MECCANICA DEI FLUIDI

Meccanica newtoniana - 4

WIKIBOOKS

Libri liberi per un mondo aperto

Meccanica dei fluidi

Meccanica newtoniana, n. 4

it.wikibooks.org
2023

Questo testo proviene dal sito
https://it.wikibooks.org/wiki/Meccanica_dei_fluidi

La versione originale del testo si trovava su WikiToLearn. Una copia è disponibile su
https://web.archive.org/web/20200919045651/https:/it.wikitolearn.org/Corso:Elementi_di_meccanica_dei_fluidi

Autori principali:
Dan e altri utenti di WikiToLearn

Questo libro è aggiornato al
15 ottobre 2023

In copertina:
Parte superiore e inferiore di un iceberg. *Autore:* AWeith; *licenza:* CC BY 4.0; *fonte:*
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Iceberg_in_the_Arctic_with_its_underside_exposed.jpg

Indice

1

Statica dei fluidi

1.1 Cosa sono i fluidi

I fluidi sono sistemi di punti materiali di forma indefinita: assumono infatti la forma del recipiente che li contiene. Si dividono in:

- **gas**, i quali non hanno né forma, né volume definiti, bensì assumono le caratteristiche del recipiente;
- **liquidi**, i quali non hanno forma ma volume definito, e possono essere più o meno comprimibili.

A differenza dei sistemi rigidi, che sono solidi e indeformabili, i fluidi presentano caratteristiche diverse e numerose complicazioni nella descrizione del loro moto. Microscopicamente, un fluido è un **sistema discreto**, formato da numerose particelle che si muovono in moto relativo l'una rispetto alle altre. Tuttavia, possiamo schematizzarli come un **sistema continuo**, per rendere più facile il loro studio. A tal fine, tratteremo tutti i liquidi come incomprimibili, ovvero di volume fisso e costante nel tempo, e studieremo caso per caso il fluido prendendo in considerazione un volumetto dV cubico, il quale è abbastanza grande da poter essere trattato come un sistema continuo (quindi ha un numero elevato di particelle) ma sufficientemente piccolo per poter essere considerato **un infinitesimo**. Esso ci fornisce, quindi, una descrizione complessiva del fluido.

Su un volumetto dV agiscono due tipi di forze:

- **forze di superficie** $\vec{F}^{(s)}$, esercitate dal fluido circostante sulla superficie del volumetto;
- **forze di volume** $\vec{F}^{(v)}$, proporzionale al dV o alla dm del volumetto, che sono applicate nel centro di massa del volumetto.

Ogni forza di superficie può essere scomposta in due componenti, una perpendicolare e una parallela alla superficie, che chiameremo rispettivamente **sforzo normale** e **sforzo di taglio**:

$$d\vec{F}^{(s)} = d\vec{F}_n^{(s)} + d\vec{F}_t^{(s)}$$

$d\vec{F}_n^{(s)}$ è detta anche forza per unità di superficie o, semplicemente, **pressione**. Se la forza è uniforme su tutta la superficie, avremo che:

$$P = \frac{F_n}{S}$$

Nel sistema internazionale, l'unità di misura della pressione è il **pascal** (Pa), corrispondente a:

$$\frac{1\text{N}}{1\text{m}^2} = 1 \text{ Pa}$$

Lo sforzo di taglio $\frac{dF_n^{(s)}}{dS}$ è invece dovuto all'attrito del fluido con le pareti del recipiente o con il resto del fluido stesso; nel nostro studio, considereremo **fluidi non viscosi**, per cui non sarà presente lo sforzo di taglio. Qualora il fluido fosse viscoso, invece, lo sforzo di taglio, che si presenta in caso di moto del fluido, causerebbe lo spostamento di diversi strati di fluido e, in casi particolari, anche la creazione di vortici.

1.2 Fluidi in quiete

Un fluido si dice **in quiete** quando:

- non ci sono moti complessivi del fluido;
- una qualsiasi superficie del fluido ha lo stesso numero di particelle entranti e uscenti.

