



# MECCANICA NEWTONIANA

Volume unico



# Meccanica newtoniana

Volume unico

[it.wikibooks.org](http://it.wikibooks.org)

2023

*Questo testo proviene da*

[https://it.wikibooks.org/wiki/Meccanica\\_newtoniana](https://it.wikibooks.org/wiki/Meccanica_newtoniana)

*I testi originali si trovavano su WikiToLearn. Copie sono disponibili su*

[https://web.archive.org/web/20201030013822/http://it.wikitolearn.org/Corso:Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale](https://web.archive.org/web/20201030013822/http://it.wikitolearn.org/Corso:Meccanica_del_punto_materiale)

[https://web.archive.org/web/20200919063701/https://it.wikitolearn.org/Corso:Meccanica\\_dei\\_sistemi\\_di\\_punti\\_e\\_corpi\\_rigidi](https://web.archive.org/web/20200919063701/https://it.wikitolearn.org/Corso:Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi)

<https://web.archive.org/web/20200919224541/https://it.wikitolearn.org/Corso:Gravitazione>

[https://web.archive.org/web/20200919045651/https://it.wikitolearn.org/Corso:Elementi\\_di\\_meccanica\\_dei\\_fluidi](https://web.archive.org/web/20200919045651/https://it.wikitolearn.org/Corso:Elementi_di_meccanica_dei_fluidi)

[https://web.archive.org/web/20211207183958/https://it.wikitolearn.org/Corso:Onde\\_meccaniche\\_elastiche](https://web.archive.org/web/20211207183958/https://it.wikitolearn.org/Corso:Onde_meccaniche_elastiche)

*Autori principali:*

Dan e altri utenti di WikiToLearn

*Questo libro è aggiornato al*

15 ottobre 2023

*In copertina:*

William Blake, *Newton*, 1795, Tate Gallery, Londra. *licenza:* pubblico dominio; *fonte:*

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Newton-WilliamBlake.jpg>

**Wikibooks non dà garanzie sulla validità dei suoi contenuti.** Per i dettagli vedi:

[https://it.wikibooks.org/wiki/Wikibooks:General\\_disclaimer](https://it.wikibooks.org/wiki/Wikibooks:General_disclaimer)

Quest'opera è distribuita con licenza **Creative Commons Attribuzione - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale**. Per leggere una copia della licenza visita il sito: <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.it>



---

# Indice

## Parte I: Meccanica del punto materiale

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
1.1	Cos'è la meccanica newtoniana . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Cinematica del punto materiale</b>	<b>5</b>
2.1	Cinematica del punto . . . . .	5
2.2	Moto rettilineo . . . . .	5
2.3	Moto circolare . . . . .	10
2.4	Moto armonico . . . . .	13
2.5	Moto parabolico dei corpi . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Dinamica del punto materiale</b>	<b>17</b>
3.1	Primo e secondo principio della dinamica . . . . .	17
3.2	Forza peso e forze vincolari . . . . .	19
3.3	Terzo principio della dinamica . . . . .	21
3.4	Forza d'attrito radente . . . . .	22
3.5	Forza d'attrito viscoso . . . . .	23
3.6	Forza elastica . . . . .	24
3.7	Forza centripeta . . . . .	26
3.8	Quantità di moto e impulso . . . . .	27
3.9	Momento angolare . . . . .	28
3.10	Pendolo semplice . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Moti relativi</b>	<b>33</b>
4.1	Teorema delle velocità relative . . . . .	33
4.2	Teorema delle accelerazioni relative . . . . .	34
4.3	Relatività galileiana . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Lavoro ed energia</b>	<b>37</b>
5.1	Energia cinetica e lavoro . . . . .	37
5.2	Energia del pendolo . . . . .	40
5.3	Lavoro della forza di attrito, della forza peso e della forza elastica . . . . .	42
5.4	Forze conservative ed energia potenziale . . . . .	43
5.5	Considerazioni conclusive sull'energia . . . . .	48

<b>6</b>	<b>Oscillatori armonici</b>	<b>51</b>
6.1	Oscillatore armonico . . . . .	51
6.2	Oscillatore armonico smorzato e forzato . . . . .	52
6.3	Oscillatori accoppiati . . . . .	56

## Parte II: Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi

<b>7</b>	<b>Introduzione</b>	<b>61</b>
7.1	Sistemi di punti e corpo rigido . . . . .	61
<b>8</b>	<b>Dinamica dei sistemi di punti</b>	<b>63</b>
8.1	Centro di massa . . . . .	63
8.2	Conservazione della quantità di moto . . . . .	65
8.3	Sistema di riferimento del centro di massa . . . . .	66
8.4	Mutua interazione: problema dei due corpi . . . . .	67
8.5	Teorema di König per l'energia cinetica . . . . .	68
8.6	Sistemi a massa variabile . . . . .	69
8.7	Moto di un razzo . . . . .	70
<b>9</b>	<b>Seconda legge cardinale</b>	<b>73</b>
9.1	La seconda legge cardinale . . . . .	73
9.2	Teorema di König per il momento angolare . . . . .	73
9.3	Corpo rigido in rotazione . . . . .	75
9.4	Momento d'inerzia . . . . .	76
9.5	Coppia di forze . . . . .	79
9.6	Sistemi di forze parallele . . . . .	80
9.7	Pendolo fisico . . . . .	81
9.8	Moto di una trottola . . . . .	82
<b>10</b>	<b>Statica, urti e rotolamento</b>	<b>85</b>
10.1	Sistemi in equilibrio . . . . .	85
10.2	Esempi di problemi di statica . . . . .	85
10.3	Moto di rotolamento . . . . .	89
10.4	Urti elastici e anelastici . . . . .	90

## Parte III: Gravitazione

<b>11</b>	<b>Legge di gravitazione universale</b>	<b>95</b>
11.1	Legge di gravitazione . . . . .	95
11.2	Campo gravitazionale . . . . .	96
11.3	Teorema di Gauss per il campo gravitazionale . . . . .	97
11.4	Energia di campo gravitazionale . . . . .	102
<b>12</b>	<b>Moto dei pianeti</b>	<b>105</b>
12.1	Moto dei corpi celesti e leggi di Keplero . . . . .	105
12.2	Considerazione col problema dei due corpi . . . . .	111

**Parte IV: Meccanica dei fluidi**

<b>13</b>	<b>Statica dei fluidi</b>	<b>115</b>
13.1	Cosa sono i fluidi . . . . .	115
13.2	Fluidi in quiete . . . . .	116
13.3	Legge di Stevino . . . . .	116
13.4	Legge di Archimede e esperienza di Torricelli . . . . .	118
13.5	Conseguenze della legge di Stevino . . . . .	120
<b>14</b>	<b>Dinamica dei fluidi</b>	<b>123</b>
14.1	Fluidi in moto . . . . .	123
14.2	Legge di Bernoulli . . . . .	125

**Parte V: Onde meccaniche elastiche**

<b>15</b>	<b>Caratteristiche delle onde</b>	<b>131</b>
15.1	Onde meccaniche . . . . .	131
15.2	Onde sinusoidali . . . . .	132
15.3	Onde longitudinali . . . . .	134
15.4	Onde trasversali . . . . .	136
15.5	Energia e intensità d'onda . . . . .	137
<b>16</b>	<b>L'interferenza e le onde stazionarie</b>	<b>139</b>
16.1	Interferenza . . . . .	139
16.2	Onde stazionarie . . . . .	141

**Parte VI: Formulari**

<b>A</b>	<b>Formulario di meccanica del punto materiale</b>	<b>145</b>
A.1	Cinematica . . . . .	145
A.2	Dinamica . . . . .	146
A.3	Energia e Lavoro . . . . .	147
A.4	Pendolo con lavoro . . . . .	147
A.5	Oscillatori armonici . . . . .	147
<b>B</b>	<b>Formulario di meccanica dei sistemi e del corpo rigido</b>	<b>149</b>
B.1	Sistemi . . . . .	149
B.2	Problema dei due corpi . . . . .	149
B.3	Teorema di Koenig . . . . .	149
B.4	Seconda equazione cardinale . . . . .	149
B.5	Momenti di inerzia . . . . .	150
B.6	Corpi rotanti . . . . .	151
B.7	Pendolo fisico . . . . .	151
B.8	Urti . . . . .	151
<b>C</b>	<b>Formulario di meccanica dei fluidi</b>	<b>153</b>
C.1	Statica dei fluidi . . . . .	153
C.2	Dinamica dei fluidi . . . . .	154

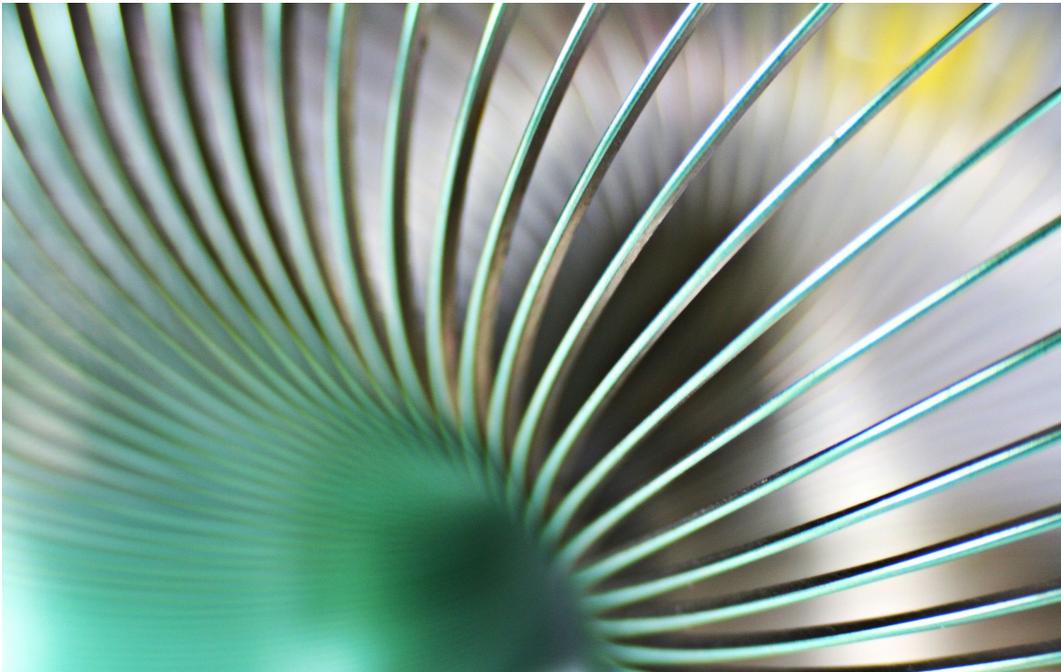
<b>D</b>	<b>Formulario di onde meccaniche elastiche</b>	<b>155</b>
D.1	Onde meccaniche . . . . .	155
D.2	Onde sinusoidali . . . . .	155
D.3	Onde longitudinali . . . . .	156
D.4	Onde trasversali . . . . .	156
D.5	Intensità e energia . . . . .	156
D.6	Interferenza . . . . .	156
D.7	Onde stazionarie . . . . .	157

### Crediti

<b>Fonti dei testi</b>	<b>161</b>
<b>Fonti delle immagini</b>	<b>165</b>

PARTE I

# Meccanica del punto materiale





## Introduzione

### 1.1 Cos'è la meccanica newtoniana

La meccanica newtoniana, o meccanica classica, descrive le interazioni che avvengono tra corpi a livello macroscopico, osservabili direttamente nella vita quotidiana. Tra le grandezze studiate dalla meccanica classica ci sono velocità, accelerazione, energia meccanica, lavoro.

Tutto quello che sappiamo sul moto dei corpi lo dobbiamo a **Galileo Galilei** (1564-1642) e a **Isaac Newton** (1642-1727). Galileo fu il primo a mettere in discussione le teorie di Aristotele, ritenute da secoli verità inconfutabili. Newton riprese gli studi di Galileo ed enunciò le tre leggi fondamentali della dinamica, che descrivono l'interazione fra corpi, oltre a trovare un'espressione per la forza gravitazionale.

La meccanica classica però non è applicabile in tutte le situazioni. Se le velocità dei corpi che interagiscono sono molto alte, cioè prossime alla velocità della luce, dobbiamo sostituire la meccanica newtoniana con la teoria della relatività speciale di Einstein. Ancora, se le interazioni avvengono a livello subatomico, dobbiamo prendere in considerazione la meccanica quantistica. La meccanica newtoniana è un caso particolare di queste due grandi teorie della fisica moderna. Ed è tuttavia un caso molto importante, in quanto ci permette di studiare sia fenomeni che riguardano oggetti della vita quotidiana (come il moto di un pallone da calcio, una macchina in frenata, una ruota che gira...) sia fenomeni astronomici (come il moto dei pianeti intorno al Sole, o il comportamento delle galassie).

Gli argomenti del corso saranno: meccanica del punto materiale, meccanica dei sistemi di punti e meccanica del corpo rigido, teoria della gravitazione, meccanica dei fluidi, onde meccaniche.



## Cinematica del punto materiale

### 2.1 Cinematica del punto

La cinematica è quella parte della meccanica che si occupa di descrivere il moto di un corpo, senza analizzarne le cause.

A prima vista studiare il moto di un corpo che si muove nello spazio può sembrare complicato. Basti pensare a un aereo, costituito dalle ali, dalla fusoliera, o a una persona che corre, con tutti quei muscoli e articolazioni, movimenti della braccia ecc. Però, a pensarci bene, un aereo percorre di norma moltissimi chilometri. E alzando lo sguardo al cielo lo vediamo come un puntino lontano. Lo stesso vale per il corridore, da lontano non ci preoccupiamo dei movimenti delle braccia, ma siamo interessati a misurare quanto tempo percorre 100 metri, per esempio. Queste considerazioni ci portano a dire che se lo spazio percorso da un corpo è molto maggiore delle sue dimensioni, possiamo trattare quest'ultimo come se fosse un punto.

Un **punto materiale** è un oggetto privo di dimensioni che permette di semplificare l'osservazione del moto, in quanto vengono così eliminate le complicazioni derivanti dall'estensione stessa del corpo.

Bisogna però ricordare che questa assunzione funziona solo per il **moto di traslazione**. Come vedremo nella parte sul corpo rigido, se vogliamo studiare il moto di una ruota che gira non possiamo certo considerarla un punto.

La cinematica è usata dai produttori di automobili quando devono determinare le performance delle loro vetture prima e durante una corsa. I geologi usano questo ramo della meccanica newtoniana per misurare il moto delle placche tettoniche e predire i terremoti. O ancora, i ricercatori medici usano la cinematica per mappare il flusso di sangue attraverso l'arteria di un paziente, allo scopo di determinare l'eventuale ostruzione dell'arteria. Ci sono innumerevoli altri esempi. Noi inizieremo con il moto rettilineo, per poi studiare il moto di un corpo in due dimensioni.

### 2.2 Moto rettilineo

Iniziamo con una definizione:

◇ **Definizione** Definiamo **traiettoria** il luogo geometrico dei punti occupati dal punto materiale in movimento.

Il moto rettilineo si svolge su una **traiettoria rettilinea**. Il punto si muove dunque lungo una retta, su cui vengono arbitrariamente fissati origine e verso, e il moto di questo è descrivibile tramite la sola coordinata  $x = x(t)$  (moto a una dimensione).

Attraverso lo studio delle variazioni della posizione del punto nel tempo è possibile definire la velocità del punto; una variazione di velocità nel tempo, invece, fa acquisire al punto un'accelerazione.

### 2.2.1 Velocità

◇ **Definizione** Si definisce **velocità media** il rapporto tra lo spostamento e l'intervallo di tempo in cui esso si verifica:

$$v_m(t_1, t_2) = \frac{\Delta x_{12}}{\Delta t_{12}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Questo dato è però insufficiente a descrivere il moto di un punto.

**Esempio.** Un punto che parte dalla posizione  $x_0$  con velocità  $v$  e nella posizione  $x_1$  inverte il verso del moto per poi fermarsi in  $x_0$ , ha  $\langle v \rangle = 0$  poiché posizione iniziale e finale coincidono.

Per definire le caratteristiche effettive del moto è quindi necessario ridurre l'intervallo di tempo considerato, facendolo tendere a zero. Si calcola cioè la derivata dello spazio in funzione del tempo

◇ **Definizione** Si definisce **velocità istantanea** il seguente limite:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m(t, t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Nota la velocità istantanea, si può ricavare la funzione  $x(t)$  (**legge oraria o equazione del moto**) attraverso l'operazione inversa della derivazione, l'integrazione.

Se la velocità non è costante ma varia nel tempo, il punto possiede un'accelerazione.

### 2.2.2 Accelerazione

◇ **Definizione** Si definisce come **accelerazione media** il rapporto tra la variazione di velocità in un intervallo di tempo e l'intervallo di tempo stesso:

$$a_m(v_1, v_2) = \frac{\Delta v_{12}}{\Delta t_{12}}$$

Anche in questo caso l'accelerazione media non è sufficiente a descrivere accuratamente il moto, pertanto è opportuno calcolare tale variazione in un intervallo di tempo tendente a zero.

◇ **Definizione** Si definisce come **accelerazione istantanea** la quantità:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

### 2.2.3 Velocità e accelerazione a "confronto"

	$v$	$a$
0	quiete	moto uniforme
costante	moto uniforme	moto uniformemente accelerato
+	il punto si muove nello stesso verso dell'asse	la velocità cresce
-	il punto si muove nel verso opposto dell'asse	la velocità decresce

Posso correlare tra loro spostamento, velocità iniziale, velocità finale e accelerazione tramite il seguente procedimento:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad a = \frac{dv}{dx} v \quad a \cdot dx = dv \cdot$$

$$\int_{x_0}^x a dx = \int_{v_0}^v v dv \quad \int_{x_0}^x a dx = \left[ \frac{v^2}{2} \right]_{v_0}^v$$

$$\int_{x_0}^x a dx = \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \quad 2 \int_{x_0}^x a dx = v^2 - v_0^2$$

Se  $a$  è costante (**moto rettilineo uniformemente accelerato**) si ha  $a_0 = a(x)$ , quindi:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$$

### 2.2.4 Tipi di moto

#### Moto rettilineo uniforme

Il moto è rettilineo uniforme con  $v_0 = \langle v \rangle = v(t)$ , cioè con **velocità costante**.

In questo caso la legge oraria è:

$$v = v_0 ; \quad \frac{dX}{dt} = v_0 ; \quad dx = v_0 \cdot dt ;$$

$$\int_{x_0}^{x_t} dx = \int_0^t v_0 dt ; \quad \int_{x_0}^{x_t} dX = v_0 \int_0^t dt ;$$

$$[x]_{x_0}^{x(t)} = v_0 [t]_0^t ; \quad x(t) - x_0 = v_0(t - 0) ;$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 \cdot t$$

## Moto uniformemente accelerato

Se l'**accelerazione è costante** ( $\langle a \rangle = a(t)$ ), il moto è detto uniformemente accelerato.

L'equazione di tale moto è ricavabile attraverso una doppia integrazione dell'accelerazione istantanea. La legge oraria è:

$$a_0 = a \quad a_0 = \frac{dv}{dt} \quad dv = a_0 \cdot dt$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_0^t a_0 dt \quad \int_{v_0}^{v(t)} dv = a_0 \int_0^t dt$$

$$[v]_{v_0}^{v(t)} = a_0 [t]_0^t \quad v(t) - v_0 = a_0 \cdot (t - 0)$$

$$v(t) = v_0 + a_0 \cdot t$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \quad v_0 + a_0 \cdot t = \frac{dx}{dt} \quad dx = (v_0 + a_0 \cdot t) dt$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t (v_0 + a_0 \cdot t) dt \quad \int_{x_0}^{x(t)} dx = v_0 \int_0^t dt + a_0 \int_0^t t \cdot dt$$

$$[x]_{x_0}^{x(t)} = v_0 [t]_0^t + a_0 \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^t$$

$$x(t) - x_0 = v_0 \cdot t + a_0 \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + a_0 \frac{t^2}{2}$$

## Moto di un grave in una dimensione

$$|\vec{a}| = 9,8 \frac{m}{s^2} = g$$

Lascio cadere un corpo dall'altezza  $h$  (trascurando la resistenza dell'aria):

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Si considerino  $y_0 = h$  in cui  $h$  è l'altezza da cui si lascia cadere il corpo,  $v_0 = 0$  e  $a = g$ . Si ottiene in tal modo:

$$y = h - \frac{g}{2} t^2$$

Per ricavare il tempo d'impatto  $t_i$  pongo  $y = 0$ :

$$y = 0 \quad h - \frac{g}{2} t^2 = 0 \quad t^2 = \frac{2h}{g}$$

$$t_i = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Per ricavare la velocità d'impatto  $v_i$  pongo  $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$  nell'equazione  $v = v_0 + a_0t$ . Considero inoltre  $v_0 = 0$  e  $a = g$ :

$$v = -gt = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2hg}$$

### Moto in una dimensione con attrito viscoso

Nel moto in una dimensione con attrito viscoso agisce una forza  $k > 0$  che frena il moto, causando una diminuzione dell'accelerazione  $a$  che quindi è direttamente proporzionale alla costante  $-k$ : più è grande  $k$ , più sarà frenato il moto.

$$a = -kv \quad k > 0$$

Sapendo anche che  $a = \frac{dv}{dt}$ , si può dedurre la seguente equazione:

$$\frac{dv}{dt} = -kv \quad \frac{dv}{v} = -kdt$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{1}{v} dv = -k \int_0^t dt \quad [\ln v]_{v_0}^{v(t)} = -k[t]_0^t$$

$$\ln v(t) - \ln v_0 = -k(t - 0) \quad \ln \frac{v(t)}{v_0} = -kt$$

$$e^{\ln \frac{v(t)}{v_0}} = e^{-kt} \quad \frac{v(t)}{v_0} = e^{-kt}$$

$$v(t) = e^{-kt} \cdot v_0$$

Diagramma orario della funzione  $v(t)$ :  $e^{-kt} = \frac{1}{e^{kt}}$ , quindi  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{kt}} = 0$ . Posso dedurre da ciò che il grafico della funzione  $v(t)$  è una curva esponenziale, con  $v(t)$  che tende a 0 al tendere di  $t$  all'infinito.

La velocità a un tempo  $t = \tau = \frac{1}{k}$  è:

$$v(\tau) = \frac{1}{e^{\frac{1}{k}k}} \cdot v_0 \simeq \frac{1}{2,7} v_0$$

Quindi  $v(\tau)$  è pari a circa  $\frac{1}{3}$  della velocità iniziale  $v_0$

Per quanto riguarda la legge oraria, sapendo che  $v(t) = \frac{dx}{dt}$ , si ricava che:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt} \quad dx = v_0 e^{-kt} dt$$

$$\int_0^{x(t)} dx = \int_0^t v_0 \cdot \frac{1}{e^{kt}} dt$$

$$x(t) = v_0 \cdot (1 - e^{-kt})$$

## 2.3 Moto circolare

### 2.3.1 Moto generico in due dimensioni

Considerata una traiettoria curvilinea su cui viene fissata arbitrariamente un'origine  $O$  e il verso di percorrenza:

◇ **Definizione** Si definisce **ascissa curvilinea** la lunghezza del tratto di curva che congiunge  $x_1$  a  $O$ . Se  $x_1$  si trova verso  $x$  positive secondo il verso di percorrenza stabilito l'ascissa curvilinea  $x_1O$  o  $Ox_1$  è positiva, se  $x_1$  si trova verso  $x$  negative l'ascissa curvilinea è negativa. La velocità del punto definisce la concordanza tra il verso fissato e il verso di percorrenza della curva: velocità positive sono quelle che fanno muovere il punto secondo il verso fissato, negative quelle che lo fanno muovere nel verso opposto.

La velocità media

$$V_m(t_1, t_2) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

è rappresentata dal vettore che ha stessa direzione del segmento  $x_1x_2$  e verso coincidente con quello del moto. Si può quindi notare come, ancor meno che nel moto a una dimensione, la velocità media dia informazioni poco dettagliate riguardo al moto del punto.

Applicando l'operazione di limite si ottiene la velocità istantanea

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} V_m(t, t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{dX}{dt}$$

il cui vettore è tangente alla traiettoria nella posizione  $x_1$  in cui si trova il punto nell'istante  $t$  considerando.

Derivando una seconda volta si ottiene l'accelerazione istantanea

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

il cui vettore è parallelo al raggio di curvatura in  $x_1$ , dunque perpendicolare al vettore  $v(t)$ .

### 2.3.2 Scomposizione generica del moto in tre dimensioni

$\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$  sono versori, e sono quindi costanti in tutto lo spazio.  $\vec{x}(t)$  è il versore posizione. Scomponendolo sui tre assi  $x$ ,  $y$  e  $z$  si ottiene:

$$\vec{x}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j} + z(t) \cdot \hat{k}$$

Ricavo, a partire dalla scomposizione di  $\vec{x}(t)$ , la scomposizione sui tre assi del vettore velocità  $\vec{v}(t)$ :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k}$$

Sapendo inoltre che

$$\vec{v}(t) = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

Deduco la seguente uguaglianza

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Si può inoltre ricavare la scomposizione sui tre assi del vettore accelerazione  $\vec{a}(t)$ :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$$

Analogamente a quanto mostrato nel paragrafo sovrastante riguardante la velocità, dimostro che dato che

$$\vec{a}(t) = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

allora si deduce che

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

### 2.3.3 Moto circolare

◇ **Definizione** Si definisce **moto circolare** il caso particolare di moto curvilineo che abbia traiettoria circolare di centro  $O$  e raggio  $R$ .

Si definisce **coordinata curvilinea** (e si indica con  $s$ ) la lunghezza orientata dell'arco.

La legge oraria è:

$$\theta = \theta(t)$$

Se il moto è circolare uniforme, la velocità angolare è costante:  $\omega = \omega_0$ , quindi si ha che:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0; \quad d\theta = \omega_0 dt;$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta(t)} d\theta = \int_{t_0}^t \omega_0 dt;$$

$$[\theta]_{\theta_0}^{\theta(t)} = \omega_0 [t]_{t_0}^t; \quad \theta(t) - \theta_0 = \omega_0 t - \omega_0 t_0;$$

Dato che  $t_0 = 0s$ ,  $\omega_0 t_0 = 0$ , perciò:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t$$

ponendo  $\theta_0 = 0_{\text{rad}}$ ,

$$\theta = \omega t$$

## Scomposizione del moto

Applicando quanto appreso nel caso generale del moto curvilineo in due dimensioni sulle componenti dei vettori  $v(t)$  e  $a(t)$  a quello specifico del moto circolare, ottengo:

$$\begin{cases} x(t) = r \cos \theta = r \cos(\omega t) \\ y(t) = r \sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_x(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega r \sin(\omega t) \\ V_y(t) = \omega r \cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dV_x}{dt} = -\omega^2 r \cos(\omega t) \\ a_y(t) = \frac{dV_y}{dt} = -\omega^2 r \sin(\omega t) \end{cases}$$

dove  $a$  è detta accelerazione centripeta.

◇ **Definizione** L'**accelerazione centripeta** è l'accelerazione che causa il curvamento della traiettoria, senza modificare il modulo della velocità angolare  $\omega$ .

Per questo si parla di moto uniforme nonostante sia presente un'accelerazione!

Legame tra  $v$ ,  $\omega$ ,  $a$

$$\theta = \frac{S}{R}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{R}$$

Dato che  $V = \frac{dS}{dt}$  si può dedurre che

$$\omega = \frac{1}{R} \cdot \frac{dS}{dt}$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(\omega^2 R \cos(\omega t))^2 + (\omega^2 R \sin(\omega t))^2} = \omega^2 R \sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)}$$

Dato che  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$  si deduce che  $\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$  e dunque

$$|\bar{a}| = \omega^2 R \cdot 1 = \omega^2 R$$

Tenendo inoltre conto del fatto che  $\omega = \frac{V}{R}$ , si può ricavare l'accelerazione in funzione della velocità istantanea

$$a_c = \frac{V^2}{R}$$

## 2.4 Moto armonico

Proiettando il moto circolare uniforme sugli assi cartesiani, è evidente come questo risulti essere la composizione di due moti armonici semplici. La legge oraria di questo particolare moto vario è:<sup>1</sup>

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

dove:

- $A$  = ampiezza
- $\omega$  = pulsazione
- $\omega t + \phi$  = fase del moto
- $\phi$  = fase iniziale

Essendo il moto descritto dalla funzione coseno o seno, ha delle caratteristiche spaziali ben precise:

- il coseno è una funzione limitata superiormente e inferiormente, dunque assume dei valori estremi ( $\pm 1$ ). Un punto che si muove di moto armonico quindi oscilla tra due posizioni limite corrispondenti a  $\pm A$ ;
- la funzione coseno inoltre è periodica, pertanto anche il moto armonico è un moto periodico.

◇ **Definizione** Il moto di un punto si dice **periodico** quando a intervalli di tempo regolari il punto ripassa nella stessa posizione con la stessa velocità.

Per calcolare il periodo di un moto armonico, ovvero il tempo dopo cui il moto si ripete, basta ricordare che il periodo di  $\sin x$  è  $2\pi$  e sfruttare la definizione.

Si considerino due istanti,  $t$  e  $t' = t + T$ , con  $T$  periodo del moto. Per la definizione di moto periodico, la posizione del punto in  $t$  è uguale alla posizione  $t'$ , per cui  $x(t) = x(t')$ . Essendo il periodo di  $\cos \theta$   $2\pi$ , deve valere  $\omega t + \phi = \omega t' + \phi + 2\pi$ , quindi  $\omega(t - t') = 2\pi$

Ecco quindi il periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

L'inverso del periodo si definisce **frequenza**

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

La frequenza si misura come  $[\nu] = [T^{-1}]$  ovvero  $\frac{1}{s} = 1Hz = \frac{1ciclo}{s}$

Periodo e frequenza sono indipendenti dall'ampiezza e dalla fase iniziale, dipendono invece dalla pulsazione  $\omega$ . In particolare possiamo fare le seguenti considerazioni: più la pulsazione è grande, più il moto è lento ( $T$  grande e  $\nu$  piccolo), più la pulsazione è piccola, più il moto è veloce ( $T$  piccolo e  $\nu$  grande).

Velocità e accelerazione si ricavano per derivazione dalla legge oraria:

<sup>1</sup>È analogo esprimere il moto tramite un  $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$  o  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi')$ . Infatti usando gli archi associati  $\sin(\phi) = \cos(\frac{\pi}{2} - \phi)$  e basta porre  $\phi' = \frac{\pi}{2} - \phi$  per avere perfetta equivalenza. Le due funzioni differiscono solo per la fase iniziale.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

Da qui si ricava che l'accelerazione è proporzionale allo spostamento con segno negativo:

$$a = -\omega^2 x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (\text{equazione del moto armonico})$$

Questa, definita **equazione del moto armonico**, è la condizione necessaria e sufficiente affinché un moto sia armonico. Sofferamoci sul significato di questa affermazione. Se nello studio di un moto si trova un'accelerazione proporzionale allo spostamento con segno negativo e costante di proporzionalità  $C$ , si può immediatamente dedurre che la legge oraria del moto sarà quella di un moto armonico  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ , con pulsazione  $\omega = \sqrt{C}$ . Un ottimo esempio è costituito dal moto di un corpo sottoposto a una forza elastica. Viceversa se si conosce l'equazione di un moto ed essa rappresenta un moto armonico si può dire che l'accelerazione a cui il corpo è sottoposto è della forma  $a = -\omega^2 x$ .

Sovrapponendo i grafici di posizione, velocità e accelerazione, è possibile notare come questi differiscano tra loro solo per una differenza di fase:

- posizione e velocità sono in quadratura di fase (cioè sfasate di  $T/4$  quindi di  $\pi/2$ );
- posizione e accelerazione in opposizione di fase (cioè sfasate di  $T/2$  e quindi di  $\pi$ ).

$A$  e  $\phi$  sono costanti, e una volta note permettono di calcolare le condizioni iniziali ( $t = 0$ ):

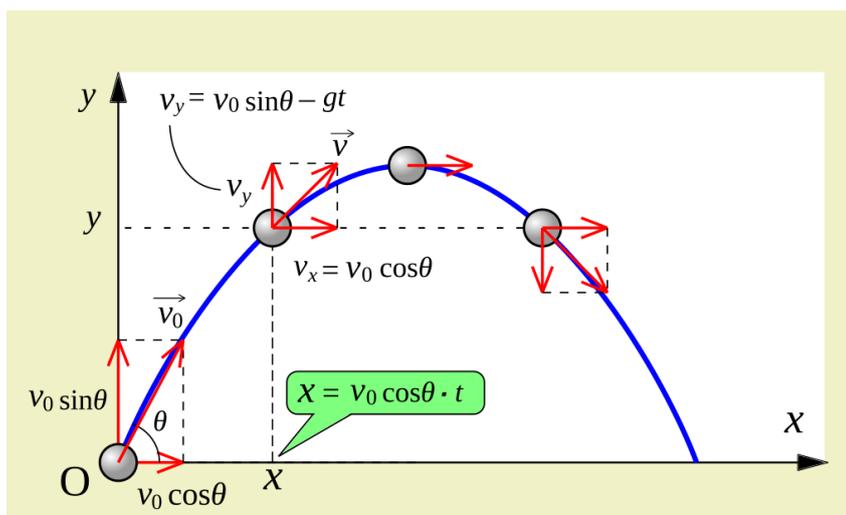
$$\begin{cases} x_0 = A \sin \Phi \\ v_0 = \omega A \sin \Phi \end{cases}$$

Viceversa tali costanti possono essere ricavate conoscendo le condizioni iniziali  $x_0$  e  $v_0$ .

## 2.5 Moto parabolico dei corpi

Il moto parabolico è un moto bidimensionale, combinazione di due moti rettilinei simultanei e indipendenti (non si influenzano), uno rettilineo uniforme e uno uniformemente accelerato.

Prendiamo il moto di un proiettile lanciato con velocità  $V_0$  e angolo  $\theta$  all'origine. In questo caso il proiettile subisce accelerazione costante lungo l'asse  $y$  per effetto della forza di gravità, mentre sull'asse  $x$  il moto è uniforme in quanto non agiscono forze e non vi è accelerazione. Vediamo dunque che si tratta di un esempio di moto parabolico.



Condizioni iniziali:

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{0x} = V_0 \cos \theta \\ V_{0y} = V_0 \sin \theta \end{cases}$$

Scomposizione del moto:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + V_{0x}t \\ y(t) = V_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = V_0 \cos \theta \cdot t & [1] \\ y(t) = V_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 & [2] \end{cases}$$

### 2.5.1 Traiettoria

Ricavo  $t$  dalla [1] e lo sostituisco nella [2] per avere  $y(x)$ :

$$t = \frac{x}{V_0 \cos \theta};$$

$$y(x) = V_0 \sin \theta \frac{x}{V_0 \cos \theta} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2 \theta};$$

$$y(x) = \tan \theta x - \frac{g}{2 V_0^2 \cos^2 \theta} x^2$$

### 2.5.2 Gittata

Pongo  $y(x) = 0$  per ricavare lo spazio totale percorso orizzontalmente (e, dunque, la gittata):

$$\tan \theta x - \frac{g}{2 V_0^2 \cos^2 \theta} x^2 = 0;$$

$$\frac{V_0 \sin \theta x}{V_0 \cos \theta} - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \theta} = 0$$

$$\frac{2 \sin \theta \cos \theta V_0^2 x - gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \theta}$$

Dato che  $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$ :

$$x(V_0^2 \sin 2\theta - gx) = 0$$

Per la legge di annullamento del prodotto, ricavo:

$$x = 0$$

che è la posizione del punto di lancio, e

$$x = \frac{\sin 2\theta \cdot V_0^2}{g}$$

che rappresenta la gittata.

### 2.5.3 Quota massima

Per ricavare la massima quota  $y_{max}$  sostituisco  $t_{imp}$  nella [2]:

$$y_{max} = \frac{V_{0y}^2}{2g} = \frac{V_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

## Dinamica del punto materiale

### 3.1 Primo e secondo principio della dinamica

Se la cinematica ha il compito di descrivere il moto, senza preoccuparsi delle cause che lo determinano, la dinamica si occupa invece di quest'ultimo problema. Vogliamo rispondere cioè a domande del genere: perché avviene il moto? Perché un corpo ha un certo moto piuttosto che un altro?

Il primo scienziato moderno a occuparsi di queste questioni fu Galileo, che fece i suoi esperimenti con un piano inclinato. Una biglia lanciata in salita diminuiva progressivamente la sua velocità, mentre per una in discesa la velocità aumentava. E tali accelerazioni o decelerazioni erano tanto maggiori o minori a seconda dell'inclinazione del piano. Allora formulò la seguente ipotesi: in assenza di inclinazione la velocità della biglia rimane costante, cioè essa si muove indefinitamente di moto rettilineo uniforme. Questo è ovviamente un esperimento mentale, perché servirebbe un piano infinito per verificare che la biglia prosegua il suo moto rettilineo uniforme all'infinito. Usando però un piano liscio e abbastanza lungo, la condizione descritta può essere riprodotta con buona approssimazione, per un breve periodo di tempo. Galileo capì proprio questo: se potessimo togliere l'attrito della biglia con l'aria e con il piano, il corpo non si fermerebbe mai. Se un corpo si ferma è perché agisce una forza esterna. Questo concetto costituisce il primo principio della dinamica, detto **principio di inerzia** o **prima legge di Newton**. Esso afferma quanto segue:

Un corpo non soggetto a forze mantiene indefinitamente il suo stato di moto rettilineo uniforme.

È importante osservare che lo **stato di quiete** (un corpo fermo) è un caso particolare di moto rettilineo uniforme con velocità nulla.

Ora, cos'è esattamente una forza? Una **forza** può essere una spinta, una trazione, ma non solo. Vedremo più avanti altri esempi. Diciamo però subito che una forza è una **grandezza vettoriale**, cioè ha un modulo, una direzione e un verso. D'altra parte questo sembra molto naturale. Possiamo infatti lanciare una pallina verticalmente verso l'alto o orizzontalmente in avanti. Il moto risultante dipende quindi dalla direzione della forza impressa alla pallina.

Torniamo ora al primo principio. Esso è in qualche modo contro-intuitivo, descrive una condizione ideale, quella di un corpo non soggetto a forze. Questo, come è noto

dall'esperienza di tutti i giorni, non accade mai. In questo stesso momento siamo sottoposti alla forza di gravità, per esempio. Se siamo in auto e affrontiamo una curva ci sentiremo tirare verso l'esterno della stessa. Il mondo è in definitiva dominato da forze esterne, dagli attriti ecc. Come possiamo dunque conciliare un qualcosa di ideale con qualcosa di reale e tangibile? Il problema si risolve considerando l'effetto complessivo delle forze. Possiamo allora formulare il **primo principio della dinamica** nel modo seguente:

Se la risultante delle forze agenti su un corpo è nulla, il corpo si muove di moto rettilineo uniforme.

Al fine di dare una definizione operativa di forza, supponiamo di svolgere il seguente esperimento. Attacciamo un oggetto a una molla e tiriamo allungando la molla. Il corpo, inizialmente fermo, si muove. Misuriamo quindi un'accelerazione  $a_0$ . Attacciamo un secondo oggetto di dimensioni diverse dal primo e tiriamo con la stessa forza: registreremo un'altra accelerazione  $a_1$ . Il rapporto delle accelerazioni sarà:

$$\frac{a_0}{a_1}$$

Se produco un allungamento maggiore, cioè se tiro con più forza e misuro le due accelerazioni  $a'_0$  e  $a'_1$ , il rapporto sarà uguale a quello precedente, cioè:

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a'_0}{a'_1}$$

Deve esistere allora una proprietà intrinseca dei corpi, che chiamiamo **massa**. Scegliendo come massa campione  $m_0$  la massa, pari a 1 kg, di un cilindro di platino iridio conservato all'Ufficio di Pesi e Misure di Sevres, vicino a Parigi, possiamo definire la massa di un corpo qualsiasi come:

$$m = m_0 \frac{a_0}{a}$$

E questa è la nostra definizione operativa di massa. Definiamo ora come forza unitaria  $F$  la forza necessaria per accelerare di  $1 \text{ m}^2$  il corpo campione di massa 1 kg. Dalla relazione precedente possiamo ricavare una legge generale

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Questa è la **seconda legge di Newton** o **seconda legge della dinamica**. È importantissima perché ci permette di dare una descrizione dinamica di qualsiasi moto.

Una forza è quindi la grandezza che esprime e misura l'interazione tra sistemi fisici, cioè tra due o più corpi, o tra un corpo e l'ambiente.

