部定大學用書

實用微積分

薩本棟
鄭曾同 編著
楊龍生

商務印書館發行

部定大學用書

實用微積分

薩本棟
鄭曾同 編著
楊龍生

商務印書館發行

序

編微積分學者大都分之爲微分學及積分學兩部；如是分授，讀者必須將微分學之基礎觀念及一般應用全行學習完畢，方及積分之淺顯部分。惟微分與積分原爲同一問題之正反兩面，其算式實可同時學習，勿庸等待將微分之應用全行學習完畢之後再論積分。常見初學者因微分之應用太廣，而其計算技術與公式復繁，以致於學完微分學後即忘卻基本觀念。爲矯正此弊起見，本書先討論較簡單之代數函數之微分與積分，及其尋常應用如極大極小與面積等，以使讀者之注意力得集中於基本觀念，而不爲繁雜之越函數之微分公式所分散。至於偏微分與級數等問題，則留於讀者對於微積分已有相當之運用能力後方爲述及。此爲本書編輯次序與他書不同之一點。

近年來高中學生之數學訓練頗差，以致初入大學之學生對於三角及對數之算法往往不甚明瞭，本書在未討論三角函數及指數與對數函數之微積分之前，對此等函數之基本問題亦略加申述，以便學生之複習。用本書爲教本者，對於此等段節可酌量學生程度以定去取。說明弧度及自然對數之底數 e 之時，特別利用過原點各有關曲線之斜度爲 1 一事，以示明弧度與 e 之定義，其用意實同爲採用適當單位以謀公式之簡單化而已。

純粹數學家多少希望其學生能了解數學證明之必須嚴格，且能欣賞嚴格證明；但在初等教本中，各證明應嚴格到何等程度，以及初學微積分之學生對於嚴格證明能否欣賞各事，均係教學上可以辯論之問題。世有認教授初等數學之目標，在於顯示其實用之力量(vigor)而不應苛求證述之嚴格(rigor)者，亦非毫無見地。本書以實用兩字冠書名，原以示討論之方法及問題偏於實用，但遇證明不嚴格之處亦時常指出，以使讀者多得思考之材料。此種折衷辦法或亦爲純粹數學家所能諒解歟？

國立廈門大學於抗戰後內遷長汀，時感課本缺乏。本書之編輯，原以應是校一二年學生初習微積分之需要。初稿僅印三百份，使用三年，業已告罄，而校外索購者復繁有徒，故爲訂正付梓。若能有助於其他大學之教者與學者，則大幸焉！

編者 卅一年四月於長汀廈大

新版附言

本書曾於三十三年由青年圖書出版社再版。時仍在抗戰期中，插圖製版不易，故所有附圖均用石印列於每章之後。勝利後經國立編譯館審定爲大學教本，並由商務印書館承印發行，插圖遂得附於有關節次以便參較；前此誤字亦均悉心校正，惟數學書籍非經課室中多次使用絕難完全無誤字，尙望用者隨時賜教，俾成完璧。

三十七年六月，編者於中央研究院。

實用微積分

目次

實用微積分

第一章　變數,極限,函數

1-1. 實數　在日常生活中，吾人常論及各事物之數量的關係，例如購買物品時計較其輕重，長短及價值；入學時考慮學費之數目，上課時數與學分數之多寡等等。人類智慧愈高，文明程度愈進，則所用之數(number)其範圍亦愈廣。在啓蒙時代，人們僅知用正整數。由減法之應用,乃有零及負整數；由除法復有分數。正負整數，分數及零,遂名爲有理數(rational number)。是後，因有時所用之數量不能以整數互相加減乘除而得之（例如討論邊長爲一單位之正方形之對角線，或直徑爲一單位之圓周時），乃有無理數(irrational number) 之概念。簡言之，凡非有理數之實數 (real number) 均名爲無理數。嚴格言之，無理數不能化爲整數或分數；但在多數實用問題中，因量測之時，其準確程度均爲有限，故遇無理數時，吾人亦常用其近似 (approximate) 之有理數以作計算；例如圓周長與直徑之比，其數名爲 π，在需要五位之準確値時，吾人可逕寫 3.1416（此値可視爲 31416 與 10000 兩整數之商），或如僅需要三位可靠之値，則以 $\frac{22}{7}$ 代 π 亦無不可。

無理數一名實不甚妥，因其在實用日常問題中極爲常見，絕非無

理。今若推廣算術中開方一概念，又可得一種數，驟視之似更無理，然又非前此所述之無理數。此等數係由求負數之平方根而起；例如$\sqrt{-1}$，$\sqrt{-2}$，$\sqrt{-9}$等等。因所有實數之平方不能為負（即不能小於零），故此等數常名為純虛數（pure imaginary）或簡稱虛數（imaginary）。虛數較諸實數，其理論自為更難。本書所討論者將以實數為限。至若遇及無理數時，常將利用其近似之有理數，以避免嚴格的討論之困難。

討論實數各問題時，常用絕對值（absolute value）一詞，其意係不計該數之符號，只計其數量。例如 -3 及 3 之絕對值均為 3。表示絕對值時，常用兩直線左右夾之，例如 $|-3|$。

1-2．變數 討論一問題時，不善於引用數學方法者，多願以語文表示之。其實，數學即為語文之一，在善於運用者手中，其便利且非任何其他語文所能望及。以數學方法討論一問題時，其中各數常用記號或字母代表之（阿剌伯數碼即為一種較普遍之記號而已）。在問題中，有些數，其值於某範圍內可任意變化，亦有些數，其值係固定不變。茲名前者為變數（variable），後者為常數（constant）。例如有固定之款項共 a 元，今以之購買物品。若物品之單價為 x 元，而所購之數量為 y，則有下列關係：

$$a=xy \tag{1}$$

在此中 a 為常數，x 及 y 則均為變數，因物之單價及所能購得之數量均將隨時隨地改變也。表示變數之記號常為羅馬字之末後數字母，如 x, X, y, Y, z, Z, t, T, v, V 等；表示常數之記號則常用羅馬字之前數個字母，如 a, A, b, B, c, C 等。多數人雖係如是取用各字母，但因

羅馬字母爲數不多,且問題性質絕非固定,故此處所說之用法只可作爲參考。至於某字母所代表者果爲變數,抑爲常數,均應由題意決定之,不應受此處之說明所限制。

變數之值可認爲係循一定之法則而變化。例如方程(1)中之 x 可依序爲 $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots\cdots$,亦可經歷 A 與 B 間所有之數(有理數及無理數)而由 A 增至 B 或由 B 減至 A。在前述情形下,其變化爲間斷的(discontinuous),在後述情形下則稱 x 連續(continuous)變於 A 至 B 間隔(interval)內。

1-3. 極限 設令變數 x 依一定法則變更其值;若在 x 之變化過程中,x 取 x_1, x_2, x_3, $\cdots\cdots$, x_n, x_{n+1}, $\cdots\cdots$各值,而自某值始,如 x_n,其後各 x 與 c 相差之絕對值(即 $|x-c|$)係比任意指定之甚小正數之值均較小,則稱 c 爲 x 之極限(limit),或 x 趨於極限 c,其記號爲:

$$\lim x=c \text{ 或 } x\to c \tag{2}$$

例 1. x 依 $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots\cdots$,法則而變,則其極限爲 1,因 $|x-1|$ 依次序將爲 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\cdots\cdots$,其最後之值可小於任何正數也。

例 2. x 依 $\frac{3}{2},\frac{3}{3},\frac{3}{4},\frac{3}{5}$ 法則而變,則其極限爲 0。

例 3. 設 x 之變更法則爲 $\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\frac{5}{4},\frac{4}{5},\frac{6}{5},\cdots\cdots$其極限亦係 1。

例 4. 設 x 之變化法則爲 $2,\frac{2^2}{2},\frac{2^3}{3},\frac{2^4}{4},\cdots\cdots$ 則其值將無限增大,而不達一極限。

例 5. 設 x 遵 $\left(\frac{1}{2}\right),\left(1+\frac{2}{3}\right),\left(\frac{3}{4}\right),\left(1+\frac{4}{5}\right),\left(\frac{5}{6}\right)\cdots\cdots$ 而變化，則 x 無極限，因有時 x 係與 1 接近，而有時則與 2 接近也。

自第三例觀之，變數變化之法則，可不必係恆增或恆減，其極限仍可爲確定之值。又變數之變化可爲間斷的如本節各例，亦可遵甚繁複之連續的法則。

1-4. 無窮小　極限一觀念在微積分中極爲重要。設只藉方程(2)以作應用，有時殊感不便，因吾人雖知如何運用加減乘除各基本算法，而此等算法遇及極限記號 lim 時應如何引用方不至誤，實須另行推證。茲爲便於計算起見，另用無窮小一觀念。凡極限爲零之變數名爲無窮小(infinitesimal)。在此定義中，讀者須注意無窮小係一變數，其極限爲 0，並非甚小之常數，如兆分之一或 0 本身。例如當 x 變化時其值依次爲 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}\cdots\cdots$，則 x 爲一無窮小；反之，若 $z-c$ 爲無窮小，則 z 之極限必爲 c。表示無窮小有時用 h 或 k 字。

引用無窮小，方程(2)可改寫作

$$x-c=h \tag{3}$$

在此中已無 lim 一記號，其運用自較易，惟吾人仍須記得 h 係一無窮小，即極限爲 0 之變數也。

無窮小之基本定理有四。此等定理之意義甚爲明顯，其證明須用及絕對值三個重要公式，即 $|a\pm b|\leqq|a|+|b|$，$|ab|=|a|\,|b|$ 及 $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$。茲先述各定理如下：

(A) 兩無窮小 h 及 k 之和或差(即 $h\pm k$)仍爲無窮小；但如 h 與 k

恆等,則其差爲零而非無窮小!

(B)一異於 0 之常數 c 與無窮小 h 之積仍爲無窮小。

(C)兩無窮小之積仍爲無窮小。

(D)設 h 爲無窮小,u 爲另一變數,其極限爲異於 0 之常數 a (即 u 非無窮小);則 $\frac{h}{u}$ 仍爲無窮小。

欲證某變數係無窮小,只須證明其絕對值可較任何小正數爲更小。故如 $|h\pm k|$ 可小於任何小正數 m,則 $|h\pm k|$ 即爲無窮小。今知 $|h\pm k|$ 不能較 $|h|+|k|$ 爲更大,即

$$|h\pm k|\leqq|h|+|k|$$

故欲 $|h\pm k|$ 小於某正值 m,只須 $|h|$ 及 $|k|$ 各小於 $\frac{m}{2}$ 即可。惟 h 及 k 均爲無窮小,其絕對值可小於任何正數 $\frac{m}{2}$,是以 $|h\pm k|$ 亦可小於任何正數而爲無窮小。

欲證 ch 爲無窮小時,可將 $|ch|$ 寫作 $|c|\,|h|$。設已與之小正數爲 m,則只須 $|h|$ 較 $\frac{|m|}{|c|}$ 爲小,即可使 $|ch|$ 較 m 爲小。

欲證 hk 係無窮小時,可引用 $|hk|=|h|\,|k|$。如是欲 $|hk|$ 較任何小正數 m 爲小,只須 $|h|$ 及 $|k|$ 各較 $\sqrt{m}$ 爲小即可。

證第四定理時令 c 爲一小於 $|a|$ 之正數。u 旣以 a 爲極限,故最後必變至與 a 無限接近,因此 $|u|>c$。今 $\left|\frac{h}{u}\right|=\frac{|h|}{|u|}$,故 $\left|\frac{h}{u}\right|<\frac{|h|}{c}$。是以若已與之小正數爲 m,則只須 $|h|<cm$ 即可令 $\left|\frac{h}{u}\right|<m$ 矣。

1-5. 關於極限之定理　自上述之無窮小四定理即可推得下列有

關於極限之各定理：

（A）兩變數之和或差之極限，等於其極限之和或差，即

$$\lim(x\pm y)=\lim x\pm\lim y。$$

（B）兩變數之積之極限等於其極限之積，即

$$\lim(xy)=(\lim x)(\lim y)。$$

（C）若分母之極限異於零，則兩變數之商之極限，等於其極限之商，即如 $\lim y\neq 0$,

$$\lim\frac{x}{y}=\frac{\lim x}{\lim y}。$$

推證上列各定理之方法均係先利用方程 (3) 而照尋常之演算法進行。茲因（C）定理之證較難，特逐步推演之如下，至於（A）與（B）兩定理，可由讀者自證之。

令 $\lim x=a$, $\lim y=b\neq 0$。吾人所欲證者爲 $\lim\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$，或按方程(3)，吾人只須證

$$\frac{x}{y}-\frac{a}{b}=m$$

係一無窮小。x 與 y 之極限既分別爲 a 與 b，故按方程(3)，令 h 與 k 爲兩無窮小，則可寫 $x=a+h$, $y=b+k$。故

$$\frac{x}{y}-\frac{a}{b}=\frac{a+h}{b+k}-\frac{a}{b}=\frac{bh-ak}{b(b+k)}。$$

今 a 與 b 均爲常數，而 $b\neq 0$，故按(1-4)節（A）與（B）兩定理，分子 $bh-ak$ 仍爲無窮小，又按同節（D）定理，最後分數實爲無窮小，因分母 $b(b+k)$ 之極限爲異於 0 之常數 b^2 也。

推廣上列各定理，即可得下列各系：

[系 1]　若 c 爲一常數,則

$$\lim(x+c)=(\lim x)+c$$

$$\lim(cx)=c\lim x,$$

$$\lim\frac{c}{x}=\frac{c}{\lim x}\text{(但 }\lim x\neq 0\text{)。}$$

[系 2]　設若干變數 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots$ 之極限分別爲 a_1, a_2, $a_3\cdots\cdots$,則

$$\lim(x_1\pm x_2\pm x_3\cdots\cdots)=\lim x_1\pm\lim x_2\pm\lim x_3\pm\cdots\cdots$$

$$=a_1\pm a_2\pm a_3\pm\cdots\cdots,$$

而

$$\lim(x_1 x_2 x_3\cdots\cdots)=(\lim x_1)(\lim x_2)(\lim x_3)\cdots\cdots$$

$$=a_1 a_2 a_3\cdots\cdots\text{。}$$

[系 3]　若 n 表一正整數,而 $\lim x=a$,

則

$$\lim(x^n)=(\lim x)^n=a^n\text{。}$$

1-6. 函數　各問題中常遇二個或較多之變數互有關係。如是當某變數或若干變數之值確定之後,另一變數之值亦因之而確定。今名後一變數爲前者之函數 (function)。例如 x 及 y 爲二變數,今若在某一定範圍內指定 x 之值後,y 皆有一確定之值與之相應,則在此範圍內 y 爲 x 之函數。據此以言,則於方程(1)中 y 爲 x 之函數,x 亦可視爲 y 之函數。他例如

(A)　$y=x^3$ 或 $y-2x^3-x+1=0$,

(B)　$y=\sqrt{a^2-x^2}$ 或 $y=\sin^{-1}x$,

(C)　$u=\dfrac{x^2}{x+y}$, $u=\dfrac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 或 $u-\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=0$,

(D) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

皆是。在(A)中，y 顯然為 x 之函數；在(B)中，於適當範圍內，y 亦為 x 之函數（試言此範圍！）。在(C)中，u 為 x 及 y 兩變數之函數，而在(D)中則 r 為 x,y,z 三變數之函數矣。（本書所討論者，除最後數章或有特別聲明者外，均為一個變數之函數。）

在一函數關係中，可由吾人任意給與價值之變數常名為自變數 (independent variable)；隨自變數之值而變之變數則名為應變數 (dependent variable)。某變數之函數，均可視作應變數。由此言之，某問題中之各變數何者係自變數，何者為應變數，實無嚴格之分界，多少均隨計算者之觀點而定。

1-7. 函數之表顯法 為便利起見，上節所舉各函數之例均用方程表之。其實各種函數未必均能用方程表之。例如變數 x 之最大整數(所謂某數 a 之最大整數，即指不超過 a 之整數中之最大者，例如 2.3 之最大整數為 2，-5 之最大整數為 -5)顯為變數 x 之函數，然甚難以一方程表之。有時在某範圍內，須用幾個方程方能表示一函數；例如有一函數 y，在 $x=-1$ 與 $x=0$ 之間（-1 在內，0 除外），其與 x 之關係可以

$$y=\sqrt{1-x^2}, \quad (-1\leqq x<0)$$

表之；惟當 $x=0$ 時，此函數等於 0，即

$$y=0, \quad (x=0)$$

且當 x 為正惟較 2 為小時，此函數則由

$$y=\log_{10}(2-x), \quad (0<x<2)$$

定之,如是,此三方程亦可確定 y 爲 x 於 -1 至 2 間隔內之函數。

能用方程表顯之函數,其討論法多可取所謂解析(analytic) 方法。至若不能用方程表顯之函數,有時常用圖解 (graphic) 方式,或逕將各變數與其函數相應各值列爲一表以資參考。在純粹數學家眼中,後兩式實不及前者雅緻,然在實用方面,後二式常反較重要,此實因解析方法有時甚難使用也。

圖解方法,其準確程度常爲繪圖者之技術所限制,然能將全題之關係活躍的表於一有限之圖紙上,使人一目了然,係其優點。至如圖解之外,復佐以準確之表,則其應用將爲更廣。惟圖表所佔之篇幅終比一方程或數方程所佔者較大,是其弱點耳。

1-8. 直角坐標圖示法　常見之圖示法係用直角坐標(rectangular co-ordinates)。令 y 表 a 至 b 間隔內之函數。在紙上取兩正交直線如 OX 及 OY 爲坐標軸線。以適當之距離爲單位;在所規定之間隔內,於 OX 軸上自 O 點量起,劃出 x 單位之長度以作 x 之某任意值(正值自 O 向右量,負值則自 O 向左量),如圖(1-1)中之 x 點。在此點豎立一平行於 OY (即正交於 OX)之直線。於其上用同大小之單位求得 P 點,使 xP 之距離等於 y 單位之長度(正值向上量,負值向下量)。自前此函數定義言之,此等 P 點之分佈,實無限制,惟若函數係單值的(見後 1-14 節),則在規定間隔內,每條與 OY

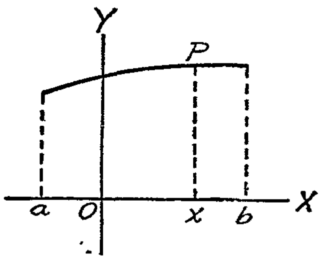


圖 1-1

平行之 xP 直線上只能有一個 F 點。由是求得之各 P 點所密佈之曲線卽爲表 y 爲 x 之函數之圖線。微積分學中所討論之函數除爲無限大(1-11 節)，或有間斷(1-12 節)者外，其圖線多可以一連續曲線表之，如圖(1-1)。玆舉兩例如次：

例 1. 試畫出曲線之圖：

$$y=x^2+2x-1。$$

此圖爲一拋物線，頂點位於$(-1,-2)$，如圖(1-2)所示。

例 2. 試畫出表示一變數之最大整數之圖。

此函數之形狀有如圖(1-3)所示。在圖(1-3)中，小圈係用以表示不屬於圖線之點，此蓋因在本題中，某整數之最大整數卽爲 x 而不等於 $x-1$ 故也。例如 $x=2$ 時，函數之值亦爲 2，而不等於 1，故 ab 線上 b 端之點不屬於本圖線而用小圈以圈去之。

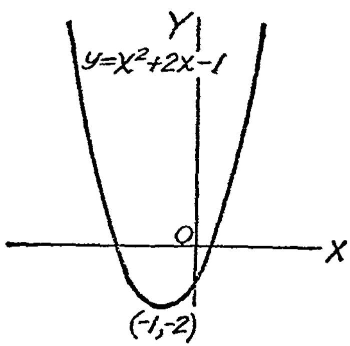


圖 1-2

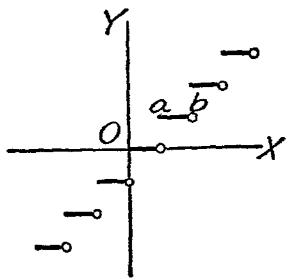


圖 1-3

1-9. 函數之普通記號及其運用 設吾人所討論之函數，其形式不受何種特別拘束，通常多用

$$f(x),\phi(x),F(x)$$

等等記號表之。此等記號之意義乃以示 x 之各種函數,切不可視爲 f 乘 x, 或 ϕ 乘 x, 或 F 乘 x。在有些問題中,自變數 x 可勿須寫出,而表示其函數時,將之略去不寫亦無不可,例如 f, ϕ, F 等。

設 $f(x)$, $\phi(x)$, $F(x)$……係指某特別形式之函數,吾人常可將之列作方程,例如

$$f(x)=x^2+2x-1,$$

$$F(x)=4x,$$

$$\phi(x)=\log_{10}x,$$

等等。若照此規定,則 $f(3)$, $F(3)$ 及 $\phi(3)$ 之值,係指以 3 代方程右方 x 後所計得之各值,卽

$$f(3)=3^2+2\times3-1=14; \qquad f(a)=a^2+2a-1;$$

$$F(3)=3\times4=12; \qquad F(a+b)=4(a+b);$$

$$\phi(3)=\log_{10}3=0.477; \qquad \phi(ab)=\log_{10}(ab);$$

又 $$F[f(x)]=4[f(x)]=4x^2+8x-4,$$

而 $$F[f(3)]=F(3^2+2\times3-1)=F(14)=4\times14=56。$$

1-10. 函數之極限 設當 x 可由任何情形趨於 c 時(但其所取之值均不等於 c),其函數 $F(x)$ 亦趨於一極限 A, 則此極限常以

$$\lim_{x\to c} F(x)=A$$

表之。例如 $F(x)=x+1$, 則 $\lim\limits_{x\to1}F(x)=2$。有時 x 僅可由較大於 c 或較小於 c 之數趨近 c, 則其記號常分別寫爲

$$\lim_{x\to c+} F(x)=A \text{ 及 } \lim_{x\to c-} F(x)=A。$$

例如 $F(x)=\sqrt{1-x}$，則 $\lim\limits_{x\to 1-} F(x)=0$。

但 $F(x)=\sqrt{x-1}$，則 $\lim\limits_{x\to 1+} F(x)=0$。

若$f(x)$爲x之有理函數 (rational function)，卽

$$f(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n},$$

且當 $x\to c$ 時，分母之極限不等於 0，則按(1-5)各定理卽知

$$\lim_{x\to c} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to c}(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_m)}{\lim\limits_{x\to c}(b_0x^n+b_1x^{n-1}\cdots\cdots+b_n)}$$

$$=\frac{a_0\lim\limits_{x\to c}(x^m)+a_1\lim\limits_{x\to c}(x^{m-1})+\cdots\cdots+a_m}{b_0\lim\limits_{x\to c}(x^n)+b_1\lim\limits_{x\to c}(x^{n-1})+\cdots\cdots+b_n}$$

$$=\frac{a_0c^m+a_1c^{m-1}+\cdots\cdots+a_m}{b_0c^n+b_1c^{n-1}+\cdots\cdots+b_n}=f(c)。$$

是以若$f(x)$爲有理函數，而以c代$f(x)$中之x時未曾遇及以 0 爲分母之演算，則 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$。

設當演算$f(c)$時，其中曾有分母爲 0 之項，則 $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ 之值爲何，須另行考究。此等問題頗似算術中之 $\frac{a}{0}$ 或 $\frac{0}{0}$ 各數，實則並非相同。蓋吾人對於分母爲 0 之數，根本卽認爲無意義而不加以討論。惟若分母之極限爲 0，其意義與分母爲 0 之意義又不盡相同矣。茲特申論之。

設 $F(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$。當 $x=1$ 時，$F(x)$之形式變爲 $\frac{0}{0}$，照理應無

意義。但若吾人所討論者非 $x=1$ 時 $F(x)$ 之值，乃 $\lim\limits_{x\to1}F(x)$，則因 $x\to1$ 而非等於 1，故可自分子及分母消去 $x-1$ 一因數,而寫

$$F(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1,$$

如是 $\lim\limits_{x\to1}F(x)=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$。換言之,在此題中 $F(1)$ 係無意義，但 $\lim\limits_{x\to1}F(x)=2$ 則有意義！由此觀之，若分子與分母均含 $(x-c)$ 因數，則將此因數消去後,再令 $x\to c$ 即可求得 $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ 之值。

此外,有時須先將分母及分子乘以適當之因數,然後方能消去其中之共同因數 $(x-c)$,例如

$$f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+x-3}-\sqrt{x^2-1}},$$

當 $x=2$ 時，分子及分母均爲 0 。茲將二者各乘以 $\sqrt{x^2+x-3}+\sqrt{x^2-1}$ 則有

$$f(x)=\frac{(x^2-4)(\sqrt{x^2+x-3}+\sqrt{x^2-1})}{x^2+x-3-x^2+1}$$

$$=\frac{(x^2-4)(\sqrt{x^2+x-3}+\sqrt{x^2-1})}{x-2}$$

惟若 $x\neq2$，則此函數可寫作

$$f(x)=(x+2)[\sqrt{x^2+x-3}+\sqrt{x^2-1}]$$

今 $x\to2$ 而非 $x=2$，故

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}(x+2)[\sqrt{x^2+x-3}+\sqrt{x^2-1}]$$

$$=4[\sqrt{3}+\sqrt{3}]=8\sqrt{3}$$

1-11. 無限大 在上節中吾人僅討論當 $f(c)$ 中含 $\frac{0}{0}$ 項時 $\lim_{x\to c} f(c)$ 之值，若 $f(c)$ 中有 $\frac{a}{0}$ 之項，其意義如何尙須另究。

設有變數，其值可無限增大，換言之，任意指定一甚大之正數 A，x 之值最後可變爲較 A 更大。依照(1-4)之定義，x 本無極限可言，然爲便於措詞起見，吾人常謂 x 以正無限大爲極限（或 x 趨於正無限大）而以

$$\lim x=+\infty \text{ 或 } x\to+\infty$$

表此意。又若自某値始，x 之變化法則永爲負，而其絕對值可較任何甚大之正數爲更大*，則稱 x 以負無限大爲極限（或 x 趨於負無限大），而以

$$\lim x=-\infty \text{ 或 } x\to-\infty$$

表之。此外，常用 $\lim x=\infty$ 以表 $|x|=+\infty$。例如 x 之變化法則爲 1，-2，3，-4，……，則 $\lim x=\infty$。

定理 A 令 a 爲任意常數，則有 $\lim_{x\to\infty}\frac{a}{x}=0$

蓋令 m 代表任意一甚小之正數，欲 $\left|\frac{a}{x}\right|<m$，祇須 $|x|>\frac{|a|}{m}$ 卽可。例如欲使 $\left|\frac{2}{x}\right|<0.001$，祇須 $|x|>\frac{2}{0.001}=2000$。

定理 B 令 a 爲異於 0 之常數，則有 $\lim_{x\to0}\frac{a}{x}=\infty$。

* 有時亦簡云"若 x 無限減小"，但無限減小並不指 x 爲無窮小！茲特措詞如上，以免誤會。

蓋令 c 代表任意一甚大之正數，欲$\left|\frac{a}{x}\right|>c$，祇須$|x|<\frac{|a|}{c}$即可。例如欲使$\left|\frac{2}{x}\right|>1000$，祇須$|x|<\frac{2}{1000}=0.002$。

上述兩定理可簡寫爲：（A）$\frac{a}{\infty}=0$ 及（B）$\frac{a}{0}=\infty$（$a\neq 0$）。吾人亦常以 $F(\infty)$代表 $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$；且若 $\lim\limits_{x\to c}F(x)=\infty$ 則簡寫之爲 $F(c)=\infty$。凡此皆爲便利起見，慎勿因而發生誤會而將∞認作一普通之數。例如 $\frac{a}{\infty}=0$ 應視爲一整個的記號，其所代表之意義爲：一常數以一趨於∞之變數除之，其商之極限爲 0，而不應視爲 a 被∞除後其商爲 0 也。

1-12. 連續函數 由函數之圖線，一望即知其係連續與否。例如(1-8)節之例(1) 中，y 乃 x 之連續函數，因其圖線乃一連續之曲線故也；而例(2)所舉之函數，則於 x 爲整數時係間斷的(discontinuous)。然遇一函數，若必待將其圖線畫出，方知其是否連續，則不但手續太繁，且有時亦不可能。故吾人乃規定一解析的定義如下：令 $f(x)$ 表變數 x 之函數；若 $x\to c$ 時，$f(x)$ 所趨之極限，等於 $f(x)$ 於 $x=c$ 時之值，即 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=f(c)$，則稱 $f(x)$ 於 $x=c$ 爲連續。若 $x\to c$ 時此條件不能滿足，則 $x=c$ 點稱爲 $f(x)$ 之一間斷點 (point of discontinuity)。例如 $\lim\limits_{x\to c}(x^2+2x-1)=c^2+2c-1=f(c)$，故知 x^2+2x-1 在各點皆爲連續。又若令 $f(x)$代表 x 之最大整數，則當 c 非整數時，$\lim\limits_{x\to c}f(x)=$($c$ 之最大整數)$=f(c)$。但 c 爲整數時，則當 x 自較大於 c 之值趨近 c 時，其極限爲 c，而當 x 自較小於 c 之值趨近 c 時，其極限爲$(c-1)$；換言

之，$\lim\limits_{x\to c+}f(x)=c$ 而 $\lim\limits_{x\to c-}f(x)=c-1$，故 $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ 根本不存在。是以 $f(x)$ 於 x 非整數時爲連續，而於 x 等於整數時爲間斷的（見圖 1-3）。

若 $f(x)$ 於 $x=a$ 至 $x=b$ 間 $(a<b)$ 之各值爲連續，且 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=f(a)$，$\lim\limits_{x\to b-}f(x)=f(b)$，則 $f(x)$ 稱爲連續於 a 至 b 間隔內。

按照(1-10)節所述，凡 x 之有理函數，除其分母爲 0 之點外皆爲連續；故 x 之多項式恆爲 x 之連續函數。又如當 $x\to c$ 時，$\lim\limits_{x\to c}F(x)=A$，雖然 $F(c)$ 無確定值，吾人常亦規定 $F(c)=A$，蓋如是則 $F(x)$ 於 $x=c$ 時可以連續也。

1-13. 間斷點 吾人於解析幾何中知 $y=\dfrac{1}{x}$ 之圖線爲一雙曲線（圖 1-4）；$x=0$ 時 y 之值未確定。當 x 由正數趨於 0 時，y 趨於 $+\infty$；x 由負數趨於 0 時，y 趨於 $-\infty$，故無論規定 y 於 $x=0$ 時之值爲何，皆不能使其連續於 $x=0$。

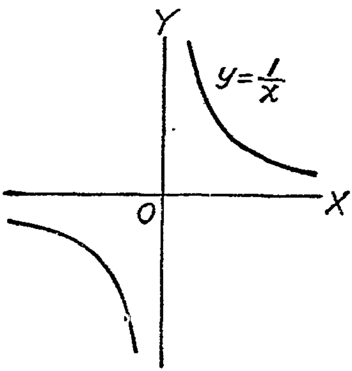


圖 1-4

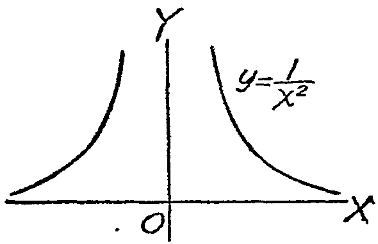


圖 1-5

$y=\frac{1}{x^2}$之圖線如圖(1-5)所示。x由任何情形趨於0時,y皆趨於$+\infty$,即$\lim\limits_{x\to0}y=+\infty$,故0爲一間斷點。或謂令$y$於$x=0$時之值爲$+\infty$則爲連續矣。此說甚不合理,蓋$\infty$旣非數,自不能以之爲函數之值也。

上述之兩函數,其間斷點皆因函數之值趨於無限大而起,然間斷點之情況尙不止此。例如(1-8)節中之例(2)。玆再另舉一例以明之:設$y=f(x)$,當$x\leqq1$時$f(x)=x-1$,但當$x>1$時,$f(x)=x$,則$x=1$爲一間斷點;因$f(1)=0$而$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1$也。其圖線包含兩條半直線(圖1-6),$C$點用小圈圈去,以示其不屬於此圖線。

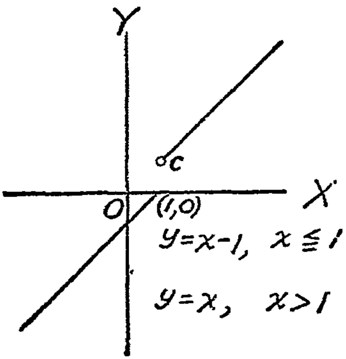


圖 1-6

1-14 函數之名稱　爲便於表示其某種特性起見,吾人常用下述各名稱:

(A)連續函數與間斷函數　函數之連續與間斷之意義,已於(1-12)節中詳細說明,玆不再贅。

(B)單值函數與多值函數　設對於x之一值,y只有一值與之相應,則稱y爲x之單值函數(single-valued function);若與x一值相應之y之值在兩個以上,則稱y爲x之多值函數(multiple-valued function),例如$\pm\sqrt{x^2+1}$,$\sin^{-1}x$均爲x之多值函數。對於x之一值,前者有兩相應之值,後者則有無窮多

之值與之相應（見後第八章）。本書中所謂函數，概指單值函數而言。如遇多值函數時，則將分之爲數個單值部分而分別討論之。

（C）隱函數與顯函數　由未解出之方程式所確定之函數名爲隱函數(implicit function)。例如：$x^2-2y=0$ 確定 y 爲 x 之隱函數。由此方程中將 y 解出，得 $y=\frac{x^2}{2}$，y 乃成爲 x 之顯函數(explicit function)。關於隱函數，吾人將於(2-9)節中再論及之。

（D）整數的與分數的有理函數　函數之可簡化爲 x 之多項式(polynomial)者名爲整數的有理函數(integral rational function)；其可簡化爲兩個多項式之商者名爲分數的（fractional）有理函數：例如：x^4+5x-1 爲整數的有理函數，而 $\frac{x^3-1}{x^2+5}$ 則爲分數的有理函數。

（E）代數函數與越函數　若函數 $y=f(x)$ 能滿足 x 與 y 之一代數方程 (algebraic equation)，則稱該函數爲代數函數 (algebraic function)。所謂代數方程云者，蓋指具 $P(x,y)=0$ 型之方程式 [$P(x,y)$ 表 x, y 之多項式]。例如 $y=\sqrt{x}$ 爲代數函數，因其滿足 $y^2-x=0$ 也。又凡 x 之有理函數均爲代數函數，例如 $y=\frac{x}{x^2+1}$ 滿足 $x^2y+y-x=0$ 一方程。

不能滿足代數方程之函數如 $y=\sin x$, $y=\log x$ 等，則稱爲越函數(transcendental function)。

（F）同意義的方程與反函數　設 $y=f(x)$ 爲 x 之一函數。今將此方程解答使 $x=g(y)$ 爲 y 之函數，則所得之兩方程實具同樣意義。茲

名函數f(或g)爲g(或f)之反函數 (inverse function)。例如

$$y=\sqrt{x}$$

爲x之函數,其同意義的方程(equivalent equation)

$$x=y^2$$

則表x爲y之函數,又如

$$y=\sin x \quad 及 \quad x=\sin^{-1}y$$

其意義實係相同,而$y=f(x)=\sin x$與$y=g(x)=\sin^{-1}x$則互爲反函數。

第一章習題

1. 下列各數何者爲有理數,何者爲無理數,何者爲虛數?

(a)π^2, (b)$\sqrt{16}$; (c)$\sqrt[3]{-1}$; (d)$\sqrt[4]{-9}$; (e)$\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$。

2. 設$x=\sqrt{5}+\sqrt{-3}$爲一四次方程式之一根而方程式各係數均爲有理數;問其他三根爲何?又問此四次方程式爲何?

3. 設x依下列之法則而變,問所趨之極限各爲何?

(a)0.3, 0.33, 0.333,……, (b)$1\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$, $1\frac{3}{4}$,……,

(c)1,0,1,0,1,0,……,

(d)$-1,0,-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{4},0,-\frac{1}{8},0,\cdots$,

(e)$1,\frac{1}{2}$, $1,\frac{1}{3}$, $1,\frac{1}{4}$,……, (f)$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4}$……。

4. 試求下列各極限之值:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{x^3-5x^2-4x-2}$　　(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x}{7x^2+4}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+1)(x-2)}{(4x^2+2x-3)x}$　　(d) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^4-3x^2+2x+1)$

(e) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$　　(f) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x^3+5x^2-5x+1}{3x^2-2x-1}$

(g) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{3x^2-4x+1}\right)$ (h) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}$

5. 若 $f(x)=x^4+2x^2-x+3$，試求 $f(0)$，$f(-1)$，$f(\frac{1}{2})$，$f(5)$。

6. 若 $f(x)=4x$，試示 $f(a)+f(b)=f(a+b)$。

7. 若 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，試示 $[f(x)]^2=f(x^2)+2$。

8. 若 $y=f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，試示 $x=f(y)$。

9. 設於 $x=c$ 點，$f(x)$ 及 $F(x)$ 皆爲連續，試證於此點 $f(x)+F(x)$ 及 $f(x).F(x)$ 均連續，且若 $F(c)\neq0$，則 $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 亦連續於此點。

10. 試述下列函數之間斷點：

(a) $\dfrac{x^2+4}{x^2-3+2}$，　(b) $\dfrac{(2x+5)(x-6)}{(x+1)^2(x-3)}$；　(c) $\dfrac{x-1}{x^2+2x+4}$，

(d) $\dfrac{x-4}{\sqrt[3]{x^2-4x+3}}$；(e) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x+1}$。

11. 試在方格紙上畫出下列函數之圖線，並加以說明：

(a) $y=1-|x|$；　　(b) $y=\dfrac{1}{1-|x|}$，

(c) $f(x)=\begin{cases}-1, x<0\\ 0, x=0;\\ +1, x>0\end{cases}$　　(d) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}$。

12. 試畫 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 及 $y=x+1$ 之圖線於方格紙,以區別其異點!

13. 若 $x=2+\sqrt{y^2+2y}$,問將 y 表爲 x 之函數時,其方程式爲何? y 是否 x 之單值函數?又問此兩方程與 $x^2-y^2-4x-2y+y\doteq0$ 方程異同之點何在?

14. 若郵政局規定,國內信件不超過二十克者收費壹元,過此則每二十克加收壹元(不及二十克之尾數以二十克計)。郵資之數目既視信之重量而定,故前者可視爲後者之函數。試作圖線以表此函數,並將其間斷點加以說明。

15. 抗戰初期中公務員之原定薪額在50元以下者悉按原額實支,其在50元以上者均先支基本生活費50元,再將餘額按八折實支。試求表實支薪額 y 爲原定薪額 x 之函數之方程,並作圖線以示之。

16. 有甲乙兩工人,若乙助甲作工七日,則甲需十日完成一工,若甲助乙作工八日,則乙需十二日完成同工,問甲或乙單獨工作時,其所需之日數各若干?

