Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 53

Übungsaufgaben

Aufgabe 53.1.*

Finde zwei natürliche Zahlen, deren Summe 65 und deren Produkt 1000 ist.

Aufgabe 53.2. Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2,\, (x,y) \longmapsto (x+y, xy),$$

surjektiv ist.

Aufgabe 53.3.*

Man gebe ein Beispiel einer bijektiven differenzierbaren Abbildung $\varphi\colon U_1 \to U_2$ mit einer stetigen Umkehrabbildung ψ derart, dass ψ nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 53.4.*

Man gebe ein Beispiel einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, das zeigt, dass im Satz über die (lokale) Umkehrbarkeit die Bijektivität im Allgemeinen nur auf echten Teilintervallen besteht.

Aufgabe 53.5. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,\, (x,y) \longmapsto (x, e^{x+y}),$$

bijektiv ist. Man gebe explizit eine Umkehrabbildung an.

Aufgabe 53.6. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

eine Funktion. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (x,y) \longmapsto (x, y+f(x)),$$

bijektiv ist. Bestimme explizit eine Umkehrabbildung.

Was besagt in der vorstehenden Aufgabe der Satz über die Umkehrabbildung, wenn f differenzierbar ist?

Aufgabe 53.7. Es seien $f_1, \ldots, f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Betrachte die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\, (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)),$$

Zeige:

(1) Die Abbildung f ist differenzierbar.
(2) Das totale Differential von f in 0 ist genau dann bijektiv, wenn von sämtlichen Funktionen f_i, $i = 1, \ldots, n$, die Ableitungen in 0 nicht 0 sind.
(3) f ist genau dann auf einer offenen Umgebung von 0 bijektiv, wenn die einzelnen f_i in einer geeigneten Umgebung bijektiv sind.

Aufgabe 53.8. Betrachte die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \longmapsto (\sin xy, yz \cos\left(x^2\right), e^{xyz}).$$

Zeige, dass φ im Punkt $P = (1, \pi, 1)$ lokal umkehrbar ist, und bestimme das totale Differential der Umkehrabbildung im Punkt $Q = \varphi(P)$.

Aufgabe 53.9. Es seien $P = a + bX + cY + \ldots$ und $Q = d + eX + fY + \ldots$ Polynome in zwei Variablen und

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (P(x, y), Q(x, y)),$$

die zugehörige Abbildung. Wann besitzt φ in $\varphi(0, 0)$ lokal eine Umkehrabbildung? Wie sieht in diesem Fall das totale Differential der Umkehrabbildung im Punkt $\varphi(0, 0)$ aus?

Aufgabe 53.10.*

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nullstellenfreie stetig differenzierbare Funktion und sei g eine Stammfunktion zu f. Es sei $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi(x, y) = \left(\frac{x}{f(y)}, g(y)\right).$$

a) Bestimme die Jacobi-Matrix zu φ.

b) Zeige, dass man auf φ in jedem Punkt den Satz über die lokale Umkehrbarkeit anwenden kann.

c) Zeige, dass φ injektiv ist.

Aufgabe 53.11.*

Es sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine total differenzierbare Abbildung derart, dass es eine reelle Zahl $c \in [0, 1[$ gibt mit

$$\|(D\varphi)_P\| \leq c$$

für alle $P \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass φ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Im Beweis des Umkehrsatzes wurde mit folgender Definition gearbeitet.

Es seien V und W euklidische Vektorräume und sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann nennt man

$$\|\varphi\| := \sup\left(\|\varphi(v)\|, \|v\| = 1\right)$$

die *Norm* von φ.

Aufgabe 53.12. Begründe, warum die Norm einer linearen Abbildung zwischen euklidischen Vektorräumen wohldefiniert ist.

Aufgabe 53.13. Es seien V und W euklidische Vektorräume und sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass es einen Vektor $v \in V$, $\|v\| = 1$, mit

$$\|\varphi(v)\| = \|\varphi\|$$

gibt.

Aufgabe 53.14. Zeige, dass die Norm einer linearen Abbildung zwischen euklidischen Vektorräumen folgende Eigenschaften erfüllt.

(1) Es ist $\|\varphi(v)\| \leq \|\varphi\| \cdot \|v\|$.
(2) Es ist $\|\varphi\| = 0$ genau dann, wenn $\varphi = 0$ ist.
(3) Es ist $\|c\varphi\| = |c| \cdot \|\varphi\|$.
(4) Es ist $\|\varphi_1 + \varphi_2\| \leq \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$.

Aufgabe 53.15. Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von φ. Zeige, dass die Abschätzung

$$|\lambda| \leq \|\varphi\|$$

gilt.

Aufgabe 53.16. Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung derart, dass eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren von φ existiert. Zeige, dass

$$\|\varphi\| = \max\left(|\lambda|, \lambda \text{ ist Eigenwert von } \varphi\right)$$

gilt.