Se una forza agisce su un punto materiale, tale forza sarà uguale in modulo al prodotto della variazione di velocità, cioè accelerazione del punto, per la sua **massa inerziale**. Usiamo il termine massa inerziale perché la massa esprime l'inerzia del punto, cioè la sua resistenza a variare il proprio stato di moto. A parità di forza applicata un corpo di massa maggiore accelera di meno di un corpo di massa minore.

Se dunque possiamo trascurare le dimensioni di un corpo e considerarlo un punto, non possiamo tuttavia privarlo della sua massa. Una semplice formula esprime così

un concetto molto importante: le forze producono accelerazioni. L'unità di misura della forza è il **newton**, abbreviato con la lettera  $N$ .

In fisica ci sono quattro forze fondamentali: la **forza gravitazionale**, esercitata tra corpi dotati di massa; la **forza elettromagnetica**, esercitata tra corpi carichi elettricamente; la **forza debole** e la **forza forte**, agenti su scala subatomica e responsabili per esempio della radioattività e della stabilità del nucleo atomico. La meccanica classica si occupa della forza gravitazionale e di leggi di forza empiriche come forza d'attrito, forza elastica, tensione di fili ecc (che in ultima analisi dipendono da forze elettriche).

Se su un punto materiale agiscono più forze, per conoscerne l'effetto complessivo dovremo sommarle vettorialmente, quindi la seconda legge di Newton diventa:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Se la risultante delle forze è nulla, anche l'accelerazione è nulla e il corpo o è in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme. Abbiamo così ritrovato il primo principio della dinamica.

Viene ora spontaneo chiedersi quali sono i limiti di validità di questa legge sperimentale. Essa è valida nei cosiddetti sistemi di riferimento inerziali, cioè quelli che si muovono di moto rettilineo uniforme rispetto a un punto fisso. Nei sistemi accelerati, detti non inerziali, la legge subirà delle correzioni. In un tale sistema di riferimento, infatti, un osservatore noterà delle forze a cui non saprà associare un'origine. Esse vengono appunto chiamate **forze apparenti**.

In realtà non esiste un vero e proprio sistema di riferimento inerziale, in quanto l'universo stesso è in una condizione di espansione accelerata. Però possiamo considerare con ottima approssimazione un sistema solidale con le stelle fisse, cioè quei corpi celesti posti a una distanza talmente elevata dalla Terra da sembrare immobili.

La legge di Newton è valida inoltre per corpi che si muovono a velocità molto inferiori a quelle della luce nel vuoto. Se vogliamo studiare fenomeni riguardo quest'ultimo aspetto, dovremo abbandonare la meccanica classica e far riferimento alla teoria della relatività speciale.

## 3.2 Forza peso e forze vincolari

Nel modulo precedente abbiamo introdotto il concetto di forza e abbiamo visto come essa causi un cambiamento del moto di un corpo. Iniziamo ora a parlare di due forze fondamentali, forze che sperimentiamo ogni giorno della nostra vita: la forza peso e la forza vincolare. Partiamo da un'esperienza comune: prendiamo una pallina e teniamola in mano. A un certo punto apriamo la mano: la pallina cade. Come intuì Galileo, il moto della pallina è uniformemente accelerato. Ma se c'è un'accelerazione c'è anche una forza che causa tale accelerazione. Nel nostro caso è la forza di gravità della Terra. La Terra attrae verso il suo centro tutti i corpi sulla e in prossimità della sua superficie. Il peso di una persona non è altro che la forza con cui la Terra la attrae. Si parla per questo di **forza peso**, e si dice che su un corpo agisce la sua forza peso. Per un corpo di massa  $m$  il suo peso vale:

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

dove  $g$  è l'accelerazione di gravità. Se su un corpo agisce solo il suo peso, si dice che il corpo è in caduta libera. Nell'usare questa equazione in fenomeni fisici locali, cioè

quei fenomeni che si svolgono su brevi distanze (una strada, una stanza, un tavolo ecc...) faremo le seguenti assunzioni:

- useremo per  $g$  il suo valore medio,  $9,8 \text{ m/s}^2$ ;
- la direzione della forza peso sarà sempre verticale, ovvero per noi la Terra sarà a tutti gli effetti piatta.

Ora raccogliamo la pallina caduta e mettiamola sul tavolo. Notiamo che rimane ferma. Dobbiamo allora concludere, in virtù del secondo principio della dinamica, che sulla pallina agisce un'altra forza, oltre al suo peso. In generale, quando un corpo preme contro una superficie, quest'ultima, anche se rigida, si deforma seppur lievemente e preme sul corpo con una **forza** detta **normale**, in quanto perpendicolare alla superficie di contatto.

Non esiste un'espressione generale per la forza normale: a seconda della particolare situazione fisica avrà un certo valore. Nel caso del tavolo orizzontale la normale ha lo stesso modulo della forza peso ma verso opposto. Supponiamo però di avere un corpo fermo su un piano inclinato di un angolo  $\theta$  rispetto all'orizzontale. Adottiamo un sistema di riferimento con assi  $x, y$ , uno in direzione perpendicolare al piano e l'altro parallelo a quest'ultimo. In direzione perpendicolare al piano agiscono due forze: la componente della forza peso diretta in questa direzione e la normale. Poiché il corpo è fermo, le due forze devono essere uguali in modulo, quindi la forza normale in questa situazione vale (vedi figura):

$$\vec{N} = m\vec{g} \cos \theta$$



Quando ci pesiamo su una bilancia, la bilancia non misura il nostro peso, ma la forza normale. Se salissimo su un ascensore che accelera verso l'alto, la bilancia segnerebbe un valore più alto. Aumenta infatti la forza normale, mentre la forza peso è sempre la stessa.

Dunque se siamo fermi in piedi sul pavimento, o seduti da qualche parte, su di noi agiscono solo due forze: la forza peso e la forza normale esercitata dalla superficie su cui ci troviamo. In realtà ciò è vero solo se consideriamo la Terra come un sistema di riferimento inerziale. Essa infatti ruota su se stessa e, come abbiamo visto nel relativo modulo, un moto circolare uniforme è un moto accelerato. La Terra non è quindi un sistema di riferimento inerziale. Di conseguenza ogni corpo sulla sua superficie è soggetto a una forza apparente, detta **forza centrifuga**. Tuttavia il contributo di questa forza è completamente trascurabile (solo all'equatore si sente di più: ci fa sentire un po' più leggeri) e quindi, quando consideriamo situazioni fisiche locali, che riguardano corpi che si muovono per brevi distanze, ha senso considerare la Terra come se fosse ferma.

Continuiamo ora con l'analisi delle forze. La forza normale è solo un esempio di forza vincolare. Ogni volta che esiste un vincolo che impedisce il moto di un corpo in

una data direzione, esiste una forza esercitata dal vincolo stesso sul corpo. Nel caso della pallina ferma sul tavolo, il vincolo è costituito appunto dal tavolo.

Vediamo ora un altro esempio di forza vincolare. Prendiamo un filo, attacchiamo un'estremità al soffitto, e all'estremità libera attacchiamo una massa. Poiché la massa è ferma, oltre alla forza peso agisce un'altra forza. Essendo la massa a contatto solo con il filo, tale forza è esercitata dal filo stesso ed è chiamata **tensione**. Più in generale, ogni volta che una corda o una fune è attaccata a un corpo ed è tirata, essa tira il corpo con una forza  $\vec{T}$ , diretta lungo la corda e in verso concorde al moto del corpo.

Nella maggior parte dei casi possiamo fare le seguenti due assunzioni: la corda è inestensibile e ha massa trascurabile. Il fatto che la corda sia inestensibile ci dice che, se due corpi sono legati dalla stessa corda, le loro accelerazioni sono uguali. Cosa comporta il fatto che la massa sia trascurabile? Che il filo sviluppa alle sue estremità due forze uguali e contrarie, pari alla tensione. Vediamo perché.

Ogni pezzetto di filo è tirato da una parte e dall'altra da tutti gli altri pezzi di filo. In particolare, su ogni estremità libera del filo agisce una forza esterna. Queste forze esterne devono essere uguali alla tensione del filo. Infatti, se la massa è nulla, allora la risultante delle forze deve essere nulla, altrimenti per  $F = ma$  il filo avrebbe un'accelerazione infinita. Quindi la tensione è la stessa in tutto il filo, e se il filo collega due corpi tirerà entrambi con la stessa forza di modulo pari alla tensione.

Concludiamo con qualche osservazione. Se la forza normale agente su un corpo diminuisce fino a diventare nulla, significa che il corpo e la superficie si toccano ma la superficie non esercita nessuna forza. Se la forza normale diventa negativa, allora il corpo si stacca dalla superficie. È questo il caso, per esempio, di un corpo che percorre il giro della morte. Se la sua velocità iniziale non è sufficientemente alta, il corpo nel punto più alto si stacca. Ancora, se la tensione diventa negativa, significa che la corda non è più tesa e il corpo si stacca della corda.

### 3.3 Terzo principio della dinamica

Può capitare che a volte, durante uno scatto di rabbia, battiamo un pugno contro un tavolo. È evidente che se il pugno è forte sentiremo un po' di dolore. Cos'è successo di preciso? Abbiamo applicato una forza al tavolo, e il tavolo ha esercitato sul nostro pugno una forza di uguale intensità, ma in verso opposto alla nostra. È come se fossimo rimasti fermi e qualcuno ci avesse pestato la mano.

Più in generale, quando due corpi si spingono o si tirano, si dice che interagiscono, cioè ciascun corpo sperimenta la forza esercitata dall'altro. Questo è quanto afferma la **terza legge di Newton**, anche nota come **principio di azione e reazione**:

Se un corpo  $A$  esercita una forza sul corpo  $B$ , il corpo  $B$  contemporaneamente esercita una forza su  $A$  uguale in modulo e direzione, ma opposta in verso. Cioè

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$$

Le due forze hanno inoltre la stessa retta d'azione.

Vediamo un esempio. Una formica di massa  $m$  è attratta dalla Terra con una forza  $\vec{F} = m\vec{g}$ . Per la terza legge di Newton, la Terra è attratta dalla formica con

una forza  $\vec{F} = -m\vec{g}$ . Ovviamente, data l'enorme massa della Terra, l'accelerazione subita dal nostro pianeta è a tutti gli effetti uguale a zero.

A questo punto non bisogna confondere la terza legge della dinamica con la seconda legge. Se un libro è posato su un tavolo, la forza normale del tavolo non è la reazione al peso. Infatti, come detto prima, se la Terra esercita una forza verso il basso sul libro (il suo peso), allora il libro esercita una forza verso l'alto sulla Terra, e questa è la **forza di reazione**. Il motivo per cui la normale è uguale al peso del libro segue dal fatto che la sua accelerazione è nulla, il che richiede che le forze siano uguali e opposte (secondo principio).

La terza legge di Newton spiega perché possiamo camminare. Quando facciamo un passo in avanti, la nostra gamba spinge il pavimento all'indietro, il quale ci spinge in avanti con la stessa forza, permettendoci quindi di camminare. O ancora, immaginiamo di essere su una barca a remi e di voler seguire il corso di un fiume. Se non c'è corrente, per spostarci dobbiamo necessariamente remare. A ogni remata i remi spingono l'acqua all'indietro, cioè si esercita una forza sull'acqua. Per la terza legge di Newton, si esercita una forza anche sulla barca, che ci permette proprio di spostarci in avanti.

### 3.4 Forza d'attrito radente

Quando cerchiamo di spostare un mobile facciamo abbastanza fatica. È come se ci fosse una forza che si oppone alla nostra e che ci impedisce di spostare il mobile. Questa forza effettivamente esiste, è esercitata dal pavimento e si chiama forza di attrito radente. Essa contrasta lo scivolamento di una superficie sull'altra: si manifesta sia su un corpo fermo su cui è applicata una forza, sia su un corpo in movimento. Per tornare al mobile, immaginiamo di applicare una certa forza. Il mobile non si sposta. Applichiamo una forza più intensa. Il mobile ancora non si sposta. Spingiamo con tutte le nostre forze: il mobile inizia a muoversi. Quello che è successo è che siamo riusciti a vincere la cosiddetta **forza di attrito statico massima**. Più in generale, se una forza è applicata a un corpo inizialmente fermo, si osserva sperimentalmente che il corpo non si muove fino a quando la componente della forza parallela alla direzione dello spostamento desiderato non supera il valore critico:

$$f_{as} = \mu_s N$$

dove  $\mu_s$  è il coefficiente di attrito statico e  $N$  è la forza normale che agisce sul corpo. Quindi la forza di attrito statico non ha un valore fisso, ma assume di volta in volta lo stesso valore, in modulo, della forza applicata, fino al suo valore massimo. Una volta superato tale valore il corpo si muove e subentra la forza di attrito dinamico, che è costante per tutto il moto e vale:

$$f_{ad} = \mu_d N$$

dove  $\mu_d$  è il coefficiente di attrito dinamico e  $N$  è sempre la forza normale che agisce sul corpo. Il valore dei coefficienti dipende dalla natura delle superfici a contatto e sperimentalmente si verifica sempre la condizione:

$$\mu_d \leq \mu_s$$

Dunque una volta che abbiamo messo in moto il corpo, se vogliamo che si muova a velocità costante dovremo ridurre la forza che agisce su di esso, in modo che la risultante delle forze sia nulla.

Abbiamo detto prima che l'attrito è generato dal pavimento. Per la terza legge di Newton, anche il corpo in movimento esercita una forza sul pavimento uguale e contraria. Se il corpo si muove sul pavimento non ci interessa più di tanto questa forza di reazione, ma se il corpo si muove su una superficie mobile allora bisogna tenerne conto.

Per quanto detto finora, sembra che la forza di attrito radente sia sempre diretta in verso opposto alla direzione del moto del corpo. In realtà non è sempre così. Certo, se su un corpo in movimento agisce solo l'attrito radente dinamico, il corpo frenerà fino a fermarsi, e quindi qui l'attrito è una forza resistente. D'altro canto però, se vogliamo sollevare dal tavolo una bottiglia, priva di sporgenze o rientranze, è solo grazie all'attrito che riusciamo nell'intento. Se non ci fosse l'attrito la bottiglia ci scivolerebbe tra le dita. In questo caso l'attrito ha il ruolo di forza motrice. Questi esempi danno un'idea di quanto le forze di attrito siano presenti nella nostra vita quotidiana. È la forza di attrito che ci permette di camminare. Senza l'attrito, infatti, le suole delle nostre scarpe scivolerebbero e non potremmo fare un singolo passo. O ancora, è grazie all'attrito che possiamo effettuare una curva quando stiamo guidando. L'attrito radente permette anche ai corpi di rotolare. Se una biglia rotola fino a fermarsi, ciò non è dovuto all'attrito radente, ma al cosiddetto attrito volvente. Ne parleremo approfonditamente nel modulo sulla dinamica rotazionale.

Ci sono situazioni in cui un forte attrito è desiderabile e altre in cui si cerca di minimizzarlo. Per esempio, le scarpe di un arrampicatore sono costruite in modo da creare il più attrito possibile tra le suole e la roccia. Dall'altra parte, le forme aerodinamiche degli aerei sono progettate proprio per fendere l'aria e ridurre l'attrito con quest'ultima. È esperienza comune che è più difficile lanciare in avanti un foglio piuttosto che un aeroplanino.

L'attrito ha un'origine microscopica: è da ricercare nelle forze di coesione dei materiali. Anche una superficie apparentemente liscia presenta a livello microscopico innumerevoli asperità, che rendono appunto difficile lo scorrimento delle due superfici. Vincere la forza di attrito significa vincere le forze, di natura elettrostatica, esistenti tra gli atomi delle due superfici. L'attrito è quindi un fenomeno complesso, è la manifestazione macroscopica di fenomeni microscopici non prevedibili individualmente. Le due equazioni di cui abbiamo discusso sopra non hanno la pretesa di spiegare la complessità di tale fenomeno, ma semplicemente descrivono bene quello che osserviamo sperimentalmente.

Riassumendo, possiamo affermare che quando un corpo si muove su una superficie, la superficie interagisce con il corpo esercitando su di esso due forze: la forza normale e la forza di attrito.

### 3.5 Forza d'attrito viscoso

Nel modulo precedente abbiamo introdotto la forza di attrito radente. Questo però non è l'unico modo con cui l'attrito può manifestarsi. Per esempio, quando un corpo si muove **in un fluido**, cioè un liquido o un gas, è sottoposto a una forza che tende a frenarlo. In ogni istante le particelle di fluido a contatto con il corpo sono in moto con il corpo. Questo perché il corpo esercita una forza sulle particelle di fluido, che, inizialmente ferme, si mettono in moto. Per la terza legge di Newton le particelle di

fluido esercitano una forza sul corpo in verso opposto alla sua velocità. Se questa non è troppo elevata, allora la **forza di attrito viscoso** si può scrivere come:

$$\vec{F} = -b\vec{v}$$

dove  $b$  è un coefficiente che dipende dalla **viscosità del fluido** e dalla superficie del corpo.

Supponiamo ora di lasciar cadere verticalmente con velocità iniziale nulla un corpo di massa  $m$  in un tubo contenente del fluido. Vogliamo analizzare in dettaglio il moto del corpo. Assumendo che su di esso agiscono due forze, il suo peso e l'attrito viscoso (in realtà c'è anche una terza forza, la forza di Archimede, trascurabile se il volume del corpo è piccolo e la sua densità è molto più grande di quella del fluido), la seconda legge della dinamica di scrive come:

$$m \frac{dv}{dt} + bv = mg$$

ponendo  $k = \frac{b}{m}$  l'equazione diventa

$$\frac{dv}{dt} + kv = g$$

Risolvendo per il tempo abbiamo:

$$t = \int_0^v \frac{1}{g - kv} dv = -\frac{1}{k} [\ln(g - kv) - \ln(g)] = -\frac{1}{k} \left[ \ln \left( \frac{g - kv}{g} \right) \right]$$

quindi

$$e^{-kt} = \frac{g - kv}{g}$$

e infine

$$v(t) = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt})$$

Per  $t \rightarrow +\infty$  la velocità diventa costante e pari a  $v = \frac{mg}{b}$ . Significa che a questo punto c'è equilibrio tra forza peso e forza d'attrito e il corpo si muove a velocità costante. Teoricamente quindi il corpo non si muove mai a velocità costante. In pratica però, dopo un certo tempo  $t \gg \frac{1}{k}$  le variazioni di velocità diventano così piccole che non sono registrate né dagli strumenti di misura né dalla calcolatrice. A quel punto possiamo certamente affermare che il corpo si muove a velocità costante.

### 3.6 Forza elastica

Se comprimiamo una molla, un pallone, allunghiamo un elastico, avvertiamo una forza che tende ad annullare la deformazione del corpo e a riportarlo nello stato iniziale. Questa forza, esercitata dal corpo stesso, è detta **forza elastica**.

Per studiare gli effetti di questa forza consideriamo una molla, di lunghezza  $l_0$ . Fissiamo un estremo della molla a un gancio e applichiamo una forza all'estremo libero, allungando la molla, che avrà ora una lunghezza  $l$ . Poiché la molla è ferma, ci deve essere una forza uguale e opposta alla forza esterna applicata. Questa forza, esercitata dalla molla stessa, è proporzionale alla deformazione  $\Delta l = x$  subita. Infatti, allungando la molla ancora di più, dovremo applicare una forza maggiore per tenerla

ferma. Se la forza agisce lungo un asse orizzontale  $x$ , con l'origine in corrispondenza dell'estremità libera della molla a riposo e con verso positivo nel verso di allungamento, si ha:

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

Questa equazione è nota come **legge di Hooke**. La costante di proporzionalità  $k$  è detta **costante elastica della molla**, ed è una misura della durezza di una molla. Più grande è  $k$ , più è difficile deformare la molla.

Il segno meno della forza è dovuto al fatto che è il suo verso è sempre opposto a quello dello spostamento dell'estremo libero. Infatti

- se allunghiamo la molla, lo spostamento è positivo, ma la forza elastica è diretta nel verso opposto al verso scelto come positivo, quindi avrà un segno meno;
- se comprimiamo la molla, la forza elastica sarà positiva, ma lo spostamento è negativo, quindi anche in questo caso i due vettori avranno segno opposto.

Tali considerazioni sono indipendenti dal verso positivo che scegliamo per il sistema di riferimento. La forza elastica è dunque una forza di richiamo, perché tende a riportare la molla alla condizione iniziale.

Supponiamo ora di attaccare un punto materiale di massa  $m$  all'estremità di libera della molla. Se la molla viene deformata e poi rilasciata, oscillerà avanti e indietro. Trascurando gli attriti il moto del punto sarà armonico semplice. L'accelerazione è data da:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

La soluzione di questa equazione differenziale ci fornisce la legge oraria del moto:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

dove  $A$  e  $\varphi$  sono determinate dalle condizioni iniziali  $x(0)$  e  $v(0)$ . Per esempio, se  $\varphi = \pm\pi/2$ , cioè prendendo come posizione iniziale per il punto la posizione che occupa durante la massima deformazione, l'equazione del moto diventa  $x(t) = \pm A\cos\omega t$ . E se la massa viene rilasciata con velocità nulla l'ampiezza delle oscillazioni è uguale alla deformazione.

La pulsazione e il periodo del moto sono dati rispettivamente da:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Infine facciamo due osservazioni.

La legge di Hooke ha un limite di validità. Se la molla viene allungata troppo si osserva sperimentalmente che essa perde la sua elasticità, acquisendo una deformazione permanente. Da questo punto in poi il suo comportamento non potrà più essere descritto da questa equazione.

È poi importante notare che se la molla ha massa trascurabile, eserciterà ai suoi estremi forze uguali in modulo e opposte in direzione. Per esempio, se attacchiamo una massa all'estremità di una molla, mentre all'estremo libero la tiriamo verso l'alto, la molla eserciterà due forze: una applicata alla nostra mano, diretta verso il basso, e una applicata alla massa, diretta verso l'alto. Questo perché la massa della molla è zero, quindi la risultante delle forze agenti sulla molla (forza della massa e forza della mano, applicate agli estremi della molla) deve essere zero, altrimenti la molla avrebbe un'accelerazione infinita.

### 3.7 Forza centripeta

Abbiamo visto che il moto di un punto materiale che percorre una traiettoria circolare è accelerato, in quanto la direzione del vettore velocità cambia continuamente. Per la seconda legge di Newton, deve esistere una forza che causa tale accelerazione. Si tratta della **forza centripeta**, che vale in modulo:

$$F = m \frac{v^2}{R}$$

dove  $v$  è la velocità tangenziale di un punto di massa  $m$  che percorre una circonferenza di raggio  $R$ . Come visto nel relativo modulo,  $a = v^2/R$  è l'accelerazione centripeta del corpo.

La forza centripeta quindi impedisce a un corpo di muoversi in linea retta, piegando la sua traiettoria. Ovviamente la direzione della forza è la stessa dell'accelerazione, è cioè diretta verso il centro della circonferenza su cui si muove il corpo. A questo punto bisogna fare attenzione: il fatto che la forza centripeta sia diretta verso il centro della circonferenza non significa che il corpo accelera verso il centro. Se non ci fosse questa forza il corpo partirebbe per la tangente in linea retta. La forza centripeta, ripetiamo, serve solo a curvare la traiettoria del corpo. Se è presente anche un'accelerazione tangenziale l'accelerazione risultante non sarà diretta verso il centro, in quanto sarà somma vettoriale di due accelerazioni fra di loro ortogonali. Inoltre non è necessario che la traiettoria sia perfettamente circolare, basta che sia curva. In questo caso possiamo considerare la circonferenza tangente alla traiettoria in ogni punto.

Notare come la forza centripeta non è una forza a sé stante. Forze centripete possono essere infatti la forza d'attrito, la forza gravitazionale, la tensione di un filo, o qualsiasi altra forza. Il nome ci dice solo che la risultante di certe forze ha **direzione radiale**. Vediamo alcuni esempi.

**Esempio 1.** Supponiamo di essere sul sedile posteriore di una macchina che a un certo punto affronta una curva. L'unica forza agente sulla macchina diretta verso il centro è la forza di attrito tra strada e pneumatici. Poiché la macchina non si muove in direzione radiale la forza di attrito è di tipo statico, e questa è la forza centripeta agente sulla macchina. Ma se ci muoviamo di moto circolare solidali con la macchina ci deve essere una forza centripeta anche su di noi. Se l'attrito fornito dal sedile è basso, durante la curva slitteremo fino ad andare addosso alla portiera esterna alla curva. La forza normale della portiera fornisce dunque la forza centripeta necessaria per farci seguire il moto circolare della macchina.

**Esempio 2.** Consideriamo una stazione orbitante attorno alla Terra. In questo caso la forza centripeta agente sugli astronauti e sulla stazione è data dalla forza di gravità della Terra, diretta verso il centro della stessa. Gli astronauti fluttuano perché sono in caduta libera. Sulla stazione e sul suo contenuto agisce la forza peso e non c'è accelerazione relativa fra astronauti e stazione: non è possibile per gli astronauti premere contro il suolo della stazione, in quanto essa sta cadendo con loro. Difatti sulla Terra quello che ci dà il senso di "peso" è in realtà la reazione vincolare del suolo, che ci impedisce di sprofondare, trasmessa attraverso le nostre ossa al resto del corpo. Se saltiamo quindi da una certa altezza (non troppo alta), durante i brevi secondi di caduta l'unica forza agente su di noi è la forza di gravità (siamo cioè in caduta libera, proprio come gli astronauti). Se mentre cadiamo mettiamo sotto i nostri piedi una bilancia, questa non segnerà nessun peso. Ovviamente la stazione orbitante non precipita sulla Terra, in quanto quando è stata lanciata le è stata conferita una certa

velocità tangenziale. La forza di gravità quindi si limita a piegare la sua traiettoria impedendo che la stazione se ne parta per la tangente nelle profondità dello spazio.

**Esempio 3.** Prendiamo un secchio pieno d'acqua e facciamolo girare in un piano verticale. Se nel punto più alto della traiettoria la velocità del secchio è abbastanza alta, l'acqua non uscirà. Infatti, con una giusta velocità, il secchio esercita una forza normale sull'acqua, che, combinata con il peso della stessa, fornisce la giusta forza centripeta perché il moto sia circolare. Quindi, nonostante l'intuito ci porti erroneamente a credere che l'acqua debba per forza cadere (in fondo le forze sono dirette verso il basso, quindi l'acqua dovrebbe accelerare verso il basso), questo non succede perché la risultante di peso e normale è una forza centripeta, che serve solo a curvare la traiettoria e non fa accelerare i corpi verso l'interno. Il caso limite è quando la forza normale è zero. In questo caso è solo il peso ad avere il ruolo di forza centripeta. Se la velocità è bassa, la forza normale è negativa. Significa che l'acqua perde contatto con il secchio e ci cade addosso! Sarebbe quindi necessaria avere un'altra forza affinché l'acqua si muova di moto circolare. Vediamo quindi di determinare la velocità minima nel punto più alto. Proiettando la seconda legge di Newton in direzione verticale, abbiamo:

$$mg + N = m \frac{v^2}{R}$$

dove  $m$  è la massa dell'acqua e  $R$  è il raggio della circonferenza, cioè la lunghezza del nostro braccio. Imponendo  $N \geq 0$  abbiamo:

$$v \geq \sqrt{gR}$$

### 3.8 Quantità di moto e impulso

Abbiamo visto che una delle grandezze fisiche fondamentali della cinematica è la velocità. In dinamica facciamo un passo avanti, considerando anche la massa di un punto materiale in movimento. In questo modulo introduciamo una grandezza che lega tra loro queste due quantità. Consideriamo dunque un punto materiale di massa  $m$  che si muove nello spazio con velocità  $\vec{v}$ .

◇ **Definizione** Si definisce **quantità di moto** il vettore:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Possiamo allora scrivere la seconda legge della dinamica come:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Questa è in realtà la formula più generale della seconda legge di Newton, valida anche quando la massa non è costante. L'azione di una forza modifica dunque una o più di queste quantità: massa, modulo, direzione e verso della velocità.

Dall'equazione precedente abbiamo:

$$\vec{F}dt = d\vec{p}$$

◇ **Definizione** Si definisce impulso l'integrale della forza rispetto al tempo:

$$\vec{J} = \int_{t_0}^t \vec{F}(t) dt$$

In generale non conosciamo la legge di dipendenza della forza col tempo. Tuttavia, è possibile considerare il valore medio di tale forza, ed essendo questo costante, lo si può portare fuori dall'integrale, ottenendo la semplice relazione  $\vec{J} = \vec{F}_m \Delta t$ .

Integrando anche il secondo membro dell'equazione otteniamo

$$\vec{J} = \Delta \vec{p}$$

che rappresenta il **teorema dell'impulso**: l'azione di una forza su un punto per un certo intervallo di tempo causa una variazione della quantità di moto dello stesso.

Gli airbag delle auto vengono costruiti a partire da questo principio. Il loro scopo è di aumentare il tempo di impatto, in modo da minimizzare la forza dell'urto. Dall'altro lato un karateka riesce a spezzare un mattone poiché esercita una forza molto intensa in un intervallo di tempo molto piccolo (il colpo è secco).

### 3.9 Momento angolare

Introduciamo ora una nuova grandezza fisica che avrà grande importanza nel moto di rotazione, il momento angolare. Supponiamo che un punto materiale di massa  $m$  si muova nello spazio. Consideriamo un punto  $O$ , detto **polo**, che può essere fermo o in moto. Sia  $\vec{v}$  la velocità del punto rispetto al sistema di riferimento in cui studiamo il moto.

◇ **Definizione** Definiamo **momento angolare** del punto materiale il prodotto vettoriale:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

dove  $\vec{r}$  è il raggio vettore che indica la posizione del punto rispetto al polo.

Sottolineiamo che il polo non coincide necessariamente con l'origine del sistema di riferimento scelto. Vediamo ora un esempio di calcolo di momento angolare. Supponiamo che il moto sia curvilineo e che avvenga su un piano. Sappiamo già che in coordinate polari la velocità si può scrivere come

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \hat{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$$

dove  $\vec{v}_r$  e  $\vec{v}_\theta$  sono rispettivamente le velocità radiale e trasversale. Dalla definizione di momento angolare abbiamo che

$$\vec{L} = \vec{r} \times m(\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = \vec{r} \times m\vec{v}_\theta$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che il prodotto vettoriale tra due vettori paralleli è nullo. Il momento angolare è quindi perpendicolare al piano su cui avviene il moto e vale in modulo

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$$

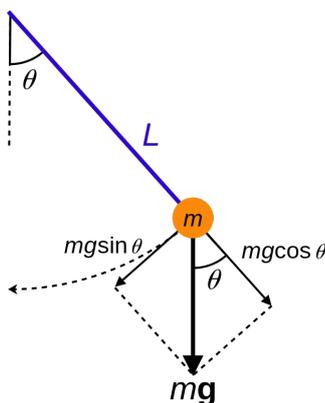
In particolare, se il moto è circolare uniforme con velocità angolare  $\omega$ , allora  $L = mr^2\omega$ .

### 3.10 Pendolo semplice

In questo modulo vediamo come possiamo applicare la seconda legge di Newton per studiare il moto di un pendolo semplice.

Il **pendolo semplice** è un sistema fisico costituito da una massa puntiforme attaccata all'estremità di un filo inestensibile. Se spostiamo il filo dalla verticale la massa sarà soggetta a un moto oscillatorio, che, trascurando ogni attrito, continuerà fino a una nuova interazione col sistema.

Il moto di un pendolo è un moto circolare il cui raggio  $R$  è uguale alla lunghezza  $L$  del filo. Le forze agenti sulla massa sono il suo peso e la tensione del filo. Per determinare la legge oraria del moto, consideriamo innanzitutto un sistema di riferimento con due assi in direzione tangenziale (tangente alla traiettoria) e centripeta (diretta lungo il filo). Chiamiamo  $\theta$  l'angolo formato dal filo con la verticale. Conveniamo che per spostamenti a destra della verticale gli angoli saranno positivi, mentre per spostamenti a sinistra della verticale saranno negativi.



Scomponendo le forze abbiamo:

$$\begin{cases} T - mg\cos\theta = ma_c \\ -mg\sin\theta = ma_t \end{cases}$$

Il segno meno è dovuto al fatto che la direzione della componente della forza peso lungo la traiettoria è opposta alla direzione dello spostamento del punto. Se il punto si trova a destra della verticale, la forza è negativa perché opposta al verso definito positivo. Se il punto si trova a sinistra della verticale la forza è positiva, ma gli angoli negativi, quindi anche il loro seno sarà negativo. È evidente quindi l'analogia con la forza elastica.

Ricordando che l'accelerazione angolare è data da:

$$\alpha = \frac{a_t}{R}$$

possiamo ricavare l'accelerazione del punto:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

Per angoli qualunque la soluzione di questa equazione differenziale è piuttosto complicata. Consideriamo dunque piccoli valori di  $\theta$ . Sviluppando in serie:

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots$$

Quindi per angoli piccoli, in genere minori di  $13^\circ$ , possiamo approssimare  $\sin \theta$  a  $\theta$ . L'equazione differenziale del moto diventa:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

che coincide con quella del moto armonico semplice. La legge oraria del moto è allora:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Poiché la funzione seno oscilla tra valori compresi nell'intervallo  $[-1, +1]$ , l'angolo assumerà valori compresi tra  $[-\theta_0, +\theta_0]$ . Quindi  $\theta_0$  corrisponde al massimo angolo di oscillazione, ovvero  $\theta_0 = \theta_{\max}$ .

La pulsazione e il periodo del moto (cioè il tempo impiegato a compiere un'oscillazione completa) sono dati rispettivamente da

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Un'importante considerazione da fare è che il periodo non dipende dalla massa, né dall'angolo iniziale del punto materiale (**isocronismo** delle piccole oscillazioni).

Ricordando ora la definizione di angolo in radianti, ovvero:  $\theta = \frac{s}{L}$ , dove  $s$  rappresenta lo spostamento lungo la traiettoria, possiamo ricavare le leggi orarie dello spostamento e della velocità tangenziale (si noti che  $\dot{\theta}$  rappresenta la velocità angolare):

$$s(t) = L\theta_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad v(t) = L\dot{\theta} = L\omega\theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Concludiamo con un'osservazione di carattere sperimentale. Finora abbiamo trattato la massa attaccata al filo alla stregua di un punto materiale, privo di dimensioni. Nella realtà, però, se volessimo fare esperimenti con un pendolo dovremmo ricorrere a piccoli oggetti sferici, i quali hanno un diametro, seppur piccolo. Di conseguenza come raggio della circonferenza dovremo considerare la lunghezza del filo più il raggio della pallina. Il non accorgersi di questo particolare comporta un errore sistematico nelle misure.

### 3.10.1 Pendolo a cono

Un pendolo a cono è un pendolo semplice che, invece di oscillare attorno alla verticale, ruota attorno a essa, restando fermo su una quota e mantenendo l'angolo  $\theta$  con la verticale costante. Le caratteristiche di questo tipo di moto sono:

- l'angolo  $\theta$  con la verticale aumenta con l'aumentare della velocità;
- esiste una traiettoria stabile circolare a una certa quota;
- esiste una relazione tra  $\theta$  e la velocità di rotazione  $\omega$ .

Per un punto materiale, vale:

$$m\vec{a} = \vec{f}^{\text{tot}} = \vec{T} + m\vec{g}$$

Inoltre, poiché mantiene la sua quota stabile, avremo che la componente  $a_z = 0$ ; quindi sull'asse verticale è vera la relazione:

$$T \cos \theta - mg = 0$$

Il punto materiale compie una traiettoria circolare, ovvero possiede un'accelerazione centripeta. La forza centripeta che fornisce questa accelerazione è la componente orizzontale della tensione (infatti la forza peso non ha componenti orizzontali):

$$f_c = ma_c = T \sin \theta \Rightarrow m\omega^2 r = T \sin \theta$$

Ricordiamo che il raggio della circonferenza è dato da  $r = l \sin \theta$ , dove  $l$  è la lunghezza del filo.

Ricavando la tensione dalla prima espressione, ovvero  $T = \frac{mg}{\cos \theta}$ , la sostituiamo in questa, ricavando una relazione tra  $\theta$  e  $\omega$ :

$$m\omega^2 r = \frac{mg}{\cos \theta} \sin \theta \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l \cos \theta}$$

Passiamo ora a studiare i momenti del problema. Consideriamo due poli: il polo  $O$  è l'estremo opposto al punto materiale del filo, quello fisso, mentre  $O'$  è il centro della circonferenza tracciata dal punto, che si trova sulla stessa verticale di  $O$ . Calcoliamo prima il momento angolare e delle forze rispetto a  $O'$ :

$$\begin{aligned} \vec{J}_{O'} &= \vec{r} \wedge m\vec{v} \\ |\vec{J}_{O'}| &= rmv \text{ diretto lungo } z \\ \Rightarrow \vec{\tau} &= \frac{d\vec{J}}{dt} = 0 \end{aligned}$$

Poiché il momento angolare è costante, il momento delle forze totali rispetto a  $O'$  è nullo, quindi:

$$\vec{\tau} = (\vec{r}_1 \wedge \vec{T} + \vec{r}_2 \wedge m\vec{g}) = \vec{r} \wedge (\vec{t} + m\vec{g}) = \vec{r} \wedge \vec{F}_c = 0$$

Calcoliamo i momenti rispetto al punto  $O$ :

$$\vec{J} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \Rightarrow |\vec{J}| = lmv$$

A tal proposito, ricordiamo che  $v$  è sempre perpendicolare al filo. Il momento delle forze esterne sarà uguale a:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge (\vec{T} \sin \theta) \Rightarrow |\vec{\tau}| = T \sin \theta l \cos \theta$$

La direzione del momento angolare  $\vec{J}$  quindi varia e non si mantiene costante durante il moto.



## Moti relativi

### 4.1 Teorema delle velocità relative

Il concetto stesso di moto è un **concetto relativo**. Se una mamma porta il figlio nel passeggino, il bambino avrà per esempio una velocità di 2 m/s rispetto al marciapiede, ma avrà velocità nulla rispetto al passeggino. In generale, in due sistemi di riferimento in moto relativo il moto di un punto materiale viene descritto con leggi diverse. Consideriamo dunque due sistemi di riferimento, uno fisso, costituito da una terna cartesiana  $xyz$  con centro in  $O$ , e uno mobile, con centro in  $O'$  e assi  $x'y'z'$ . Il sistema mobile si sposta con velocità  $\vec{v}_{O'}$  rispetto al sistema fisso, e i suoi assi possono ruotare, cosa che non avviene per il sistema fisso. I due sistemi di riferimento osservano il moto di un punto  $P$ . Dalla regola di somma tra vettori otteniamo la relazione tra le posizioni del punto  $P$ , misurate rispetto ai due sistemi di riferimento:

$$\vec{r} = O\vec{O}' + \vec{r}' \quad (1)$$

con

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}; \quad \vec{r}' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'; \quad O\vec{O}' = x_{O'}\hat{i} + y_{O'}\hat{j} + z_{O'}\hat{k}$$

La velocità di  $P$  rispetto al sistema fisso è

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

La velocità di  $P$  misurata dal sistema mobile è

$$\vec{v}' = \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}'$$

Infine, la velocità dell'origine  $O'$  rispetto al sistema fisso è

$$\vec{v}_{O'} = \frac{dx_{O'}}{dt}\hat{i} + \frac{dy_{O'}}{dt}\hat{j} + \frac{dz_{O'}}{dt}\hat{k}$$

Andiamo ora a derivare la (1) rispetto al tempo. Otteniamo

$$\vec{v} = \frac{dO\vec{O}'}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx_{O'}}{dt}\hat{i} + \frac{dy_{O'}}{dt}\hat{j} + \frac{dz_{O'}}{dt}\hat{k} + \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}' +$$

$$+x' \frac{d\hat{i}'}{dt} + y' \frac{d\hat{j}'}{dt} + z' \frac{d\hat{k}'}{dt}$$

ovvero

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{O'} + x' \frac{d\hat{i}'}{dt} + y' \frac{d\hat{j}'}{dt} + z' \frac{d\hat{k}'}{dt} \quad (2)$$

I versori, per definizione, hanno modulo costante. Nel nostro caso possono ruotare, diciamo con velocità angolare  $\vec{\omega}$ . Quindi possiamo scrivere le loro derivate come

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}'; \quad \frac{d\hat{j}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j}'; \quad \frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k}'$$

Gli ultimi tre termini della (2) diventano allora

$$x'(\vec{\omega} \times \hat{i}') + y'(\vec{\omega} \times \hat{j}') + z'(\vec{\omega} \times \hat{k}') = \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

In definitiva abbiamo ottenuto la seguente equazione

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

nota come **teorema delle velocità relative**: le misure di velocità compiute in sistemi di riferimento in moto rispetto all'altro sono diverse.