17. 有五童合購栗子 z 粒,因天晚未及分配,乃相約先就寢,待翌晨再行均分。就寢後第一童恐爲其同伴所詒,乃私自起牀,擬取所購栗子之五分之一,惟分爲五相等部分後,尚多餘一粒,彼乃食此粒而私存餘數之五分之一。不久第二童亦私自起牀,將第一童所留下之栗子分爲五相等部分,食去其多餘之一粒,而私存餘數之五分一;是後,其他三童各次第起牀食一粒而私存餘數之五分一。若 $A, B, C,$

D,E 表各童所私存之數目，z 表栗子總數，試將 A,B,C,D,E 表為 z 之函數。又計 z 之最小數目為何。

18. 有長 L 里之隊伍，前進速度每小時為 V 里。今一信差自隊伍最後一人手中取得一信，而以每小時 W 里之速度送達於隊伍第一人，換得收據後，立即將收據送於發信人。問發信人收到收據之時，其所行之距離若干里？

19. 若 h 表鐘表上短針所示之鐘點，m 表長針所示之分鐘，問當長短兩針位置完全重疊之時，h 與 m 之關係若何？試列表以示二者重疊之各時刻。

20. 設有一四位之數，其各號碼之值係自左遞減於右。今自此數減去將其四數碼倒排之數；若所得之差再加以將差數各數碼倒排之數，則無論原數為何，其結果恆為 10890。（例如原數為 7421；倒排之數為 1247；7421－1247 為 6174；將此倒排則得 4716；6174＋4716 為 10890。）試說明其故。

第二章　代數函數之紀數

2-1 函數之變化——增量　在甚多問題中，吾人不但注意兩數量間之關係，且常須討論各函數因自變數價值之改變而有之影響。此等變化情形以微分學 (differential calculus) 方法討論之最爲適當。茲爲使讀者對於此等問題先有一具體之概念起見，特藉圖 (2-1) 以陳述之。

設 $y=f(x)$ 表 x 之一函數。在所欲考究之範圍內，此函數係單值且連續的，茲以圖 (2-1) 中之曲線示之。今在曲線上任取一點 P_0，其坐標爲 x_0 與 y_0。設令 x 自 x_0 改爲 x_1，則函數 y 之值亦將自 y_0 改爲 y_1，而 P_0 點將改至 P_1 點。若 P_1 點距 P_0 頗近，則函數 y 所改變之值，即 (y_1-y_0) 將與自變數 x 所改變之值，即 (x_1-x_0)，幾成正比。此蓋因在 P_0 點鄰近，兩改變值之比，即

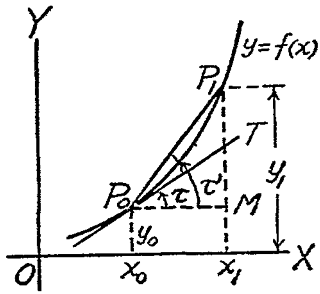


圖 2-1

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

幾爲一常數也。若就圖 (2-1) 言之，此比數有一簡單幾何的意義。因 $x_1-x_0=P_0M$，$y_1-y_0=MP_1$，故

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{MP_1}{P_0M}=\tan\tau'。$$

此中之 τ' 表 P_0P_1 割線(secant line)與 OX 軸線所作之角。今若任 P_1 點趨近 P_0 點，換言之，卽任 x_1 趨近 x_0，則 P_0P_1 割線將趨與切線 P_0T 符合，而 τ' 角之值將趨與 τ 角相等，τ 角卽表過 P_0 點而切於曲線之直線(tangent line)與 OX 軸所作之角也。是以吾人可寫

$$\lim_{x_1\to x_0}\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\tan\tau \tag{1}$$

微分學之基本問題爲尋求上列極限，並闡明其意義以及其應用。

爲便於措詞起見，玆名 x_1-x_0 爲 x 之增量(increment)，通常以 Δx 表之；y_1-y_0 爲 y 之相應增量，以 Δy 表之。在此兩記號中，Δ 與 x（或與 y）切不可分離；換言之，Δx（或 Δy）須視爲一個記號，不得視爲 Δ 乘 x！此外，讀者更須注意增量之符號可正可負。例如 x 由 5 變至 10，$\Delta x=5$；若 x 係自 6 變至 2.3，則 $\Delta x=-3.7$。又當 x 之增量爲 Δx，函數 $f(x)$ 之增量常亦寫作

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)。$$

2-2. 紀數之定義及其演算法 當自變數 x 之增量 Δx 趨於 0 時，函數 $y=f(x)$ 之增量 Δy 與 Δx 之比，其極限名爲 $y=f(x)$ 函數對於 x 之紀數(derivative)*。若以 D_xy 爲 y 對於 x 之紀數之記號，則本定義可以下列方程示之：

$$D_xy=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2}$$

表示函數 y 或 $f(x)$ 之紀數，有時亦用 y' 或 $f'(x)$；y' 一記號既然不如

* 紀數命名係從熊慶來氏，見其所著之高等算學分析一書。

$D_x y$ 或 $f'(x)$ 之確切，因其未將所求紀數係對 x 而言一事表明，誠以若 y 爲 x 之函數，而 x 又爲 t 之函數，則 y 不但對於 x 可有其紀數，且對於 t 亦可有其紀數，而此二紀數之值實不相同也（見後 2-8 節）。故如遇必須示明對 x 求紀數時，以用 $D_x y$ 或 $f'(x)$ 一記號較妥；若自變數僅有一個，對於此自變數之紀數即簡稱爲該函數之紀數。

玆先取函數 $y=x^2$ 論之。令 x_0 表 x 之一定值，y_0 表與此相應之值，則

$$y_0=x_0^2 \tag{3}$$

今將 x 之值改變，令其增量爲 Δx，即令 x_0 改爲 $x_0+\Delta x$。若 Δy 表因是而生之 y 之增量，即 y_0 改爲 $y_0+\Delta y$，則

$$y_0+\Delta y=(x_0+\Delta x)^2 \tag{4}$$

由(4)減去(3)，即得

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2 \tag{5}$$

將(5)之兩邊除以 Δx，乃有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0+\Delta x \tag{6}$$

若令 Δx 爲無窮小，則 Δy 亦爲無窮小；由(6)復知當 $\Delta x\to 0$ 時，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 比數之極限有一確定之值，即 $2x_0$ 是也。此值，即 $2x_0$，名爲在 x_0 點函數 y 之紀數，故在 $x_0=-1$, 0 及 3 諸點，y 之紀數各爲 -2, 0 及 6 諸值。

在計算上列問題時，未曾將數碼自始即行代 x，其用意係欲使所得之結果可以用於任何 $x=x_0$ 之點。x_0 既表 x 之任意值，爲簡便計，其下標 0 可以省去不寫而逕言 $y=x^2$ 函數之紀數爲 $2x$。據是以言，一函數

之紀數實爲自變數之一函數,因其值須視自變數之值爲何方定。求 $y=f(x)$ 對於 x 之紀數時，其步驟如下：令 y_0 表與 x_0 相應之值，Δy 表與 Δx 相應之增量。如是第一步先寫

$$y_0=f(x_0) \tag{7a}$$

及

$$y_0+\Delta y=f(x_0+\Delta x) \tag{7b}$$

第二步則由(7b)減去(7a)以得

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \tag{8}$$

第三步乃將(8)之兩邊除以 Δx 而得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{9}$$

第四步則令 Δx 趨於 0 而求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 之值。此乃 $x=x_0$ 時 D_xy 之值，可簡寫作 $(D_xy)_0$ 或 $f'(x_0)$。若演算時未曾將數碼自始卽代入，則將所得結果 x_0 之下標省去後卽爲所求之 y 之紀數。

例 1. 若 $y=2x^3+1$，求在 $x=1$ 點之 D_xy。

演算本題時可自始卽用數碼代入，或先求 D_xy 之普通值，然後再以 $x=1$ 代入結果中。茲開始卽用數碼以使各步驟更爲了然。

第一步：以 $x_0=1$ 代入 $y_0=2x_0^3+1$，得 $y_0=2+1=3$。以 $1+\Delta x$ 代入原方程中之 x 則得

$$y_0+\Delta y=2(1+\Delta x)^3+1=3+6\Delta x+6(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3。$$

第二步：$y_0+\Delta y=3+6\Delta x+6(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3$

$$\begin{array}{lcl} y_0 & = & 3 \\ \hline \Delta y & = & 6\Delta x+6(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3 \end{array}$$

第三步：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[6+6\Delta x+2(\Delta x)^2]=6$

故在 $x=1$ 點，$y=2x^3+1$ 對於 x 之紀數等於 6。

例 2. 設 $y=f(x)=x^2-2x+7$，求 $f'(x)$。

第一步：$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2-2(x+\Delta x)+7$

$$=x^2-2x+7+(2x-2)\Delta x+(\Delta x)^2$$

第二步：$\Delta y=\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=(2x-2)\Delta x+(\Delta x)^2$;

第三步：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=2x-2+\Delta x$,

第四步：$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=2x-2$;

是卽所求之紀數。於 $x=-4,0,1$ 諸點，其數值將各爲 -10，-2 及 0。

2-3. 紀數之存在問題 自上述可知某函數 $y=f(x)$ 在某點有紀數與否，純視當 Δx 趨於 0 時，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 是否趨於一確定之極限而定。此確定極限，據(1-11)節，應不包括無限大。換言之，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty$$

則 $f(x)$ 於 $x=x_0$ 點應認爲無紀數。然習慣上吾人常言 $f(x)$ 在此點有一無限紀數(infinite derivative)。此純屬於措詞問題。本書所謂紀數，除有特別聲明者外，概指有限紀數而言。

若 $f(x)$ 在 x_0 點係不連續，卽當 $\Delta x\to 0$ 時，$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 不趨於 0，則顯然 $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 不能趨於一定之極限。故如 $f(x)$ 在某點有紀數，此函數於是點必係連續！但反言之，連續於某點之函數在該

點未必卽有紀數。此事可就下列兩例見之。

例 1.　設於 $x\neq 0$ 時，$f(x)=x\sin\frac{1}{x}$，且規定 $f(0)=0$，則 $f(x)$ 於 $x=0$ 點爲連續函數，此蓋因無論 x 爲何值，$\left|\sin\frac{1}{x}\right|$ 均不大於 1，故 $|f(x)|=|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqq|x|$，而

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\pm|f(x)|\leqq\lim_{x\to 0}\pm|x|=0=f(0)$$

也。但 $\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\sin\dfrac{1}{\Delta x}$。而當 $\Delta x\to 0$ 時，其值並無確定之極限。是以在 $x=0$ 點，此函數雖爲連續，實未有紀數。讀者可注意，在 $x=0$ 附近，$x\sin\frac{1}{x}$ 之圖線無法完全繪出，是以討論此類函數時必須用解析方法。

例 2.　$y=|x|$ 係 x 之連續函數，其圖線爲一折線 AOB 如圖(2-2)。按定義此函數於 O 點無紀數，因當 x 爲正值時

$$y+\Delta y=x+\Delta x$$

$$\begin{array}{rl} y & =x \\ \hline \Delta y & =\Delta x \end{array}$$

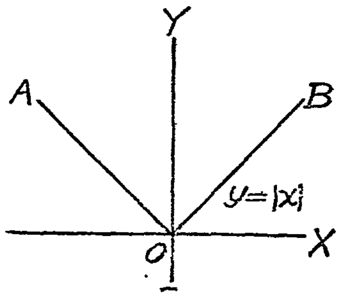


圖 2-2

故當 x 自正值趨於 0 時，

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$

惟若 x 自負值[例如 $(-x_0)$，x_0 爲正]趨於 0 時，則

$$y+\Delta y=|-x_0+\Delta x|=|x_0-\Delta x|$$

$$\begin{array}{rll} y &=|-x_0| &=|x_0| \\ \hline \Delta y &=|x_0-\Delta x|-|x_0| &=-\Delta x \end{array}$$

故當 x 自負值趨於 0 時，$\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-1$，而此二者並不相等，換言之，

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 實不確定。遇此等問題，吾人有時言函數於某點有一左紀數(left hand derivative)，及一右紀數(right hand derivative)，例如於原點 $y=|x|$ 之左紀數爲 -1，其右紀數則爲 1。

上述兩例乃以表示函數中之奇特者；本書此後所討論之問題雖不用及此等奇特函數，然讀者仍須記得數學中頗多此等函數。

2-4. 紀數之幾何的意義　(2-1)節曾用曲線上某點之割線與其切線之斜度(slope)，以顯示求紀數之緣起之一。(2-3)節例(2)之算法或不易了解，然就圖(2-2)所示，即可了然於 OB 及 OA 兩線之斜度各爲 1 與 -1 之理。函數之紀數宛如函數本身，如就圖線說明之，其意義更爲具體，茲特申論之。

設 P 及 Q 表 $y=f(x)$ 圖線上鄰近二點，圖(2-3)，P 之坐標爲 (x_0,y_0)，Q 之坐標爲 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$。若就前述之各步驟言之，

$$MP=y_0,\ SQ=y_0+\Delta y,\ OM=x_0,\ OS=x_0+\Delta x,$$

故 $\Delta y=SQ-MP=SQ-SR=RQ,\Delta x=OS-OM=MS=PR,$

而 $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{RQ}{PR}=\tan\ \angle QPR=\tan\tau'。$$

當 $\Delta x\to 0$ 時，Q將沿 $y=f(x)$ 曲線移動以趨近 P，而直線 PQ 則將以P點爲定點而轉動以趨與直線 PT 符合。於是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\tan\tau'=\tan\tau。$$

但此方程最左方係函數在 P 點之紀數，而其最右方 $\tan\tau$ 係過 P 點切於曲線之直線之斜度。惟曲線上一點之切線之斜度卽爲曲線過該點之斜度，是以自圖線言之，y 之紀數 D_xy 卽表 $y=f(x)$ 曲線上各點之斜度。若紀數之值係連續的，則曲線之斜度係漸漸變更，而曲線遂常稱爲光滑曲線。圖(2-4)示紀數爲 0 及紀數爲無限大之各情形。

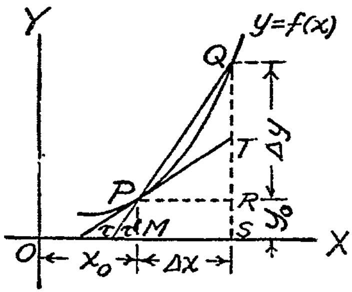


圖 2 3

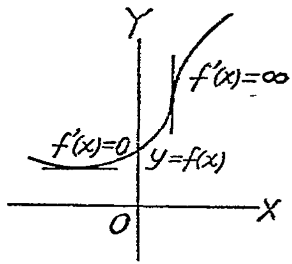


圖 2-4

2-5. 紀數之圖示法 若 $y=f(x)$ 可以方程表之，則求其紀數之步驟係如前述。在(2-2)節所述各步驟中，第四步所示之極限，卽 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 最難計算。若 $y=f(x)$ 之關係未能用方程表示之而只有其圖線，則其各

點之紀數之值亦可由(2-4)節所述之斜度計得之。如此計算,其準確程度當然視作圖時之精確程度而定。初學者往往因圖解法既繁長且不易準確而存蔑視之心。其實甚多實用問題所用之函數常不能以方程表之。遇此等問題時,圖解方法常爲惟一之解答工具。縱使作圖不甚準確,用圖解法所求得之事實,亦大有補於問題之解答,茲特將所用之步驟陳述如次:

(1)將此函數 $f(x)$ 之圖線畫好,圖(2-5)。(2)自適當間隔之點畫垂線 PP' 於 OX 軸以與圖線 $y=f(x)$ 相交,例如 $P_1,P_2,P_3\cdots\cdots$ 各點。(3)用一尖鉛筆及一尺邊謹愼的在其處畫一切於曲線之直線,如 $T'T'$。(4)任作 $T'TM$直角三角形,量 MT' 及 TM 之長而求其商 $\frac{MT'}{MT}$。是卽 P 點之紀數之絕對值。

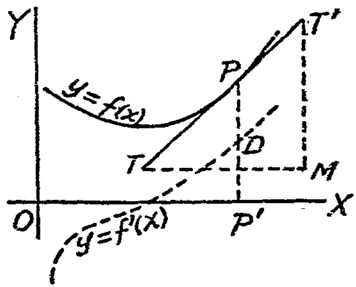


圖 2-5

(5)在 PP' 垂線上尋得一點 D,其距 OX 軸之遠度等於 $\frac{MT'}{MT}$ 之商之值,(如 $T'TM$ 角小於 $90°$,紀數爲正,則 D 點應在 X 軸之上;若 $T'TM$ 角大於 $90°$,紀數爲負,則 D 點應在 X 軸之下)。(6)依照此法卽可求得表示曲線上其他各點之紀數如 $D_1,D_2,\cdots\cdots$等。(7)將所得各 D 點聯以一曲線,其所表者卽爲函數 $f(x)$ 之紀數 $y=f'(x)$ 之圖線。

2-6. 求紀數之普通公式　下列各普通公式爲尋求各函數之紀數時所常用。

(A)一常數 c 之紀數爲 0，即 $D_x(c)=0$;

(B)數個函數 $u, v, w, \cdots\cdots$ 之代數和之紀數，等於其紀數之代數和，即 $D_x(u\pm v\pm w\pm\cdots\cdots)=D_xu\pm D_xv\pm D_xw\pm\cdots\cdots$,

(C)兩函數 u 及 v 之積之紀數等於（第一函數乘以第二函數之紀數）再加以（第二函數乘以第一函數之紀數），即

$$D_x(uv)=uD_xv+vD_xu;$$

(D)若 $v\neq 0$，函數 u 與函數 v 之商（即$\frac{u}{v}$）之紀數等於（分母乘以分子之紀數）減去（分子乘以分母之紀數）再以（分母之平方）除之，即

$$D_x\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vD_xu-uD_xv}{v^2}。$$

此四公式之證明均可根據紀數之定義求之，茲分別述之如下：

(A)令 $f(x)=c$，則 $f(x+\Delta x)=c$。故 $f(x+\Delta x)-f(x)=0$。

即 $$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0。$$

故 $$D_xf(x)=D_x(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0。$$

(B)令 $u=f(x), v=g(x)$。又令 $F(x)=f(x)+g(x)=u+v$。

則 $$F(x+\Delta x)=f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)=(u+\Delta u)+(v+\Delta v),$$

故 $$F(x+\Delta x)-F(x)=\Delta u+\Delta v,$$

而 $$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

即　$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}。$$

或　$$D_xF(x)=D_x(u+v)=D_xu+D_xv。$$

此結果顯然可推廣於$(u-v)$及$(u\pm v\pm w\pm\cdots\cdots)$等。

(C)同前，令$u=f(x)$，$v=g(x)$；又令$F(x)=f(x)\cdot g(x)=uv$；如是，$F(x+\Delta x)=f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)=(u+\Delta u)(v+\Delta v)$

$$=uv+v\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v,$$

故　$$F(x+\Delta x)-F(x)=u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v,$$

而　$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta u\Delta v}{\Delta x}。$$

是以　$$D_xF(x)=D_x(uv)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

$$=u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta u}+v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$=uD_xv+vD_xu。$$

(D)同前，令$u=f(x)$，$v=g(x)$，$v\neq 0$，又令$F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{u}{v}$；

如是，　$$F(x+\Delta x)=\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v},$$

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{(v+\Delta v)v},$$

而　$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)v},$$

故　$$D_xF(x)=D_x\left(\frac{u}{v}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)v}=\frac{vD_xu-uD_xv}{v^2}。$$

2-7．普通公式之應用　(2-6)節各公式係最基本的，由之可推出更便於引用者。茲舉數系於下：

[系1]　若 c 爲常數，$u=f(x)$ 爲 x 之函數，則

$$D_x(cu)=cD_xu。$$

引用公式(C)並注意公式(A)，卽 $D_x(c)=0$，卽可推得此結果。

[系2]　數個函數 $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n$ 之積之紀數爲

$$D_x(u_1\cdot u_2\cdot\cdots\cdots u_{n-1}\cdot u_n)=(u_2\cdot\cdots\cdots u_n)D_xu_1+(u_1\cdot u_3\cdot\cdots\cdots)D_xu_2$$
$$+\cdots\cdots+(u_1\cdots\cdots u_{n-1})D_xu_n\ (\text{共 } n \text{ 項})$$

令 $u=u_1, v=(u_2\cdot\cdots\cdots u_{n-1}\cdot u_n)$，引用公式(C)則得

$$D_x(u_1\cdot u_2\cdot\cdots\cdots u_{n-1}\cdot u_n)$$
$$=(u_2\cdot\cdots\cdots u_n)D_xu_1+u_1D_x(u_2\cdots\cdots u_{n-1}\cdot u_n);$$

再引用公式(C)以求 $D_x(u_2\cdot\cdots\cdots u_{n-1}\cdot u_n)$ 卽可得 $D_x(u_1u_2\cdot\cdots\cdots u_{n-1}u_n)$ $=(u_2\cdot\cdots\cdots u_n)D_xu_1+u_1(u_3\cdot\cdots\cdots u_n)D_xu_2+u_1u_2D_x(u_3\cdot\cdots\cdots u_n)$。

如是類推以求 $D_x\ (u_3\cdots\cdots u_n)$ 及此後各積之紀數卽可推出所欲得之結果。

[系3]　若 n 爲任意整數，包括0在內，

則　$$D_x(u^n)=nu^{n-1}D_xu。$$

先假定n爲正，在(系2)中，令$v_1=u_2=\cdots\cdots u_n=u$，則此公式之左方爲$D_x(u^n)$，而其右方各$n$項均相等，每項之値則爲$u^{n-1}D_xu$，故知上列結果屬眞。若$u=x$，則$D_xx=1$；故$D_xx^n=nx^{n-1}$。此結果顯然亦可用於$n=0$時，因$u^0=1$，而$D_x1=0$也。若$n$爲負整數，可令$n=-m$（$m$爲正整數），如是

$$D_x(u^n)=D_x\left(\frac{1}{u^m}\right),$$

而公式(D)得以引用。由是乃有

$$D_x\left(\frac{1}{u^m}\right)=\frac{u^mD_x1-D_xu^m}{u^{2m}}=\frac{0-mu^{m-1}D_xu}{u^{2m}}$$

$$=-mu^{-m-1}D_xu=nu^{n-1}D_xu。$$

其實此公式中之n不必限於正負整數，卽n爲任何有理或無理數，此公式亦屬眞確，惟其證明須俟後方能論及。

自本結果觀之，最難記憶之公式(D)其用法實已包括在(C)之內。故演算時常先將函數略加簡化然後用引公式(A)，(B)，(D)或本節之(系1)，以求簡捷。譬如

$D_x\left(\frac{x^3}{5}\right)$之値可用公式(D)及(系1)與(系3)結果而求之如下：

$$D_x\left(\frac{x^3}{5}\right)=\frac{5D_xx^3-x^3D_x5}{5^2}=\frac{5(3x^2)-x^3\cdot 0}{5^2}=\frac{3}{5}x^2,$$

但如先將$\frac{1}{5}$常數移至D_x記號之外，再引用(系1)與(系3)之結果，則直接卽可得$D_x\frac{x^3}{5}=\frac{1}{5}D_xx^3=\frac{3}{5}x^2$。兩者相較，其繁簡笨捷不難立見。

又例如

$$D_x\left(\frac{x^5+2x-1}{x^2}\right)=D_x(x^3+2x^{-1}-x^{-2})=3x^2-2x^{-2}+2x^{-3},$$ 較諸用公式(D),亦見便捷。

2-8. 函數的函數之紀數 在不少問題中,表示某函數 y 時,常先表之爲一變數 u 之函數,然後再表 u 爲自變數 x 之函數。若將 u 消去,則 y 顯然爲 x 之函數。茲所欲討論者卽 y 對於 x 之紀數與 y 對於 u 之紀數及 u 對於 x 之紀數三者之關係。令 $y=f(u)$, $u=\phi(x)$, 且設 $D_uy=f'(u)$ 及 $D_xu=\phi'(x)$ 均存在。如是則

$$D_xy=D_u(y)D_x(u)=f'(u)\phi'(x) \tag{10}$$

換言之,(y 對於 x 之紀數)等於(y 對 u 之紀數)乘以(u 對 x 之紀數)。欲證此公式,令 x 之增量爲 Δx, u 之增量爲 Δu, 而與之相應之 y 之增量爲 Δy。因

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

且當 $\Delta x\to0$ 時, $\Delta u\to0$, 故

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

惟 $\lim\limits_{\Delta u\to0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)$, $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\phi'(x)$ 均存在,故

$$D_x(y)=f'(u)\phi'(x)。$$

例 1. 求 $D_x(3x-5)^4$。

設令 $$u=(3x-5),y=u^4$$

則 $$D_uy=4u^3,D_xu=3,$$

故 $$D_xy=4u^3\cdot3=12u^3=12(3x-5)^3,$$

或連寫之爲 $D_x(3x-5)^4=4(3x-5)^3D_x(3x-5)=4(3x-5)^3\cdot 3$

$$=12(3x-5)^3。$$

例 2.
$$D_x\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2D_x\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$$=3\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\left[\frac{(1+x)(-1)-(1-x)(1)}{(1+x)^2}\right]$$

$$=3\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\left[\frac{-2}{(1+x)^2}\right]=-\frac{6(1-x)^2}{(1+x)^4}。$$

2-9．代數的隱函數之紀數　設 x 之函數 y 係由一未解出 y 之方程確定之，則 y 稱爲 x 之隱函數〔見前 1-14 節(C)〕。例如

$$x^2+y^2=a^2 \qquad (A)$$

$$x^3-2xy+y^5=0 \qquad (B)$$

或
$$xy\sin y=x+y\log x \qquad (C)$$

之類。若表此函數之方程 $f(x,y)=0$ 係由 x 與 y 之多項式組成，例如 cx^my^n 各項之和（參較 A，B 二式），則 (x,y) 名爲 x 及 y 之代數方程（見前 1-14 節）。若代數方程 $f(x,y)=0$ 中之 y 可以解出，而其解式之一爲 $y=\phi(x)$，則此函數 $y=\phi(x)$ 名爲代數函數〔見前 1-14 節(D)〕，而 $f(x,y)=0$ 即爲確定此代數隱函數之方程。至於 $f(x,y)=0$ 之圖線將包括所有之 $y=\phi(x)$ 各顯函數之圖線在內。尋求此等代數函數之紀數時，固可由 $f(x,y)=0$ 方程先解出 $y=\phi(x)$，然後再引用前此各步驟，然此法實非必要。且解原方程之手續實際上或甚繁或竟不可能，故欲求隱函數之紀數時，最好須就原方程 $f(x,y)=0$ 算之。算法之理如下：令 $z=f(x,y)=0$，則

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=0,$$

故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta z}{\Delta x}=D_x[f(x,y)]=0$。此即表示若將 $f(x,y)=0$ 一方程中各項分別求其紀數，並視 y 爲 x 之函數，則所得之結果（即 $D_x[f(x,y)]=0$）將爲 x 及 $y=\phi(x)$，與 $D_xy=\phi'(x)$ 三者相對應之各值所滿足。由此解出 D_xy 卽爲所求之結果，惟其中常含 y 在內！

例　自 $x^3+y^3-3axy=0$，求 D_xy。

依次求其紀數，並視 y 爲 x 之函數，則

$$3x^2+3y^2D_xy-3ay-3axD_xy=0,$$

或
$$3x^2-3ay+(3y^2-3ax)D_xy=0,$$

卽
$$D_xy=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}。$$

若方程之原狀爲 $f(x,y)=F(x,y)$，則可逕求其兩邊之紀數，不必先將 $F(x,y)$ 移至左端，蓋 $D_x\{f(x,y)-F(x,y)\}=0$ 與 $D_xf(x,y)=D_xF(x,y)$ 兩方程實毫無差異也。例如

$$y^2=2px,$$

則
$$2yD_xy=2p，而\ D_xy=\frac{p}{y}$$

據此以言，凡屬同意義的方程，均可用之以求所欲得之紀數。

2-10. n 爲分數時，x^n 之紀數　當 n 爲正，負及 0 各整數時，x^n 之紀數均爲 nx^{n-1} 已見前(2-7)節系(3)。玆特引用(2-9)節之理以證當 n 爲分數時，此公式亦屬正確。

令 $n=\dfrac{p}{q}$，p 與 q 表兩整數（正或負，但 $q\neq 0$）。又令 $u=x^p$。

如是 $$y=x^n=x^{\frac{p}{q}}=u^{\frac{1}{q}},$$

而 $$u=y^q=x^p,$$

故 $$D_xu=qy^{q-1}D_xy=px^{p-1}D_xx=px^{p-1},$$

是以 $$D_xy=\frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}=\frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{x^{\frac{p}{q}(q-1)}}=\frac{p}{q}x^{p-1-\left(p-\frac{p}{q}\right)}$$

$$=\frac{p}{q}x^{\left(\frac{p}{q}-1\right)}=nx^{n-1}。$$

例 $$D_x\sqrt{x}=D_xx^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}。$$

$$D_x\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}=D_x\left(x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}。$$

$$D_x\sqrt[3]{1-x^2}=\frac{1}{3}(1-x^2)^{-\frac{2}{3}}D_x(1-x^2)=-\frac{2x}{3(1-x^2)^{\frac{2}{3}}}$$

2-11．高級紀數． 函數 $y=f(x)$ 之紀數 $f'(x)$ 仍為 x 之函數，前已特加敍述。若 $f'(x)$ 亦有紀數，則其名為原函數 $y=f(x)$ 之二級紀數 (second derivative)，而以 D_x^2y 或 $f''(x)$ 或 y'' 表之。仿此類推，二級紀數之紀數為原函數之三級紀數，D_x^3y，或 y'''。$y=f(x)$ 之 n 級紀數之記號常為 D_x^ny 或 $f^{(n)}(x)$ 或 $y^{(n)}$。

例　令 $y=f(x)=2x^3-3x^2+5x-7$

則 $$D_xy=f'(x)=6x^2-6x+5,$$

$$D_x^2y=f''(x)=12x-6$$

$$D_x^3y=f'''(x)=12$$

$$D_x^4y=f^{\text{IV}}(x)=0$$

其四級以上之紀數概爲 0。

2-12. 隱函數之高級紀數 求隱函數之紀數方法已見前(2-9)節。既得 y 對 x 之一級紀數 (first derivative) $D_x y$ 後,即可用此方程以確定 $D_x y$ 爲 x 之函數,因若將其中含 y 各項代以已解出之 $y=\phi(x)$ 各值,即得一 x 之顯函數。由此再求紀數,而於必要時將已得之 $D_x y$ 代入結果中,則可將 $D_x^2 y$ 表爲 x 及 y 之函數,是即 y 之二級紀數,雖則其中常仍有含 y 之項。由此類推,即可求得隱函數之各高級紀數。

例 1. 設 $x^2+y^2=a^2$。試求 $D_x y$ 及 $D_x^2 y$

(法一) y 之解有二: $y_1=\sqrt{a^2-x^2}$ 及 $y_2=-\sqrt{a^2-x^2}$,

$$D_x(y_1)=-\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$D_x(y_2)=\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-D_x(y_1);$$

$$D_x^2(y_1)=-\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}-x\left(-\frac{1}{2}\frac{(-2x)}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\right)$$

$$=\frac{-(a^2-x^2)-x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$D_x^2(y_2)=-D_x^2(y_1)=\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}。$$

(法二) $x^2+y^2=a^2$,

$$2x+2yD_x y=0,\ 故\ D_x(y)=-\frac{x}{y}。$$

若 y 爲正,此即 $D_x(y_1)=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

若 y 爲負,此即 $D_x(y_2)=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

自　$D_xy=-\dfrac{x}{y}$即可求得

$$D_x^2y=-D_x.\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{y-xD_x(y)}{y^2}=-\frac{y-x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}$$

$$=-\frac{y^2+x^2}{y^3}=-\frac{a^2}{y^3}$$

當 y 爲正時，此與法一求得之 $D_x^2(y_1)$ 相同，而當 y 爲負時，則與 $D_x^2(y_2)$ 相同。

除上述兩法外，吾人亦可逕求 $D_x\{f(x,y)\}=0$ 之紀數，即 $D_x^2\{f(x,y)\}=0$。如仍用本例則有

（法三）　$$x^2+y^2=a^2,$$

$$2x+2y\,D_xy=0,$$

再求其紀數，惟牢記 D_xy 係 x 之函數，則有

$$2+2y\,D_x^2y+2(D_xy)(D_xy)=0$$

故　$$D_x^2(y)=-\frac{1+(D_xy)^2}{y}$$

再將 $D_xy=-\dfrac{x}{y}$之值代入，乃得

$$D_x^2(y)=-\frac{1+\frac{x^2}{y^2}}{y}=-\frac{a^2}{y^3},$$

與前完全相同矣。細考此三法，第二法似最易學，第一法似最笨！

第　二　章　習　題

1．求下列各函數在指定情形下之增量：

(a) $y=\sqrt{1+x}$, 於 $x_0=0$ 點, $\Delta x=0.1$;

(b) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, 於 $x_0=0$ 點, $\Delta x=-0.1$;

(c) $u=\dfrac{1}{\sqrt[3]{v^2+v}}$, 於 $v_0=1$ 點, $\Delta v=-0.05$;

(d) $u=y^5-y^3$, 於 $y_0=0$ 點, $\Delta y=0.1$。

2. 用下列函數爲例,填好附表中所示各值:

(a) $y=x^3-2x+3$, $x_0=2$;

(b) $y=5x-x^2$, $x_0=-1$;

(c) $y=1-3x^4$, $x_0=0$;

(d) $y=\dfrac{1}{x^2}$, $x_0=1$。

Δx	Δy	$\tan\tau'=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
0.1		
0.01		
0.001		

3. 根據(2-2)節紀數之定義,求下列各函數對 x 之紀數:

(a) x^4+2x+5; (b) $\sqrt{x}$; (c) $\sqrt{x^2+a^2}$; (d) $\sqrt[3]{x-2}$;

(e) $\dfrac{(x-2)(x^2+8x-4)}{x^3+7x+2}$; (f) $\dfrac{1}{x}$,

(g) $\dfrac{1}{1+x}$, (h) $\dfrac{1}{x^2+2}$。

4. 依照(2-5)節之圖示法,在方格紙上作圖以示 D_xy 與 x 之關係:

(a) $y=2x+1$; (b) $y=x^3$; (c) $y=\dfrac{1}{x}$; (d) $y=\sqrt{x^2+1}$。

5. 求下列各函數對 x 之紀數(計算時應力求方法之簡捷!):

(a) $3x^4-6x+5$; (b) $x^{15}+10x^{10}+x+1$;

(c) $a+bx+cx^2$; (d) $(x-1)(x-2)(x-3)$;

(e) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$,　(f) $\pi x^4-\dfrac{11}{4}x^2+\sqrt{2}$。

6. 若 $x=v_0t-16t^2$，求 D_tx，v_0 爲常數。

7. 若 $v=\sqrt{2gs}$，求 D_sv，g 爲常數。

8. 若 $f(y)=(a+y)^l(b+y)^m(c+y)^n$，$a, b, c, l, m, n$ 均爲常數，求 $f'(y)$。

9. 若 $F(t)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，求 $F'(t)$。

10. 求下列各曲線在指定點之斜度：

(a) $4y=x^4-8x-1$，於 $(1,-2)$ 點；

(b) $8y=3x-x^3$，於 $(0,0)$ 點。

(c) $y=\sqrt{x}(2x-1)$，於 $(1,1)$ 點；

(d) $y=\dfrac{1}{1+x}+x$，於 $(0,1)$ 點。

11. 求下列各值：

(a) $D_u\dfrac{\sqrt{u^5}+2\sqrt[4]{u^3}+1+\dfrac{1}{\sqrt{u^3}}}{\sqrt{u^3}}$；(b) $D_x\dfrac{(x-1)^4}{\sqrt{x^2}}$；

(c) $D_t\sqrt[3]{t^2-2at+a^2}$　(d) $D_y(a+y^m)\sqrt{b+y^n}$；

(e) $D_x\dfrac{a^2+x^2}{\sqrt[3]{a^2-x^2}}$,　(f) $D_t\dfrac{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}}$,

(g) $D_s\dfrac{s^2}{\sqrt{s^2+s}-\sqrt{s}}$,　(h) $D_t\dfrac{(t+1)\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t}}$,

(i) $D_x\{x(a+bx)^n\}$；　(j) $D_t(t\sqrt{a-t})$。

12. 先用方程(10)以求下列各 D_ty；再表 y 爲 t 之函數而後計 D_ty：

(a)若 $y=x^3+3x+1$，而 $x=\sqrt{t}$；

(b)若 $y=\sqrt{as^2+bs+c}$，而 $s=t^2+t$；

(c)若 $y=\dfrac{1}{1+u}$，而 $u^2=t^2+a^2$；

(d)若 $y=\dfrac{1}{x^2}$，而 $x=\dfrac{1}{t}$。

13. 求下列各值：

(a) $D_x^2(4x^3-2x^2+3x+6)$；　　(b) $D_t^4\dfrac{t^3}{t-1}$，

(c) $D_x^3\dfrac{1}{1+x}$，　　(d) $D_y^2\dfrac{1}{y^n}$。

14. 由下列各方程求 D_xy：

(a) $y^2=x-2x^3$；　　(b) $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$；

(c) $x^2+xy+y^2-1=0$；　　(d) $x^3+axy+y=0$；

(e) $4x^3-5xy^2+y=9$；　　(f) $xy^{1.4}=c$；

(g) $y^2x^3=2x-y$；

(h) $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Ex+2Fy+G=0$。

15. 證 $D_ty=\dfrac{1}{D_yt}$，但 D_t^2y 不等於 $\dfrac{1}{D_y^2t}$，試任舉一實例。

16. 問 D_t^2y 與 $(D_ty)^2$ 是否相同？試任舉一例。

17. 設已知 U 與 V 兩函數之各級紀數，試證

$$D_x^2(UV)=U\,D_x^2V+2D_xV\,D_xU+V\,D_x^2U;$$

$$D_x^3(UV)=U\,D_x^3V+3(D_xU)(D_x^2V)+3(D_x^2U)(D_xV)+V\,D_x^3U;$$

並用數學歸納法(mathematical induction)證：

$$D_x^n(UV)=UD_x^nV+n(D_xU)(D_x^{n-1}V)$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}D_x^2U\,D_x^{n-2}V+\cdots\cdots+V\,D_x^nU_{\circ}$$

18. 若 m 與 n 均爲正整數，而 $n<m$，證

$D_x^{m-n}(x^m)=m(m-1)\cdots\cdots(n+1)x^n$,

並由是推斷當 $x=0$ 時，$D_x^kx^m=0$，如 $k\neq m$，而 $D_x^kx^m=m!=m(m-1)\cdots\cdots2.1$，如 $k=m$。

19. 設有曲線 $y=x^3-9x^2+21x-7$；求其上切線與下列各直線平行之各點：

(a) $3x+y+2=0$;　　(b) $6x+y+7=0$;

(c) $y=1$;　　(d) $y=21x$。

20. 證曲線 $y=x^4-2x^2+7x$ 與 $y=7x$ 相切於原點。

21. 證曲線 $x^4+y^4=81$ 與 $x=y$ 直線正交。

22. 求 $y=x^2$ 與 $x=y^2$ 兩拋物線相交之角。

（兩曲線之交角係指其交點上兩切線所作之角）。

23. 證圓 $x^2+y^2=8ax$ 與曲線 $y^2(2a-x)=x^3$ 正交於原點，而於其他兩交點則作 $45°$ 角。

24. 下列曲線斜度爲 0, 1 及∞之點何在？

(a) $x^2+y^2=a^2$;　　(b) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$;

(c) $xy=1$;　　(d) $y=2mx^2$;

(e) $x=2my^3$;　　(f) $x^2-y^2=1$;

(g) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$;　　(h) $x^2-y^2=0$。

25. 求下列各曲線斜度爲指定值之各點：

(a) $y=x^3-3x^2+4x+5$，斜度爲 x；

(b) $y=\sqrt{1+x}$，斜度爲 y；

(c) $(x-a)^2=4m(y-b)$，斜度爲 $\frac{a}{m}$，

(d) $y^2\{a^2+(x-b)^2\}=1$，斜度爲 $-\frac{y}{2a}$。

第三章　幾何學上之應用

3-1. 切線與法線之方程　平面解析幾何中之重要問題之一，係求與一曲線相切或正交之直線之方程。若直線之斜度爲 m 且通過(x_0, y_0)點，則其方程爲

$$y-y_0=m(x-x_0) \tag{1}$$

惟過曲線 $y=f(x)$ 上 P 點［坐標爲(x_0, y_0)］之斜度，卽等於 $y=f(x)$ 在該點之紀數，卽 $f'(x_0)$，故切於曲線 $y=f(x)$ 上 P 點之直線 PT，其方程爲(圖 3-1)

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0) \tag{2}$$

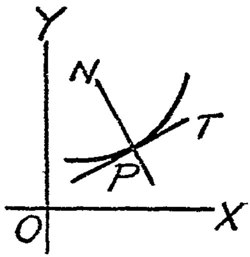


圖 3-1

又因過同點之法線 PN，其斜度係等於 $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$，故 PN 之方程爲

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \tag{3}$$

在方程(2)與(3)中，讀者最須注意者爲 $f'(x_0)$ 之意義。此記號所代表者係過 P 點之曲線斜度，其值係隨 P 點而異；但在某題中，P 點一經規定之後，$f'(x)$ 卽爲一常數。求此常數之法，通常均係先求$y=f(x)$函數對 x 之紀數$f'(x)$，然後再將 P 點之坐標值代入 $f'(x)$ 中而計得之。

例　求曲線 $y=x^3$ 於 $x=2$ 點之切線及法線方程。

當 $x=2$ 時，$y=f(x)=x^3=2^3=8$，故 P 點之坐標爲 $(2,8)$。

今 $$f'(x)=3x^2,$$

故 $$f'(2)=3.2^2=12,$$

是以切線之方程爲 $y-8=12(x-2)$，卽 $12x-y-16=0$，

而法線之方程爲 $y-8=-\frac{1}{12}(x-2)$，卽 $x+12y-98=0$。

3-2. 函數之增減 令 $y=f(x)$ 表一曲線；由定義

$$D_xy=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

觀之，若 $f'(x)\neq 0$，而 $|\Delta x|$ 之值夠小，則 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 之值將與 $f'(x)$ 相同。是以若過曲線上 P 點 (x_0,y_0) 之斜度 $f'(x_0)$ 爲正，而 $|\Delta x|$ 夠小，則 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 亦必爲正；反之，如 $f'(x_0)$ 爲負，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 亦將爲負。換言之，若 $f'(x)$ 不等於 0，而 Δx 與 Δy 均夠小，則 Δy 之符號必與 $f'(x)\,\Delta x$ 相同。如是

(A)若 $f'(x_0)$ 爲正，則當 x 之值略增加時，y 之值亦增；而當 x 之值略減小時，y 之值亦減；

(B)若 $f'(x_0)$ 爲負，則當 x 之值略增加時，y 之值反減；而當 x 之值略減小時，y 之值反增；

(C)若 $f'(x)$ 於 $x=a$ 至 $x=b$ 間隔內恆爲正，則當 x 由 a 增至 b 時，$f(x)$ 之值將連續的增加。同理，若在此間隔內，$f'(x)$ 恆爲負，則當 x 由 a 增至 b 時，$f(x)$ 之值將連續的減小。讀者須注意此處所言之增減係代數的而非數值的。例如自 5 變至 6 與自 -5 變至 -4 均爲增，而自 -5 變至 -6 則爲減！

例 述函數 $y=f(x)=x^3-3x$ 增減之各間隔。

因 $$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1),$$

故當 x 自 $-\infty$ 增至 $x=-1$ 時，$f'(x)$ 均為正，是以於 $-\infty<x<-1$ 間隔內，y 自 $-\infty$ 增至 2，在 $x=-1$ 至 $x=+1$ 之間隔內，$f'(x)$ 均為負，故於 $-1<x<1$ 內，y 自 2 減至 -2。若 x 自 $+1$ 無限增大，則 $f'(x)$ 復均為正，故於 $x>1$，y 自 -2 增至 $+\infty$。此函數之圖線遂如圖(3-2)所示。在 $x=-1$ 點，y 達其"極大值"而在 $x=1$ 點，y 則落至其"極小值"。

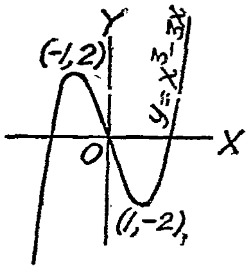


圖 3-2

3-3. 極大與極小 令 $y=f(x)$ 為一連續函數。若於某點，y 之值較其鄰近各點之值皆大，則稱 y 在該點之值為一極大(maximum)；反之，若 y 之值較其鄰近各點之值皆小，則稱該點之值為一極小(minimum)。讀者可注意，極大未必即函數之最大值，而極小亦未必即函數最小值。若就表 $y=f(x)$ 之圖線言之，所謂極大點即指圖線上各高峯，而所謂極小點即圖線中各低谷。例如圖(3-2)中(-1,2)點係極大，但在此點，y 之值並非最大；同圖中之(1,-2)點係極小，但其 y 值亦非最小。換言之，所謂極大與極小，蓋乃與其鄰近諸值比較而言者也。

下述求極大與極小之各方法，只可用於有確定紀數之函數。至若在函數未有紀數（包括無限紀數），或其左紀數與右紀數不相等之點，如圖(3-3)中之 A,B 或 C 者，則須另論。

據(3-2)節，當 $f'(x)$ 為正時，函數 $f(x)$ 之值係隨 x 之增減而增減。

是以當紀數爲正時，函數之值不能爲極大或極小。倣此理，當紀數爲負時，函數之値亦不能爲極大或極小。由是知在極大或極小之點，紀數 $f'(x)$ 必須爲零。當 $f'(x)=0$ 時，表 $f(x)$ 之圖線係取水平方向，如圖(3-4)中之 A,B 及 C 各點。B 與 C 顯然分別爲極大與極小，但 A 點則否。

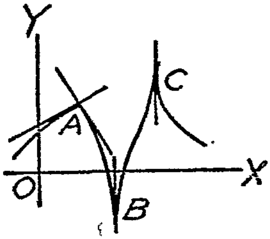


圖 3-3

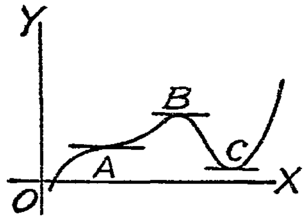


圖 3-4

否。由是言之，在極大或極小之點，紀數之値固須爲 0，然紀數爲 0 之點未必係極大或極小也。若以常用之數學術語表之，$f'(x)=0$ 係函數 $f(x)$ 爲極大或極小之必要條件 (necessary condition)，而此條件尙非充足 (sufficient) 者也。故自 $f'(x)=0$ 方程求得 x 之值後，仍須另加檢討，方能決定 $f(x)$ 於該點是否極大或極小。