A proposito di questa ultima considerazione, è importante considerare che il fluido, anche se complessivamente e macroscopicamente è in quiete, presenta microscopicamente dei **moti non uniformi**: le particelle del fluido si muovono in maniera sparsa e disordinata in qualsiasi condizione del fluido.

Come già accennato nel modulo precedente, in un fluido statico lo sforzo di taglio è nullo. Se vi fosse, il fluido si muoverebbe a strati, e ciò non è coerente col caso che stiamo studiando. Per tale motivo, avremo che tutte le forze di superficie saranno forze di pressione, ovvero:

$$d\vec{F}^{(s)} = d\vec{F}_n^{(s)} = PdS$$

La pressione in un fluido statico è dovuta agli urti tra le particelle; considerata una qualsiasi superficie del fluido, per il **terzo principio della dinamica** (e per la condizione di fluido in quiete) avremo che le particelle entranti sono uguali in numero a quelle uscenti, quindi gli urti in un verso sono completamente bilanciati dagli urti nel verso opposto, causando cioè il fluido statico. La stessa considerazione può essere fatta per le pareti del contenitore, le quali esercitano sul fluido una pressione uguale e opposta a quella che esercita il fluido su di esse.

1.3 Legge di Stevino

Consideriamo un volumetto dV; esso avrà una massa infinitesima dm, che sarà uguale a:

$$dm = \rho dV$$

Dove ρ è la **densità del fluido**, che in questo caso considereremo uniforme. Sul volumetto agiranno quindi le seguenti forze:

$$d\vec{F}^{(s)} = PdS$$
$$d\vec{F}^{(v)} = \vec{g}dm = \vec{g}\rho dV$$

Infatti, le uniche forze di volume agenti sono le forze peso delle particelle, che quindi si sommano nella forza peso complessiva del volumetto, applicata al centro di massa, e la forza di superficie corrisponde alla pressione del fluido. Considero un sistema di riferimento cartesiano, dove sia l'asse z la quota, a tre assi esterno al fluido. Poiché esso è in quiete, avremo che:

$$\begin{aligned} \vec{F}^{\text{tot}} &= 0 \\ d\vec{F}^{(s)} + d\vec{F}^{(v)} &= 0 \end{aligned}$$

Consideriamo un volumetto cubico. Analizziamo le due facce perpendicolare all'asse y e le forze che agiscono su di esse. Le uniche forze agenti sono le forze di superficie, applicate al centro geometrico delle due superfici. I due centri avranno coordinate (x, y, z) e $(x, y + dy, z)$. Le due forze, dirette verso il centro del volumetto, saranno quindi:

$$\begin{aligned} d\vec{F}_1^s &= P(x, y, z)dS \\ d\vec{F}_2^s &= P(x, y + dy, z)dS \end{aligned}$$

Poiché la risultante delle forze deve essere nulla, avremo che $d\vec{F}_1^s + d\vec{F}_2^s = 0$, quindi (si ricorda che le forze hanno verso opposto):

$$P(x, y, z)dS - P(x, y + dy, z)dS = 0$$

Da cui $P(x, y, z) = P(x, y + dy, z)$, ovvero la pressione resta costante lungo l'asse delle y. Lo stesso ragionamento può essere fatto anche per l'asse delle x, da cui concludiamo che:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Che è un altro modo per dire che i punti con la stessa quota hanno la stessa pressione.

Cosa accade invece lungo l'asse z? In questo caso non agiscono solo le forze di superficie lungo le due facce, ma anche la forza di volume, corrispondente alla forza peso, è esercitata perpendicolarmente su di esse. Ricordando che $dS = dx\,dy$ e che $dV = dx\,dy\,dz$, avremo quindi che:

$$\begin{aligned} &P(x, y, z)dx\,dy - P(x, y, z + dz)dx\,dy - g\rho dx\,dy\,dz = 0 \\ &[P(x, y, z) - P(x, y, z + dz)] = g\rho dz \end{aligned}$$