## 4.2 Teorema delle accelerazioni relative

Nel modulo precedente abbiamo visto come varia la descrizione della velocità di un punto osservato in diversi sistemi di riferimento. Il passo successivo è naturalmente osservare cosa accade per l'accelerazione. L'accelerazione del punto  $P$  rispetto al sistema fisso è

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{k}$$

L'accelerazione di  $P$  misurata dal sistema mobile è

$$\vec{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2} \hat{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2} \hat{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2} \hat{k}'$$

Infine, l'accelerazione dell'origine  $O'$  rispetto a  $O$  è

$$\vec{a}_{O'} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt}$$

Andiamo ora a derivare rispetto al tempo il teorema delle velocità relative

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

Calcoliamo  $d\vec{v}'/dt$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}'}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dx'}{dt} \hat{i}' + \frac{dy'}{dt} \hat{j}' + \frac{dz'}{dt} \hat{k}' \right) = \frac{d^2x'}{dt^2} \hat{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2} \hat{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2} \hat{k}' + \\ &+ \frac{dx'}{dt} \frac{d\hat{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\hat{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\hat{k}'}{dt} \end{aligned}$$

Ricordando ora che la derivata del versore si può scrivere come prodotto vettoriale tra  $\omega$  e il versore possiamo scrivere

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Dal modulo precedente sappiamo poi che

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v} - \vec{v}_{O'} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

quindi

$$\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

Pertanto l'equazione che lega le accelerazioni misurate in due sistemi di riferimento in moto relativo è:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

che esprime il **teorema delle accelerazioni relative**.

Quindi l'accelerazione che misura un osservatore del sistema mobile è

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_{O'} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Il termine

$$\vec{a}_t = \vec{a}_{O'} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'$$

si chiama **accelerazione di trascinamento**, mentre l'ultimo termine

$$\vec{a}_c = -2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

si chiama **accelerazione di Coriolis**, di cui parleremo ampiamente nel modulo sulle forze apparenti.

### 4.3 Relatività galileiana

Abbiamo visto nei precedenti moduli come cambiano velocità e accelerazione in sistemi di riferimento qualsiasi. Tuttavia ci sono sistemi di riferimento speciali per cui le equazioni di passaggio da un sistema all'altro assumono una forma molto semplice: sono i **sistemi di riferimento inerziali**.

Definiamo sistema di riferimento inerziale un sistema di riferimento in cui vale il primo principio della dinamica. In qualsiasi istante, se un corpo si sta muovendo continua a muoversi di moto rettilineo uniforme, mentre se è in quiete rimane in quiete. Consideriamo ora due sistemi di riferimento. Uno è inerziale, l'altro si muove in moto rettilineo uniforme rispetto al primo. I loro assi sono paralleli e il sistema di origine  $O'$  si muove con velocità costante  $\vec{v}_{O'}$  parallela all'asse  $x$ . All'istante iniziale le due origini coincidono cosicché

$$\vec{OO}' = \vec{v}_{O'}t$$

Proiettando sugli assi la relazione

$$\vec{r}' = \vec{r} - O\vec{O}'$$

otteniamo

$$\begin{cases} x' = x - v_{o'}t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

e per le velocità

$$\begin{cases} v'_x = v_x - v_{o'} \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases}$$

Queste equazioni si chiamano **trasformazioni di Galileo tra sistemi di riferimento**.

Infine per le accelerazioni si ha  $\vec{a} = \vec{a}'$ . Osservatori che in questi due sistemi di riferimento studiano il moto di un punto materiale concordano sul valore della forza che agisce sul punto. In particolare, se  $\vec{a} = 0$ , anche  $\vec{a}' = 0$ , e quindi anche il secondo sistema di riferimento è inerziale.

Da ciò derivano due conseguenze importanti. In primo luogo, definito un sistema di riferimento inerziale, tutti i sistemi in moto rettilineo uniforme rispetto a esso sono inerziali. In secondo luogo, essendo la dinamica la stessa, non è possibile stabilire, tramite misure effettuate in questi sistemi di riferimento se uno di essi è in quiete o in moto: tutti i sistemi inerziali sono equivalenti. Non ha cioè senso il concetto di moto assoluto. Questo risultato è noto con il termine di **relatività galileiana**.

Se il moto del secondo sistema è accelerato rispetto al sistema inerziale, quello che accade è che la legge di Newton non è più valida. Se  $\vec{F} = m\vec{a}$  nel sistema inerziale, nel sistema accelerato non può essere  $\vec{F} = m\vec{a}'$ , perché  $\vec{a} \neq \vec{a}'$ . Ricordando ora l'espressione del teorema delle accelerazioni relative, se moltiplichiamo ciascun termine per la massa del punto otteniamo

$$\vec{F} - m\vec{a}_t - m\vec{a}_c = m\vec{a}'$$

Questa è una forma modificata del secondo principio della dinamica. In un sistema di riferimento accelerato (non inerziale) il prodotto della massa del punto per l'accelerazione misurata in quel sistema è uguale alla forza, o più probabilmente alla somma delle forze, che agiscono sul punto misurate nel sistema inerziale (dette **forze vere**), più le cosiddette **forze apparenti**. Queste forze, dette anche **forze d'inerzia**, appaiono agenti solo nei sistemi non inerziali. Esse non derivano dalle interazioni fondamentali e non esistono in un sistema inerziale, dove invece si misurano le forze vere.

## Lavoro ed energia

### 5.1 Energia cinetica e lavoro

Da sempre l'uomo ha cercato di capire come produrre e usare in modo efficiente l'energia. Uno dei compiti principali della fisica è studiare i vari tipi di energia esistenti in natura, i loro effetti, e capire come i sistemi fisici scambiano tra loro questa quantità. Il XX secolo ha visto un grande avanzamento in questo campo, con la scoperta dell'energia nucleare.

Innanzitutto cosa significa il termine energia? Il concetto, apparentemente, è vasto. Basta pensare alle forme di energia che conosciamo: energia eolica, nucleare, elettrica... Vedremo però che in realtà tutte queste forme di energia si possono ricondurre a solo due tipi fondamentali, e che l'energia si può definire in modo molto semplice. Anticipiamo innanzitutto che l'**energia** è una **quantità scalare**, un numero che associamo a un sistema fisico. Ogni qualvolta il sistema interagisce con un altro sistema, il numero associato al primo sistema può, ad esempio, diminuire, mentre aumenta quello associato al secondo sistema. In altre parole non si perde né si crea dal nulla energia. Il **principio di conservazione dell'energia** non è stato finora mai confutato dall'esperimento e rappresenta una proprietà notevole del nostro universo.

Tutti i corpi in movimento posseggono energia. D'altra parte ciò sembra molto naturale: se siamo ammalati e "senza energia" difficilmente ci alziamo dal letto. O ancora, un atleta professionista ci batte sicuramente nei 100 metri piani perché ha più "energia" di noi. Quindi, intuitivamente, maggiore è la velocità di un corpo, maggiore è la sua energia. Vediamo ora come possiamo quantificare questa energia.

Supponiamo che su un punto materiale agisca una forza costante  $\vec{F}$  che forma un angolo  $\theta$  con l'orizzontale (un asse  $x$  orientato). Durante uno spostamento  $\Delta x$  la forza cambia la velocità del punto da  $v_0$  a  $v_1$ . Detta  $F_x$  la componente orizzontale della forza si ha:

$$v_1^2 - v_0^2 = 2a_x \Delta x$$

D'altra parte per la seconda legge di Newton:

$$F_x = ma_x$$

risolvendo la prima equazione per  $a_x$  e inserendola nella seconda abbiamo:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_x \Delta x$$

Definiamo la quantità  $\frac{1}{2}mv^2$  come l'**energia cinetica** di un corpo di massa  $m$  che si muove con velocità  $v$ .

Quando una forza sposta un corpo, si dice che la forza ha compiuto un **lavoro**. Se la forza non è bilanciata, come nell'esempio precedente, allora causa anche una variazione di energia cinetica del corpo. Il lavoro di una forza costante durante uno spostamento  $\Delta x$  vale:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} = F \cos \theta \Delta x = F_x \Delta x$$

Dunque a compiere lavoro è solo la componente della forza parallela allo spostamento, e non la componente perpendicolare.

Supponiamo ora che un punto materiale si muova, lungo una traiettoria qualsiasi, sotto l'azione di una forza variabile in modulo e direzione. Vogliamo trovare il lavoro compiuto dalla forza durante uno spostamento del punto dalla posizione  $A$  a quella  $B$ . Dividiamo dunque la traiettoria in segmenti  $\Delta s$ , abbastanza piccoli cosicché la forza si possa considerare costante durante questi spostamenti. Il lavoro totale sarà la somma dei lavori parziali compiuti durante questi piccoli spostamenti. Ovviamente il risultato ottenuto sarà solo un'approssimazione dell'effettivo valore del lavoro, tanto migliore quanto più piccoli sono i segmenti. Mediante un passaggio al limite abbiamo:

$$W = \lim_{\Delta s \rightarrow \infty} \sum \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Il lavoro è dunque l'integrale di linea della forza. E' una grandezza scalare, in quanto definito da un prodotto scalare, e la sua unità di misura è il Joule (J).

Nel caso più generale il punto materiale si muove nello spazio. Usando gli assi cartesiani come sistema di riferimento possiamo scrivere uno spostamento infinitesimo come:

$$d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

Se il punto si sposta da una posizione di coordinate  $(x_0, y_0, z_0)$  a una di coordinate  $(x_f, y_f, z_f)$ , possiamo allora scrivere il lavoro come:

$$W = \int_{x_0}^{x_f} F_x dx + \int_{y_0}^{y_f} F_y dy + \int_{z_0}^{z_f} F_z dz$$

Facciamo ora alcune considerazioni.

- Se su un corpo agiscono più forze il lavoro totale è la somma dei lavori compiuti da ogni singola forza.
- Solo le componenti della forza parallele allo spostamento compiono lavoro. Questo significa che le forze centripete non compiono mai lavoro.
- Affinché ci sia lavoro deve esserci uno spostamento. Se spingiamo forte contro una parete sentiamo una certa fatica, a causa delle continue contrazioni dei muscoli. Tuttavia non c'è lavoro compiuto sulla parete, dato che questa non si sposta.

Oltre alla definizione mediante un integrale che abbiamo appena dato, ne possiamo dare una equivalente, ma forse più intuitiva, che mette in risalto il significato fisico del lavoro. Una forza compie lavoro quando agisce su un corpo (un punto materiale,

un corpo esteso..) che si sposta percorrendo una traiettoria qualsiasi, purché tale traiettoria non sia perpendicolare alla direzione della forza. Per esempio compiamo lavoro quando spostiamo un mobile, alziamo un bicchiere, trituriamo il cibo per mangiarlo. O ancora, l'attrito compie lavoro quando frena i corpi in movimento, compie lavoro un gas che si espande, e gli esempi sono innumerevoli.

Consideriamo ora un lavoro infinitesimo lungo una **traiettoria**. Indicata con  $F$  la forza parallela allo spostamento abbiamo che:

$$dW = Fds = m \frac{dv}{dt} ds = mv dv$$

integrando abbiamo:

$$W = \int_{v_0}^{v_f} mv dv = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

indicando con  $E_k$  l'energia cinetica del punto materiale possiamo scrivere la seguente relazione:

$$W = \Delta E_k$$

che rappresenta il **teorema dell'energia cinetica**. Quando una forza compie lavoro su un punto materiale può aumentare l'energia cinetica del punto (compiendo lavoro positivo), oppure diminuirla (in questo caso il lavoro è negativo). Questo ci suggerisce un'altra definizione di energia cinetica. L'energia cinetica di un corpo che si muove con velocità  $v$  è il lavoro che le forze esterne applicate al corpo hanno dovuto compiere per portare la sua velocità da 0 a  $v$ . Un lavoro positivo indica una **forza motrice**, un lavoro negativo è associato a una **forza resistente** che si oppone al moto del punto.

È importante poi notare che nel teorema dell'energia cinetica  $W$  rappresenta la somma dei lavori di ciascuna forza che agisce sul punto materiale nel tratto considerato. Questo perché la nostra  $F$  è in generale una risultante di più forze. Quindi se una persona sposta una cassa a velocità costante, sta compiendo un lavoro non nullo. Invece, se consideriamo la risultante tra forza applicata e forza d'attrito dinamico, il lavoro è nullo, perché non c'è variazione di energia cinetica.

Osservazione: è possibile partire dalla definizione di lavoro come integrale e poi dimostrare comunque il teorema dell'energia cinetica, definendo quindi il valore trovato  $\frac{1}{2}mv^2$  come energia cinetica del punto materiale. Non è l'unico caso della meccanica in cui si può dimostrare un teorema partendo da considerazioni e definizioni differenti.

Infine, in molte situazioni è utile considerare la **velocità di erogazione del lavoro**.

Definiamo **potenza istantanea** la derivata del lavoro rispetto al tempo:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

ricordando che  $dW = F \cos \theta ds$ , dove  $\theta$  è l'angolo che la forza forma con lo spostamento, possiamo scrivere:

$$P = \frac{F \cos \theta ds}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

dove  $v$  è la velocità istantanea del punto materiale lungo la traiettoria. L'unità di misura della potenza è il **watt** (W).

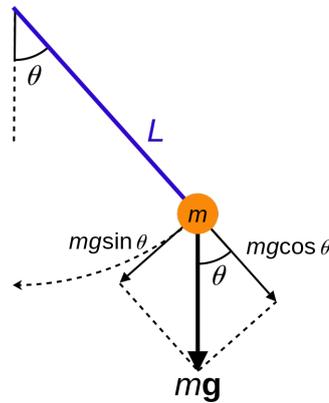
## 5.2 Energia del pendolo

Riprendiamo il discorso del pendolo semplice, stavolta studiandolo sfruttando le conoscenze sul lavoro e l'energia cinetica. Ricordiamo, prima di iniziare lo studio, le formule del lavoro che conosciamo e lo schema del pendolo:

$$L = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$L = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2)$$



Prendiamo come esempio di riferimento l'immagine qui sopra. Consideriamo il punto iniziale del moto il punto in cui è disegnato il punto materiale, mentre l'estremo finale del moto sarà il centro di oscillazione. Dallo studio sul moto del pendolo abbiamo osservato che il punto ha velocità nulla agli estremi di oscillazione e velocità massima al centro; tuttavia, in quel caso abbiamo dovuto compiere un'approssimazione dell'angolo, ottenendo quindi un valore della velocità approssimato anch'esso. Sfruttiamo il lavoro e l'energia per calcolare con precisione la velocità massima del sistema. Abbiamo quindi:

$$v_i = 0$$

$$v_f = v_{\max}$$

Poiché sappiamo che  $L_{\text{tot}} = \Delta K$ , avendo le velocità iniziali e finali possiamo calcolarci il lavoro della forza totale agente sul punto:

$$L_{\text{tot}} = \Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

Quindi abbiamo che  $L_{\text{tot}} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$ ; tuttavia possiamo calcolare il lavoro partendo anche dalla definizione stessa:

$$\begin{aligned}
 L_{\text{tot}} &= \int_i^f \vec{f}_{\text{tot}} \cdot d\vec{s} = \int_i^f (\vec{P} + \vec{T}) \cdot d\vec{s} = \\
 &\Leftrightarrow \int_i^f \vec{P} \cdot d\vec{s} + \int_i^f \vec{T} \cdot d\vec{s} = \int_i^f \vec{P} \cdot d\vec{s}
 \end{aligned}$$

Questo perché sappiamo che  $\vec{T}$  è perpendicolare allo spostamento lungo tutto il moto, per definizione di  $\vec{T}$ , quindi il prodotto scalare è nullo. Quindi:

$$L_{\text{tot}} = \int_i^f \vec{P} \cdot d\vec{s} = \int_i^f mg \cos \phi ds = \int_i^f mg \sin \theta ds$$

Questo perché il coseno di  $\phi$ , cioè l'angolo formato tra il peso e lo spostamento, è equivalente al seno di  $\theta$ . Prima di procedere con il calcolo finale, ricordiamo che possiamo scrivere  $ds$  come  $Ld\theta$ , questo per la definizione di angolo. Infine:

$$\begin{aligned}
 L_{\text{tot}} &= \int_i^f mg(\sin \theta)Ld\theta = mgL \int_i^f \sin \theta d\theta \\
 &\Leftrightarrow mgL \int_0^{\theta_0} \sin \theta d\theta = -mgL \cos \theta \Big|_0^{\theta_0} \\
 &\Leftrightarrow -Lmg(\cos \theta_0 - \cos 0) = Lmg(1 - \cos \theta_0)
 \end{aligned}$$

Siamo giunti a calcolare il lavoro compiuto dalle forze del sistema in due modi diversi. Un'analisi immediata: i due risultati sono entrambi positivi perché la forza peso spinge lungo tutto il moto, con verso concorde allo spostamento stesso. Uguagliamo i due risultati ottenuti:

$$\begin{cases} L_{\text{tot}} = \frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2 \\ L_{\text{tot}} = Lmg(1 - \cos \theta_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2 = Lmg(1 - \cos \theta_0) \\ v_{\text{max}}^2 = 2Lg(1 - \cos \theta_0) \end{cases}$$

Dallo studio del moto che abbiamo compiuto in qualche modulo fa, troviamo che  $v_{\text{max}} = L\omega\theta_{\text{max}}$ . Sostituendo a  $\omega$  il suo valore, e ricordando che, in questo studio,  $\theta_0 = \theta_{\text{max}}$  perché l'angolo di partenza del moto coincide all'angolo massimo, abbiamo ricavato che:

$$v_{\text{max}}^2 = \theta_0^2 Lg$$

Questo perché approssimammo  $\sin \theta \approx \theta$ . Tuttavia, partendo dal giusto risultato, ovvero quello ottenuto con lo studio delle forze, possiamo anche questa volta approssimare  $\cos \theta_0$  con il suo sviluppo in serie di Taylor:

$$\cos \theta_0 = 1 - \frac{\theta_0^2}{2}$$

Sostituendo nella formula:

$$v_{\text{max}}^2 = 2Lg(1 - \cos \theta_0) \approx 2Lg(1 - 1 + \frac{\theta_0^2}{2}) = \theta_0^2 Lg$$

Che è concorde con il risultato ottenuto nel precedente studio. L'idea di compiere approssimazioni per risolvere problemi che non hanno una soluzione analitica è, se l'approssimazione viene fatta con criterio, un ottimo modo per compiere gli studi necessari. Questo era solo un esempio di come sfruttare l'energia e il lavoro per calcolare moti particolarmente complicati.

### 5.3 Lavoro della forza di attrito, della forza peso e della forza elastica

Dopo aver definito il lavoro di una forza, è utile sfruttare questa definizione per calcolare i lavori di forze il cui modulo ci è noto, come la forza d'attrito e la forza peso.

#### 5.3.1 Lavoro della forza d'attrito

Ricordiamo che il modulo della forza di attrito dinamico vale:

$$f_{att} = \mu_d N = \mu_d mg$$

Applichiamola nella formula del lavoro:

$$W = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_A^B f ds \cos \phi = \int_A^B -\mu_d mg ds = -\mu_d mg \int_A^B ds = -\mu_d mg \Delta s$$

Abbiamo considerato in questo calcolo un moto rettilineo, in cui l'angolo  $\phi$  tra la forza e lo spostamento è  $\phi = \pi$ , per cui vale  $\cos \phi = -1$ .  $\Delta s$  è l'effettiva traiettoria percorsa durante il moto: il lavoro della forza di attrito dipende dallo spostamento percorso.

È bene ora fare una precisazione: questa formula rappresenta il lavoro compiuto dall'attrito su un punto materiale o su un corpo perfettamente rigido. Se consideriamo un oggetto esteso reale che viene lanciato lungo un pavimento con attrito, si nota che durante il moto esso si riscalda, il che sta a indicare la comparsa, nel blocco, di energia termica, cioè energia associata al moto disordinato delle molecole che lo compongono. Quindi l'energia (cinetica) iniziale del blocco non è stata del tutto azzerata. Una parte di energia viene convertita in energia termica, l'altra parte viene dissipata dall'attrito, cioè un po' viene trasferita dal blocco al pavimento e un po' diventa suono. Questa energia trasferita è il lavoro dell'attrito, che quindi risulta essere minore di quello che troveremmo usando la formula ricavata precedentemente. Il lavoro è in questo caso inferiore al prodotto forza per spostamento. Come mai?

Un oggetto reale non è mai perfettamente rigido. Questo implica che la forza di attrito agisce su punti del corpo il cui moto risulta ostacolato con effetti di deformazione locale. In altre parole, se il blocco nel complesso si muove di una certa distanza, le asperità microscopiche della superficie di contatto si spostano di una distanza minore, perché si deformano. Possiamo anche dire che l'attrito lavora su una distanza efficace minore di quella effettivamente percorsa dal blocco nel suo complesso. Solo se il corpo è un punto materiale (privo di dimensioni) o un corpo perfettamente rigido, il lavoro dell'attrito è effettivamente  $-\mu_d mg \Delta s$ . In questo caso l'energia cinetica del corpo va nel pavimento e nell'aria, e il corpo non si scalda.

#### 5.3.2 Lavoro della forza peso

Come fatto per la forza di attrito, sfruttiamo la definizione di lavoro. Ricordiamo il modulo della forza peso:

$$P = mg$$

Prendiamo un sistema di riferimento con asse  $z$  verticale, diretto verso l'alto; possiamo scrivere la forza peso in coordinate cartesiane, ovvero:

$$\vec{P} = (0, 0, -mg)$$

Ricordiamo che anche il vettore  $\vec{s}$  può essere scritto in coordinate:

$$d\vec{s} = (dx, dy, dz)$$

Per cui, per il lavoro, avremo che:

$$W = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{s} = \int_A^B (-mg) dz = -mg(z_B - z_A)$$

Nel caso della forza peso, a differenza della forza d'attrito, possiamo notare che il lavoro non dipende dal percorso compiuto ma dipende solo dagli estremi del percorso, in particolare solo dalle coordinate lungo l'asse verticale. Vedremo in seguito che le forze per cui vale ciò vengono definite conservative.

### 5.3.3 Lavoro della forza elastica

Come abbiamo visto qualche modulo fa, un corpo attaccato a una molla può compiere un moto armonico oscillatorio. La forza elastica compie quindi un lavoro lungo tutto il moto, che possiamo calcolare:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} \vec{f}_{el} \cdot d\vec{s} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = -k \int_{x_i}^{x_f} x dx = -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2)$$

Notiamo che, esattamente come la forza peso, anche in questo caso il lavoro dipende solo dagli estremi dello spostamento.

## 5.4 Forze conservative ed energia potenziale

### 5.4.1 Forza conservativa

Diamo immediatamente la definizione di forza conservativa.

◇ **Definizione** Si definisce **forza conservativa** una forza il cui lavoro non dipende dal percorso compiuto ma solo dalle posizioni iniziale e finale della traiettoria, ovvero:

$$W_{A,B} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = g(A, B)$$

Dove  $g$  è una funzione.

Un altro modo per definire le forze conservative è quello di dire che, su un qualsiasi **percorso chiuso**, il **lavoro è nullo**, ovvero:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Possiamo studiare meglio questo caso. Prendiamo un percorso chiuso, e dividiamolo in un percorsi diversi tra loro, uno che va nel verso  $\overline{AB}$ , l'altro che va nel verso opposto  $\overline{BA}$ . Per comodità, li indicheremo con (I) e (II). Avremo quindi che:

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{s} = (\text{I}) \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} + (\text{II}) \int_B^A \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$(\text{I}) \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = -(\text{II}) \int_B^A \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

$$(\text{I}) \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = (\text{II}) \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

Quindi è riconfermato che il lavoro dipende solo dagli estremi e non dal percorso compiuto.

### 5.4.2 Energia potenziale

Analizziamo il calcolo del lavoro di una forza conservativa. Nel caso in cui si volesse calcolare il lavoro da un punto  $P_0$  a un punto  $B$ , preso un punto  $A$  qualsiasi, allora varrà la relazione:

$$W(P_0, B) =: W(P_0, A) + W(A, B)$$

Perché sappiamo che, per le forze conservative, il lavoro dipende solo dai punti estremi del percorso. Dall'espressione precedente si ricava immediatamente:

$$W(A, B) = W(P_0, B) - W(P_0, A) = g(A, B) = g(P_0, B) - g(P_0, A)$$

Dove  $g$  è una funzione, che chiameremo funzione potenziale. Dalla precedente ricaviamo che:

$$W(A, B) = g(B) - g(A)$$

Ovvero un altro modo di esprimere il lavoro solo in funzione degli estremi.

◇ **Definizione** Si definisce **energia potenziale**  $E_p$  di una forza conservativa:

$$E_p = -g$$

Da questa definizione possiamo esprimere il lavoro di una forza conservativa come:

$$W(A, B) = -\Delta E_p = -[E_p(B) - E_p(A)]$$

Ovvero il lavoro equivale all'opposto della differenza di energia potenziale.

Adesso sfrutteremo la definizione di energia potenziale per calcolarla in caso di forze conservative note, ricordando che bisogna sempre definire un punto dove l'energia potenziale vale zero.

### Energia potenziale della forza peso

Come abbiamo visto nel precedente modulo, il lavoro della forza peso vale:

$$W = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{s} = -mg(z_B - z_A) = -(mgz_B - mgz_A)$$

Abbiamo appena visto che il lavoro può essere anche scritto come:

$$W = -\Delta E_p$$

L'energia potenziale della forza peso è quindi:

$$E_p = mgz$$

dove abbiamo scelto il terreno come livello di riferimento in cui l'energia potenziale vale zero. Questa è una convenzione naturale, ma non è l'unica. Difatti il livello zero può essere scelto a piacimento, non influisce sul lavoro della forza peso perché esso è definito dalla variazione di energia potenziale, quindi la costante arbitraria scompare.

### Energia potenziale elastica

Nel precedente modulo abbiamo visto come anche il lavoro della forza elastica dipendesse solo dagli estremi; esso vale:

$$W = \int_A^B \vec{f}_{el} \cdot d\vec{s} = -\frac{k}{2}(x_B^2 - x_A^2)$$

È immediato definire l'energia potenziale della forza elastica come:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

Anche qui conveniamo che l'energia potenziale della molla sia nulla nell'estremo libero di una molla a riposo. Nella precedente formula  $x$  indica quindi la distanza di un estremo dal punto di equilibrio della molla.

Alla luce di questi esempi possiamo dare una nuova definizione di energia potenziale. L'energia potenziale di un corpo è il lavoro eventuale delle forze conservative applicate al corpo, cioè il lavoro che le forze conservative compirebbero in relazione a un eventuale spostamento del corpo dalla posizione iniziale al livello zero di riferimento. Attenzione a non definire l'energia potenziale come il lavoro che le forze "devono" compiere per spostare il corpo nella posizione di riferimento. Se, per esempio, un ascensore si trova al piano terra, e noi scegliamo come livello zero di riferimento per l'energia potenziale il terzo piano, la definizione ci costringerebbe a dire che l'energia potenziale dell'ascensore è il lavoro che la forza di gravità deve compiere per sollevarlo fino al terzo piano, il che stona un po'.

#### 5.4.3 Conservazione dell'energia meccanica

Abbiamo studiato due relazioni del lavoro, una volta come differenza di energia cinetica, adesso sfruttando l'energia potenziale. Si possono relazionare i due casi:

$$W = \Delta E_k = -\Delta E_p$$

cioè

$$E_{k,B} - E_{k,A} = E_{p,A} - E_{p,B}$$

da cui

$$E_{k,A} + E_{p,A} = E_{k,B} + E_{p,B}$$

dove  $A$  e  $B$  indicano due configurazioni diverse in cui si può trovare il punto materiale. Quindi se su un punto materiale agiscono solo forze conservative, o se le eventuali forze non conservative non compiono lavoro, la somma di energia cinetica ed energia potenziale, detta anche **energia meccanica del punto**, si conserva.

Vediamo cosa succede invece se agiscono anche forze non conservative. Il lavoro totale è uguale alla somma delle forze conservative  $W_c$  e delle forze non conservative  $W_{nc}$ :

$$W = W_c + W_{nc} = E_{k,B} - E_{k,A} = E_{p,A} - E_{p,B} + W_{nc} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

da cui, indicando con  $E_m$  l'energia meccanica del punto materiale

$$W_{nc} = E_{m,B} - E_{m,A}$$

Le forze non conservative causano una variazione di energia meccanica del punto materiale. Una classe particolare di forze non conservative sono le forze di attrito. In molti casi esse dissipano l'energia posseduta da un corpo. Per esempio, se un blocco scivola lungo un pavimento con attrito, una parte dell'energia cinetica del blocco rimane nel blocco, mentre una parte viene dissipata, cioè passa dal blocco al pavimento, diventando energia termica del pavimento, e dal blocco all'aria, propagandosi sotto forma di onde sonore (lo sentiamo il blocco che scivola). Tuttavia, non sempre l'attrito ha ruolo di forza dissipatrice. Se una sfera rotola senza strisciare è perché esiste una forza di attrito statico, che agisce sul punto di contatto, che le impedisce di slittare. Poiché il punto di contatto è istantaneamente fermo, la forza di attrito in questo caso non compie lavoro. Questo è il motivo per cui abbiamo sottolineato il fatto che l'energia meccanica si può conservare anche se agiscono forze non conservative.

Facciamo un'ultima considerazione sul lavoro. Al compimento di lavoro si accompagnano due fenomeni: **trasferimento** e **trasformazione di energia**. Illustriamoli con degli esempi.

Se diamo un calcio a un pallone, una parte di energia che si trovava inizialmente nel nostro corpo, che abbiamo assunto col cibo, si trova ora sotto forma di energia cinetica nel pallone. In questo caso il lavoro è un trasferimento di energia dal nostro corpo al pallone. Invece, quando la Terra fa cadere un corpo, certamente compie lavoro sul corpo, perché questo si sposta, ma non c'è nessun trasferimento di energia dalla Terra al corpo. È vero che il corpo acquista energia cinetica che prima non aveva, ma perde la stessa quantità sotto forma di energia potenziale. Questa volta non c'è trasferimento ma trasformazione di energia potenziale in energia cinetica.

Il compimento di lavoro non implica quindi il trasferimento di energia, come erroneamente molti sostengono, definendo anzi il lavoro come energia in transito. Per noi la definizione di lavoro non è altro che la seguente, già introdotta nel modulo precedente:

◇ **Definizione** Una forza  $F$  compie lavoro quando agisce su un corpo (punto materiale, corpo esteso...) che si sposta percorrendo una traiettoria qualsiasi, purché tale traiettoria non sia perpendicolare alla direzione della forza. Per un percorso da  $A$  a  $B$  il lavoro vale:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

#### 5.4.4 Dall'energia potenziale alla forza

Immaginiamo di avere nota l'espressione dell'energia potenziale, e vogliamo ricavare la forza che l'ha generata. Ricordiamo un caso studiato nella definizione di lavoro:

$$dW = \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

Nel precedente paragrafo abbiamo visto come  $dW = -dE_p$ , quindi possiamo scrivere:

$$\vec{f} \cdot d\vec{s} = -dE_p \quad \vec{f} = -\frac{dE_p}{d\vec{s}}$$

Attenzione: questo calcolo non è banale come sembra. L'energia potenziale è infatti uno scalare, mentre la forza è una grandezza vettoriale. Avremo quindi la derivata di uno scalare rispetto a un vettore. In questi casi, si usa la notazione di gradiente e derivata parziali. Una derivata parziale si usa quando è presente una funzione in più variabili e la si vuole derivare solo rispetto a una di esse: si eseguirà la derivata rispetto a quella variabile considerando le altre variabili presenti come costanti. Per fare un esempio:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 y 2\pi z) = 2xy 2\pi z$$

Nulla di estraneo quindi. Il gradiente invece è un vettore dello spazio con coordinate le derivate parziali della funzione presa, ovvero:

$$\nabla f(x) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} f(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \right)$$

Riprendendo il discorso dell'energia potenziale, avremo quindi che:

$$\vec{f} = -\frac{dE_p}{d\vec{s}} = -\nabla E_p$$

Possiamo scrivere la forza in coordinate cartesiane, semplificando l'espressione precedente:

$$\vec{f} = \begin{cases} f_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ f_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ f_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases}$$

Prendiamo l'esempio della forza peso: abbiamo che  $U = mgz$ , e vogliamo ricavarne la forza. Avremo quindi che:

$$\vec{P} = \begin{cases} f_x = -\frac{\partial(mgz)}{\partial x} = 0 \\ f_y = -\frac{\partial(mgz)}{\partial y} = 0 \\ f_z = -\frac{\partial(mgz)}{\partial z} = -mg \end{cases}$$

Da cui  $\vec{P} = (0, 0, -mg)$ , coerente con la formula della forza peso che conosciamo.

## 5.5 Considerazioni conclusive sull'energia

Alla luce di quanto abbiamo visto nei moduli precedenti, vogliamo dare finalmente una definizione di energia. Si legge dappertutto (libri, enciclopedie...) che l'energia è la capacità di un corpo di compiere lavoro. Tale affermazione è falsa, perché, in generale, non esiste nessuna relazione tra l'energia posseduta da un corpo e il lavoro che esso può compiere. Se consideriamo poi il proliferare delle forme di energia (elettrica, termica, sonora), ci accorgiamo che in realtà esse non sono altro che energia cinetica ed energia potenziale. In termodinamica l'energia termica di un corpo non è altro che l'energia cinetica delle molecole che lo compongono, dovuta al loro moto disordinato in tutte le direzioni. L'energia sonora non è altro che energia cinetica delle molecole d'aria che vengono messe in vibrazione, l'energia elettrica è una forma di energia potenziale, come quella elastica e gravitazionale. Quindi esistono, in fisica classica, due sole forme di energia: l'energia cinetica e l'energia potenziale. Ricordiamo qui le loro definizioni.

◇ **Definizione** L'**energia cinetica**  $E_k$  di un punto materiale di massa  $m$  che si muove con velocità  $v$  è

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

◇ **Definizione** L'**energia potenziale** di un punto materiale è il lavoro eventuale delle forze conservative, cioè il lavoro che le forze conservative applicate a esso compirebbero qualora il punto si spostasse dalla sua posizione iniziale alla posizione zero di riferimento.

Questa è la nostra definizione di energia di un punto materiale, distinguendo tra le due forme con cui si può presentare. E se ci sono più punti? Nel modulo sui sistemi di punti vedremo che l'energia di molti punti materiali non è altro che la somma delle energie di ciascun punto.

Per il teorema dell'energia cinetica segue che l'energia cinetica di un punto materiale che si muove con velocità  $v$  è il lavoro che le forze esterne al punto hanno compiuto per portarlo dallo stato di quiete al moto con velocità  $v$ . Quindi entrambe le definizioni fanno riferimento al lavoro delle forze esterne al corpo, non al lavoro compiuto dal corpo. Ecco perché abbiamo detto all'inizio che in generale non c'è nessuna relazione tra l'energia posseduta da un corpo e il lavoro che esso può compiere. Si noti poi che la definizione di energia e quella di lavoro sono indipendenti. Ricordiamo qui ancora una volta la definizione di lavoro.

◇ **Definizione** Una forza  $\vec{F}$  compie **lavoro** quando agisce su un corpo (punto materiale, corpo esteso...) che si sposta percorrendo una traiettoria qualsiasi, purché tale traiettoria non sia perpendicolare alla direzione della forza. Per un percorso da  $A$  a  $B$  il lavoro di  $\vec{F}$  vale:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

L'energia quindi, almeno in fisica classica, non ha nulla di misterioso come molti sostengono. È vero, si conserva, ma un mucchio di altre cose si conservano, la quantità di moto, il momento angolare (si veda il modulo sulla dinamica rotazionale) ecc.



## Oscillatori armonici

### 6.1 Oscillatore armonico

L'oscillatore armonico semplice è un sistema fisico il cui stato dinamico è descritto dall'equazione differenziale:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

dove  $x$  è una grandezza fisica che oscilla con legge armonica.

I fenomeni periodici sono frequentissimi in natura. Nei moduli precedenti abbiamo visto alcuni esempi: il pendolo (semplice e composto) e il sistema molla-punto materiale. Per il pendolo, il moto è armonico semplice solo per piccoli spostamenti dalla verticale. Se gli angoli sono grandi il moto è ancora periodico, ma non armonico. Allo stesso modo, la legge di Hooke è un'approssimazione del comportamento di una molla, tanto migliore quanto gli allungamenti sono piccoli. È quindi importante rendersi conto che la condizione di oscillatore armonico semplice si verifica per un sistema che si allontana di poco da una posizione di equilibrio.

Con i metodi dell'analisi matematica si può dimostrare che la soluzione più generale dell'equazione differenziale dell'oscillatore armonico semplice è:

$$x(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$$

che può essere riscritta come

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

ponendo  $a = A \cos \phi$  e  $b = A \sin \phi$ . L'ampiezza  $A$  e la fase  $\phi$  sono determinate dalle condizioni iniziali del moto.

Può capitare che in alcune situazioni ci si trovi di fronte all'equazione differenziale non omogenea

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = f(t)$$

dove  $f(t)$  è una qualsiasi funzione del tempo. In questo caso la soluzione più generale è:

$$x(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t + x_p(t)$$

dove  $x_p(t)$  è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Un esempio chiarirà le idee. Consideriamo una molla appesa verticalmente al soffitto, a cui è appesa una massa  $m$ . La molla viene tirata leggermente e lasciata andare. Vogliamo trovare la legge oraria del moto. Per la seconda legge della dinamica abbiamo che:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx$$

ponendo  $\omega^2 = k/m$  ci riconduciamo all'equazione differenziale non omogenea

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = g$$

Una soluzione particolare di questa equazione è  $x_p = \frac{mg}{k}$ . Dalle condizioni iniziali abbiamo che:

$$x(0) = \frac{2mg}{k} = A \sin \phi + \frac{mg}{k}; \quad v(0) = 0 = \omega A \cos \phi$$

Quindi la legge oraria è:

$$x(t) = \frac{mg}{k} (1 + \cos \omega t)$$

## 6.2 Oscillatore armonico smorzato e forzato

Nel precedente modulo abbiamo studiato il caso di un oscillatore armonico ideale, ovvero senza alcun tipo di forzature o forza resistenti che ne alterino il comportamento. Studiamo qui questi due differenti casi.

### 6.2.1 Oscillatore armonico smorzato

Il caso di riferimento è una molla poggiata su un piano orizzontale, privo di attrito, a cui è connessa una massa che si muove di moto oscillatorio come visto in un precedente modulo. Abbiamo studiato anche la forza di attrito viscoso, dovuta alla resistenza dell'aria. Questi due casi possono legarsi tra loro: una molla in orizzontale, senza attriti col piano, incontra nel suo moto una certa resistenza dell'aria. Una considerazione preliminare da fare è che la resistenza dell'aria lungo il moto orizzontale è diversa da quella lungo il moto verticale, e questo è dovuto alle caratteristiche dell'atmosfera. Possiamo tuttavia trattare i due casi come se fossero idealmente uguali, con la resistenza dell'aria descritta da  $f_{\text{aria}} = -Bv$ .

Per trattare quindi la molla smorzata dall'aria, studiamo le forze agenti sul punto materiale:

$$\begin{aligned} \vec{f}_{\text{tot}} &= \vec{f}_{\text{molla}} + \vec{f}_{\text{aria}} \\ f_{\text{tot}} &= -kx - Bv \\ ma &= -kx - Bv \\ m \frac{d^2x}{dt^2} &= -kx - B \frac{dx}{dt} \\ m\ddot{x} + B\dot{x} + kx &= 0 \end{aligned}$$

Si ottiene quindi un'equazione differenziale del secondo ordine omogenea. Per un migliore studio del problema, applichiamo dei cambi di variabile:

$$\begin{cases} \gamma = \frac{B}{2m} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

Otteniamo quindi l'equazione di un oscillatore armonico smorzato, ovvero:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Si può studiare una soluzione al problema; sfruttando le conoscenze delle equazioni differenziali, si può dimostrare che la funzione:

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t)$$

È soluzione dell'equazione differenziale scritta sopra. Calcolando le derivate prime e seconde, sostituendole nell'equazione dell'oscillatore smorzato, otterremo che:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

Ovvero:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Una breve analisi del risultato ottenuto. *In primis*, possiamo notare che  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  equivale alla pulsazione assoluta dell'oscillatore armonico, ovvero quella ottenuta nel caso in cui non è presente una qualsiasi resistenza da parte dell'aria. Inoltre, se poniamo  $\gamma \rightarrow 0$ , che equivale a porre  $B \rightarrow 0$ , otterremo che  $e^{-\gamma t} = 1$ , quindi la soluzione del problema sarà:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t)$$

Concorde col caso in cui non è presente attrito nell'aria. Si noti che, in questo caso, quando  $\gamma \rightarrow 0$  avremo che  $\omega \rightarrow \omega_0$ , ovvero la pulsazione tende alla pulsazione assoluta dell'oscillatore.