欲得決定函數 $y=f(x)$ 爲極大或極小之必要且充足之條件，可以第一級紀數之變化情形表之。此外表示函數極大或極小之充足條件，亦常用第二級紀數（後 3-6 節）。玆先就第一級紀數之變化情形討論本問題。

設於 $x=x_0$ 點，$f'(x)=0$，卽 $f'(x_0)=0$。若當 x 較 x_0 略小時，$f'(x)$ 爲正，而當 x 較 x_0 略大時，$f'(x)$ 爲負，則當 x 增至 x_0 時，函數 $f(x)$ 係增加，而於 x 自 x_0 再增大時，函數卽行減小。是以知在 $x=x_0$

點，函數 $f(x_0)$ 必爲極大，其値係比其鄰近各點之値均較大也。同理，若當 x 較 x_0 略小時，$f'(x)$ 爲負，而當 x 較 x_0 略大時，$f'(x)$ 爲正，則在 $x=x_0$ 點，$f(x_0)$ 必爲極小。至於 $f'(x)$ 之値，在 $x=x_0$ 點之左右皆爲正或皆爲負時，$y=f(x)$ 將恆增或恆減，而 $x=x_0$ 點〔例如圖(3-4)中之 A 點〕將非極大或極小。

總之，凡有確定紀數之函數，其極大或極小可依下述步驟求之：

(1)求 $f(x)$ 之紀數 $f'(x)$；

(2)令 $f'(x)$ 等 0 而解出 x 之各値，$x_0, x_1, x_2 \cdots\cdots$，

(3)分別討論所得各値，而察當 x 由較小於 x_0 之値經過 x_0 而變至較大於 x_0 之値時，$f'(x)$ 之正負符號是否改變。

(A)若 $f'(x)$ 之符號由正變爲負，則 $f(x_0)$ 爲極大；

(B)若 $f'(x)$ 之符號由負變爲正，則 $f(x_0)$ 爲極小；

(C)若 $f'(x)$ 之符號不改，則 $f(x_0)$ 非極大亦非極小。

例　求 $f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$ 之極大與極小。

$$f'(x)=2(x-1)(x+1)^3+3(x-1)^2(x+1)^2$$
$$=(x-1)(x+1)^2(5x-1)$$

令 $f'(x)=0$，乃得 $x=1, x=-1$，及 $x=\dfrac{1}{5}$ 三値。

(a)先論 $x=1$ 點。在此點之鄰近，$(x+1)$ 及 $(5x-1)$ 均爲正，故 $f'(x)$ 之符號與 $(x-1)$ 同。如是，當 $x<1$ 時，$(x-1)$ 爲負，$f'(x)$ 亦爲負；而當 $x>1$ 時，$(x-1)$ 爲正，$f'(x)$ 亦爲正。是以知於 $x=1$ 點函數有一極小，其値爲 $f(1)=0$。

(b)次論 $x=-1$ 點。在此點之鄰近，$(x-1)$ 與 $(5x-1)$ 均爲負，故

$f'(x)$ 之符號與 $(x+1)^2$ 相同。但無論 x 爲何，$(x+1)^2$ 均爲正，是以在 $x=-1$ 點之鄰近，$f'(x)$ 均爲正。此點故非極大亦非極小。

(c)再次論 $x=\frac{1}{5}$點。在此點之鄰近，$(x-1)$爲負，$(x+1)$爲正，故 $f(x)$ 之符號與 $(5x-1)$ 之符號相反。如是當 $x<\frac{1}{5}$時，$(5x-1)$ 爲負，$f'(x)$爲正；當 $x>\frac{1}{5}$時，$(5x-1)$爲正，$f'(x)$ 爲負。故於 $x=\frac{1}{5}$ 點，函數有一極大，其值係 $f\left(\frac{1}{5}\right)=\left(-\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{6}{5}\right)^3=1.11$。此圖線見圖(3-5)。

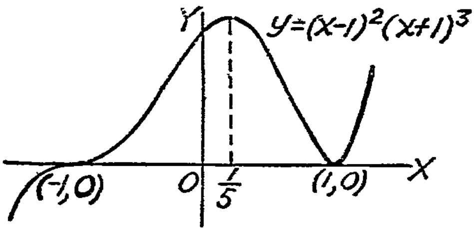


圖 3-5

3-4. 特種之極大與極小 若函數 $f(x)$ 在某點有一異於零之紀數，則 $f(x)$在該點必非一極大或極小，此理已於上節闡明。故假如 $f(x)$ 在各點皆有紀數，則求 $f(x)$ 之極大或極小時，祇須討論其紀數爲 0 之諸點。至若函數於某一點或數點未有紀數，則該函數在此等點是否爲一極大或極小，亦須另行檢討後方能斷定。玆舉兩例以示之。

例 1. $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}$,

$$y'=\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}}[(x-2)+2(x-1)]$$

$$=\frac{3x-4}{3\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)}}。$$

當 $x=\frac{4}{3}$ 時，$y'=0$，且符號係由正而負，故知 y 在此點$\left(即\ x=\frac{4}{3}\right)$爲極大。此外則無可使 y' 爲 0 之點。但於 $x=1$ 及 $x=2$ 時，y' 爲無限大，故此兩點亦可爲極大或極小而須特別討論。當 x 略小於 2 時，y' 爲負，略大於 2 時，y' 則爲正。故當 x 之值增至 2 時，y 之值係減小，而於 x 自 2 再增加時，y 即開始增大。是以 y 於 $x=2$ 點爲一極小。至於 $x=1$ 點之鄰近，y' 恆爲正，故當 x 由較小於 1 之値增至較大於 1 之値時，y 之値恆增加，而 y 於此點不能爲極大或極小。此函數之圖線如圖 (3-6) 所示。

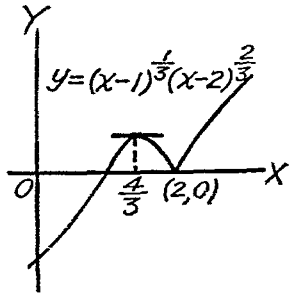


圖 3-6

例 2.　$y=x\,(x\geqq 0)$，$y=\sqrt{2x-x^2}\ (0<x\leqq 2)$。

此函數之圖線包含一"半直線"及一半徑爲 1 之"半圓周"，圖(3-7)。

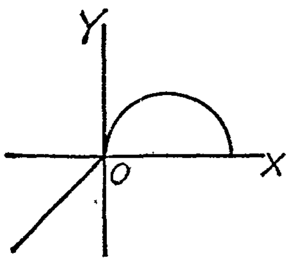


圖 3-7

$x<0$ 時，$y'=1$；$0<x<2$ 時，$y'=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$。當 $x=0$ 時，y' 不存在；當 $x=1$ 時，$y'=0$。故祇有 $x=0$ 及 $x=1$ 兩點可能使 y 爲極大或極小（在 $x=2$ 之右方無圖線，故此點不必討論）。仿上例中所用之方法，將兩點分別討論，不難證得 y 於 $x=1$ 點

爲一極大，而於 $x=0$ 點則非極大或極小。

3-5. 曲線之彎曲方向 圖(3-8)示一段曲線，其切線恆在曲線之下，吾人常稱此段曲線爲向上彎曲 (concave upwards)。圖(3-9)之曲線，其切線則恆在曲線之上，故吾人常稱此曲線爲向下彎曲 (concave downwards)。自此等圖線觀之，曲線之彎曲方向可自其斜度變化之情形定之。因當曲線上 P 點沿曲線由左向右移動時，若曲線係向上彎曲

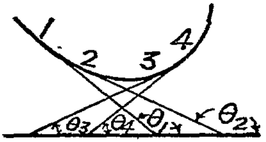


圖 3-8

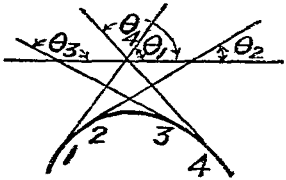


圖 3-9

者，則曲線之斜度將隨 P 點之右移而漸增大；若曲線係向下彎曲者，則其斜度將隨 P 點之右移而漸減小。例如在圖(3-8)中

$$\tan\theta_4>\tan\theta_3>\tan\theta_2>\tan\theta_1。$$

而在圖(3-9)中

$$\tan\theta_4<\tan\theta_3<\tan\theta_2<\tan\theta_1。$$

反言之，若曲線所代表之函數爲 $f(x)$，則在其紀數隨 x 値之增大而增加之段落內，表 $f(x)$ 之曲線係向上彎曲，而在 $f(x)$ 隨 x 之增大而反減小之段落內，表 $f(x)$ 之曲線則係向下彎曲。但 $f'(x)$ 隨 x 之增大而增加一事，表示 $f''(x)$ 爲正，而 $f'(x)$ 隨 x 增大而反減一事，表示 $f''(x)$ 爲負。故欲知表 $f(x)$ 曲線係向上抑向下彎曲，可由其二級紀數 $f''(x)$ 之正負定之。若 $f''(x)$ 恆 >0，則曲線 $y=f(x)$ 爲向上彎曲；反

此,若 $f''(x)$ 恆 <0, 則曲線 $y=f(x)$ 爲向下彎曲。

3-6. 定極大與極小之又法　前(3-3)節所述求極大與極小之條件雖係必要且充足的,但因 $f'(x)$ 於 $x=x_0$ 點左右之符號爲何,有時不易計得,故應用之時,此條件常不便利。惟由上節所述之曲線彎曲方向,可得另一方法以決定極大與極小。假使在某點 $f'(x)$ 之値爲 0, 且曲線 $y=f(x)$ 又爲向上彎曲者,則此點之 y 値顯然爲一極小;反之,若曲線爲向下彎曲者, 則此點之 y 値顯然爲一極大。故定極大與極小之充足條件如下:

(A) $f'(x_0)=0$, 且 $f''(x_0)>0$, 則 $f(x_0)$ 爲極小;

(B) $f'(x_0)=0$, 且 $f''(x_0)<0$, 則 $f(x_0)$ 爲極大。

至若 $f'(x_0)=0$, 而 $f''(x_0)$ 亦爲 0, 則 $f(x_0)$ 是否極大或極小, 或二者皆非,尙須另行討論。此蓋因 $f'(x_0)=0$ 固係極大與極小所均必須滿足之條件,而於 $f''(x_0)=0$ 時,在 $x=x_0$ 處之彎曲方向尙須藉另外條件方能確定之也。本法雖便於應用,但因若 $f''(x_0)=0$ 則無效,故亦非完全無缺點。

讀者對於本節所述之A與B兩條件切不可加以強記; 欲記憶此兩條件,最好先作數圖以簡要的表示 $f(x)$, $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 經過極大與極小點之變化情形。根據此等圖形 (圖 3-10),極大與極小之條件不難一目了然。

例　仍用(3-3)節之例題, $f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$

令　$f'(x)=2(x-1)(x+1)^3+3(x-1)^2(x+1)^2$

$$=(x-1)(x+1)^2(5x-1)$$

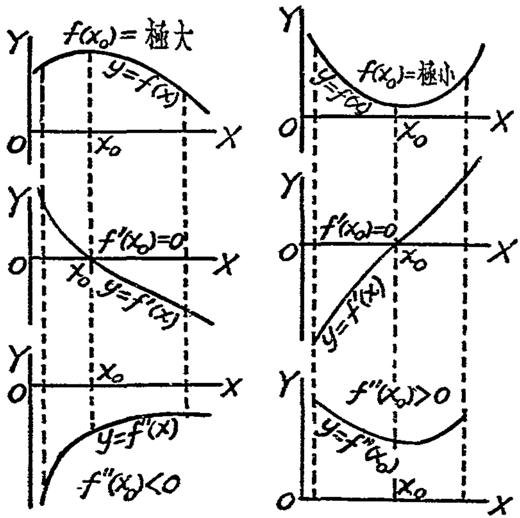


圖 3-10

故 $f''(x)=(x+1)^2(5x-1)+2(x+1)(x-1)(5x-1)$

$$+5(x-1)(x+1)^2$$

已知在 $x=1,-1,$ 及 $\frac{1}{5}$ 各點, $f'(x)=0$。茲分別求各點之 $f'(x)$; $f''(1)=2^2(5-1)=16>0$, 故於 $x=1$ 點, $f(1)=0$ 爲極小; $f''(-1)=0$, 故此點是否極大或極小, 用本節方法不能確定之; 又 $f''\left(\frac{1}{5}\right)=5\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}+1\right)^2=-4\left(\frac{6}{5}\right)^2<0$, 故於 $x=\frac{1}{5}$ 點, $f\left(\frac{1}{5}\right)=1.11$ 爲極大。

3-7. 反轉點 當 $f'(x)$ 與 $f''(x)$ 同爲 0 時, $f(x)$ 之值可爲極大, 亦可爲極小, 有時且二者均非, 前已述及。在此等之點, 若 $f(x)$ 非極大或極小, 則經過此點後, 曲線之彎曲方向將改變。今名彎曲方向改變之

點爲反轉點 (point of inflection)。換言之,過反轉點之切線，一半係在曲線之上，另一半則在其下，圖(3-11)中之 A,B,C 各點皆是。讀者亦可注意在反轉點之切線,不必取水平方向,卽 $f'(x)$ 不必爲 0。

茲述求反轉點之方法。此法只能用於有一級及二級紀數（不包括無限紀數在內！）之函數。其理與(3-3)節所述求極大與極小之方法頗相類似。設於某點函數之三級紀數異於 0，則曲線在其鄰近若非向上彎曲卽係向下彎曲,是以曲線過此點之彎曲方向並未改變,故此點不能爲反轉點。由是知在反轉點,函數之二級紀數必須爲 0，然二級紀數爲 0 之點未必卽係反轉點,正如一級紀數爲 0 時,函數未必爲極大或極小也。因此,求反轉點時,應先解 $f''(x)=0$ 以算出 $x=x_0,x_1$ ……各值。得此諸値後乃分別加以考察。若於 $x=x_0$ 之左右，$f''(x)$ 之符號由正變負,或由負變正，則曲線之彎曲方向由向上變爲向下，或由向下變爲向上,而 $x=x_0$ 遂爲一反轉點;否則非是。

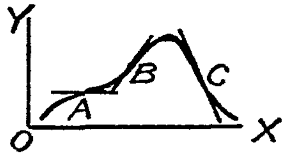


圖 3-11

設 $f(x)$ 有一、二、三各紀數，則 $f''(x)$ 及 $f'''(x)$ 可分別視爲 $f'(x)$ 之一級及二級紀數。若 $f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)<0$, 則據(3-6)節所述之理, $f'(x_0)$ 乃一極大（參閱圖 3-12）,故於 $x=x_0$ 點之左右, $f''(x)$ 之符號係由正變負,而經過此點後,曲線 $f(x)$ 之彎曲方向,由向上變爲向下；同樣，若 $f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)>0$, 則 $f''(x)$ 之符號係由負變正，故經過此點後曲線 $f(x)$ 之彎曲方向由向下變爲向上。是以求反轉點之充足條件爲 $f''(x_0)=0$ 及 $f'''(x_0)\neq 0$。

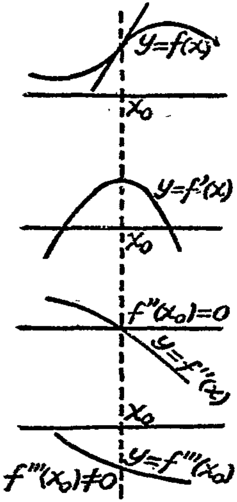


圖 3-12

讀者可注意此條件雖係充足的，然非必要的。因若 $f''(x_0)=0$ 且 $f'''(x_0)=0$，則 $x=x_0$ 一點有時仍可爲一反轉點。遇此之時，須再考究函數之四級或更高級之紀數，方能確定其性質，茲不述。

例 1. 求下列曲線之極大或極小及其彎曲方向與反轉點：

$$y=f(x)=3x^4-4x^3+1$$

$$f'(x)=12x^3-12x^2$$

$$f''(x)=36x^2-24x$$

令 $f'(x)=0$，則得其根爲 $x=0$ 及 $x=1$。試以 $x=1$ 之值代入 $f''(x)$，則有 $f''(1)=36-24=12>0$，故知在 $x=1$ 點，$f(x)=f(1)=3-4+1=0$ 爲一極小（圖 3-13 之點）。若以 $x=0$ 之值代入二級紀數 $f''(x)$ 中，其值爲 $f''(0)=0$，故此點之性質仍須另論。

令 $f''(x)=0$，則得其二根爲 $x=0$ 及 $\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$。當 $x<0$ 時，$f''(x)=36x\left(x-\frac{2}{3}\right)$，其值顯爲正，而在 $0<x<\frac{2}{3}$ 間隔內，$f''(x)$ 之值則爲負。故曲線於 $x=0$ 之左方係向上彎曲，而於 $x=0$ 之右方則向下彎曲。因此，在 $x=0$ 點，曲線有一反轉點（圖 3-13 之 A 點）。

又因當 $0<x<\frac{2}{3}$ 時，$f''(x)$ 之值爲負，而當 $x>\frac{2}{3}$ 時，$f''(x)$ 之值復爲正，故在 $x=\frac{2}{3}$ 點之左方，曲線係向下彎曲，而於 $x=\frac{2}{3}$ 點之右

方，則改爲向上彎曲。因此，$x=\frac{2}{3}$ 點亦爲一反轉點(圖 3-13 中之B點)。由此言之，除在 A 與 B 之間，曲線係向下彎曲外，其在此兩點之外，其彎曲方向均係向上。

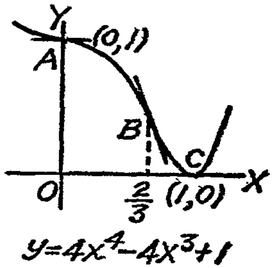


圖 3-13

讀者如求 $f'''(x)=72x-24$，即知當 $x=0$，$f'''(x)=-24$；而於 $x=\frac{2}{3}$ $f'''(x)=24$，其值均非 0，故此兩點實均係反轉點。

例 2.　$(y-2)^3=x-4$。

求此方程兩邊之紀數則有

$$3(y-2)^2D_xy=1$$

或

$$D_xy=\frac{1}{3(y-2)^2}\cdot$$

再求其紀數則有

$$D_x^2y=-\frac{2D_xy}{3(y-2)^3}=-\frac{2}{9(y-2)^5}。$$

顯然 $D_xy=0$ 及 $D_x^2y=0$ 無解，惟當 $y=2$ 即 $x=4$ 時，函數之一級及二級紀數俱爲無限大。故祇有此點可能爲一極大，極小或反轉點。若注意 D_xy 除於 $y=2$ 點爲無限大外，其值恆爲正，即知當 x 增加時，y 之值恆隨之增加，故此函數不能有一極大或極小。在此點之左方，即 $x<4, y<2$ 時，D_x^2y 爲正，在此點之右方，即 $x>4, y>2$ 時，D_x^2y 則改爲負，即曲線在左方係向上彎曲而在其右方則係向下彎曲，故此點係一反轉點，此曲線之情形遂如圖 (3-14)。

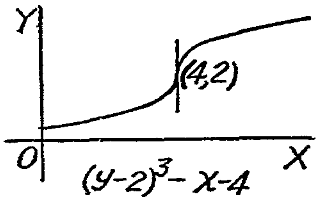


圖 3-14

例 3. $y=x^4$。

此曲線顯然於 $x=0$ 點爲極小。在此點，$D_xy=4x^3$ 當然必須爲 0，因 $D_xy=0$ 乃極大或極小之必要條件也。然在此點 $D_x^2y=12x^2$ 亦爲 0；此事卽表示 $D_xy=0$ 及 $D_x^2y\gtrless 0$ 固可充足的決定極小或極大，但後述條件則非必要的，同理 $D_x^2y=0$ 雖爲反轉點之必要條件，然此條件實非充足的。於本題之 $x=0$ 點，吾人顯有 $D_x^2y=0$，然此點則非反轉點。注意在此點 y 之三級紀數 D_x^3y 亦爲 0。在本題中，$y=0$ 爲極小之故可由 $D_xy=0$，$D_x^2y=0$，$D_x^3y=0$ 及 $D_x^4y>0$ 四條件確定之。此卽本節所稱有時須考究函數之四級或更高級紀數之例也（參閱後 16-14 節）。

3-8. 曲線之描繪 演算問題時圖線之重要，前已屢述之。惟在初等課本中，描繪各函數之圖線之方法，常爲計算甚多相對應之 x 與 y 值，然後再表之於圖紙上。此法固甚準確，但嫌冗長，且不能表示曲線之彎曲狀況。根據本章所已述之各原則，常無須作甚繁之計算卽可確定一曲線之大致狀況。欲如是描繪 $y=f(x)$ 曲線時，所採之步驟約如下：

(1) 解 $y=f(x)=0$ 以定曲線與 X 軸相交之各點。若 $f(x)=0$ 不易解答，可由 y 之正負決定曲線與 X 軸相交各點之大略位置。

(2) 令 $x=0$，以求 $y=f(0)$ 之值而定曲線與 Y 軸相交之點。

(3) 求 y 之一級二級及三級紀數，D_xy，D_x^2y 及 D_x^3y。

(4) 令 $D_xy=0$ 或 $D_xy=\infty$ 而求 x 之各值，以定曲線取水平或垂

直方向之各點；次由二級紀數，或一級紀數之變化情形，以定此等點是否極大或極小。

(5)令 $D_x^2y=0$ 而求 x 之各值，並由 D_x^2y 之變化情形或 D_x^3y 是否非零一事而定曲線之反轉點。

(6)將所求得各點，按 x 之大小依次列成一表，並將其相應之 y 值計出，並註明曲線在各點之性質。

(7)若此等點之數目夠多，則曲線之大體形式即可照表描繪之；否則另選較易於計算之點數個以補其不足。

例　描繪 $3y=2x^3-3x^2-12x+6$ 之圖線。

茲先計下列各對之 x 與 y 值：

$$x=-3,\quad y=-13;\quad x=-2,\quad y=\frac{2}{3},$$

$$x=0,\quad y=2;\quad x=1,\quad y=-\frac{7}{3},$$

$$x=3,\quad y=-1\quad x=4,\quad y=\frac{38}{3},$$

由是知此曲線與 X 軸相交之各點大約在 $x=-3$ 至 $x=2$，$x=0$ 至 $x=1$ 及 $x=3$ 至 $x=4$ 各間隔內。今

$$D_xy=2x^2-2x-4=2(x-2)(x+1);$$

$$D_x^2y=2(2x-1);\quad D_x^3y=4。$$

若令 $D_xy=0$，即知當 $x=-1$ 及 $x=2$ 時，曲線取水平方向。於 $x=-1$ 點，$D_x^2y=-6$ 爲負，故此點之 $y=\frac{13}{3}$ 爲一極大。於 $x=2$ 點，$D_x^2y=6$ 爲正，故此點之 $y=\frac{14}{3}$ 爲一極小。次令 $D_x^2y=0$，即得 $x=\frac{1}{2}$：因 D_x^3y

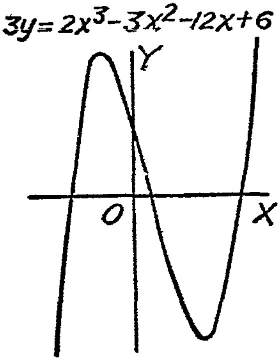


圖 3-15

恆爲正而非零，故知此點 $\left(x=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{6}\right)$ 係反轉點。自 $D_x^2y=2(2x-1)$ 一關係觀之，當 $x<\frac{1}{2}$，D_x^2y 恆爲負，而當 $x>\frac{1}{2}$，D_x^2y 恆爲正，故知此曲線在 $x=\frac{1}{2}$ 點之左係向下彎曲，而在 $x=\frac{1}{2}$ 點之右則改爲向上彎曲。又因當 $x<-1$ 時，或 $x>2$ 時，D_xy 恆爲正，故在 $x=-1$ 之左與 $x=2$ 之右，此曲線均隨 x 之增大而增。本曲線之大致情況遂如圖(3-15)，其主要點之位置有如下表：

x	y	D_xy	D_x^2y	彎曲方向	附註
-3	-13	正	負	向下	於 -3 至 -2 間隔內，與 X 軸相交。
-2	$\frac{2}{3}$	正	負	向下	
-1	$\frac{13}{3}$	0	負	向下	極大
0	2	負	負	向下	於 0 至 $\frac{1}{2}$ 間隔內，與 X 軸相交。
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	負	0		反轉點，因 $D_x^3y\neq0$
1	$-\frac{7}{3}$	負	正	向上	
2	$-\frac{14}{3}$	0	正	向上	極小
3	-1	正	正	向上	於 3 至 4 間隔內，與 X 軸相交。
4	$\frac{38}{3}$	正	正	向上	

第 三 章 習 題

1. 求通過下列曲線上指定點之切線與法線方程：

　(a) $y=3x^2+5x-1$，於$(1,7)$點；

　(b) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$，於$(a,0)$點；

　(c) $2x^2+2xy-y^2-7x+5=0$，於$(1,0)$點；

　(d) $y^2=4x^3$ 於(x_1,y_1)點。

2. 試示切於 $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Ex+2Fy+G=0$ 曲線上 (x_0,y_0) 點之切線方程爲：

$$Ax_0x+Bx_0y+By_0x+Cy_0y+E(x+x_0)+F(y+y_0)+G=0。$$

3. 求通過下列各對曲線相交之點而切於各曲線之切線方程：

　(a) $x^2+y^2=169$ 與 $xy=60$；

　(b) $x^3+y^3=3axy$ 與 $y^2=ax$，

　(c) $x^2+y^2=8ax$ 與 $y^2(2a-x)=x^3$；

　(d) $x^2=4ay$ 與 $y(x^2+4a^2)=8a^3$。

4. 求下述情形下各直線之方程：

　(a) 切於 $y^2=2ax$ 而與 X 軸作 $45°$ 角；

　(b) 切於 $x^2+y^2=25$ 而與 $2x+3y=6$ 平行；

　(c) 切於 $4x^2-9y^2-36=0$ 而與 $2x+5y=10$ 正交；

　(d) 通過 P 點(x_0,y_0)而與 $y=mx^2$ 正交，P 點不必在曲線上。

切於 $2xy=a^2$ 之直線與 X 及 Y 兩軸所成之三角形，其面積有固定值，試證之，並求其值。

6. 切於$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$之直線，在$X$及$Y$兩軸上之截距 (intercept)，其和有固定值，試證之，並求其值。

7. 切於 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 之直線，其在X及Y軸內之段落有固定之長度，試求其值。

8. 令過 $y=f(x)$ 上P點之切線與X軸相交於T點。TP長常名爲切線長；TP在X軸上之射影TM名爲次切線(subtangent)。同樣，令過P點之法線與X軸相交於N點。PN長名爲法線長，PN在X軸上之射影MN則名爲次法線(subnormal)。試由切線及法線之方程示明下列公式：

$$TP=|y|\sqrt{1+(D_yx)^2};\qquad PN=|y|\sqrt{1+(D_xy)^2};$$

$$TM=|yD_yx|;\qquad MN=|yD_xy|。$$

9. 由前題結果求 $x^2-y^2=3$ 於$(2,1)$點之切線，次切線及次法線等長度。

10. 證拋物線 $y^2=4mx$ 之次切線爲拋物線之頂點所平分，其次法線長則恆爲一常數。

11. 述下列函數之增減間隔：

(a) x^4；　(b) $\sqrt[3]{x}$；　(c) $|x|+2$；

(d) $2x^3+3x^2+2x-4$；　(e) $x^2(x+1)^2$；　(f) $\frac{x}{2+3x^2}$；

(g) $\frac{1}{x^2}$，　(h) $3x^5+5x^3+15x+2$。

12. 求下列函數之極大與極小：

(a) $x^3+6x^2+9x+12$；　(b) $-x^4+8x^3-22x^2+24x-5$；

(c) $3x^4+4x^3-6x^2-12x-1$;　(d) $x(x-a)(x+a)^2$, 如 $a>0$;

(e) $4x^2(x-2)^{\frac{1}{3}}$;　(f) $\sqrt{2x-x^2}$;

(g) $(4x+3)(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$;　(h) $(x-4)^3(x-2)^{-2}$;

(i) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}$,　(j) $\dfrac{3x^2+2}{(x^2+2x+2)^{\frac{2}{3}}}$。

13. 述下列曲線之彎曲方向及其反轉點(a,b,c 爲常數):

(a) $y=3x^3+6x^2+7x+2$;　(b) $y=t^5+2t-3$;

(c) $y=t^4-4t^3+6t^2-6t+5$;　(d) $y=t^5-5t^4+10t^3-10t^2+5t+1$;

(e) $y=(x+a)^{\frac{1}{3}}+bx+c$;　(f) $\left(y+\dfrac{a}{x^2}\right)(x-b)=c$;

(g) $y=(x^2-1)^2$;　(h) $y=(x^3+1)^2-1$。

14. 於反轉點之左右,曲線之彎曲方向如何?試以該點之第三級紀數之正負說明之。

15. 設於 $x=x_0$ 點, $y=f(x)$ 有一極大或極小, 但 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$,問其第三級及第四級紀數於 $x=x_0$ 應各爲何?試作圖以示之。

16. 求下列曲線於其反轉點之斜度:

(a) $y=ax^3+bx^2+cx+d$;　(b) $x^2y=4a^2(2a-y)$;

(c) $a^4y^2=a^2x^4-x^6$;　(d) $y=2x^4-x^3+3$。

17. 描繪下列曲線:

(a) $y=x^3+3x^2-9x+7$;　(b) $y=4x^3+3x^2-6x$;

(c) $y=x^4-2x^2+2$;　(d) $y=x^5-5x$;

(e) $y=x+\dfrac{1}{x-1}$　(f) $y=\dfrac{?x}{x^2+2}$,

(g) $xy=x^3+2x^2-x-8$; (h) $x^2-xy+2x-y+2=0$。

18. 某砲彈之軌跡可以 $y=2x-x^2$ 表之，彈出發點爲原點。求(a)射發時與(b)當 $x=1.5$ 時，彈之運動方向；(c)又問軌跡取水平方向及與水平方向作 45° 角之地點何在？

19. 問 $A(x-a)^2+B(y-b)^2+2H(x-a)(y-b)=0$ 曲線有無極大極小與反轉點？

20. 設 $x^3-3px+q=0$ 有兩相等之根，試示 $q^2=4p^3$。

21. 設 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 無極大或極小，問 a,b,c 各係數之關係爲何？

22. 設以 p 爲縱坐標，v 爲橫坐標，問 $\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=c$ 曲線上反轉點之切線取水平方向時，其 v 之值爲何？

23. 設整數的有理函數 $f(x)=0$ 有一根 $x=a$ 係重複 m 次，試示 $f'(x)$ 亦有 $x=a$ 之根並重複 $(m-1)$ 次。由是述尋求一整數的有理函數之多次根之方法。

24. 設 $F(x)=mx+b+f(x)$，而於 $x\to\infty$ 時，$f(x)$ 及 $f'(x)$ 均趨零，試示當 $x\to\infty$ 時，$y=F(x)$ 曲線與 $y=mx+b$ 之距離漸次接近，而其斜度則爲 m；換言之，$y=mx+b$ 爲 $y=F(x)$ 之一漸近線。

25. 若 $f(a)\neq 0$，試示 $y^2=(x-a)f(x)$ 曲線與 X 軸正交。

26. 試區別必要條件，充足條件，及必要且充足條件，並列舉決定一函數之極大，極小，及反轉點之必要，充足，及必要且充足之各條件。

第四章 事理上之極大與極小及變化率

4-1. 極大與極小 在日常生活中極大與極小之問題不勝枚舉。此等問題之解答，間雖可用初等數學方法求得之，然總以利用微分學原理爲最便捷。至於初學者對於此類問題之困難，似不在於如何引用第三章所述之各法則，而在如何理解題意，而將之列成方程。換言之，若 $y=f(x)$ 之函數關係已經表作方程，則求 $f'(x)$，$f''(x)$ 等等機械式的步驟，實甚易易，而關於事理上之極大或極小各問題，其難點乃在於如何排成 $y=f(x)$ 之方程也。此外，有關於事理上之極大或極小問題，由 $f'(x)=0$ 所得之答案，果爲極大抑爲極小，又多可自題之性質推斷而定之，常勿須考究 $f'(x)$ 在此值前後之變化情形或 $f''(x)$ 之正負。此爲事理上極大或極小問題與幾何上（即曲線上）之極大或極小問題之不同。但初學者對於前此所已列舉決定極大或極小之必要且充足各條件，仍以不憚其煩而引用之爲宜，如是則可免謬誤。

至於如何將題意表作方程，實非簡短語句所能說明，且其所用之方法均隨題之性質而異。若列舉演算之步驟，以謀初學者之便利，在簡易之問題中有時反嫌贅繁。茲姑陳述此等步驟如下，然讀者切勿以此等步驟係不可更易者，且應於求得一題之答案後，逐步審查其工作曾否取最便捷之途徑，以改善其計算之技術。

(1) 由題意決定何變數之值應爲極大或極小。假令此變數爲 u。

(2)次決定何變數應爲自變數，令之爲 x。

(3)令其他變數爲 $y, z, r, s, t\cdots\cdots$。

(4)將 $u, r, s, t\cdots\cdots, x, y, z$ 各變數之關係列成方程。

(5)若各方程頗簡，可設法將 $y, z, r, s, t\cdots\cdots$ 各變數消去而將 u 表作 x 之函數。次乃計 $D_x u$ 而令之等於 0 以求極大或極小點 x 之值。

(6)若各方程中之輔助變數 $y, z, r, s, t, \cdots\cdots$ 等不易消去，則不妨保留之。如是可照已述之方法計 $D_x u$；惟所得之結果，必將含 $D_x y$, $D_x z$, $D_x r$, $D_x s$, $D_x t, \cdots\cdots$ 等，因 $y, z, r, s, t, \cdots\cdots$ 各輔助變數均係自變數 x 之函數也。欲將此等輔助變數之紀數消去，須求所有方程對 x 之紀數，由是卽可推得(如輔助變數有 n 個，則此等方程亦必爲 n 個)包含 $D_x y$, $D_x z$, $D_x r$, $D_x s$, $D_x t, \cdots\cdots$ 等量之一次聯立方程。聯解此等方程，以求 $D_x y$, $D_x z$, $D_x r$, $D_x s$, $D_x t\cdots\cdots$ 等，使其各爲 x 及 u 之函數，而後將各值分别代入 $D_x u$ 中，卽可將 $D_x u$ 化爲 x 及 u 之函數。由此，如令 $D_x u=0$，卽可得 u 爲極值時 x 與 u 之關係。若再由其他已知關係消去 u，則在極值時 x 或 u 之值爲何卽可求出。

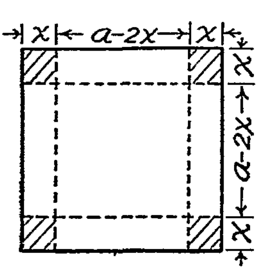


圖 4-1

(7)若自題意不易明瞭所得之結果屬於極大或極小，可考究 $D_x u$ 之變化情形，或 $D_x^2 u$ 之正負符號而決定之。

例 1. 取邊長爲 a 之正方形鐵片一塊，在其四角各截去等大之小方塊，然後再將所餘四周之長方形豎立，以成一盒。試求所能得之最大容積。

令 x 表截去之方塊之長（圖 4-1）。自圖卽知盒之底邊之長當爲 $(a-2x)$。令 u 表盒之容積，則

$$u=x(a-2x)^2 \tag{1}$$

由此可知

$$D_xu=(a-2x)^2-4x(a-2x)=(a-6x)(a-2x) \tag{2}$$

令 $D_xu=0$，卽有 $x=\frac{a}{6}$ 及 $\frac{a}{2}$ 兩答案。惟自題意[或由 $u=x(a-2x)^2$] 知當 $x=\frac{a}{2}$ 時，容積 $u=0$ 係最小，因若 $x=\frac{a}{2}$ 根本上將無盒可言。又知若 $x=0$，則 u 亦爲 0，且如 x 之值在 0 與 $\frac{a}{2}$ 之間，u 均爲正。是以若欲得容積最大之盒，所截去之方塊 x 必爲 $\frac{a}{6}$，因在 $0<x<\frac{a}{2}$ 間只有 $x=\frac{a}{6}$ 可使 $D_xu=0$ 也。故最大之盒，其容積爲

$$u=\frac{a}{6}\left(a-\frac{2a}{6}\right)^2=\frac{2a^3}{27} \tag{3}$$

讀者須用前章所述 $D_x{}^2u$ 爲正負之證驗，以示在 $x=\frac{a}{2}$ 時，u 爲極小，而於 $x=\frac{a}{6}$ 時，u 乃極大。

例 2. 有矩形內接於半徑爲 a 之圓，問其最大之面積爲何？

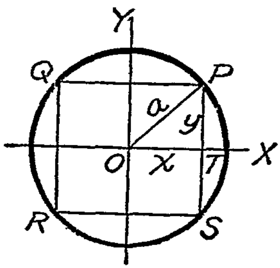


圖 4-2

令 u 表 $P\ Q\ R\ S$ 矩形之面積（圖 4-2）。其 PQ 邊長爲 $2x$，PS 邊長 $2y$。如是

$$u=4xy \tag{4}$$

自圖知 $OP=a, OT=x, TP=y$,

即
$$x^2+y^2=a^2 \tag{5}$$

若令 x 爲自變數，即可將方程(5)中之 y 解出以代入方程(4)中，然後再求 D_xu。依照此法卽有

$$u=4x\sqrt{a^2-x^2} \tag{6}$$

$$D_xu=4\sqrt{a^2-x^2}+4x\frac{\frac{1}{2}(-2x)}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\frac{4(a^2-2x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} \tag{7}$$

令 $D_xu=0$，則有 $x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$。自方程(6)卽知若 $x=0$ 或 $x=a$，u 均爲 0，而在此兩值之間 u 均爲正，故若有最大之 u，其 x 值必爲 $\frac{a}{\sqrt{2}}$，因在 0 與 a 之間僅有此一 x 值可滿足 $D_xu=0$ 之條件也。將此值代入(6)中，乃得 u 之最大值爲

$$u=4\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}}=\frac{4a^2}{2}=2a^2$$

此實卽邊長爲 $a\sqrt{2}$ 之正方形之面積。

解此題之另一法係不將方程(5)中之 y 解出而逕分別求方程(4)及(5)之紀數。若用此法，y 可視爲 x 之函數，而自方程(4)卽得

$$D_xu=4y+4xD_xy \tag{8}$$

又自方程(5)得：

$$2x+2yD_xy=0, \quad 或 \quad D_xy=-\frac{x}{y} \tag{9}$$

以此代入(8)乃有

$$D_x u=4y-\frac{4x^2}{y}=\frac{4(y^2-x^2)}{y} \qquad (10)$$

令 $D_x u=0$，即得 $x=y$，表示所求之矩形爲正方形。

4-2. 直線上之運動　設有一點 P 沿一直線移動。在某時刻 t，令此點與一定點 O 之距離爲 s，s 之正負，則視 P 在 O 之右或左而定（圖 4-3）。

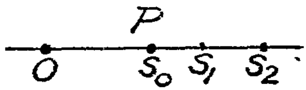


圖 4-3

若當時刻自 t_0 變至 t_1 時，P 點之位置自 s_0 變至 s_1，則在 t_1-t_0 時間內，P 所行之距離爲 s_1-s_0。設無論所取之時間間隔 t_1-t_0 爲何，s_1-s_0 距離均與所歷之時間 t_1-t_0 成正比，則稱 P 點之運動爲等速運動。s_1-s_0 與 t_1-t_0 之比數，即名爲速度(velocity)* v；以方程表之則有

$$v=\frac{s_1-s_0}{t_1-t_0}=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1} \qquad (11)$$

在等速運動中，所取之時間間隔 t_1-t_0 既係任意的，故若令 $t_0=0$，$t_1=t$，且在此時 P 點至原點 O 之距離爲 s，則 s 與 t 之關係爲

$$v=\frac{s-s_0}{t} \qquad \text{或} \qquad s=vt+s_0 \qquad (12)$$

換言之，在等速運動中，距離 s 與時間 t 之關係爲一壹次方程。反之，若 s 與 t 之關係可以一壹次方程表之，則其運動必爲等速的，因自方程(12)，即知若在任何兩時刻 t_2 與 t_1，P 點距原點之距離分爲 s_2 與 s_1，則

---

* v 之數值，當然視所用之時間單位及長度單位而定。例如時間單位爲秒，長度單位爲米(meter)，則速度單位爲每秒一米，或簡稱之爲「米/秒」。在一切物理學問題中，數值與單位均須同行計出方爲正確。初學者愼勿忘於數值之後附記所用之單位。

$$s_2=vt_2+s_0;\quad s_1=vt_1+s_0;\quad \cdot\ s_2-s_1=v(t_2-t_1);$$

或
$$v=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}。$$

此卽示在任何時間間隔 t_2-t_1 內，P 點所行之路程 s_2-s_1 係與 t_2-t_1 成正比，其比數卽爲速度 v。

若 s 與 t 之關係不能以一壹次方程表之，則運動必非等速的。此種運動常名爲加速的，加速兩字並不指速度係必定與時俱增，實卽謂速度非固定而已。遇加速運動時，若取任意時間間隔 t_2-t_1 及 P 點所行之路程 s_2-s_1，吾人亦可求得一比數

$$V_{av}=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1} \tag{13}$$

以表示在此特殊時間 t_2-t_1 間隔內 P 點之平均速度(average velocity)。此平均速度之值不但視所取之時間間隔係在何時而異其值，且與該間隔之長短亦有關係。今若令 t_1 時刻固定，而將所取之間隔 t_2-t_1 無限減短，則

$$\lim_{t_2\to t_1}\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}$$

常有一確定值。玆名此確定值爲在 t_1 時刻 P 之速度。換言之，若 $s=f(t)$ 表路程與時間 t 之關係，令 t 增至 $t+\Delta t$，則路程 s 之增量 Δs 與 Δt 之比數，其極限於 $\Delta t\to 0$ 時卽名爲在 t 時刻之速度 v。此定義可以下列方程表之：