Sviluppo in serie il termine $P(x, y, z+dz)$, che diventa $P(x, y, z)+\frac{\partial P}{\partial z}dz$, sostituisco nell'espressione precedente ottenendo:

$$-\frac{\partial P}{\partial z}dz = g\rho dz$$

Da cui la conclusione:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -g\rho$$

Ovvero la pressione sull'asse z non è costante. Consideriamo allora un fluido in quiete in un recipiente, e prendiamo due punti A e B a diversa quota, con $z_B > z_A$. Calcoliamo la differenza di pressione:

$$P_B - P_A = \int_A^B dP = \int_A^B \frac{\partial P}{\partial z} dz = -\int_A^B (g\rho) dz = -\rho g(z_B - z_A)$$

Chiamata $z_B - z_A = h$ la differenza di quota, possiamo riscrivere la precedente espressione come segue:

$$P_B = P_A - \rho g h$$

Questa è conosciuta anche come **legge di Stevino** e afferma che, in liquido in quiete, la pressione aumenta con l'aumentare della profondità.

1.4 Legge di Archimede e esperienza di Torricelli

1.4.1 Legge di Archimede

La legge di Archimede è una legge sperimentale antica, che viene attribuita al genio siracusano vissuto nel III secolo a.C. La legge, ricavata empiricamente, afferma che un corpo immerso in un fluido in quiete riceve una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del fluido spostato, applicata al baricentro del fluido spostato.

In parole semplici, ogni volta che inseriamo un corpo in un fluido in quiete, questo sposta una parte di quel fluido, la quale ha un proprio peso, e questo peso è pari alla forza che il fluido esercita sul corpo. Questa legge spiega anche perché molti materiali galleggiano se immersi in acqua. Vediamone la dimostrazione.

Consideriamo prima il fluido, in quiete, senza un corpo immerso, e prendiamo in analisi un volume ben definito V, che non sia un infinitesimo ma che abbia delle dimensioni proprie e apprezzabili anche macroscopicamente. Poiché il fluido è in quiete, tutte le forze di superficie esercitate sul volume sono forze di pressione, mentre la forza di volume è proprio la forza peso. Poiché il fluido è in quiete e la somma delle forze deve essere nulla, conoscendo la direzione della forza peso, possiamo infine affermare che la risultante delle forze di pressione $\vec{F}_A$ è diretta verso l'alto. Quindi, per la prima legge cardinale dei sistemi avremo che:

$$\vec{F}_A + \vec{F}_P = 0$$
$$|\vec{F}_A| = \rho_f g V$$

Se invece abbiamo un corpo immerso, di cui prendiamo un volume pari al volume di fluido prima analizzato, la forza di volume cambia, è pari infatti alla forza peso del corpo $P_c = \rho_c V g$. Però, la forza di superficie resta la stessa, perché, invece che il corpo materiale, è come se vi fosse ancora il volume d'acqua, ovvero $F_A = \rho_f V g$. Avremo quindi che la risultate delle forze

$$R = (\rho_f - \rho_c)Vg \qquad \begin{cases} \text{Se } \rho_f > \rho_c \text{ va verso l'alto e il corpo galleggia} \\ \text{Se } \rho_f < \rho_c \text{ va verso il basso e il corpo affonda} \end{cases}$$

Tutto dipende quindi dalla **densità del corpo**, non dal suo peso o volume: una piccola pallina di ferro affonderà comunque, mentre una grande tavola di legno galleggerà comunque. La spinta di Archimede è proprio la legge sfruttata per permettere alle enormi navi di galleggiare: poiché la loro densità complessiva è inferiore di quella dall'acqua, queste non affondano. Possiamo anche calcolare il filo del galleggiamento: quando un corpo galleggia, presenterà una parte di volume immersa, mentre il restante è fuori dall'acqua. Chiamato V_i il volume immerso, avremo che:

$$F_A = F_P \Rightarrow \rho_f V_i g = \rho_c V g \frac{V_i}{V} = \frac{\rho_c}{\rho_f} < 1$$