### Calcolo della perdita di energia

Sappiamo che l'energia potenziale di una molla equivale a

$$U = \frac{1}{2} k x^2$$

Nel nostro caso, però, la  $x$  è variabile, quindi in quella espressione andrebbe sostituita la funzione  $x(t)$  a  $x$ . Quel che però vogliamo calcolare è la perdita di energia a ogni ciclo, ovvero: quanta energia perde il sistema dopo ogni oscillazione completa? Per questo motivo, facciamo partire il punto materiale da uno degli estremi, e calcoliamo l'energia quando, dopo un'oscillazione completa, è tornato in quel punto. Agli estremi, il valore di  $x(t)$  non risente del contributo della funzione seno, poiché, in quel punto, esso è uguale a 1. Avremo quindi che:

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t}$$

Valida solo per i punti di estremo dopo un'oscillazione completa. Possiamo sostituirla nella formula dell'energia potenziale, che, agli estremi di una molla, coincide con l'energia totale posseduta dal punto; avremo quindi che:

$$E(t) = \frac{1}{2}k \left(x_0 e^{-\gamma t}\right)^2$$

$$E(t) = \frac{1}{2}kx_0^2 e^{-2\gamma t}$$

Notiamo immediatamente che, l'energia del sistema, è una funzione del tempo. Chiamato  $T$  il periodo di oscillazione del sistema, avremo che:

$$\Delta E = E(t + T) - E(t)$$

Svogliamo i calcoli:

$$\begin{aligned} \Delta E &= E(t + T) - E(t) \\ &= \frac{1}{2}kx_0^2 \left(e^{-2\gamma(t+T)} - e^{-2\gamma t}\right) \\ &= \frac{1}{2}kx_0^2 \left(e^{-2\gamma t} \cdot e^{-2\gamma T} - e^{-2\gamma t}\right) \\ &= \frac{1}{2}kx_0^2 e^{-2\gamma t} \left(e^{-2\gamma T} - 1\right) \\ \Delta E &= E(t) \left(e^{-2\gamma T} - 1\right) \end{aligned}$$

Studiamo adesso un caso particolare, quello in cui  $2\gamma \ll 1$ ; questo caso corrisponde a una bassa resistenza dell'aria. Possiamo sviluppare in serie di Taylor per ottenere:

$$\Delta E = E(t)(1 - 2\gamma T - 1) = E(t)(-2\gamma T)$$

Il nostro obiettivo era calcolare l'energia persa a ogni ciclo, quindi avremo che:

$$\left| \frac{\Delta E}{E} \right| = 2\gamma T$$

Che è la perdita di energia percentuale del sistema a ogni ciclo compiuto. Un'importante considerazione che possiamo fare è che questa non dipende dal ciclo, ma è costante, ovvero il sistema perde la stessa quantità di energia dopo ogni ciclo. Questo risultato ci indica che, per esempio, un'onda sonora (che vedremo presto essere un oscillatore) perde energia espandendosi nello spazio. È per questo motivo che un suono o un rumore vengono percepiti con più forza quando si è in prossimità della sorgente rispetto a quando si è a una notevole distanza. Infatti, se il professore in aula urla, gli studenti seduti alle prime file sentiranno un suono molto forte e quasi insopportabile, mentre quelli seduti in piccionaia sentiranno un suono forte ma comunque sopportabile.

### 6.2.2 Oscillatore armonico forzato

Il caso dell'oscillatore armonico forzato è strettamente legato all'esempio delle onde sonore che si propagano nell'aria; queste, incontrando la resistenza dell'aria, vengono via via smorzate, fino ad affievolirsi a opportune distanze. Il timpano umano, che si

comporta da ricettore, funziona anch'esso da oscillatore armonico, solo che, invece di produrre l'onda, la riceve. Per riceverla, deve quindi essere stimolato da una forza esterna, che sia chiamata comunemente forzante. Quando il ricettore, ovvero il timpano, oscilla alla stessa frequenza dell'onda esterna, ovvero è condizione di risonanza, possiamo percepire il suono, che viene elaborato dal cervello.

Studiamo un modello ideale che rappresenti questa situazione. Abbiamo una molla posta nelle stesse condizioni del paragrafo precedente, con l'aggiunta di una forza esterna di modulo  $F \sin(\Omega t)$  che, a ogni ciclo, agisce sulla molla, forzando l'oscillazione a essere completa, cosa che, se non vi fosse alcuna forza esterna, non si presenterebbe, causando un'oscillazione smorzata. Lo studio dinamico delle forze agenti sul punto materiale all'estremo della molla è quindi:

$$\begin{aligned}\vec{f}_{tot} &= \vec{f}_{molla} + \vec{f}_{aria} + \vec{f}_{esterna} \\ m \frac{d^2 x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + kx &= F \sin(\Omega t)\end{aligned}$$

In questo caso,  $\Omega$  rappresenta la pulsazione della forza esterna, diversa dalle due pulsazioni  $\omega$  e  $\omega_0$  che rappresentano, rispettivamente, la pulsazione finale del sistema e quella assoluta del sistema in condizione ideali senza resistenze o forzanti. Riscriviamo l'equazione scegliendo il precedente cambio di variabili, con una aggiunta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = \frac{B}{2m} \\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ A = \frac{F}{m} \end{array} \right.$$

Otteniamo quindi l'equazione seguente, che è una equazione differenziale del secondo ordine non omogenea:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = A \sin(\Omega t)$$

La soluzione di questa equazione è fornita dalla soluzione generale, che abbiamo ricavato sopra, aggiunta a una soluzione particolare del problema, che si può dimostrare essere:

$$x(t) = x_0 \sin(\Omega t - \delta)$$

Prima di parlare del cambio di variabili, è importante considerare questo termine; la soluzione generale presentava un termine  $e^{-\gamma t}$  che, quando  $t$  raggiunge valori molto grandi, annulla il contributo del termine. Resta quindi solo la soluzione particolare, qui sopra scritta, a descrivere efficientemente il sistema dopo un dato periodo di tempo. In questa soluzione, i cambi di variabile eseguiti sono stati:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma\Omega^2}} \\ \delta = \arctan\left(\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) \end{array} \right.$$

Il grafico di  $x_0$  in funzione di  $t$  è una semplice senoide, con valori compresi tra  $\pm x_0$ . L'interessante è invece graficare  $x_0$  in funzione di  $\Omega$ : il grafico assumerà un andamento completamente diverso, cioè presenterà un picco nel caso in cui  $\Omega \rightarrow \omega_0$ .

Come nel caso precedente, in cui abbiamo calcolato la perdita di energia, possiamo qui calcolare il diminuire della frequenza di pulsazione, che sarà uguale a (ci esoneriamo dai calcoli):

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\gamma}{\omega_0}$$

### 6.3 Oscillatori accoppiati

Un sistema di oscillatori accoppiati presenta due oscillatori armonici che sono soggetti anche a una forza di mutua interazione. L'esempio più semplice che possiamo fare è quello di due punti collegati attraverso due molle a dei supporti fermi, ad esempio un muro, che sono a loro volta collegati tra loro da un'altra molla. Per semplicità, consideriamo le due masse uguali, ovvero  $m_1 = m_2 = m$ , le costanti elastiche delle due molle agli estremi uguali, pari a  $k$ , e la costante della molla centrale  $k_{12}$  essere  $k_{12} \ll k$ .

Per definire le posizioni dei corpi sfruttiamo le lunghezze a riposo delle due molle: chiameremo  $x_1$  la distanza del corpo 1 dalla lunghezza a riposo della molla 1, mentre  $x_2$  è la distanza del corpo 2 dalla lunghezza a riposo della molla 2. Considerato l'effetto della molla centrale, avremo che il corpo di destra sarà spostato dalla lunghezza a riposo verso il centro, quindi verso destra, mentre il corpo di sinistra sarà spostato verso sinistra in direzione del centro. Preso un sistema di riferimento rettilineo e parallelo e al piano, crescente da sinistra verso destra, avremo che:

- $x_1$  allungamento corpo 1;
- $-x_2$  allungamento corpo 2.

L'allungamento della molla centrale sarà quindi pari a  $x_2 - x_1$ . Il sistema che si ottiene è un sistema a due gradi di libertà.

Le forze che agiscono sui corpi sono invece:

- $f = -kx_1$  forza molla 1,
- $f = -kx_2$  forza molla 2,
- $f = k_{12}(x_2 - x_1)$  forza molla centrale sul corpo 1,
- $f = k_{12}(x_2 - x_1)$  forza molla centrale sul corpo 2.

Otteniamo il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \underbrace{-kx_1}_{\text{forza di richiamo}} + \underbrace{k_{12}(x_2 - x_1)}_{\text{forza di interazione}} \\ m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \underbrace{-kx_2}_{\text{forza di richiamo}} + \underbrace{k_{12}(x_2 - x_1)}_{\text{forza di interazione}} \end{cases}$$

Esplicitando i termini otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{k+k_{12}}{m} x_1 = \frac{k_{12}}{m} x_2 & [1] \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{k+k_{12}}{m} x_2 = \frac{k_{12}}{m} x_1 & [2] \end{cases}$$

In questo sistema sono presenti due oscillatori accoppiati, in cui il moto di uno è in funzione del moto dell'altro. Un modo per disaccoppiarli è attraverso il metodo dei moti normali: si trovano due moti e si fa in modo che le equazioni degli oscillatori siano combinazione lineare dei moti normali. Per fare ciò definiamo due nuovi termini:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{x_1 - x_2}{2}$$

A questo punto, compiamo due operazioni. Prima sommiamo le equazioni [1] e [2] e le dividiamo per 2; dopo le sottraiamo e le dividiamo nuovamente per due, ottenendo le equazioni del moto di  $x$  e  $y$ :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k+2k_{12}}{m}y = 0 \end{cases}$$

Notiamo immediatamente che sono due oscillatori disaccoppiati, e ne conosciamo la soluzione:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) & \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ y &= y_0 \sin(\bar{\omega} t + \bar{\varphi}) & \bar{\omega} &= \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}} \end{aligned}$$

Ricordando le definizioni di  $x$  e  $y$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= x + y = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + y_0 \sin(\bar{\omega} t + \bar{\varphi}) \\ x_2 &= x - y = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) - y_0 \sin(\bar{\omega} t + \bar{\varphi}) \end{aligned}$$

I moti  $x(t)$  e  $y(t)$  sono i due moti normali; come possiamo notare,  $x_1$  e  $x_2$  sono due combinazioni lineari dei moti normali.

Un'osservazione rapida che possiamo fare è che, se  $y_0 = 0$  la molla centrale non si allunga, ma i due corpi oscillano parallelamente.

Finiamo di studiare il caso, semplificando il problema. Poniamo quindi:  $\varphi = \bar{\varphi} = 0$  e  $x_0 = y_0$ , con  $x_2 = 0$  al tempo  $t = 0$ . Le due equazioni diventano così:

$$\begin{aligned} x_1 &= x + y = x_0 \sin(\omega_0 t) + x_0 \sin(\bar{\omega} t) \\ x_2 &= x - y = x_0 \sin(\omega_0 t) - x_0 \sin(\bar{\omega} t) \end{aligned}$$

Utilizzando le regole di prostaferesi terminiamo finalmente lo studio ottenendo le due equazioni finali del moto:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_0 \sin\left(\frac{\omega_0 + \bar{\omega}}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_0 - \bar{\omega}}{2}t\right) \\ x_2 &= 2x_0 \sin\left(\frac{\omega_0 - \bar{\omega}}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_0 + \bar{\omega}}{2}t\right) \end{aligned}$$



PARTE II

# Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi





## Introduzione

### 7.1 Sistemi di punti e corpo rigido

Dopo aver studiato la meccanica del punto materiale, è immediato pensare che, nella realtà, non esistono punti materiali, ma esistono solo corpi che hanno forma e dimensioni assolutamente non paragonabili a quelle di un punto. La meccanica newtoniana non si ferma quindi allo studio del modello del punto, bensì parte da questo per arrivare a descrivere il moto di tutti i corpi materiali reali.

È bene quindi definire i **sistemi di punti materiali**: essi non sono nient'altro che un insieme di punti materiali che vengono studiati complessivamente. Come vedremo dettagliatamente, lo studio di un sistema si rifà spesso allo studio del punto materiale, tenendo tuttavia conto di movimenti complessivi del sistemi, come nel caso delle rotazioni.

I sistemi di punti possono essere più o meno rigidi, a seconda di come è definito il sistema. Se le distanze interne al sistema tra i punti appartenenti a esso variano nel tempo, allora il sistema sarà non rigido; allo stesso modo, quando le distanze interne restano invece costanti nel tempo, avremo a che fare con un sistema rigido.

Un sistema rigido è anche chiamato **corpo rigido**: esso è un sistema materiale di punti indeformabile. Come è intuitivo pensare, esso è una buona schematizzazione degli oggetti reali. Un corpo rigido presenta, in totale, sei gradi di libertà, di cui tre sono dovuti agli assi del centro di massa, che vedremo meglio nei prossimi moduli, e i restanti tre agli angoli di rotazione di questi assi rispetto a un sistema di riferimento esterno considerato fisso.



## Dinamica dei sistemi di punti

### 8.1 Centro di massa

Lo studio della dinamica del punto materiale ci ha permesso di descrivere moltissimi fenomeni. Vogliamo però ora fare un passo avanti, e studiare la dinamica di un sistema costituito da più punti materiali. Facciamo alcune considerazioni generali. Su ogni punto agisce una forza  $\vec{F}_i$ , risultante delle forze esterne agenti sul punto, che indicheremo con  $\vec{F}_i^{(e)}$ , e delle forze interne al sistema, esercitate dagli altri punti,  $\vec{F}_i^{(i)}$ . In generale, la risultante delle forze interne agenti sull' $i$ -esimo punto è diversa da zero, però la somma di tutte le forze interne è nulla. Infatti, in virtù del terzo principio della dinamica, la forza che un punto esercita sull'altro è uguale e opposta alla forza che quest'ultimo esercita sul primo punto. Ora, ogni punto avrà una sua grandezza, cioè una velocità, quantità di moto, accelerazione ecc. Definiamo quindi grandezze analoghe per l'intero sistema. Per esempio, la quantità di moto del sistema sarà la somma delle quantità di moto di ciascun punto:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

O ancora, l'energia cinetica totale del sistema sarà la somma delle energie cinetiche di ciascun punto:

$$E_k = \sum_i E_{k,i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

mentre la velocità del sistema non è la somma delle velocità dei singoli punti, e neanche l'accelerazione del sistema è la somma delle accelerazioni dei punti, come vedremo.

A ben vedere però, descrivere il moto di un insieme di più punti pare complicato. Per esempio, se lanciamo in aria una palla da golf (che possiamo considerare come un insieme continuo di punti, gli atomi che la costituiscono) senza imprimerle rotazioni, il suo moto è facile da descrivere, è parabolico. Se, invece, lanciamo per aria un martello (un altro insieme continuo di punti) il suo moto risulta più complicato. Non possiamo trattare il martello alla stregua di un punto materiale perché ogni sua parte segue traiettorie differenti. Tuttavia, se potessimo scattare molte fotografie durante il suo moto per poi confrontarle, ci accorgeremmo che difatti esiste un punto del martello che si muove di moto parabolico: il suo centro di massa.

◇ **Definizione** In generale definiamo il **centro di massa** di un sistema di  $n$  punti materiali come il punto geometrico la cui posizione è individuata, rispetto a un determinato sistema di riferimento, dal vettore

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + \dots + m_n}$$

Le componenti di questo raggio vettore lungo tre assi cartesiani orientati saranno quindi

$$x_{cm} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}, \quad y_{cm} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}, \quad z_{cm} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

Se i punti si spostano anche la posizione del centro di massa varia. La sua velocità sarà

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{P}}{M}$$

e derivando otteniamo l'accelerazione

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{M}$$

Se il moto del sistema è studiato in un sistema di riferimento inerziale, in assenza di forze apparenti, allora possiamo scrivere la seconda legge della dinamica per un singolo punto come

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)}$$

quindi

$$M \vec{a}_{cm} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i (\vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)}) = \vec{R}^{(e)}$$

dove  $\vec{R}^{(e)}$  indica la **risultante delle forze esterne agenti sul sistema** (si noti come la risultante delle forze interne sia nulla). Abbiamo quindi ottenuto la seguente equazione

$$\vec{R}^{(e)} = M \vec{a}_{cm}$$

che esprime il **teorema del centro di massa**. Il centro di massa si muove come un punto materiale a cui è applicata la risultante delle forze esterne e in cui è concentrata tutta la massa del sistema. Ci siamo ricondotti al problema precedente: per studiare la dinamica di un sistema di corpi possiamo studiare il moto di un singolo punto materiale, cosa che sappiamo fare bene. Tornando all'esempio del martello, ogni punto di esso avrà una sua traiettoria, ma quella del centro di massa è semplice: è una parabola. Questo perché l'unica forza esterna agente sul martello è la forza peso. Quindi solo le forze esterne possono modificare il moto del centro di massa. Se siamo fermi e alziamo una braccio, è stata la forza dei nostri muscoli, forza interna al sistema uomo, ad averlo accelerato verso l'alto. Il nostro centro di massa però è rimasto fermo. In altre parole, non possiamo spostarci senza l'aiuto di una forza

esterna. Quando camminiamo, è la forza di attrito col pavimento che ci spinge in avanti.

È bene ora fare alcune osservazioni. Il moto del centro di massa rappresenta il **moto globale dei punti materiali** che costituiscono il sistema. Il fatto che il centro di massa abbia una certa velocità  $\vec{v}_{cm}$  significa che in media il sistema si sta spostando in una data direzione, anche se nessuna delle velocità dei singoli punti coincide necessariamente con  $\vec{v}_{cm}$ . Inoltre, dire che il centro di massa si muove come se lì fossero concentrate tutte le forze esterne non significa che tali forze agiscano solo sul centro di massa. Può succedere benissimo che sul centro di massa non agisca nessuna forza, ma agiscano su altri punti del sistema. Per esempio, se siamo in piedi sul pavimento la forza normale agisce sui nostri piedi, e non sul nostro centro di massa, che si trova da qualche parte a metà del nostro corpo. Il teorema ci dice solo che, se vogliamo studiare il moto del centro di massa, possiamo "far finta" che lì agiscano le forze esterne.

Facciamo infine una considerazione sul centro di massa in sé. Il centro di massa di un sistema può non essere un punto del sistema. Per esempio, il centro di massa di una sfera omogenea è il centro della sfera, ma il centro di massa della cupola di San Pietro non è un punto della cupola, ma si trova all'interno della cavità. O ancora, se due punti materiali di massa  $m$  si vengono incontro con la stessa velocità, il centro di massa del sistema si trova fermo a metà del segmento che congiunge i due punti. Infatti

$$x_{cm} = \frac{mx_1 + mx_2}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad v_{cm} = \frac{mv - mv}{2m} = 0$$

## 8.2 Conservazione della quantità di moto

Come caso particolare del teorema del centro di massa abbiamo che, se la risultante delle forze esterne è nulla, allora l'accelerazione del centro di massa è nulla. Quindi

$$\Delta \vec{P} = 0$$

ovvero la quantità di moto del sistema, cioè la quantità di moto del centro di massa, non cambia. Se la risultante delle forze esterne è nulla si dice anche che il sistema è isolato. Questa **legge di conservazione**, nota come **principio di conservazione della quantità di moto**, ci permette di analizzare un gran numero di situazioni. Per esempio, supponiamo che una persona si trovi su un carrello, inizialmente fermo, che si trova su un piano orizzontale con attrito trascurabile. Supponiamo inoltre che la persona tenga in mano un sasso. Cosa succede se lancia il sasso orizzontalmente in avanti?

La forza che esercita sul sasso è una forza interna al sistema costituito da carrello, persona e sasso, quindi non può influenzare il moto del centro di massa. Non essendoci forze esterne, concludiamo che il centro di massa, inizialmente fermo, deve rimanere fermo anche dopo che il sasso è stato lanciato. Se  $m_1$  è la massa totale di persona e carrello,  $m_2$  la massa del sasso e  $v$  la velocità (orizzontale) con cui viene lanciato il sasso, possiamo scrivere:

$$m_1 \vec{u} + m_2 \vec{v} = 0$$

da cui

$$\vec{u} = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}$$

ovvero il carrello si muove con velocità di modulo  $u$  nel verso opposto al moto del sasso. Ragionevolmente possiamo supporre che  $m_1 \gg m_2$ , da cui  $u \ll v$ : la velocità del carrello è molto più piccola di quella del sasso.

### 8.3 Sistema di riferimento del centro di massa

Nello studio della dinamica dei sistemi di punti è spesso utile considerare il sistema di riferimento del centro di massa. Un tale sistema di riferimento ha queste caratteristiche:

- l'origine degli assi si trova nel centro di massa;
- gli assi sono sempre paralleli rispetto a quelli di un sistema di riferimento inerziale;
- non è in generale un sistema inerziale, poiché in generale non è nulla la risultante delle forze esterne agenti sul sistema.

Indicando con un apice le grandezze riferite al sistema di riferimento del centro di massa possiamo scrivere per ogni punto

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{cm}$$

dove  $\vec{r}'_i$  è il raggio vettore che identifica la posizione dell' $i$ -esimo punto rispetto a un sistema di riferimento inerziale e  $\vec{r}_{cm}$  è il vettore che unisce le origini dei due sistemi di riferimento. Dal teorema delle velocità relative con  $\omega = 0$  abbiamo che

$$\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_{cm}$$

Poiché abbiamo assunto il centro di massa come riferimento valgono le relazioni

$$\vec{r}'_{cm} = 0, \quad \vec{v}'_{cm} = 0$$

da cui

$$\sum_i m_i \vec{v}'_i = 0$$

ovvero la quantità di moto del sistema, somma delle quantità di moto dei singoli punti, è nulla se viene calcolata nel sistema di riferimento del centro di massa.

Facciamo ora alcune considerazioni energetiche. L'energia cinetica del sistema così come è misurata nel sistema di riferimento inerziale è:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

che possiamo scrivere come

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}_{cm})^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum_i m_i \vec{v}'_i \vec{v}_{cm}$$

Il primo termine rappresenta l'energia cinetica del sistema di punti così come è misurata nel sistema di riferimento del centro di massa, il secondo termine è l'energia

cinetica del centro di massa, misurata nel sistema di riferimento inerziale, e infine l'ultimo termine è nullo, in quanto sappiamo che la quantità di moto del sistema misurata nel sistema del centro di massa è nulla. In definitiva possiamo scrivere

$$E_k = E'_k + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$$

che rappresenta il teorema di König per l'energia cinetica. L'energia cinetica di un sistema di punti materiali è uguale alla somma dell'energia cinetica del sistema misurata nel sistema di riferimento del centro di massa più l'energia cinetica del centro di massa stesso, misurata nel sistema inerziale.

## 8.4 Mutua interazione: problema dei due corpi

Il problema della mutua interazione riguarda casi in cui sono presenti due punti materiali i quali si esercitano a vicenda una forza. Prendiamo un caso semplificato: due corpi di massa  $m_1$  e  $m_2$ , posti a distanza  $\vec{r}$ , esercitando ognuno una forza attrattiva sull'altro, la cui direzione è la retta congiungente i due punti materiali. Avremo che le due forze sono uguali e opposte: chiameremo il loro modulo  $f$ .

Prendiamo un sistema di riferimento con l'origine nel centro di massa del sistema. In questo modo il sistema non sarà accelerato, bensì si muoverà di moto costante, pertanto è un sistema di riferimento inerziale per il quale valgono le leggi della dinamica. Avremo quindi che:

$$\begin{aligned} \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} &= \vec{0} \\ m_1\vec{r}_1 &= -m_2\vec{r}_2 \\ \frac{r_1}{r_2} &= \frac{m_2}{m_1} \end{aligned}$$

Dove nell'ultima espressione si è passati al modulo delle distanze. Studiamo a questo punto il moto di uno dei due corpi, prendiamo in analisi quello con massa  $m_2$

$$\vec{f}(r) = m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}$$

Notiamo due cose: primo, che la forza è funzione della distanza tra i due punti. Secondo, che la distanza tra i due punti coincide con la somma delle distanze dei punti dal centro di massa, ovvero:  $r = r_1 + r_2$ . Per scriverlo in maniera migliore, evidenziamo  $r_2$  come:  $r = r_2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)$ . Poiché abbiamo visto poco sopra la relazione che lega il rapporto dei due raggi, possiamo a questo punto scrivere:

$$\begin{aligned} r &= r_2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = r_2 \frac{m_1 + m_2}{m_1} \\ \vec{r}_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{aligned}$$

Andiamo adesso a sostituire questa espressione nella formula della forza:

$$\vec{f}(r) = m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Diamo una definizione rapida:

◇ **Definizione** Si definisce **massa ridotta** di un sistema a due punti:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Detto questo, otteniamo infine:

$$\vec{f} = \mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Questa conclusione è importante: il problema di due punti in mutua interazione può essere ridotto a un solo corpo avente come massa la massa ridotta. Questa conclusione riguarda tutti i casi di mutua interazione.

## 8.5 Teorema di König per l'energia cinetica

Abbiamo visto come, sfruttando il sistema di riferimento del centro di massa, si possano descrivere diverse grandezze fisiche di un sistema. Ma, riguardo all'energia, come possiamo calcolare l'energia cinetica totale di un sistema di punti?

Intuitivamente, vale, per i sistemi discreti, l'espressione:

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Mentre per un sistema continuo:

$$\int \frac{1}{2} v^2 dm$$

Calcolare queste due espressioni può risultare complicato. A semplificare le cose, interviene il **teorema di König per l'energia cinetica**, che dimostriamo qui di seguito. Il teorema afferma che

L'energia cinetica di un sistema di punti materiali è la somma dell'energia cinetica che avrebbe il corpo se tutta la sua massa fosse concentrata nel centro di massa e l'energia cinetica relativa che possiede il sistema rispetto al centro di massa, ovvero:

$$K = \frac{1}{2} M_{tot} v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

### 8.5.1 Dimostrazione

Prendiamo un sistema di punti materiali; per studiare l'insieme di punti, prendiamo due sistemi di riferimento, uno esterno e inerziale, che chiameremo  $S_0$ , il secondo è il sistema del centro di massa  $S'$ .

Il primo passo che compiamo è calcolare la velocità  $v$  rispetto a  $S_0$ . Nei due sistemi di riferimento, sappiamo valere:

$$\begin{cases} \vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}'_i \\ \vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i \end{cases}$$

Sostituiamo l'espressione di  $v_i$  nell'espressione dell'energia cinetica:

$$\begin{aligned} K &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i) (\vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i m_i v_{CM} v'_i \\ K &= \frac{1}{2} M_{tot} v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + v_{CM} \sum_i m_i v'_i \end{aligned}$$

Per concludere la dimostrazione, non resta che dimostrare che l'ultimo termine della somma è nullo. Infatti, ricordando che  $\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i$ , possiamo scrivere l'espressione  $m_i v_i$  come  $m_i v_{CM} + m_i v'_i$ . Sommando:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i v_i &= \sum_i m_i v_{CM} + \sum_i m_i v'_i \\ M_{tot} v_{CM} &= M_{tot} v_{CM} + \sum_i m_i v'_i \end{aligned}$$

Ovvero l'ultimo termine è nullo. Per questo, è dimostrato il teorema di König e l'energia cinetica di un sistema di punti sarà uguale a:

$$K = \frac{1}{2} M_{tot} v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

## 8.6 Sistemi a massa variabile

Finora abbiamo visto problemi relativi a punti materiali o sistemi di punti materiali di massa fissata, cioè costante nel tempo. La descrizione dinamica del moto per essi è determinata dall'equazione di Newton  $\sum_{i=1}^n \vec{F} = m\vec{a}$ , riscritta come  $\vec{R}^{(e)} = M\vec{a}$  nel caso di più punti materiali. In realtà situazioni in cui la massa varia non sono rare, basti pensare a una scala mobile, o a un razzo che espelle carburante. Per analizzare questi tipi di moto dobbiamo ricordare che la forza è uguale alla derivata temporale della quantità di moto, però ora dobbiamo derivare anche la massa:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$$

Vediamo subito una situazione concreta. Supponiamo che su un nastro trasportatore di massa  $m_0$  si muova con velocità orizzontale  $v_0$ . A un certo punto sul nastro vengono depositate verticalmente delle scatole, di modo che la massa totale aumenti linearmente nel tempo, con  $k$  costante di proporzionalità. Nel caso non agisca nessuna forza esterna possiamo applicare la legge di conservazione della quantità di moto tra l'istante iniziale e un istante generico. Quindi

$$m_0 v_0 = m(t) v(t)$$

da cui

$$v(t) = \frac{m_0 v_0}{m_0 + kt}$$

La velocità del nastro trasportatore quindi diminuisce nel tempo. Il punto interessante qui è che, seppur ci sia variazione di velocità, e quindi accelerazione, non c'è forza. Nei sistemi a massa variabile quindi sembra che la seconda legge della dinamica non sia più valida. Il dubbio si risolve subito pensando che la legge a cui dobbiamo far riferimento in generale è  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ , che si riduce  $\vec{F} = m\vec{a}$  solo se la massa è costante, e questo è vero per i punti materiali.

## 8.7 Moto di un razzo

Nel modulo precedente abbiamo introdotto i sistemi a massa variabile. Qui vogliamo discutere un esempio esemplare di tali sistemi, analizzando il moto di un razzo. Il fenomeno è semplice: il motore del razzo espelle il carburante a grande velocità, e, per la conservazione della quantità di moto, il razzo si muove nel verso opposto (si noti che non è il motore in sé che spinge il razzo). Vogliamo dare ora una descrizione quantitativa di questo fenomeno.

Fissiamo dunque un sistema di riferimento inerziale con verso positivo nel verso di moto (orizzontale) del razzo, che a un certo istante ha una massa  $m$  e che si muove con velocità  $v$ . Se il razzo espelle una massa infinitesima  $dm$  la velocità del razzo diventa  $v + dv$ , mentre  $dm$  si muove con velocità in modulo  $v^*$  rispetto a quest'ultimo e in senso opposto. Tenendo conto della formula per le velocità relative, la velocità di  $dm$  rispetto a un sistema inerziale è pari a  $v - v^*$ . Assumendo che non ci siano forze esterne nella direzione orizzontale, la quantità di moto si conserva:

$$mv = (m - dm)(v + dv) + dm(v - v^*)$$

da cui, trascurando il prodotto di quantità infinitesime,

$$mdv = v^* dm$$

cioè

$$dv = \frac{dm}{m} v^*$$

Supponendo che la massa venga espulsa con un tasso costante possiamo scrivere:

$$m(t) = m_0 - kt$$

con differenziale  $dm = kdt$  positivo, perché abbiamo considerato  $dm$  come valore assoluto della massa espulsa. Integrando

$$\Delta v = \int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t \frac{v^* k}{m_0 - kt} dt = -v^* \int_{t_0}^t \frac{-k}{m_0 - kt} dt = v^* [\ln m_0 - \ln (m_0 - kt)]$$

quindi la legge della velocità è:

$$v(t) = v_0 + v^* \ln \frac{m_0}{m_0 - kt}$$

Supponiamo ora che il razzo venga lanciato verticalmente. Lungo la direzione verticale agisce la forza di gravità, e la quantità di moto del razzo non si conserva. Trascurando la variazione di  $g$  con la quota, se prima  $dp = mdv - v^* dm = 0$ , ora

$$dp = mdv - v^* dm = F dt = -mg dt$$

e

$$dv = v^* \frac{dm}{m} - g dt$$

Integrando

$$\Delta v = \int_{t_0}^t \frac{v^* k}{m_0 - kt} dt - \int_{t_0}^t g dt$$

E la legge della velocità è:

$$v(t) = v_0 + v^* \ln \frac{m_0}{m_0 - kt} - gt$$

In caso di moto verticale il moto viene rallentato.



## Seconda legge cardinale

### 9.1 La seconda legge cardinale

Per quanto riguarda la meccanica del punto materiale, le leggi fondamentali che descrivevano il moto di un punto erano tre; nei sistemi esse diventano due, ricordando però che le tre leggi della dinamica valgono poi per i singoli punti del sistema. Le leggi fondamentali dei sistemi si chiamano **leggi cardinali**; la prima è già stata affrontata nel modulo sul centro di massa, e afferma:

$$\vec{F}^{tot} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

Questa descrive la variazione di moto di un sistema. Per descrivere invece le rotazioni, si utilizza la seconda, ovvero:

$$\vec{\tau}^{ext} = \frac{d\vec{J}}{dt}$$

Questa legge è semplicemente la legge del momento angolare del punto materiale, sommata però sull'indice  $i$ . Ricordiamo che:

$$\vec{J} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{f}$$

Come vedremo nei prossimi moduli, la seconda legge cardinale permette di descrivere tutti i diversi tipi di moto di un sistema; il suo utilizzo è di importanza fondamentale nella soluzione di problemi ed esercizi.

La legge è valida sia per un polo fisso che per un qualsiasi tipo di polo mobile, con un'aggiunta che vedremo nel prossimo capitolo.

### 9.2 Teorema di König per il momento angolare

Come abbiamo visto per l'energia cinetica, anche il momento angolare può essere scritto come:

$$\vec{J}_0 = \vec{J}_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge M\vec{v}_{CM}$$

Questo non è altro che l'equivalente del **teorema di König per il momento angolare**:

Il momento angolare di un sistema rispetto a un polo fisso equivale alla somma del momento angolare del centro di massa e del sistema rispetto ad esso.

$$\vec{J}_0 = \vec{J}_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge M\vec{v}_{CM}$$

### 9.2.1 Dimostrazione

Ricordando che:

$$\begin{aligned}\vec{r}_i &= \vec{r}'_i + \vec{r}_{CM} \\ \vec{v}_i &= \vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}\end{aligned}$$

Scriviamo il fattore  $\vec{J}_0$ :

$$\begin{aligned}\vec{J}_0 &= \sum_i (\vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i) = \sum_i \left[ (\vec{r}'_i + \vec{r}_{CM}) \wedge m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}) \right] = \\ &= \sum_i (m_i \vec{r}'_i \wedge \vec{v}_{CM}) + \sum_i (\vec{r}'_i \wedge m_i \vec{v}'_i) + \\ &+ \sum_i (\vec{r}_{CM} \wedge m_i \vec{v}'_i) + \sum_i (\vec{r}_{CM} \wedge m_i \vec{v}_{CM}) = \\ &= M\vec{r}'_{CM} + \vec{J}_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge M\vec{v}'_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge M\vec{v}_{CM} \\ &\Rightarrow \vec{J}_0 = \vec{J}_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge M\vec{v}_{CM}\end{aligned}$$

Questo teorema è largamente utilizzato in teoria sia in astrofisica, per descrivere il moto di un pianeta che ruota su se stesso e anche attorno a una stella, tipo la Terra con il Sole, ma anche il fisica particellare, per descrivere lo spin di una particella.

Un risultato molto simile è il dimostrare come la seconda legge cardinale valga sia per un polo fisso che per un polo mobile.

### 9.2.2 Il momento esterno rispetto a un polo qualunque

Prendiamo un polo  $\Omega$  qualunque, anche mobile; il momento angolare di un sistema  $\vec{J}_\Omega$  rispetto a questo polo sarà:

$$\vec{J}_\Omega = \sum_i \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

Dove  $\vec{r}'_i$  rappresenta la distanza dell' $i$ -esimo punto del sistema dal polo. Per calcolare il momento delle forze esterne, deriviamo rispetto al tempo:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{J}_\Omega}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_i \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{v}_i \right) = \\ &= \sum_i \vec{v}'_i \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{a}_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i \frac{d}{dt} [(\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \wedge (m_i \vec{v}_i)] + \vec{\tau}_\Omega^{ext} \\
&= \sum_i \vec{v}_i \wedge m_i \vec{v}_i - \sum_i \vec{v}_\Omega \wedge m_i \vec{v}_i + \vec{\tau}_\Omega^{ext} \\
&\Rightarrow -\vec{v}_\Omega \wedge M \vec{v}_{CM} + \vec{\tau}_\Omega^{ext} = \frac{d\vec{J}}{dt} \\
&\Rightarrow \vec{\tau}_\Omega^{ext} = \frac{d\vec{J}}{dt} + \vec{v}_\Omega \wedge M \vec{v}_{CM}
\end{aligned}$$

Possiamo osservare che, se  $\Omega$  corrisponde al centro di massa, oppure è un polo fisso, la velocità rispetto a esso  $\vec{v}_\Omega = 0$  è nulla, quindi la seconda legge cardinale diventa nella forma con cui la conosciamo, ovvero  $\vec{\tau}^{ext} = \frac{d\vec{J}}{dt}$ .

### 9.3 Corpo rigido in rotazione

Prendiamo un corpo rigido, che sia in rotazione attorno a un asse fisso  $a$ . Il corpo ruota con velocità angolare  $\omega$ , che può anche variare nel tempo, ma è uniforme su tutto il corpo; preso un elementino di massa  $dm$ , che si trova a distanza  $h$  dall'asse di rotazione, avremo che la sua velocità tangenziale è  $v = h\omega$ .

Calcoliamo allora l'energia cinetica del corpo rigido in rotazione; poiché parliamo di corpo rigido, questo è un sistema continuo di punti materiali, quindi:

$$dK = \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} dm h^2 \omega^2$$

Da cui otteniamo la relazione:

$$K = \int \frac{1}{2} h^2 \omega^2 dm = \frac{\omega^2}{2} \int h^2 dm$$

Il termine  $\frac{\omega^2}{2}$  è costante; il secondo termine, invece,  $\int h^2 dm$ , si chiama momento di inerzia del corpo rigido e dipende dalla massa e dalla geometria del corpo. Nel prossimo modulo calcoleremo i momenti di inerzia di solidi noti.

Per quanto riguarda l'energia cinetica, definito il momento di inerzia come  $I = \int h^2 dm$ , si ha che l'energia cinetica di un corpo rigido, rotante attorno a un asse fisso, è:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Nel caso generale, in cui, oltre a ruotare, stia anche traslando, avremo che, per il teorema di König, l'energia cinetica sarà data:

$$K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Nel caso particolare in cui il corpo ruoti attorno a un punto fisso  $O$  diverso dal centro di massa l'energia cinetica è invece pari a:

$$K = \frac{1}{2} I_O \omega^2$$

Dove per  $I_O$  si intende il momento di inerzia relativo a un asse passante per  $O$ , ma lo vedremo più dettagliatamente nel prossimo modulo.

## 9.4 Momento d'inerzia

Abbiamo introdotto nello scorso modulo il momento di inerzia.

◇ **Definizione** Si definisce **momento d'inerzia** di un corpo rigido l'integrale:

$$I = \int r^2 dm$$

Dove  $r$  è la distanza dall'asse di rotazione dell'elemento infinitesimo di massa  $dm$ .

Il momento di inerzia varia a seconda della forma del corpo rigido e della sua massa. In questo modulo calcoleremo i momenti di inerzia di solidi noti. Ricordiamo che ci sono tre modi per esprimere  $dm$ , in base al tipo di densità:

$$dm \Rightarrow \begin{cases} \rho dV = \rho(x, y, z) dx dy dz & \text{volumica} \\ \sigma dS = \sigma(x, y) dx dy & \text{superficiale} \\ \lambda dl = \lambda(x) dx & \text{lineare} \end{cases}$$

Ricordiamo infine che, per i corpi rigidi formati da più forme, il momento d'inerzia risulta essere additivo; per fare un esempio, il momento di inerzia del pendolo di un orologio a pendolo sarà la somma del momento della sbarretta e del momento del disco.