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=D_ts \tag{14}$$

或速度爲距離對於時間之紀數。此定義顯然亦得應用於方程(12)。此

外，在某時刻，v 之值若爲正，則 P 之運動方向係由左而右；反之，v 之值若爲負，則 P 係自右向左運動。

4-3. 加速度　據前節所述即知在加速運動中，速度 v 係時間 t 之函數。若在 t_1 時刻速度爲 v_1，在 t_2 時刻速度爲 v_2，則在 t_1-t_2 時間內，速度之增加爲 v_2-v_1。此增值與 t_2-t_1 之比，名爲平均加速度(average acceleration)。若所取之時間間隔甚短，則

$$\lim_{t_2\to t_1}\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$$

常亦有一確定值。茲名此確定值爲在 t_1 時刻之加速度*。換言之，若 $v=f'(t)$ 表速度 v 與時間 t 之關係，令 t 增至 $t+\Delta t$，則速度 v 之增量 Δv 與 Δt 之比數，其極限於 $\Delta t\to 0$ 時，名爲在 t 時刻之加速度 a，卽

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=D_tv=D_tD_ts=D_t{}^2s \tag{15}$$

由方程(15)言之，當 a 爲正時，P 之速度係增加；當 a 爲負時，其速度則減少。至於 P 點運動之方向果係向右或左，則與 a 之正負無關。

例　一點 P 沿一直線運動。設在任意時刻 t 秒，其距原點 O 之遠度 s（以米計）可以 $s=t^3-7t^2+8t$ 表之，試討論其運動之情形。

先求其速度，得

$$v=D_ts=3t^2-14t+8=(3t-2)(t-4)$$

令此爲 0，乃得 $t=\frac{2}{3}$ 秒及 $t=4$ 秒。當 $t<\frac{2}{3}$ 秒，v 爲正，故知在起始

---

* 加速度之單位當然視速度及時間單位而定，因其意係指在單位時間內所增加之速度爲若干單位也。例如每秒所增加之速度爲每秒 1 米。因此，此單位可簡寫爲「米/秒²」。

$\frac{2}{3}$秒內 P 點係向右行。在 $t=\frac{2}{3}$秒(即 $D_ts=0$ 之一解),

$$s=\left(\frac{2}{3}\right)^3-7\left(\frac{2}{3}\right)^2+8\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{68}{27}\text{米},$$

是即 s 之極大值。在此時刻 P 之速度暫爲 0。在$\frac{2}{3}<t<4$ 秒中間,v 爲負,故在此時間內 P 點自右向左行,至 $t=4$ 秒 ($D_ts=0$ 之另一解),即 $s=4^3-7(4)^2+8(4)=-16$ 米或在原點左方 16 米處,P 始達其左方最大路程(s 之極小值);在此時刻 P 之速度復暫爲 0。過此之後,$t>4$, v 復爲正,P 乃再向右行。

次求其加速度:

$$a=D_tv=6t-14,$$

當 $a=D_tv=0$ 時,$t=2\frac{1}{3}$秒。又因$D_t^2v=6=$正,故知於 $t=2\frac{1}{3}$秒,v 之值爲極小。於 $t<2\frac{1}{3}$ 秒,a 爲負;於 $t>2\frac{1}{3}$ 秒,a 爲正;故在起始 $2\frac{1}{3}$ 秒內 P 點之速度漸減,過 $2\frac{1}{3}$ 秒之後,其速度乃漸增;讀者須注意,此處所謂漸增漸減係代數的。其實 P 點之速度在 $t=0$ 時刻爲 8 米/秒;此後漸減於 0。在 $t=\frac{2}{3}$秒以後,速度之絕對值係增加,惟其方向則由右改向左!至 $t=2\frac{1}{3}$秒,其速度乃達每秒向左行 $\frac{25}{3}$ 米之最大值(代數的最小值,即 $v=-\frac{25}{3}$ 米/秒)。過此以後,P 點雖仍向左行,但其速度之絕對值乃漸減以至 0(此時 $t=4$ 秒)。此後,P 乃以漸加的速度向右行。換言之,原係向左行,若速度漸減(代數的),則其向左之速度實爲增大;若速度漸加(代數的),則其向左之速度實反減小。

4-4. 角速度及角加速度　設有物體 B 旋轉於一固定軸線。假令此固定軸線與紙面正交，而以圖(4-4)中 O 點表此軸線穿貫紙面之點。物體在某時刻 t 之位置，可以其與紙面相遇之任意一直線，如 OP 者，與一參考直線，如 OX 者，所作之角 θ 定之。若在各時刻 t，此角 θ 與 t 之關係爲 $\theta=f(t)$，則仿照(4-3)節所述，物體之轉動角速度 ω 之定義爲

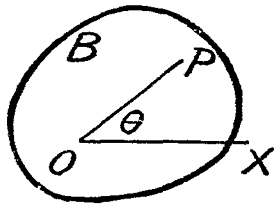


圖 4-4

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=D_t\theta \tag{16}$$

其角加速度 α 之定義則爲

$$\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=D_t\omega=D_t^2\theta \tag{17}$$

角速度 ω 爲正，其意旣指 θ 與時俱增，故依尋常量角度大小之意，旋轉之方向係以 O 爲軸心依反時針方向而進行。反之，角速度爲負之轉動，其轉動方向係與時針轉動方向同。至於加速度之爲正或負，其所指者僅速度係增加或減少，與物體實際轉動之方向實無關係，其例可仿(4-3)節末申言之，玆不贅。

4-5. 函數之變化率　前兩節所述之速度與距離，或加速度與速度之關係均可視爲函數之變化率之實例。然有時函數中之主變數並非時間 t，而函數對其主變數變更後之變化情形亦可用變化率一詞以敍明之。

設 $y=f(x)$ 表一函數。令 x_1 與 x_2 表 x 之兩值，y_1 與 y_2 表與之

相對應之值。無論 x_1 與 x_2 爲何，$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 恆等於一常數 r，則稱 y 對於 x 之變化爲均匀的。換言之，在任意一點，予 x 以一任意增量 Δx，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 恆爲 r，則稱 y 對 x 之均匀變化率等於 r。仿照前此所述，當 y 對 x 之變化率 r 爲均匀的之時，y 與 x 之關係必爲一次方程，如

$$y-y_0=r(x-x_0),$$

反之亦然。若表 y 與 x 之關係之方程 $y=f(x)$ 非一次的，則 y 對 x 之變化非均匀的。如是，仿前節所述，在(x_2-x_1)之間隔內，y 之平均變化率(average rate of change)之定義爲

$$r_{av}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \tag{18}$$

今若令 $(x_2-x_1)=\Delta x$，$y_2-y_1=\Delta y$ 分別爲(x_1,y_1)點之增量，則當$\Delta x\to 0$ 時，在 x_1 點之變化率，其定義爲

$$r=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=D_xy \tag{19}$$

例如若 $y=x^2$ 則 $D_xy=2x$。故於 $x=3$ 時，y 對於 x 之變化率爲 $r=2\times 3=6$，而於 $x=4$ 時，則等於 $2\times 4=8$。在不均匀的變化率問題中，變化率顯然爲主變數 x 之函數。

4-6. 互相關係之變化率 設有兩變數 x 及 y，其間有一明顯的函數關係如 $y=f(x)$者，則此兩變數對於時間之變化率 D_tx 及 D_ty 將有下列之關係（見 2-8 節）：

$$D_ty=[D_xf(x)]D_tx=f'(x)D_tx \tag{20}$$

例 1. 設有一點 P 以 O 爲中心而旋轉。若 $OP=r$，則在甚短時間內，P 所作之弧 PQ 幾與一直線無異。故在一短時內 P 之運動情況，

除可視作轉動外，亦可視爲直線運動。今若欲表其角速度或角加速度與其直線速度或加速度之關係，可自 P 所行之弧長 s 與其轉動之角 θ 之關係求之。s 之長顯然與 $OP=r$ 及 $QOP=\theta$ 角二者之乘積成正比（圖 4-5），卽

$$s=kr\theta \tag{21}$$

此中比例係數 k 之值視 s，r，及 θ 三者之單位而定。若 s 與 r 用同樣之長度單位，吾人可認單位之角 θ 係使方程(21)中之 k 爲 1。此單位名爲弧度 (radian) 或弳，爲物理學及微積分所習用，其值約等於 57.3 度，如是則

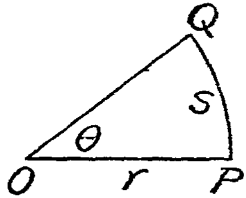


圖 4-5

$$s=r\theta \tag{22}$$

今求此公式兩方對 t 之紀數，則有

$$D_ts=rD_t\theta \quad \text{或} \quad v=r\omega \tag{23}$$

以表示直線速度 v 等於半徑 r 與角速度 ω 之乘積。再微分之得

$$D_t^2s=rD_t^2\theta \quad \text{或} \quad a=r\alpha \tag{24}$$

表示直線加速度 a 等於半徑 r 與角加速度 α 之乘積。

若 x 與 y 之關係乃由一未解出之方程 $F(x,y)=0$ 隱示之，則 x，y，D_tx，D_ty 各量將滿足 $D_t\{F(x,y)\}=0$ 一方程。在計算 $D_t\ \{F(x,y)\}$ 之時，x 與 y 均應視爲 t 之函數。此蓋因 $F(x,y)=0$，故當 t 變爲 $t+\Delta t$ 時，x 變爲 $x+\Delta x$，y 則變爲 $y+\Delta y$，而 $F(x+\Delta x,y+\Delta y)=0$ 之關係仍成立。今不論 Δt 爲何，$F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-F(x,y)=0-0=0$ 既永爲 0，故

$$D_t\{F(x,y)\}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y)}{\Delta t}=0$$

例 2. 每分鐘注 4 立方尺之水於一圓錐形之桶中，錐深 8 尺，上端直徑亦 8 尺。問當水面離錐頂爲五尺時，其上升之速度若何？此時水面面積增大率爲何？(圖 4-6)

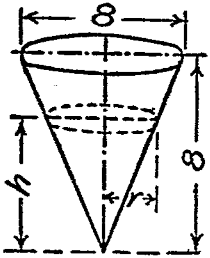


圖 4-6

在某時刻 t，令水面距錐頂爲 h 尺，同時水面半徑爲 r 尺。如是已注入之水之容量爲

$$V=\frac{1}{3}\pi hr^2$$

今因錐高爲 8 尺，故

$$\frac{h}{2r}=\frac{8}{8}=1 \quad 或 \quad r=\frac{h}{2}$$

消去 r 乃得

$$V=\frac{\pi h^3}{12}$$

求對 t 之紀數乃有 $D_tV=\frac{\pi}{4}h^2D_th$。今 $D_tV=4$ 立方尺/分，而 $h^2=5^2=25$ 平方尺，故

$$D_th=\frac{4}{\pi}\frac{D_tV}{h^2}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{4}{25}\right) 尺/分鐘$$

或水面上升之速度爲每分鐘 $\frac{16}{25\pi}=0.204$ 尺。

令 A 表當水面距錐頂爲 h 尺時之水面面積，則

$$A=\pi r^2 \quad 或 \quad r^2=\sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

因 $h=2r$，故

$$V=\frac{\pi}{3}hr^2=\frac{2\pi}{3}r^3=\frac{2\pi}{3}\left(\frac{A}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}$$

求對 t 之紀數乃有

$$D_tV=\pi\left(\frac{A}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}D_t\left(\frac{A}{\pi}\right)=\left(\frac{A}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}D_tA$$

今 $D_tV=4$ 立方尺/分鐘，$h=5$ 尺，或 $r=\frac{5}{2}$ 尺，即 $A=\frac{25}{4}\pi$ 方尺，故

$$D_tA=\left(\frac{\pi}{A}\right)^{\frac{1}{2}}D_tV=\left(\frac{4\pi}{25\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\times 4\text{ 方尺/分鐘}=\frac{8}{5}\text{方尺/分鐘。}$$

例 3. 設有一梯 PQ 靠垂直之牆 OQ 滑下。PQ 長 13 尺。當其下端 P 離牆底 O 爲 5 尺，而梯下端 P 以每秒 3 尺之速度滑動時，問梯上端 Q 沿牆之滑動速度若何？又問 QOP 三角形面積之變化率爲何？（圖4-7）

在任何時刻，令 $x=OP$, $y=OQ$，則

$$x^2+y^2=13^2,$$

或

$$2xD_tx+2yD_ty=0。$$

即

$$D_ty=-\frac{xD_tx}{y}$$

今已知 $D_tx=3$ 尺/秒，而欲求當 $x=5$ 尺時，D_ty 之值。在 $x=5$ 尺之時，$y=\sqrt{13^2-5^2}=12$ 尺，故

$$D_ty=-\frac{5\times 3}{12}\text{ 尺/秒}=-\frac{5}{4}\text{ 尺/秒}$$

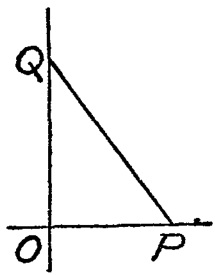


圖 4-7

此中負號之意義係指 $OQ=y$ 之距離乃減少，即 Q 向下滑！

令 A 表三角形之面積，則

$$A=\frac{1}{2}xy$$

求對 t 之紀數乃得 $D_tA=\frac{1}{2}(xD_ty+yD_tx)$；

在 $x=5$ 尺時，$y=12$尺，$D_tx=3$尺/秒，$D_ty=-\frac{5}{4}$尺/秒，

故 $\qquad D_tA=\frac{1}{2}\left(-\frac{5\times5}{4}+3\times12\right)$方尺/秒$=14\frac{7}{8}$方尺/秒，

意即面積每秒增大 $14\frac{7}{8}$方尺。

在上列各例中，讀者須特別注意所欲求者雖爲在某一定時刻之變化率，而解答之時則先求在任何時刻之變化率！既得普通之答案後，方以在所規定時刻之各數值代入。此法前已屢用之，此後亦將常用之，蓋爲解答多數實用問題之楷模！換言之，欲求某特殊時刻或點之答案，吾人均先求一答案可用於任何時刻或點，然後再由之以計所欲得之答案。此外，讀者切不可將已知之數値代入方程中然後再求紀數。例如在例 3 第二段中，若先令 $x=5$，而寫面積爲 $A=\frac{5y}{2}$，再求出 $D_tA=\frac{5}{2}D_ty=-\frac{25}{8}$方尺/秒，則結果將大誤矣。

第 四 章 習 題

1. 將 9 分作兩部分，其一與其他平方之乘積爲最大，試求兩部分之值。

2. (a)證面積最大而周長有固定值之矩形爲正方形；

   (b)證周長最短而面積有固定值之矩形亦爲正方形。

3. 有矩形內接於半軸分別爲 a 與 b 之橢圓，求其最大面積。

4. 一梯形上底長 3 寸，兩腰各 1 寸，若其面積最大，求下底之長。

5. 證底邊與面積均有固定値而周長最短之三角形，其兩邊相等。

6. 作一最大之矩形其各邊通過一已知矩形之四頂點。

7. 求容於一定圓球內(a)最大正圓錐及(b)最大正圓柱之體積。

8. 求雙曲線 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 上距 (c,o) 點最近之點。

9. 令 AB 表切於橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上 P 點之切線，A 及 B 分別爲切線與 X 及 Y 軸相交之點。若 AB 係最短，示 $AP=b$，及 $PB=a$。

10. 令 PT 表切於拋物線 $y^2=4ax$ 上 P 點之切線，茲在 X 軸上，原點之右 c 處之 M 點，作一垂線於此切線，與之相交於 T。求 MT 之最短値並分論 $c<2a$ 及 $c>2a$ 之情形。

11. 由長短軸分爲 $2a$ 及 $2b$ 之橢圓中心，作一垂線於其周上之一切線。試示此垂線足與切點間之最長距離爲 $a-b$，而此時之垂線長則爲 $\sqrt{ab}$。

12. 過角內一定點，作一直線以成一最小之三角形，試證定點平分該線。

13. 某窗之形狀係由矩形與半圓組合，矩形之一邊適爲半圓之直徑。若窗之周長一定，求其高闊比率，使所通過之光量最大。

14. 若罐頭食品之洋鐵罐，其容量一定，問罐高與頂蓋直徑之比率應爲何，所用洋鐵方爲最省?

15. 若罐頭之洋鐵皮面積有固定値，求容量最大之罐之高與半徑。

16. 容量固定之圓錐形帳幕，若其高爲其底之半徑之$\sqrt{2}$倍，則所用帆布最省，試證之。

17. 有中部爲圓柱形，首尾爲正圓錐之魚雷，若三部同長，問能容定量炸藥而表面最小之魚雷其半徑與長度之關係爲何？

18. 一高樓離牆 8 尺，牆高 27 尺，今欲用一最短之梯自地面跨牆頂以達於樓，求梯之長。

19. 一圓錐形玻杯滿盛有水，茲輕放一石球於其中。若杯口半徑 3 寸，杯高 4 寸，求排水量最大之球之半徑。

20. 電話公司計算純利，當用戶數目在一千以內時，公司自每架話機可贏利 15 元，若用戶數目超過一千，則每超過一戶，公司自每架話機所得之利益減少一分。問用戶數目應爲若干，公司純利方爲最大？

21. 正午，甲船以每小時 20 里之速度向東行，同時乙船在甲船之北 82 里處，以每小時 16 里之速度向南行。試示兩船距離最近之時刻爲午後二時。又問此時兩船離開之速度爲何？

22. 一槓桿以一端爲支點。茲於距支點一尺處，懸重 490 斤而加力於桿之他端以舉之。若桿每尺重 5 斤，求最省力之桿長。

23. 截面爲矩形之單樑，其載重量與其深之平方及其寬成正比，問應如何將一圓柱鋸成一載重量最強之樑。

24. 一火車鍋爐每小時消耗煤量與速度之立方成比例，當速度爲每小時 20 里時，消耗之煤每小時值 40 元，至於其他費用每小時則需 200 元。求行駛一定距離之最經濟速度。

25. 電源之電動勢爲 E，其內阻爲 r，今用之以供給電流於可變外阻

R, R 中所耗之功率爲 $W=\dfrac{RE^2}{(R+r)^2}$，試示當 $R=r$ 時，W 爲最大。

26. 一點 P 沿一直線運動，在 t 秒，其與原點 O 之距離爲

$$s=t^4-8t^3+22t^2-24t+5$$

(a)指出其速度與加速度爲正，負或零之各時間；(b)問其向後轉之時刻爲何？(c)速度極大與極小之時刻各爲何？(d)加速度爲極大或極小之時刻各爲何？

27. 轉動體所轉之角 θ 與時間之關係爲 $\theta=54t-9t^2$；求 $t=1$ 及 $t=5$ 時之角速度與角加速度。

28. 一物體旋轉於固定軸線，其角速度 ω 與時間 t 之關係爲

$$\omega=\frac{t}{1+t^2}。$$

試討論其運動。

29. 有 P_1 與 P_2 兩點，同在一直線上運動，其所行之路程可分別以方程 $s_1=3t^2-2t-1$ 與 $s_2=2t^2-7$ 表之。求兩點距離最近之時刻。

30. 一點沿拋物線 $6y=x^2$ 移動，當 $x=6$ 時，橫坐標之增率爲每秒 2 單位，問縱坐標增率爲何？

31. 一金屬圓片，因熱膨脹，半徑每秒增 0.01 寸，問當半徑爲 2 寸時，面積增率爲何？

32. 夜間一球形露點吸收水份之速度可使其半徑每分鐘增大 1 毫米 (millimeter)，問當其直徑爲 2 毫米時，其體積之增大率爲何？

33. 落在平靜水面上之石，產生同心波紋。若最外一圓波半徑增大率恆爲每秒 6 尺，問在 2 秒鐘末，被擾動水面積之增率爲何？

34. 有長 20 尺之桿，上端靠牆，今有人握住其下端而以每秒 2 尺之速度離牆走開，問當此人離牆 4 秒時，梯上端沿牆下滑之速度為何？

35. 風箏離地 150 市尺時，所放出之線為 250 市尺。如箏以每小時 4 市里之速度沿水平方向飛去，問放箏者放線之速度為何？（1 市里＝1500 市尺）。

36. 塔高 60 公尺，茲有人以每小時 5 公里之速度向之行走。問當其離塔足 80 公尺時，其頭頂接近塔頂之速度為何？（人高 1.8 公尺；1 公里＝1000 公尺）。

37. 馬路上空懸有路燈，離地 30 尺；茲有高 5 尺之人，以每分鐘 168 尺之速度背燈而行，問此人之影於路上引長之速度為何？

38. 一人走過一橋之速度為每小時 4 市里，同時一船以每小時 8 市里之速度划過。橋面較船面高 30 市尺，問 3 分鐘後，人與船離開之速度為何？

39. 測定一量 n 次之值分為 $r_1, r_2 \cdots\cdots r_n$。若 M 表此量之或然值 (probable value)，則各 r 與 M 之差之平方之總和應為最小，試示 M 為各 r 之算術的平均，即

$$M=\frac{r_1+r_2+\cdots\cdots+r_n}{n}$$

40. 令 A 表 n 個正數 $a_1, a_2 \cdots\cdots, a_n$ 之算術的平均，G 表其幾何的平均，而 H 表其調和的平均，即

$$G=\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots\cdots a_n}, \quad \frac{1}{H}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\right),$$

試由 $\dfrac{\dfrac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}+x}{n}}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots\cdots a_{n-1}x}}$ 之最小值，推斷算術的平均

$A\geqq$ 幾何的平均 $G\geqq$ 調和的平均 H。

41. 試由 x^p-px 之最大或最小值推斷，若 $x>0$ 則

$$mx^{m-1}(x-1)\geqq x^m-1\geqq m(x-1)，\text{如 } m>1 \text{ 或 } m<0;$$

而 $$mx^{m-1}(x-1)\leqq x^m-1\leqq m(x-1)，\text{如 } 0<m<1。$$

第五章　微分

5-1. 精確值與近似值　自然科學常稱爲精確科學(exact science)，而數學更爲各精確科學之典型。此蓋因數學家所用之方法均遵循論理學之原理，而其所推得之結論，在符合於所用之假設及定義之條件下，絕無絲毫附會或"差不多"之處也。然數學家之假設，用之於現實問題，是否完全符合尙有可以討論餘地。例如承認 Euclid 之第四假設（卽通過一點只能畫一直線與另一已知直線平行），則 Euclid 式幾何學（卽尋常之幾何學）各論斷均爲精確。若放棄此假設，吾人亦可推得另一羣論斷，其精確性不亞於 Euclid 式幾何，而結果則與之大異。至於吾人日常所處之世界果應以 Euclid 式或非 Euclid 式之幾何說明之，實不屬於數學家所考慮之範圍。又例：吾人可根據圓之定義而推得不少圓之特性，然在物理界中果有如數學家所規定之圓一物否，亦尙有疑問。惟此疑問之存在，不影響於數學家所得之結果之精確性。進而言之，物理界雖無完全合於數學家所公認之圓，然總有與是相近似之物。此等物旣與圓相近似，則引用數學家所推得有關於圓之結果，亦可近似的表示此物之特性。據此以言，討論實用問題時，所用之數學方法雖甚精確，其所得結果之準確程度常仍屬有限。故在不少之實用問題中，善於運用精確的數學方法者，反因便捷或其他原因，採用近似的算法。近似值與近似算法之重要，在精確科學中，例如微積分，亦實有其地位，此

爲初學者所不應忽視之點!

5-2. 函數增量之近似值　設有函數 $y=x^2$。在 $x=1$ 之點,令 x 之增量 Δx 如下表第一行所示,則 y 之增量將如下表第二行所示:

(1) Δx	0.10	0.0500	0.0100	0.001000
(2) Δy	0.21	0.1025	0.0201	0.002001
(3) $(D_xy)\Delta x$ 於 $x=1$ 點	0.20	0.1000	0.0200	0.002000
(4) $\Delta y-D_xy\Delta x$	0.01	0.0025	0.0001	0.000001

上表第三行所示者爲增量 Δx 與在 $x=1$ 點之紀數(卽 2)之乘積。此值與增量 Δy 之精確值相差則列於第四行。由是可知增量 Δx 愈小,則 Δy 與 $(D_xy)\Delta x$ 相差亦愈微。換言之,在某點之 Δy,其近似值約爲該點之 D_xy 乘以 Δx。此實爲一普遍的論斷,玆特申述之。

令 $y=f(x)$ 表 x 之函數,D_xy 表此函數之紀數。按定義

$$D_xy=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1}$$

又按(1-4)無窮小之意義,此方程中之 lim 記號可以省去而另寫之如下:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}-D_xy=h \tag{2}$$

此中 h 表一無窮小,卽當 $\Delta x\to 0$ 時,$h\to 0$。今試將方程(2)之兩邊各乘以 Δx(注意 Δx 爲無窮小但不等於零,故方程兩邊可以 Δx 乘之而仍存原意),則有

$$\Delta y-(D_xy)\Delta x=h\Delta x$$

或

$$\Delta y=(D_xy)\Delta x+h\Delta x \tag{3}$$

由此卽知 Δy 係由兩個無窮小相加，其一之值爲紀數 $D_x y$（非無窮小）與Δx相乘，其他則爲兩無窮小（h 及 Δx）相乘。前者趨 0 之速度顯然不及後者。若以 $y=x^2$ 爲例，則前者（卽 $D_x y\,\Delta y$）之值將如第三行所示，而後者（$h\Delta x$ 實卽 $\Delta y-D_x y\Delta x$）則將如第四行所列。因此，以 $h\Delta x$ 與 $D_x y\,\Delta x$ 相較，吾人常視前者爲較高級之無窮小（infinitesimal of higher order）*。易言之，在方程(3)之右方第二項之值比第一項均較小若干倍，故如欲得 Δy 之近似值，略去此第二項，而僅用其第一項〔卽主要部分(principal part)〕，其近似程度卽已甚佳。

例 1. 有一細環形，其內半徑爲 10 寸，寬爲 0.01 寸，試求此環之面積（圖 5-1）。

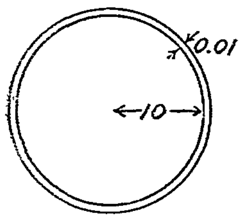


圖 5-1

環形面積 $A=\pi r_2^2-\pi r_1^2=\pi(r_2^2-r_1^2)$，$r_1$ 及 r_2 分表環之內外半徑。故就尋常算法卽有

$$A=\pi(10.01^2-10.00^2)=0.2001\pi \text{ 平方寸。}$$

若用微分學方法計此題，則題意可改爲如下：

有半徑爲 10 寸之圓，今將其半徑增至 10.01 寸，問所增加之面積若干？

---

* 設有兩無窮小 h 與 k。若 $\lim\frac{h}{k}=0$，則對 k 言，h 係較高級之無窮小。若 $\lim\frac{h}{k}=$常數$\neq 0$，則 h 與 k 爲同級之無窮小。若 $\lim\frac{h}{k}\to\infty$，則對 k 言，h 爲較低級之無窮小。

令 A 表面積，r 表半徑，則 $A=\pi r^2$。吾人約有

$$\Delta A=D_r(\pi r^2)\Delta r=2\pi r\Delta r$$

$$=2(\pi\times 10)(10.01-10.00)=0.2\pi \text{方寸。}$$

此與正確值相較，僅差二千分之一。

例 2. 設以秒擺(seconds pendulum)（即每秒約完全擺動一次或經過中心兩次）測重力加速度 g，其所用之公式爲

$$g=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 l$$

此中之 T 表擺之週期（即約 2 秒），l 表擺長。問因測計 T 不準所引起之 g 之誤差爲何？

令 Δg 表因 T 量差 ΔT 所引起之 g 之誤差。求 $g=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 l$ 對 T 之紀數，即約有

$$\Delta g=-\frac{2(2\pi)^2}{T^3}l\Delta T$$

今 T 約爲 2 秒，g 約爲 980 厘米/秒^2。即 l 約爲 $\frac{T^2}{4\pi^2}\times 980$。故 Δg 與 ΔT 之比約爲

$$\frac{\Delta g}{\Delta T}=-\frac{8\pi^2}{8}\times\frac{4}{4\pi^2}\times 980=-980$$

即 g 之誤差之數值（以厘米/秒^2 計）約爲 T 誤差之數值（以秒計）之 1000 倍！例如量 T 時，其值太大千分之一秒，則所計得之 g 其值太少約 1 厘米/秒^2。

5-3. 微分　爲便於應用起見，方程(3)中之主要部分，即 $D_xy\Delta x$，稱爲函數 $y=f(x)$ 之微分 (differential)。若以 dy 爲 y 之微分之記

號，則本定義可列爲方程如下：

$$dy=D_xy\,\Delta x \text{ 或 } df(x)=D_xf(x)\Delta x=f'(x)\Delta x \tag{4}$$

例　若 $y=2x^2+x$

則 $$dy=d(2x^2+x)=D_x(2x^2+x)\Delta x=(4x+1)\Delta x。$$

若 $y=x^{\frac{1}{2}}$，

則 $$dy=d\,(x^{\frac{1}{2}})=D_x(\,x^{\frac{1}{2}}\,)\Delta x=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Delta x。$$

若 $y=x$，

則 $$dy=dx=D_xx\Delta x=\Delta x。$$

自最後一例觀之卽知自變數 x 之微分 dx 卽等於其增量 Δx。因此，定義方程(4)常改爲

$$dy=D_xydx \tag{5}$$

若除兩邊以 dx，則 y 對於 x 之紀數亦可寫作微分 dy 與微分 dx 之商，卽

$$D_xy=\frac{dy}{dx} \tag{6}$$

因此之故，此後 D_x 與 $\frac{d}{dx}$ 兩記號之意義可視爲相同。例如

$$\frac{d}{dx}(x^2)=2x;\ \frac{d}{dx}(2x^2+x+3)=4x+1。$$

5-4. 微分之幾何的意義　令圖(5-2)表 $y=f(x)$ 之圖線。在圖線上取任意 P 點 (x,y)。又在其鄰近取一 Q 點 $(x+\Delta x, y+\Delta y)$。畫過 P 點之切線 PT。如是 $PD=\Delta x=dx$; $DQ=\Delta y$;

$$DT=PD\ \tan\angle TPD=(D_xy)\Delta x=(D_xy)\,dx=dy;$$

$$TQ=\Delta y-dy=\Delta y-D_xy\Delta x。$$

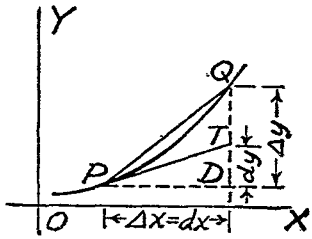


圖 5-2

自此圖觀之，除 y 與 x 之關係爲直線的外，DT 均不等於 DQ。換言之，自變數 x 之微分固與其增量 Δx 相等，但函數 $y=f(x)$ 之微分 dy 則常不等於其增量 Δy。微積分中所討論之問題，吾人最後多令 Δx 趨於零，故 $\Delta x, \Delta y, dx$，及 dy 均可視作無窮小，雖則照增量之定義，Δx 及 Δy 有時係被規定爲有限值之常數。

5-5. 自變數之改換　前此所述之方程(5)，其中之自變數實不限於 x，若自變數爲 t，而 y 與 x 均可表爲 t 之函數，則

$$dy=D_xy\,dx$$

一關係仍屬眞實，此乃引用微分一觀念之眞正價值也，玆推證之。

令 $y=f(t), x=g(t)$。如是按定義

$$dy=D_ty\,dt,\quad dx=D_tx\,dt。$$

但若將 $y=f(t)$，$x=g(t)$ 聯解以消去 t 而使 y 爲 x 之函數，則按(2-8)節所述

$$D_ty=D_xy\,D_tx,$$

故

$$dy=(D_xy\,D_tx)dt=D_xy(D_tx\,dt)=D_xy\,dx。$$

是即所欲求之證。

此定理既明，吾人乃可將 $D_ty=D_xy\,D_tx$ 一關係改用微分表之如下：

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \tag{7}$$

在此中各微分 dy, dx, dt 既各可單獨的存在，逕認方程(7)爲一恆等式亦無不可。因此之故，求微分之機械式動作較求紀數爲便利。此後無論所求者爲紀數抑爲微分，其演算均以"微分"（動詞）二字表之。例如微分 $y=f(x)$，其意義可釋爲計算 $dy=f'(x)dx$ 亦可釋爲計算 $D_xy=\frac{dy}{dx}=f'(x)$。

5-6．微分公式 玆爲温習並便於考查起見，將已證過之微分法各普通公式列舉於下：

I. $$d(cu)=c\,du;$$

II. $$d(u+v)=du+dv;$$

III. $$d(uv)=udv+vdu;$$

IV. $$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2},$$

V. $$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}。$$

此外尚有下列兩特別公式：

VI. $$dc=0;$$

VII. $$du^n=nu^{n-1}du。$$

公式(VI)示任何常數 c 之微分爲零。至於公式(VII) 不但可用於 u 爲自變數之時，實亦可用於 u 爲另一自變數之函數時。例如 $x=\sqrt{1-t^2}$。若命 $u=(1-t^2)$，$x=u^{\frac{1}{2}}$，

則 $$dx=du^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}d(1-t^2)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}(0-2t\,dt)$$

$$=\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}dt=-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt,$$

或
$$\frac{dx}{dt}=-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}。$$

讀者當能記憶若承認特別公式 VI，則普通公式 I 可視爲普通公式 III 之一特殊情形(卽 $v=c$)。又如承認特別公式 VII 可以用於 n 爲負及分數之時，則普通公式 IV 亦可包括於公式 III 之中。至於公式 V 則可視爲一恆等式。據是以言，則最重要者實僅公式 II 及 III。公式 II 與尋常代數中之締結律無異，而公式 III 則爲微分學所特有。故微分之演算實甚簡單。初學者今後所應特加練習者，卽爲如何使演算可以簡捷。

例 1.　微分 $y=12-5x+7x^3$

用公式 II:　$dy=d(12)+d(-5x)+d(7x^3)$

用公式 VI:　$d(12)=0$

用公式 I:　$d(-5x)=-5\,dx$

再用公式 VII:　$d(7x^3)=7d(x^3)=21x^2dx$

故　$dy=-5\,dx+21x^2\,dx=(21x^2-5)\,dx$

此答案固無誤，然演算殊嫌繁長。初學時或難免犯此病，但多加練習之後，讀者應能順手寫出下列答數:

$$d(12-5x+7x^3)=(-5+21x^2)\,dx$$

例 2.　微分 $y=\sqrt{a+bx+cx^2}$

令 $$u=a+bx+cx^2,$$

則 $$y=u^{\frac{1}{2}},$$

故 $$dy=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du,$$

$$du=(b+2cx)dx,$$

是以 $$dy=\frac{(b+2cx)dx}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}。$$

在此例中，讀者對於公式之應用，若已嫻熟，則當能將 y 寫作

$$y=(a+bx+cx^2)^{\frac{1}{2}}$$

而順手寫出

$$dy=\frac{1}{2}(a+bx+cx^2)^{-\frac{1}{2}}(b+2cx)dx。$$

例 3. 自 $x^3-3xy+2y^4=1$, 求 $\frac{dy}{dx}$。

求兩邊之微分卽有

$$3x^2\,dx-3x\,dy-3y\,dx+8y^3dy=0;$$

將 dx 及 dy 之係數分別集合乃得

$$dx(3x^2-3y)+dy(8y^3-3x)=0,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-3y}{3x-8y^3}。$$

遇及隱函數如上例者，先求微分似較先求紀數更為便捷。

5-7. 高級微分 擴充前此所述微分之定義可求得高級微分(differential of higher order)；惟此等高級微分之値，常視自變數爲何而異，故在初等教本中，吾人常不用之，以免謬誤。但一級紀數既可以兩微分

dy 與 dx 之商爲其記號，高級紀數之記號若亦以微分表之似較一律。擴充此記號之法如下：

因一級紀數 $D_xy=\frac{dy}{dx}$ 爲 x 之一函數，故其對 x 之紀數爲（按 D_x 與 $\frac{d}{dx}$ 兩記號之意義係相同）

$$D_x(D_xy)=\frac{d}{dx}(D_xy)=\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}=\frac{d^2y}{(dx)^2}=\frac{d^2y}{dx^2}。$$

在此記號中，d^2y 固可視作 y 之二級微分，dx^2 則應視爲一級微分 dx 之平方。如是類推，吾人可寫 $D_x{}^3y=\frac{d^3y}{dx^3}$ 爲 y 之三級紀數，……，以及 $D^n{}_xy=\frac{d^ny}{dx^n}$ 爲 y 之 n 級紀數。惟因自變數更換後，$d^2y, d^3y, \cdots\cdots d^ny$ 各高級微分之值亦隨之而更換，故 $\frac{d^2y}{dx^2}$，$\frac{d^3y}{dx^3}$，…… $\frac{d^ny}{dx^n}$ 各記號最好只可認爲 $D_x{}^2y, D_x{}^3y, \cdots\cdots D_x{}^ny$ 各記號之另一寫法而不得認之爲兩微分之商！

例　令 $y=x^2, x=\frac{1}{t}$；

無論 x 或 t 爲自變數，吾人均有

$$\frac{dy}{dx}=2x，\quad 或 \quad dy=2x\,dx \tag{A}$$

若 t 爲自變數，則將 x 消去而表 y 爲 $y=\frac{1}{t^2}$，可得

$$dy=-\frac{2}{t^3}dt。 \tag{B}$$

今以 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$ 之值代入(A)中則得

$$dy=2x\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt,$$

再消去 x，遂復得 $dy=-\frac{2}{t^3}\,dt$ 如前。此即表示無論 x 爲自變數與否，$dy=D_xy\,dx$ 均屬眞確。

若 t 爲自變數，$\frac{dy}{dt}=-\frac{2}{t^3}$，故

$$d\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{6}{t^4}\,dt \quad 或 \quad d^2y=\frac{6}{t^4}dt^2 \tag{C}$$

又若 x 爲自變數則 $d\left(\frac{dy}{dx}\right)=2\,dx$ 或 $d^2y=2\,dx^2$ (D)

今若以 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$ 之值代入(D)關係中，所得者爲 $d^2y=\frac{2}{t^4}dt^2$ 而與(C)迴異矣。換言之，$dy=D_xy\,dx$ 一關係，不論自變數爲何均可成立，至於

$$d^2y=D_x{}^2y\,dx^2, \quad 或 \quad d^ny=D_x{}^ny\,dx^n \tag{E}$$

之關係只於自變數爲 x 時方屬眞確。若自變數非 x，則此等關係不能成立。因此，高級微分之記號，除合寫爲$\left(\frac{d^n}{dx^n}\right)$以代 $D_x{}^n$ 外，多不分用*。

若必須用高級微分時，其公式應按下法求之。按定義

$$dy=D_xy\,dx,$$

若 x 非自變數，則此中之 dx 不得視爲常數（例如若 x 爲 t 之函數，則 $dx=D_tx\,dt$ 而 D_tx 顯爲 t 之函數而非一常數！）。如是微分 dy 時須按公式 III，而有

---

* 下段所述，係較深材料，讀者可略去不究。

$$d(dy)=d^2y=d[(D_xy)dx]=D_xyd(dx)+[d(D_xy)]dx,$$

或
$$d^2y=D_xy\,d^2x+[D_x{}^2y\,dx]dx,$$

卽
$$d^2y=D_xy\,d^2x+D_x{}^2y\,dx^2 \tag{F}$$

其他各高級微分可仿此類推。若 x 爲自變數，則 $d^2x=0$ 而上述公式卽可簡化爲

$$d^2y=D_x{}^2y(dx)^2 \quad 或 \quad \frac{d^2y}{dx^2}=D_x{}^2y。$$

例　仍令 $y=x^2, x=\frac{1}{t}$，

$$D_xy=2x,\ D_x{}^2y=2,\ dx=-\frac{1}{t^2}dt,\ d^2x=\frac{2}{t^3}dt^2$$

代入(F)，乃有

$$d^2y=2x\frac{2}{t^3}dt^2+2\,dx^2=\frac{4x}{t^3}(t^4dx^2)+2\,dx^2$$

$$=(4xt+2)dx^2=6\,dx^2$$

此結果與前此先消去 x 而計得者完全相符，是卽表示若自變數非 x，二級微分之公式應爲(F)而非(E)。各高級微分之公式可自(F)推求之，結果自屬較繁，玆不贅。

第五章習題

1. 微分下列諸函數：

(a) $u=x^4-3x+1$；　　(b) $y=(a+bx+cx^2)^{-\frac{1}{2}}$；

(c) $u=\sqrt{b^4+b^2x^2+x^4}$；　　(d) $y=\frac{x}{1+x^2}$；

(e) $y=\dfrac{a^4-x^4}{a^4+a^2x^2+x^4}$,　　(f) $u=\dfrac{1-x}{1+x}$,

(g) $y=\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$,　　(h) $u=(x^2+1)\sqrt{x^3-x}$;

(i) $u=\dfrac{x-a}{\sqrt{2ax-x^2}}$;　　(j) $u=\dfrac{(y^4+b^4)^2}{y^4}$;

(k) $u=\dfrac{2x^2+a^2}{x^3}\sqrt{a^2-x^2}$;　(l) $u=\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$。

2. 微分下列諸方程:

(a) $x^3+y^3-2x^2y-y=4$;　　(b) $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}$;

(c) $xy=a^2$;　　(d) $2xy-x+y=0$;

(e) $\dfrac{x+y}{x-y}=\sqrt{2x^3}$;　　(f) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$。

3. 若 $y=\dfrac{1}{x}$, 試證 $\dfrac{dy}{\sqrt{1+y^4}}+\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=0$。

4. 試證明下列公式 $d\left(\dfrac{u_1u_2\cdots u_n}{v_1v_2\cdots v_n}\right)=$

$$\frac{u_1u_2\cdots u_n}{v_1v_2\cdots v_n}\left\{\left(\frac{du_1}{u_1}+\frac{du_2}{u_2}+\cdots+\frac{du_n}{u_n}\right)-\left(\frac{dv_1}{v_1}+\frac{dv_2}{v_2}+\cdots+\frac{dv_n}{v_n}\right)\right\}$$

5. 設 $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{(x^2+3x-7)}}$, 問 $f(7.98)$ 及 $f(8.03)$ 各約若干?

6. 試證明當 Δx 甚小時, $\dfrac{1}{\sqrt{(x+\Delta x)}}$ 約等於 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta x}{\sqrt{(x^3)}}$。

7. 一圓球形之銅殼,厚半厘米, 直徑為 100 厘米, 已知銅之比重為 8.9,問此銅殼約重若干克?