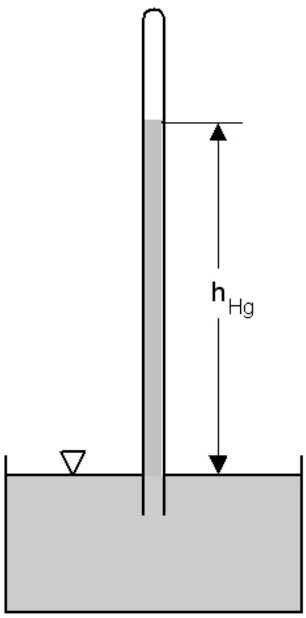
In questo caso, c'è equilibrio e il corpo galleggia. Possiamo fare un esempio veloce, ovvero quello dell'iceberg. Conosciuta la densità del ghiaccio e dell'acqua di mare, rispettivamente $\rho_a = 1.025 g/cm^3$, possiamo calcolare il volume immerso pari a:

$$\frac{V_i}{V} = \frac{\rho_g}{\rho_a} = 0.895$$

Ovvero circa il 90

1.4.2 Esperienza di Torricelli

Come è lecito pensare, anche l'**atmosfera terrestre** è un fluido, composto da diversi elementi chimici, distribuiti più o meno uniformemente. Anche questa esercita una pressione sulla superficie terrestre, e il primo che riuscì a calcolarla fu Torricelli, sfruttando quello che venne poi chiamato **barometro di Torricelli**.



Lo strumento in figura qui sopra ha lo scopo di misurare la pressione atmosferica, sfruttando la legge di Stevino. Esso è composto da un tubo di vetro verticale, in cui è inserito un fluido (mercurio, che a temperatura ambiente è liquido) che viene ribaltato su una vasca. Il fluido inizia a fuoriuscire e riversarsi in essa, per poi fermarsi e restare in equilibrio. Infatti, i punti con la stessa quota, a contatto con la superficie, sono soggetti alla pressione atmosferica. Il punto del fluido più in alto, rimasto nel tubo, ha invece pressione nulla: nello spazio tra fluido e tubo si è venuto a creare il vuoto, azzerando la pressione. In realtà, dire che vi è il vuoto in quel piccolo spazio è un'approssimazione, poiché vi sarà in realtà vapore saturo di mercurio. Considerando quel punto a pressione zero, possiamo calcolare la differenza di pressione fra il punto più alto e il punto più basso nel tubo che, ricordiamo, ha pressione pari a quella atmosferica. Avremo quindi:

$$P(z) = P_0 + \rho g h$$

Chiamiamo P_0 la pressione nel punto più basso, ovvero quella atmosferica. La pressione nel punto più alto, che chiameremo c è nulla, ovvero:

$$P_c = 0 = \rho g h + P_0$$

Da cui deriva immediatamente:

$$P_0 = \rho g h = 1.02 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

L'altezza misurata nel tubo è pari a 0.76 m 0.76 m, mentre la densità del mercurio è 13.6 g/cm3. La scelta del mercurio come liquido è dovuta proprio a questa sua caratteristica di essere un liquido molto denso: si sarebbe potuto utilizzare un qualsiasi altro fluido, anche l'acqua, ma avrebbe richiesto un tubo alto circa 10 000 metri, cosa assai scomoda da costruire all'epoca. Il mercurio, invece, permetteva all'esperienza di riuscire anche con un tubo di vetro alto appena 1 metro.

Dopo questa esperienza, il **millimetro di mercurio**, che ha come simbolo mmHg, è diventato un'unità di misura della pressione. Anche l'**atmosfera**, il cui simbolo è atm, è un'unità di misura della pressione largamente utilizzata in chimica. I loro rispettivi valori sono:

$$760 mmHg = 1.02 \cdot 10^5 Pa \quad 1 atm = 1.02 \cdot 10^5 Pa$$

1.5 Conseguenze della legge di Stevino

La legge di Stevino ha delle conseguenze, non immediate, di importanza rilevante per il loro utilizzo nella vita di tutti i giorni. Ne tratteremo tre in questo modulo.