Aufgabe 53.17. Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

eine lineare Abbildung $\neq 0$. Bestimme einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ auf der abgeschlossenen Kugel mit Mittelpunkt 0 und Radius 1, an dem die Funktion

$$B(0,1) \longrightarrow \mathbb{R},\ v \longmapsto |\varphi(v)|,$$

ihr Maximum annimmt. Bestimme die Norm von φ.

Mit diffeomorph ist im Folgenden stets C^1-diffeomorph gemeint.

Aufgabe 53.18. Definiere explizit einen Diffeomorphismus zwischen $\mathbb{R}^n$ und einer offenen Kugel $U(0,r) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 53.19. Zeige, dass eine offene Kreisscheibe $U(P,r) \subseteq \mathbb{R}^2$ $(r > 0)$ und ein offenes Rechteck $]a,b[\times]c,d[$ $(b > a, d > c)$ diffeomorph sind.

Aufgabe 53.20. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Die Identität ist ein Diffeomorphismus.

(2) Eine lineare bijektive Abbildung ist ein Diffeomorphismus.
(3) Die Umkehrabbildung eines Diffeomorphismus ist wieder ein Diffeomorphismus.
(4) Die Hintereinanderschaltung von Diffeomorphismen ist ein Diffeomorphismus.

AUFGABE 53.21. Es seien $U_1 \subseteq V_1$, $U_2 \subseteq V_2$, $U_3 \subseteq V_3$, und $U_4 \subseteq V_4$ offene Teilmengen in reellen endlichdimensionalen Vektorräumen. Es seien $\varphi\colon U_1 \to U_3$ und $\psi\colon U_2 \to U_4$ C^1-Diffeomorphismen. Zeige, dass auch die Produktabbildung $\varphi \times \psi\colon U_1 \times U_3 \to U_2 \times U_4$ ein C^1-Diffeomorphismus ist.

AUFGABE 53.22. Sei

$$U_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

und

$$U_2 = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 > 4v\right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

a) Skizziere U_1 und U_2.

b) Zeige, dass U_1 und U_2 offen sind.

c) Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi\colon U_1 \longrightarrow U_2,\ (x, y) \longmapsto (x + y, xy),$$

ein Diffeomorphismus ist.

AUFGABE 53.23. Bestimme die regulären Punkte der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (x^2 y, x - \sin y).$$

Zeige, dass φ in $P = (1, 0)$ regulär ist und bestimme das totale Differential der Umkehrabbildung von $\varphi|_U$ in $\varphi(P)$, wobei U eine offene Umgebung von P sei (die nicht explizit angegeben werden muss).

AUFGABE 53.24.*

Man gebe für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ eine bijektive, total differenzierbare Abbildung $\varphi_n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ an, für die das totale Differential in mindestens einem Punkt nicht regulär ist.

AUFGABE 53.25. Es seien U, V, W euklidische Vektorräume und seien $\varphi : U \longrightarrow V$ und $\psi : V \longrightarrow W$ differenzierbare Abbildungen. Es sei φ regulär in $P \in U$ und ψ regulär in $Q = \varphi(P) \in V$. Ist dann $\psi \circ \varphi$ regulär in P? Unter welchen Voraussetzungen stimmt dies?

AUFGABE 53.26. Das komplexe Quadrieren

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^2,$$

kann man reell als

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ x + \mathrm{i}y = (x, y) \longmapsto (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy = (x^2 - y^2, 2xy),$$

schreiben. Untersuche φ auf reguläre Punkte. Auf welchen (möglichst großen) offenen Teilmengen ist φ umkehrbar?

Aufgabe 53.27. Finde möglichst große offene Teilmengen $G \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ und $H \subseteq \mathbb{C}$ derart, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^3,$$

einen Diffeomorphismus von G nach H induziert.

Aufgabe 53.28.*

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto \left(\frac{y^2}{x}, \frac{y^3}{x^2} \right).$$

a) Bestimme die regulären Punkte der Abbildung φ.

b) Zeige, dass φ in $P = (1,2)$ lokal eine differenzierbare Umkehrabbildung $\psi = \varphi^{-1}$ besitzt, und bestimme das totale Differential von ψ im Punkt $\varphi(P)$.

c) Man gebe alle Punkte $Q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ an, in denen φ nicht lokal invertierbar ist.

Aufgabe 53.29. Zeige, dass die Transformation

$$[0, 2\pi] \times [0,1] \longrightarrow B\,(0,1)\,,\ (\alpha, w) \longmapsto (\sqrt{w}\cos\alpha, \sqrt{w}\sin\alpha),$$

auf geeigneten offenen Teilmengen ein Diffeomorphismus ist und berechne die Jacobi-Determinante in jedem Punkt.

Aufgabe 53.30. Es seien $P_1, \ldots, P_n$ und $Q_1, \ldots, Q_n$ Punkte in der Ebene $\mathbb{R}^2$. Zeige, dass die beiden offenen Mengen $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$ und $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{Q_1, \ldots, Q_n\}$ zueinander diffeomorph sind.

