (M_x p + M_y q + M_z r)$$

5.4 Giroscopio

Un solido, che gode della proprietà che i suoi due momenti principali di inerzia **A** e **B** sono uguali, e rotante intorno ad un punto fisso, si chiama giroscopio simmetrico. Ed il suo terzo asse principale d'inerzia si chiama asse di simmetria del giroscopio.

5.4.1 Moto di precessione libera di un giroscopio

Il tipo più importante di movimento di un giroscopio è detto moto di precessione. Lo si può dedurre facendo ruotare il corpo intorno al suo asse di simmetria z con velocità angolare $\vec{\omega}$, e facendo contemporaneamente ruotare l'asse di simmetria con velocità angolare $\vec{\omega_1}$ intorno ad un asse fisso nello spazio per esempio l'asse ζ. In questo caso l'asse di simmetria descrive una superficie conica, il cui angolo di semiapertura indicheremo con θ.

Il vettore $\vec{\Omega}$, risultante di $\vec{\omega_1}$ e $\vec{\omega}$ ruota anche lui intorno all'asse ζ.

Vogliamo ora studiare il problema del moto di un giroscopio allorquando il sistema di forze ad esso applicato è un sistema nullo.

In questo caso, considerando che per tutti gli assi normali a z accade che A=B, le equazioni di Eulero si riducono alle seguenti:

$$A\frac{dp}{dt} + (A - C)\ qr = 0$$
$$A\frac{dq}{dt} - (A - C)\ pr = 0$$
$$C\frac{dr}{dt} = 0$$

Le componenti di $\vec{\Omega}$ sugli assi mobili x, y, z, valgono:

$$p = -\omega_1 \sin\theta \cos\omega t$$
$$q = \omega_1 \cos\theta \sin\omega t$$
$$r = \omega + \omega_1 \cos\theta$$

L'ultima delle equazioni di Eulero:

$$C\frac{dr}{dt} = 0$$

porta subito alla conclusione che $\omega,\ \omega_1,\ \cos\theta$ sono costanti ed indipendenti dal tempo.

Sostituendo i valori di $p,\ q,\ r$ nelle due prime equazioni di Eulero e sommandole otteniamo l'unica soluzione:

$$C\ \omega +\ \omega_1(C - A)\cos\theta = 0.$$

La quale ci fornisce, dati i valori di ω e θ il valore della velocità di precessione quando il giroscopio non è soggetto ad azioni esterne cioè:

$$\omega_1 = \frac{C\omega}{(C - A)\cos\theta}$$

Possiamo subito notare che nel caso di $(C - A) > 0$ e $\theta < \frac{\pi}{2}$ la velocità ω_1 ha lo stesso senso di ω per $\theta < \frac{\pi}{2}$.

A parità di momenti d'inerzia A e C il senso di moto si inverte per $\theta\frac{\pi}{2}$ cioè se θ è un angolo ottuso.

Consideriamo il piano $z\zeta$ questo incontrerà il piano xy lungo una retta OM. Essendo OM una retta del pianoxy ed essendo tutti assi principali di inerzia le rette passanti per O e giacenti in xy abbiamo:

$$K_z = C(\omega + \omega_1 \cos\theta)$$
$$K_m = -A\omega_1 \sin\theta$$

e tenendo conto che la precessione è libera

$$\omega_1 = -\frac{C\omega}{(C-A)\cos\theta}.$$

Cioè

$$C\omega + (C-A)\omega_1 \cos\theta = 0$$

ovvero

$$C(\omega + \omega_1 \cos\theta) = A\omega_1 \cos\theta$$

Per cui le componenti di $\vec{K}$ sono

$$K_z = A\omega_1 \cos\theta$$
$$K_m = -A\omega_1 \sin\theta$$

Cioè il vettore momento della quantità di moto $\vec{K}$ è fisso nello spazio e giacente come ω_1 su ζ e con modulo costante $A\omega_1$

$$\vec{K} = A\omega_1 \vec{k}$$

o in funzione di ω

$$\vec{K} = \frac{AC\omega}{(A-C)\omega\theta}$$

Cioè possiamo concludere che nel moto di precessione libero di un giroscopio con velocità di precessione ω_1 i quattro vettori $\vec{K}, \vec{\Omega} = \vec{\omega} + \vec{\omega_1}, \vec{\omega_1}, \vec{\omega}$ giacciono sempre sul piano rotante ζ z.