1.5.1 Vasi comunicanti

Consideriamo un liquido perfetto omogeneo, ovvero con $\rho = \text{ cost}$ in quiete. Un sistema di vasi comunicanti prevede due contenitori aperti verso l'alto e collegati tra loro con un tubicino. Non interessa che le basi dei contenitori si trovino alla stessa altezza, così come non è importante che il tubo sia piano o in diagonale. Sulle due aperture, infatti, agisce la stessa pressione atmosferica, quindi il liquido raggiunge la stessa quota in entrambi i contenitori.

1.5.2 Legge di Pascal

La legge di Pascal afferma che in un liquido omogeneo in quiete, la **variazione di pressione** prodotta in un punto del fluido si trasmette inalterata a tutti gli altri punti del fluido.

Per dimostrarla, prendiamo un recipiente con del fluido e analizziamo due punti, un punto A A posto sulla superficie del fluido e un punto B interno al fluido. Avremo quindi che $z_b < z_A$. Per tale, la relazione che lega le due pressioni è $P_B = P_A - \rho g h$, dove $h = z_B - z_A$.

Trasmettiamo una variazione di pressione nel punto A; in esso sarà allora presente una pressione $P'_A = P_A + \Delta P_A$. Calcoliamo la nuova pressione nel punto B:

$$P'_B = P'_a - \rho gh = (P_A + \Delta P_A) - \rho gh = P_B + \Delta P_A$$

È quindi dimostrata la legge di Pascal.

1.5.3 Martinetto idraulico

Il martinetto idraulico è uno strumento largamente utilizzato nella vita quotidiana: il suo utilizzo pratico è quello di permettere di sollevare corpi dal peso anche molto elevato applicando una forza di molto inferiore al peso del corpo. Un esempio di applicazione è quando il meccanico solleva un'automobile per ripararla.

Consideriamo un fluido incomprimibile e un sistema di vasi comunicanti; la caratteristica fondamentale di questo sistema è che le aperture verso l'alto hanno sezioni molto diverse tra loro, che chiameremo A e a, con $a << A$. Sulle due aperture vengono posti dei piani che chiudono il fluido.

Sulla sezione grande A A agisce una forza F_A, in cui sono comprese sia la forza peso del corpo che la pressione atmosferica. Sulla sezione minore agisce invece una forza f_a. Le due sezioni si troveranno ad altezze nettamente differenti. Le due pressioni devo essere bilanciate, quindi avremo che:

$$P_0 = \frac{F_A}{A} + \rho gh_1 = \frac{f_a}{a} + \rho gh_2$$

Da cui otteniamo:

$$\frac{f_a}{a} = \frac{F_A}{A} + \rho g(h_1 - h_2)$$

Osserviamo il fattore $\rho g(h_1 - h_2) \cdot A$. Questo rappresenta l'ipotetico peso di fluido che si troverebbe sulla sezione A e compreso tra le altezze h_1 e h_2. Questo fattore è di molto minore della forza che esercita il corpo sul fluido: infatti il corpo abbassa il piano e affonderebbe facilmente nel fluido, per cui i pesi sono nettamente differenti. Possiamo quindi trascurare questo fattore nella precedente espressione, ottenendo:

$$f_a = \frac{a}{A} F_A$$

Dato il rapporto $\frac{a}{A} << 1m$ avremo che la forza necessaria ad alzare il corpo sarà molto minore del peso del corpo stesso. È però importante sapere che il lavoro compiuto non diminuisce, a diminuire è solo la forza impiegata. Per poter eguagliare il lavoro della forza peso, quindi, la forza minore dovrebbe compiere uno spostamento molto grande; nella realtà ciò è possibile grazie a un sistema di entrata e uscita del fluido che permette alla leva su cui si preme col piede di risalire senza che il corpo scenda: in questo modo, abbassando più e più volte la leva, si riesce a sollevare l'auto.