### 9.4.1 Momento d'inerzia di un anello

Prendiamo un anello di raggio  $R$  e massa  $M$ , che ruota attorno all'asse ortogonale che passa per il suo centro. Avremo che tutti i punti distano dall'asse  $Rh = R$ ; possiamo scrivere  $dm = \lambda dl$ , dove  $\lambda = \frac{M}{2\pi R}$ , ovvero la massa totale diviso la lunghezza totale dell'anello. Il momento di inerzia per un asse passante per il centro, quindi, sarà:

$$I_c = \int h^2 dm = \int h^2 \lambda dl = \int R^2 \frac{M}{2\pi R} dl = \frac{MR}{2\pi} \int dl = \frac{MR}{2\pi} \cdot 2\pi R = MR^2$$

Un'osservazione importante è che questo risultato coincide con il momento di inerzia di un cilindro cavo; in questo caso potremmo scrivere  $dm = \sigma dS = \sigma L dl = \frac{M}{2\pi RL} L dl = \frac{M}{2\pi R} dl$ , che è esattamente uguale al caso dell'anello.

### 9.4.2 Momento d'inerzia di un disco omogeneo

Prendiamo un disco omogeneo di raggio  $R$  e massa  $M$  ruotante attorno a un asse ortogonale passante per il suo centro. La densità di massa superficiale sarà  $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$ . Per calcolare il momento di inerzia del disco, lo dividiamo in tanti piccoli anellini concentrici, i cui raggi  $r$  vanno da 0 a  $R$ . Allora avremo che  $h = r$ ,  $dm = \sigma dS$  e  $dS = 2\pi r dr$ . Calcoliamo il momento:

$$I_c = \int_0^R h^2 dm = \int_0^R h^2 \sigma dS = \left( \int_0^R r^2 (2\pi r) dr \right) \frac{M}{\pi R^2} = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r^3 dr = 2 \frac{M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

Abbiamo fin da subito portato fuori la densità  $\sigma$  poiché non influiva nel calcolo dell'integrale. Notiamo che lo stesso risultato lo si ottiene per un cilindro omogeneo pieno. In questo caso potremmo scrivere  $dm = \rho dV = \rho L 2\pi r dr$ , dove  $\rho = \frac{M}{\pi R^2 L}$ . Quindi l'infinitesimo di massa  $dm = \frac{M}{\pi R^2 L} L 2\pi r dr = \frac{2M}{R} r dr$ , esattamente come il caso appena analizzato.

#### 9.4.3 Momento d'inerzia di una sbarretta

Prendiamo una sbarretta omogenea, di cui larghezza e spessore sono trascurabili (ovvero risulta notevole solo la lunghezza) che ruota attorno a un asse passante per il suo centro. In questo caso  $dm = \lambda dl$ , e  $dl = dx$  semplicemente; la densità  $\lambda = \frac{M}{L}$ . La distanza dall'asse  $h = |x|$ , per evitare problemi di segno. Avremo quindi:

$$I_c = \int h^2 dm = \int h^2 \lambda dl = \frac{M}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{ML^2}{12}$$

#### 9.4.4 Momento d'inerzia di un disco bucato

Prendiamo un disco omogeneo, come il caso analizzato prima, solo che questo presenta un buco al suo centro. Chiameremo  $r_1$  il raggio del buco, mentre  $r_2$  sarà la distanza tra la circonferenza esterna del disco e quella del buco. Notiamo che  $r_1 + r_2 = r$ , ovvero la loro somma dà il raggio del disco.

In questo caso, avremo  $\sigma = \frac{M}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}$ , poi  $dS = 2\pi r dr$  e la distanza dall'asse, come prima,  $h = r$ . Il metodo utilizzato è lo stesso precedente, ovvero dividere in anellini il disco bucato. Il momento di inerzia sarà:

$$\begin{aligned} I_c &= \int h^2 dm = \int h^2 \sigma dS = \sigma \int_{r_1}^{r_2} r^2 2\pi r dr = 2\pi \sigma \int_{r_1}^{r_2} r^3 dr = \\ &= 2\pi \cdot \frac{M}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^{r_2} r^3 dr = \frac{2M}{(r_2^2 - r_1^2)} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{M}{2} (r_1^2 + r_2^2) \end{aligned}$$

#### 9.4.5 Momento d'inerzia di una sfera

In questo caso, prendiamo una sfera omogenea ruotante attorno a un qualsiasi asse passante per il suo centro. La sua massa  $M$  e raggio  $R$ . L'infinitesimo  $dm = \rho dV$ , dove  $\rho = \frac{3}{4} \frac{M}{\pi R^3}$ .

Per calcolare il momento d'inerzia della sfera, la dividiamo in tanti dischi infinitesimi a posizione  $x$ . Il loro raggio sarà:  $\bar{R} = R^2 - x^2$  e spessore  $dx$ .

A seguire, ogni dischetto viene diviso in tanti piccolini anellini, allo stesso modo del calcolo del momento di inerzia di un disco. Passiamo alla dimostrazione.

$$\begin{aligned} I_c &= \rho \int h^2 dV = \rho \int_{-R}^R dx \int_0^{(\sqrt{R^2 - x^2})} r^2 (2\pi r) dr = \\ &= \rho \int_{-R}^R dx 2\pi \frac{(R^2 - x^2)^2}{4} = \frac{\pi \rho}{2} \int_{-R}^R (R^4 - 2x^2 R^2 + x^4) dx = \\ &= \frac{\pi \rho}{2} \left[ \int_{-R}^R R^4 dx - \int_{-R}^R 2x^2 R^2 dx + \int_{-R}^R x^4 dx \right] = \\ &= \frac{\pi \rho}{2} \left[ 2R^5 - \frac{4}{3} R^5 + \frac{2}{3} R^5 \right] = \frac{\pi}{2} \frac{3}{4} \frac{M}{\pi R^3} \left( \frac{16}{15} \right) R^5 = \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{5}MR^2$$

#### 9.4.6 Teorema di Huygens-Steiner

Concludiamo il modulo con un teorema di importanza fondamentale. I momenti di inerzia qui sopra calcolati sono rispetto al centro di massa, ovvero i corpi ruotano attorno a un asse che passa nel loro baricentro. Per definizione di momento d'inerzia, però, cambiando l'asse di rotazione, cambia anche il valore di  $I$ . Per questo motivo, poiché spesso si ha a che fare con corpi che ruotano attorno a punti diversi dal centro di massa, è opportuno dimostrare il **teorema di Huygens-Steiner**, che afferma:

Il momento d'inerzia di un corpo rigido ruotante attorno a un asse qualsiasi è pari a:

$$I_a = I_c + Md^2$$

Dove  $I_c$  è il momento d'inerzia del corpo rispetto al centro di massa e  $d$  è invece la distanza tra gli assi.

#### Dimostrazione

Prendiamo, per semplicità, un sistema discreto; di questo analizzo un generico punto  $P_i$ . Disegno il piano passante per  $P_i$  che sia perpendicolare ai due assi. I punti di intersezione tra piano e assi sono  $A_i$  e  $C_i$ , dove ricordiamo che l'asse  $a$  è l'asse generico, mentre quello passante per il centro è  $c$ . Avremo a questo punto:

$$\begin{aligned} h_i &= C_i \vec{P}_i \\ d &= C_i \vec{A}_i \\ h'_i &= A_i \vec{P}_i \end{aligned}$$

La relazione che lega le tre distanze qui sopra è:  $\vec{h}'_i = \vec{h}_i + \vec{d}$ . Inoltre,  $\vec{h}'_i$  è la distanza del punto  $P_i$  dall'asse  $a$ , ovvero quella che ci serve per calcolare il momento d'inerzia:

$$\begin{aligned} I_a &= \sum_i m_i (h'_i)^2 = \sum_i m_i \langle \vec{h}'_i \cdot \vec{h}'_i \rangle = \sum_i m_i (\vec{h}_i + \vec{d}) \cdot (\vec{h}_i + \vec{d}) = \\ &= \sum_i m_i (h_i)^2 + 2d \sum_i m_i h_i + d^2 \sum_i m_i = \\ I_a &= I_c + Md^2 \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio, l'espressione  $\sum_i m_i h_i$  viene nulla, poiché essa rappresenta la distanza del centro di massa dall'asse  $c$ , ma il centro di massa appartiene all'asse  $c$ . È così dimostrato il teorema.

## 9.4.7 Tabella dei momenti d'inerzia

Solidi	Momenti di inerzia rispetto al centro di massa	Momenti di inerzia rispetto a un estremo
Anello o cilindro cavo	$I_c = MR^2$	$I_a = 2MR^2$
Disco o cilindro pieno	$I_c = \frac{MR^2}{2}$	$I_a = \frac{3}{2}MR^2$
Sbarretta	$I_c = \frac{ML^2}{12}$	$I_a = \frac{ML^2}{3}$
Disco o cilindro bucato	$I_c = \frac{M}{2}(r_2^2 + r_1^2)$	$I_a = \frac{M}{2}(3r_1^2 + r_1r_2 + 3r_2^2)$
Sfera	$I_c = \frac{2}{5}MR^2$	$I_a = \frac{7}{5}MR^2$

## 9.5 Coppia di forze

Trattiamo brevemente il caso in cui, a un corpo rigido, è applicata una coppia di forze parallele di verso opposto. Vettorialmente,  $\vec{f}_2 = -\vec{f}_1$ . Nell'esempio più semplice possibile, prendiamo due punti materiali, uniti da una sbarretta rigida di massa trascurabile, ai quali vengono applicate le due forze: il loro effetto è causa una rotazione dell'asta che unisce i due punti con velocità angolare  $\omega$ .

L'effetto è spiegato dalla seconda legge cardinale. Il momento delle forze esterne non è nullo; chiamata  $b$  la lunghezza della corda e  $r_1 = r_2$  le distanze dei due punti dal centro di massa, avremo:

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{f}_i = \vec{r}_1 \wedge \vec{f}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{f}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \wedge \vec{f}_1 = b f$$

Il risultato è, ovviamente, il modulo del momento causato dalla coppia di forze, ovvero il modulo di una delle due forze moltiplicato per la distanza tra i due punti di applicazione. In questo caso abbiamo però considerato le due forze uguali e discordi; se fossero state di modulo differente e verso concorde, andavano calcolati i momenti delle forze, che avrebbero avuto senso discorde (perché avrebbero causato due rotazioni di verso opposto) e il maggiore avrebbe prevalso.

Per chiudere il modulo, sfruttiamo l'esempio del sistema composto da due punti materiali uniti. Calcoliamo allora il momento angolare del sistema:

$$\vec{J} = \sum_i \vec{r}_i \wedge m\vec{v}_i = \vec{r}_1 \wedge m\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \wedge m\vec{v}_2 = \frac{b}{2}mv_1 + \frac{b}{2}mv_2$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo considerato i moduli. Ricordiamo che  $v = \omega r$  e, in questo caso,  $v_1 = v_2 = \omega \frac{b}{2}$ ; sostituendo:

$$|\vec{J}| = 2 \left( \omega m \frac{b^2}{4} \right) = I\omega$$

Infatti il fattore  $2m \frac{b^2}{4}$  corrisponde al momento d'inerzia del sistema, definito dalla somma  $\sum_i m_i r_i^2$ . Vettorialmente avremo:

$$\vec{J} = I\vec{\omega}$$

A questo punto, possiamo scrivere la seconda legge cardinale in un altro modo, che stavolta descrive appieno la rotazione del sistema:

$$\vec{\tau}^{ext} = \frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha}$$

Dove  $\vec{\alpha}$  è l'accelerazione angolare del sistema.

## 9.6 Sistemi di forze parallele

Un sistema di forze parallele è un insieme di forze che si applicano tutte lungo la stessa direzione in ogni punto di un sistema di punti materiali.

Preso un sistema di riferimento inerziale centrato in  $\Omega$  esterno al sistema di punto, calcoliamo il momento delle forze esterne  $\vec{\tau}$  rispetto a questo punto. Poiché tutte le forze sono dirette lungo una stessa direzione che indichiamo con  $\hat{u}$  possiamo scrivere ogni forza come  $\vec{f}_i = f_i\hat{u}$ . Inoltre vale  $\sum_i m_i = M$ .

Il momento delle forze sarà uguale a:

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{f}_i = \sum_i \vec{r}_i \wedge f_i\hat{u} = \left( \sum_i f_i\vec{r}_i \right) \wedge \hat{u}$$

Il fattore  $\sum_i f_i\vec{r}_i$  corrisponde a  $\sum_i f_i\vec{r}_c$ , dove  $\vec{r}_c$  non è il centro di massa, bensì il centro di applicazione della forza così definito:

◇ **Definizione** In un sistema di forze parallele, esse possono considerarsi come applicate a un unico punto, chiamato **centro di applicazione della forza**, che vale:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i f_i\vec{r}_i}{\sum_i f_i}$$

Tornando al calcolo del momento delle forze:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \left( \sum_i f_i\vec{r}_i \right) \wedge \hat{u} = \left( \sum_i f_i \right) \vec{r}_c \wedge \hat{u} = \vec{r}_c \wedge \sum_i f_i\hat{u} \\ \Rightarrow \vec{\tau}_\Omega &= \vec{r}_c \wedge \vec{F} \end{aligned}$$

Dove con  $\vec{F} = \sum_i f_i\hat{u}$ . Il caso particolare di notevole interesse è la forza peso, infatti, applicando la definizione di centro di applicazione di una forza, possiamo notare che esso coincide col centro di massa del corpo. Infatti:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i \vec{r}_i \wedge m_i\vec{g}}{\sum_i m_i\vec{g}} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \vec{r}_{CM}$$

Quando, quindi, si considera la forza peso come tutta applicata al centro di massa di un sistema o corpo rigido non si sta compiendo alcuna approssimazione: essa è veramente applicata al baricentro del corpo.

## 9.7 Pendolo fisico

Nella meccanica del punto materiale abbiamo già parlato del pendolo, trattando in quel caso un semplice punto materiale appeso a un filo. Nella realtà, però, abbiamo a che fare con strumenti ben diversi, con caratteristiche fisiche ben diverse che non possono essere approssimabili a punti materiali: trattiamo qui di pendoli fisici, ovvero di oggetti che pendolano.

Qualsiasi oggetto può comportarsi da pendolo fisico; l'esempio più immediato, e rilevante per confronto con il pendolo semplice, è una sbarretta omogenea che può ruotare attorno a un estremo. La variabile che descrive il moto del corpo è l'angolo  $\theta$  che la sbarretta forma con la verticale, quindi il problema presenta un solo grado di libertà. Come verso positivo, scegliamo l'angolo che forma a destra della verticale.

Le forze agenti sul corpo sono la reazione del vincolo  $\vec{R}$ , che è applicata al perno attorno al quale ruota il corpo; non conosciamo nulla di questa forza, ne modulo, ne direzione o verso. Conosciamo invece la forza peso  $M\vec{g}$  applicata al centro di massa della sbarretta, ovvero al centro geometrico, e diretta verso il basso. Per studiare il moto sfruttiamo la seconda legge cardinale dei sistemi, scegliendo come polo il punto  $O$  attorno al quale la sbarretta ruota. Avremo quindi:

$$\vec{\tau}^{ext} = \vec{r}_1 \wedge M\vec{g} + \vec{r}_2 \wedge \vec{R} = \vec{r}_1 \wedge M\vec{g}$$

Avendo scelto come polo  $O$  il braccio della forza vincolare è nullo e non contribuisce quindi al momento. Il fattore  $\vec{r}_1 \wedge M\vec{g}$  ha invece modulo:

$$|\vec{r}_1 \wedge M\vec{g}| = \frac{l}{2} Mg \sin \theta$$

La distanza dal polo del centro di massa è infatti metà sbarretta, e l'angolo formato tra il braccio e la forza peso è lo stesso che l'asta forma con la verticale. Notiamo inoltre che il momento è di richiamo: per angoli positivi esso assume segno negativo e l'asta ruota in senso orario, tendendo a tornare alla posizione d'equilibrio; analogamente, per angoli negativi ha verso positivo, l'asta ruota in senso antiorario e torna sempre verso la posizione di equilibrio. La componente lungo l'asse  $z$  sarà quindi:

$$\tau_z = -\frac{l}{2} Mg \sin \theta$$

Applichiamo ora la legge cardinale:

$$\tau_z = \frac{dJ}{dt} = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{l}{2} Mg \sin \theta$$

Otteniamo l'espressione:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{lMg}{2I} \sin \theta = 0$$

Per angoli piccoli approssimiamo  $\sin \theta \approx \theta$ , ottenendo l'equazione differenziale di un oscillatore armonico:

$$\ddot{\theta} + \frac{lMg}{2I} \theta = 0$$

La pulsazione del moto sarà  $\omega = \sqrt{\frac{lMg}{2I}}$ , mentre la soluzione del problema è data dall'equazione:

$$\theta(t) = \theta_{MAX} \sin(\omega t + \varphi)$$

Ricordiamo che il momento d'inerzia di una sbarretta ruotante attorno a un asse passante per l'estremo è  $I = \frac{Ml^2}{3}$ ; sostituendolo nell'espressione della pulsazione:

$$\omega = \sqrt{\frac{l}{2} \frac{M}{Ml^2} 3g} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{g}{l}}$$

Che è molto simile a quella ottenuta per il pendolo semplice, che ricordiamo essere  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .

### 9.7.1 Pendolo fisico a cono

Come per il pendolo semplice, anche per il pendolo fisico può esserci il caso in cui l'oggetto non oscilli bensì ruoti attorno a una quota fissa, mantenendo l'angolo  $\theta$  con la verticale costante. Le forze agenti restano sempre  $\vec{R}$ , reazione vincolare, e  $M\vec{g}$ , forza peso, applicata al centro della sbarretta. Come polo scegliamo anche questa volta il punto di vincolo  $O$ , per cui la reazione vincolare non contribuisce al momento in questo caso. Quindi sarà:

$$\vec{\tau}^{ext} = \vec{r} \wedge M\vec{g}$$

In modulo avremo che  $\tau = \frac{l}{2} Mg \sin \theta$ . Per il momento angolare, invece:

$$\vec{J} = \int \vec{r} \wedge dm\vec{v} \Rightarrow |\vec{J}| = \int_0^l r dm v = \lambda \int_0^l r dr v$$

Però, come già sappiamo, questo procedimento porta a

$$|\vec{J}| = I\omega = \left( \frac{Ml^2}{3} \sin^2 \theta \right) \omega$$

La componente verticale del momento angolare sarà data da  $J_z = J \sin \theta = \frac{Ml^2}{3} \sin^2 \theta \omega$

Il momento delle forze esterne, in modulo, è uguale a  $|\vec{\tau}| = \left| \frac{d\vec{J}}{dt} \right| = J_z \omega = \frac{Ml^2}{3} \sin^2 \theta \omega^2$ ; uguagliandolo al momento sopra calcolato:

$$\frac{Ml^2}{3} \sin^2 \theta \omega^2 = \frac{l}{2} Mg \sin \theta \Rightarrow \omega^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l \sin \theta}$$

## 9.8 Moto di una trottola

Il moto di una trottola è largamente studiato in meccanica razionale, con uno studio matematicamente più rigoroso e approfondito. Qui forniremo le conoscenze di base che introducono alla variazione del momento angolare  $\vec{J}$  di un corpo rigido.

Una trottola è un oggetto di dimensioni fisiche apprezzabili, di solito una sfera o, in ogni caso, una forma simmetrica che ne permetta una buona rotazione, capace di poter stare in equilibrio, ruotando, su un solo punto. Le uniche forze agenti sulla trottola, quando questa è in rotazione, sono la reazione normale al piano  $\vec{N}$ , applicata nel punto di contatto col piano, e la forza peso  $m\vec{g}$ , applicata al suo centro di massa.

## 9.8.1 Il moto di precessione

Data una velocità di rotazione  $\omega$  alla trottola, calcoliamone i momenti delle forze, scegliendo come polo il punto di contatto col piano; in questo caso il contributo della reazione vincolare è nullo, e il momento totale delle forze è:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge m\vec{g}$$

Il corpo, in rotazione, possiede un momento angolare  $J = I\omega$ . L'effetto del momento della forza peso è quello di far ruotare l'asse di rotazione: infatti, se mettiamo la trottola in rotazione verticale sul punto di appoggio, questa si trova in equilibrio precario: l'asse di rotazione tende ad inclinarsi, iniziando anch'esso a ruotare attorno alla verticale. Questo processo viene chiamato **moto di precessione**, ed è descritto dalla seconda legge cardinale dei sistemi. Infatti, come sappiamo:

$$\vec{\tau}^{ext} = \frac{\Delta J}{\Delta t}$$

In questo caso abbiamo preferito parlare di **intervalli di tempo** piuttosto che di infinitesimi: questo perché gli intervalli di tempo che andiamo a considerare sono apprezzabili quantitativamente. Sostituendo nella precedente formula il momento calcolato prima, troveremo che

$$(\vec{r} \wedge m\vec{g})\Delta t = \Delta \vec{J}$$

Ovvero, dopo un certo intervallo di tempo  $\Delta t$ , possiamo apprezzare una variazione nel vettore momento angolare  $\Delta \vec{J}$ , che coincide con lo spostamento di questo dall'asse verticale. Dalla precedente formula è immediato che, più è grande il momento angolare, più lungo sarà il tempo impiegato a inclinare l'asse di rotazione. Poiché il modulo del momento di rotazione è dato da  $J = I\omega$ , maggiore sarà la velocità di rotazione, maggiore sarà il tempo necessario a inclinare l'asse.

Notiamo anche che, a variare, sono solo direzione e verso del momento; in questo caso approssimiamo la velocità di rotazione al caso in cui essa si mantenga costante. In realtà non è così, ma ne parleremo a fine modulo.

Dopo un certo tempo, il vettore  $\vec{J}$  formerà con la verticale un angolo  $\Delta\theta$ ; inoltre, mantenendo questo angolo costante, esso girerà attorno alla verticale, spostandosi di un angolo  $\Delta\varphi$ . Notiamo che le componenti del vettore  $\vec{J}$  restano costanti in modulo; inoltre la proiezione sulla verticale  $J \cos \theta$  resta costante anche in direzione e verso, mentre la componente orizzontale  $J \sin \theta$  ruota assieme all'asse, segnando appunto l'angolo  $\Delta\varphi$ . Avremo quindi che:

$$\frac{\Delta J}{J \sin \theta} = \Delta\varphi$$

Dividendo rispetto al tempo, otteniamo:

$$\frac{\Delta J}{\Delta t} = \left( \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right) J \sin \theta$$

Il fattore  $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$  lo chiamiamo  $\Omega_p$ , **omega di precessione**, ovvero la velocità di rotazione dell'asse.

Ricordando il momento della forza peso calcolato all'inizio, è possibile ricavarsi esplicitamente  $\Omega_p$ :

$$\begin{aligned}
 |\vec{r} \wedge m\vec{g}| &= r m g \sin \theta \\
 r m g \sin \theta &= \frac{dJ}{dt} = J \sin \theta \Omega_p \\
 r m g &= J \Omega_p = I \omega \Omega_p \\
 \Omega_p &= \frac{r m g}{I \omega}
 \end{aligned}$$

Anche da questo risultato notiamo che più è grande il momento angolare del corpo, più lentamente esso precece.

Un caso particolare è il moto della Terra attorno al Sole. Infatti, come sappiamo, anche la Terra presenta un asse di rotazione inclinato, per cui anche in questo caso c'è un moto di precessione, causato inoltre anche da:

- la presenza della Luna e di altri corpi celesti;
- il fatto che la Terra non è perfettamente rigida;
- il fatto che la Terra non è perfettamente sferica.

Conosciamo la velocità di rotazione della Terra, pari a  $\omega = \frac{2\pi}{1\text{d}}$ ; è possibile inoltre calcolare la velocità di precessione, che è uguale a:

$$\Omega_T = \frac{2\pi}{26\,000\text{y}}$$

Notiamo che è lentissima, e infatti non risentiamo, nella nostra vita quotidiana, di questo effetto. Tuttavia questo c'è, e comporta diversi problemi che si manifestano a lungo tempo, che sono già in fase di studio.

### 9.8.2 Il moto di nutazione

Nel precedente calcolo del moto di precessione abbiamo considerato la velocità di rotazione attorno all'asse  $\omega$  come se fosse costante; in realtà essa non lo è, e infatti:

$$\vec{J} = I\vec{\omega} \neq \text{cost}$$

Questo perché il moto di precessione influenza la rotazione del corpo: in generale,  $\vec{\omega}$  varia istante per istante, sia in modulo che direzione, causando un moto assai complesso da studiare. Avremo quindi, oltre a un moto di precessione che fa ruotare l'asse attorno alla verticale, un ulteriore moto, detto di nutazione, che fa oscillare quest'asse di rotazione.

## Statica, urti e rotolamento

### 10.1 Sistemi in equilibrio

Parliamo ora di sistemi o corpi rigidi in equilibrio. Mentre per i punti materiali la statica si studia prima della dinamica, per i sistemi essa è, solitamente, approcciata per ultima, perché risulta più facile studiarne prima la dinamica. Le condizioni di un sistema in equilibrio, infatti, prevedono conoscenze approfondite della dinamica: insomma, per capire se un corpo è fermo, è importante sapere come esso si muove, così da poter vedere che esso, in realtà, non si muove. Ovvero si studia l'assenza di movimento. In pratica, un corpo in equilibrio non si muove. Se sappiamo come si muove, possiamo vedere che non si muove e vedere che in equilibrio. Insomma s'è capito.

◇ **Definizione** Se un sistema si trova nella **configurazione di equilibrio** in un certo istante, vi permane nei tempi successivi.

In formule, questo si traduce sfruttando le due leggi cardinali dei sistemi; se il centro di massa è fermo, e il corpo non ruota attorno a esso. Quindi:

$$\begin{aligned}\vec{Q} &= 0 \\ \vec{J} &= 0\end{aligned}$$

O, per utilizzare le due leggi cardinali:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}^{tot} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = 0 \\ \vec{\tau}^{ext} = \frac{d\vec{J}}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

Per studiare l'equilibrio di un corpo, quindi, basta imporre le condizioni di equilibrio. Come vedremo nel prossimo modulo, dove forniremo degli esempi di problemi di statica, vedremo che le cose non sono così immediate.

### 10.2 Esempi di problemi di statica

Tratteremo in questo modulo di esempi di problemi di statica. Tratteremo casi particolari, discutibili in vari modi.

### 10.2.1 Appoggio al piano

Un corpo rigido viene poggiato a un piano orizzontale senza attrito. Le uniche forze agenti sono la reazione normale  $\vec{N}$  e la forza peso  $M\vec{g}$ . Quest'ultima sappiamo essere applicata al centro di massa, ma la reazione del piano? La definizione di reazione vincolare afferma che essa è una forza che il piano esercita su ogni punto d'appoggio del corpo, tale da contrastare la forza peso e permettere al piano di reggere il corpo. Secondo quanto detto, quindi, anche la forza vincolare, come la forza peso, si comporta come un sistema di forze parallele: ogni punto di contatto tra piano e corpo è soggetto a una reazione vincolare, e la somma di tutti i singoli contributi deve essere tale da contrastare la forza peso. L'insieme dei punti del corpo a contatto con il piano viene chiamato **poligono d'appoggio**.

Ora, che la somma di tutti i contributi sia, in modulo, uguale alla forza peso lo sapevano già da tempo; l'unica cosa che non sappiamo con certezza, però, è il punto di applicazione della forza. Sempre secondo la definizione di reazione vincolare, questa si esercita lungo la verticale del centro massa, ovvero sul punto, appartenente al poligono d'appoggio, ortogonale al baricentro del corpo. Il problema è: e se il centro di massa si trovasse, verticalmente, esterno al poligono d'appoggio?

In questo caso, il corpo non è in quiete. La reazione vincolare, infatti, viene applicata al punto più vicino alla verticale del centro di massa, qualora questa cada fuori dal poligono d'appoggio. Allora il momento delle forze non è più nullo: se chiamo  $P$  il punto in cui si applica la reazione vincolare, il momento delle forze rispetto a quel punto è diverso da zero, il corpo presenta quindi una rotazione dovuta al momento della forza peso e cade a terra.

In questi casi, può risultare interessante controbilanciare le cose, e applicare una forza, diretta verso il basso come la forza peso, in un altro punto  $A$  del poligono d'appoggio diverso da  $P$ : per far sì che vi sia equilibrio, deve essere soddisfatta la legge:

$$\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{r} \wedge m\vec{g} - \vec{r}_2 \wedge \vec{f}_a = 0$$

### 10.2.2 Esercizi di statica

#### Esempio 1

Iniziamo a parlare di problemi di statica. Il primo esempio che diamo è quello di una sbarra poggiata a un muro. Tra la scala e il muro verticale non vi è attrito, mentre tra la scala e il pavimento sì. Si richiede di trovare il coefficiente di attrito statico  $\mu_s$  minimo affinché vi sia equilibrio.

Le forze agenti sulla sbarra sono  $\vec{P}$  forza peso, applicata al centro geometrico della sbarra;  $\vec{r}$  reazione vincolare del muro verticale, applicata nel punto di contatto tra sbarra e muro;  $\vec{R}$  reazione vincolare del pavimento, applicata nel punto di contatto  $\Omega$  tra sbarra e pavimento;  $\vec{f}_{att}$  forza di attrito, applicata anch'essa nel punto  $\Omega$  di contatto tra pavimento e sbarra; supponendo che la scala scivoli allontanandosi dal muro, questa si oppone allo spostamento. Appliciamo la prima condizione di equilibrio:

$$\vec{R} + \vec{P} + \vec{r} + \vec{f}_{att} = \vec{0}$$

Come polo scegliamo il punto  $\Omega$  dove la sbarra è a contatto col pavimento. Calcoliamo i momenti delle forze relativamente a questo punto; le forze che si applicano

in questo punto, ovvero  $\vec{R}$  e  $\vec{f}_{att}$  non contribuiscono al momento. Applichiamo la seconda condizione di equilibrio:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_P + \vec{\tau}_r = 0$$

Per comodità, ci scriviamo le forze agenti in coordinate cartesiane. Il problema permette che le forze possano essere scritte solo nelle coordinate  $x$  e  $y$ :

$$\begin{aligned}\vec{P} &= (0, -mg) \\ \vec{R} &= (0, R) \\ \vec{r} &= (r, 0) \\ \vec{f}_{att} &= (-f, 0)\end{aligned}$$

Le coordinate della forza risultante saranno quindi:

$$\begin{aligned}F_x = r - f = 0 &\Rightarrow f = r \\ F_y = -mg + R = 0 &\Rightarrow R = mg\end{aligned}$$

Passiamo al calcolo del momento. Facciamo un po' di considerazioni di segno: consideriamo il caso in cui il muro si trovi a sinistra della sbarra; la reazione del muro fornisce un momento sull'asse  $z$  negativo, perché mette il corpo in rotazione oraria. La forza peso, invece, ne fornisce un contributo positivo, poiché causa una rotazione antioraria. Possiamo quindi scrivere:

$$\tau_z = -lr \cos \theta + mg \frac{l}{2} \sin \theta$$

Dove  $\theta$  è l'angolo che la sbarra forma col muro verticale. La distanza tra il polo e il punto di applicazione della reazione  $\vec{r}$  è tutta la lunghezza della sbarra, mentre per la forza peso è la metà, ovvero  $\frac{l}{2}$ , esattamente il punto in cui si applica la forza peso. A questo punto, poniamo  $\tau_z = 0$ :

$$rl \cos \theta = mg \frac{l}{2} \sin \theta \Rightarrow r = \frac{mg}{2} \tan \theta$$

Grazie al calcolo delle forze fatto prima, possiamo porre  $f = r$  e  $mg = R$ :

$$\begin{aligned}f &= \frac{mg}{2} \tan \theta < \mu_s R \\ \mu_s R &> \frac{mg}{2} \tan \theta \\ \mu_s mg &> \frac{mg}{2} \tan \theta \\ \mu_s &> \frac{\tan \theta}{2}\end{aligned}$$

Il problema può considerarsi risolto.

## Esempio 2

Prendiamo questa volta un'asta di lunghezza  $L$  fissata a un muro attraverso vincolo girevole, che ne permette la rotazione; l'altro estremo dell'asta è fissato, tramite una corda tesa, allo stesso muro, tale che l'asta sia in posizione di equilibrio orizzontale. Consideriamo la massa della sbarra trascurabile. Su di essa viene poggiato un punto materiale di massa  $m$ . L'angolo che la corda forma con l'asta orizzontale sia  $\theta$ . Inoltre, la corda ha un limite di tensione  $T_{max}$  dopo il quale essa si spezza. In funzione dei parametri dati, ricavare le componenti della forza vincolare  $\vec{F}$  e la distanza massima  $x_{max}$  in cui può essere poggiato il punto materiale (suggerimento:  $x_{max}$  corrisponde col punto di rottura della corda).

L'asta è in equilibrio, quindi la somma delle forze è nulla. Studiamo le forze agenti:  $m\vec{g}$  è la forza peso del punto materiale, applicata nella posizione  $x$  del punto;  $\vec{T}$  è la tensione della corda, applicata lungo la corda stessa nell'estremo dell'asta e  $\vec{F}$  è la reazione del vincolo, applicata nel punto  $A$  di contatto tra asta e muro. Avremo quindi:

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F} = 0$$

È utile, anche stavolta, scrivere le forze in coordinate cartesiane; scelto il punto  $A$  come origine, facciamo coincidere l'asse  $x$  con l'asta orizzontale, mentre l'asse  $y$  sarà il muro. Le componenti delle forze sono quindi:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= (F_x, F_y) \\ \vec{T} &= (-T \cos \theta, T \sin \theta) \\ \vec{P} &= (0, -mg)\end{aligned}$$

Avremo quindi che la somma delle componenti lungo ogni asse è nulla:

$$\begin{cases} F_x - T \cos \theta = 0 & \text{lungo } x \\ F_y + T \sin \theta - mg = 0 & \text{lungo } y \end{cases}$$

Lungo l'asse  $z$ , invece, abbiamo il momento delle forze. Come polo scegliamo il punto di contatto tra asta e muro, così da rendere nulla la componente della forza vincolare. Avremo che:

$$\tau_z = TL \sin \theta - mgx = 0$$

Ricordiamo che il punto materiale si trova nella posizione incognita  $x$ , corrispondente al braccio della forza peso. Dall'ultima relazione possiamo ricavarci la tensione del filo in funzione di  $x$ :

$$T(x) = \frac{mg}{L \sin \theta} x$$

Questo valore di  $T$  va riportato nelle componenti scritte sopra; avremo quindi che:

$$\begin{aligned}F_x &= T \cos \theta = \frac{mg}{L} \cot \theta x \\ F_y &= mg - T \sin \theta = mg - \frac{mg}{L} x = mg \left(1 - \frac{x}{L}\right)\end{aligned}$$

L'ultimo punto è calcolare il punto di rottura; poniamo nell'espressione della tensione  $T = T_{max}$ , ottenendo:

$$\frac{mg}{L \sin \theta} = T_{max} \Rightarrow x_{max} = \frac{T_{max} L \sin \theta}{mg}$$

Il problema è risolto.

### 10.3 Moto di rotolamento

Il moto di rotolamento riguarda solo ed esclusivamente i corpi rigidi; un punto materiale, infatti, non ha dimensioni notevoli da poter essere considerato rotolante. Consideriamo un cilindro su un piano inclinato. Come premessa, diciamo che in assenza di attrito si ha un rotolamento perfetto, ovvero il corpo scivola sul piano senza ruotare attorno al suo centro di massa, che si muove con accelerazione costante:

$$a_{CM} = g \sin \theta$$

Per schematizzare bene una rotazione reale, immaginiamo che il cilindro non sia perfettamente liscio, bensì sia una ruota dentata: in ogni istante del moto il punto di appoggio rimane fisso. Questo particolare è importante, ed è proprio questa caratteristica a permettere il rotolamento. Chiamiamo  $A$  il punto di appoggio al piano,  $O$  il centro del corpo e  $B$  il punto opposto a  $A$ ; data  $\omega$  velocità angolare di rotazione, avremo che:

$$\begin{aligned} v_A &= 0 \\ v_O &= \omega r \\ v_B &= 2\omega r \end{aligned}$$

Studiamo il moto del corpo e le forze agenti; supponiamo ci sia attrito sul piano inclinato, così da permettere il rotolamento. Le forze agenti saranno  $\vec{N}$  reazione vincolare del piano,  $\vec{g}$  forza peso e  $\vec{f}_{att}$  la forza di attrito. Studiamo le condizioni affinché il corpo possa rotolare, sfruttando le due leggi cardinali.

$$\begin{aligned} \vec{F}^{tot} &= m\vec{a}_{CM} \\ \vec{\tau} &= \frac{d\vec{J}}{dt} \end{aligned}$$

Come polo scegliamo il punto  $A$ : i contributi delle reazione vincolare e della forza di attrito al momento sono nulli. Avremo quindi:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge m\vec{g} \Rightarrow \tau_y = rm g \sin \theta \quad \tau_x = \tau_z = 0$$

Applicando la seconda legge cardinale:

$$rm g \sin \theta = \frac{dJ}{dt} = \frac{d(I_A \omega)}{dt} = I_A \alpha = I_A \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

Il momento di un cilindro ruotante attorno a un estremo è  $I_A = \frac{3}{2}MR^2$ ; possiamo calcolare l'accelerazione del centro di massa, che sarà diretta lungo il piano inclinato:

$$\begin{aligned}
 I_A \alpha &= r m g \sin \theta \\
 \alpha &= \frac{r m g \sin \theta}{I_A} = \frac{2}{3} \frac{g \sin \theta}{r} \\
 a_{CM} &= \alpha r = \frac{2}{3} g \sin \theta
 \end{aligned}$$

Passiamo adesso alla prima legge cardinale:

$$F = m a_{CM} \Rightarrow m a_{CM} = m g \sin \theta - f_{att}$$

Lungo il piano, infatti, la reazione normale non ha componente; possiamo calcolare la forza di attrito, ovvero:

$$f_{att} = m g \sin \theta - m a_{CM} = m g \sin \theta - \frac{2}{3} m g \sin \theta = \frac{1}{3} m g \sin \theta$$

L'attrito, però, non è dinamico, ma è da considerarsi statico: il punto di appoggio è sempre fisso, quindi non vi è attrito dinamico; per questo motivo vale:

$$f_{att} \leq \mu_s N = \mu_s m g \cos \theta$$

Sostituendo nella formula l'espressione della forza d'attrito ricavata otteniamo:

$$\mu_s m g \cos \theta \geq \frac{1}{3} m g \sin \theta \Rightarrow \mu_s \geq \frac{1}{3} \tan \theta$$

Questa è la condizione affinché vi sia rotolamento senza che il corpo scivoli sul piano. Ovviamente, se avessimo preso come sistema di riferimento il centro di massa e non un sistema esterno, avremmo notato che, dal quel punto di vista, il cilindro ruotava semplicemente attorno al suo centro.

## 10.4 Urti elastici e anelastici

Parliamo adesso di urti. Si ha un urto quando due oggetti in movimento relativo entrano a contatto; si possono avere due tipi di urti: urti elastici o urti anelastici, in quest'ultimo caso totalmente o parzialmente.

In un **urto elastico** viene conservata sia la quantità di moto che l'energia cinetica di un sistema; in un **urto anelastico**, invece, non vi è conservazione di energia cinetica: se l'urto è parzialmente anelastico vi è una perdita, di solito percentuale, di energia cinetica; se invece si ha un urto totalmente anelastico, non è possibile scrivere una relazione dell'energia cinetica tra prima e dopo l'urto.

In un urto vanno considerate le forze agenti; si distingue tra **forze impulsive** e **non impulsive**, ovvero quelle forze per le quali vale il teorema dell'impulso. Possiamo affermare che, se una forza rimane limitata nel corso del tempo, essa è impulsiva, e gioca quindi a favore di un urto elastico: ad esempio, se mandiamo a sbattere una pallina contro una scatola non fissata su un piano, vi sarà un urto elastico (sotto opportune condizioni) tra i due oggetti; se invece fisso la scatola con un chiodo, la forza vincolare esercitata dal chiodo non rimane limitata nel tempo, e la scatola, dopo l'urto, non si muoverà, quindi non vi sarà presente un urto elastico.

In generale, in un problema d'urti, è bene porre l'attenzione a tutte le forze agenti sul sistema e ai momenti di queste; se vi sono forze dissipative, come forze d'attrito o

momenti rallentanti, non potranno esserci urti completamente elastici; quando invece tutte le forze agenti sono di tipo conservativo, ad esempio la forza peso, allora ci sono le condizioni affinché avvengano urti elastici. È bene, però, porre sempre una particolare attenzione alle condizioni del problema: possono essere presenti particolari, anche minimi, che alterano l'impulsività delle forze in gioco.