5.4.2 Momento di un giroscopio simmetrico

Abbiamo visto nel precedente paragrafo come mediante l'applicazione delle equazioni di Eulero è possibile risolvere il caso di un giroscopio non soggetto ad azioni di forze esterne ed abbiamo trovato l'espressioni che danno la velocità di precessione libera o regolare di un giroscopio. Vogliamo ora vedere quale è il valore del momento delle forze che devono agire sul giroscopio nel caso che la velocità di precessione non soddisfi la

$$\omega_1 = -\frac{C\omega}{(C-A)\cos\theta}$$

Per trovare il valore di questo momento possiamo fare ricorso all'equazione cardinale della dinamica scritta per assi fissi

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}_e$$

abbiamo visto infatti che nel caso di precessione libera $\vec{K} = cost.$, se $\vec{M_e} = 0$

Ora se $\vec{\omega}, \vec{\omega_1},\ \theta$ sono costanti ma non soddisfano le condizioni di precessioe, il vettore $\vec{K}$ avrà modulo costante e risulterà applicato in O e ruoterà con velocità angolare ω_1 rispetto a ζ. Per cui ricordando che le derivate di un vettore ruotante $\vec{OP}$, se $\vec{\omega_1}$ è la velocità di rotazione, è dato da

$$\frac{d\vec{OP}}{dt} = \vec{\omega_1} \wedge \vec{OP}$$

otteniamo che

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{\omega_1} \wedge \vec{K}$$

Nel riferimento preso abbiamoche

$$\omega_{1x} = -\omega_1 \sin\theta$$
$$\omega_{1y} = 0$$
$$\omega_{1z} = \omega_1 \cos\theta$$

Mentre $\vec{K}$ ha componenti

$$K_m = -A\omega_1 \sin\theta$$
$$K_z = C(\omega + \omega_1 \cos\theta$$

Ricordando la regola del prodotto vettoriale si trova che $\vec{M_e}$ ha una sola componente normale al piano $z\zeta$ ed è dato quindi da

$$M = [C\omega + (C - A)\omega_1 \cos\theta]\omega_1 \sin\theta$$

5.4.3 Giroscopio pesante

Consideriamo il caso di un giroscopio di peso **P** che ruoti intorno al suo asse di simmetria con velocità ω, e con velocità $\omega_1$ntorno ad un asse normale all'asse di simmetria.

In questo caso $\theta = \frac{\pi}{2}$ per cui

$$M = C\omega\omega_1$$

Ora il momento esterno applicato $\vec{M}$ è uguale al peso per il braccio 'l' del baricentro **G** da **O**. Per cui in definitiva avremo

$$Pl = C\omega\omega_1$$

Cioè il giroscopio per effetto delle forze d'inerzia starà in equilibrio se ω_1 è tale che:

$$\omega_1 = \frac{Pl}{C\omega}$$

o viceversa:

$$\omega = \frac{Pl}{C\omega_1}$$

Appendice al capitolo 1

In aggiunta a quanto stato detto nel capitolo 1, vogliamo ricordare alcuni teoremi fondamentali relativi all'integrazione dei campi vettoriali:

Teorema di Gauss

Se $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z)$ è un campo vettoriale continuo fino almeno alla derivata prima e se S è una superficie chiusa vale il seguente teorema:

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \times \vec{\mathbf{n}}\ ds = \iiint_V div\vec{\mathbf{F}}\ dv$$

Essendo n il versore della normale alla superficie nel punto $x,\ y,\ z$, mentre

$$div\vec{\mathbf{F}} = \frac{\delta F_x}{\delta x} + \frac{\delta F_y}{\delta y} + \frac{\delta F_z}{\delta z}$$

come già è stato esposto nel Capitolo 1.

Cioè il flusso del vettore $\vec{\mathbf{F}}$ è uguale all'integrale della divergenza al volume racchiuso in S.

Teorema di Stokes

Nelle ipotesi del paragrafo 1 si dimostra che se l è una linea chiusa nello spazio e S una superficie chiusa comunque abbracciata da l possiamo dire che:

$$\iint_S rot\vec{\mathbf{F}} \times \vec{\mathbf{n}}\ dS = \oint_l \vec{\mathbf{F}} \times d\vec{\mathbf{l}}$$

L'integrale $\oint_l \vec{\mathbf{F}} \times d\vec{\mathbf{l}} = \oint_l (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$ si chiama circolazione del vettore $\vec{\mathbf{F}}$: nel caso che $\vec{\mathbf{F}}$ è una forza la circolazione coincide con il lavoro della forza esteso alla linea chiusa.

Teorema di Green

Nelle ipotesi già scritte il teorema di Green stabilisce che se $U = U(x,\ y,\ z)$ e $V = V(x,\ y,\ z)$ sono due funzioni scalari l'integrale:

$$\iint_S \vec{\mathbf{n}} \times U \vec{\mathbf{grad}} V = \iiint U div\ \vec{\mathbf{grad}} V + \iiint \vec{\mathbf{grad}} U \times \vec{\mathbf{grad}} V\ dv$$

e ricordando dal capitolo 1 che:

$$\vec{\mathbf{grad}} V = \nabla V$$

$$\vec{\mathbf{grad}} U = \nabla U$$

$$div \vec{\mathbf{grad}} V = \nabla^2 V = \frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta z^2}$$

Il teorema di Green si può scrivere in forma simbolica:

$$\iint_S \vec{\mathbf{u}} \times U \cdot \nabla V = \iiint_V U \nabla^2 V\ dv + \iiint_V \nabla U \times \nabla V\ dv$$

Fonti dei testi e delle immagini

Fonti dei testi

Versioni dei testi che compongono questo libro con il relativo indirizzo.