2

Dinamica dei fluidi

2.1 Fluidi in moto

Lo studio del moto di un fluido può rivelarsi difficile, tant'è vero che resta una delle branche della fisica più complicate, nonostante negli anni siano sorte altre branche concettualmente molto complesse. Poiché un fluido è, in realtà, un sistema microscopicamente discreto, lo studio del moto delle singole particelle richiede conoscenze molto approfondite di matematica e di meccanica statistica. Per tale motivo, tratteremo qui i fluidi come se fossero **sistemi continui**. In generale, esistono due approcci per studiare i fluidi in moto:

- **approccio lagrangiano**, in cui si studia il moto di un determinato volumetto di fluido;
- **approccio euleriano**: si considera una posizione fissa e si determinano le variabili del fluido in quella posizione al variare del tempo.

In questo corso useremo l'approccio euleriano; sceglieremo quindi una posizione fissa e, al variare del tempo, studieremo le variabili del moto che descrive il fluido. È quindi giusto parlare di una velocità che, oltre al tempo, sia anche funzione della posizione.

♢ **Definizione** Definiamo

$$\vec{v}(t, \vec{r})$$

la **velocità del fluido** quando passa nella posizione $\vec{r}$ al tempo t.

Prima di studiare il moto di un fluido, diamo delle definizioni preliminari.

♢ **Definizione** Le **linee di flusso** sono delle curve che, in ogni istante e in ogni punto, hanno come tangente il vettore velocità che il fluido ha in quel punto e in quell'istante.

Le linee di flusso, che possono chiamarsi anche campo di velocità, descrivono il moto del fluido.

È bene precisare che un elemento di fluido non segue necessariamente le linee di flusso: queste descrivono solo il comportamento del fluido istante per istante, non continuamente nel tempo.

È anche immediato pensare che due o più linee di flusso non possano intersecarsi: qualora lo facessero si avrebbero due o più vettori tangenti al punto in quell'istante, ma la velocità in una posizione e in un istante è una.

Quando si studia un fluido in moto, si deve tener conto anche degli sforzi di taglio. Per tutti i fluidi reali esso è presente, ma in un fluido perfetto no. In questo caso si parla di **fluido non viscoso**.

♢ **Definizione** Si definisce **liquido perfetto** un liquido incomprimibile e non viscoso.

Poiché questo corso è un'introduzione alla meccanica dei fluidi, considereremo solo fluidi in moto stazionario.

♢ **Definizione** Quando la velocità $\vec{v}(t, \vec{r})$ non dipende dal tempo, ma solo dalla posizione, ovvero:

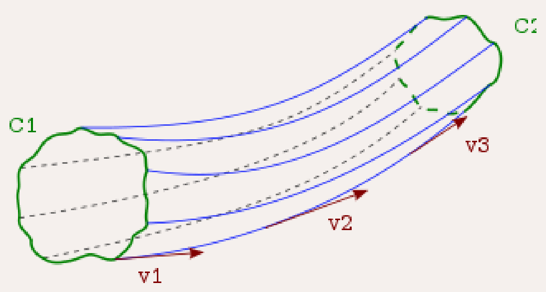
$$\vec{v}(t, \vec{r}) = \vec{v}(\vec{r})$$

si parla allora di **moto stazionario**.

In un moto stazionario, le linee di flusso sono costanti e corrispondono alle traiettorie del fluido.

Lo studio del moto di un fluido non viene fatto su tutto il volume del fluido: spesso è utile o rilevante studiarne solo una parte, che si chiama tubo di flusso.

♢ **Definizione** Un **tubo di flusso** di un liquido perfetto in moto stazionario è una superficie che racchiude un insieme di linee di flusso. È una curva chiusa, così come tutte le linee che contiene.



In verde si notano le curve che generano il tubo di flusso, mentre in blu vi sono le linee di flusso.

In caso di moto stazionario, un tubo di flusso descrive efficacemente un insieme ben definito di liquido in moto. Considerata una porzione di tubo di flusso, è importante, nello studio di un moto, parlare di portata.

