Prof. Dr. H. Brenner — Osnabrück WS 2019/2020

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 27

Übungsaufgaben

Aufgabe 27.1. Überprüfe, ob der Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zur Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

ist und bestimme, falls ein Eigenvektor vorliegt, den zugehörigen Eigenwert.

Aufgabe 27.2. Bestimme die Eigenvektoren und die Eigenwerte zu einer linearen Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die durch eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ gegeben ist.

Aufgabe 27.3. Zeige, dass der erste Standardvektor ein Eigenvektor zu einer jeden oberen Dreiecksmatrix ist. Was ist der Eigenwert?

Aufgabe 27.4.*

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix. Zeige, dass ein Eigenwert zu M ein Diagonaleintrag von M sein muss.

Aufgabe 27.5. Zeige, dass jede Matrix

$$M \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{C})$$

mindestens einen Eigenwert besitzt.

Aufgabe 27.6. Es seien
$$\varphi, \psi \colon V \longrightarrow V$$
Endomorphismen auf einem K-Vektorraum V und es sei $v \in V$ ein Eigenvektor von φ und von ψ. Zeige, dass v auch ein Eigenvektor von $\varphi \circ \psi$ ist. Was ist der Eigenwert?

Aufgabe 27.7. Es sei $\varphi \colon V \to V$ ein Isomorphismus auf einem K-Vektorraum V mit der Umkehrabbildung φ^{-1}. Zeige, dass $a \in K$ genau dann ein Eigenwert von φ ist, wenn a^{-1} ein Eigenwert von φ^{-1} ist.

Aufgabe 27.8. Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung
$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
derart, dass φ keine Eigenwerte besitzt, dass aber eine gewisse Potenz φ^n, $n \geq 2$, Eigenwerte besitzt.

Aufgabe 27.9. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und
$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$
eine lineare Abbildung mit
$$\varphi^n = \mathrm{Id}_V$$
für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$.[1] Zeige, dass jeder Eigenwert λ von φ die Eigenschaft $\lambda^n = 1$ besitzt.

Aufgabe 27.10. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und
$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$
eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von φ und $P \in K[X]$ ein Polynom. Zeige, dass $P(\lambda)$ ein Eigenwert von[2] $P(\varphi)$ ist.

Aufgabe 27.11. Es sei M eine quadratische Matrix, die man als
$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$
mit quadratischen Matrizen A und B schreiben kann. Zeige, dass eine Zahl $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert von M ist, wenn λ ein Eigenwert von A oder von B ist.

[1] Der Wert $n = 0$ ist hier erlaubt, aber aussagelos.

[2] Der Ausdruck $P(\varphi)$ bedeutet, dass man die lineare Abbildung φ in das Polynom P einsetzt. Dabei muss man X^n als φ^n, also als die n-fache Hintereinanderschaltung von φ mit sich selbst, interpretieren, die Addition wird zur Addition von linearen Abbildungen, u.s.w.

Aufgabe 27.12. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$. Zeige folgende Aussagen.

(1) Der Eigenraum
$$\mathrm{Eig}_\lambda(\varphi)$$
ist ein Untervektorraum von V.

(2) λ ist genau dann ein Eigenwert zu φ, wenn der Eigenraum $\mathrm{Eig}_\lambda(\varphi)$ nicht der Nullraum ist.

(3) Ein Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, ist genau dann ein Eigenvektor zu λ, wenn $v \in \mathrm{Eig}_\lambda(\varphi)$ ist.

Aufgabe 27.13. Es bezeichne $V = \mathbb{R}[X]_{\leq d}$ die Menge aller reellen Polynome vom Grad $\leq d$. Bestimme die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume zum Ableitungsoperator

$$V \longrightarrow V,\ P \longmapsto P'.$$

Der Begriff des Eigenvektors ist auch für unendlichdimensionale Vektorräume definiert und wichtig, wie die folgende Aufgabe zeigt.

Aufgabe 27.14. Es sei V der reelle Vektorraum, der aus allen unendlich oft differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ besteht.

a) Zeige, dass die Ableitung $f \mapsto f'$ eine lineare Abbildung von V nach V ist.

b) Bestimme die Eigenwerte der Ableitung und zu jedem Eigenwert mindestens einen Eigenvektor.[3]

c) Bestimme zu jeder reellen Zahl die Eigenräume und deren Dimension.

Aufgabe 27.15. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass

$$\operatorname{kern}\varphi = \mathrm{Eig}_0(\varphi)$$

gilt.

Aufgabe 27.16. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Sei $\lambda \in K$ und sei

$$U = \mathrm{Eig}_\lambda(\varphi)$$

[3] In diesem Zusammenhang spricht man auch von *Eigenfunktionen*.

der zugehörige Eigenraum. Zeige, dass sich φ zu einer linearen Abbildung

$$\varphi|_U \colon U \longrightarrow U,\, v \longmapsto \varphi(v),$$

einschränken lässt, und dass diese Abbildung die Streckung um den Streckungsfaktor λ ist.

Aufgabe 27.17.*

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und seien $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Elemente in K. Zeige, dass

$$\operatorname{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \cap \operatorname{Eig}_{\lambda_2}(\varphi) \,=\, 0$$

ist.

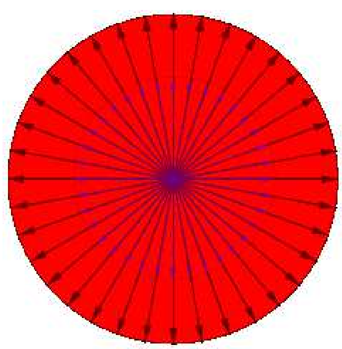
Aufgabe 27.18.*

Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass es maximal $\dim(V)$ viele Eigenwerte zu φ gibt.

Aufgaben zum Abgeben



Aufgabe 27.19. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann eine Streckung ist, wenn jeder Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, ein Eigenvektor von φ ist.

Aufgabe 27.20. (4 Punkte)

Betrachte die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass M als reelle Matrix keine Eigenwerte besitzt. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume von M als komplexer Matrix.

Aufgabe 27.21. (6 Punkte)

Betrachte die reellen Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

Man charakterisiere in Abhängigkeit von a, b, c, d, wann eine solche Matrix

(1) zwei verschiedene Eigenwerte,
(2) einen Eigenwert mit einem zweidimensionalen Eigenraum,
(3) einen Eigenwert mit einem eindimensionalen Eigenraum,
(4) keinen Eigenwert,

besitzt.

Aufgabe 27.22. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von φ und v ein zugehöriger Eigenvektor. Zeige, dass es zu einer gegebenen Basis $v, u_2, \ldots, u_n$ von V eine Basis $v, w_2, \ldots, w_n$ gibt mit $\langle v, u_j \rangle = \langle v, w_j \rangle$ und mit

$$\varphi(w_j) \in \langle u_i,\, i = 2, \ldots, n \rangle$$

für alle $j = 2, \ldots, n$.

Zeige ebenso, dass dies bei $\lambda = 0$ nicht möglich ist.

Abbildungsverzeichnis