8. 用微分法求以下各數之近似值:

(a)$\sqrt{102}$；　(b)$\frac{1}{97}$，　(c)$\sqrt[3]{120}$；　(d)$\sqrt[4]{92}$。

9. 在一定温度下，一理想氣體之容積 v 與壓力 p 之關係可以 Boyle 定律表之爲 $pv=c$，c 爲常數。若測壓力時，其可能誤差爲 Δp，問計算容積時，其誤差幾何？

10. 氣體遵循絕熱手續漲縮，其壓力 p 與容積 v 之關係爲 $yv^{1.4}=A$，A 爲常數。若測容積 v 之誤差爲 1%，問由是所計得之 y，其誤差幾何？

11. 量一立方體之邊長，其準確程度應如何，方能使計得之容積誤差不超過 1%？

12. 某物體之密度 p，係由其在空氣中之重量 W 與其在水中之重量 w 二者推算而得。若 $W=1$ 仟克，$w=820$ 克，W 之可能誤差爲 1 克，w 之可能誤差爲 1.5 克，試分別計算因 W 及 w 誤差所引起 p 之誤差。又問誤差總値若干？

13. 設以秒擺測重力加速度 g 時，其結果如下：

擺長 $l=(100\pm0.1)$ 厘米，週期 $T=(2\pm0.004)$ 秒。

試計算因 l 與 T 不準所引起 g 之各誤差及總誤差。

14. 設以秒擺測重力加速度，因 l 與 T 誤差所引起之 g 之各誤差係相等，問 l 與 T 應量準至何程度，方能使所計得 g 之誤差不超過 0.1%？

15. 若 h 與 k 均爲無窮小，而 $\lim\frac{h}{k^n}=$常數$\neq0$，則對 k 言，h 爲 n 級之無窮小。根據此定義，試述下列各無窮小之等級：

(a) $h=\frac{7k^2}{k^6-2}$, (b) $h=\sqrt{k^2+2k^5}$;

(c) $h=\sqrt[4]{\frac{3k^6+4k^4}{k^2+3}}$; (b) $h=\sqrt[3]{k^3-3k}$;

(e) $h=\frac{1}{2}k+9k^3$; (f) $h=\sqrt[13]{-k^{12}+k^{13}}$。

第六章　不定積分

6-1. 算法之正反兩面　演算數學問題時，常遇及一法之正反兩面；例如由 $2+3=5$ 方程言之，吾人可問 2 加 3 爲幾，或 2 加幾爲 5。前者爲加法，後者實爲減法（即 5 減 2 等幾）之另一種問式。故如認加法爲正面，則減法可視其爲反逆的算法。同此，乘除亦爲同法之兩方面。在純粹數學之發展過程中，數學家於發明某一算法後，常注意及其反逆法。至若此反逆法在實用問題中如有應用，則其重要更不容忽視。

6-2. 微分之反逆法——積分　與微分相反之算法名爲積分(integration〔名詞〕，integrate〔動詞〕)。設有函數 $F(x)$，其對 x 之紀數爲 $f(x)$，則按定義有

$$D_xF(x)=f(x) \tag{1a}$$

或

$$dF(x)=f(x)dx \tag{1b}$$

對此方程，吾人可發以下兩問：

若已知 $F(x)$，而所欲求者爲 $f(x)$，則問題爲 $F(x)$ 之紀數或微分爲何？設已知 $f(x)$ 而所欲求者爲 $F(x)$，則問題將爲何函數之紀數爲 $f(x)$，或何函數對 x 之微分爲 $f(x)\ dx$？前問爲微分法，後一問爲其反逆法，茲名之爲積分。換言之，若已知一函數 $f(x)$，而可另求得一函數 $F(x)$，其紀數爲 $f(x)$，亦即其微分爲 $f(x)dx$，則稱 $F(x)$ 爲 $f(x)$ 對 x 之積分。積分之意義，雖可亦用方程(1a)或(1b)表達之，但仿照尋常用

正面方式（例如2加幾等5常改問5減2等幾）發問，則寫

$$F(x)=\int f(x)\,dx \qquad (2)$$

此中之積分記號$\int$，實係英文 S（意爲累加 sum）之舊體，其效果可視爲與 d（微分記號）適相消除，即

$$d[F(x)]=d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx,$$

又

$$\int f(x)\,dx=\int d\,F(x)=F(x)^*,$$

換言之，$d\int$ 或 $\int d$（參考附註）連寫一起（中間未有他符號！），其效果等於互相消除。此外，寫積分記號於某函數 $f(x)$ 之前，倘須將 dx 寫於其後，以示所求之積分係對 x 而言。換言之，方程(2)右方之前有$\int$，其後倘應有 dx 方稱完備。至於此中之 $f(x)$ 一函數，其名常爲被積函數(integrand)。

例　若 $f(x)=x^3$，則 $d\,f(x)=3x^2\,dx$，

故知 $\int d\,f(x)=\int 3x^2dx=x^3$，或 $3x^2$ 對 x 之積分之一答案爲 x^3。

若 $f(x)=2x^2+x+1$，則 $df(x)=(4x+1)\,dx$，

故知 $\int d\,f(x)=\int (4x+1)\,dx=2x^2+x+1$，或 $(4x+1)$ 對 x 之積分之一答案爲 $2x^2+x+1$。

若 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$，$d\,f(x)=-\dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$（$x$ 之絕對值須小於1），

故 $\int d\,f(x)=\int -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sqrt{1-x^2}$，或云在 $-1<x<1$ 間隔內，$-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 對 x 之積分之一答案爲 $\sqrt{1-x^2}$。

---

* 此乃答案之一（參閱下節）。

6-3．積分答案之多個性　在前節各例之後，吾人特別聲明所得結果僅爲答案之一！此乃因微分一函數時，其答案只有一個，而積分一函數時，其答案不止一個。例如若 $f(x)=2x^2+x+3$ 則 $D_x f(x)$ 亦爲 $(4x+1)$ 一事似顯示 $\int(4x+1)\,dx$ 亦可爲 $(2x^2+x+3)$，而不僅限於 $(2x^2+x+1)$。其實如 $F(x)$ 爲 $f(x)$ 對 x 之積分［參閱方程(2)］，則 $F(x)+C$（C 表任何常數）亦爲 $f(x)$ 對 x 之積分，因

$$d[F(x)+C]=d\,F(x)=d\int f(x)\,dx,$$

故

$$F(x)+C=\int f(x)\,dx。$$

積分之答案旣有多個，則如何選擇，實屬一先決問題。所幸答案雖有多個，而各答案相差均爲一常數。換言之，若吾人已知

$$F(x)=\int f(x)\,dx$$

爲 $f(x)$ 對 x 之積分之一特別解答 (particular solution)，則其普通解答(general solution)均可將 $F(x)$ 加以一常數 C 以表示之，卽

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C \tag{3}$$

包括一切可能之解答。此中之常數 C 名爲積分常數(constant of integration)，其幾何的及物理的意義俟後敍述。至於 $F(x)+C$ 則常名爲 $f(x)$ 對 x 之不定積分 (indefinite integral)，因其值須視 C 確定後方能確定也。

6-4．基本定理　欲證方程(3)之眞確甚易，因只須微分其兩邊卽可。但 $F(x)+C$ 是否可以包括 $f(x)$ 對 x 之一切積分在內尙須另證。此題之嚴格的分析證明(analytic proof)屬於高等分析範圍，玆僅就淺近方法申敍之。

定理　設 $U(x)$ 及 $V(x)$ 爲 $f(x)$ 對 x 之積分之任何兩個特別解答，則 $U(x)$ 與 $V(x)$ 相差必爲一常數。

今已知

$$U(x)=\int f(x)\,dx,\ V(x)=\int f(x)\,dx;$$

按定義
$$dU(x)=f(x)\,dx,\ dV(x)=f(x)\,dx;$$

$$\frac{d}{dx}U(x)=f(x),\ \frac{d}{dx}V(x)=f(x);$$

將二者相減，$\frac{d}{dx}U(x)-\frac{d}{dx}V(x)=0$ 或 $\frac{d}{dx}[U(x)-V(x)]=0$。

令 $y=U(x)-V(x)$ 表 x 之一函數。因上列關係，y 對 x 之紀數永爲零，是以若將 $y=U(x)-V(x)$ 之圖線畫出，此圖線必爲一與 X 軸平行之直線，此蓋因若所得之圖線非與 X 軸平行之直線，則在圖線上必可尋得一點或數點，在其鄰近之 y 值將隨 x 值之增減而改變。惟在此等點，圖線之斜度，即 $\frac{dy}{dx}$，將不等零而與原始之假定 $\frac{d}{dx}[U(x)-V(x)]=0$ 不符。因此，所得之曲線之方程必爲 $y=C$，此中 C 爲一常數。易言之

$$y=U(x)-V(x)=C$$

或 $U(x)$ 與 $V(x)$ 之差爲一常數 C。$U(x)$ 與 $V(x)$ 既爲任何兩個特別積分，故知所有之不定積分相差均爲一常數。

6-5．積分公式　積分法與微分法雖可視爲互反之兩算法，但依照本書之敍述次序，微分似爲較基本的。此乃因某函數之微分爲何可依基本定義逐步演算之，而某函數之積分爲何一問題則須藉微分法以證驗

之。換言之，欲得一積分公式必先有一微分公式而後可；欲證積分之眞確與否，亦須藉已知之微分方能進行。例如被積函數[卽方程(2)中之 $f(x)$] 爲 x^n，則因已知 $d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n dx$，乃有下列之特殊積分公式

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \tag{4}$$

但若 $n=-1$，此公式右方之分母變爲 0，而公式遂無意義。是以，當被積函數爲 $\frac{1}{x}$ 時，其積分爲何尙須另行討論。除 $n=-1$ 一値外，公式(4)雖可用以積分不少代數函數，但甚多代數函數之積分均甚繁難，有時其結果且須用特殊越函數方能表顯妥善。此等問題之較易者，於學習三角函數及對數函數後，當另作有系統之討論。至於應用公式(4)之時，尙須藉下述兩定理，方不至過受限制。

定理 I. 兩函數之和（或差）之不定積分等於其不定積分之和（或差）。卽

$$\int[U(x)+V(x)]dx=\int U(x)\,dx+\int V(x)dx \tag{5}$$

欲證此定理，可將方程兩邊微分。於是得恆等式

$$U(x)\,dx+V(x)dx=U(x)\,dx+V(x)\,dx$$

本定理顯然可以推廣於兩個以上之函數之和或差。

定理 II. 積分號內之常數因子（例如 k）可移至積分號外，

卽
$$\int kf(x)\,dx=k\int f(x)dx \tag{6}$$

證此之法，亦係將兩邊微分。如是左邊之微分爲 $kf(x)\,dx$，而右邊之微分爲 $d[k\int f(x)\,dx]=kd\int f(x)\,dx=kf(x)\,dx$，二者亦爲恆同。讀者當特別注意可以移動於積分號內外者必爲常數因子。若因子非常數，

或常數非因子，則均不得妄加移動。例如

$$\int xu(x)\,dx \neq x\int u(x)\,dx;$$

$$\int [u(x)+k]\,dx \neq \int u(x)\,dx + k;$$

$$\int [u(x)]^n dx \neq [\int u(x)\,dx]^n$$ 之類。

例 1. 求 $\int (3x^2-x+1)\,dx$

由方程(5)：$\int (3x^2-x+1)\,dx = \int 3x^2dx - \int xdx + \int dx;$

由方程(6)及(4)：$\int 3x^2dx = 3\int x^2dx = 3\frac{x^3}{3} + C_1;$

由方程(4)：　　$\int xdx = \frac{x^2}{2} + C_2;\ \int dx = x + C_3;$

此中 C_1, C_2, C_3 為三個積分常數。將三者相加合併為一個常數 C，則得

$$\int (x^2-x+1)\,dx = x^3 - \frac{x^2}{2} + x + C。$$

讀者於積分方法學習已經嫻熟後，此結果當能順手寫出！

例 2. 求 $\int \left(x^{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}x^3\right)dx$。

應用方程(4)、(5)、(6)當能順手寫出

$$\int\left(x^{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}x^3\right)dx = \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}\right) + C$$

$$= \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + \frac{x^4}{8} + C$$

例 3. 求 $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}dx$

$$\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C。$$

定理 III. 在積分號後之$(D_xu)dx=\frac{du}{dx}dx$ 與 du 可以互相代用。按此定理，若 u 爲 x 之一函數，$g(u)$ 爲 u 之函數，則

$$\int g(u)\ \frac{du}{dx}dx=\int g(u)\ du \tag{7}$$

證此公式之方法亦係分求其兩邊之紀數。求左邊對 x 之紀數則得

$$\frac{d}{dx}\int\left\{g(u)\frac{du}{dx}\right\}dx=g(u)\ \frac{du}{dx},$$

求右邊對 x 之紀數時，按(2-8)節原理，其值亦同，因

$$\frac{d}{dx}\left(\int g(u)du\right)=\frac{d}{du}\left(\int g(u)du\right)\frac{du}{dx}=g(u)\frac{du}{dx}。$$

根據此定理，不少積分亦可援前例而解之。例如，若 y 爲 x 之函數，而 $f(x)dx=g(y)dy$，則 $\int f(x)dx=\int g(y)dy$。又如令 t 爲一輔助變數，且表 $x=g(t)$，$dx=g'(t)dt$，以化 $\int f(x)dx$ 爲 $\int \phi(t)dt$；若後者可以直接積分，則將所得結果中之 t 還原以化成 x 之函數，即得所欲求 $\int f(x)dx$ 之值。

例 1. 求 $\int\sqrt{a+bx}\,dx$。

$$\int\sqrt{a+bx}\,dx=\int\sqrt{a+bx}\,\frac{bdx}{b}=\int\sqrt{a+bx}\,\frac{d(a+bx)}{b};$$

令$u=a+bx$，則此積分變爲

$$\int\sqrt{u}\frac{du}{b}=\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\left(\frac{1}{2}+1\right)b}+C=\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3b}+C=\frac{2(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{3b}+C。$$

例 2. 求 $\int x(1-x^2)^{\frac{2}{3}}dx$。

$$\int x(1-x^2)^{\frac{2}{3}}dx=\int(1-x^2)^{\frac{2}{3}}\frac{d(x^2)}{2}$$

$$=\int(1-x^2)^{\frac{2}{3}}d\left[\frac{-(1-x^2)}{2}\right];$$

令 $1-x^2=u$，則此積分變為

$$-\int\frac{u^{\frac{2}{3}}}{2}du=-\frac{3}{5}\frac{u^{\frac{5}{3}}}{2}+C=-\frac{3u^{\frac{5}{3}}}{10}+C=-\frac{3}{10}(1-x^2)^{\frac{5}{3}}+C$$

6-6. 積分常數之幾何的意義　在不定積分中，積分常數之地位極為重要，初讀者萬勿將之遺漏．常見初學者因遺漏此常數或解釋此常數未當，以致答案已真確而尚不之識。若就圖線而言，積分常數可視為確定圖線位置之數。玆舉兩例以明之。

例 1. 已知曲線上任意點之斜度為 $2x$，試求曲線之方程。曲線上任意點之斜度既為 $\frac{dy}{dx}$，故本題意為

$$\frac{dy}{dx}=2x \quad 或 \quad dy=2x\,dx,$$

積分後乃得　　$y=\int 2xdx=x^2+C$。

今若與 C 以種種不同之數值，則所得之圖線均為以 Y 軸為軸線之拋物線，惟其距 X 軸之位置不同(圖 6-1)。換言之，所得之方程，其所代表者為一族曲線(family of curves)；在本題中所得之拋物線族，其縱

坐標 y 之差均各有一定値，與縱坐標 x 無關（例如 $y=x^2+6$ 與 $y=x^2-3$ 兩拋物線之縱坐標之差恆爲 9），故任將其一向上或向下移動，即可得此族之全體拋物線。

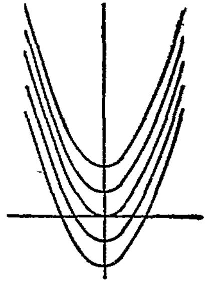


圖 6-1

普通解答爲一族曲線，而特別解答則爲族中一特別曲線。欲求此特別曲線之方程，須先規定其必須通過之點，例如若曲線必須通過 $x=1$，$y=4$ 點，則因普通解答爲 $y=x^2+C$，故以此兩坐標値代入，則得

$$4=1^2+C \quad \text{或} \quad C=3;$$

是以所求之曲線爲 $y=x^2+3$。

例 2. 設有曲線，其任意點之斜度爲 $-\dfrac{x}{y}$，試求其方程。

令
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \quad \text{或} \quad y\,dy=-x\,dx$$

此方程兩邊之變數雖不同，然兩邊仍可分別積分，因按積分定義，吾人只言某函數對一變數之積分而已，實未嘗規定此變數之必爲 x 也。因此，求 $\int y dy$ 即有 $\dfrac{y^2}{2}+C_1$，求 $\int x\,dx$ 亦有 $\dfrac{x^2}{2}+C_2$。將 C_1 與 C_2 合併，令 $C=C_2-C_1$，乃有

$$\frac{y_2}{2}=-\frac{x_2}{2}+C;$$

移 x_2 項於左而另以一常數 k^2 代 $2C$，則上列結果可寫爲

$$y^2+x^2=2C=k^2。$$

若令 k 取種種不同之値，此方程即確定一族半徑不等之同心圓，其圓心

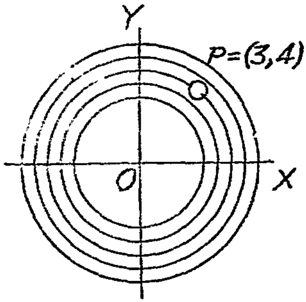


圖 6-2

係在原點(圖 6-2)。設更規定所求之圓須通過 $x=3, y=4$ 之P點,則其半徑將爲 $k=\sqrt{3^2+4^2}=5$。而其方程遂爲

$$x^2+y^2=25。$$

讀者當已注意，在例(1)中，積分常數之影響係使曲線在圖紙上之位置上下移動，而在例(2)中，此影響乃使曲線漲縮。若遇他種問題，積分常數之影響，有時係使曲線之斜度改變或其位置左右移均可！簡言之，積分常數之值對於曲線之位置或上或下，或大或小，或斜或直，實有莫大影響。

6-7. 積分常數之物理的意義 在甚多物理學問題中，吾人所已知者常爲某量變化率所遵循之律例。遇此等問題時，欲得一確定之解答，除已知所遵循之律例外，尚應知在某時刻（尋常多爲開始之時刻）各量之數值關係。否則所得之解答係普通的，而不能確定在某定時之數值關係。茲舉兩例以示之。

例 1. 自由落體加速度可視作恆定不變，其值約爲 $g=980$ 厘米/秒^2。設有人以每秒 100 厘米之速度垂直的向上拋射一球，(a)試求球在任何時刻之高度。(b)問此球所達之最高點爲何？(c)何時球方落至原始高度？

此題之已知律例係加速度爲恆定 $=-g=-980$ 厘米/秒^2，負號表向下。令 y 表球離原點之高度，$v=\dfrac{dy}{dt}$ 表球之速度，t 表時刻，則此

律寫作方程將爲

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=-g \quad 或 \quad dv=-gdt;$$

積分後得
$$v=\frac{dy}{dt}=-gt+C_1,$$

此中之 C_1 爲一積分常數，其值應由在起始時刻，即 $t=0$，球向上拋射之速度定之。今題設原始速度爲 100 厘米/秒，故

$$100=0+C_1;$$

於是合於本題初速之答案爲

$$\frac{dy}{dt}=v=100-980t,$$

或
$$dy=(100-980t)dt。$$

再求積分乃得

$$y=100t-\frac{980}{2}t^2+C_2,$$

此中之 C_2 爲另一積分常數，其值應由在原始時刻球之高度定之。假如此球出發時之高度爲原點，則當 $t=0$ 時，y 亦爲 0，故以之代入卽有

$$0=0-0+C_2$$

或 $C_2=0$。因此，合於本題起始條件之高度 y 爲

$$y=100t-490t^2,$$

是卽球在任何時刻之高度。欲求所能達之最高點，可令 $\frac{dy}{dt}=0$，或 $v=0$ 而解之。換言之，在最高點，球之速度爲 0。如是令

$$v=\frac{dy}{dt}=100-980t=0$$

即得
$$t=\frac{100}{980}=0.102\text{ 秒。}$$

此時 y 之值爲

$$y=100\times0.102-490\times0.102^2=102-51=51\text{ 厘米。}$$

是爲球上升之最高點。當球復落至原點時，$y=0$，故

$$0=100t-490t^2\text{ 即 }t=0\text{ 或 }t=\frac{100}{490}=0.204\text{ 秒。}$$

惟 $t=0$ 時，球始離原點，故 $t=0.204$ 秒係回至原點之時刻。由此觀之，物上升之時間適等於其下落時間。

若就普通解答言之，因 $dv=-g\,dt$ 故 $v=C_1-gt$。C_1 既等於原始時刻之速度，茲代以 v_0 而將 v 寫作

$$\frac{dy}{dt}=v=v_0-gt\quad\text{或}\quad dy=(v_0-gt)\,dt;$$

再求積分即有

$$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2+C_2;$$

C_2 既等於原始時刻之高度，茲代以 y_0，而寫 y 爲

$$y=y_0+v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

y_0 及 v_0 兩積分常數之物理的意義於此即可明瞭矣。本題須積分二次，故有兩個積分常數。若解答之時須積分 n 次，則積分常數將爲 n 個。

例 2. 有一個可以伸縮之橡皮帶，一端與拋物線 $y=3x^2+2$ 相接，其他端與 $y=0$（即 X 軸）相接。假設此帶向右進展，但恆與 X 軸垂直，其掃過之面積之增加率乃等於 $y=3x^2+2$，問當帶自 $x=2$ 行至

$x=4$ 時,其所掃過之面積爲何?

令 u 表面積,則題意謂

$$\frac{du}{dx}=3x^2+2 \quad \text{或} \quad du=(3x^2+2)dx;$$

求積分則有

$$u=3\frac{x^3}{3}+2x+C=x^3+2x+C_{\circ}$$

今帶係自 $x=2$ 之地位起移至 $x=4$ 之處, 故當 $x=2$ 時 (起始時刻), 其所掃過之面積可視爲 0。如是則

$$0=2^3+2\times2+C,$$

或積分常數爲

$$C=-(8+4)=-12;$$

換言之,在任何位置($x>2$),帶所掃過之面積可由

$$u=x^3+2x-12$$

一方程定之。故帶自 $x=2$ 移至 $x=4$ 時,其所掃過之面積爲

$$u=4^3+2\times4-12=64+8-12=60 \text{ 單位。}$$

讀者可注意在起始時刻(即 $x=2$)帶所掃過之面積可不必視爲 0。若令之爲任何常數 k, 則 C 之值將由下列關係定之:

$$k=2^3+2\times2+C=12+C,$$

或
$$C=k-12,$$

而在任何時皮帶所掃過面積之方程遂變爲

$$u=x^3+2x+(k-12)_{\circ}$$

當 $x=4$ 時,所掃過之面積故爲

$$u=4^3+2\times4+k-12=64+8+k-12=60+k;$$

惟 k 表 $x=2$ 時帶所掃過之面積，是以自 $x=2$ 至 $x=4$，帶所掃過之面積爲

$$(60+k)-k=60,$$

與前相同。此實必然，因本題既爲求自 $x=2$ 至 $x=4$ 之面積，顯然與 $x=2$ 以前所掃過之面積 u 無關，是即上述兩算法所示明者也。

第六章習題

試微分下列各積分公式之兩邊以證實之：

1. $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$，若 $n\neq-1$。

2. $\int\frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u}+C$。

3. $\int\frac{du}{u^2\sqrt{u^2+a^2}}=-\frac{\sqrt{u^2+a^2}}{a^2u}+C$。

4. $\int\frac{du}{(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}}+C$。

5. $\int\frac{du}{(u^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{u}{a^2\sqrt{u^2-a^2}}+C$。

6. $\int\frac{du}{(u^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{u}{a^2\sqrt{u^2+a^2}}+C$。

7. $\int\frac{udu}{(a+bu)^3}=\frac{1}{b^2}\left\{-\frac{1}{a+bu}+\frac{a}{2(a+bu)^2}\right\}+C$。

8. $\int u(a^2\pm b^2u^2)^n du=\frac{(a^2\pm b^2u^2)^{n+1}}{\pm2b^2(n+1)}+C$，若 $n\neq-1$。

9. $$\int\frac{u^m du}{(a^2\pm b^2u^2)^p}=\frac{u^{m-1}}{\pm b^2(m-2p+1)(a^2\pm b^2u^2)^{p-1}}$$
$$-\frac{a^2(m-1)}{\pm b^2(m-2p+1)}\int\frac{u^{m-2}du}{(a^2\pm b^2u^2)^p}，若 m-2p+1\neq 0。$$

10. $$\int\frac{du}{u^m(a^2\pm b^2u^2)^p}=-\frac{1}{a^2(m-1)u^{m-1}(a^2\pm b^2u^2)^{p-1}}\mp$$
$$\frac{b^2(m+2p-3)}{a^2(m-1)}\int\frac{du}{u^{m-2}(a^2\pm b^2u^2)^p}，若 m\neq 1。$$

11. $$\int\frac{u^m du}{\sqrt{a+bu}}=\frac{2u^m\sqrt{a+bu}}{b(2m+1)}-\frac{2am}{b(2m+1)}\int\frac{u^{m-1}du}{\sqrt{a+bu}}，若 m\neq -\frac{1}{2}。$$

12. $$\int\frac{\sqrt{a+bu}}{u^m}du=\frac{-(a+bu)^{\frac{3}{2}}}{a(m-1)u^{m-1}}-\frac{b(2m-5)}{2a(m-1)}\int\frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u^{m-1}},$$
$$若 m\neq 1。$$

13. $$\int\frac{du}{u^m(u^2\pm a^2)^{\frac{n}{2}}}=\mp\frac{1}{a^2(m-1)u^{m-1}(u^2\pm a^2)^{\frac{n}{2}+1}}$$
$$\mp\frac{m+n-3}{a^2(m-1)}\int\frac{du}{u^{m-2}(u^2\pm a^2)^{\frac{n}{2}}}，若 m\neq 1。$$

14. $$\int\frac{(u^2\pm a^2)^{\frac{n}{2}}du}{u^m}=\mp\frac{(u^2\pm a^2)^{\frac{n}{2}+1}}{a^2(m-1)u^{m-1}}\mp$$
$$\frac{m-n-3}{a^2(m-1)}\int\frac{(u^2\pm a^2)^{\frac{n}{2}}du}{u^{m-2}}，若 m\neq 1。$$

15. $$\int\frac{du}{u^m(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}}=-\frac{1}{a^2(m-1)u^{m-1}(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}-1}}$$
$$+\frac{m+n-3}{a^2(m-1)}\int\frac{du}{u^{m-2}(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}}，若 m\neq 1。$$

16. $$\int\frac{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}du}{u^m}=-\frac{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}+1}}{a^2(m-1)u^{m-1}}$$

$$+\frac{m-n-3}{a^2(m-1)}\int\frac{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}du}{u^{m-2}}\text{，若 } m\neq 1。$$

17. $$\int u^m\sqrt{2au-u^2}\,du=-\frac{u^{m-1}(2au-u^2)^{\frac{3}{2}}}{m+2}$$

$$+\frac{a(2m+1)}{m+2}\int u^{m-1}\sqrt{2au-u^2}\,du\text{，若 } m\neq -2$$

18. $$\int\frac{\sqrt{2au-u^2}}{u^m}du=-\frac{(2au-u^2)^{\frac{3}{2}}}{a(2m-3)u^m}$$

$$+\frac{m-3}{a(2m-3)}\int\frac{\sqrt{2au+u^2}}{u^{m-1}}du\text{，若 } m\neq\frac{3}{2}$$

19. $$\int\frac{du}{u^m(u+bu^q)^p}=-\frac{1}{a(m-1)u^{m-1}(a+bu^q)^{p-1}}$$

$$-\frac{b(m-q+pq-1)}{a(m-1)}\int\frac{du}{u^{m-q}(a+bu^q)^p}\text{，若 } m\neq 1$$

20. $$\int\frac{(a+bu^q)^p}{u^m}du=\frac{(a+bu^q)^p}{(pq-m+1)u^{m-1}}$$

$$+\frac{apq}{pq-m+1}\int\frac{(a+bu^q)^{p-1}}{u^m}du\text{，若}(pq-m+1)\neq 0.$$

注意：以上(9)-(20)各題乃化簡公式。

21. 有一曲線，其上任意點之斜度等於$-\left(\frac{y+2}{x+1}\right)$，試求此曲線之方程，若已知 $x=1$, $y=1$ 係位在曲線上。〔提示：求積分時應注意 $d(uv)=udv+vdu$ 一關係〕。

22. 設某曲線上任意點之法線與 OX 軸所作之角，其正切係等於 $-\frac{ay+f}{bx+g}$，a,b,f,g 均爲常數，試求此曲線族之方程。又若 $x=0$，$y=0$ 乃曲線上之一點，則曲線方程爲何？

23. 有一靜止物體沿一光滑斜面滑下，斜面與水平面所作之角爲 α，試求物體沿斜面之速度及其所行之路程與時間之關係。（注意物體沿斜面之加速度 $=-g\sin\alpha$，$g=$ 重力加速度）。

24. 沿一直線運動之物體，其速度與時間之關係爲

$$v=3t^2-\sqrt{t}+5,$$

試求其在 $t=1$ 時之加速度及其自 $t=0$ 至 $t=1$ 所行之路程。

25. 某舟之速度爲 $v=375t-5t^3$。(a)若時間係自開始航行時計算，問當 $t=10$ 時，其航程爲何？(b)其最大速度爲何？(c)速度最大時，其航程爲何？

26. 一轉動於固定軸線之物體，其在 t 時刻之角加速度爲

$$\alpha=\frac{4}{(t+1)^3}+12(t+1)^2,\quad t\geqq 0,$$

若當 $t=0$ 時，其角速度爲 0，其轉動之角亦爲 0，求其在任何時刻之角速度 ω 及轉角 θ 與 t 之關係。

27. 設直線運動之物體，其加速度爲

$$a=3t,$$

當 $t=1$ 時，其所行之路程爲 10，當 $t=10$ 時，其所行之路程則爲 100，試求其路程與時間之關係。

28. 設已知自斜面上滑下之物體於 $t=t_1$ 及 $t=t_2$ 時距斜面頂之鉛直

高度爲 h_1 及 h_2，試求其在同時刻之速度。

29．有氣球以每秒 6 公尺之速度上升，今有物自球內落下，6 秒鐘後到達地面。(a)問物離氣球時，其高度若干？(b)物到地時，其速度爲何？

30．設沿直線運動之物體，本在原點，其起始速度爲 v_0，其加速度與速度之立方成正比，其方向則與之相反，試求速度 v 及距離 x 與時間 t 之關係。$\left(\text{注意：加速度 } a=\dfrac{dv}{dt}!\right)$

31．設有面積其增率爲（$\sqrt{x}+2$），問自 $x=1$ 至 $x=3$，此面積之值若何？

32．球面帶之體積可自下列積分求之

$$V=\pi\int(a^2-x^2)\,dx,$$

當 $x=0$ 時，此帶之體積爲 0，當 $x=a$ 時，此積分卽表半球之體積。試示半球之體積爲 $\frac{2}{3}\pi a^3$（a 表球之半徑）。

33．有通過原點之曲線族，其各處之 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 均爲 0，試示其傾斜係由積分常數之一決定之。

34．有曲線族，其各點之斜度爲

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y},$$

試示此族係由半徑爲 a 之圓組成，各圓中心之位置，或左或右，則由積分常數定之。

第七章　定積分

7-1. 曲線下之面積　前章末例所述求面積一問題乃積分法最重要應用之一。該題曾假設皮帶所掃過之面積之變化率與其長（卽縱坐標）相等。其實，此事並非假設，乃一普遍原理，茲詳論之。

設有一曲線 $y=f(x)$。今欲求在此曲線下，X 軸上及兩縱線 $x=a$ 及 $x=b$ 間所包圍之面積。爲簡便起見，暫假定在 $x=a$ 及 $x=b$ 間隔內曲線 $y=f(x)$ 全在 X 軸之上，或 $y=f(x)$ 之值爲正，且當 x 增加時，y 恆增，如圖(7-1)；至於 a 與 b 兩值爲負或爲正雖無限制，但 b 應暫認爲較大於 a，卽 $x=b$ 縱線係在 $x=a$ 縱線之右。

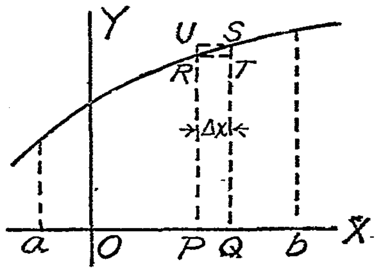


圖 7-1

過任意 P 點 (x,o)，作縱線 PR，則在 $y=f(x)$ 曲線下，X 軸上，$x=a$ 右及 $x=x$ 左之面積 A 顯爲 x 之函數，因在 a 與 b 間隔內與 x 以一確定之值後，此面積卽得以確定。是以若能求得一公式以表 A 與 x 之關係，則在此公式中令 $x=b$，其結果卽爲所欲求之答案。求 A 與 x 之關係時，先與 x 以一增量 Δx，而令其相對應之面積增量爲 ΔA。此面積增量之值，係等於 $PQSR$，其值在 $PQTR$ 與 $PQSU$ 兩長方形之間。此兩長方形之寬爲 Δx，其

高各爲 $PR=y$ 及 $QS=y+\Delta y$。故就圖(7-1)言之，乃有下列之不等式

$$y\Delta x<\Delta A<(y+\Delta y)\Delta x$$

或

$$y<\frac{\Delta A}{\Delta x}<(y+\Delta y)。$$

若令增量 $\Delta x\to 0$，則 $\Delta y\to 0$，而 $\frac{\Delta A}{\Delta x}$ 之值將恆在 y 與以 y 爲極限之 $(y+\Delta y)$ 一變數兩者之間。因此，$\frac{\Delta A}{\Delta x}$ 之極限必等於 y，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta x}=y \tag{1}$$

但此方程左邊，按紀數定義，係等於面積 A 對 x 之變化率 $\frac{dA}{dx}$，故

$$\frac{dA}{dx}=y=f(x) \tag{2}$$

是即(6-7)節例(2)所用之假設。若當 x 增加時，y 恆減，則方程(1)中之 $QS=y+\Delta y$ 實較 $PR=y$ 爲小。如是只須將不等式改爲

$$y\Delta x>\Delta A>(y+\Delta y)\Delta x,$$

而方程(2)仍可成立。總之，不論當 x 增加時，$y=f(x)$ 增或減，方程(2)均屬眞實。

由本節及前章末節所述，即知欲求 $y=f(x)$ 下，X 軸上，及兩縱線間之面積 A 爲何，其問題亦等於問 $f(x)$ 之積分爲何。按前此所述，此積分將爲

$$A=\int f(x)\,dx=F(x)+C \tag{3}$$

此中之 $F(x)$ 表 $f(x)$ 對 x 之一特別積分，其值一經決定之後即應維持不變。至於所欲求之 A 果爲何值，須由已與之條件算出積分常數 C 後

方知之。定 C 之條件爲：當 $x=a$ 時，A 爲 0，故

$$0=\left(\int f(x)\,dx\right)_{x=a}=F(a)+C$$

或

$$C=-F(a) \tag{4}$$

方程(4)之意卽謂在特別積分 $F(x)$ 中將 x 代以 a 後，再將所得之結果之符號改變，其值卽等於積分常數 C。例如前節末例：

$$\int f(x)\,dx=x^3+2x+C=F(x)+C,$$

卽

$$F(x)=x^3+2x,\ \text{且}\ a=2,$$

故

$$C=-(x^3+2x)_{x=2}=-(2^3+2\times 2)=-12,$$

結果同前。今如將方程(4)之 C 代入方程(3)中乃有

$$A=F(x)-F(a) \tag{5}$$

方程(5)所表者旣係自 $x=a$ 始至 $x=x$ 止之面積，故若欲求自 $x=a$ 至 $x=b$ 之面積只須將此中之 x 代以 b 卽可。惟方程(5)右邊第二項係將特別積分 $F(x)$ 中之 x 代以 a，故已爲一常數，是以現只須將其第一項中之 x 代以 b，卽得：

$$(\text{自 } x=a \text{ 至 } x=b \text{ 之面積})=F(b)-F(a) \tag{6}$$

若仍以前章末題爲例，則因　$F(x)=x^3+2x$，

故

$$\begin{aligned}\text{面積}&=(x^3+2x)_{x=4}-(x^3+2x)_{x=2}\\&=(4^3+2\times 4)-(2^3+2\times 2)=(64+8)-(8+4)\\&=72-12=60,\end{aligned}$$

結果亦同前。

7-2. 定積分與無限和之極限　求曲線下面積之另一方法係將此面積先分爲甚多細條，再求各細條面積之近似值，最後方求此等近似值

之總和。若細條分割夠細，則所得之總和必與所求之面積相近似。若以微積分術語述之，此卽謂當各條之寬度趨於 0，其數目無限增多時，所得總和之極限卽等於所欲求之面積。此爲排列方程以解積分各問題時所均可模仿之步驟，且爲最基本手續之一，玆特逐步說明之。

在 $x=a$ 及 $x=b$ 間隔內，令 $y=f(x)$ 表一連續正函數。玆以縱線 $(n+1)$ 個通過 $x_0=a, x_1, x_2, \cdots\cdots, x_k, \cdots\cdots x_{n-1}, x_n=b$ 各橫坐標而將 (a 至 b) 間隔內曲線下之面積劃分爲 n 個細條（各條之寬度不必相等），如圖 (7-2)。令 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ 表第 k 條（卽 $PQRT$）之寬度。又令此條

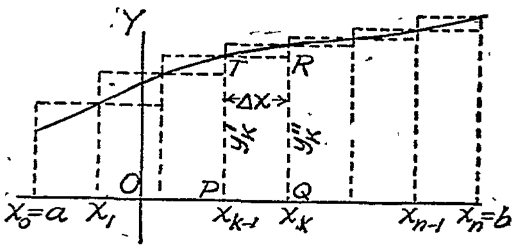


圖 7-2

最長之部分爲 y_k'' 其最短之部分爲 y_k'。如是，則條之面積 $(\Delta A)_k$ 必在 $y_k'(\Delta x)_k$ 及 $y_k''(\Delta x)_k$ 之間，卽

$$y_k'(\Delta x)_k < (\Delta A)_k < y_k''(\Delta x)_k \tag{7}$$

再令 k 次第等於 $1, 2, \cdots\cdots$ 以至於 n，則有下列各不等式：

$$y_1'(\Delta x)_1 < (\Delta A)_1 < y_1''(\Delta x)_1$$

$$y_2'(\Delta x)_2 < (\Delta A)_2 < y_2''(\Delta x)_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_k'(\Delta x)_k < (\Delta A)_k < y_k''(\Delta x)_k \tag{8}$$

……………………………

$$y_n'(\Delta x)_n<(\Delta A)_n<y_n''(\Delta x)_n$$

今各細條面積之總和等於所欲求之面積 A，故 A 之值係在

$$y_1'(\Delta x)_1+y_2'(\Delta x)_2\cdots\cdots+y_k'(\Delta x)_k+\cdots\cdots y_n'(\Delta x)_n$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{k=n}y_k'(\Delta x)_k\right)_a^b \tag{9}$$

與 $y_1''(\Delta x_1)+y_2''(\Delta x)_2+\cdots\cdots+y_k''(\Delta x)_k+\cdots\cdots+y_n''(\Delta x)_n$

$$=\left(\sum_{k=1}^{k=n}y_k''(\Delta x)_k\right)_a^b \tag{10}$$

之間；此中右邊之 $\sum\limits_{k=1}^{k=n}$ 記號，係指將 $y_k'(\Delta x)_k$ 或 $y_k''(\Delta x)_k$ 中之 k 次第等於 1,2,……以至於 n，然後再將各項相加，至於括弧後上下之 b 及 a 乃以示所求之面積左右縱線之位置。準此以言，則

$$\left(\sum_{k=1}^{k=n}y_k'(\Delta x)_k\right)_a^b<A<\left(\sum_{k=1}^{k=n}y_k''(\Delta x)_k\right)_a^b \tag{11}$$

今若任各條之寬度趨於 0，其數目無限增大，自圖觀之，方程(11)左項之最小 y_k' 各值必分別趨與其右項之最大 y_k'' 各值相等，故左右兩項之極限係互等，而面積 A 遂可視爲等於二者之一。y_k' 與 y_k'' 原係分表細條最短及最長部分，今因細條之寬度趨於 0，二者乃合爲一，故可改用無撇之 y_k（即細條中之任一長度）而寫 A 爲

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{k=n}y_k(\Delta x)_k\right)_a^b \tag{12}$$

此方程右邊之無限和，雖係指面積 A，但吾人此後亦常遇所求之量並非面積，而其値亦爲一無限和如方程(12)右邊之形式者。茲名此種無限和爲 $x=a$ 與 $x=b$ 間隔內函數 $y=f(x)$ 對於其變數 x 之定積分 (definite integral) 而簡用下列記號表此意義：

$$\int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{k=n} y_k(\Delta x)_k\right)_a^b \tag{13}$$

若以語文表之，定積分觀念之由來及定義則如下：

設有 $y=f(x)$ 函數連續於 $x=a$ 至 $x=b$ 間隔內。今將 a 至 b 間隔以 $x_0=a, x_1, \cdots\cdots, x_n=b$ 分之爲 n 個較小間隔，而於每小間隔 $(\Delta x)_k = x_k - x_{k-1}$ 內任取一點 x_k' 而計下列之和：

$$f(x_1')(\Delta x)_1 + f(x_2')(\Delta x)_2 + \cdots\cdots + f(x_k')(\Delta x)_k + \cdots\cdots + f(x_n')(\Delta x)_n$$

或 $$y_1(\Delta x)_1 + y_2(\Delta x)_2 + \cdots\cdots + y_k(\Delta x)_k + \cdots\cdots + y_n(\Delta x)_n \tag{14}$$

當 n 之數目無限增大而各小間隔均趨於 0，所計得之和名爲函數 $y=f(x)$ 在 a 至 b 間隔內對其自變數之定積分：是卽定義方程(13)之意。

7-3. 定積分與不定積分之關係 方程(12)雖爲吾人所求之面積，但若依照其所表之步驟逐步演算，旣嫌繁長，復不免失去積分方法之本意。今若欲將此與積分方法相溝通，可回至(7-1)節之方程(6)。因所欲求之面積亦等於

$$A = \left(\int f(x)\,dx\right)_{x=b} - \left(\int f(x)\,dx\right)_{x=a} = F(b) - F(a)^{*} \tag{6}$$

* $F(b)-F(a)$ 常寫爲 $F(x)\Big|_a^b$

此中 $F(x)$ 係 $y=f(x)$ 對 x 不定積分之一特別解答，即 $F(x)=\int f(x)dx$。方程(6)與方程(12)左邊既表同一之面積，故演算(12)之右邊時可逕由(6)所示之積分計之。此理常視爲積分學之基本定理，即

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{k=n} y_k(\Delta x)_k\right]_a^b=\left(\int y dx\right)_b-\left(\int y dx\right)_a$$

$$=F(b)-F(a) \tag{15}$$

方程(13)爲定義，方程(15)爲定理，將二者合併乃得下列關係：

$$\int_a^b y dx=\left(\int y dx\right)_b-\left(\int y dx\right)_a=F(b)-F(a) \tag{16}$$