Aufgabe 53.31. Es sei

$$T = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\} \cup \{0\},$$

$$U = \mathbb{R} \setminus T$$

und

$$V = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.$$

Zeige, dass U und V zueinander diffeomorph sind.

Aufgabe 53.32. Es sei

$$T = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right) \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\} \cup \{(0,0)\},$$

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus T$$

und

$$V = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N}.$$

Zeige, dass U und V zueinander nicht homöomorph sind.

AUFGABE 53.33.*

Wir betrachten die Abbildung

$\varphi\colon \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^4,\ (a,b,c,d,u,v) \longmapsto (au+bv+c+d, ad-bc, ac-b^2, bd-c^2).$

a) Bestimme die Jacobi-Matrix zu dieser Abbildung.

b) Zeige, dass φ im Nullpunkt nicht regulär ist.

c) Zeige, dass φ in $(1,1,0,0,1,1)$ regulär ist.

AUFGABE 53.34.*

Wir betrachten die Abbildung

$$F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \longmapsto (x+y+z, xy+xz+yz, xyz).$$

Zeige, dass ein Punkt $P=(x,y,z)$ genau dann ein regulärer Punkt von F ist, wenn die Koordinaten von P paarweise verschieden (also $x \neq y$, $x \neq z$ und $y \neq z$) sind.

AUFGABE 53.35.*

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Zeige, dass die Menge der regulären Punkte von φ offen ist.

AUFGABE 53.36.*

Es seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume, $U \subseteq V$ und $U' \subseteq W$ offene Teilmengen und $\varphi\colon U \to U'$ ein Diffeomorphismus. Es sei

$$F\colon I \times U \longrightarrow V,\ (t,x) \longmapsto F(t,x),$$

ein Vektorfeld auf U. Es sei G das durch

$$G(t,y) := (D\varphi)_{\varphi^{-1}(y)}\big(F(t,\varphi^{-1}(y))\big)$$

definierte Vektorfeld auf U'. Zeige, dass $\alpha\colon J \to U$ genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = F(t,x) \text{ mit } x(t_0) = x_0\,,$$

wenn $\varphi \circ \alpha$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = G(t,y) \text{ mit } y(t_0) = \varphi(x_0)$$

ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 53.37. (2 Punkte)

Seien U_1 und U_2 offene Mengen in euklidischen Vektorräumen V_1 und V_2. Es sei $\varphi\colon U_1 \to U_2$ eine bijektive Abbildung, die in einem Punkt $P \in U_1$ differenzierbar sei derart, dass die Umkehrabbildung in $Q = \varphi(P)$ auch differenzierbar ist. Zeige, dass das totale Differential $(D\varphi)_P$ bijektiv ist.

Aufgabe 53.38. (3 Punkte)

Seien V_1 und V_2 endlichdimensionale reelle Vektorräume, $G \subseteq V_1$ offen und sei $\varphi\colon G \to V_2$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $U \subseteq G$ eine offene Teilmenge derart, dass für jeden Punkt $P \in U$ das totale Differential $(D\varphi)_P$ bijektiv ist. Zeige, dass dann das Bild $\varphi(U)$ offen in V_2 ist.

Aufgabe 53.39. (4 Punkte)

Bestimme die Umkehrabbildung zur Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x+y^2, -y^4-2xy^2-x^2+y^2+x+y).$$

Aufgabe 53.40. (5 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \longmapsto (x+y+z, xy+xz+yz, xyz).$$

Zeige, dass ein Punkt (x,y,z) genau dann ein kritischer Punkt von φ ist, wenn in (x,y,z) zwei Zahlen doppelt vorkommen.

Aufgabe 53.41. (5 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \longmapsto (x^2-y^2z, y+\sin xz).$$

Zeige, dass die Menge der kritischen Punkte von φ eine Gerade umfasst, aber auch noch weitere (mindestens einen) Punkte enthält.

Aufgabe 53.42. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x, xy).$$

Bestimme die regulären Punkte, die Fasern (also die Urbilder zu einem Punkt $(u,v) \in \mathbb{R}^2$), das Bild und das Bild aller regulären Punkte dieser Abbildung. Man gebe möglichst große offene Mengen $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ derart an, dass $\varphi|_{U_1}\colon U_1 \to U_2$ ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 53.43. (4 Punkte)

Es seien $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^k$ und $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen mit $0 \in V_1, V_2$ und es sei $\varphi\colon U_1 \times V_1 \to U_2 \times V_2$ ein Diffeomorphismus, der eine Bijektion zwischen $U_1 \times \{0\}$ und $U_2 \times \{0\}$ induziert. Zeige, dass dann auch die Einschränkung von φ auf $U_1 \cong U_1 \times \{0\}$ nach $U_2 \cong U_2 \times \{0\}$ ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 53.44. (3 Punkte)

Beschreibe das komplexe Potenzieren

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^n,$$

in Polarkoordinaten.

Abbildungsverzeichnis