PARTE III

# Gravitazione





## Legge di gravitazione universale

### 11.1 Legge di gravitazione

Fin dall'antichità gli uomini hanno seguito il corso degli astri nel cielo; fin dall'antichità l'uomo ha dovuto lottare contro la gravità, affinché potesse costruire edifici stabili. La legge di gravitazione universale, studiata già da **Galileo** e poi enunciata da **Newton**, lega i due fenomeni, unendo le cause del moto degli astri a quelle della gravità in un'**unica forza universale** della natura.

#### 11.1.1 La legge di gravitazione

La legge di gravitazione universale afferma che tra due punti materiali si esercita una forza attrattiva direttamente proporzionale al prodotto delle masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

Il modulo di questa forza attrattiva, che chiameremo **forza di gravitazione**, è:

$$|f_g| = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Dove  $m_{1,2}$  indicano le masse dei punti materiali e  $r$  la distanza tra essi.  $G$  è la **costante di gravitazione universale**, ovvero è valida in tutti i fenomeni fisici della natura, e vale:

$$G = 6.667259 \cdot 10^{-11} \text{ N} \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2}$$

La direzione della forza è la retta congiungente i due punti materiali; il verso è attrattivo, va quindi verso la massa generatrice della forza. Quindi, per scrivere vettorialmente la formula della forza:

$$\vec{f}_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

Un altro modo per esprimere la forza è tramite le sue componenti cartesiane. Preso un sistema di riferimento con origine nel punto in cui si trova la massa generatrice, avremo che:

$$\vec{r} = (x, y, z) \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \rightarrow \vec{r} = \hat{r} r \quad \vec{f}_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

Possiamo quindi scrivere le componenti della forza, che saranno:

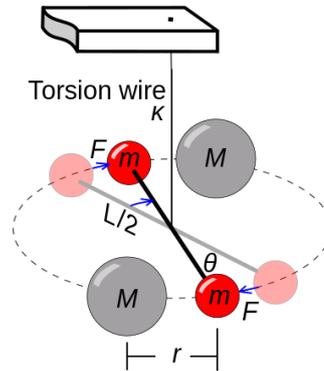
$$\vec{f}_g = -Gm_1m_2 \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Un'ultima considerazione sulla forza di gravitazione: anche il corpo che subisce la forza la esercita sul corpo generatrice. Questo può essere spiegato in due modi:

- sfruttando il terzo principio della dinamica;
- dallo stesso enunciato della legge di gravitazione si può intuire che i due punti materiali esercitano l'uno sull'altro una forza attrattiva.

### 11.1.2 L'esperienza di Cavendish

È immediato chiedersi come sia stato possibile calcolare con precisione il valore della costante  $G$ , anche alla luce del suo valore, nettamente inferiore alle masse con cui di solito si ha a che fare in esperimenti diretti. Il calcolo preciso è stato effettuato grazie all'esperienza di Cavendish, sfruttando il meccanismo in figura.



Il meccanismo è formato da un cavo inestensibile con una costante elastica di torsione  $K$  conosciuta; al cavo è legata una semplice bilancia a due bracci, alle cui estremità sono legate due piccole masse. Avvicinando delle masse più grandi, le due piccole masse subiranno la forza attrattiva gravitazionale, e produrranno una coppia di forze sulla bilancia, che la farà ruotare. A questo punto entra in gioco la costante  $K$ , la quale impedirà al cavo di torcersi all'infinito e facendolo fermare in posizione di equilibrio a un determinato angolo  $\theta$ . Del problema sono noti tutti i parametri: le due masse, la loro distanza, la costante di torsione e l'angolo finale, per cui è possibile calcolarsi la forza di gravitazione e, quindi, la costante  $G$ .

## 11.2 Campo gravitazionale

Si definisce **campo vettoriale** una funzione vettoriale della posizione, ovvero che associa a ogni punto dello spazio un vettore.

Dalla legge di gravitazione universale sappiamo che ogni corpo dello spazio esercita su un altro una forza attrattiva; in più, per la Terra (o tutti gli altri corpi celesti), sappiamo esistere la forza di gravità. Possiamo quindi legare le due forze:

$$\vec{f}_g = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{\vec{f}_g}{m} = \vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\hat{r}$$

Chiameremo quindi  $\vec{g}$  campo gravitazionale. Poiché il campo gravitazionale corrisponde all'accelerazione della forza di gravitazione, possiamo concludere che l'accelerazione è funzione della distanza, il che è una peculiarità propria della forza di gravitazione universale.

### 11.2.1 Terra e forza peso

La forza peso  $\vec{P}$  è un caso particolare della forza di gravitazione:

$$\vec{f}_g = m\vec{g} \quad \rightarrow \quad \vec{g} = -G \frac{M_T}{R_T^2} \hat{r} = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

Le costanti  $M_T$ ,  $R_T$  sono rispettivamente massa e raggio della Terra, che valgono:

$$M_T = 5.974 \cdot 10^{21} \text{ kg}$$

$$R_T = 6371 \text{ km}$$

La scrittura  $\vec{f}_g = m\vec{g}$  può essere considerata un'altra scrittura della forza di gravitazione universale, dove  $\vec{g}$  è il campo gravitazionale  $\vec{g} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r}$ .

Il problema riguardo la forza di gravità della Terra è che, nell'enunciato della legge di gravitazione, venivano presi in esame due punti materiali. Nel caso della Terra, però, è impossibile trascurare le sue dimensioni, tanto che il raggio della Terra corrisponde alla distanza tra le due masse, perché viene considerata la massa terrestre tutta concentrata in un unico punto, al centro, ovviamente, della Terra. Questo modo di studiare la legge di gravitazione è legittimato dal teorema di Gauss per il campo gravitazionale, che vedremo nel prossimo modulo.

## 11.3 Teorema di Gauss per il campo gravitazionale

Il teorema di Gauss per il campo gravitazionale mette in relazione diversi fattori; uno di questi è il flusso di un vettore attraverso una superficie, che definiamo immediatamente. Inoltre, la dimostrazione del teorema di Gauss prevede conoscenze di analisi matematica in più variabili, di cui faremo a meno, cercando di dare una dimostrazione egualmente valida.

◇ **Definizione** Dato un campo vettoriale  $\vec{v}$  che attraversa una superficie  $S$ , si definisce **flusso di  $\vec{v}$  attraverso  $S$** :

$$\Phi_v := \int_S \vec{v} \cdot \hat{n} dS$$

Diamo alcune spiegazioni e considerazioni su questa definizione.

1. Il flusso di un vettore non è un vettore, ma uno scalare, poiché risultato di un integrale.
2. L'integrale è un integrale di superficie.
3. Si divide la superficie in infinitesimi  $dS$ , si calcola il flusso su ognuno di essi e si sommano assieme, riunendo il tutto nel segno di integrale.

4.  $\hat{n}$  è il versore normale all'infinitesimo di superficie e ha quindi modulo unitario, direzione perpendicolare alla superficie nel punto e verso definito dal flusso (uscente o entrante).
5. In ogni punto della superficie cambiano sia il vettore  $\vec{v}$  che il versore  $\hat{n}$ .

### 11.3.1 Teorema di Gauss per il campo gravitazionale

Il flusso del campo gravitazionale **uscente** da una **superficie chiusa** non dipende né dalla superficie né dalla posizione del corpo che genera il campo ma dipende solo dalla massa contenuta nella superficie.

La dimostrazione di questo teorema richiede conoscenze di analisi in più variabili che, di solito, non sono in possesso dello studente quando affronta per la prima volta lo studio della gravitazione. Diamo qualche definizione e strumento per procedere.

◇ **Definizione** Come per la definizione di angolo vale la relazione:

$$\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2} = \alpha$$

dove  $s_{1,2}$  sono gli archi di circonferenza e  $r_{1,2}$  sono i raggi, vale la seguente relazione per **archi di superficie**:

$$\frac{S_1}{r_1^2} = \frac{S_2}{r_2^2} = \Omega$$

dove  $S_{1,2}$  sono gli archi di superficie.  $\Omega$  si chiama **angolo solido** e il suo valore massimo è  $4\pi$ , infatti:

$$\Omega_{\max} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

(La superficie di una sfera vale  $4\pi r^2$ )

Inoltre, come per gli integrali di funzione a una variabile, vale che:

$$\int_S dS = S$$

Ovvero la somma degli infinitesimi di superficie corrisponde alla superficie stessa. Allo stesso modo:

$$\int_S d\Omega = \Omega_{\max}$$

Perché la somma degli infinitesimi di angolo solido di una superficie chiusa, come nel caso presente, è uguale a un angolo solido massimo.

Possiamo ora procedere con la dimostrazione del teorema.

Sfruttiamo la definizione di flusso:

$$\Phi_v := \int_S \vec{v} \cdot \hat{n} dS$$

Nel nostro caso, il vettore è il campo gravitazionale  $\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\hat{r} = -g\hat{r}$ , quindi:

$$\Phi_g = \int_S \vec{g} \cdot \hat{n} dS = - \int_S g\hat{r} \cdot \hat{n} dS$$

Il segno meno del campo gravitazionale è stato portato direttamente fuori dal segno di integrale. Analizziamo il prodotto scalare  $\hat{r} \cdot \hat{n}$ . I versori hanno entrambi modulo uguale a 1, quindi il loro prodotto scalare  $\hat{r} \cdot \hat{n} = rn \cos \theta = \cos \theta$ , dove  $\theta$  è ovviamente l'angolo compreso tra i due. Quindi è lecito scrivere:

$$\Phi_g = - \int_S g \cos \theta dS$$

Prendiamo adesso in analisi l'infinitesimo di superficie  $dS$ ; posso tracciare un infinitesimo di superficie che sia perpendicolare al raggio, che chiamerò  $dS_{\perp}$ . Poiché l'angolo tra l'infinitesimo della superficie chiusa e l'infinitesimo di superficie perpendicolare corrisponde all'angolo tra i versori  $\hat{r}$  e  $\hat{n}$ , l'area dell'infinitesimo perpendicolare  $dS_{\perp}$  vale proprio  $dS_{\perp} = dS \cos \theta$ . Quindi il flusso può anche essere scritto come:

$$\Phi_g = - \int_S g dS_{\perp}$$

A  $g$  sostituiamo il suo valore numerico, ovvero:

$$\Phi = - \int_S GM \frac{dS_{\perp}}{r^2}$$

A questo punto, posso confondere, nell'infinitesimo, la superficie perpendicolare con quella di una sfera; quindi la somma totale, ovvero l'integrale, di tutti i  $dS_{\perp}$  è la circonferenza di una sfera. A questo punto sfrutto la definizione di angolo, sostituendo a  $\frac{dS_{\perp}}{r^2}$  l'infinitesimo di angolo solido  $d\Omega$  ottenendo la formula finale del flusso:

$$\Phi_g = -GM \int_S \frac{dS_{\perp}}{r^2} = -GM \int_S d\Omega$$

Il valore finale calcolato è quindi:

$$\Phi_g = -4\pi GM$$

Che è il valore del flusso del campo gravitazionale di una massa racchiusa in una superficie. Come volevasi dimostrare, esso è indipendente sia dalla posizione del corpo generante il campo che dalla superficie che lo racchiude: questo vuol dire che, preso un corpo con massa, qualsiasi superficie chiusa che lo contenga avrà un flusso di campo gravitazionale pari a  $-4\pi GM$ .

### 11.3.2 Considerazioni del teorema di Gauss

La prima domanda che ci si pone, dopo aver studiato il teorema di Gauss, è la seguente: e se la massa fosse esterna alla superficie? Il teorema di Gauss parla effettivamente di massa interna, ma può accadere di voler calcolare il flusso di una massa esterna a una superficie chiusa attraverso la superficie stessa.

Il caso particolare è molto semplice. Della superficie chiusa prendo un piano che sia perpendicolare alla congiungente con la massa. Questo piano divide la superficie in due superfici  $S_1$  e  $S_2$  le quali hanno, rispetto alla massa, i versori  $\hat{n}_{1,2}$  opposti in versi opposti; quindi il flusso avrà modulo uguale per entrambe le superfici, dettato dal teorema di Gauss, ma in un caso sarà positivo, nell'altro negativo. Quindi, per calcolare il flusso attraverso la superficie totale, basta sommarli entrambi, ottenendo che il flusso di un campo gravitazionale generato da una massa esterna attraverso una superficie chiusa è nullo.

Un'altra domanda che ci si pone è: e se le masse fossero più di una? In questo caso anche il vettore  $\vec{g}$  è diverso, infatti vale:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \cdots + \vec{g}_n = \sum_{i=1}^n \vec{g}_i$$

Quindi il flusso totale vale:

$$\Phi_{\text{tot}} = \int_S \vec{G}_{\text{tot}} \cdot \hat{n} dS = \sum_{i=1}^n \int_S \vec{g}_i \cdot \hat{n} = \sum_{i=1}^n \Phi_{g_i}$$

Ricordando il valore del flusso dettato dal teorema di Gauss:

$$\Phi_g = -4\pi GM \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\text{tot}} = -4\pi G \sum_{i=1}^n M_i$$

che è concorde con l'enunciato del teorema. Questa considerazione è molto importante perché permette di calcolare facilmente il flusso gravitazionale di sistemi di punti materiali il cui vettore campo gravitazionale potesse essere difficile da calcolare; un caso immediato a cui poterlo applicare è per calcolare il campo gravitazionale della Terra, la quale, come già detto nel capitolo precedente, non può assolutamente essere approssimata a un punto materiale.

### 11.3.3 Il campo gravitazionale terrestre

Per calcolare il campo gravitazionale terrestre sfruttiamo il valore del flusso attraverso una superficie chiusa che contenga la Terra. Per evidenti ragioni di comodità prenderemo questa superficie sferica di raggio  $r$  e centrata nel centro della Terra, la quale, come sappiamo, è in realtà un geoide e non una sfera perfetta (ma vedremo che questo particolare è irrilevante). Ricordiamo che  $\vec{g} = -g(r)\hat{r}$ .

Calcoliamo prima il flusso partendo dalla definizione stessa di flusso:

$$\Phi = \int_S \vec{g} \cdot \hat{n} dS$$

Sostituiamo a  $\vec{g}$  il suo valore. Poiché la superficie chiusa presa in analisi è sferica, i vettori  $\hat{r}$  e  $\hat{n}$  sono paralleli, perché entrambi perpendicolari alla superficie in ogni punto. In particolare, essendo vettori, sono uguali, quindi il loro prodotto scalare è  $\hat{r} \cdot \hat{n} = 1 \cdot 1 \cos 0 = 1$ . Quindi:

$$\Phi = -g(r) \int_S \hat{r} \cdot \hat{n} dS = -g(r) \int_S dS = -4\pi r^2 g(r)$$

Adesso sfruttiamo invece il teorema di Gauss, che ci dice che il flusso attraverso la superficie gaussiana presa in considerazione vale:

$$\Phi = -4\pi GM_T$$

Dove  $M_T$  è ovviamente la massa della Terra. Eguagliando i due flussi trovati:

$$-4\pi GM_T = -4\pi r^2 g(r)$$

Possiamo calcolare il campo gravitazionale terrestre in funzione della distanza dal centro della Terra:

$$g(r) = G \frac{M_T}{r^2}$$

Poiché abbiamo preso una superficie sferica, esso sarà sempre uguale in modulo, per simmetria sferica, con direzione radiale e verso entrante, quindi, per scrivere il campo in forma vettoriale basta sfruttare la simmetria sferica ottenendo:

$$\vec{g} = -G \frac{M_T}{r^2} \hat{r} \quad \text{con } r > R_T$$

Questo risultato è di importanza rilevante, perché qualsiasi oggetto in prossimità della superficie della Terra è soggetto a un campo gravitazionale che dipende esclusivamente dalla sua distanza dal centro della Terra: è quindi lecito pensare alla massa terrestre come se fosse tutta concentrata al centro di essa, poiché il flusso del campo gravitazionale non dipende da dove si trova la massa e, quindi, possiamo scegliere per comodità quel punto privilegiato.

#### 11.3.4 Il campo gravitazionale all'interno della Terra

Una domanda utile da porsi è: e se il punto in cui voglio calcolare il campo è interno alla massa? Per esempio, si vuole calcolare il campo gravitazionale terrestre a 200 km di profondità. Avremo in questo che  $r < R_T$ , dove con  $r$  calcoliamo la distanza del punto dal centro della Terra. Come fatto per il calcolo del campo in un punto esterno alla Terra, o in prossimità della sua superficie, calcoliamo il flusso del campo in due modi: sfruttando prima la definizione di flusso, per poi passare al teorema di Gauss, confrontando infine i due risultati ottenuti.

Partiamo dalla definizione di flusso. Prendiamo una superficie sferica, con centro in corrispondenza del centro della Terra, che passi per il punto in cui si vuole calcolare il campo. Avremo che il campo  $g(r)$  dipende solo dalla distanza dal centro; come sopra, per simmetria sferica la direzione è radiale e il verso entrante, quindi possiamo scrivere il campo in formula vettoriale:

$$\vec{g} = -g(r) \hat{r}$$

Sostituendo nella formula del flusso perveniamo allo stesso risultato calcolato poco fa:

$$\Phi_g = \int_S \vec{g} \cdot \hat{n} dS = -g(r) 4\pi r^2$$

Sfruttiamo adesso il teorema di Gauss; questo ci dice che il flusso uscente è pari a:

$$\Phi_g = -4\pi G m(r)$$

Perché in questa formula è presente  $m(r)$ ? Ciò è dovuto al fatto che la massa da considerare è solo quella contenuta nella superficie, che sarà quindi diversa dalla massa totale della Terra; sarà essa una funzione della distanza dal centro  $r$ . Possiamo calcolare il valore di questa massa solo facendo un'importante assunzione: assumiamo cioè che la densità della Terra sia uniforme, e non dipenda dalla distanza dal centro. Come sappiamo, ciò non è vero, ma possiamo per ora compiere questa assunzione per giungere a un valore teorico valido.

Avremo quindi che la densità, definita come  $\rho = \frac{M_T}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ , è uniforme; calcoliamo  $m(r)$ :

$$m(r) = \rho V = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = M \frac{r^3}{R^3}$$

Si ricorda che con  $R$  si indica il raggio totale della Terra; sostituiamo questo valore nella formula del flusso secondo il teorema di Gauss:

$$\Phi_g = -4\pi GM \frac{r^3}{R^3}$$

A questo punto, dobbiamo solo confrontare i due risultati:

$$\begin{aligned} -4\pi GM \frac{r^3}{R^3} &= -g(r)4\pi r^2 \\ g(r) &= G \frac{M}{R^3} r \end{aligned}$$

Ricordando la formula vettoriale, possiamo infine scrivere vettorialmente il campo gravitazionale all'interno della Terra, che sarà pari a:

$$\vec{g} = -G \frac{M}{R^3} r \hat{r} \quad \text{con } r < R$$

## 11.4 Energia di campo gravitazionale

### 11.4.1 Energia gravitazionale

Sappiamo che una qualsiasi massa  $M$  esercita su un corpo di massa  $m$  una forza attrattiva pari a  $\vec{f}_g = -G \frac{Mm}{R^2} \hat{r}$ .

Per ovvi vantaggi prendo un sistema di riferimento con origine degli assi nel punto in cui si trova la massa  $M$  generatrice della forza; il vettore  $\vec{r}$  distanza delle due masse sarà quindi il vettore posizione del corpo  $m$  in questo sistema di riferimento.

Se il corpo si muove lungo una traiettoria, allora la forza gravitazionale compie un **lavoro**; vogliamo calcolarlo.

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f}_g \cdot d\vec{s} = \int_A^B \left( -G \frac{Mm}{r^2} \right) \hat{r} \cdot d\vec{s}$$

Il prodotto scalare  $\hat{r} \cdot d\vec{s}$  è la proiezione dell'infinitesimo di spostamento sulla direzione radiale, e corrisponde a  $dr$ . Il lavoro diventa infine:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} L_{AB} &= -GMm \int_A^B \frac{dr}{r^2} = GMm \left[ \frac{1}{r} \right]_A^B \\ L_{AB} &= GMm \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \end{aligned}$$

Quindi il lavoro della forza gravitazionale non dipende dal percorso compiuto ma solo dagli estremi  $A$  e  $B$ . Per definizione di forza conservativa, la forza gravitazionale risulta essere una forza conservativa. Posso quindi definire un'energia potenziale:

$$L_{AB} = -\Delta U = U_i - U_f = U(A) - U(B)$$

<sup>1</sup>Si ricorda che  $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$ .

◇ **Definizione** Si definisce quindi **energia potenziale gravitazionale**

$$U(r) = -G \frac{Mm}{r} + \text{cost}$$

Ricordiamo che la scelta dell'energia potenziale è arbitraria (simmetria di gauge globale), quindi alla costante aggiunta può essere assegnato qualsiasi valore. Se scegliamo il valore più comodo, ovvero  $\text{cost} = 0$ , poniamo che l'energia gravitazionale all'infinito è nulla, ovvero:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = 0$$

#### 11.4.2 Energia della forza peso

Sappiamo che la forza peso è un caso particolare della forza gravitazionale; preso un sistema di riferimento  $S = (O, x, y, z)$ , possiamo esprimere il vettore del campo gravitazionale in prossimità della superficie:

$$\vec{g} = (0, 0, -g)$$

Dove  $g = -G \frac{M_T}{R_T^2} \approx 9.81 \frac{m}{s^2}$ . Possiamo calcolare il lavoro della forza peso, per definire quindi una sua energia potenziale:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f}_P \cdot d\vec{s} = -mg \int_A^B dz = mg(z_A - z_B)$$

Quindi avremo:

◇ **Definizione** L'energia potenziale della forza si definisce come:

$$U(\vec{P}) = mgz + \text{cost}$$

Anche in questo caso, la scelta dell'energia è arbitraria. Scegliere la costante nulla vuol dire che l'energia sarà nulla quando la quota del corpo sarà nulla, rispetto al sistema di riferimento preso (può essere preso un sistema di riferimento la cui quota nulla sia al livello del mare, così come può esserne preso un altro con quota nulla a 100 metri di altitudine).

#### 11.4.3 Velocità di fuga

Nel lancio di un grave che abbia una componente della velocità iniziale verticale, deve esistere un limite per cui, se la componente verticale lo supera, il corpo sfuggirebbe al campo gravitazionale terrestre; quel limite viene chiamato **velocità di fuga**. In questo calcolo che faremo trascureremo le resistenze dell'aria e tratteremo la Terra come un sistema di riferimento inerziale.

Per prima cosa, calcoliamo l'energia meccanica al momento del lancio, quando  $r = R_T$ :

$$E_i = K + U = \frac{1}{2}mv_0^2 - G \frac{M_T m}{r}$$

Se il corpo sfugge al campo terrestre, arriverà a un punto in cui è così distante da far sì che  $U$  possa essere trascurata; per semplicità, immaginiamo che, una volta sfuggito al campo gravitazionale, il corpo proceda di moto rettilineo senza subire altre forze. A quel lontanissimo punto, l'energia avrà solo la componente cinetica, ovvero:

$$E_f = \frac{1}{2}mv^2$$

Poiché sappiamo che l'energia meccanica si conserva, l'energia iniziale sarà uguale all'energia finale. Ma, poiché l'energia finale ha solo la componente cinetica che, per definizione, è positiva, questo vuol dire che anche l'energia iniziale è positiva, ovvero:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{M_T m}{R_T} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 \geq G\frac{M_T m}{R_T}$$

Da questa formula possiamo calcolare che la velocità iniziale risulterà essere:

$$v_0 \geq \sqrt{2G\frac{M_T}{R_T}}$$

Il valore  $\sqrt{2G\frac{M_T}{R_T}}$  si chiama velocità di fuga e, date le costanti:

$$G = 6.66t \cdot 10^{-11} N \frac{m^2}{kg^2}$$

$$M_T = 5.97 \cdot 10^{24} kg$$

$$R_T = 6.37 \cdot 10^6 m$$

possiamo calcolarla, e si avrà che:

$$v_f = \sqrt{2G\frac{M_T}{R_T}} = 11200 \frac{m}{s} = 40000 \frac{km}{h}$$

Qualsiasi corpo con velocità verticale superiore a questo valore sfuggirà quindi al campo terrestre. È immediato notare che il valore è molto alto (quasi 40 volte la velocità del suono) quindi, così come avviene per il lancio di razzi verso lo spazio, è conveniente spingere il corpo lungo tutta la sua ascesa, piuttosto che fornire un impulso tale da conferirgli quelle velocità fin da quando è sulla superficie terrestre.

## Moto dei pianeti

### 12.1 Moto dei corpi celesti e leggi di Keplero

Lo studio dei moti degli astri è sempre stata una delle attività che l'uomo ha compiuto, spesso legandole a mitologie o a religioni. Ci si è sempre chiesti che moto seguissero i corpi celesti; fino all'età moderna, il sistema astronomico prevalentemente accettato era quello aristotelico-tolemaico, anche chiamato geocentrico, che vedeva la Terra al centro dell'universo e tutti i corpi celesti ruotare attorno a essa. Per descrivere con cura i moti osservati empiricamente e, allo stesso tempo, restare fedeli al sistema geocentrico, le orbite dei pianeti assumevano traiettorie strane, compiendo giri larghi, poi più corti, poi restando a girare attorno a un punto. Evidentemente, non era il sistema astronomico giusto.

Fu nel 1543 che venne pubblicato lo scritto di Niccolò Copernico in cui l'astronomo poneva fine alla centralità della Terra, sia fisicamente che filosoficamente, asserendo e dimostrando matematicamente come al centro del sistema solare, e dell'universo fino ad allora conosciuto, vi fosse il Sole e non la Terra.

Gli studi di Copernico vennero continuati da celebri studiosi; nel regno papale, la difesa dell'eliocentrismo da parte di Galileo gli costò il famoso processo che portò all'abiura. Fu Keplero, contemporaneo di Galileo, che diede un forte impulso alla teoria geocentrica: proseguendo nello studio degli astri, giunse a formulare tre leggi empiriche che descrivono il moto dei corpi celesti. Isaac Newton, quando studiò la gravitazione dei corpi, riuscì a dimostrare le tre leggi matematicamente, sfruttando le leggi della meccanica che aveva studiato.

#### 12.1.1 Le tre leggi di Keplero

Enunciamo ora le tre leggi di Keplero per il moto dei corpi celesti:

1. le orbite descritte dai pianeti attorno al Sole sono ellissi di cui il Sole occupa uno dei due fuochi;
2. il raggio vettore che congiunge il centro del Sole al pianeta spazza aree proporzionali ai tempi impiegati per descriverle;
3. i quadrati dei periodi di rivoluzione del moto attorno al Sole sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle loro orbite.

Come detto nel paragrafo precedente, Isaac Newton riuscì a dimostrare le tre leggi di Keplero semplicemente partendo dallo studio della meccanica. Forniremo adesso una dimostrazione matematica delle tre leggi.

## Dimostrazione della seconda legge

Partiamo col dimostrare la seconda legge di Keplero. Sia  $m$  il pianeta e  $M$  il Sole; per semplicità, trattiamo il caso in cui  $m \ll M$ . Sappiamo che sul pianeta il Sole esercita la forza di gravità, pari a  $\vec{f}_g = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}$ . Come primo passo, calcoliamo il momento della forza, prendendo come polo il centro del Sole. Si avrà che:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{f} = \left( -G \frac{Mm}{r^2} \right) \vec{r} \wedge \hat{r} = 0$$

Questo perché il vettore  $\vec{r}$  e il versore  $\hat{r}$  hanno la stessa direzione e lo stesso verso, quindi il loro prodotto vettoriale è nullo. Su questo dobbiamo soffermarci; dal teorema del momento, sappiamo che:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt}$$

Quindi, se il momento della forza è nullo, il momento angolare deve necessariamente essere costante. Ma il momento angolare è un vettore, che ha modulo, direzione e verso; se il vettore è costante, vuol dire che queste tre grandezze lo sono a loro volta: quindi direzione e verso sono costanti. Poiché il vettore momento è perpendicolare al piano formato dai vettori  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$ , anche questo piano sarà a sua volta costante. La conclusione, fondamentale, è che la traiettoria dell'orbita è sempre contenuta in un piano.

Il vettore  $\vec{r}$  ha spazzato un infinitesimo di area  $dA$ , il cui valore è:

$$dA = \frac{|\vec{r}|h}{2} = \frac{|\vec{r}||d\vec{r}|\sin\theta}{2} = \frac{|\vec{r} \wedge d\vec{r}|}{2}$$

Ricordando che  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , da cui ricaviamo che  $\vec{r} = \vec{v}dt$ , otteniamo che:

$$dA = \frac{|\vec{r} \wedge \vec{v}|}{2} dt$$

Come ultimo passaggio moltiplico e divido per  $m$ , la massa del pianeta:

$$dA = \frac{|\vec{r} \wedge m\vec{v}|}{2m} dt = \frac{|\vec{j}|}{2m} dt$$

La conclusione è immediata:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{j}|}{2m}$$

Il termine  $\frac{dA}{dt}$  viene chiamato **velocità areolare**, e abbiamo appena dimostrato che essa è costante (poiché lo sono sia  $\vec{j}$  che  $m$ ); questo vuol dire che il raggio vettore spazza aree uguali in intervalli di tempo uguali, concludendo la dimostrazione della seconda legge di Keplero.

## Dimostrazione della prima legge

Passiamo alla prima legge con una breve introduzione alla dimostrazione: questa viene spesso fatta utilizzando il calcolo integrale. Forniremo qui una dimostrazione alternativa ma la cui conclusione è la stessa, sfruttando le equazioni differenziali.

L'obiettivo è dimostrare che la traiettoria dell'orbita è un'ellisse, quindi dovremo ricavarci la funzione  $r(\phi)$ , essendo passati allo studio del piano in coordinate polari.

Facciamo delle considerazioni preliminari. Valgono anche qui le conclusioni della dimostrazione scorsa, tra cui l'assunzione che  $m \ll M$ .

Il pianeta non possiede la stessa velocità lungo tutta la sua traiettoria; possiamo quindi scrivere il vettore velocità come somma di due componenti, una parallela al versore  $\hat{r}$  e una normale a esso:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r\hat{r} \\ \vec{v} &= \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}\end{aligned}$$

Dove con  $\dot{r}$  si è indicata la derivata del raggio rispetto al tempo; dallo studio del moto circolare, si è visto che la derivata di un versore corrisponde alla derivata dell'angolo percorso lungo una direzione normale, ovvero  $\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\varphi}\hat{n}$ , dove  $\hat{n} \perp \hat{r}$ . Possiamo quindi scrivere la formula vettoriale della velocità come:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{n}$$

Dalla precedente dimostrazione, abbiamo visto come il momento angolare del pianeta sia costante nel tempo; possiamo esplicitarlo:

$$\vec{j} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \vec{r} \wedge m(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{n})$$

Ricordiamo ancora una volta che  $\hat{r} \wedge \hat{r} = 0$  e che  $\vec{r} = r\hat{r}$ , quindi:

$$\vec{j} = r\hat{r} \wedge mr\dot{\varphi}\hat{n} = mr^2\dot{\varphi}(\hat{r} \wedge \hat{n})$$

I versori  $\hat{n}$  e  $\hat{r}$  sono perpendicolari tra loro per definizione di  $\hat{n}$ ; il loro prodotto vettoriale sarà quindi un versore perpendicolare al piano formato da entrambi, ovvero l'ultimo vettore della terza disponibile, che chiameremo  $\hat{k}$ . Il momento angolare ha quindi espressione:

$$\vec{j} = mr^2\dot{\varphi}\hat{k}$$

Il cui modulo  $|\vec{j}| = mr^2\dot{\varphi}$ , ovvero costante. Definiamo a questo punto una nuova grandezza del moto del pianeta, anch'essa costante, che chiameremo **momento angolare per unità di massa**:

$$l = \frac{|\vec{j}|}{m} = r^2\dot{\varphi} = \text{cost}$$

Da questa definizione posso ricavarmi la derivata dell'angolo  $\dot{\varphi} = \frac{l}{r^2}$ , che dipende da una costante del moto,  $l$ , e da una funzione del tempo  $r(t)$ .

Passiamo alla seconda parte della dimostrazione. Calcoliamo l'energia meccanica del pianeta lungo il moto; sappiamo che essa è la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale gravitazionale (per semplicità, consideriamo che il pianeta non subisca altre forze):

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

Per sfruttare questa espressione, dobbiamo calcolare  $v^2$ , che possiamo anche scrivere come  $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$ . Svolgiamo i calcoli, ricordando che  $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{n}$ :

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \dot{r}^2 + 2\dot{r}r\dot{\varphi} \underbrace{(\hat{r} \cdot \hat{n})}_{=0} + r^2\dot{\varphi}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

Ricordando che  $\dot{\varphi} = \frac{l}{r^2}$ , sostituiamo nella formula dell'energia questo valore trovato per  $v^2$ :

$$E = \frac{1}{2}m \left( |\dot{r}|^2 + \frac{l^2}{r^2} \right) - G \frac{mM}{r}$$

Questa è l'espressione dell'energia in funzione del tempo. A noi interessa trovare l'equivalente in funzione dell'angolo; per far ciò dobbiamo compiere qualche cambio di variabile.

Per prima cosa, diciamo che la derivata rispetto al tempo viene indicata col punto, quindi  $\dot{r}$  e  $\dot{\varphi}$  sono derivate rispetto al tempo; per indicare la derivata del raggio rispetto all'angolo, ovvero  $\frac{dr}{d\varphi}$ , useremo l'apicetto, quindi

$$r' = \frac{dr}{d\varphi}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt}$$

Possiamo esprimere  $\dot{r}$  in funzione dell'angolo, ovvero:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = r' \dot{\varphi} = r' \frac{l}{r^2}$$

Definiamo a questo punto una funzione dell'angolo:

$$u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)}$$

La cui derivata è  $u' = \frac{du}{d\varphi} = -\frac{r'}{r^2}$

Poiché, dal calcolo fatto poco fa, abbiamo trovato  $\dot{r} = r' \frac{l}{r^2}$ , possiamo infine scrivere:

$$\dot{r} = -u' l$$

Alla luce di tutto quel che abbiamo detto finora, andiamo a fare le dovute sostituzioni nell'espressione dell'energia:

$$E = \frac{1}{2}m \left( \underbrace{|\dot{r}|^2}_{=u'^2 l^2} + \underbrace{\frac{l^2}{r^2}}_{=l^2 u^2} \right) - \underbrace{G \frac{mM}{r}}_{=GMm u}$$

$$E = \frac{1}{2}m(l^2 u'^2 + l^2 u^2) - GMm u$$

che, finalmente, è l'espressione dell'energia in funzione dell'angolo. Da questa espressione posso semplificare la massa del pianeta  $m$ : come si è ormai visto, essa non influenza il moto del pianeta; inoltre, poiché l'energia è costante, avremo semplicemente che:

$$\frac{1}{2}(l^2 u'^2 + l^2 u^2) - GM u = \frac{E}{m} = \text{cost}$$

Quest'espressione finale è tutto ciò di cui avevamo bisogno. Ora, non ci resta che derivarla.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{2}(l^2 u'^2 + l^2 u^2) - GMu \right) &= 0 \\ \frac{1}{2}l^2 (2u') u'' + \frac{1}{2}l^2 (2u) u' - GMu' &= 0 \\ l^2 u'' u' + l^2 u u' - GMu' &= 0 \\ u'' + u &= \frac{GM}{l^2} \end{aligned}$$

Scritta così non è proprio il massimo; quel che voglio vedere, in realtà, è:

$$\left( u - \frac{GM}{l^2} \right)'' + \left( u - \frac{GM}{l^2} \right) = 0$$

Questa espressione la riconosciamo tutti: è la classica espressione di un oscillatore armonico. Sappiamo la sua soluzione:

$$u - \frac{GM}{l^2} = c \cos(\varphi - \varphi_0)$$

La costante  $\varphi_0$ , in realtà, è arbitraria: essa dipende dalla scelta del sistema di riferimento. Poiché si può scegliere il sistema in qualsiasi modo lo si voglia, ne prendiamo uno tale che  $0\varphi_0 = 0$ , in modo da poterla non considerare nell'espressione. La costante  $c$  invece è un numero reale qualsiasi: quella che abbiamo scritto sopra non è la soluzione particolare al problema, bensì la generale, che comprende tutte le possibili soluzioni.

Dalla scorsa espressione mi ricavo  $u(\varphi)$ :

$$u(\varphi) = \frac{GM}{l^2} (1 + e \cos \varphi)$$

Cosa è quella  $e$ ? Da dove è uscita? Non è la costante di Nepero, bensì viene chiamata **eccentricità**, e il suo valore, in questo caso, è:

$$e = \frac{cl^2}{GM}$$

È giunto finalmente il momento di ritornare a  $r(\varphi) = \frac{1}{u(\varphi)}$ :

$$r(\varphi) = \frac{1}{u(\varphi)} = a \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \varphi}$$

La costante  $a = \frac{l^2}{GM(1-e^2)}$  rappresenta, come vedremo tra poco, il semiasse maggiore dell'ellisse. Abbiamo finito con i cambi di variabile in questa dimostrazione.

L'equazione finale di  $r(\varphi)$  è la funzione che definisce la traiettoria del moto del pianeta. È stata ardua, ma ce l'abbiamo fatta. Ora dobbiamo solo fare alcune considerazioni.

Per l'eccentricità  $e$  si distinguono tre casi:

$$\begin{aligned} 0 &\leq e < 1 \\ e &= 1 \\ e &> 1 \end{aligned}$$

Nel primo caso, la traiettoria sarà un'ellisse; in particolare, una circonferenza nel caso  $e = 0$ . Nel secondo caso avremo invece una parabola, mentre nel terzo un'iperbole. Poiché l'unica di queste traiettorie a essere chiusa è l'ellisse, e sappiamo che i pianeti non vanno in altri sistemi solari, possiamo concludere che l'orbita dei pianeti è un'ellisse. È dimostrata la prima legge di Keplero.

Prima di chiudere la dimostrazione, vediamo come  $a$  è il semiasse maggiore; ricordando l'espressione  $r(\varphi)$  di sopra:

- se  $\varphi = 0$ , allora avremo  $r = a(1 - e) = r_-$ , la minima distanza dal Sole, chiamata **perielio**;
- se  $\varphi = \pi$ , allora avremo  $r = a(1 + e) = r_+$ , la massima distanza dal Sole, chiamata **afelio**.

Per tutto il moto, avremo che  $r_- \leq r \leq r_+$ ; inoltre

$$r_- + r_+ = a(1 - e) + a(1 + e) = a(1 - e + 1 + e) = 2a$$

Quindi, in conclusione,  $a = \frac{r_- + r_+}{2}$  è il semiasse maggiore dell'ellisse.

#### Dimostrazione della terza legge

La dimostrazione della terza legge sarà veloce. Valgono tutte le considerazioni e le soluzioni trovate nelle precedenti dimostrazioni. Per semplicità di calcolo prendiamo il caso in cui  $e = 0$ , ovvero la traiettoria è una circonferenza. Con qualche calcolo in più è possibile compiere questa dimostrazione anche nel caso generale dell'ellisse, ma non sentiamo la necessità di farlo.

Se la traiettoria è una circonferenza, il moto del pianeta sarà un moto circolare uniforme. La sua accelerazione centripeta sarà:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

La forza centripeta, nel moto di un pianeta, corrisponde alla forza di gravitazione:

$$\begin{aligned} f_c &= f_g = ma_c \\ G \frac{Mm}{r^2} &= m\omega^2 r \\ \omega^2 r^3 &= GM = \text{cost} \end{aligned}$$

Ricordando l'espressione che lega periodo e velocità angolare  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , avremo che:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi^2}{T^2} r^3 &= GM \\ \frac{r^3}{T^2} &= \frac{GM}{4\pi^2} = \text{cost} \end{aligned}$$

Questo vuol dire che  $r^3 \propto T^2$ , come volevasi dimostrare.

## 12.2 Considerazione col problema dei due corpi

Tutte le considerazioni fatte in questo corso hanno presentato un'importante assunzione: che  $m \ll M$ . Facciamo una bene considerazione finale, sfruttando il problema dei due corpi.

Il caso della forza di gravitazione è un caso molto particolare: è una forza di interazione che comprende, nel suo modulo, le masse dei due punti. Studiamo il moto del corpo con massa minore, tenendo conto il problema dei due corpi:

$$f(r) = \mu \frac{d^2 r}{dt^2} = G \frac{m_1 m_2}{R^3} \vec{r} = G \frac{\mu M_{\text{tot}}}{R^3} \vec{r}$$

In questo caso, il corpo di massa minore viene considerato come se avesse la massa ridotta, mentre il corpo di massa maggiore viene considerato avere la massa totale del sistema. Non rifaremo tutte le dimostrazioni di questo corso, basta sapere che, tenendo conto di queste due considerazioni, i risultati ottenuti sono identici e valgono quindi il teorema di Gauss e le leggi di Keplero, anche senza considerare, come abbiamo finora fatto, la massa del pianeta trascurabile.