此中之積分函數係 $F(x)=\int y dx=\int f(x)dx$ 不定積分之一特別解答。當採用方程(13)左邊之記號以作定積分之定義時，讀者或曾自問何故用此特式。自方程(16)觀之，此特別形式之用意實卽以謀其與不定積分相溝通而已。

7-4 陳述定積分觀念方法之評論 (7-2)節所述各步驟，在實用數學家目中，恐已嫌其冗長，然站在純粹數學分析觀點，則對所用方法仍難免未盡嚴格之評。純粹數學家所認爲不滿者乃前兩節方法大部係藉幾何的直覺而來，並非數學的分析，故彼等對於下列四事常認爲證述未盡嚴格：

(A)各小間隔內之函數是否必有一最短部分 y_k' 與一最長部分 y_k'' 而當小間隔趨於0時，此兩值是否相等；

(B)方程(11)左項與右項果否趨於確定之極限而不受 a 至 b 間隔分割法之影響；

(C)此兩極限是否相等；以及

(D)若所求之定積分本質上非面積，則基本定理(15)應如何推證。雖然如是，若所用函數係連續於 a 至 b 間隔內，如本節所假定者，則此等問題均可用高等分析方法嚴格的證實之。惟此等方法屬於本書範圍外之理論，茲故不述。

因實用數學家嫌前節所述之步驟太冗長，故如遇問題之可藉物理的或幾何的直覺以推演之者，較簡之說明，足以代替(7-2)節者係如下：

將欲求之面積分為若干細條如圖(7-1)或(7-2)，令一普通細條之寬為 dx 其面積為 dA。若 $y=f(x)$ 表此細條內之一長度，則當 dx 與 dA 同為無窮小時，

$$dA=y\,dx=f(x)dx \tag{17}$$

若欲求自 $x=a$ 至 $x=b$ 間隔內之面積，則求方程(17)自 a 至 b 之定積分卽得

$$A=\int_a^b y dx=\int_a^b f(x)dx \tag{18}$$

至於方程(18)之計算法仍須藉方程(16)之定理。方程(17)與(18)在已明瞭(7-2)節之敍述以後，固可用之以代替該節中之(7)至(13)各方程，但讀者須時時連想及(7-2)節之各步驟以及本節所列可以批評諸點。

(7-5)面積之符號　在前數節中，為易於了解起見，吾人曾認 $y=f(x)$ 於 $x=a$，$x=b$ 間隔內全為正值，若其值全為負，卽曲線全在 X 軸之下時，在無限和

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k=n} y_k(\Delta x)_k \tag{19}$$

中，$(\Delta x)_L$ 各值永各爲正，y_L 則均爲負，故所得之數值亦將爲負。此實當然，因吾人所標舉之面積係在曲線下，X 軸上，兩縱坐標之間，今曲線在 X 軸之下，故所得面積之符號必爲負。至若在 $x=a$ 至 $x=b$ 間隔內，$y=f(x)$ 函數一部份爲正值，一部份爲負值，即曲線一部在 X 軸之上，一部在其下，則用定積分所計得者將爲在 X 軸上，曲線下各面積之和減去在 X 軸下曲線上各面積之和。例如圖(7-3) 之曲線 $y=f(x)$，其自 a 至 b 之定積分所示之面積爲：

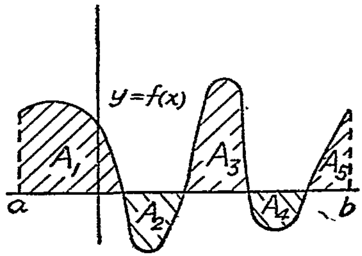


圖 7-3

$$\int_a^b f(x)\,dx = |A_1| - |A_2| + |A_3| - |A_4| + |A_5| \qquad (20)$$

此中之 $|A_1|$，$|A_2|$，……，$|A_5|$ 分表在曲線與 X 軸間之面積之絕對值。簡言之，面積一槪念，普通固只有數值，而無正負之分，然以積分法計算面積時，有應視爲正，亦有應視爲負者。

7-6. 定積分之特性　在定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 中，a 之名爲其下限 (lower limit)，b 之名爲上限 (upper limit)。按計算定積分之方程(17)，下列四特性殊堪注意：

(A) 因 $$\int_a^b f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)_{x=b} - \left(\int f(x)dx\right)_{x=a} = F(b) - F(a) \qquad (21)$$

今將上下兩限 a 與 b 對換，則按同理

$$\int_b^a f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)_{x=a} - \left(\int f(x)dx\right)_{x=b} = F(a) - F(b) \qquad (22)$$

比較(21)與(22)卽知

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)dx \tag{23}$$

此為定積分重要特性之一。換言之，自 $x=a$ 至 $x=b$ 曲線下，X 軸上之面積，其符號係與自 $x=b$ 至 $x=a$ 同曲線下，X 軸上之面積相反。前(7−1)節所以規定 $x=b$ 縱線係位在 $x=a$ 之右之理由，實欲所求得之面積為正值而已。玆則可將此限制取消而不礙及前此一切之論述。

(B)若將 $x=a$ 與 $x=b$ 間隔分為兩部分 a 至 c 及 c 至 b，則因

$$\int_a^c f(x)\,dx=\left(\int f(x)dx\right)_{x=c}-\left(\int f(x)dx\right)_{x=a},$$

及

$$\int_c^b f(x)\,dx=\left(\int f(x)dx\right)_{x=b}-\left(\int f(x)dx\right)_{x=c},$$

故有

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)dx &=\left(\int f(x)dx\right)_{x=b}-\left(\int f(x)dx\right)_{x=a}\\ &=\int_a^b f(x)dx \end{aligned}\tag{24}$$

換言之，在 $x=a$ 至 $x=b$ 間隔內 $f(x)$ 對 x 之定積分之值等於其在 $x=a$ 至 $x=c$ 間隔內之值與其在 $x=c$ 至 $x=b$ 間隔內之值相加。若 c 在 a 至 b 間隔之外，而 $f(x)$ 在 $x=a$ 至 $x=c$ 及 $x=c$ 至 $x=b$ 各間隔內仍均為連續，則因方程(23)眞實之故，方程(24)亦屬眞實。

(C)兩函數在同一間隔內之和之定積分等於其定積分之和，卽：

$$\int_a^b\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx \tag{25}$$

(D)常數因子可以任意移動於定積分記號之內外，例如 k 為常數，

則

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx \tag{26}$$

(C)與(D)之來源係根據不定積分之兩定理(6-5 節)。此外讀者須注意在定積分中最重要之量有三：一爲其上限 b，一爲其下限 a，其他則爲被積函數之樣式 f。至於其中 x 一變數實可代以任何記號，例如將 x 改爲 y 或 t 或(*)，下列各定積分仍有同一之值。

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(y)\,dy=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(*)\,d* \tag{27}$$

此與不定積分 $\int f(x)\,dx$, $\int f(y)\,dy$, $\int f(t)\,dt\cdots\cdots$ 不表同一之值一理完全不同！

例 1.　求 $\int_2^5 (2x+5)\,dx$。

因　$\int(2x+5)\,dx=x^2+5x+C$，或 x 之一特別積分爲 x^2+5x；

故　$$\int_2^5 (2x+5)\,dx=\Big(x^2+5x\Big)_2^5=(5^2+5\times5)-(2^2+5\times2)$$
$$=50-14=36。$$

例 2.　$$\int_{a-b}^{a+b}\frac{2y^2-5(a+b)y}{5\sqrt{y}}\,dy=\left\{\frac{4}{25}y^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(a+b)y^{\frac{3}{2}}\right\}_{a-b}^{a+b}$$

$$=\frac{4}{25}(a+b)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(a+b)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{25}(a-b)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(a+b)(a-b)^{\frac{3}{2}}$$

$$=-\frac{38}{75}(a+b)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{25}(a-b)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(a+b)(a-b)^{\frac{3}{2}}。$$

例 3.　求 $y=x^2$ 曲線與 $y+x=6$ 直線及 X 軸所包圍之面積。

解此題時須先知 $y=x^2$, $y+x=6$ 及 X 軸各線之交點。$y=x^2$ 與 X 軸相交於(0,0)，$y+x=6$ 與 X 軸相交於 (6,0)，而 $y=x^2$ 與 $y+x=6$ 之交點則可由 $(x-6)+x^2=0$ 方程求得之，即

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm5}{5}=-3 \text{ 或 } 2。$$

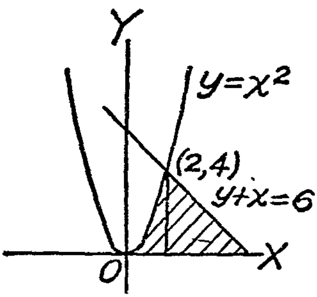


圖 7-4

自圖線之情形，圖 (7-4)，知 $x=2, y=4$ 乃所求面積之頂點，至於其他一交點則在此之外，應棄去不用。所求之面積 A 遂有兩部分：其一在 $y=x^2$ 下，X 軸上，與 $x=2$ 縱線之左；其二則在 $y=6-x$ 下，X 軸上，與 $x=2$ 縱線之右，是以

$$A=\int_0^2 x^2dx+\int_2^6 (6-x)dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^2+\left(6x-\frac{x^2}{2}\right)_2^6=\left(\frac{8}{3}-0\right)+(18-10)=10\frac{2}{3}\text{單位}$$

例 4. 求 X 軸與曲線 $y=x^3+x^2-2x$ 間所包圍之面積。

因 $y=x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$ 與 X 軸相交於 $x=-2$, $x=0$, $x=1$ 三點，且曲線之形狀如圖 (7-5)，故在 $x=-2$ 至 $x=0$ 間隔內，所求之面積係在 X 軸上，而在 $x=0$ 至 $x=1$ 間隔內，面積則在 X 軸之下。故若求 $x=-2$ 至 $x=1$ 之定積分，所得結果將爲第一面積減去第二面積。今所欲得者爲此兩面積之總值，故應分別求其絕對值而將之相加。第一面積爲

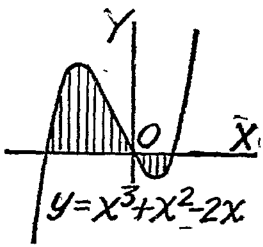


圖 7-5

$$A_1=\int_{-2}^0 y dx=\int_{-2}^0 (x^3+x^2-2x)dx$$

$$=\left\{\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right\}_{-2}^0=0-\left\{\frac{16}{4}-\frac{8}{3}-4\right\}=\frac{8}{3};$$

第二面積爲

$$A_2=\int_0^1 (x^3+x^2-2x)\,dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)_0^1$$

$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)-0=-\frac{5}{12},$$

此中負號卽表示面積在 X 軸之下之意。實得面積遂爲

$$A=A_1-A_2=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}\text{ 單位。}$$

7-7. 他種位置之面積　設有曲線可表爲 $x=g(y)$，則在曲線左，Y 軸右及 $y=a$ 上與 $y=b$ 下之面積可仿前法求之。令圖(7-6)中之細條面積爲 dA。若 dy 爲無窮小，則

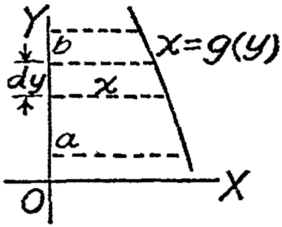


圖 7-6

$$dA=x\,dy=g(y)\,dy。$$

將類此各條之面積相加卽得

$$A=\int_a^b x\,dy=\int_a^b g(y)\,dy \tag{27}$$

讀者應作圖以示何種位置之面積須視爲負！

例 1.　求曲線 $x=4y-y^2$ 與 Y 軸所包圍之面積。此曲線與 Y 軸相交之點爲 $y=0$ 及 $y=4$，故所求之面積爲，圖(7-7)，

$$A=\int_0^4 x\,dy=\int_0^4 (4y-y^2)dy=\left(2y^2-\frac{y^3}{3}\right)_0^4$$

$$=32-\frac{64}{3}=\frac{32}{3}\text{ 單位。}$$

設有曲線 $y_1=f(x)$，在 $x=a$ 與 $x=b$ 之間恆位於 $y_2=g(x)$ 之上，

卽二者不相交，但兩線均可越過 X 軸如圖(7-8)。今欲求在 $x=a$ 右，

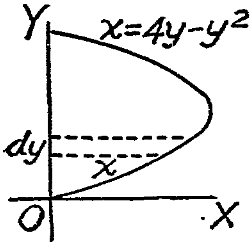


圖 7-7

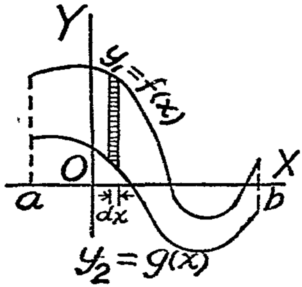


圖 7-8

$x=b$左，$y_1=f(x)$ 下及 $y_2=g(x)$ 上之面積，可在任意 x 值之處割出一細條。令其寬度爲 dx，則其長約爲 y_1-y_2。如 dA 表此細條之面積，當 dx 爲無窮小時，$dA=(y_1-y_2)dx$，故將類此各細條面積相加卽得

$$A=\int_a^b (y_1-y_2)dx=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx \tag{28}$$

若 y_1 與 y_2 在 $x=a$ 與 $x=b$ 間隔內曾經相交，則此面積之解释應仿照圖(7.3)爲之。

例 2. 求 $y=x^2$ 曲線與 $y=6-x$ 直線間所包圍之面積。自(7-6)節例(3)之計算，知此兩線之交點爲(2,4)及(−3,9)，圖(7-9)，故 $a=-3$，$b=2$，且 $y_1=6-x$，$y_2=x^2$，而

$$A=\int_{-3}^{2}\left((6-x)-x^2\right)dx=\left(6x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)_{-3}^{2}$$

$$=\left(12-2-\frac{8}{3}\right)-\left(-18-\frac{9}{2}+9\right)=20\frac{5}{6}\text{ 單位。}$$

例 3. 求拋物線 $(y-x)^2=9x$ 及直線 $x=5$ 所包圍之面積。

此題拋物線方程雖只有一個，然應視有兩支。此兩支之方程可將原方程解答而得之，圖(7-10)，卽

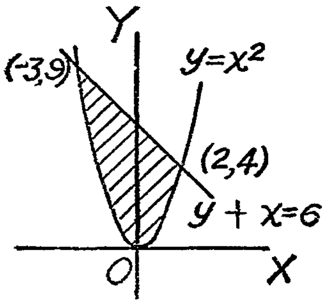


圖 7-9

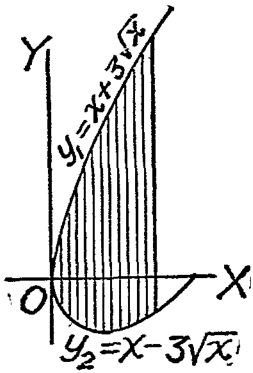


圖 7-10

$$y_1=x+3\sqrt{x} \quad 及 \quad y_2=x-3\sqrt{x}。$$

又拋物線最左之點爲 $x=0$，故所求面積爲

$$A=\int_0^5 (y_1-y_2)dx=\int_0^5 \left\{ (x+3\sqrt{x})-(x-3\sqrt{x}) \right\}dx$$

$$=\int_0^5 6\sqrt{x}\,dx=6\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)_0^5=\frac{12}{3}5^{\frac{3}{2}}=20\sqrt{5}。$$

第七章習題

1．試將 $y=\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^3)}}$ 下，$x=1$ 右，$x=4$ 左及 $y=0$ 上之面積分爲六個同寬之縱條而計此面積之最大與最小範圍。

2．取 $\Delta x=\dfrac{1}{2}$ 而自 $x=1$ 起計算在 $y=\dfrac{1}{x}$ 下，X 軸上之面積 $F(x)$ 之最大及最小範圍，並作兩圖線於同一方格紙上以示 $y=F(x)=$

$\int_1^x \frac{dx}{x}$ 之範圍。

3. 將 $x=0$ 至 $x=1$ 間隔分爲十個等寬部分以示$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$約爲$\frac{\pi}{4}$。

4. 求下列各曲線與 OX 軸間之面積:

(a) $y=9-x^2$;　　(b) $y=x^2-3x-4$;

(c) $y=3x^2-x^3$;　　(d) $y=x(2x-5)^2$;

(e) $y=x^3+2x^2-3x$:　　(f) $y=(x^2-1)^2$;

(g) $(y-2x)^2=4x$;　　(h) $(y-x)^2=x+2$。

5. 求下列各曲線與 OY 軸間之面積:

(a) $x=4y-y^2$;　　(b) $y^2-4x-4=0$;

(c) $y^3-4x-4y^2=0$;　　(d) $x=y^2-4y$。

6. 求下列各曲線所包圍之面積:

(a) $x-2y+4=0$, $x=0$, $y=3$, $y=5$;

(b) $y^2=4ax$, $y=2x$;　　(c) $y^2=4ax$, $x^2=4ay$;

(d) $y=x^2$, $x+2=y$;　　(e) $y=x^3-x$, $y=3x-x^3$;

(f) $y=x^2$, $y=x$, $y=2x$。

7. 求曲線 $y=x^3$, OY 軸與 $y=8$ 橫線三者所包圍之面積。試用兩種算法計之。

8. 有 A,B,C,D,E 五點,坐標分別爲$(-1,0)$,$(-1,3)$,$(1,4)$,$(1,6)$及$(3,0)$。今以直線依序連各點,試求此五直線內之面積,並用平面幾何方法核之。

9. 若欲以一縱線分題(7)之面積爲相等之兩部分,問縱線之位置何

在？

10. 求 $y^2=4ax$ 及 $x^2=4by$ 兩拋物線所包圍之面積。

11. 一梯形之邊爲 $y=bx+c$, $x=x_1$, $x=x_2$ 及 OX 軸。試證其面積等於$\frac{1}{2}$×高×(長底＋短底)。

12. 設有 (x_1,y_1), (x_m,y_m), (x_2,y_2) 三點，$x_m=\frac{x_1+x_2}{2}$。今作一拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 通過此三點，試證在拋物線下，$x=x_1$ 右，$x=x_2$ 左，OX 軸上之面積爲

$$A=\frac{x_2-x_1}{6}(y_1+4y_m+y_2)。$$

13. 設 n 爲正整數而 $f(x)=f(a+x)$，證

$$\int_0^{na} f(x)dx=n\int_0^a f(x)dx$$

14. 設在 $x=-a$ 至 $x=a$ 間隔內，$f(x)=-f(-x)$，證

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)\,dx$$

15. 設在 $x=-a$ 至 $x=a$ 間隔內，$f(x)=-f(-x)$，證

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0 \text{ 且 } \int_0^{-a} f(x)dx=\int_0^a f(x)dx$$

第八章　三角函數

8-1. 越函數　微積分之基本概念及算法已盡於前數章。前此所討論之函數,祇限於代數的,原爲集中讀者注意力於基本概念及算法起見。若欲擴展微積分之應用範圍，則不但應涉及且有時必須用及較常見之越函數如三角函數及指數與對數函數等。因有若干甚簡之代數函數，例如 $\frac{1}{x}$，$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 等,其對 x 之積分非用越函數不足以表顯完善也。

玆在本章述三角函數與反三角函數之微積分基本算法及其應用,在第九章討論指數函數與對數函數各問題。

8-2. 三角函數之定義　令 OAB 表一直角三角形(圖 8-1)，x 表 BOA 角。x 角之三角函數有六，可用三角形兩邊長之比爲其定義如下:

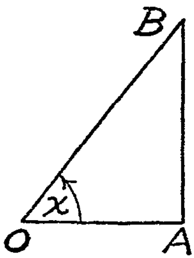


圖 8-1

$$\sin x(\text{正弦})=\frac{AB}{OB};\ \cos x(\text{餘弦})=\frac{OA}{OB},$$

$$\tan x(\text{正切})=\frac{AB}{OA};\ \cot x(\text{餘切})=\frac{OA}{AB};\quad(1)$$

$$\sec x(\text{正割})=\frac{OB}{OA};\ \csc x(\text{餘割})=\frac{OB}{AB};$$

此諸關係因均爲兩線比值，顯然爲角 x 之函數，而與三角形之大小無關。自各方程又知各三角函數有以下關係:

$$\sin x=\frac{1}{\csc x};\cos x=\frac{1}{\sec x};\tan x=\frac{1}{\cot x}=\frac{\sin x}{\cos x}\qquad(2)$$

又因在直角三角形中，$\overline{OA}^2+\overline{AB}^2=\overline{OB}^2$，故復有

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1 \tag{3}$$

由方程(2)與(3)，卽知此六個三角函數實非互相獨立的，例如已知 $\sin x$，則 $\cos x$ 可藉方程(3)計得之，其餘各函數均可藉方程(2)計之。自所示之三角形亦可得以下關係：

$$\begin{aligned}\sin x&=\cos(90^\circ-x), & \cos x&=\sin(90^\circ-x),\\ \tan x&=\cot(90^\circ-x), & \cot x&=\tan(90^\circ-x),\\ \sec x&=\csc(90^\circ-x), & \csc x&=\sec(90^\circ-x)\end{aligned} \tag{4}$$

換言之，一角之正弦與其餘角之餘弦，其正切與其餘角之餘切，其正割與其餘角之餘割係各相等。〔某銳角之餘角 (complementary angle) 係等於 90° 減該角〕。

又自定義方程(1)，$\sin 0^\circ=0$，$\cos 0^\circ=1$；而自方程(4)則得

$$\sin 90^\circ=\cos 0^\circ=1, \quad 及 \quad \cos 90^\circ=\sin 0^\circ=0。$$

至於 90° 角之其他函數可由方程(2)計之。

8-3. 兩角之差或和之正弦或餘弦

圖 (8-1) 所示之角 x 爲銳角，然三角學所討論者不限於銳角。欲擴充三角函數之定義使其可適用於任何角，可先求兩銳角之差之正弦及餘弦與各角之正餘弦之關係。令 α 及 β 爲兩銳角 (圖 8-2)，且 $\alpha>\beta$。如是按定義

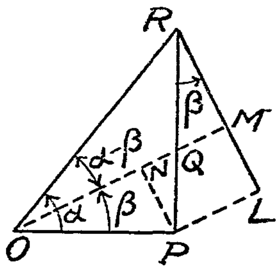


圖 8-2

$$\sin\alpha=\frac{PR}{OR}, \qquad \sin\beta=\frac{PQ}{OQ}=\frac{PL}{PR},$$

$$\cos\alpha=\frac{OP}{OR},\qquad \cos\beta=\frac{OP}{OQ}=\frac{ON}{OP},$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{MR}{OR},\qquad \cos(\alpha-\beta)=\frac{OM}{OR}。$$

求正弦公式時，利用 OQR 三角形面積係等於 OPR 三角形面積減去 OPQ 三角形面積一事，卽

$$\frac{1}{2}MR\times OQ=\frac{1}{2}PR\times OP-\frac{1}{2}OP\times PQ,$$

或

$$MR=PR\times\frac{OP}{OQ}-OP\times\frac{PQ}{OQ},$$

亦卽

$$\frac{MR}{OR}=\frac{PR}{OR}\times\frac{OP}{OQ}-\frac{OP}{OR}\times\frac{PQ}{OQ},$$

是以

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \tag{5a}$$

求餘弦公式時利用射影原理，卽 OM 等於 OP 與 PR 在 OM 方向之射影，或

$$OM=ON+NM=ON+PL=OP\times\frac{ON}{OP}+PR\times\frac{PL}{PR},$$

亦卽

$$\frac{OM}{OR}=\frac{OP}{OR}\times\frac{ON}{OP}+\frac{PR}{OR}\times\frac{PL}{PR},$$

是以

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \tag{5b}$$

至於兩角之和之公式，亦可直接自定義方程及類似圖(8-2)之各線推求之。但若聯解(5a)與(5b)，而令 $(\alpha-\beta)=\alpha'$ 或 $\alpha=\alpha'+\beta$，則可得

$$\sin\alpha=\sin(\alpha'+\beta)=\sin\alpha'\cos\beta+\cos\alpha'\sin\beta,$$

及

$$\cos\alpha=\cos(\alpha'+\beta)=\cos\alpha'\cos\beta-\sin\alpha'\sin\beta,$$

以表示若 α,β 及 $(\alpha+\beta)$ 三者均爲銳角，則

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \tag{6a}$$

及 $$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \tag{6b}$$

8-4. 任何角之三角函數 應用三角學原理時最常用者卽爲方程(5)與(6)。茲認無論 α 或 β 爲何值，此四關係均應成立。此與下一章承認指數定律以擴充指數之意義使包括一切之數之理由相同。如是擴充，卽可將非銳角之正餘弦表爲適當銳角之函數。至於其他各函數則可擴充方程(2)以計得之。例如令方程(5)中之 α 等於零，$\beta=x$，則得負角之正餘弦如下：

$$\sin(0°-x)=\sin 0°\cos x-\sin x\cos 0°,$$

或 $$\sin(-x)=-\sin x \tag{7a}$$

及 $$\cos(0°-x)=\cos 0°\cos x+\sin 0°\sin x,$$

或 $$\cos(-x)=\cos x \tag{7b}$$

將方程(2)及(7)合併乃得負角之其他三角函數如下：

$$\tan(-x)=-\tan x,\qquad \cot(-x)=-\cot x \tag{8a}$$

$$\sec(-x)=\sec x,\qquad \csc(-x)=-\csc x \tag{8b}$$

又如在方程(6)中，令 $\alpha=90°$，$\beta=90°$，$180°$ 或 $270°$，卽得

$$\sin 180°=0,\qquad \cos 180°=-1;$$

$$\sin 270°=-1,\qquad \cos 270°=0;$$

及 $$\sin 360°=0,\qquad \cos 360°=1。$$

同樣，在方程(6)中，令 $(\alpha+\beta)=x$ 爲任意角，$\beta=90°$，$180°$，$270°$ 或 $360°$，則可得

$$\sin x=\cos(x-90^\circ), \qquad \cos x=-\sin(x-90^\circ) \tag{9}$$

$$\sin x=-\sin(x-180^\circ), \quad \cos x=-\cos(x-180^\circ) \tag{10}$$

$$\sin x=-\cos(x-270^\circ), \quad \cos x=\sin(x-270^\circ) \tag{11}$$

$$\sin x=\sin(x-360^\circ), \qquad \cos x=\cos(x-360^\circ) \tag{12}$$

由此觀之，週而復始，任何角之正餘弦均可表爲適當銳角之正餘弦。自方程(12)吾人且知角之值每增或減 360°，其正弦與餘弦之值均不改；換言之，正弦與餘弦爲有週期性之函數，其週期(period)爲360°。

8-5. 旋轉線之射影 方程(9)至(12)實卽較一,二,三,四直角爲大之角之正餘弦定義，其效力可視爲與方程(1)及(2)相同。欲將 $y=\sin x$ 之圖線描繪於方格紙上，固可依此等定義而計算，但較便之作圖法係利用一旋轉線之射影。令 OP 長爲一單位，而任其旋轉於 O 點如圖(8-3)，以與橫線$H'OH$夾適當之角 $x=\angle POH$。如是，無論 OP 位置爲何，或 x 之值爲何，$\sin x$ 均可以 OP 在縱線 $V'OV$ 方向之射影 OM 之長表之，至其正負符號，則視 M 在橫線 $H'OH$ 之上或下而定。同樣，$\cos x$ 均可以 OP 在橫線 $H'OH$ 方向之射影 ON 之長定之，其正負符號，則視 N 在縱線 $V'OV$ 之右或左而定。至於其他三角函數之圖線則可依方程(2)所示者用圖解法描繪之。

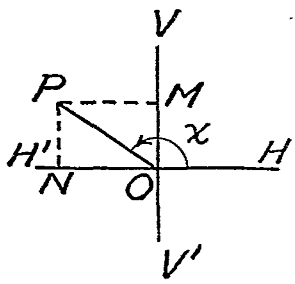


圖 8-3

8-6. 角之單位與正弦之圖線 由前節所述 OM 線之長短及正負，$y=\sin x$ 之圖線甚易描得。但描此圖線時，所用角 x 之單位，對於圖線

之高低寬窄影響殊大。若在 X 軸上一單位長之距離等於 $90°$ 角，或 $60°$ 角，或 $45°$ 角，則所得 $y=\sin x$ 之圖線，將分別如圖(8-4)甲，乙或丙所示。在此等圖中吾人可注意過 $x=0$ 點之切線斜度，其值係視 x 之單位

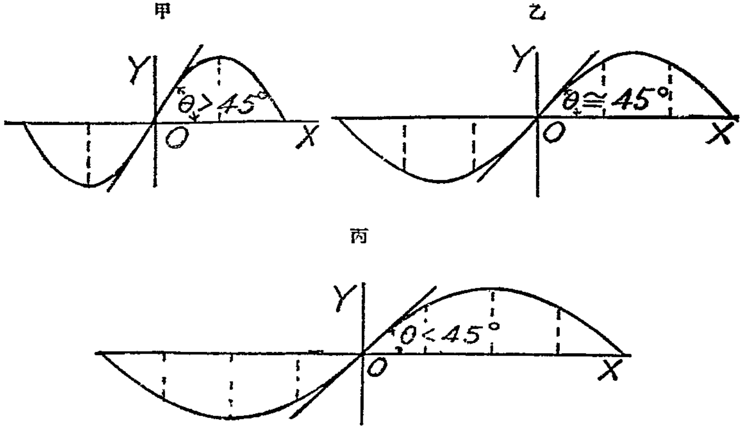


圖 8-4

爲何而定。當 x 之單位爲 60 度時，此斜度約等於 1。若 x 之單位較大，則過原點之 $\sin x$ 斜度亦較大；反是則較小。此似表示若所選用之單位適當，則此斜度可以爲 1。前在(4-6)節方程(21)中已定角之單位爲弧度。今若採用此單位，則本節所期望 $\sin x$ 在 $x=0$ 點之斜度爲 1 一目的亦可達到。茲特說明弧度與尋常所用之度(degree)之關係。

測角之大小，尋常係用圓周角（即四直角）之 360 分之一爲單位，而名之爲度 (degree)。令 AOB (圖8-5)表一任意角。以 O 爲中心，任意長度 r 爲半徑作一圓弧分別截 OA 及 OB 於 A 及 B。若 θ 角 $=\angle AOB$

確定,則 AB 弧長 s 與半徑 r 之比,無論 r 爲何,均有一確定值,故理論上常卽以此比值表 θ 角之大小,並名其單位爲弧度(radian)或弳,卽

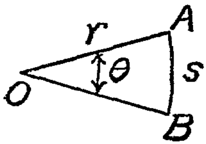


圖 8-5

$$\theta=\frac{s}{r}\text{弧度} \tag{13}$$

由是言之,欲得一弧度之角,所用之弧長 s 必等於半徑 r。但一圓周之周長等於 $2\pi r$,故一圓周角(卽四直角)等於 2π 弧度或 360 度 $=2\pi$ 弧度,

卽 $$1\ \text{弧度}=\frac{360}{2\pi}=57.3\ \text{度} \tag{14a}$$

或 $$1\ \text{度}=\frac{2\pi}{360}=0.0175\ \text{弧度} \tag{14b}$$

此後除有特別聲明之外,角之單位均用弧度。

8-7. 一重要極限 計算函數 $y=f(x)$ 之紀數時,其最基本且最難之步驟係尋求 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 之極限。各三角函數之紀數均可由 $\sin x$ 之紀數計得,此乃因其他各三角函數均可表爲 $\sin x$ 之函數也。求 $\sin x$ 之紀數時,須先知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{15}$$

注意此中 x 之單位必爲弧度。若 x 之單位爲度,則方程(15)之極限爲 $\frac{\pi}{180°}$

證此極限之方法如下:自圖(8-6)觀之,AB 弧長係在 APB 弦長與 AT 及 TB 兩切線之和之間,卽

$$\overline{APB} < \widehat{AB} < (AT+TB),$$

故
$$\frac{\overline{APB}}{r} < \frac{\widehat{AB}}{r} < \frac{AT}{r} + \frac{TB}{r}。$$

但
$$\frac{AP}{r} = \frac{PB}{r} = \sin x, \frac{\widehat{AB}}{r} = 2x\text{(弧度)}$$

$$\frac{AT}{r} = \frac{TB}{r} = \tan x,$$

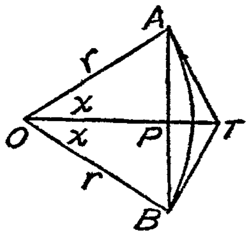


圖 8-6

是以
$$2\sin x < 2x < 2\tan x,$$

或
$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

即
$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x。$$

惟於 $x \to 0$，$\cos x \to 1$，乃知 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ 之值在 1 與以 1 爲極限二數之間，故此極限亦爲 1。

8-8. 三角函數之連續性　自 $y=\sin x$ 與 $y=\cos x$ 之圖線一望即知其係光滑連續不斷。若欲用解析公式表 $\sin x$ 與 $\cos x$ 之連續性可利用方程(15)之極限。茲先將方程(6a)減去(5a)以得

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta \tag{16}$$

次令
$$\alpha+\beta = x+\Delta x, \qquad \alpha-\beta = x,$$

或
$$\alpha = x + \frac{1}{2}\Delta x, \qquad \beta = \frac{1}{2}\Delta x,$$

則得
$$\sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \tag{17}$$

惟 $\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)$ 之絕對值恆不能超過 1，而 $\sin\dfrac{\Delta x}{2}$ 於 $\Delta x \to 0$ 則亦

趨於 0，故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Big(\sin(x+\Delta x)-\sin x\Big)=0;$$

是卽示 $\sin x$ 爲連續函數。因 $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$，故知 $\cos x$ 亦爲連續。$\sin x$ 與 $\cos x$ 既爲連續函數，故 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ 及 $\sec x=\frac{1}{\cos x}$ 除 $\cos x=0$ $\left(卽\ x\ 爲\ \frac{\pi}{2}\ 之奇倍數\right)$ 以外，皆爲連續；而 $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ 及 $\csc x=\frac{1}{\sin x}$ 除 $\sin x=0$ $\left(卽\ x\ 爲\ \frac{\pi}{2}\ 之偶倍數\right)$ 以外，亦皆連續。

8-9. $\sin x$ 與 $\cos x$ 之紀數 按紀數定義，若 $y=\sin x$，則

$$D_x y=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} \tag{18}$$

引用方程(17)，上列最右項可化爲

$$2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

故方程(18)可變爲

$$\frac{d}{dx}\sin x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} \tag{19}$$

今因 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1$，而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x$，故

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos\ x^{*} \tag{20}$$

上述結果無論 x 爲何值均屬眞確，此爲讀者所當注意。今如令 $x=0$，則 $\cos x=1$；故知用弧度爲角之單位，$\sin x$ 過原點之斜度爲 1，與(8-3)節所期望者相符矣。

既知 $\sin x$ 之紀數，欲求 $\cos x$ 之紀數，則可用恆等式(4)：

$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right);\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x;$$

如是

$$\frac{d}{dx}\cos x=\frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin x \tag{21}$$

8-10. 其他三角函數之紀數　其他三角函數之紀數均可由方程(20)及(21)之結果，益以

$$D_x\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vD_xu-uD_xv}{v^2}$$

原理而推得之，例如

$$\frac{d}{dx}\tan x=\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x\frac{d}{dx}\sin x-\sin x\frac{d}{dx}\cos x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}=\sec^2x \tag{22}$$

又如

$$\frac{d}{dx}\csc x=\frac{d}{dx}\frac{1}{\sin x}=-\frac{\frac{d}{dx}\sin x}{\sin^2x}=-\frac{\cos x}{\sin^2x}$$

---

* 方程(20)至(25)中 x 之單位必須爲弧度，若用度爲單位，其右邊均須乘以 $\frac{\pi}{180}$。

$$= -\cot x \csc x \tag{23}$$

至於
$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x \tag{24}$$

及
$$\frac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x \tag{25}$$

兩結果亦可仿求(22)及(23)或(20)之法推演之。

8-11. 三角函數之微積分 茲將上節所得結果共列如下：

$$d\sin u = \cos u\,du; \qquad d\cos u = -\sin u\,du;$$
$$d\tan u = \sec^2 u\,du; \qquad d\cot u = -\csc^2 u\,du;$$
$$d\sec u = \tan u \sec u\,du; \qquad d\csc u = -\cot u \csc u\,du \tag{26}$$

讀者可注意第一列之紀數均爲正，而第二列之紀數均爲負！既知此等微分關係，則其反逆之積分關係將爲：

$$\int \cos u\,du = \sin u + C; \qquad \int \sin u\,du = -\cos u + C;$$
$$\int \sec^2 u\,du = \tan u + C; \qquad \int \csc^2 u\,du = -\cot u + C; \tag{27}$$
$$\int \tan u \sec u\,du = \sec u + C; \qquad \int \cot u \csc u\,du = -\csc u + C。$$

方程(26)示六個基本函數之微分，但方程(27)所示者則非此六個基本三角函數之積分：$\tan u$ 與 $\cot u$ 及 $\sec u$ 與 $\csc v$ 之積分尚須藉其他越函數方能表出。方程(27)雖甚重要，然初讀者最好以記憶(26)而由之以求(27)爲較妥。

例 1. 微分 $y=\sin ax$。

令 $u=ax, du=a\,dx$, 則 $y=\sin u$;

故 $ay = \cos u\,du = a\cos ax\,dx$。

此最後結果，經練習嫻熟後，應順手寫出如下：

$$dy=\cos ax\,d(ax)=a\cos ax\,dx$$

例 2.　微分 $y=\sqrt{1-k^2\sin^2 x}$。

令 $$u=1-k^2\sin^2 x,$$

則 $$du=-2k^2\sin x\,d\sin x=-2k^2\sin x\cos x\,dx;$$

故 $$dy=du^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{-k^2\sin x\cos x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}dx。$$

例 3.　若 $\sin^2 x+\sin^2 y=2(x-y)$，求 $\frac{dy}{dx}$。

微分兩邊卽得

$$2\sin x[d(\sin x)]+2\sin y[d(\sin y)]=2dx-2dy,$$

或 $$\sin x\cos x\,dx+\sin y\cos y\,dy=dx-dy,$$

故 $$(1+\sin y\cos y)dy=(1-\sin x\cos x)dx。$$

卽 $$\frac{dy}{dx}=\frac{1-\sin x\cos x}{1+\sin y\cos y}。$$

例 4.　微分 $y=\frac{\sin x}{a+b\cos x}$，

$$dy=\frac{(a+b\cos x)d\sin x-\sin x\,d(a+b\cos x)}{(a+b\cos x)^2}$$

$$=\frac{(a+b\cos x)\cos x+b\sin^2 x}{(a+b\cos x)^2}dx$$

$$=\frac{b+a\cos x}{(a+b\cos x)^2}dx。$$

例 5.　求 $\int\cos ax\,dx$。

令　$u=ax, dx=\dfrac{du}{a}$，故

$$\int\cos ax\,dx=\int\cos u\frac{du}{a}=\frac{1}{a}\int\cos u\,du=\frac{\sin u}{a}+C$$

$$=\frac{1}{a}\sin ax+C.$$

例 6. 求 $\int\dfrac{dy}{\sin^2 2y}$。

$$\int\frac{dy}{\sin^2 2y}=\int\csc^2 2y\,dy=\int\csc^2 2y\frac{d(2y)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\int\csc^2(2y)d(2y)=-\frac{\cot 2y}{2}+C。$$

例 7. 求 $\int 2\tan x\sec^2 x dx$。

令　$u=\tan x$，則 $du=\sec^2 x\,dx$;

故　$\int 2\tan x\sec^2 x\,dx=\int 2udu=u^2+C_1=\tan^2 x+C_1$。

若令　$y=\sec x$，則 $dy=\sec x\tan x\,dx$，而

$$\int 2\tan x\sec^2 x\,dx=\int 2ydy=y^2+C_2=\sec^2 x+C_2。$$

兩結果驟視之似不相同，此乃因兩積分常數實不相同之故。因 $\sec^2 x=1+\tan^2 x$，故知 $C_1=1+C_2$。

例 8. $\int\cos^3 x\,dx=\int\cos^2 x\,d(\sin x)=\int(1-\sin^2 x)d(\sin x)$

$$=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C。$$

8-12. 極大與極小　甚多之極大與極小問題，如用三角函數，結果較爲簡便，此理與甚多之幾何問題改用三角學原理則較易計算相同。

例 1.　設有一球場，長爲 $2b$，寬爲 $2a(b>a)$，今欲在其外建造一跑道全長共爲 $4c$。若跑道係由兩直路及兩半圓路所造成，且其最近於球場之點爲最遠，問跑道應如何建造？

跑道之造法，除全長爲 $4c$ 外本可有種種不同之尺寸。今若以某尺寸建造一跑道，則此跑道與球場之最近距離將有一值。若將跑道尺寸改變，此最近距離之值亦將隨之改變。今所欲用之跑道尺寸係使此最近距離爲最長，故未解本題之前須略知跑道與球場之最近距離之位置爲何，然後表之爲適當變數之函數。今圖 (8-7) 表示三種可能之造法。在甲法中跑道之半圓部分之中心 O 係在球場內，在乙法中，O 位在球場之邊線上，在丙法中，O 則位在球場外。此三種造法之最短距離均爲 AB，惟其位置略有不同。

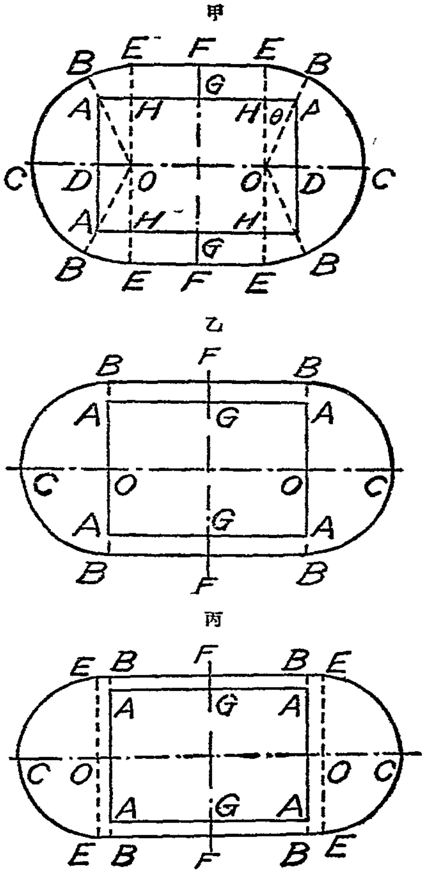


圖 8-7

先論乙法。今跑道長 $4c$，故 CBF 之長應爲 c。若 OC 半徑

爲 r，則 BC 長爲 $\frac{2\pi r}{4}=\frac{\pi r}{2}$。惟 $BF=AG=b$，故

$$CBF=\frac{\pi r}{2}+b=c。$$

由是知，若b與c均確定，則r亦確定；r 確定之後，$AB=OB-OA=r-a$ 亦可確定，而本題遂無討論餘地；是以乙法是否本題答案應視由是所得之 AB 與他法所得結果相比，是否較大，方能斷定。

次論丙法。仍認 $CBF=c$，$OC=r$。因 $CE=\frac{\pi r}{2}$，$BF=b$，故 $CBF=c=\frac{\pi r}{2}+b+EB$，或 $\frac{2}{\pi}(c-b-EB)=r$；又 $AB=r-a$，故若以 $EB=x$ 爲自變數，則最短距離 AB 與 x 之關係將爲

$$AB=r-a=\frac{2}{\pi}(c-b-x)-a$$

此卽表示 AB 與 x 之關係係一直線的，本無極大可言，惟因 x 愈小，AB 將愈大，且 x 不能爲負，故 AB 之極大值係在 $x=0$ 時。若$x=0$，則丙法與乙法相同，故本題關鍵在於甲法。

討論甲法時，固可以任意直線爲自變數，但本題解答似以用 BOE 角（令之爲 θ）作自變數爲較妥。如是，若 $OB=r$，則最短距離 $y=AB$ 將等於

$$y=OB-OA=r-OH\sec\theta=r-a\sec\theta \tag{28}$$

欲將 r 表爲 θ 之函數，可由 CBF 長爲 c 之一事求之：卽

$$CBF=CBE+EF=CBE+AG-AH=\frac{\pi}{2}r+b-a\tan\theta=c \tag{29}$$

微分(28)得

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}-a\sec\theta\tan\theta \tag{30}$$

微分(29)得
$$\frac{\pi}{2}\frac{dr}{d\theta}-a\sec^2\theta=0 \tag{31}$$

或
$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{2a}{\pi}\sec^2\theta-a\sec\theta\tan\theta \tag{32}$$

今令 $\frac{dy}{d\theta}=0$, 因 $\sec\theta\neq 0$, 故得

$$\frac{2}{\pi}\sec\theta=\tan\theta \tag{33}$$

卽 $$\sin\theta=\frac{2}{\pi};\tan\theta=\frac{2}{\sqrt{\pi^2-4}},\ \sec\theta=\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2-4}},$$

或 $$\theta=39.5^\circ(約)。$$

此結果甚饒興趣,因所求之 θ 角與球場及跑道長短均無關係。θ 角已知後,則跑道直的部份之長(卽 EE)爲

$$2(b-a\tan\theta)=2b-\frac{2a}{\sqrt{\pi^2-4}},$$

其半圓部份之半徑乃等於

$$r=\frac{2}{\pi}\left(c-b+\frac{2a}{\sqrt{\pi^2-4}}\right);$$

至於最短距離 y 之最長值則爲

$$\begin{aligned}y=r-a\sec\theta&=\frac{2}{\pi}\left(c-b+\frac{2a}{\sqrt{\pi^2-4}}\right)-\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2-4}}a\\&=\frac{2}{\pi}(c-b)-\frac{\pi^2-4}{\pi\sqrt{\pi^2-4}}a\\&=\frac{2}{\pi}\left(c-b-\frac{1}{2}\sqrt{\pi^2-4}\,a\right)。\end{aligned}$$

此與由乙丙兩法所得之 $AB=\frac{2}{\pi}(c-b)-a$ 相比,顯然較大,因$\frac{\sqrt{\pi^2-4}}{\pi}a$

係比 a 爲小也。自圖(8-7)甲觀之，若 c 不夠長，則顯然無法使跑道全在球場之外。由上列結果言之，當 $y=0$ 時，c 之値卽爲最短之可能跑道，故 c 之値須比

$$c=b+\frac{\sqrt{\pi^2-4}}{2}a$$

更長，本題方有答案。此外，讀者須注意連兩半圓中心之直線係與球場較長之邊 b 平行，至於其理可由讀者自證之。

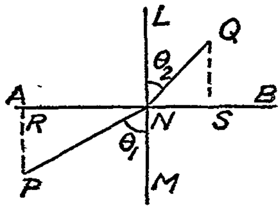


圖 8-8

例 2. 設圖(8-8)之 AB 表一河岸，P 表在河內一點，Q 表岸上一點。若有人在河內航行之速度 v_1 與其在陸上乘車之速度 v_2 之比已知，問此人應在 AB 岸線上何點登陸方能於最短時間內自 P 到達 Q?