◊ **Definizione** Si definisce **portata del tubo di flusso** il volume di liquido che passa nel tubo nell'unità di tempo, ovvero:

$$q = \frac{dV}{dt}$$

Poiché la quantità di massa nel tubo è sempre la stessa, in due istanti di tempo avremo due masse $dm_{1,2}$. Allora è immediato che:

$$\begin{aligned} dm_1 &= dm_2 \\ \rho dV_1 &= \rho dV_2 \\ dV_1 &= dV_2 \end{aligned}$$

Da cui ricaviamo che $\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_2}{dt}$, ovvero che la portata è costante nel tubo. Questa espressione è nota anche come legge di conservazione della massa oppure equazione di continuità.

Nel caso in cui la sezione del tubo sia perpendicolare al vettore velocità, chiameremo il tubo di flusso elementare. In questo caso, avremo che un dato volume di fluido V si sposta, in un istante dt, di una lunghezza dl nel tubo; la lunghezza può essere anche scritta $dl = v\,dt$. Poiché la velocità è perpendicolare alla sezione, avremo che:

$$dV = S\,dl = Svdt \quad \Rightarrow q = \frac{dV}{dt} = \frac{Svdt}{dt} = Sv$$

Che è un ulteriore modo di determinare la portata di un tubo. Poiché essa è costante, avremo che $S_1v_1 = S_2v_2$, quindi se la sezione diminuisce la velocità aumenta, così come il contrario. Nel caso generale in cui la sezione non sia perpendicolare alla velocità, si considera nel calcolo solo la componente della velocità che sia normale alla sezione.

Ricordando la definizione di flusso di un vettore, ovvero $\Phi_S(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \hat{n}dS$, notiamo che il flusso di un fluido coincide con la sua portata.

2.2 Legge di Bernoulli

Studiamo ora una legge che leghi le varie grandezze che scrivono il moto di un fluido. Prendiamo un tubo di flusso compreso tra due superfici A_1 e A_2; le due superfici sono prese abbastanza piccole da poter trascurare la differenza di quota agli estremi delle superfici, quindi avremo che z_1 e z_2 descrivono la quota complessiva di tutte e due le superfici; però esse hanno quota diversa, quindi $z_1 < z_2$.

Il fluido è in moto stazionario; nell'istante $t + dt$, esso si è spostato nel tubo, e si troverà ora compreso tra due superfici A'_1 e A'_2. Calcoliamo il lavoro compiuto dalle forze.

Le forze che agiscono sul fluido sono:

- $\vec{F}_P$, la **forza peso**;
- $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, le **forze di pressione** che il fluido esercita sulle due superfici agli estremi del tubo. Poiché il fluido è in moto, anche queste compiono lavoro.

Possiamo esprimere le due forze di pressione come:

$$F_1 = P_1 A_1 \quad F_2 = P_2 A_2$$

La forza F_1 compirà lavoro positivo, poiché lo spostamento è concorde al verso della forza; al contrario, la forza F_2 compirà lavoro negativo, perché lo spostamento è di verso discorde con quello della forza. Possiamo calcolare il lavoro delle forze di pressione, che sarà uguale a:

$$dL_{\text{pressione}} = P_1 A_1 dl_1 - P_2 A_2 dl_2$$

Il lavoro della forza peso sarà invece:

$$dL_{\text{peso}} = -dmg(z_2 - z_1) = dmg(z_1 - z_2)$$

Notiamo che il lavoro della forza peso è negativo perché c'è stato un aumento di quota. Possiamo allora scrivere il lavoro totale compiuto dal sistema:

$$dL_{\text{tot}} = P_1 A_1 dl_1 - P_2 A_2 dl_2 + dmg(z_1 - z_2)$$

Possiamo scrivere $dm = \rho dV$ e $dV = Adl$, avremo quindi che $\rho A_1 dl_1 = \rho A_2 dl_2$. Possiamo scrivere tutto in funzione di $\frac{dm}{\rho} = A_1 dl_1 = A_2 dl_2$. Andiamo a sostituire nell'espressione del lavoro