PARTE IV

# Meccanica dei fluidi





## Statica dei fluidi

### 13.1 Cosa sono i fluidi

I fluidi sono sistemi di punti materiali di forma indefinita: assumono infatti la forma del recipiente che li contiene. Si dividono in:

- **gas**, i quali non hanno né forma, né volume definiti, bensì assumono le caratteristiche del recipiente;
- **liquidi**, i quali non hanno forma ma volume definito, e possono essere più o meno comprimibili.

A differenza dei sistemi rigidi, che sono solidi e indeformabili, i fluidi presentano caratteristiche diverse e numerose complicazioni nella descrizione del loro moto. Microscopicamente, un fluido è un **sistema discreto**, formato da numerose particelle che si muovono in moto relativo l'una rispetto alle altre. Tuttavia, possiamo schematizzarli come un **sistema continuo**, per rendere più facile il loro studio. A tal fine, tratteremo tutti i liquidi come incompressibili, ovvero di volume fisso e costante nel tempo, e studieremo caso per caso il fluido prendendo in considerazione un volumetto  $dV$  cubico, il quale è abbastanza grande da poter essere trattato come un sistema continuo (quindi ha un numero elevato di particelle) ma sufficientemente piccolo per poter essere considerato **un infinitesimo**. Esso ci fornisce, quindi, una descrizione complessiva del fluido.

Su un volumetto  $dV$  agiscono due tipi di forze:

- **forze di superficie**  $\vec{F}^{(s)}$ , esercitate dal fluido circostante sulla superficie del volumetto;
- **forze di volume**  $\vec{F}^{(v)}$ , proporzionale al  $dV$  o alla  $dm$  del volumetto, che sono applicate nel centro di massa del volumetto.

Ogni forza di superficie può essere scomposta in due componenti, una perpendicolare e una parallela alla superficie, che chiameremo rispettivamente **sforzo normale** e **sforzo di taglio**:

$$d\vec{F}^{(s)} = d\vec{F}_n^{(s)} + d\vec{F}_t^{(s)}$$

$d\vec{F}_n^{(s)}$  è detta anche forza per unità di superficie o, semplicemente, **pressione**. Se la forza è uniforme su tutta la superficie, avremo che:

$$P = \frac{F_n}{S}$$

Nel sistema internazionale, l'unità di misura della pressione è il **pascal** (Pa), corrispondente a:

$$\frac{1\text{N}}{1\text{m}^2} = 1 \text{ Pa}$$

Lo sforzo di taglio  $\frac{dF_n^{(s)}}{dS}$  è invece dovuto all'attrito del fluido con le pareti del recipiente o con il resto del fluido stesso; nel nostro studio, considereremo **fluidi non viscosi**, per cui non sarà presente lo sforzo di taglio. Qualora il fluido fosse viscoso, invece, lo sforzo di taglio, che si presenta in caso di moto del fluido, causerebbe lo spostamento di diversi strati di fluido e, in casi particolari, anche la creazione di vortici.

## 13.2 Fluidi in quiete

Un fluido si dice **in quiete** quando:

- non ci sono moti complessivi del fluido;
- una qualsiasi superficie del fluido ha lo stesso numero di particelle entranti e uscenti.

A proposito di questa ultima considerazione, è importante considerare che il fluido, anche se complessivamente e macroscopicamente è in quiete, presenta microscopicamente dei **moti non uniformi**: le particelle del fluido si muovono in maniera sparsa e disordinata in qualsiasi condizione del fluido.

Come già accennato nel modulo precedente, in un fluido statico lo sforzo di taglio è nullo. Se vi fosse, il fluido si muoverebbe a strati, e ciò non è coerente col caso che stiamo studiando. Per tale motivo, avremo che tutte le forze di superficie saranno forze di pressione, ovvero:

$$d\vec{F}^{(s)} = d\vec{F}_n^{(s)} = PdS$$

La pressione in un fluido statico è dovuta agli urti tra le particelle; considerata una qualsiasi superficie del fluido, per il **terzo principio della dinamica** (e per la condizione di fluido in quiete) avremo che le particelle entranti sono uguali in numero a quelle uscenti, quindi gli urti in un verso sono completamente bilanciati dagli urti nel verso opposto, causando cioè il fluido statico. La stessa considerazione può essere fatta per le pareti del contenitore, le quali esercitano sul fluido una pressione uguale e opposta a quella che esercita il fluido su di esse.

## 13.3 Legge di Stevino

Consideriamo un volumetto  $dV$ ; esso avrà una massa infinitesima  $dm$ , che sarà uguale a:

$$dm = \rho dV$$

Dove  $\rho$  è la **densità del fluido**, che in questo caso considereremo uniforme. Sul volumetto agiranno quindi le seguenti forze:

$$\begin{aligned} d\vec{F}^{(s)} &= PdS \\ d\vec{F}^{(v)} &= \vec{g}dm = \vec{g}\rho dV \end{aligned}$$

Infatti, le uniche forze di volume agenti sono le forze peso delle particelle, che quindi si sommano nella forza peso complessiva del volumetto, applicata al centro di massa, e la forza di superficie corrisponde alla pressione del fluido. Considero un sistema di riferimento cartesiano, dove sia l'asse  $z$  la quota, a tre assi esterno al fluido. Poiché esso è in quiete, avremo che:

$$\begin{aligned}\vec{F}^{\text{tot}} &= 0 \\ d\vec{F}^{(s)} + d\vec{F}^{(v)} &= 0\end{aligned}$$

Consideriamo un volumetto cubico. Analizziamo le due facce perpendicolare all'asse  $y$  e le forze che agiscono su di esse. Le uniche forze agenti sono le forze di superficie, applicate al centro geometrico delle due superfici. I due centri avranno coordinate  $(x, y, z)$  e  $(x, y + dy, z)$ . Le due forze, dirette verso il centro del volumetto, saranno quindi:

$$\begin{aligned}d\vec{F}_1^s &= P(x, y, z)dS \\ d\vec{F}_2^s &= P(x, y + dy, z)dS\end{aligned}$$

Poiché la risultante delle forze deve essere nulla, avremo che  $d\vec{F}_1^s + d\vec{F}_2^s = 0$ , quindi (si ricorda che le forze hanno verso opposto):

$$P(x, y, z)dS - P(x, y + dy, z)dS = 0$$

Da cui  $P(x, y, z) = P(x, y + dy, z)$ , ovvero la pressione resta costante lungo l'asse delle  $y$ . Lo stesso ragionamento può essere fatto anche per l'asse delle  $x$ , da cui concludiamo che:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Che è un altro modo per dire che i punti con la stessa quota hanno la stessa pressione.

Cosa accade invece lungo l'asse  $z$ ? In questo caso non agiscono solo le forze di superficie lungo le due facce, ma anche la forza di volume, corrispondente alla forza peso, è esercitata perpendicolarmente su di esse. Ricordando che  $dS = dx dy$  e che  $dV = dx dy dz$ , avremo quindi che:

$$\begin{aligned}P(x, y, z)dx dy - P(x, y, z + dz)dx dy - g\rho dx dy dz &= 0 \\ [P(x, y, z) - P(x, y, z + dz)] &= g\rho dz\end{aligned}$$

Sviluppo in serie il termine  $P(x, y, z + dz)$ , che diventa  $P(x, y, z) + \frac{\partial P}{\partial z} dz$ , sostituisco nell'espressione precedente ottenendo:

$$-\frac{\partial P}{\partial z} dz = g\rho dz$$

Da cui la conclusione:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -g\rho$$

Ovvero la pressione sull'asse  $z$  non è costante. Consideriamo allora un fluido in quiete in un recipiente, e prendiamo due punti  $A$  e  $B$  a diversa quota, con  $z_B > z_A$ . Calcoliamo la differenza di pressione:

$$P_B - P_A = \int_A^B dP = \int_A^B \frac{\partial P}{\partial z} dz = - \int_A^B (g\rho) dz = -\rho g(z_B - z_A)$$

Chiamata  $z_B - z_A = h$  la differenza di quota, possiamo riscrivere la precedente espressione come segue:

$$P_B = P_A - \rho gh$$

Questa è conosciuta anche come **legge di Stevino** e afferma che, in liquido in quiete, la pressione aumenta con l'aumentare della profondità.

## 13.4 Legge di Archimede e esperienza di Torricelli

### 13.4.1 Legge di Archimede

La legge di Archimede è una legge sperimentale antica, che viene attribuita al genio siracusano vissuto nel III secolo a.C. La legge, ricavata empiricamente, afferma che un corpo immerso in un fluido in quiete riceve una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del fluido spostato, applicata al baricentro del fluido spostato.

In parole semplici, ogni volta che inseriamo un corpo in un fluido in quiete, questo sposta una parte di quel fluido, la quale ha un proprio peso, e questo peso è pari alla forza che il fluido esercita sul corpo. Questa legge spiega anche perché molti materiali galleggiano se immersi in acqua. Vediamone la dimostrazione.

Consideriamo prima il fluido, in quiete, senza un corpo immerso, e prendiamo in analisi un volume ben definito  $V$ , che non sia un infinitesimo ma che abbia delle dimensioni proprie e apprezzabili anche macroscopicamente. Poiché il fluido è in quiete, tutte le forze di superficie esercitate sul volume sono forze di pressione, mentre la forza di volume è proprio la forza peso. Poiché il fluido è in quiete e la somma delle forze deve essere nulla, conoscendo la direzione della forza peso, possiamo infine affermare che la risultante delle forze di pressione  $\vec{F}_A$  è diretta verso l'alto. Quindi, per la prima legge cardinale dei sistemi avremo che:

$$\begin{aligned} \vec{F}_A + \vec{F}_P &= 0 \\ |\vec{F}_A| &= \rho_f g V \end{aligned}$$

Se invece abbiamo un corpo immerso, di cui prendiamo un volume pari al volume di fluido prima analizzato, la forza di volume cambia, è pari infatti alla forza peso del corpo  $P_c = \rho_c V g$ . Però, la forza di superficie resta la stessa, perché, invece che il corpo materiale, è come se vi fosse ancora il volume d'acqua, ovvero  $F_A = \rho_f V g$ . Avremo quindi che la risultante delle forze

$$R = (\rho_f - \rho_c) V g \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Se } \rho_f > \rho_c \text{ va verso l'alto e il corpo galleggia} \\ \text{Se } \rho_f < \rho_c \text{ va verso il basso e il corpo affonda} \end{array} \right.$$

Tutto dipende quindi dalla **densità del corpo**, non dal suo peso o volume: una piccola pallina di ferro affonderà comunque, mentre una grande tavola di legno galleggerà comunque. La spinta di Archimede è proprio la legge sfruttata per permettere

alle enormi navi di galleggiare: poiché la loro densità complessiva è inferiore di quella dall'acqua, queste non affondano. Possiamo anche calcolare il filo del galleggiamento: quando un corpo galleggia, presenterà una parte di volume immersa, mentre il restante è fuori dall'acqua. Chiamato  $V_i$  il volume immerso, avremo che:

$$F_A = F_P \Rightarrow \rho_f V_i g = \rho_c V g \frac{V_i}{V} = \frac{\rho_c}{\rho_f} < 1$$

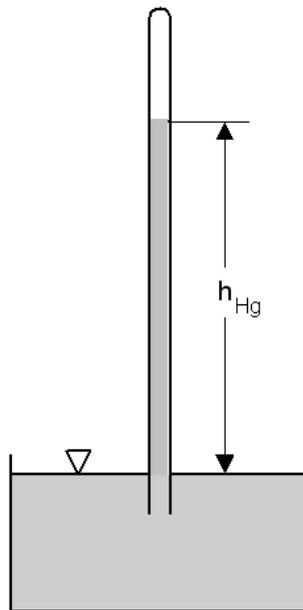
In questo caso, c'è equilibrio e il corpo galleggia. Possiamo fare un esempio veloce, ovvero quello dell'iceberg. Conosciuta la densità del ghiaccio e dell'acqua di mare, rispettivamente  $\rho_a = 1.025 \text{ g/cm}^3$ , possiamo calcolare il volume immerso pari a:

$$\frac{V_i}{V} = \frac{\rho_g}{\rho_a} = 0.895$$

Ovvero circa il 90

### 13.4.2 Esperienza di Torricelli

Come è lecito pensare, anche l'**atmosfera terrestre** è un fluido, composto da diversi elementi chimici, distribuiti più o meno uniformemente. Anche questa esercita una pressione sulla superficie terrestre, e il primo che riuscì a calcolarla fu Torricelli, sfruttando quello che venne poi chiamato **barometro di Torricelli**.



Lo strumento in figura qui sopra ha lo scopo di misurare la pressione atmosferica, sfruttando la legge di Stevino. Esso è composto da un tubo di vetro verticale, in cui è inserito un fluido (mercurio, che a temperatura ambiente è liquido) che viene ribaltato su una vasca. Il fluido inizia a fuoriuscire e riversarsi in essa, per poi fermarsi e restare in equilibrio. Infatti, i punti con la stessa quota, a contatto con la superficie, sono soggetti alla pressione atmosferica. Il punto del fluido più in alto, rimasto nel tubo, ha invece pressione nulla: nello spazio tra fluido e tubo si è venuto a creare il vuoto, azzerando la pressione. In realtà, dire che vi è il vuoto in quel piccolo spazio è

un'approssimazione, poiché vi sarà in realtà vapore saturo di mercurio. Considerando quel punto a pressione zero, possiamo calcolare la differenza di pressione fra il punto più alto e il punto più basso nel tubo che, ricordiamo, ha pressione pari a quella atmosferica. Avremo quindi:

$$P(z) = P_0 + \rho gh$$

Chiamiamo  $P_0$  la pressione nel punto più basso, ovvero quella atmosferica. La pressione nel punto più alto, che chiameremo  $c$  è nulla, ovvero:

$$P_c = 0 = \rho gh + P_0$$

Da cui deriva immediatamente:

$$P_0 = \rho gh = 1.02 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

L'altezza misurata nel tubo è pari a 0.76 m, mentre la densità del mercurio è 13.6 g/cm<sup>3</sup>. La scelta del mercurio come liquido è dovuta proprio a questa sua caratteristica di essere un liquido molto denso: si sarebbe potuto utilizzare un qualsiasi altro fluido, anche l'acqua, ma avrebbe richiesto un tubo alto circa 10 000 metri, cosa assai scomoda da costruire all'epoca. Il mercurio, invece, permetteva all'esperienza di riuscire anche con un tubo di vetro alto appena 1 metro.

Dopo questa esperienza, il **millimetro di mercurio**, che ha come simbolo mmHg, è diventato un'unità di misura della pressione. Anche l'**atmosfera**, il cui simbolo è atm, è un'unità di misura della pressione largamente utilizzata in chimica. I loro rispettivi valori sono:

$$760\text{mmHg} = 1.02 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad 1\text{atm} = 1.02 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

## 13.5 Conseguenze della legge di Stevino

La legge di Stevino ha delle conseguenze, non immediate, di importanza rilevante per il loro utilizzo nella vita di tutti i giorni. Ne tratteremo tre in questo modulo.

### 13.5.1 Vasi comunicanti

Consideriamo un liquido perfetto omogeneo, ovvero con  $\rho = \text{cost}$  in quiete. Un sistema di vasi comunicanti prevede due contenitori aperti verso l'alto e collegati tra loro con un tubicino. Non interessa che le basi dei contenitori si trovino alla stessa altezza, così come non è importante che il tubo sia piano o in diagonale. Sulle due aperture, infatti, agisce la stessa pressione atmosferica, quindi il liquido raggiunge la stessa quota in entrambi i contenitori.

### 13.5.2 Legge di Pascal

La legge di Pascal afferma che in un liquido omogeneo in quiete, la **variazione di pressione** prodotta in un punto del fluido si trasmette inalterata a tutti gli altri punti del fluido.

Per dimostrarla, prendiamo un recipiente con del fluido e analizziamo due punti, un punto  $A$  posto sulla superficie del fluido e un punto  $B$  interno al fluido. Avremo quindi che  $z_b < z_A$ . Per tale, la relazione che lega le due pressioni è  $P_B = P_A - \rho gh$ , dove  $h = z_B - z_A$ .

Trasmettiamo una variazione di pressione nel punto  $A$ ; in esso sarà allora presente una pressione  $P'_A = P_A + \Delta P_A$ . Calcoliamo la nuova pressione nel punto  $B$ :

$$P'_B = P'_A - \rho gh = (P_A + \Delta P_A) - \rho gh = P_B + \Delta P_A$$

È quindi dimostrata la legge di Pascal.

### 13.5.3 Martinetto idraulico

Il martinetto idraulico è uno strumento largamente utilizzato nella vita quotidiana: il suo utilizzo pratico è quello di permettere di sollevare corpi dal peso anche molto elevato applicando una forza di molto inferiore al peso del corpo. Un esempio di applicazione è quando il meccanico solleva un'automobile per ripararla.

Consideriamo un fluido incomprimibile e un sistema di vasi comunicanti; la caratteristica fondamentale di questo sistema è che le aperture verso l'alto hanno sezioni molto diverse tra loro, che chiameremo  $A$  e  $a$ , con  $a \ll A$ . Sulle due aperture vengono posti dei piani che chiudono il fluido.

Sulla sezione grande  $A$  agisce una forza  $F_A$ , in cui sono comprese sia la forza peso del corpo che la pressione atmosferica. Sulla sezione minore agisce invece una forza  $f_a$ . Le due sezioni si troveranno ad altezze nettamente differenti. Le due pressioni devono essere bilanciate, quindi avremo che:

$$P_0 = \frac{F_A}{A} + \rho gh_1 = \frac{f_a}{a} + \rho gh_2$$

Da cui otteniamo:

$$\frac{f_a}{a} = \frac{F_A}{A} + \rho g(h_1 - h_2)$$

Osserviamo il fattore  $\rho g(h_1 - h_2) \cdot A$ . Questo rappresenta l'ipotetico peso di fluido che si troverebbe sulla sezione  $A$  e compreso tra le altezze  $h_1$  e  $h_2$ . Questo fattore è di molto minore della forza che esercita il corpo sul fluido: infatti il corpo abbassa il piano e affonderebbe facilmente nel fluido, per cui i pesi sono nettamente differenti. Possiamo quindi trascurare questo fattore nella precedente espressione, ottenendo:

$$f_a = \frac{a}{A} F_A$$

Dato il rapporto  $\frac{a}{A} \ll 1$  avremo che la forza necessaria ad alzare il corpo sarà molto minore del peso del corpo stesso. È però importante sapere che il lavoro compiuto non diminuisce, a diminuire è solo la forza impiegata. Per poter eguagliare il lavoro della forza peso, quindi, la forza minore dovrebbe compiere uno spostamento molto grande; nella realtà ciò è possibile grazie a un sistema di entrata e uscita del fluido che permette alla leva su cui si preme col piede di risalire senza che il corpo scenda: in questo modo, abbassando più e più volte la leva, si riesce a sollevare l'auto.



## Dinamica dei fluidi

### 14.1 Fluidi in moto

Lo studio del moto di un fluido può rivelarsi difficile, tant'è vero che resta una delle branche della fisica più complicate, nonostante negli anni siano sorte altre branche concettualmente molto complesse. Poiché un fluido è, in realtà, un sistema microscopicamente discreto, lo studio del moto delle singole particelle richiede conoscenze molto approfondite di matematica e di meccanica statistica. Per tale motivo, tratteremo qui i fluidi come se fossero **sistemi continui**. In generale, esistono due approcci per studiare i fluidi in moto:

- **approccio lagrangiano**, in cui si studia il moto di un determinato volumetto di fluido;
- **approccio euleriano**: si considera una posizione fissa e si determinano le variabili del fluido in quella posizione al variare del tempo.

In questo corso useremo l'approccio euleriano; sceglieremo quindi una posizione fissa e, al variare del tempo, studieremo le variabili del moto che descrive il fluido. È quindi giusto parlare di una velocità che, oltre al tempo, sia anche funzione della posizione.

◇ **Definizione** Definiamo

$$\vec{v}(t, \vec{r})$$

la **velocità del fluido** quando passa nella posizione  $\vec{r}$  al tempo  $t$ .

Prima di studiare il moto di un fluido, diamo delle definizioni preliminari.

◇ **Definizione** Le **linee di flusso** sono delle curve che, in ogni istante e in ogni punto, hanno come tangente il vettore velocità che il fluido ha in quel punto e in quell'istante.

Le linee di flusso, che possono chiamarsi anche campo di velocità, descrivono il moto del fluido.

È bene precisare che un elemento di fluido non segue necessariamente le linee di flusso: queste descrivono solo il comportamento del fluido istante per istante, non continuamente nel tempo.

È anche immediato pensare che due o più linee di flusso non possano intersecarsi: qualora lo facessero si avrebbero due o più vettori tangenti al punto in quell'istante, ma la velocità in una posizione e in un istante è una.

Quando si studia un fluido in moto, si deve tener conto anche degli sforzi di taglio. Per tutti i fluidi reali esso è presente, ma in un fluido perfetto no. In questo caso si parla di **fluido non viscoso**.

◇ **Definizione** Si definisce **liquido perfetto** un liquido incompressibile e non viscoso.

Poiché questo corso è un'introduzione alla meccanica dei fluidi, considereremo solo fluidi in moto stazionario.

◇ **Definizione** Quando la velocità  $\vec{v}(t, \vec{r})$  non dipende dal tempo, ma solo dalla posizione, ovvero:

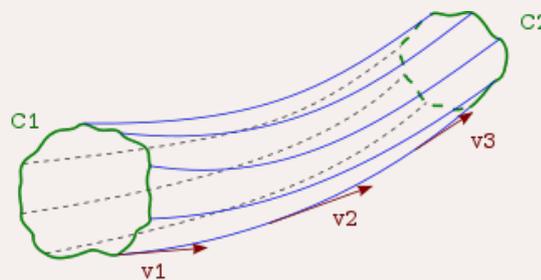
$$\vec{v}(t, \vec{r}) = \vec{v}(\vec{r})$$

si parla allora di **moto stazionario**.

In un moto stazionario, le linee di flusso sono costanti e corrispondono alle traiettorie del fluido.

Lo studio del moto di un fluido non viene fatto su tutto il volume del fluido: spesso è utile o rilevante studiarne solo una parte, che si chiama tubo di flusso.

◇ **Definizione** Un **tubo di flusso** di un liquido perfetto in moto stazionario è una superficie che racchiude un insieme di linee di flusso. È una curva chiusa, così come tutte le linee che contiene.



In verde si notano le curve che generano il tubo di flusso, mentre in blu vi sono le linee di flusso.

In caso di moto stazionario, un tubo di flusso descrive efficacemente un insieme ben definito di liquido in moto. Considerata una porzione di tubo di flusso, è importante, nello studio di un moto, parlare di portata.

◇ **Definizione** Si definisce **portata del tubo di flusso** il volume di liquido che passa nel tubo nell'unità di tempo, ovvero:

$$q = \frac{dV}{dt}$$

Poiché la quantità di massa nel tubo è sempre la stessa, in due istanti di tempo avremo due masse  $dm_{1,2}$ . Allora è immediato che:

$$\begin{aligned} dm_1 &= dm_2 \\ \rho dV_1 &= \rho dV_2 \\ dV_1 &= dV_2 \end{aligned}$$

Da cui ricaviamo che  $\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_2}{dt}$ , ovvero che la portata è costante nel tubo. Questa espressione è nota anche come legge di conservazione della massa oppure equazione di continuità.

Nel caso in cui la sezione del tubo sia perpendicolare al vettore velocità, chiameremo il tubo di flusso elementare. In questo caso, avremo che un dato volume di fluido  $V$  si sposta, in un istante  $dt$ , di una lunghezza  $dl$  nel tubo; la lunghezza può essere anche scritta  $dl = v dt$ . Poiché la velocità è perpendicolare alla sezione, avremo che:

$$dV = S dl = S v dt \quad \Rightarrow \quad q = \frac{dV}{dt} = \frac{S v dt}{dt} = S v$$

Che è un ulteriore modo di determinare la portata di un tubo. Poiché essa è costante, avremo che  $S_1 v_1 = S_2 v_2$ , quindi se la sezione diminuisce la velocità aumenta, così come il contrario. Nel caso generale in cui la sezione non sia perpendicolare alla velocità, si considera nel calcolo solo la componente della velocità che sia normale alla sezione.

Ricordando la definizione di flusso di un vettore, ovvero  $\Phi_S(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \hat{n} dS$ , notiamo che il flusso di un fluido coincide con la sua portata.

## 14.2 Legge di Bernoulli

Studiamo ora una legge che legghi le varie grandezze che scrivono il moto di un fluido. Prendiamo un tubo di flusso compreso tra due superfici  $A_1$  e  $A_2$ ; le due superfici sono prese abbastanza piccole da poter trascurare la differenza di quota agli estremi delle superfici, quindi avremo che  $z_1$  e  $z_2$  descrivono la quota complessiva di tutte e due le superfici; però esse hanno quota diversa, quindi  $z_1 < z_2$ .

Il fluido è in moto stazionario; nell'istante  $t + dt$ , esso si è spostato nel tubo, e si troverà ora compreso tra due superfici  $A'_1$  e  $A'_2$ . Calcoliamo il lavoro compiuto dalle forze.

Le forze che agiscono sul fluido sono:

- $\vec{F}_P$ , la **forza peso**;
- $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , le **forze di pressione** che il fluido esercita sulle due superfici agli estremi del tubo. Poiché il fluido è in moto, anche queste compiono lavoro.

Possiamo esprimere le due forze di pressione come:

$$F_1 = P_1 A_1 \quad F_2 = P_2 A_2$$

La forza  $F_1$  compirà lavoro positivo, poiché lo spostamento è concorde al verso della forza; al contrario, la forza  $F_2$  compirà lavoro negativo, perché lo spostamento è di verso discorde con quello della forza. Possiamo calcolare il lavoro delle forze di pressione, che sarà uguale a:

$$dL_{\text{pressione}} = P_1 A_1 dl_1 - P_2 A_2 dl_2$$

Il lavoro della forza peso sarà invece:

$$dL_{\text{peso}} = -dmg(z_2 - z_1) = dm g(z_1 - z_2)$$

Notiamo che il lavoro della forza peso è negativo perché c'è stato un aumento di quota. Possiamo allora scrivere il lavoro totale compiuto dal sistema:

$$dL_{\text{tot}} = P_1 A_1 dl_1 - P_2 A_2 dl_2 + dm g(z_1 - z_2)$$

Possiamo scrivere  $dm = \rho dV$  e  $dV = A dl$ , avremo quindi che  $\rho A_1 dl_1 = \rho A_2 dl_2$ . Possiamo scrivere tutto in funzione di  $\frac{dm}{\rho} = A_1 dl_1 = A_2 dl_2$ . Andiamo a sostituire nell'espressione del lavoro

$$dL_{\text{tot}} = dm \left[ \frac{P_1 - P_2}{\rho} + g(z_1 - z_2) \right]$$

Adesso applico il teorema dell'energia cinetica, poiché il fluido ha velocità, quindi il lavoro totale corrisponde alla variazione di energia cinetica:

$$\begin{aligned} dL_{\text{tot}} = dK &= \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 \\ \frac{P_1}{\rho} + g z_1 + \frac{1}{2} v_1^2 &= \frac{P_2}{\rho} + g z_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \\ P + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 &= \text{cost} \end{aligned}$$

Questa espressione è anche conosciuta come **legge di Bernoulli**.

### 14.2.1 Effetto Venturi

Un caso particolare della legge di Bernoulli è il cosiddetto **effetto Venturi**. Consideriamo un fluido perfetto in moto stazionario in un tubo orizzontale, la cui sezione si restringa. Sappiamo che la portata si conserva, quindi:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Ovvero se  $A_2 < A_1$  avremo  $v_2 > v_1$ . Applico la legge di Bernoulli:

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Se  $v_2 > v_1$ , ne consegue allora che  $P_1 > P_2$ . Questo fenomeno è largamente utilizzato, come ad esempio nella forma delle ali di un aeroplano: esse infatti permettono alla velocità del fluido di avere valori diversi sopra e sotto le ali, producendo una

variazione di pressione che spinge l'aereo verso l'alto. Un esempio più comune è quello del foglio di carta: prendete un qualsiasi foglio di carta non rigida, tenetelo saldo davanti la bocca, poi soffiare sulla superficie verticale. Produrrete una variazione di pressione che spingerà il foglio verso l'alto.



PARTE V

## Onde meccaniche elastiche





## Caratteristiche delle onde

### 15.1 Onde meccaniche

Quando applichiamo una **perturbazione**, ovvero una variazione, a una qualsiasi grandezza fisica di un determinato mezzo, si verifica una **propagazione ondosa**, ovvero la perturbazione si propaga attraverso il mezzo che riempie lo spazio.

Un esempio classico di un fenomeno d'onda è il lancio di un sasso in uno stagno d'acqua: successivamente all'impatto del sasso con la superficie d'acqua, si possono vedere delle circonferenze d'acqua che si allontanano progressivamente dal punto d'impatto. Quelle circonferenze possono essere considerate un esempio materiale di onda.

Un'osservazione diretta dall'esperienza empirica del lancio del sasso è che, a propagarsi, non è materia, bensì il **moto della materia**: le particelle d'acqua cambiano sia la loro velocità che la loro quota, dando origine così a un propagarsi di energia cinetica e energia potenziale. Gli anelli d'acqua che si formano possono essere considerati come luoghi geometrici dei punti che, in un determinato istante, subiscono la perturbazione; questi luoghi geometrici vengono chiamati comunemente **fronti d'onda**. Quando si ha una propagazione nello spazio si è soliti parlare di **onde sferiche** ma, come nel caso dell'acqua, si può considerarle anche **onde piane**.

La propagazione di un'onda dipende fortemente dalle **caratteristiche fisiche del mezzo**; nell'acqua è presente una forza di richiamo tra le particelle, che possiamo schematizzare come una **forza elastica**. In questi casi, allora, parleremo di onde elastiche in mezzi elastici. La forza elastica, tuttavia, ha degli effetti dissipativi che tendono a smorzare la perturbazione; nella nostra analisi trascureremo questi effetti. Qualora, però, essi risultano impossibili da trascurare, perché troppo forti, parliamo di **onde smorzate**. Un esempio è il lancio di un sasso, invece che in uno stagno d'acqua, in una pozzanghera di fango: in quel mezzo la forza di richiamo ha un effetto dissipativo molto forte, e il risultato è che non possono essere apprezzati fronti d'onda evidenti, quindi la perturbazione viene stroncata quasi sul nascere.

Le onde elastiche descrivono efficacemente molti fenomeni naturali, tra i quali la propagazione del suono nell'aria. Nei mezzi elastici possono crearsi due tipi di onde: le **onde longitudinali**, che si hanno quando le particelle si propagano nella stessa direzione in cui si propaga l'onda, per esempio, quando si comprime una piccola parte di una molla molto lunga e possiamo vedere come, seguendo la direzione della molla, le parti successive adiacenti siano interessate dalla perturbazione contraendosi a loro volta; le **onde trasversali**, invece, si hanno quando le particelle si propagano

in direzione ortogonale a quella di propagazione dell'onda, per esempio quando si fa oscillare una corda di chitarra. In questo corso tratteremo approfonditamente entrambi questi fenomeni.

Parliamo adesso in termini matematici. Le onde, oltre che a parole, possono essere descritte da funzioni matematiche. Una funzione d'onda descrive come la perturbazione si propaga nello spazio, ovvero come, all'istante  $t$ , si muovono le particelle interessate del mezzo. Avremo quindi che la funzione d'onda può essere scritta:

$$\alpha(x, t)$$

Questo tipo di funzione rappresenta, al variare del tempo, come varia la posizione della particella. Le onde possono considerarsi progressive o regressive: a cambiare non è altro che la **direzione di propagazione**. Scelto un verso positivo, si hanno **onde progressive** quando l'onda si propaga verso il semiasse positivo; al contrario, si hanno **onde regressive** quando la direzione di propagazione segue il semiasse negativo. In generale, un'onda che si propaga con una determinata velocità  $v$ , la funzione può essere scritta anche come:

$$\alpha(x, t) = f(x - vt)$$

nel caso di onde progressive. Se l'onda fosse stata regressiva, avremmo avuto  $f(x + vt)$ . Per descrivere la velocità possiamo considerare la funzione a due istanti diversi  $t_1$  e  $t_2$ ; se, in questi due istanti, avremo le posizioni delle particelle  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$ , allora la velocità dell'onda può essere scritta come:

$$\frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{t_2 - t_1} = v$$

Matematicamente parlando, una funzione d'onda soddisfa la seguente equazione differenziale alle derivate parziali; diamo per buono questo dato, tenendo conto che, nel corso, per valutare se si ha o meno una funzione d'onda, effettueremo questo test. L'equazione che descrive le funzioni d'onda è:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

## 15.2 Onde sinusoidali

Un caso interessante da studiare sono quei tipi di onde descritte da una **funzione sinusoidale**:

$$\alpha(x, t) = A \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x \mp vt) \right]$$

In questa funzione  $A$  indica l'ampiezza d'onda, ovvero i valori massimi assunti dalla funzione; possiamo notare come questo parametro sia indipendente sia da  $x$  che da  $t$ , e quindi parliamo di una **onda non smorzata**. Il parametro  $\lambda$  si chiama lunghezza d'onda e determina il **periodo spaziale** dell'onda, ovvero la distanza tra due massimi consecutivi. Oltre al periodo spaziale, le onde posseggono anche un **periodo temporale** dato da  $T = \frac{\lambda}{v}$ ; possiamo dimostrare come, dopo ogni periodo, l'onda si ripeta:

$$\frac{2\pi}{\lambda} [x \mp v(t + nT)] = \frac{2\pi}{\lambda} \left[ x \mp v \left( t + n \frac{\lambda}{v} \right) \right] = \frac{2\pi}{\lambda} [x \mp vt + n\lambda] = \frac{2\pi}{\lambda} (x \mp vt) + 2\pi n$$

Vale quindi la relazione  $\lambda = vT$ . Un altro modo di scrivere la funzione di un'onda sinusoidale è:

$$\alpha(x, t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

In cui  $\omega$  è detta pulsazione e vale:

$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{2\pi}{T}$$

Mentre  $\varphi$  vale  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \bar{x} + j\pi$ , nei casi:

$$\begin{aligned} j &= 0 & \text{se } (x - vt) \\ j &= 1 & \text{se } (x + vt) \end{aligned}$$

A volte, però, risulta più comodo scrivere la funzione nel seguente modo:

$$\alpha(x, t) = A \sin(kx \mp \omega t + \varphi)$$

In questa espressa,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  viene chiamato **numero d'onda**, mentre la pulsazione  $\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{2\pi}{T}$ . Il fattore  $\varphi$  viene chiamato **fase** e dipende esclusivamente dalle condizioni iniziali del problema.

Un'onda del tipo  $\alpha(x, t) = \frac{2\pi}{\lambda} (x \mp vt)$  è detta **armonica**. Questa, in teoria, dovrebbe continuare in un grafico all'infinito sia per il tempo che per lo spazio, ovvero  $-\infty \leq t \leq +\infty$  e  $-\infty \leq x \leq +\infty$ ; questo caso è quanto mai improbabile, e quindi si studia una porzione d'onda limitata, che viene chiamata treno d'onda sinusoidale. Una caratteristica delle onde armoniche è che questa seguono il principio di sovrapposizione e il teorema di Fourier.

### 15.2.1 Principio di sovrapposizione

Il principio di sovrapposizione afferma che se, in un mezzo elastico, si propagano più onde di funzione  $\alpha_1, \alpha_2 \dots$  l'onda risultante è descritta da:

$$\alpha(x, t) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots$$

Ovvero le singole componenti si sommano solo se la perturbazione risultante non porta il mezzo a lavorare oltre il limite di elasticità. Possiamo dimostrare come la risultante soddisfi l'equazione differenziale delle onde; facciamo il caso di due contributi, valido come esempio generale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial^2 (\alpha_1 + \alpha_2)}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (\alpha_1 + \alpha_2)}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Nel secondo passaggio abbiamo sommato membro a membro. Così come la somma di due contributi è una funzione d'onda, lo stesso vale quando i contributi sono in numero maggiore, sempre rispettando il limite di elasticità del mezzo.

### Teorema di Fourier

Un'onda periodica di periodo  $T$  e lunghezza d'onda  $\lambda$ , quindi avente  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  e  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , che sia di forma qualunque, e sia  $\alpha(kx \mp \omega t)$  la sua funzione, sotto opportune ipotesi può essere scritta come:

$$\alpha(kx \mp \omega t) = A_0 + A_1 \cos(kx \mp \omega t) + B_1 \sin(kx \mp \omega t) + \\ + A_2 \cos(2(kx \mp \omega t)) + B_2 \sin(2(kx \mp \omega t)) + \dots$$

I coefficienti  $A_0, A_1, A_2 \dots B_1, B_2 \dots$  decrescono col crescere del numero d'onda  $k$ . La scrittura fornita dal teorema è anche chiamata **serie di Fourier** e lo studio di un'onda attraverso lo sviluppo di Fourier è detto **analisi armonica**. Non forniremo qui la dimostrazione del teorema.

## 15.3 Onde longitudinali

Come già detto, le onde longitudinali si propagano nella stessa direzione di propagazione dell'onda. Prendiamo allora, come esempio, una sbarra di materiale elastico, di sezione costante  $S$ ; lungo questa si propaga una perturbazione  $\alpha(x, t)$ . Un elemento di sbarra, di lunghezza  $dx$ , viene sottoposto alla **forza di richiamo**  $d\vec{F}$  quando è investito dalla perturbazione. Per il **secondo principio della dinamica**:

$$dF = dm a = \rho S dx a = \rho S dx \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$$

Abbiamo scritto la massa come  $dm = \rho dV$ , considerando che il volume dell'elemento vale  $dV = S dx$ . L'accelerazione a cui è sottoposto l'elemento è esattamente  $a = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$ . La forza di richiamo è espressa dalla **legge di Hooke** per materiali metallici sottoposti a compressione, con  $E$  **modulo di Young**:

$$F(x) = -ES \frac{dh}{h} = -ES \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

La compressione si propaga lungo tutto il mezzo; scegliamo un asse orizzontale e poniamo l'elemento considerato tra le posizioni  $x$  e  $x + dx$ ; la forza agisce in questo intervallo in versi opposti, quindi:

$$dF = F(x) - F(x + dx) = -\frac{\partial F}{\partial x} dx$$

In questa sostituiamo l'espressione ricavata dalla legge di Hooke, per poi ugualiarla a quella trovata sfruttando il secondo principio della dinamica:

$$dF = -\frac{\partial F}{\partial x} dx = ES \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} dx \\ ES \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} dx = \rho S dx \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$$

Che riconosciamo essere la funzione di un'onda, che ha velocità pari a  $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ . Come possiamo notare, la velocità dell'onda dipende solo da caratteristiche fisiche del mezzo e non dalla perturbazione.

### 15.3.1 Il suono come onda longitudinale

Lo studio di una compressione che si propaga in un mezzo è strettamente legato al caso del suono, il quale, infatti, trattasi di una compressione delle particelle dell'aria che si propaga nello spazio.

Trattiamo quindi il caso di un mezzo elastico omogeneo che occupi tutto lo spazio uniformemente. Chiamato  $\frac{1}{k}$  il coefficiente di compressibilità volumica del mezzo, studiamo come varia la pressione dell'aria. Dalla legge di Hooke  $dF = -ES \frac{dh}{h}$  sappiamo che questa è la forza di richiamo, che genera quindi una pressione sulle superfici dello spazio:

$$\begin{aligned} dP &= \frac{dF}{S} = -\frac{ES}{S} \frac{Sdh}{Sh} \\ dP &= -E \frac{dV}{V} \\ \frac{dV}{V} &= -\frac{1}{k} dP \end{aligned}$$

Dove si è considerato  $E = k$ : il coefficiente di elasticità coincide con il coefficiente di compressibilità. Attraverso uno sviluppo identico a quello fatto per un mezzo elastico, si può giungere a ricavare la velocità dell'onda, pari a

$$v = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$$

Il caso interessante da considerare è quello dei gas. Quando un oggetto vibra, si presentano locali variazioni di pressione  $dP$  corrispondenti a locali variazioni di densità. Dalle leggi della termodinamica, sappiamo valere nei gas la relazione:

$$PV^\gamma = \text{cost}$$

Dove  $\gamma$  è una costante dei gas, che vale:

$$\begin{cases} \gamma = \frac{5}{3} \text{ gas monoatomico} \\ \gamma = \frac{7}{5} \text{ gas biatomico} \end{cases}$$

Differenziando la relazione tra pressione e volume, otteniamo:

$$\begin{aligned} P\gamma V^{\gamma-1} dV + V dP &= 0 \\ P\gamma dV + V dP &= 0 \\ \frac{dV}{V} &= -\frac{1}{\gamma P} dP \end{aligned}$$

In questi casi, il coefficiente di compressibilità volumica vale  $k = \gamma P$ . La velocità di propagazione di un'onda elastica nei gas, quindi, vale:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

A volte può essere utile scriverla in funzione della temperatura e del peso molecolare del gas presente; sfruttando quindi l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$\frac{m}{M}RT = PV \Rightarrow \frac{RT}{M} = P \frac{V}{m} = \frac{P}{\rho}$$

Possiamo esprimere la **velocità** come:

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$$

Dove  $R$  è la **costante universale dei gas**,  $T$  la temperatura e  $M$  il peso molecolare del gas.