Richiami di calcolo vettoriale

- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_razionale/Richiami_di_calcolo_vettoriale&oldid=345939

Cinematica

- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_razionale/Cinematica/Punto&oldid=332323
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_razionale/Cinematica/Sistemi_rigidi&oldid=298203
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_razionale/Cinematica/Moto_relativo&oldid=342811

Statica

- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_razionale/Statica/Forze&oldid=345940
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_razionale/Statica/Sistemi_di_forze&oldid=174418
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_razionale/Statica/Equilibrio&oldid=95827

Dinamica del punto materiale e dei sistemi dei punti materiali

- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_razionale/Dinamica/Punto_materiale&oldid=385859
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_razionale/Dinamica/Sistemi_di_punti&oldid=385860
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_razionale/Dinamica/Energia_cinetica&oldid=385856
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_razionale/Dinamica/Lavori_virtuali&oldid=385857

Dinamica dei sistemi rigidi

- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_razionale/Sistemi_rigidi/Momenti_di_inerzia&oldid=324051
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_razionale/Sistemi_rigidi/Energia_cinetica&oldid=95826
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_razionale/Sistemi_rigidi/Dinamica&oldid=188799
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_razionale/Sistemi_rigidi/Giroscopio&oldid=110823

Appendice al capitolo 1

- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_razionale/Appendice_(cap_1%C2%B0)&oldid=226900

Fonti delle immagini

- 1.1, fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:VectorAB.svg
- 2.2.1, fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MotoTraslatorio-rotatorio.jpg

GNU Free Documentation License

Version 1.3, 3 November 2008

Copyright © 2000, 2001, 2002, 2007, 2008 Free Software Foundation, Inc. <http://fsf.org/>
Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

0. PREAMBLE

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "Document", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "you". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A "Modified Version" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A "Secondary Section" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The "Invariant Sections" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The "Cover Texts" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A "Transparent" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparent" is called "Opaque".

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The "Title Page" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

The "publisher" means any person or entity that distributes copies of the Document to the public.

A section "Entitled XYZ" means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as "Acknowledgements", "Dedications", "Endorsements", or "History".) To "Preserve the Title" of such a section when you modify the Document means that it remains a section "Entitled XYZ" according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.

B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.

C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.

D. Preserve all the copyright notices of the Document.

E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.

F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.

G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.

H. Include an unaltered copy of this License.

I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled

"History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.

J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.

K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.

L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.

M. Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.

N. Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.

O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements".

6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided under this License. Any attempt otherwise to copy, modify, sublicense, or distribute it is void, and will automatically terminate your rights under this License.

However, if you cease all violation of this License, then your license from a particular copyright holder is reinstated (a) provisionally, unless and until the copyright holder explicitly and finally terminates your license, and (b) permanently, if the copyright holder fails to notify you of the violation by some reasonable means prior to 60 days after the cessation.

Moreover, your license from a particular copyright holder is reinstated permanently if the copyright holder notifies you of the violation by some reasonable means, this is the first time you have received notice of violation of this License (for any work) from that copyright holder, and you cure the violation prior to 30 days after your receipt of the notice.

Termination of your rights under this section does not terminate the licenses of parties who have received copies or rights from you under this License. If your rights have been terminated and not permanently reinstated, receipt of a copy of some or all of the same material does not give you any rights to use it.

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See http://www.gnu.org/copyleft/.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document specifies that a proxy can decide which future versions of this License can be used, that proxy's public statement of acceptance of a version permanently authorizes you to choose that version for the Document.

11. RELICENSING

"Massive Multiauthor Collaboration Site" (or "MMC Site") means any World Wide Web server that publishes copyrightable works and also provides prominent facilities for anybody to edit those works. A public wiki that anybody can edit is an example of such a server. A "Massive Multiauthor Collaboration" (or "MMC") contained in the site means any set of copyrightable works thus published on the MMC site.

"CC-BY-SA" means the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 license published by Creative Commons Corporation, a not-for-profit corporation with a principal place of business in San Francisco, California, as well as future copyleft versions of that license published by that same organization.

"Incorporate" means to publish or republish a Document, in whole or in part, as part of another Document.

An MMC is "eligible for relicensing" if it is licensed under this License, and if all works that were first published under this License somewhere other than this MMC, and subsequently incorporated in whole or in part into the MMC, (1) had no cover texts or invariant sections, and (2) were thus incorporated prior to November 1, 2008.

The operator of an MMC Site may republish an MMC contained in the site under CC-BY-SA on the same site at any time before August 1, 2009, provided the MMC is eligible for relicensing. ADDENDUM: How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

> Copyright (C) YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with . . . Texts." line with this:

> with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.