$$dL_{\text{tot}} = dm \left[\frac{P_1 - P_2}{\rho} + g(z_1 - z_2) \right]$$

Adesso applico il teorema dell'energia cinetica, poiché il fluido ha velocità, quindi il lavoro totale corrisponde alla variazione di energia cinetica:

$$\begin{aligned}
dL_{\text{tot}} &= dK = \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 \\
\frac{P_1}{\rho} + g z_1 + \frac{1}{2} v_1^2 &= \frac{P_2}{\rho} + g z_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \\
P + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 &= \text{ cost}
\end{aligned}$$

Questa espressione è anche conosciuta come **legge di Bernoulli**.

2.2.1 Effetto Venturi

Un caso particolare della legge di Bernoulli è il cosiddetto **effetto Venturi**. Consideriamo un fluido perfetto in moto stazionario in un tubo orizzontale, la cui sezione si restringa. Sappiamo che la portata si conserva, quindi:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Ovvero se $A_2 < A_1$ avremo $v_2 > v_1$. Applico la legge di Bernoulli:

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Se $v_2 > v_1$, ne consegue allora che $P_1 > P_2$. Questo fenomeno è largamente utilizzato, come ad esempio nella forma delle ali di un aeroplano: esse infatti permettono alla velocità del fluido di avere valori diversi sopra e sotto le ali, producendo una variazione di pressione che spinge l'aereo verso l'alto. Un esempio più comune è quello del foglio di carta: prendete un qualsiasi foglio di carta non rigida, tenetelo saldo davanti la bocca, poi soffiate sulla superficie verticale. Produrrete una variazione di pressione che spingerà il foglio verso l'alto.

A

Formulario

A.1 Statica dei fluidi

Forze di superficie agenti su un volumetto:

$$d\vec{F}^{(s)} = d\vec{F}_n^{(s)} + d\vec{F}_t^{(s)}$$

Pressione:

$$dP = \frac{dF_n^{(s)}}{dS} \Rightarrow \text{ se la forza è uniforme } P = \frac{F_n}{S}$$

A.1.1 Legge di Stevino

$$P_B = P_A - \rho g h$$

Con $z_B > z_A$ e $h = z_B - z_A$

A.1.2 Legge di Archimede

Spinta di Archimede:

$$R = (\rho_{fluido} - \rho_{corpo})Vg$$

Proporzionalità tra volume immerso e densità:

$$\frac{V_i}{V_{tot}} = \frac{\rho_{corpo}}{\rho_{fluido}}$$

A.1.3 Legge di Pascal

Impressa una variazione di pressione in un punto ΔP_A:

$$P'_B = P_B + \Delta P_A$$

A.2 Dinamica dei fluidi

A.2.1 Portata

$$q = \frac{dV}{dt} = Sv$$

Equazione di continuità:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

A.2.2 Legge di Bernoulli

$$P + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{ cost}$$

Anche scrivibile come:

$$z + \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \text{ cost}$$

A.2.3 Effetto Venturi

Fluido in moto stazionario che passa attraverso due sezioni $A_1 > A_2$; avremo che:

$$v_1 < v_2$$

$$P_1 > P_2$$

Crediti

Fonti dei testi

- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_fluidi/Cosa_sono_i_fluidi&oldid=442712
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_fluidi/Fluidi_in_quiete&oldid=442713
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_fluidi/Legge_di_Stevino&oldid=442714
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_fluidi/Legge_di_Archimede_e_esperienza_di_Torricelli&oldid=442715
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_fluidi/Conseguenze_della_legge_di_Stevino&oldid=442716
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_fluidi/Fluidi_in_moto&oldid=442718
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_fluidi/Legge_di_Bernoulli&oldid=442719
- https://it.wikibooks.org/w/index.php?title=Meccanica_dei_fluidi/Formulario&oldid=442558

Fonti delle immagini

- pag. 5: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Prinzip_Torricelli.jpg
- pag. 10: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Streamlines_and_streamtube.svg