令 N 點表此人登陸之處，PN 遂爲其水程，NQ 爲其陸程。水程速度爲 v_1，故由 P 至 N 所需之時間爲 $t_1=\frac{PN}{v_1}$ 而由 N 至 Q 所需之時間則爲 $t_2=\frac{NQ}{v_2}$。故所需之全時間乃爲：

$$t=t_1+t_2=\frac{PN}{v_1}+\frac{NQ}{v_2} \tag{34}$$

作 PR 與 QS 兩垂線與 AB 垂直。又作 LNM 垂線。因 P 與 Q 之位置已固定，故 $PR=a$ 與 $QS=b$ 之長均有定値。欲定 N 之位置可以 $\angle RPN=\angle PNM=\theta_1$ 爲自變數。爲對稱起見，另用 $\angle NQS=\angle LNQ=\theta_2$ 爲輔變數。如是

$$PN=PR\sec\theta_1=a\sec\theta_1,$$

$$NQ=QS\sec\theta_2=b\sec\theta_2,$$

而方程(34)可寫爲

$$t=\frac{a}{v_1}\sec\theta_1+\frac{b}{v_2}\sec\theta_2 \tag{35}$$

欲求 θ_1 與 θ_2 之關係，吾人又知 RS 有固定值，卽

$$RS=RN+NS=PR\tan\theta_1+QS\tan\theta_2$$

$$=a\tan\theta_1+b\tan\theta_2 \tag{36}$$

微分(35)與(36)可得

$$dt=\frac{a}{v_1}\sec\theta_1\tan\theta_1 d\theta_1+\frac{b}{v_2}\sec\theta_2\tan\theta_2\,d\theta_2 \tag{37}$$

及

$$0=a\sec^2\theta_1\,d\theta_1+b\sec^2\theta_2\,d\theta_2 \tag{38}$$

將(38)之 $d\theta_2$ 代入(37)中以消去 $d\theta_2$ 乃有

$$dt=\frac{a}{v_1}\sec\theta_1\tan\theta_1\,d\theta_1-\frac{a\sec^2\theta_1\tan\theta_2}{v_2\sec\theta_2}d\theta_1,$$

或

$$\frac{dt}{d\theta_1}=\frac{a\sec\theta_1}{\sec\theta_2}\left(\frac{\sec\theta_2\tan\theta_1}{v_1}-\frac{\sec\theta_1\tan\theta_2}{v_2}\right),$$

$$=a\sec^2\theta_1\left(\frac{\sin\theta_1}{v_1}-\frac{\sin\theta_2}{v_2}\right) \tag{39}$$

令 $\frac{dt}{d\theta_1}=0$，因 a 及 $\sec\theta_1$ 均不等於 0，故僅有

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{v_2} \tag{40}$$

此卽示登陸之點 N，應使 θ_1 與 θ_2 滿足

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2} \tag{41}$$

已學過光學者知此結果實卽折射定律（law of refraction）。若已知 v_1/v_2，欲計 N 之位置，倘應將(36)及(41)方程聯解之。惟因兩方程均爲三角函數之方程式，計算 θ_1 與 θ_2 時，須用漸近算法。

本例用意係以表示利用三角函數以解極大及極小問題之步驟。其實如以 $RN=x$ 爲本題之自變數，則 $NS=c-x$，而方程(34)可寫作

$$t=\frac{\sqrt{PR^2+RN^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{NS^2+SQ^2}}{v_2}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}{v_2} \tag{42}$$

求 $\frac{dt}{dx}$ 而令之爲 0，則有

$$\frac{dt}{dx}=\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{c-x}{v_2\sqrt{(c-x)^2+b^2}}=0 \tag{43}$$

因
$$\sin\theta_1=\frac{RN}{PN}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

$$\sin\theta_2=\frac{NS}{NQ}=\frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}},$$

故(43)實卽與方程(41)完全相同。由方程（43）可知 x 滿足一四次方程：

$$v_2^2x^2[(c-x)^2+b^2]=v_1^2(c-x)^2(a^2+x^2)。$$

由此例觀之，解答某題時是否以用三角函數爲便，殊無一定不易之法。

8-13. 反函數 反函數之意義前已述及。簡言之，如

$$y=f(x) \tag{44}$$

而將此方程之 x 解出使爲 y 之函數

$$x=g\ (y) \tag{45}$$

則 f 與 g 二者互爲反函數。$y=f(x)$ 與 $x=g(y)$ 可視爲同意義方程，其所代表之圖線亦係完全符合。但若在方程(45)中令 y 與 x 地位對換使成

$$y=g\ (x) \tag{46}$$

而仍令 x 爲自變數，則其圖線與原函數所代表之圖線完全不同；但已知其一，其他卽可用下述之簡單方法描繪之。令原函數 $y=f(x)$ 之圖線如圖(8-9)所示。若 $x=g(y)$ 爲 $y=f(x)$ 之反函數，換言之，卽此二函數係同意義者，則在 $x=g\ (y)$ 圖線上任取一點 P，將其 x 及 y 坐標對換卽得 P' 點位在 $y=g(x)$ 圖線上。繪 OT 直線以等分 OX 及 OY 兩軸所成之角，連 PP' 之直線顯然與 OT 正交，且 P 及 P' 距 OT 遠度彼此相等。由此可知欲得 $y=g(x)$ 之圖線，只須將 $x=g(y)$ 或 $y=f(x)$ 反射於 OT 線而求其像卽可。

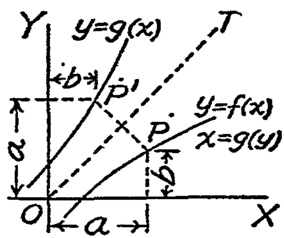


圖 8-9

8-14. 反三角函數之圖線　正弦之反函數可以

$$y=\sin^{-1}x \quad 或 \quad y=\operatorname{arc}\sin x \tag{47}$$

表之*。依據前此所述，方程(47)之意義卽指

$$x=\sin y \tag{48}$$

同理，其他反三角函數之同意義方程如下：

* 注意 $\sin^{-1}x$ 不等于 $(\sin x)^{-1}=\frac{1}{\sin x}$！

$$y=\cos^{-1}x, \qquad x=\cos y;$$

$$y=\tan^{-1}x, \qquad x=\tan y;$$

$$y=\cot^{-1}x, \qquad x=\cot y;$$

$$y=\sec^{-1}x, \qquad x=\sec y;$$

$$y=\csc^{-1}x, \qquad x=\csc y;$$

根據上節所述，此等反函數及其同意義方程之圖線將如圖(8-10)各線所示。

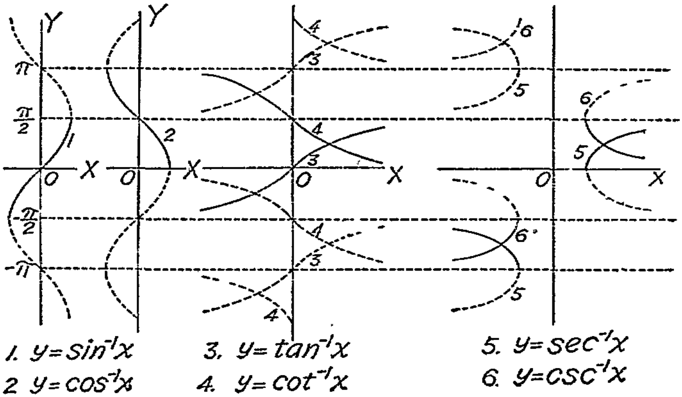


圖 8-10

由是知在反正弦與反餘弦中，其 x 值之絕對值不得大於 1；在反正割與反餘割中，其 x 之絕對值不得小於 1；至於反正切與反餘切之 x 則無限制。

8-15. 反三角函數之紀數 自圖(8-10)觀之，各反三角函數均爲多值的，因與 x 以一定之值後，可有無數之 y 值與之相應也。討論此等

多值函數之微分或紀數時，須分之爲數支。玆先限制 y 與 x 之值同爲正號而討論之（即所用之角祇限於銳角）。

（A）因 $y=\sin^{-1}x, x=\sin y$

故 $$dx=\cos y\,dy \text{ 或 } \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y},$$

此結果係將紀數表爲 y 之函數。若欲改 $\frac{dy}{dx}$ 使爲 x 之函數，則尙須計 $\cos y$。今已知 $y=\sin^{-1}x$，欲求 $\cos y$，其最便利方法之一係作一直角三角形如圖 (8-11)。令 $\angle AOB=y$，$OB=1$，則知 $AB=\sin y=x$。於是 $OA=\sqrt{1-x^2}$，而 $\cos y=OA=\sqrt{1-x^2}$。以是代入乃有

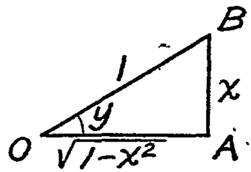


圖 8-11

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} \tag{49}$$

（B）因 $y=\cos^{-1}x, x=\cos y$，

故 $$dx=-\sin y\,dy, \text{ 或 } \frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)=\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\sin y}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} \tag{50}$$

公式(50)實亦可由公式(49)蛻變而來。因所用之角均爲銳角時，$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ 係恆等也。此事可自圖(8-11)證之。因

$$\sin\angle AOB=x=\cos\angle OBA。$$

故 $$\angle AOB=\sin^{-1}x;\quad \angle OBA=\cos^{-1}x$$

而 $$\angle AOB+\angle OBA=\frac{\pi}{2}=\sin^{-1}x+\cos^{-1}x。$$

$\sin^{-1}x$ 與 $\cos^{-1}x$ 之和既為一常數，其紀數之數值自應相等而符號則係相反，即

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=-\frac{d}{dx}\cos^{-1}x。$$

(C) $y=\tan^{-1}x$; $x=\tan y$; $dx=\sec^2 y\,dy$。

將 $\sec^2 y$ 表為 x 之函數時，仍先作一直角三角形 OAB，圖(8-12)，並令 $\angle AOB=y$。若 $OA=1$，則因 $\tan y=x$ 之故，$AB=x$，而 $OB=\sqrt{1+x^2}$。又知 $\sec y=OB$，故上列結果變為

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2} \tag{51}$$

(D) $y=\cot^{-1}x$。依照(B)方法可得

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1}x=-\frac{1}{1+x^2} \tag{52}$$

(E) $y=\sec^{-1}x, x=\sec y$,

故 $$dx=\sec y\tan y\,dy \quad 或 \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sec y\tan y}。$$

作直角三角形 OAB，圖(8-13)。令 $OA=1$，則因 $\sec y=OB$，故 $OB=x$，而 $AB=\sqrt{x^2-1}$。由此得 $\tan y=AB=\sqrt{x^2-1}$，故

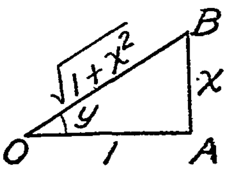


圖 8-12

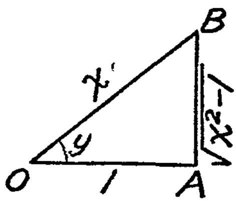


圖 8-13

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sec y\tan y}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \tag{53}$$

（F）$y=\csc^{-1}x$。仿法(B)可得

$$\frac{d}{dx}\csc^{-1}x=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \tag{54}$$

8-16．代數函數之積分　試將（49）至（54）各公式與三角函數紀數公式相比較，即知各三角函數之紀數仍爲三角函數而各反三角函數之紀數則爲代數函數。換言之，代數函數如 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$\frac{1}{1+x^2}$ 及 $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ 等，其積分可藉反三角函數以表示之。即

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x+C_1=-\cos^{-1}x+C_2 \tag{55}$$

$$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x+C_1=-\cot^{-1}x+C_2 \tag{56}$$

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=\sec^{-1}x+C_1=-\csc^{-1}x+C_2 \tag{57}$$

上列各公式中之積分常數 C_1 與 C_2 相差均有定值，此乃因當各角均爲銳角時，下列恆等式均可按前述者推證之：

$$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2} \tag{58}$$

$$\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2} \tag{59}$$

$$\sec^{-1}x+\csc^{-1}x=\frac{\pi}{2} \tag{60}$$

至於各反三角函數之積分尙須藉他法以求之，玆暫不述。

例 1．　微分 $u=\cos^{-1}\frac{x}{a}$。

令 $y=\frac{x}{a}$，則 $du=d\cos^{-1}y=-\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$，即

$$d\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)=-\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=-\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

例 2. 微分 $v=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$。

$$du=\frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}d\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

$$=\frac{(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2+4x^2}\left(\frac{(1-x^2)d(2x)-2x\,d(1-x^2)}{(1-x^2)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{(1-x^2)^2+4x^2}\left(2(1-x^2)+4x^2\right)dx$$

$$=\frac{2+2x^2}{(1+x^2)^2}dx=\frac{2}{1+x^2}dx。$$

例 3. 試以微分法證

$$\int\sqrt{a^2-u^2}\,du=\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a}+C。$$

微分此方程之右邊即得

$$\frac{u}{2}d\sqrt{a^2-u^2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-u^2}\,du+\frac{a^2}{2}d\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)$$

$$=\frac{u}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{-2u}{\sqrt{a^2-u^2}}du+\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{2}du+\frac{a^2}{2}\ \frac{d\left(\frac{u}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}}$$

$$=\frac{-u^2+(a^2-u^2)}{2\sqrt{(a^2-u^2)}}du+\frac{a^2}{2}\frac{du}{\sqrt{(a^2-u^2)}}$$

$$=\frac{2a^2-2u^2}{2\sqrt{(a^2-u^2)}}du=\sqrt{a^2-u^2}\,du,$$

是卽微分左邊之結果。

例 4．試以微分法證

$$\int\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}du=\sqrt{u^2-a^2}-a\sec^{-1}\frac{u}{a}+C。$$

微分其右邊乃有

$$d\sqrt{u^2-a^2}-a\,d\sec^{-1}\frac{u}{a}=\frac{1}{2}\frac{d(u^2-a^2)}{\sqrt{(u^2-a^2)}}-\frac{ad\left(\frac{u}{a}\right)}{\frac{u}{a}\sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2-1}}$$

$$=\frac{u\,du}{\sqrt{(u^2-a^2)}}-\frac{a^2\,du}{u\sqrt{(u^2-a^2)}}=\frac{(u^2-a^2)\,du}{u\sqrt{(u^2-a^2)}}=\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}du.$$

是卽左邊之微分。

8-17．反三角函數之主值　當 y 不大於一直角時，各反三角函數 y 與 x 均可視爲正值。換言之，與 x 以一適當之正值，則 x 之反三角函數之值 y 均在 0 至 $\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{包括 0 與}\frac{\pi}{2}\right)$ 之間。玆認當 x 爲正時各反三角函數之主值 (principal value) 爲最小之正值。至若 x 爲負，按前所述，y 之值仍爲無限多。在此部分內 y 之主值爲何，可任意採用一合理定義。玆規定 x 爲負時其反三角函數 y 之主值係使(49)至(54)各公式仍得毫無更變的應用（包括其符號在內），同時各反三角函數 y 之數值須爲最小，且當 $x=0$ 時不得有雙值之點。由是言之，因公式(49)至(52)不受 x 之符號之影響（卽其紀數之符號不因 x 之爲正或負而改變），故當 x 爲負時 $\sin^{-1}x$ 與 $\tan^{-1}x$ 之主值應在 $-\frac{\pi}{2}$ 至 0 之間 $\left(\text{包括 0 與}-\frac{\pi}{2}\right)$。

此等主值部分可與 x 爲正之主值部分啣接成一連續曲線如圖(8–10)各實線所示。至於公式(53)與(54)，因分母中有 x 一項，故其紀數之符號隨 x 之符號而定。是以當 x 爲負時 $\sec^{-1}x$ 與 $\csc^{-1}x$ 之主值可規定其係在 $-\pi$ 至 $-\frac{\pi}{2}$ (包括 $-\pi$ 及 $-\frac{\pi}{2}$) 之間。此主值部分（參閱圖 8–10）則不能與 x 爲正時之主值部分啣接爲連續曲線矣。總括言之，各反三角函數之主值範圍如下：

	x 爲負	x 爲正	連續範圍
$\sin^{-1}x$ 及 $\tan^{-1}x$	$-\frac{\pi}{2}$ 至 0	0 至 $\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$ 至 $\frac{\pi}{2}$
$\cos^{-1}x$ 及 $\cot^{-1}x$	π 至 $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ 至 0	π 至 0
$\sec^{-1}x$ 及 $\csc^{-1}x$	$-\pi$ 至 $-\frac{\pi}{2}$	0 至 $\frac{\pi}{2}$	不連續

若用此等主值定義，則方程(58)與(59)仍爲眞實。惟當 x 爲負時，方程(60)右邊須改爲 $-3\pi/2$。

例　就主值論，試證下列兩恆等式：

$$\tan^{-1}\frac{1}{x}=\cot^{-1}x, \qquad 如\ 0<x;$$

$$\tan^{-1}\frac{1}{x}=\cot^{-1}x-\pi, \qquad 如\ 0>x。$$

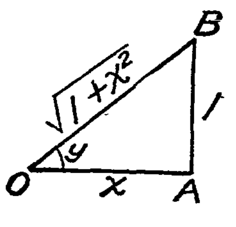


圖 8-14

令 $y=\tan^{-1}\frac{1}{x}$，則 $\tan y=\frac{1}{x}$；若 $x>0$，則 y 爲銳角，故可作一直角三角形 OAB 以顯示之，圖 (8–14)。令 $y=\angle BOA$，故 $\tan y=\frac{AB}{OA}$。設 $AB=1$，則因 $\tan y=\frac{1}{x}$，

故 $OA=x$。但 $\cot y=\frac{OA}{AB}=x$，故亦有 $y=\cot^{-1}x$，是卽第一恆等式。

若 $x<0$，因 $\tan^{-1}x$ 之主值係在 $-\frac{\pi}{2}$ 與 0 之間，故如令 $u=-x$，$u>0$，則 $\tan^{-1}\frac{1}{x}=\tan^{-1}\frac{1}{-u}=-\tan^{-1}\frac{1}{u}=-\cot^{-1}u$。同理，當 $x<0$ 時，$\cot^{-1}x$ 之主值係在 $\frac{\pi}{2}$ 與 π 間，故 $\cot^{-1}x=\cot^{-1}(-u)=\pi-\cot^{-1}u$。是以

$$\tan^{-1}\frac{1}{x}=-\cot^{-1}u=\cot^{-1}x-\pi,$$

是卽第二恆等式。

8-18．反三角函數之應用　反三角函數之主要應用，係藉以求若干代數函數之積分。下述之光學問題亦可以反三角函數演算之。

令 ABC 表一三稜鏡之主截面。今有光線 PN 射於其 AB 面上，折射後，其射出之方向爲 MQ。試證當入射角卽 $\angle SNP=i(SNL\perp AB)$ 與出射角卽 $\angle TMQ=r(TML\perp AC)$ 相等之時，出射方向與入射方向相差之角（名爲偏差角）$\angle VRQ$ 爲最小。

令偏差角 $\angle VRQ$ 爲 u。自圖(8-15)知

$$\angle VRQ=\angle RNM+\angle NMR,$$

或 $u=(i-a)+(r-b)=(i+r)-(a+b)$。

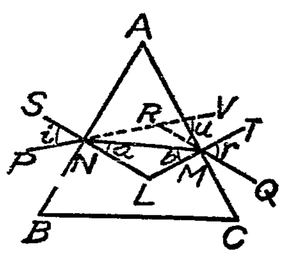


圖 8-15

又自 ANM 三角形（稜鏡之頂角爲 A），得

$$A+\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+\left(\frac{\pi}{2}-b\right)=\pi,$$

或 $$A=a+b$$

以此代入 u 中乃有

$$u=i+r-A \tag{61}$$

今所欲求者爲此量之最小值；除此幾何的關係外，i 與 r 尙應適合於一物理的關係，即折射定律。若 n 表稜鏡之折光指數 (index of refraction)，則按折射定律，在 AB 分界處

$$n=\frac{\sin i}{\sin a} \quad 或 \quad \sin a=\frac{1}{n}\sin i;$$

而在 AC 處

$$n=\frac{\sin r}{\sin b} \quad 或 \quad \sin b=\frac{1}{n}\sin r;$$

因 $a+b=A=$ 常數，故 i 與 r 之又一關係爲

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\sin i\right)+\sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\sin r\right)=A \tag{62}$$

微分(61)及(62)，乃得

$$du=di+dr \tag{63}$$

及 $$d\sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\sin i\right)=-d\sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\sin r\right),$$

或 $$\frac{\frac{1}{n}\cos i}{\sqrt{1-\frac{\sin^2 i}{n^2}}}di=-\frac{\frac{1}{n}\cos r\,dr}{\sqrt{1-\frac{\sin^2 r}{n^2}}},$$

即 $$di=-\frac{\cos r}{\cos i}\cdot\frac{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}{\sqrt{n^2-\sin^2 r}}dr \tag{64}$$

以(64)代入(63)乃有

$$\frac{du}{dr}=\frac{-\cos r\sqrt{n^2-\sin^2 i}+\cos i\sqrt{n^2-\sin^2 r}}{\cos i\sqrt{n^2-\sin^2 r}}。\qquad(65)$$

令此爲0，則得

$$\cos r\sqrt{n^2-\sin^2 i}=\cos i\sqrt{n^2-\sin^2 r}\qquad(66)$$

(66)之一答案顯然爲 $r=i$。自本題之物理的條件言之，此當爲所求之惟一答案，然數學家仍願自(66)以數學方法斷定，除 $r=i$ 外，實無其他之值可使 i 與 r 同小於一直角而仍得一最小之偏差角。如欲證此事，可將(66)兩邊平方以得

$$n^2\cos^2 r-\cos^2 r\sin^2 i=n^2\cos^2 i-\cos^2 i\sin^2 r。$$

以 $\cos^2 r=1-\sin^2 r$, $\cos^2 i=1-\sin^2 i$ 代入則得

$$n^2-\sin^2 i-n^2\sin^2 r+\sin^2 i\sin^2 r$$

$$=n^2-\sin^2 r-n^2\sin^2 i+\sin^2 r\sin^2 i,$$

即 $$\sin^2 i+n^2\sin^2 r=\sin^2 r+n^2\sin^2 i,$$

$$(n^2-1)\sin^2 i=(n^2-1)\sin^2 r$$

或 $$\sin^2 i=\sin^2 r,$$

是以 $$\sin i=\pm\sin r,$$

而當 i 與 r 同小於一直角時，只有 $i=r$ 一解答。此解答是否極小，由物理實驗結果言之無庸驗證。但若求 $\frac{d^2u}{dr^2}$ 後，再以 $i=r$ 之關係代入亦可有 $\frac{d^2u}{dr^2}>0$，故知結果實係極小。

8-19. 簡諧運動 設有物體依

$$x=A\sin(pt+\alpha)\qquad(67)$$

之律沿一直線移動。自此運動律言之，卽知物體自左至右最大之行程必爲 $2A$，因 $\sin(pt+\alpha)$ 之絕對值不得超過 1 也。玆名位移 (displacement) x 爲時間 t 之正弦或餘弦函數之運動爲簡諧運動 (simple harmonic motion)。當物體作簡諧運動時，其速度 v 係

$$v=\frac{dx}{dt}=pA\cos(pt+\alpha) \tag{68}$$

亦爲時間之正弦或餘弦函數；其在任何時刻之加速度 a

$$a=\frac{dv}{dt}=-p^2A\sin(pt+\alpha)=-p^2x \tag{69}$$

不但亦爲時間之正弦或餘弦函數，且其數值與位移 x 成正比，其方向與 x 相反。此乃簡諧運動之特徵。由方程(67)以求方程(69)，所用之計算法全爲微分。今若以加速度 a 與位移 x 成正比，其方向與 x 相反二事爲簡諧運動之定義，則有

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=-p^2x \tag{70}$$

惟因 $v=\frac{dx}{dt}$ 而 $\frac{dv}{dt}=\frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx}=v\frac{dv}{dx}$，故上列方程亦可寫爲

$$v\frac{dv}{dx}=-p^2x\,,$$

或

$$v\,dv=-p^2x\,dx \tag{71}$$

積分之乃得 $\frac{v^2}{2}=-p^2\frac{x^2}{2}+C$。

假定當 $v=0$ 時，$x=A$，則積分常數 $C=\frac{p^2A^2}{2}$，而速度 v 與 x 之關係遂爲

$$v^2=p^2(A^2-x^2)。$$

由是知
$$v=\frac{dx}{dt}=p\sqrt{A^2-x^2}$$

或
$$p\,dt=\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}}=\frac{d\left(\frac{x}{A}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}}。$$

再積分之乃得
$$pt+C'=\sin^{-1}\frac{x}{A} \tag{72}$$

設當 $t=0$ 時，$x=B$，而令

$$\sin\alpha=\frac{B}{A}，\text{則 } C'=\alpha。$$

如是自方程(72)卽可求得

$$\frac{x}{A}=\sin(pt+\alpha) \text{ 或 } x=A\sin(pt+\alpha) \tag{73}$$

由方程(70)以推出(72)，所用者乃積分法，其中最應注意者卽將方程(70)改寫爲(71)之一步。此乃積分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(y)$$

方程之特法之一；因若令 $z=\frac{dy}{dx}$，則

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}z=\frac{dy}{dx}\,\frac{dz}{dy}=z\frac{dz}{dy},$$

而原有方程卽可寫爲

$$z\frac{dz}{dy}=f(y)，\text{或}\quad z\,dz=f(y)dy,$$

而得積分之爲 $\frac{z^2}{2}=\int f(y)dy+C$ 矣。

第八章習題

1. 表 30°,45° 及 60° 各角之值爲弧度,並計其各三角函數。

2. 若三角形之三邊長各爲 a,b,c, 其對面之角分別爲 A,B,C,試推證:

正弦定律: $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$;及

餘弦定律: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$。

3. 試示無論 θ 角爲何,恆有:

$$\sin\theta+\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=0,\text{及}$$

$$\cos\theta+\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=0。$$

4. 試示 $\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{2}}$ 及 $\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{2}}$,並推斷

$2\cos\dfrac{45°}{2^n}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$ (根號共爲 $n+1$ 個),及

$2\sin\dfrac{30°}{2^n}=\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\cdots-\sqrt{3}}}}$ (根號共爲 $n+1$ 個, $n\neq 0$)。

5. 試示 $\tan\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

$$=\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}。$$

6. 試示: $$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta};$$

及 $$\tan\alpha\tan\beta=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}。$$

7．試示 $$\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{1-\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}。$$

8．若 a,b,c，表一三角形三邊之長，$2s=a+b+c$，試示此三角形之面積爲$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。

9．示
$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$$

10．示明 $4\cos^3\theta-3\cos\theta-\cos 3\theta=0$ 及
$$4\sin^3\theta-3\sin\theta+\sin 3\theta=0,$$
並引用二者之一以解答三次方程：
$$x^3-px+q=0。$$
[提示：令 $x=r\cos\theta$ 或 $r\sin\theta$]。

11．繪 $y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$ 及 $y=\csc x$ 各圖線於方格紙上。問此四函數之週期各爲何？

12．描繪以下各曲線於方格紙上：

(a) $y=3\sin x+4\cos x$；　(b) $y=4\sin 2x+3\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$；

(c) $y=3\sin 2x+4\cos x$；　(d) $y=4\sin x-3\cos 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$；

(e) $y=4\sin x+3\cos 3x$；　(f) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin 3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$；

(g) $y=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x$；

(h) $y=\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\frac{1}{7^2}\sin 7x$。

13. 用圖解法試示 $\int_0^t \cos x\,dx=\sin t$。

14. 試在方格紙上作 $\sin x$ 及 $\cos x$ 兩曲線並於每隔 15° 處作一切線以求該點之斜度。由是試推斷

$$D_x \sin x=\cos x \text{ 及 } D_x \cos x=-\sin x。$$

15. 按紀數定義，試證 $D_x \tan x=\sec^2 x$ 及 $D_x \sec x=\sec x\tan x$。

16. 試證 $D_x \sin(x\text{度})=\frac{\pi}{180}\cos(x\text{ 度})$。

17. 就下表所列各正弦及餘弦之值是否可認

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}=1 \text{ 及 } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-\cos(\Delta x)}{\Delta x}=0?$$

角度數(θ°)	弧度	$\cos\theta$	$\sin\theta$
20′			
40′			
1°			
1°20′			
1°40′			
2°			

18. 微分：

(a) $\sqrt{\cos ax}$,

(b) $\sin^2 x$;

(c) $\tan\frac{x}{2}$;

(d) $\cos^3 x$;

(e) $\sqrt{x+\tan x}$;

(f) $\frac{\sin x}{1-\cos x}$,

(g) $\sqrt{2(1+\cos x)}$;

(h) $\frac{1}{a\cos x+b\sin x}$,

(i) $\dfrac{1}{(a+b\cos x)^2}$, (j) $\tan(ax+b)$;

(k) $\sec\dfrac{1+x}{1-x}$; (l) $\dfrac{1-\tan x}{\sec x}$;

(m) $\dfrac{1}{\sqrt{\tan a x^2}}$, (n) $\sqrt{\sin\sqrt{x}}$,

(o) $x\sqrt{\cot x+1}$; (p) $\dfrac{\cos\pi\theta}{\theta}$;

(q) $\sin^m\theta\sin^n\theta$; (r) $x\sin x+\cos x$,

(s) $\sin^p\left(\dfrac{2\pi}{a}(x+a)\right)^q$; (t) $(\tan\sqrt{1-\theta})-\sqrt{1-\theta}$;

(u) $\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$; (v) $\sqrt{\dfrac{\sec x+\tan x}{\sec x-\tan x}}$;

(w) $\dfrac{\cos\phi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\phi)}}$, (x) $u\sin\dfrac{1}{u}$,

(y) $u^2\sin\dfrac{1}{u}$。

19. 試自下列關係求$\dfrac{dy}{dx}$.

(a) $x\cos y=\sin(x+y)$; (b) $\tan x-\cot y=\sin x\sin y$;

(c) $\sin x+\sin y=1$; (d) $x=y\sin y$;

(e) $\tan x+\tan y=2\tan x\tan y$。

20. 設 $x=a(\cos t+t\sin t)$; $y=a(\sin t-t\cos t)$求$\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$及$\dfrac{dy}{dx}$。

21. 若 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, x,y,r,θ 各爲 t 之函數,試示:

$$D_tx=x'_t=r'\cos\theta-r\theta'\sin\theta,$$

$$D_ty=y'_t=r'\sin\theta+r\theta'\cos\theta,$$

$$xy'_t-yx'_t=r^2\theta';\ \text{此中}\ r'=D_tr,\ \theta'=D_t\theta。$$

22. 問 $y=\tan x$, $y=\sec x$, $y=\cot x$ 及 $y=\csc x$ 各曲線之斜度為 1 之點何在? 又問斜度變更率為極值之點何在?

23. 求自 $x=0$ 至 $x=\pi$ 內之面積:

(a) $y=3\sin x$ 與 $y=\sin 3x$;　　(b) $y=\cos 2x$ 與 $y=4\cos x$。

24. 證 $\int_0^\pi \sin^2 x\,dx=\int_0^\pi \cos^2 x\,dx$ 並計其值。

25. 求下列各曲線之極大與極小:

(a) $y=(1+\cos x)\sin x$;　　(b) $y=\cos x+\sin x$,

(c) $y=\sin 2x-x$,　　(d) $y=\sin^3 x\cos x$,

(e) $y=x\cos x$,　　(f) $y=\sin x+\cos 2x$;

(g) $y=2\tan x-\tan^2 x$;　　(h) $y=\dfrac{x}{1+x\tan x}$,

(i) $y=\dfrac{\sin x}{1+\tan x}$。

26. 求下列函數之反轉點及通過該點之法線與切線方程:

(a) $y=\sin x+\dfrac{x}{2}$;　　(b) $y=x-2\cos x$;

(c) $y=\tan\dfrac{x}{a}$;　　(d) $y=A\sin bx$。

27. 設有扇形其周線之長為 12 寸。若扇形面積為最大,問其半徑為何?

28. 設有一重箱置在粗糙地面上,今以繩曳之。若繩中張力最小,問繩與地面所作之角為何(摩擦係數 $=\mu$)?

29. 有一正圓錐,頂角為 2θ,內接於半徑為 a 之圓球,試求 θ 之值以

使錐之體積為最大。又問若錐之曲面面積係最大，則 θ 應為何？

30．已知一四邊形四邊之長，試證當四邊形之面積為最大時，其對角係互補的(supplementary)。

31．有沿直線運動之物體，其行程 $x=A\cos kt+B\sin kt$，A，B，與 k 均為常數，試證其加速度與 x 之絕對值成正比，而其方向則與 x 相反。又證其加速度最大時，其速度則為 0。

32．有一燈塔位於距海岸線半里之處，由塔中所射出之光束每分鐘旋轉一週，問當燈光射至距海岸線之最近點 $\frac{1}{4}$ 里處，其沿岸移動之速度若干？

33．甲船北駛，每小時航 10 里，乙船東駛，每小時航 12 里。正午，甲在乙之正南 80 里，問午後二時乙對甲之航行方向轉變率每小時為若干弧度？

34．一觀象台之屋頂為直徑等於 50 英尺之半圓球。台外有一小球，高度與台頂相同，為水平方向之陽光所照而射其影於台。問當球開始降落及降落一秒後，其影之速度各為何？

35．設 ACB 表一半圓圍牆，AB 直徑為 100 尺。今有人 M 以每秒 4 尺之速度沿通過中心而垂直於 AB 之半徑 CD 行走。若 A 點有一光源將 M 之影射於 CB 牆上，問當 M 行至半途時，其影之速度為何？

36．有人 M 在火車內觀察距軌道為 a 之物 B。試示當 BM 方向與軌道垂直之時，此人視線方向之改變與車之速度成正比，而與 B 距軌道之遠度 a 成反比。

37. 令 AB 表連接一引擎之活塞及其彎柄之桿，O 表彎柄 OB 轉動之中心，OA 直線之延長部分，則爲活塞往返之路線。若桿 A 端沿 OA 運動之速度爲 u，而 B 端繞 O 轉動之切線速度爲 v，試示：$u=v(\sin\theta+\cos\theta\tan\phi)$，此中 θ 表 AOB 角，ϕ 則爲 BAO 角。

38. 有甲乙兩城位於直線河岸之同邊。茲欲建一自來水廠以供水於兩城，試示最短之水管所取之路線應滿足光學中反射光線所遵循之定律。

39. 控制船轉動之舵，其效用之大小，可以 $R\cos\theta\sin^2\theta$ 表之，θ 爲舵之方向與船身駛行方向所成之角，R 爲常數，問效用最佳之角爲何？

40. 一舉重螺旋，齒距爲 θ，摩擦角爲 ϕ，其效率可以

$$E=\frac{\tan\theta}{p+\tan(\theta+\phi)}$$

表之，此中 ϕ 及 p 均爲常數。求效率最大之齒距。

41. 茲以繩拉位在斜面上之物，斜面與水平面所作之角爲 α，其與物間之摩擦係數則爲 μ，求最省力之方向。

42. 有銅像 AB 高 10 尺，像座 BC 則高 15 尺，茲有高 5 尺之人觀察此像，而欲銅像 AB 在其眼中 E（離地 5 尺）所張之角 AEB 爲最大，問此人距像座之距離若干？

43. 小巷與寬 12.8 尺之大街正交。今欲將一長 25 尺之橫樑自街中水平的移轉而入巷內，問巷之寬度最小若干？

44. 一水槽之截面爲一圓弧之一部，弧長有固定值，設欲得容水量最大之槽，問圓弧之半徑應爲何？

45. 摺長方形紙之一端，使其一角 A' 與其對面之邊上一點 A 符合，而得摺痕之直線 BC。若 ABC 三角形係最小（紙寬爲 8 寸），問其值爲何？又若摺痕 BC 之長爲最小，則其值爲何？

46. 有兩點 A 與 B，位在 Y 軸上，離原點各爲 3 及 4 寸。在 X 軸上 P 點所張之角 APB 最大，問 P 距原點若干？

47. A 爲偷渡的船，沿 AD 方向以每小時 a 里之速度航行。B 爲巡查船速度每小時 b 里。AB 距離爲 c 里。今若 B 之航向與 AB 作適當之角度 θ，則當其到達 AD 航線時，B 與 A 之距離爲最小，而於此時 B 可以砲火轟 A。試證此最小距離爲 $\frac{c}{b}\sqrt{a^2-b^2}$。又問若 $b=a$，何以此題不合理？若 $b>a$，此題應如何解答？($AD\perp AB$)。

48. L 代表牆旁小光源，A 代表地面上被照之小面積。自光學原理知 A 被照亮之程度（名爲照度）E 係與 AL 及面積法線 AN 間角 ϕ 之餘弦成正比而與 AL 遠度 r 之平方成反比，卽 $E=k\frac{\cos\phi}{r^2}$，k 爲比例係數。設 A 離牆 a 尺問 L 離地應爲若干方可使 A 之照度 E 爲最大？

49. 電線桿高 25 尺，以鋼線 CD 支撑之，鋼線長 20 尺，問鋼線應結於何點，其效果方最大？（CD 的效果是 CD 中的張力對於桿底的力矩 moment of force；張力的價值係固定的）。若桿長僅 10 尺，則答案如何？

50. 設有一圓 c，玆在其周上取一點 P 爲另一圓 c' 之中心，試證 c' 圓在 c 圓內之弧 AB 爲最大時，APB 角 θ 滿足下列關係：

$$\cot\frac{\theta}{2}=\frac{\theta}{2}$$

51. 試計:

(a) $\sin\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$; (b) $\cos(\tan^{-1}4)$;

(c) $\tan\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; (d) $\sec\left(\tan^{-1}\frac{1}{4}\right)$;

(e) $\csc\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; (f) $\cot(\csc^{-1}2)$;

(g) $\tan(\tan^{-1}3+\tan^{-1}4)$; (h) $\sin\left(\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}+\tan^{-1}\sqrt{3}\right)$;

(i) $\cos(\sec^{-1}5+\cot^{-1}3)$; (j) $\cot\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$。

52. 微分以下諸式:

(a) $\sin^{-1}\frac{x}{a}$; (b) $\tan^{-1}\frac{x}{a}$;

(c) $\sin^{-1}(n\sin x)$ (d) $\sin^{-1}(2-3x)$;

(e) $\cos^{-1}\frac{1}{x}$, (f) $\tan^{-1}(\tan x)$;

(g) $\cos^{-1}\sqrt{x}$; (h) $\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$;

(i) $\tan^{-1}\frac{x+a}{1-ax}$; (j) $\tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$;

(k) $\tan^{-1}\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^{\frac{1}{2}}$; (l) $x+\tan^{-1}x$;