## 15.4 Onde trasversali

Nelle onde trasversali il moto delle particelle è ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda. Immaginiamo una corda tesa sulla quale imprimiamo una perturbazione: essa inizierà a oscillare. La velocità di propagazione dell'onda, intuitivamente, aumenta all'aumentare della tensione del filo, che rappresenta la forza di richiamo elastica.

Consideriamo una corda omogenea, di tensione  $\vec{\tau}$  e densità lineare  $\mu = \frac{dm}{dx}$ . La massa sarà quindi  $dm = \mu dx$ , scelto un asse orizzontale parallelo alla corda a riposo. Studiamo un tratto compreso tra  $x$  e  $x + dx$  sottoposto alla perturbazione, quindi dislocato di una quantità  $y = \alpha(x, t)$  dalla posizione di riposo. La tensione del filo può essere schematizzata come  $\vec{\tau}(x)$  e  $\vec{\tau}(x + dx)$ ; in modulo le due tensioni sono uguali, ma cambiano direzione e verso:

$$\vec{f} = m\vec{a} \Rightarrow \tau \sin(\theta + d\theta) - \tau \sin\theta = dma = \mu dx \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$$

Gli angoli che vengono a formarsi, però, sono sempre molto piccoli se la tensione è forte; quindi possiamo approssimare a:

$$\begin{aligned} \tau(\theta + d\theta) - \tau\theta &= \mu \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} dx \\ \tau d\theta &= \mu \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} dx \end{aligned}$$

L'angolo  $\theta$  coincide con la pendenza della corda, ovvero  $\theta \approx \tan\theta = \frac{\partial \alpha}{\partial x}$ ; per ottenere l'espressione di  $d\theta$ , deriviamo quella appena trovata rispetto al tempo:

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} dx = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} dx$$

Lo sostituiamo nell'espressione trovata prima, ottenendo la funzione dell'onda:

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} dx &= \mu \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} dx \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} &= \left( \frac{\mu}{\tau} \right) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Da cui ricaviamo che la velocità di propagazione dell'onda è  $\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$  che, come nei casi precedenti, dipende ancora una volta solo dalle caratteristiche del mezzo.

## 15.5 Energia e intensità d'onda

In questo modulo ci soffermeremo più attentamente sulle questioni energetiche legate alla propagazione di un'onda; in particolare, cercheremo di calcolare in maniera esplicita il valore dell'intensità dell'onda.

Quando un'onda si propaga in un mezzo, le particelle oscillano acquistando energia cinetica e potenziale. Ogni elemento del mezzo può essere ipotizzato come un oscillatore armonico forzato a oscillare attorno a una posizione fissa; ogni elemento si muove quindi seguendo la legge:

$$\alpha(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

Abbiamo già trattato l'energia di un oscillatore armonico; essa è data da:

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

Sapendo che  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , possiamo esplicitare  $k = \omega^2 m$ :

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

Prendiamo, allora, per esempio una sbarra di materiale elastico molto lunga. Sollecitata una perturbazione, questa si propaga lungo il mezzo, di cui ogni parte acquista energia, che viene fornita dalla sorgente fino ad arrivare al fronte del treno d'onda. Si definisce **intensità dell'onda** l'energia che fluisce nell'unità di tempo attraverso la superficie unitaria perpendicolare alla propagazione dell'onda, ovvero:

$$I = \frac{dE}{dSdt}$$

L'unità di misura nel SI è il  $W/m^2$  (watt al metro quadro).

Sappiamo che l'onda possiede una velocità  $v$ ;  $dE$  può essere anche espressa come l'energia contenuta in un volumetto di base  $S$  e altezza  $vdt$  quando questo viene investito dall'onda, quindi definita  $w$  l'energia contenuta nel volumetto, avremo:

$$dE = wdSvdt$$

Sostituiamo nella formula dell'intensità, ottenendo:

$$I = \frac{dE}{dSdt} = \frac{wdSvdt}{dSdt} = wv$$

Riprendiamo adesso la formula dell'energia di un oscillatore armonico; dividendola per il volume otterremo l'espressione di  $w$  in funzione della densità del mezzo e dei parametri dell'onda; la sostituiamo infine nella formula dell'intensità per ricavarne l'espressione finale.

$$\begin{aligned} dE &= \frac{1}{2}dm\omega^2 A^2 \\ \frac{dE}{dV} &= w = \frac{1}{2} \frac{dm}{dV} \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \\ \Rightarrow I &= v w = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v \end{aligned}$$

Questo risultato è notevole: l'intensità dell'onda è direttamente proporzionale ai quadrati dell'ampiezza e della pulsazione dell'onda. L'utilità dell'intensità è quella di poter calcolare le soglie di udibilità del suono. L'orecchio umano, infatti, riesce a percepire suoni superiori a determinate intensità; per esempio, la soglia minima è:

$$I_{soglia} = 3 \cdot 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \text{ per } \nu = 1000 \text{ Hz}$$

(Notiamo come la soglia vari a seconda della frequenza dell'onda). Tuttavia, si è deciso di introdurre la scala in decibel: fissata un'intensità di riferimento pari a  $I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ , si definisce intensità in decibel:

$$I_{db} = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{I}{I_0} \right)$$

Quindi la soglia sopra riportata, in decibel, è pari a  $I = 4.77 \text{ db}$

Facciamo un'ultima considerazione sull'intensità di un'onda. Soffermiamoci sul caso di una sorgente puntiforme  $S$  che abbia potenza  $W$  costante; prendiamo due sfere concentriche  $C_1$  e  $C_2$  centrate in  $S$ , di raggio  $r_1$  e  $r_2$ , le quali vengono attraversate da una certa quantità di  $W$ , che può essere definita come il prodotto tra le intensità dell'onda ai due raggi di distanza e le due superfici incontrate, ovvero:

$$W = 4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2$$

Da questa espressione ricaviamo che  $I_1 = \frac{W}{4\pi r_1^2}$  e  $I_2 = \frac{W}{4\pi r_2^2}$ ; questo risultato ci dice che l'intensità diminuisce in maniera inversamente proporzionale al quadrato della distanza dalla sorgente. Però noi sappiamo anche che l'intensità è direttamente proporzionale all'ampiezza al quadrato. Possiamo infine affermare che, in un'onda elastica, si ha:

$$A \propto \frac{1}{r}$$

## L'interferenza e le onde stazionarie

### 16.1 Interferenza

In questo modulo studieremo cosa accade in un mezzo se si propagano più onde contemporaneamente.

Supponiamo che in una regione di spazio si propagino due onde di uguale lunghezza d'onda e sfasate tra loro di un fattore  $\delta$ ; queste onde le chiameremo **coerenti** e, ipotizzando abbiano la stessa ampiezza, possiamo esprimerle come:

$$\begin{aligned}\alpha_1(x, t) &= A \sin(kx - \omega t) \\ \alpha_2(x, t) &= A \sin(kx - \omega t - \delta)\end{aligned}$$

Vedremo come il risultato delle due onde non sia intuitivo; si è portati a dire che l'ampiezza della risultante sia la somma delle due, e invece vedremo come anche essa non sia uniforme nello spazio. Innanzitutto, le due onde hanno la stessa intensità pari a:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} A^2 \rho \omega^2 v$$

Per il **principio di sovrapposizione**, possiamo scrivere il fenomeno risultante come:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx - \omega t - \delta)$$

Scritta così, non è proprio il massimo, sfruttando le **leggi di prostaferesi**, ovvero  $\sin a + \sin b = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$ , possiamo scrivere la risultante come:

$$\alpha(x, t) = 2A \cos\left(\frac{kx - \omega t - kx + \omega t + \delta}{2}\right) \sin\left(\frac{kx - \omega t + kx - \omega t - \delta}{2}\right)$$

Svolgendo i calcoli, otteniamo la funzione dell'onda risultante:

$$\alpha(x, t) = 2A \cos\frac{\delta}{2} \sin\left(kx - \omega t - \frac{\delta}{2}\right)$$

Osserviamo che anche la risultante ha una natura ondulatoria. La lunghezza d'onda è pari a quella delle onde generatrici, ma l'ampiezza  $\left|2A \cos\frac{\delta}{2}\right|$  non è la somma delle ampiezze precedenti, bensì dipende da  $\delta$ . Avremo allora

- se  $\cos \frac{\delta}{2} = \pm 1$ , interferenza costruttiva
- se  $\cos \frac{\delta}{2} = 0$ , interferenza distruttiva

Ricaviamoci adesso l'intensità dell'onda risultante, ovvero:

$$I_r = \frac{1}{2} \rho \omega^2 v A^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 v \left( 4A^2 \cos^2 \frac{\delta}{2} \right) = 4I \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

Come l'ampiezza, anche l'interferenza dipende da  $\delta$ ; come prima, si hanno **interferenza costruttive o distruttive**.

Come possiamo esprimere lo sfasamento  $\delta$ ? Questo si può fare sia temporalmente che spazialmente. Consideriamo l'istante  $t = 0$ ; le due onde si esprimono:

$$\begin{aligned} \alpha_1(x, 0) &= A \sin kx \\ \alpha_2(x, 0) &= A \sin(kx - \delta) = A \sin \left[ k \left( x - \frac{\delta}{k} \right) \right] \end{aligned}$$

Le due onde hanno la stessa ampiezza, stessa lunghezza d'onda ma sono sfasate spazialmente. Allora possiamo ragionare in termini di spazio, quindi:

- se  $\frac{\delta}{k} = 0, 2\pi, 4\pi \dots$  le ampiezze si sommano, interferenza costruttiva
- se  $\frac{\delta}{k} = \pi, 3\pi, 5\pi \dots$  le ampiezze si sottraggono, interferenza distruttiva

Oltre allo sfasamento spaziale, può esserci il caso del ritardo temporale; scelta una posizione  $x = 0$ , le due onde saranno:

$$\begin{aligned} \alpha_1(0, t) &= -A \sin \omega t \\ \alpha_2(0, t) &= -A \sin \omega \left( t + \frac{\delta}{\omega} \right) \end{aligned}$$

Le due onde sono ritardate di un tempo  $\tau = \frac{\delta}{\omega}$ . Questo vuol dire che le due onde sono coerenti e generate da due punti diversi dello spazio  $S_1$  e  $S_2$ , e giungono con tempi diversi in due punti  $P_1$  e  $P_2$ . Questo genera un fenomeno di interferenza: in alcune regioni dello spazio si ha un'interferenza costruttiva, in altre distruttiva. La conservazione dell'energia è mantenuta, solo che la densità di energia nello spazio non è più costante, ma varia da regione a regione.

### 16.1.1 Battimenti

Anche il fenomeno dei battimenti rientra nelle interferenze; questi si hanno quando i numeri d'onda delle due onde sono diversi, ma di una quantità molto piccola, ovvero:

$$\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \approx 10^{-2}$$

Possiamo scrivere le due onde come sappiamo fare e ricavarne la risultante sfruttando ancora una volta prostaferesi:

$$\begin{aligned} \alpha_1(x, t) &= A \sin(k_1 x - \omega_1 t) \\ \alpha_2(x, t) &= A \sin(k_2 x - \omega_2 t) \end{aligned}$$

$$\alpha(x, t) = 2A \cos \left[ \left( \frac{k_1 - k_2}{2} \right) x - \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t \right] \sin \left[ \left( \frac{k_1 + k_2}{2} \right) x - \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t \right]$$

Se sono soddisfatte le ipotesi del problema, ovvero che i numeri d'onda differiscano di poco, possiamo allora approssimare:

$$\omega_1 \approx \omega_2 \approx \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega$$

$$k_1 \approx k_2 \approx \frac{k_1 + k_2}{2} = k$$

Quindi scriviamo l'onda risultante come:

$$\alpha(x, t) = 2A \cos \left[ \left( \frac{k_1 - k_2}{2} \right) x - \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t \right] \sin(kx - \omega t)$$

$$\alpha(x, t) = B(x, t) \sin(kx - \omega t)$$

L'onda  $B(x, t)$  ha ampiezza modulata e velocità:

$$v_B = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega_1 \omega_2}{k_1 - k_2}$$

Ricordando che  $\omega_1 = k_1 v$  e  $\omega_2 = k_2 v$ , allora otteniamo che:

$$v_B = \frac{k_1 v - k_2 v}{k_1 - k_2} = v$$

In conclusione, nel fenomeno dei battimenti, l'onda risultante è il prodotto tra un'onda modulata e un'onda modulante, con la stessa velocità; sentiremo quindi un suono che scompare periodicamente.

## 16.2 Onde stazionarie

A differenza dei tipi di onde finora studiate, le onde stazionarie non si propagano nello spazio. Queste nascono dalla sovrapposizione di onde aventi stessa frequenza, stessa lunghezza d'onda e stessa ampiezza, ma si propagano in direzioni opposte. Le due onde hanno, genericamente, funzione:

$$\alpha_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

$$\alpha_2(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$$

L'onda risultante ha funzione quindi (utilizzando le espressioni di prostaferesi):

$$\alpha(x, t) = 2A \cos \omega t \sin kx$$

L'onda, quindi, non si propaga, ma rimane in una porzione limitata dello spazio. Un punto di generica coordinate  $x$  oscilla di moto armonico con pulsazione  $\omega$  e ampiezza  $2A \sin kx$ . Vi saranno anche punti fermi che non oscillano, quelli per i quali  $\sin kx = 0$ , ovvero quando:

$$kx = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = n \frac{\lambda}{2}$$

Con  $n$  numero intero. Questi punti si troveranno, quindi, a multipli interi di metà lunghezza d'onda, e vengono chiamati nodi dell'onda stazionaria. Così come questi punti non oscillano, altri punti oscilleranno di ampiezza massima; per questi vale  $\sin kx = 1$ , quindi:

$$kx = \frac{2n+1}{2}\pi \Rightarrow x = \frac{(2n+1)\frac{\pi}{2}}{\frac{2\pi}{\lambda}} = n\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$$

Questi punti vengono invece chiamata **ventri dell'onda stazionaria**.

In un'onda stazionaria, quindi, ogni punto oscilla con pulsazione  $\omega = kv = \frac{2\pi v}{\lambda}$ , e avranno frequenza pari a  $nu = \frac{v}{\lambda}$ .

Un esempio classico di onda stazionaria è una corda vibrante, i cui estremi sono fissati, come le corde di uno strumento musicale; la lunghezza  $L$  della corda sarà tale che  $L = n\frac{\lambda}{2}$ , ovvero conterrà un numero intero di mezze lunghezze d'onda. Quando è presente un solo ventre, avremo che  $L = \frac{\lambda}{2}$ , e la corda si trova alla sua armonica fondamentale; per  $n > 2$ , si dice che la corda si trova alle armoniche superiori.

Quando una corda vibra, il contributo maggiore alla vibrazione è dato dalla sua **armonica fondamentale**, mentre le **armoniche superiori** contribuiscono in minor modo. Il mescolamento dei vari modi di vibrazione, chiamati **modi normali**, definisce il **timbro** di uno strumento musicale.

Come abbiamo visto, la lunghezza d'onda di un'onda stazionaria è determinata da vincoli geometrici. La frequenza del suono generato da una corda oscillante, tuttavia, dipende dalla velocità di propagazione dell'onda che, come abbiamo visto meglio trattando le onde trasversali, vale

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

Da cui deriva che la frequenza del suono generato da una corda vibrante è:

$$\nu = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

Dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda dell'onda, mentre  $\tau$  e  $\mu$  sono caratteristiche fisiche della corda vibrante.

PARTE VI

# **Formulari**



## Formulario di meccanica del punto materiale

### A.1 Cinematica

#### A.1.1 Moto rettilineo

$$\begin{aligned} a(t) &= \text{cost} \\ v(t) &= v_0 + at \\ s(t) &= s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \end{aligned}$$

#### A.1.2 Moto circolare

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{r} \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \\ a_c &= \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \end{aligned}$$

#### A.1.3 Moto parabolico

$$\begin{aligned} x(t) &= (v_0 \cos \theta_0)t \\ y(t) &= (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \\ x_{\text{gittata}} &= \sin(2\theta_0) \frac{v_0^2}{g} \\ y(x) &= \tan \theta_0 x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2 \\ y_{\text{quota max}} &= \frac{3}{2} \sin^2 \theta_0 \frac{v_0^2}{g} \end{aligned}$$

#### A.1.4 Trasformazioni di Galileo

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = t \\ x' = x - v_{0x}t \\ y' = y - v_{0y}t \\ z' = z - v_{0z}t \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v'_x = v_x - v_{0x} \\ v'_y = v_y - v_{0y} \\ v'_z = v_z - v_{0z} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{array} \right.$$

## A.2 Dinamica

$$\vec{f}_{tot} = \sum_i^n \vec{f}_i = ma$$

## A.2.1 Piano inclinato

$$\begin{aligned} a &= g \sin \theta \\ v &= (g \sin \theta)t + v_0 \\ s &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}(g \sin \theta)t^2 \end{aligned} \quad L = \frac{h}{\sin \theta} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_0 = 0 \\ s_0 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2h}{g \sin^2 \theta}} \\ v &= g \sin \theta \sqrt{\frac{2h}{g \sin^2 \theta}} \end{aligned}$$

## A.2.2 Quantità di moto e impulso

$$\vec{q} = m\vec{v}$$

$$\vec{f} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{q}}{dt}$$

$$\vec{I} = \int_{t_0}^t \vec{f} dt \quad \langle \vec{f} \rangle \Delta t = \Delta \vec{q}$$

## A.2.3 Momento della forza e momento angolare

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{f}$$

$$\vec{j} = \vec{r} \wedge \vec{q} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{j}}{dt}$$

## A.2.4 Pendolo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta(t)$$

$$\theta(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad T = \sqrt{\frac{l}{g}} 2\pi$$

## A.2.5 Attrito

$$F < \mu_s N \quad F = \mu_d N$$

## A.2.6 Forza elastica

$$f = -kx$$

## A.3 Energia e Lavoro

$$L = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad L = \Delta K$$

## A.4 Pendolo con lavoro

$$v_{max}^2 = 2lg(1 - \cos \theta_0)$$

## A.4.1 Moto di una molla

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$v_{max} = \Delta \sqrt{\frac{k}{m}} = A\omega$$

## A.4.2 Energia potenziale

$$U_{peso} = mgh \quad U_{molla} = \frac{1}{2}kx^2 \quad U_{grav} = -G\frac{mM}{r}$$

$$\vec{f} = -\nabla U \quad \left\{ \begin{array}{l} f_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ f_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \\ f_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \end{array} \right.$$

## A.5 Oscillatori armonici

## A.5.1 Smorzato

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{B}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\gamma = \frac{B}{2m} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t)$$

$$\left| \frac{\Delta E}{E} \right| = 2\gamma T$$

## A.5.2 Forzato

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A \sin(\Omega t)$$

$$x(t) = x_0 \sin(\Omega t - \delta)$$

$$\begin{cases} x_0 = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma\Omega^2}} \\ \delta = \arctan\left(\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) \end{cases}$$

## Formulario di meccanica dei sistemi e del corpo rigido

### B.1 Sistemi

Centro di massa:

$$\vec{r}_{CM} = \sum_i \frac{m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$\vec{v}_{CM} = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{M}$$

$$\vec{a}_{CM} = \sum_i \frac{m_i \vec{a}_i}{M}$$

Prima equazione cardinale:

$$\vec{F}_{CM}^{tot} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

### B.2 Problema dei due corpi

Massa ridotta:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

### B.3 Teorema di Koenig

$$K = \frac{1}{2} M_{tot} v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Il secondo fattore è l'energia cinetica del sistema rispetto al centro di massa.

### B.4 Seconda equazione cardinale

$$\vec{\tau}^{ext} = \frac{d\vec{J}}{dt}$$

## B.4.1 Coppia di forze

$$C = bf$$

Dove  $b$  è la distanza tra le due forze applicate e  $f$  il modulo di una delle due (si considerano forze che producono momento concorde e di modulo uguale)

## B.4.2 Rispetto a un polo qualsiasi

Dato un polo  $\Omega \neq$  centro di massa:

$$\vec{\tau}_{\Omega}^{ext} = \frac{d\vec{J}_{\Omega}}{dt} + \vec{v}_{\Omega} \wedge M\vec{v}_{CM}$$

## B.5 Momenti di inerzia

## B.5.1 Rispetto al centro di massa

Anello omogeneo o cilindro cavo di massa  $M$  e raggio  $R$  (valido per tutti i prossimi casi):

$$I_c = MR^2$$

Disco omogeneo o cilindro pieno omogeneo:

$$I_c = \frac{MR^2}{2}$$

Sbarretta omogenea di lunghezza  $l$ :

$$I_c = \frac{Ml^2}{12}$$

Disco di raggio  $r_2$  con buco di raggio  $r_1$  (dove si considera  $r_1 + r_2 = r$ , ovvero il raggio totale del disco se fosse pieno):

$$I_c = \frac{M}{2}(r_1^2 + r_2^2)$$

Sfera omogenea:

$$I_c = \frac{2}{5}MR^2$$

## B.5.2 Teorema di Huygens-Steiner

$$I_a = I_c + Md^2$$

Dove  $d$  è la distanza tra l'asse  $c$  passante per il centro di massa e l'asse  $a$  a generico rispetto al quale si calcola il momento d'inerzia.

## B.6 Corpi rotanti

Abbiamo:

$$J = I\omega$$

Vettorialmente:

$$\vec{J} = I\vec{\omega}$$

Energia cinetica di un corpo ruotante:

$$K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

## B.7 Pendolo fisico

Equazione del moto:

$$\ddot{\theta} + \frac{lMg}{2I}\theta = 0$$

Dove

$$\omega = \sqrt{\frac{lMg}{2I}}$$

Caso particolare: sbarretta omogenea ruotante attorno a un estremo:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$$

## B.8 Urti

Urto elastico: si conservano quantità di moto e energia cinetica:

$$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = \text{cost} \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \text{cost} \end{cases}$$

Se l'urto è anelastico si conserva solo la quantità di moto, mentre l'energia cinetica viene ridotta di un fattore percentuale.



## Formulario di meccanica dei fluidi

### C.1 Statica dei fluidi

Forze di superficie agenti su un volumetto:

$$d\vec{F}^{(s)} = d\vec{F}_n^{(s)} + d\vec{F}_t^{(s)}$$

Pressione:

$$dP = \frac{dF_n^{(s)}}{dS} \Rightarrow \text{se la forza è uniforme } P = \frac{F_n}{S}$$

#### C.1.1 Legge di Stevino

$$P_B = P_A - \rho gh$$

Con  $z_B > z_A$  e  $h = z_B - z_A$

#### C.1.2 Legge di Archimede

Spinta di Archimede:

$$R = (\rho_{fluido} - \rho_{corpo})Vg$$

Proporzionalità tra volume immerso e densità:

$$\frac{V_i}{V_{tot}} = \frac{\rho_{corpo}}{\rho_{fluido}}$$

#### C.1.3 Legge di Pascal

Impressa una variazione di pressione in un punto  $\Delta P_A$ :

$$P'_B = P_B + \Delta P_A$$

## C.2 Dinamica dei fluidi

### C.2.1 Portata

$$q = \frac{dV}{dt} = Sv$$

Equazione di continuità:

$$S_1v_1 = S_2v_2$$

### C.2.2 Legge di Bernoulli

$$P + \rho gz + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{cost}$$

Anche scrivibile come:

$$z + \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \text{cost}$$

### C.2.3 Effetto Venturi

Fluido in moto stazionario che passa attraverso due sezioni  $A_1 > A_2$ ; avremo che:

$$v_1 < v_2$$

$$P_1 > P_2$$

## Formulario di onde meccaniche elastiche

### D.1 Onde meccaniche

Funzione generale di un'onda meccanica:

$$\alpha(x, t)$$

Equazione differenziali alle coordinate parziali che ogni funzione d'onda soddisfa:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

### D.2 Onde sinusoidali

Funzione generale di un'onda sinusoidale:

$$\alpha(x, t) = A \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x \mp vt) \right]$$

Lunghezza d'onda:  $\lambda = vT$

Altri modi per scrivere le onde sinusoidali:

$$\alpha(x, t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\alpha(x, t) = A \sin(kx \mp \omega t + \varphi)$$

Con numero d'onda  $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ , pulsazione  $\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{2\pi}{T}$

#### D.2.1 Principio di sovrapposizione

La risultante di più onde che si propagano nello stesso mezzo è:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots$$

### D.3 Onde longitudinali

Equazione differenziale delle onde longitudinali:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$$

Con  $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

In un mezzo omogeneo che riempie uniformemente lo spazio (aria o gas):

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{k} dP$$

Con velocità:  $v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$ , oppure, in funzione dei parametri del gas:  $v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$

### D.4 Onde trasversali

Equazione differenziale delle onde trasversali:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = \frac{\mu}{\tau} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$$

Con velocità:  $v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$

### D.5 Intensità e energia

L'intensità definita come:

$$I = \frac{dE}{dS dt}$$

Esprimibile in funzione dei parametri dell'onda

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$$

Intensità di riferimento per la scala in decibel  $I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ; intensità in decibel:

$$I_{db} = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{I}{I_0} \right)$$

Proporzionalità tra ampiezza dell'onda e distanza:  $A \propto \frac{1}{r}$

### D.6 Interferenza

Risultante di due onde che si propagano nello stesso mezzo con stessa lunghezza d'onda, stessa pulsazione e stessa ampiezza:

$$\alpha(x, t) = 2A \cos \frac{\delta}{2} \sin \left( kx - \omega t - \frac{\delta}{2} \right)$$

Intensità dell'onda risultante:

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 v 4A^2 \cos^2 \frac{\delta}{2} = 4I \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

## D.6.1 Battimenti

Risultante di un battimento:

$$\alpha(x, t) = 2A \cos \left[ \left( \frac{k_1 - k_2}{2} \right) x - \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t \right] \sin(kx - \omega t) = B(x, t) \sin(kx - \omega t)$$

## D.7 Onde stazionarie

Espressione generale di un'onda stazionaria:

$$\alpha(x, t) = 2A \cos \omega t \sin kx$$

Posizione dei nodi:  $x_N = n\frac{\lambda}{2}$  e dei ventri:  $x_V = n\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$

Frequenza del suono generato da una corda vibrante:

$$\nu = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$



**Crediti**



---

## Fonti dei testi

### Meccanica del punto materiale

- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Cos%27%C3%A8\\_la\\_meccanica\\_newtoniana&oldid=442759](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Cos%27%C3%A8_la_meccanica_newtoniana&oldid=442759)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Cinematica\\_del\\_punto&oldid=442760](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Cinematica_del_punto&oldid=442760)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Moto\\_rettilineo&oldid=442762](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Moto_rettilineo&oldid=442762)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Moto\\_circolare&oldid=443972](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Moto_circolare&oldid=443972)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Moto\\_armonico&oldid=443973](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Moto_armonico&oldid=443973)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Moto\\_parabolico\\_dei\\_corpi&oldid=442771](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Moto_parabolico_dei_corpi&oldid=442771)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Primo\\_e\\_secondo\\_principio\\_della\\_dinamica&oldid=443974](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Primo_e_secondo_principio_della_dinamica&oldid=443974)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Forza\\_peso\\_e\\_forze\\_vincolari&oldid=442774](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Forza_peso_e_forze_vincolari&oldid=442774)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Terzo\\_principio\\_della\\_dinamica&oldid=442775](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Terzo_principio_della_dinamica&oldid=442775)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Forza\\_d%27attrito\\_radente&oldid=442776](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Forza_d%27attrito_radente&oldid=442776)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Forza\\_d%27attrito\\_viscoso&oldid=442777](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Forza_d%27attrito_viscoso&oldid=442777)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Forza\\_elastica&oldid=442779](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Forza_elastica&oldid=442779)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Forza\\_centripeta&oldid=442780](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Forza_centripeta&oldid=442780)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Quantit%C3%A0\\_di\\_moto\\_e\\_impulso&oldid=442843](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Quantit%C3%A0_di_moto_e_impulso&oldid=442843)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Momento\\_angolare&oldid=442782](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Momento_angolare&oldid=442782)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Pendolo\\_semplice&oldid=442783](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Pendolo_semplice&oldid=442783)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Teorema\\_delle\\_velocit%C3%A0\\_relative&oldid=442789](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Teorema_delle_velocit%C3%A0_relative&oldid=442789)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Teorema\\_delle\\_accelerazioni\\_relative&oldid=442790](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Teorema_delle_accelerazioni_relative&oldid=442790)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Relativit%C3%A0\\_galileiana&oldid=442791](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Relativit%C3%A0_galileiana&oldid=442791)

- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Energia\\_cinetica\\_e\\_lavoro&oldid=443975](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Energia_cinetica_e_lavoro&oldid=443975)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Energia\\_del\\_pendolo&oldid=442795](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Energia_del_pendolo&oldid=442795)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Lavoro\\_della\\_forza\\_di\\_attrito,\\_della\\_forza\\_peso\\_e\\_della\\_forza\\_elastica&oldid=442841](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Lavoro_della_forza_di_attrito,_della_forza_peso_e_della_forza_elastica&oldid=442841)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Forze\\_conservative\\_ed\\_energia\\_potenziale&oldid=442799](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Forze_conservative_ed_energia_potenziale&oldid=442799)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Considerazioni\\_conclusive\\_sull'energia&oldid=442842](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Considerazioni_conclusive_sull'energia&oldid=442842)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Oscillatore\\_armonico&oldid=442801](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Oscillatore_armonico&oldid=442801)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Oscillatore\\_armonico\\_smorzato\\_e\\_forzato&oldid=442805](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Oscillatore_armonico_smorzato_e_forzato&oldid=442805)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Oscillatori\\_accoppiati&oldid=442803](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Oscillatori_accoppiati&oldid=442803)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_del\\_punto\\_materiale/Formulario&oldid=442804](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_del_punto_materiale/Formulario&oldid=442804)

## Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi

- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_sistemi\\_di\\_punti\\_e\\_corpi\\_rigidi/Sistemi\\_di\\_punti\\_e\\_corpo\\_rigido&oldid=442840](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Sistemi_di_punti_e_corpo_rigido&oldid=442840)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_sistemi\\_di\\_punti\\_e\\_corpi\\_rigidi/Centro\\_di\\_massa&oldid=442845](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Centro_di_massa&oldid=442845)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_sistemi\\_di\\_punti\\_e\\_corpi\\_rigidi/Conservazione\\_della\\_quantita\\_di\\_moto&oldid=442847](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Conservazione_della_quantita_di_moto&oldid=442847)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_sistemi\\_di\\_punti\\_e\\_corpi\\_rigidi/Sistema\\_di\\_riferimento\\_del\\_centro\\_di\\_massa&oldid=442848](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Sistema_di_riferimento_del_centro_di_massa&oldid=442848)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_sistemi\\_di\\_punti\\_e\\_corpi\\_rigidi/Mutua\\_interazione:\\_problema\\_dei\\_due\\_corpi&oldid=442849](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Mutua_interazione:_problema_dei_due_corpi&oldid=442849)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_sistemi\\_di\\_punti\\_e\\_corpi\\_rigidi/Teorema\\_di\\_K%C3%B6nig\\_per\\_l'energia\\_cinetica&oldid=442850](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Teorema_di_K%C3%B6nig_per_l'energia_cinetica&oldid=442850)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_sistemi\\_di\\_punti\\_e\\_corpi\\_rigidi/Sistemi\\_a\\_massa\\_variabile&oldid=442851](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Sistemi_a_massa_variabile&oldid=442851)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_sistemi\\_di\\_punti\\_e\\_corpi\\_rigidi/Moto\\_di\\_un\\_razzo&oldid=442852](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Moto_di_un_razzo&oldid=442852)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_sistemi\\_di\\_punti\\_e\\_corpi\\_rigidi/La\\_seconda\\_legge\\_cardinale&oldid=442853](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/La_seconda_legge_cardinale&oldid=442853)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_sistemi\\_di\\_punti\\_e\\_corpi\\_rigidi/Teorema\\_di\\_K%C3%B6nig\\_per\\_il\\_momento\\_angolare&oldid=442854](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Teorema_di_K%C3%B6nig_per_il_momento_angolare&oldid=442854)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_sistemi\\_di\\_punti\\_e\\_corpi\\_rigidi/Corpo\\_rigido\\_in\\_rotazione&oldid=442855](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Corpo_rigido_in_rotazione&oldid=442855)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_sistemi\\_di\\_punti\\_e\\_corpi\\_rigidi/Momento\\_d'inerzia&oldid=442857](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Momento_d'inerzia&oldid=442857)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_sistemi\\_di\\_punti\\_e\\_corpi\\_rigidi/Coppia\\_di\\_forze&oldid=442858](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Coppia_di_forze&oldid=442858)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_sistemi\\_di\\_punti\\_e\\_corpi\\_rigidi/Sistemi\\_di\\_forze\\_parallelle&oldid=442859](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Sistemi_di_forze_parallelle&oldid=442859)

- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_sistemi\\_di\\_punti\\_e\\_corpi\\_rigidi/Pendolo\\_fisico&oldid=442860](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Pendolo_fisico&oldid=442860)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_sistemi\\_di\\_punti\\_e\\_corpi\\_rigidi/Moto\\_di\\_una\\_trottola&oldid=442862](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Moto_di_una_trottola&oldid=442862)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_sistemi\\_di\\_punti\\_e\\_corpi\\_rigidi/Sistemi\\_in\\_equilibrio&oldid=442864](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Sistemi_in_equilibrio&oldid=442864)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_sistemi\\_di\\_punti\\_e\\_corpi\\_rigidi/Esempi\\_di\\_problemi\\_di\\_statica&oldid=442865](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Esempi_di_problemi_di_statica&oldid=442865)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_sistemi\\_di\\_punti\\_e\\_corpi\\_rigidi/Moto\\_di\\_rotolamento&oldid=442866](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Moto_di_rotolamento&oldid=442866)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_sistemi\\_di\\_punti\\_e\\_corpi\\_rigidi/Urti\\_elastici\\_e\\_anelastici&oldid=442867](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Urti_elastici_e_anelastici&oldid=442867)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_sistemi\\_di\\_punti\\_e\\_corpi\\_rigidi/Formulario&oldid=442606](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Formulario&oldid=442606)

## Gravitazione

- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Gravitazione/Legge\\_di\\_gravitazione&oldid=442733](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Gravitazione/Legge_di_gravitazione&oldid=442733)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Gravitazione/Campo\\_gravitazionale&oldid=442735](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Gravitazione/Campo_gravitazionale&oldid=442735)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Gravitazione/Teorema\\_di\\_Gauss\\_per\\_il\\_campo\\_gravitazionale&oldid=442736](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Gravitazione/Teorema_di_Gauss_per_il_campo_gravitazionale&oldid=442736)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Gravitazione/Energia\\_di\\_campo\\_gravitazionale&oldid=442737](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Gravitazione/Energia_di_campo_gravitazionale&oldid=442737)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Gravitazione/Moto\\_dei\\_corpi\\_celesti\\_e\\_leggi\\_di\\_Keplero&oldid=442740](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Gravitazione/Moto_dei_corpi_celesti_e_leggi_di_Keplero&oldid=442740)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Gravitazione/Considerazione\\_col\\_problema\\_dei\\_due\\_corpi&oldid=442741](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Gravitazione/Considerazione_col_problema_dei_due_corpi&oldid=442741)

## Meccanica dei fluidi

- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_fluidi/Cosa\\_sono\\_i\\_fluidi&oldid=442712](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_fluidi/Cosa_sono_i_fluidi&oldid=442712)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_fluidi/Fluidi\\_in\\_quiete&oldid=442713](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_fluidi/Fluidi_in_quiete&oldid=442713)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_fluidi/Legge\\_di\\_Stevino&oldid=442714](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_fluidi/Legge_di_Stevino&oldid=442714)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_fluidi/Legge\\_di\\_Archimede\\_e\\_esperienza\\_di\\_Torricelli&oldid=442715](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_fluidi/Legge_di_Archimede_e_esperienza_di_Torricelli&oldid=442715)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_fluidi/Conseguenze\\_della\\_legge\\_di\\_Stevino&oldid=442716](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_fluidi/Conseguenze_della_legge_di_Stevino&oldid=442716)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_fluidi/Fluidi\\_in\\_moto&oldid=442718](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_fluidi/Fluidi_in_moto&oldid=442718)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_fluidi/Legge\\_di\\_Bernoulli&oldid=442719](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_fluidi/Legge_di_Bernoulli&oldid=442719)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica\\_dei\\_fluidi/Formulario&oldid=442558](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_fluidi/Formulario&oldid=442558)

## Onde meccaniche elastiche

- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Onde\\_meccaniche\\_elastiche/Onde\\_meccaniche&oldid=442694](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Onde_meccaniche_elastiche/Onde_meccaniche&oldid=442694)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Onde\\_meccaniche\\_elastiche/Onde\\_sinusoidali&oldid=442693](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Onde_meccaniche_elastiche/Onde_sinusoidali&oldid=442693)

- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Onde\\_meccaniche\\_elastiche/Onde\\_longitudinali&oldid=442700](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Onde_meccaniche_elastiche/Onde_longitudinali&oldid=442700)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Onde\\_meccaniche\\_elastiche/Onde\\_trasversali&oldid=442701](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Onde_meccaniche_elastiche/Onde_trasversali&oldid=442701)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Onde\\_meccaniche\\_elastiche/Energia\\_e\\_intensit%C3%A0\\_d%27onda&oldid=442702](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Onde_meccaniche_elastiche/Energia_e_intensit%C3%A0_d%27onda&oldid=442702)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Onde\\_meccaniche\\_elastiche/Interferenza&oldid=442710](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Onde_meccaniche_elastiche/Interferenza&oldid=442710)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Onde\\_meccaniche\\_elastiche/Onde\\_stazionarie&oldid=442704](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Onde_meccaniche_elastiche/Onde_stazionarie&oldid=442704)
- [https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Onde\\_meccaniche\\_elastiche/Formulario&oldid=442706](https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Onde_meccaniche_elastiche/Formulario&oldid=442706)

---

## Fonti delle immagini

### Meccanica del punto materiale

- in copertina: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Curved\\_Spring.JPG](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Curved_Spring.JPG)
- pag. 3: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Curved\\_Spring.JPG](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Curved_Spring.JPG)
- pag. 15: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:%E6%96%9C%E6%96%B9%E6%8A%95%E5%B0%84%E3%81%AE%E9%81%8B%E5%8B%95.svg>
- pag. 20: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Piano\\_inclinato.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Piano_inclinato.png)
- pag. 29: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Simple\\_pendulum\\_generalized\\_coordinates.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Simple_pendulum_generalized_coordinates.svg)

### Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi

- in copertina: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bolitas\\_\(2186855706\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bolitas_(2186855706).jpg)

### Gravitazione

- in copertina: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:STS-130\\_EVA3\\_Nicholas\\_Patrick\\_1.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:STS-130_EVA3_Nicholas_Patrick_1.jpg)
- pag. 96: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cavendish\\_Torsion\\_Balance\\_Diagram.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cavendish_Torsion_Balance_Diagram.svg)

### Meccanica dei fluidi

- in copertina: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Iceberg\\_in\\_the\\_Arctic\\_with\\_its\\_underside\\_exposed.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Iceberg_in_the_Arctic_with_its_underside_exposed.jpg)
- pag. 119: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Prinzip\\_Torricelli.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Prinzip_Torricelli.jpg)
- pag. 124: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Streamlines\\_and\\_streamtube.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Streamlines_and_streamtube.svg)

### Onde meccaniche elastiche

- in copertina: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:2006-01-14\\_Surface\\_waves.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:2006-01-14_Surface_waves.jpg)