(m) $\tan^{-1}\left(2\tan\frac{x}{2}\right)$; (n) $\sin^{-1}(4\tan\theta)$。

53. 試以微分法示下列公式無誤:

(a) $\int\sqrt{a^2-u^2}\,du=\frac{u\sqrt{a^2-u^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a}+C;$

(b) $\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du=\frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^4}{8}\sin^{-1}\frac{u}{a}+C;$

(c) $\int\frac{u^2du}{\sqrt{a^2-u^2}}=-\frac{u\sqrt{a^2-u^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a}+C;$

(d) $\int(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}du=\frac{u}{8}(5a^2-2u^2)\sqrt{a^2-u^2}+\frac{3a^4}{8}\sin^{-1}\frac{u}{a}+C;$

(e) $\int\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}du=\sqrt{u^2-a^2}-a\sec^{-1}\frac{u}{a}+C;$

(f) $\int\sqrt{\frac{pu+q}{au+b}}du=\frac{1}{a}\sqrt{(au+b)(pu+q)}$

$$-\frac{bp-aq}{a\sqrt{-ap}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{-ap(au+b)}}{a\sqrt{pu+q}}, \text{若 } ap<0$$

54. 若 $\tan^{-1}\frac{2H}{x}=\sec^{-1}\frac{\sqrt{4H(2H-h)}}{x}$，問 x 爲何？[H 與 h 爲已知常數]。

55. 鐘表擺輪之角加速度 α 與其所轉動之角 θ 成正比，α 之方向則與 θ 相反。若輪來回振擺一次所需之時間爲一秒，問當擺角爲一弧度時，輪之角加速度爲何？令當 $t=0$ 時，轉角爲 0，而角速度則爲每秒 π^2 弧度，試逐步推求轉角與時間之關係，並計出最大之轉角。

56. 有曲線通過原點而與 X 軸正交，其在任何點之二級紀數則爲 $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{y^2}$，試求其方程。

第九章　指數函數及對數函數

9-1．乘除與加減　兩數相乘或相除，其手續恆較兩數相加或相減爲繁長，故如能將乘除所需之計算，改用加減行之，則便利殊甚。自對數(logarithm)原理發見之後方有此項便利。與對數函數相反者，名爲指數(exponential)函數，其在數學中之地位，極爲重要，此乃因甚多之實用問題，其應變數與自變數間之關係，常可以指數函數表之也。茲先述指數函數之基本算法。

9-2．指數定律　令a爲任意數(有理或無理)。若m爲一正整數，a自乘m次之記號常寫爲a^m。此中，a名爲底數(base)，m則名爲指數(exponent)。依此定義，若m及n均爲正整數，則$a^{m+n}=a$自乘$(m+n)$次$=$(a自乘m次)乘以(a自乘n次)，即

$$a^{m+n}=a^m a^n \tag{1}$$

此乃指數函數之基本算式，其中之m與n實可擴充以爲任何數而不限於正整數。惟如是擴充之後，指數非正整數時，其意義若何須另行考究。設n爲負整數，茲令之爲$-p$，p爲正整數，且$p<m$，則

$$a^m a^n=a^m a^{-p}=a^{m-p}$$

或
$$a^{-p}=\frac{a^{m-p}}{a^m}=\frac{a\text{ 自乘}(m-p)\text{次}}{a\text{ 自乘 }m\text{ 次}}=\frac{1}{a\text{ 自乘 }p\text{ 次}}$$

即
$$a^{-p}=\frac{1}{a^p} \tag{2}$$

是爲擴充方程(1)於負整數之指數時所得之意義。若將(2)之左右各乘以 a^p 則得

$$a^p a^{-p}=1$$

但此方程之左方按基本定律(1)實等於 $a^{p-p}=a^0$，故知

$$a^0=1 \tag{3}$$

換言之，無論底 a 爲何，若指數爲 0，則 a^0 恆等於1。指數爲正或負整數與 0 之意旣明，可進而討論指數爲分數之意義。設 p 及 q 均爲整數，$q\neq0$，令 $m=\frac{p}{q}$，$u=a^m=a^{\frac{p}{q}}$。照定義(1)乃有 $u^q=(u$ 自乘 q 次$)=\left(a^{\frac{p}{q}}\right)$ 自乘 q 次 $=a^{\left(\frac{p}{q}+\frac{p}{q}\cdots\cdots\text{共 } q \text{ 次}\right)}=a^p$ 此卽(2-10)節所用之關係。設 $p=1$，則

$$u=a^{\frac{1}{q}} \quad \text{與} \quad u^q=a$$

乃同意義的方程。故 $u=a^{\frac{1}{q}}$ 之值係等於一數其自乘 q 次之值係與 a 相等；換言之，$a^{\frac{1}{q}}$ 所代表者乃 a 之 q 次方根(qth root)或 $a^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{a}$。按一數之 q 次方根，若將複數包括在內，當有 q 個不同之值，但如無特別聲明，本書將僅用其主值（卽其實數值，如實數值有二，數值相同，符號相反，則取其正值爲主值）。

指數爲任何有理數之意義，已如上述；解釋指數爲無理數之較易且較便於實用之方法，係代無理數以其最近似之有理數。此事在實用數學家眼中，固不至認爲不當，然確非嚴格之道，惟嚴格的論述，理論較艱繁，玆故不談。

由上述觀之，指數函數所遵循之定律，除方程(1)外，尙可補充之如

下(a 及 b 代表底數，m 及 n 代表指數)；

$$\begin{aligned}\frac{a^m}{a^n}&=a^{m-n} \quad 若 \quad m>n \\ &=\frac{1}{a^{n-m}} \quad 若 \quad n>m\end{aligned} \tag{4}$$

$$(a^m)^n=a^{mn} \tag{5}$$

$$a^m b^m=(ab)^m \tag{6}$$

9-3. 指數函數之圖線 若 a 爲一正值常數，$y=a^x$ 顯爲 x 之函數，其名則爲指數函數 (exponential function)。設令 $a>1$，而在方格紙上繪畫此函數

$$y=a^x \tag{7}$$

之圖線，則得左端以 $y=0$ 直線爲漸近線(asymptote)，右端陡起，彎曲方向全爲向上，而通過 $x=0$, $y=1$ 之點之曲線。今若以不同之值（但均大於 1 ）作底數，則可得一族通過(0,1)點之曲線，如圖 (9-1) 中之各曲線。此族曲線均通過(0,1)一點之故，乃因無論 a 爲何值，a^0 均等於 1。自此等曲線觀之，指數函數顯爲連續的*。此外，在族中之公共點 $x=0$, $y=1$ 處，各曲線之斜度隨所用之底數 a 之值而定。此與(8-6)節 $\sin x$ 各圖線通過原點之斜度，視所用之角之單位而變其值之理頗

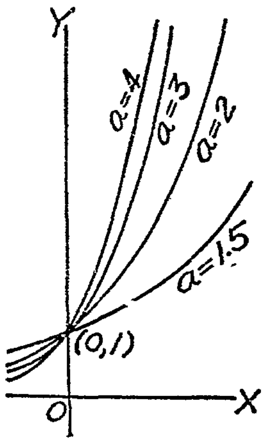


圖 9-1

* 讀者應注意此論斷實需嚴格的證明。

相似。在此族中，最堪注意者乃過(0,1)點斜度爲 1 之曲線。表此曲線之指數函數，其底數之値係在 $a=2$ 及 $a=3$ 之間，不難繪圖以示之。

9-4. 底數 e 之定義　在實用算術中，所用之底數均爲 10，此乃因 10 之整數指數各値，如 $10^{-1}, 10^{-3}$ 等，一見即知。至於理論數學中所用之指數函數，其底數則用一特別之値。此與計算尋常三角問題時，常以度爲角之單位，而在理論問題中則均用弧度之理頗相似(參觀 8-6 節)。此特別之底數，其値爲 2.718……，常以 e 表之。若以 e 爲底數，則 $y=e^x$ 函數通過 $x=0$, $y=1$ 點之斜度適等於 1。因通過 $x=0$, $y=1$ 點之斜度，即爲切於此點之切線 PT (圖9-2)之斜度，而切線 PT 之斜度復可視作割線 PQ (或 $Q'P$)之斜度之極限(Q 或 $Q'\to P$)，故 e 之定義亦可以下列極限表之。令 Q 之坐標爲 x 及 $y=e^x$，P 之坐標既爲 $x=0$ 及 $y=1$，故 PQ 之斜度爲

$$\frac{e^x-1}{x-0}=\frac{e^x-1}{x}。$$

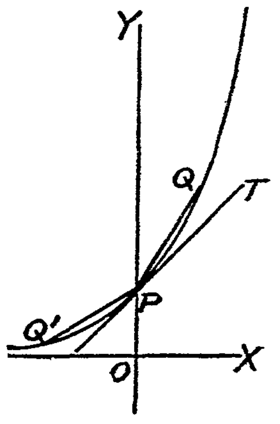


圖 9-2

令 $Q\to P$ 則 $x\to 0$，故若 e 之定義係使通過 $P=(0,1)$ 點之斜度爲 1，則必有

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=1 \tag{8}$$

一關係。目前吾人雖尚無法利用此隱關係以計算 e 之數值，然其意義之重要，實與(8-7)節引用弧度爲角之單位以推得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

之極限一理相似。

9-5. e^x 之微積分 既知 e 之定義滿足方程 (8) 所示之極限，e^x 之紀數不難計得，因計算時所遇最難於應付之極限已由定義確定其值爲 1 也。茲逐步演之如下：

令 $$y=e^x,$$

則 $$y+\Delta y=e^{x+\Delta x},$$

$$\Delta y=e^{x+\Delta x}-e^x=e^x(e^{\Delta x}-1),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=e^x\frac{(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}。$$

故 $$\frac{d}{dx}e^x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}e^x\frac{(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$$

$$=e^x\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right)。$$

但右方極限之値，依照方程(8)之定義，係等於 1，故

$$\frac{d}{dx}e^x=e^x$$

或 $$de^x=e^x dx \tag{9}$$

此結果極重要且極富趣味。因以 e 爲底數時，指數函數 e^x 之紀數卽等於 e^x 本身也；反之，e^x 對 x 之積分，除積分常數外，亦爲 e^x 本身，卽

$$\int e^x\,dx=e^x+C \tag{10}$$

例 1. $d(e^{-x^2})=e^{-x^2}d(-x^2)=-2xe^{-x^2}dx$

例 2. $d(xe^{-x})=xd(e^{-x})+e^{-x}dx=-xe^{-x}dx+e^{-x}dx$

$$=e^{-x}(1-x)\,dx。$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(xe^{-x})=\frac{d}{dx}\Big(e^{-x}(1-x)\Big)$$

$$=(1-x)\frac{d}{dx}(e^{-x})+e^{-x}\frac{d}{dx}(1-x)$$

$$=-(1-x)e^{-x}-e^{-x}=-(2-x)e^{-x}。$$

例 3.　$\int e^{ax}dx=\int\frac{1}{a}e^{ax}d(ax)=\frac{1}{a}e^{ax}+C。$

例 4.　試示 $y=A(1+x)e^{2x}$ 可以滿足下列方程：

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=0。$$

$$\frac{dy}{dx}=Ae^{2x}\frac{d}{dx}(1+x)+A(1+x)\frac{d}{dx}e^{2x}=A\Big(e^{2x}+2(1+x)e^{2x}\Big)$$

$$=Ae^{2x}(3+2x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=Ae^{2x}\frac{d}{dx}(3+2x)+A(3+2x)\frac{d}{dx}e^{2x}$$

$$=Ae^{2x}[2+2(3+2x)]=Ae^{2x}[8+4x]$$

故
$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=Ae^{2x}[8+4x-12-8x+4+4x]$$

$$=Ae^{2x}[0]=0\qquad\text{Q.E.D.}$$

例 5.　試求自 $x=0$ 至 $x=x$ 間 e^{-x} 曲線下之面積。

$$\int_0^x e^{-x}dx=-e^{-x}\Big]_0^x=-e^{-x}+e^0=1-e^{-x}。$$

9-6. 對數及其特性　仍令 a 爲大於 1 之數，且 $P=a^m$。討論指數函數時，底數 a 與指數 m 均係已知，所欲求者乃 P。今若已知底數 a 與 P 之值，而所欲求者爲 m，則爲便於措詞起見，常稱 m 爲以 a 爲底之

P之對數(logarithm of P to base a)，其記號係

$$m=\log_a P \tag{11}$$

換言之，方程(11)與 $P=a^m$ 實係同意義的。若只討論實數，顯然不能再有一數 $n\neq m$，其值亦爲 $\log_a P$，否則 a^m 與 a^n 將相等矣。又因無論 m 爲何值，P 均大於 0，故除 0 及負數外，所有正數均有對數。運用對數之最重要關係如下：

$$P=a^{\log_a P}, \quad m=\log_a a^m; \tag{12}$$

$$\log_a 1=0, \quad \log_a a=1; \tag{13}$$

$$\log_a(PQ)=\log_a P+\log_a Q, \tag{14}$$

$$\log_a \frac{P}{Q}=\log_a P-\log_a Q, \tag{15}$$

$$\log_a P^r=r\log_a P. \tag{16}$$

$$\log_a\sqrt[s]{P}=\frac{\log_a P}{s}. \tag{17}$$

上列各關係之證均甚簡，茲略述之如次。因 $P=a^m$ 與 $m=\log_a P$ 係同意義的方程，故消去 m 或 P 即可推出(12)。

因無論 a 爲何 $a^0=1, a^1=a$，故有(13)。

證其餘各關係時，令

$$P=a^m, \quad Q=a^n,$$

即
$$m=\log_a P, \quad n=\log_a Q,$$

故
$$\log_a(PQ)=m+n=\log_a P+\log_a Q,$$

是即方程(14)。同理可證得方程(15)。

又
$$P^r=(a^m)^r=a^{mr}$$

故
$$\log_a P^r = mr = r\log_a P,$$
是爲方程(16)。同法亦可證得方程(17)。

9-7. 底數改變後之對數　設已知以 a 爲底某數 P 之對數 m；今欲求同數 P 改用他底 b 之對數 n。此問題頗爲重要，因尋常所用之對數表，其底爲 10，今改用他數(例如 e)爲底數，如有一簡單關係可資變換時之用，則前表結果亦可藉以利用。令 a 及 b 爲兩個不相等(均大於 1)之底數，P 爲已知之數，m 及 n 分別表 P 以 a 及 b 爲底之對數，即
$$P = a^m = b^n,$$
如是
$$m = \log_a P,\quad n = \log_b P,$$
又因
$$b = a^{\frac{m}{n}},$$
故
$$\log_a b = \frac{m}{n} = \frac{\log_a P}{\log_b P}, \tag{18}$$
亦即
$$\log_b P = \frac{\log_a P}{\log_a b}。 \tag{19}$$

若在方程(18)中，令 $P=a$，則得
$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b},$$
或
$$\log_a b \log_b a = 1。 \tag{20}$$

茲名以 $e=2.718\cdots\cdots$ 爲底之對數爲自然對數(natural logarithm)而名以 10 爲底之對數爲尋常對數(common logarithm)。此二者間之關係按方程(19)係
$$\log_e P = \frac{\log_{10} P}{\log_{10} e} = \frac{1}{0.4343}\log_{10} P = 2.303\log_{10} P。 \tag{21}$$
茲爲便於印刷起見，以 $\log P$ 表以 10 爲底之 P 之對數，而以 $\ln P$ 表以

e 爲底之 P 之對數。至於底數爲他值時，則仍於 log 右下加以標號，如 $\log_a$，以示之。改用此等記號則

$$\ln P=2.303\log P \tag{22a}$$

或

$$\log P=0.4343\ln P \tag{22b}$$

例 1. 若已知 $\log 2=0.3010$，試求 $\ln\cos\frac{\pi}{4}$。

$$\ln\cos\frac{\pi}{4}=\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=-\ln\sqrt{2}=-\frac{1}{2}\ln 2$$

$$=-\frac{1}{2}\times 2.303\times 0.3010=-0.3466$$

例 2. 試用尋常對數表以計 $e^{0.5642}$

令 $P=e^{0.5642}$，而以 $m=\log P$，則

$$m=\log P=\log e^{0.5642}=0.5642\log e=0.5642\times 0.4343,$$

但

$$\log 0.5642=9.7514-10,$$

$$\log 0.4343=9.6378-10,$$

故

$$\log m=9.3892-10$$

自對數表查得 $m=0.2450=\log P$

再查對數表即可得 $P=1.758$。

9-8. 對數函數之圖線 指數函數 $y=a^x$ 與其同意義方程 $x=\log_a y$ 之圖線既係連續的，其反函數亦係連續的。欲得指數函數之反函數，即對數函數(logarithmic function)

$$y=\log_a x$$

之圖線，只須照圖(8-8)所示，將指數函數之圖線反射於斜度爲 45° 角

之斜線 OM 卽可(圖9-3)。無論所用之底數爲何，對數函數之圖線必通過($x=1, y=0$)點，此與 $y=a^x$ 必通過($x=0, y=1$)點之理同。若所用之底卽爲 e，則過此點之斜度適等於1。所用之底數愈大，則通過此點之斜度將愈小。

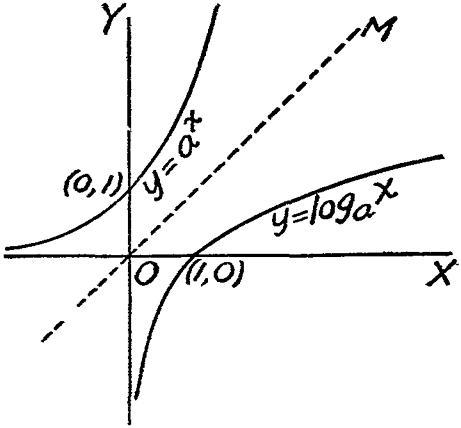


圖 9-3

9-9. $\ln x$ 之紀數與 $\frac{1}{x}$ 之積分 因 $y=\ln x$ 與 $x=e^y$ 係同意義的方程，故求 $y=\ln x$ 之紀數時，可利用(9-5)節結果而微分 $x=e^y$ 之兩邊。如是卽得

$$1=e^y\frac{dy}{dx},$$

故
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^y},$$

而
$$\frac{d\ln x}{dx}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}。\tag{23}$$

此方程所以如是簡單之理由，實因 e 之定義適使 $\ln x$ 曲線過 $x=1$, $y=0$ 點之斜度為 1；換言之，吾人所用 e 之定義適足以使當 $x=1$ 時 $\frac{d\ln x}{dx}=1$。自方程(23)言之，當 n 為 -1 時，x^n 對 x 之積分可以 x 之自然對數表之，即

$$\int\frac{dx}{x}=\ln x+C. \tag{24}$$

此公式乃以補充

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

一公式者，因當 $n=-1$ 時，後者實無意義。

例 1. 求 $d(x\ln x)$ 並由之以計 $\int\ln x\,dx$。

$d(x\ln x)=x\,d\ln x+\ln x\,dx=dx+\ln x\,dx=(1+\ln x)dx$；因此知 $d(x\ln x)=(1+\ln x)dx$,

或
$$x\ln x=\int dx+\int\ln x\,dx,$$

即
$$\int\ln x\,dx=x\ln x-x+C=x(\ln x-1)+C.$$

例 2. $\displaystyle\int_1^e\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^e=\ln e-\ln 1=1$。

例 3. $$\int\tan u\,du=\int\frac{\sin u}{\cos u}du=\int\frac{d(-\cos u)}{\cos u}$$

$$=-\int d\ln\cos u=-\ln\cos u+C.$$

令 $C=\ln k$，k 為另一積分常數，則此結果亦可寫為

$$\int\tan u\,du=\ln k-\ln\cos u=\ln\frac{k}{\cos u}=\ln(k\sec u).$$

例 4. $$\int\frac{du}{1-u^2}=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)du=\frac{1}{2}\int\frac{du}{1+u}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{1-u}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+u)}{1+u}+\frac{1}{2}\int\frac{-d(1-u)}{1-u}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(1+u)-\frac{1}{2}\ln(1-u)+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)+C=\ln\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}+C。$$

9-10. $\log_a x$ 與 a^x 之紀數 自實用方面言之，前此所用 e 之定義已甚簡便，但在嚴格的數學方面言之，仍屬美中不足，此乃因 e 之值果為何尚未有一顯明算式可以憑依，雖則方程(8)可以視為 e 之定義之隱方程。為推求計算 e 之明顯公式起見，茲應用基本原理以討論 $\log_a x$ 之紀數。若 $y=\log_a x$ 則

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right);$$ 由是乃得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}。$$

令 $\Delta x\to 0$，上列極限為

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\log_a x}{dx}=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}};$$

因對數函數係連續的，故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\log_a\left\{\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right\},$$

由是知 $$\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\lim_{h\to 0}\left(1+h\right)^{\frac{1}{h}}$$

一數極關重要，若暫名此數爲 e'（尙未與前此所定之 e 相聯繫），則上列結果將變爲

$$\frac{d\log_a x}{dx}=\frac{1}{x}\log_a e' \tag{25}$$

由方程(25)言之，過 $x=1$, $y=\log_a x=0$ 點之斜度實爲

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1}=\log_a e'。$$

惟若所用之底數 a 乃此節所定之 e'，卽令 $a=e'$ 等於

$$e'=\lim_{h\to 0}\left(1+h\right)^{\frac{1}{h}}。 \tag{26}$$

則 $\log_{e'} e'=1$，而在 $x=1$ 點之 $\log_a x$ 斜度將爲 1 矣。據此以言，乃知此節之 e' 與前節所定之 e 之意義完全符合，卽 $e'=e$，而計算 e 之顯公式(26)實與前此之隱公式(8)相同。此外，吾人尙須證顯公式(26)所示之極限，無論 h 趨 0 之法則爲何，均有其確定之值，且此價值準確至小數後第三位爲 $e=2.718$。欲證此極限之存在須用高等分析方法。至於欲求 e 之準確值，可暫認 $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ 得用二項定理 (binomial theorem) 發展之爲

$$(1+h)^{\frac{1}{h}}=1+\frac{1}{h}h+\frac{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{h}-1\right)}{1\cdot 2}h^2+\frac{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{h}-1\right)\left(\frac{1}{h}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}h^3+\cdots\cdots$$

或 $$e=\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots。$$

由此逐步按下表計算至小數後四位然後只留其第三位卽有 $e=2.718$。

$$
\begin{aligned}
& & 1.0000 \\
& & 1.0000 \\
1.0000\div 2 &= & 0.5000 \\
0.5000\div 3 &= & 0.1667 \\
0.1667\div 4 &= & 0.0417 \\
0.0417\div 5 &= & 0.0083 \\
0.0083\div 6 &= & 0.0014 \\
0.0014\div 7 &= & 0.0002 \\
e &= & 2.7183
\end{aligned}
$$

旣知 $\log_a x$ 之紀數爲方程(25)所示之值，卽

$$\frac{d\log_a x}{dx}=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a} \tag{27}$$

則 a^x 之紀數爲何，仍可照反函數原理推得之。其演法如下：

令 $y=a^x$ 或 $x=\log_a y$。微分兩邊，得 $dx=\dfrac{1}{y\ln a}dy$

故
$$\frac{da^x}{dx}=\frac{dy}{dx}=y\ln a=a^x\ln a \tag{28}$$

9-11. 複利法　甚多自然現象之進行，均用及 e 一數，例如微菌之繁殖，化學作用之速度，卽所謂質量作用律 (law of mass action)，放射質 (radioactive substance)之蛻化；容電器(electric condenser) 之漏電，吸收後光之強度等等。簡言之，凡某量在某一時刻之變化率與在同時該量多寡成正比者，其在各時之數量均可以 e 爲底之指數函數表之。依此以言，複利(compound interest)法亦屬此種計算之一。但尋常之複利法係間斷的，卽每隔一定時間方計算息金一次，然後再令此息金

加入本金中生利，故其結果與各例略有不同。若所用之複利法係連續的，則所得之結果爲何，可用下法推得之：

令 P 表原有本金，利率爲年利 r。若半年結算一次，在一年後，本利將爲 $P\left(1+\frac{r}{2}\right)\left(1+\frac{r}{2}\right)=P\left(1+\frac{r}{2}\right)^2$。仿此，若每年計算 n 次，則一年後本利將爲 $P\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$。若連續的計利，卽令 n 無限增多，則一年所得之本利將爲

$$A=\lim_{n\to\infty}P\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$$

求上述極限時，令 $h=\frac{r}{n}$，或 $n=\frac{r}{h}$。如是

$$A=\lim_{h\to 0}P\,(1+h)^{\frac{r}{h}}=\lim_{h\to 0}P\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right)^r=Pe^r。\qquad(29)$$

此値與不用複利計算而得之 $P(1+r)$ 相差之數可由 e^r 與 $(1+r)$ 相差之數見之。例如 r 爲 6.00%，則 $e^r=e^{0.06}=1.0618$ 而 $(1+r)$ 則僅爲 1.0600。

上述算法全係代數的。今若用微積分方法，此題之演算則應更改如下：

令 y 表在任何時刻之本利總值。P 表開始時之本金，r 表年利率，A 表一年後之本利總值，t 表時間。按複利意義，本金 y 之增加率係與 y 成正比，卽

$$\frac{dy}{dt}=ry,$$

故
$$dy=ry\,dt,$$

或
$$\frac{dy}{y}=r\,dt\,;$$

積分後得
$$\ln y=rt+C。$$

今題設開始時,(卽 $t=0$ 時),本金爲 $y=P$, 故積分常數 C 爲 $\ln P$,

而
$$\ln y=rt+\ln P,$$

或
$$\ln y-\ln P==rt,\quad \ln\frac{y}{P}=rt,$$

卽
$$y=P\,e^{rt}。$$

今所求者爲一年後(卽 $t=1$)之本利 A, 故以 $t=1$ 代入,可得
$$A=Pe^{r},$$

是卽方程(29)。讀者至此須特別注意用微分方法命題及演算之步驟,而把握其精神!

9-12. 對數微分法 遇多個函數相乘之時,欲求其紀數之最便捷方法,爲先求對數,然後再行微分。此法常名爲對數微分法(logarithmic differentiation)。茲舉數例以示之。

例 1. 微分 $y=uv\cdots\cdots w$。

因 $\ln y=\ln(uv\cdots\cdots w)=\ln u+\ln v+\cdots\cdots\ln w,$

故
$$\frac{dy}{y}=\frac{du}{u}+\frac{dv}{v}+\cdots\cdots+\frac{dw}{w};$$

或
$$dy=(uv\cdots\cdots w)\left(\frac{du}{u}+\frac{dv}{v}+\cdots\cdots+\frac{dw}{w}\right)。$$

是卽(2-7)節系(2)之結果,讀者可參閱前此算法。

例 2. 求 $y=\left(\frac{x(1-x^2)}{(1+x)^4}\right)^{\frac{1}{3}}$之紀數。

先求兩方對數乃有 $\ln y=\frac{1}{3}\Big(\ln x+\ln(1-x^2)-4\ln(1+x)\Big)$

故
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{2x}{1-x^2}-\frac{4}{1+x}\right)$$

$$=\frac{(1-x^2)-2x^2-4x(1-x)}{3x(1-x^2)}=\frac{1-4x+x^2}{3x(1-x^2)}。$$

或
$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{1-4x+x^2}{3x(1-x^2)}\right)\left(\frac{x(1-x^2)}{(1+x)^4}\right)^{\frac{1}{3}}。$$

例 3. 求 x^x 之紀數。

命 $y=x^x$, 則 $\ln y=\ln x^x=x\ln x$,

如是
$$\frac{dy}{y}=x\frac{dx}{x}+\ln x\,dx=(1+\ln x)dx,$$

$$\frac{dy}{dx}=y(1+\ln x)=x^x(1+\ln x)。$$

例 4. 若 n 爲任意實數（有理數或無理數），證

$$dx^n=nx^{n-1}\,dx$$

當 n 爲正,負及分數時,此公式之證明已見第二章。今茲所欲特別證實者係此公式亦可用於 n 爲無理數之時。前曾言及,任何無理數均可以一近似的有理數表之,故在實用方面,此題似無須再論。惟若欲嚴格的證此公式亦可用於 n 爲任何無理數時,必須用及對數函數,因對數爲無理數之意義可嚴格的解釋之也。本書對於對數爲無理數之意義雖未嘗用嚴格方法討論之，茲姑假設此義已明，而引用對數微分法以解本題。命 $y=x^n$。求對數則有

$$\ln y=\ln x^n=n\ln x,$$

故
$$\frac{dy}{y}=n\frac{dx}{x},$$

或
$$dy=n\frac{y}{x}dx=n\frac{x^n}{x}dx=nx^{n-1}dx。$$

9-13. 重要微分公式一覽表　初等函數之微分已詳於前數章，玆特彙集其較基本者如下：

普通公式

(I) $d(cu)=c\,du$；　(II) $d(u+v)=du+dv$；

(III) $d(uv)=u\,dv+v\,du$；　(IV) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}$。

特別公式

(1) $dc=0$　(2) $du^n=nu^{n-1}du$

(3) $d\sin u=\cos u\,du$　(4) $d\cos u=-\sin u\,du$

(5) $d\tan u=\sec^2 u\,du$　(6) $d\cot u=-\csc^2 u\,du$

(7) $d\sin^{-1}u=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$　(8) $d\cos^{-1}u=\frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$

(9) $d\tan^{-1}u=\frac{du}{1+u^2}$　(10) $d\cot^{-1}u=\frac{-du}{1+u^2}$

(11) $d\sec^{-1}u=\frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$　(12) $d\csc^{-1}u=\frac{-du}{u\sqrt{u^2-1}}$

(13) $d\,e^u=e^u\,du$　(14) $d\ln u=\frac{1}{u}du$

(15) $d\,a^u=a^u\ln a\,du$　(16) $d\log_a u=\frac{1}{u\ln a}du$

第　九　章　習　題

1．(a)已知 $\log_6 2=\dfrac{0.301}{0.778}$，求 $\log_6 3$；

(b)已知 $\log\pi=0.4971$，求 $\log(\pi^\pi)$；

(c)已知 $\log 3=0.477$，$\log 2=0.301$，求 $\log_3 9$，$\log_4 2$，$\log_4 9$ 及 $\log_2 3$；

(d)已知 $\log\dfrac{\pi}{3}=0.0200$ 及 $10^x=\dfrac{\pi}{3}$，求 x。

2．用尋常對數表求：

(a) $\log\log 20$；　(b) $(\log 5^2)(\log 5^{10})$；　(c) $(\log 5)^2$；

(d) $[\log(5^5)]^2$；　(e) $(8^{2.4})(7^{\frac{1}{3}})$；　(f)設 $9^{\log_a 7}=3$，求 a。

3．在方格紙上繪以下各曲線並求其在原點之斜度：

(a) $y=e^{-\frac{1}{x}}$，　(b) $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$；

(c) $y=Ae^{-hx^2}$；　(d) $y=xe^{-\frac{1}{x}}$。

4．求下列諸函數之微分：

(a) $e^x x^{\frac{1}{x}}$；　(b) $\sqrt{x}^{\sqrt{x}}$，

(c) x^{x^x}；　(d) e^{6x}；

(e) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x+x^{1+\frac{1}{x}}$；　(f) 10^{10x}；

(g) $(x+a)e^{\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}}$；　(h) $\tan^{-1}\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)$；

(i) $e^{x\cos a}\cos(x\sin a)$；　(j) $(x+a\sqrt{1-x^2})\,e^{a\sin^{-1}x}$；

(k) $(\sin x)^{\frac{1}{x}}$; (l) $(\sin\sqrt{x})^{\tan\sqrt{x}}$,

(m) $\sin^{-1}(e^{\tan^{-1}x})$; (n) $e^{-\frac{1}{x^2}}$。

5. 微分下列諸函數:

(a) $\ln\sin\frac{x}{a}$, (b) $\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,

(c) $\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; (d) $\ln\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}$;

(e) $10^{\sqrt{x}}\log x$; (f) $\ln\left\{e^x\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{\frac{3}{4}}\right\}$;

(g) $\ln\frac{3\tan x+1}{\tan x+3}$; (h) $\ln\ln\ln x$,

(i) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$; (j) $\ln(x\pm\sqrt{x^2-1})$。

6. 求下列函數之$\frac{dy}{dx}$·

(a) $x=y\ln xy$; (b) $y=x\ln\frac{y}{a+bx}$,

(c) $y=x^{y^x}$; (d) $ye^{ny}=ax^n$;

(e) $y=\log_v u$, 而 u 與 v 均爲 x 之函數;

(f) $y\left(e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}\right)=x\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}\right)$ (在 $x=0$ 點之左右紀數)。

7. 求下列諸積分:

(a) $\int\frac{3\,dx}{2-x-x^2}$; (b) $\int\cot x\,dx$; (c) $\int\frac{x\,dx}{a^2-x^2}$;

(d) $\int\frac{\sin x\,dx}{1-\cos x}$; (e) $\int\frac{dx}{x\log x}$。

8. 用對數微分法求以下之微分:

(a) $y=\frac{\sqrt{(x-1)(x-2)}}{\sqrt{(x-3)(x-4)}}$; (b) $y=x^2e^{2x}\cos x$。

9. 設過曲線 $y=\ln x^2$ 上 P 點,作一切線平行於 $x-2y+6=0$, 問 P 點之坐標爲何? 若此切線係與 $x+y-1=0$ 直線正交,則 P 爲何?

10. 試求下列諸函數之極大、極小及反轉點:

(a) $y=\log(1+x^2)$; (b) $y=\frac{x}{\log x}$,

(c) $y=ae^{-x}\sin x$, (d) $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$。

11. 微分以下公式之兩邊以示其無誤:

(a) $$\int\frac{dx}{a+bx^3}=\frac{k}{3a}\left\{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(k+x)^2}{k^2-kx+x^2}\right)+\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2x-k}{k\sqrt{3}}\right\}+C,\text{ 此中 } bk^3=a;$$

(b) $$\int\frac{x\,dx}{a+bx^3}=\frac{1}{3bk}\left\{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{k^2-kx+x^2}{(k+x)^2}\right)+\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2x-k}{k\sqrt{3}}\right\}+C,\text{ 此中 } bk^3=a;$$

(c) $$\int\frac{\sqrt{a^2\pm x^2}}{x}dx=\sqrt{a^2\pm x^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2\pm x^2}}{x}+C;$$

(d) $$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2\pm x^2}}=-\frac{1}{a}\ln\frac{a\pm\sqrt{a^2\pm x^2}}{x}+C;$$

(e) $\int x^2\sqrt{x^2+A}\,dx=\frac{x}{4}\sqrt{(x^2+A)^3}\mp\frac{A}{8}x\sqrt{x^2+A}$

$$-\frac{A^2}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+A})+C;$$

(f) $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+A}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+A}-\frac{A}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+A})+C;$

(g) $\int\frac{\sqrt{x^2+A}}{x^2}=-\frac{\sqrt{x^2+A}}{x}+\ln(x+\sqrt{x^2+A})+C;$

(h) $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2+A)^3}}=\frac{-x}{\sqrt{x^2+A}}+\ln(x+\sqrt{x^2+A})+C$。

12．繪一相當大的 $y=e^{-x^2}$ 之圖線，並用相當大的 x 值就此圖量出此曲線下之面積以示其值約爲$\sqrt{\pi}$。

13．求下列曲線與 X 軸及 $x=0$ 與 $x=1$ 兩縱線間之面積

(a) $y=\frac{x^2}{1+x^3}$，　　(b) $y=xe^{-x^2}$。

14．試求垂鏈曲線(catenary) $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$自 $x=-a$ 至 $x=a$ 與 X 軸間之面積。

15．若 $y=Ae^{-kt}\cos(nt+\phi)$，試示 $\frac{d^2y}{dt^2}+2k\frac{dy}{dt}+(n^2+k^2)y=0$。

16．擺子擺動時其擺角可以 $\theta=Ae^{-kt}\cos(nt+\phi)$ 表之，此中之 k 表摩擦阻力之影響，A,k,n 均爲常數。求 θ 爲極大時，t 之各值。

17．設海底電線傳達信號之速度爲 $x^2\ln\frac{1}{x}$，此中 x 表銅線半徑與線外所包絕緣體之厚之比數，試求信號傳達最快時之 x 值。

18．設測量 x,y,z 各值之可能誤差分別爲 1%，2% 及0.5%，求以下

U 及 V 之可能百分誤差:

$$U=x^{\frac{1}{2}}yz; \qquad V=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{yz}。$$

19. 簡單梁中部之彎下 y 與梁長 l, 梁深 d, 梁寬 b 之關係爲 $y=\frac{kl^2}{bd^2}$, k 爲一常數,其值視載重情形而定。若測量之時 l,b 及 d 各量之誤差分別爲 0.5%, 2% 及 1.5%, 求 y 之可能誤差。

20. 令 p 表海拔 x 尺之氣壓, y 表大氣密度。若高度降低一尺,壓力之變化率等於其密度乘以重力加速度 $-g$(負號表示高度減少時,壓力增加)。玆假定壓力 p 與密度 y 成正比,而在海面之壓力爲 p_0, 試求在高度爲 x 處之 p。

21. 將某種化合物加入糖中時,糖可變爲另一種之化合物,糖之變率與尙存糖量成正比,設 a 爲起始時所用之糖量,求在 t 時已變爲他物之糖量 x。

22. 當某種化學作用進行時, 一物之質量變爲他種化合物之速度與該時該物尙餘質量之平方成正比。若原有質量爲 M_0, 問經 t 秒後, 剩餘之質量爲何?

23. 多種生物之繁殖率可以 $\frac{dx}{dt}=kx(N-x)$ 表之, 此中 N 代表在某種環境下該物之最大可能數, k 爲常數。求任何時之 x。

24. 某曲線上任意點之斜度爲 $\frac{Ay+B}{Cx+D}$, 已知曲線通過 $x=x_0$, $y=y_0$ 點,求其方程。

25. 一物體沿直線運動,其在任意時刻 t 之速度與其位移 x 成正比。當 $t=t_0$ 時, $x=x_0$; 求 x 與 t 之關係。

26. 一線圈之自感係數(self inductance)爲 L, 其電阻(resistance)爲 R。今將之連於一電池，電勢爲E, 則按 Kirchhoff 定律 $L\frac{di}{dt}+Ri=E$。設當 $t=0$ 時,電流 $i=0$, 求任何時之 i。

27. 一容電器之容電量 (capacitance)爲 C, 其所容蓄之電量原爲 q_0。今任此器放電於一電阻 R。若電路中之電流爲 $i=\frac{dq}{dt}$,則器所蓄之電荷 q 與電流 i 之關係爲$\frac{q}{C}+Ri=0$。求任何時之 q 及 i。

28. 一克之鐳蛻化 10 年只餘 0.997克。問歷時幾年,所餘之鐳將不及半克?

29. 設 $f(x)$爲一可微分之函數。(a) 若$f(x)f(y)=f(x+y)$,試示$f(x)=0$ 或 $f(x)=e^{ax}$; 又 (b) 若 $f(xy)=f(x)+f(y)$, 試示 $f(x)=A\ln x$。

第十章　極坐標與參變方程

10-1. 坐標與變數之選擇　解答實際問題時，所用方程之繁簡與算法之難易，常視所選擇之變數與坐標是否適當而定。變數與坐標應如何選擇，固無一定不易且足以普遍應用之原則，但若初學者對於重要坐標與表顯變數關係之方法多加注意，則遇及實際問題時，自知所去取。玆先述極坐標（polar co-ordinates）然後再論如何引用一參考之變數以排列所謂參變方程者(parametric equations)。

10-2. 極坐標與直角坐標之關係　一平面上之點，例如P，其位置可以其距兩正交直線OY與OX之遠度x及y確定之，(圖10-1)。除x及y外，P之位置實亦可以其距OX與OY相交之原點O之遠度r及POX角θ確定之。x與y名爲P點之直角坐標，r與θ則名爲P之極坐標。在極坐標中，原點O又常名爲極，OX則名爲始線(initial line)，r名爲向徑(radius vector)，θ即名爲角。反之，若已知r與θ而欲求P點之位置，可由極O畫一"半直線"，使之與OX作角θ；如r爲正，則即在此"半直線"上尋得離O爲r之P點；如r爲負，則將此"半直線"自極O

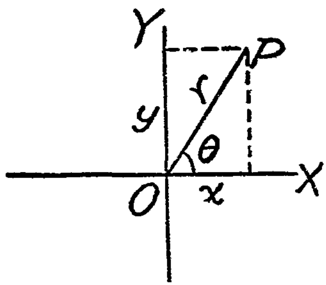


圖 10-1.

向後延長之，再於延長部分尋得離極爲 r 之點。由圖(10-1)觀之，不論 r 與 θ 爲何，吾人均必有

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta。\qquad(1)$$

故已知某點之 r 與 θ，其 x 與 y 卽可藉方程(1)以計之。反之，

$$r^2=x^2+y^2 \quad 或 \quad r=\sqrt{x^2+y^2}\,,$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x} \quad 或 \quad \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}。\qquad(2)$$

故如已知者爲一點之 x 與 y，則其 r 與 θ 亦可由方程(2)計得之。

讀者至此須注意當 θ 角之值自 0 增至 2π 弧度時，向徑將掃過其所在之平面一次，是以一點 P 之直角坐標 x 與 y 雖僅有一對確定之值，然其極坐標角 θ 則可有無限多之值，惟各值相差均爲 2π 之倍數而已。不寧如是，因 r 之值可正可負，故同一之點，其極坐標亦可以 (r,θ) 與 $(-r,\theta\pm\pi)$ 表之。因此，一點之極坐標乃有兩組之無限多之值，其一爲 (r,θ)，$(r,\theta\pm2\pi)$，$(r,\theta\pm4\pi)$，……$(r,\theta\pm2n\pi)$，其他則爲 $(-r,\theta\pm\pi)$，$(-r,\theta\pm3\pi)$，……，$\{-r,\theta\pm(2n+1)\pi\}$，此中之 n 爲任何正整數。此理旣明，乃知在極坐標圖中兩曲線雖有交點，而此交點之極坐標常不能同時滿足兩曲線之極方程 (equation in polar co-ordinates)。例如 $r=2a\cos\theta$ 及 $r=2a\sin\theta$，圖(10-2)甲及乙，分別表兩個圓之極方程。今若將兩圖線合繪如圖(10-2)丙，則驟視之，此兩圓顯然相交於 O 及 P 兩點。然此實有誤，蓋 P 點之極坐標爲 $r=\sqrt{2}a$ 及 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 皆能滿足兩圓之方程故可視爲眞實的交點，而 O 之坐標，在甲圖中其值爲 $r=0$ 及 $\theta=\frac{\pi}{2}$，但在乙圖中，其值則爲 $r=0$ 與 $\theta=0$，故不應視作交

點。此種似是而非之交點乃極方程所特有，讀者幸加以留意！

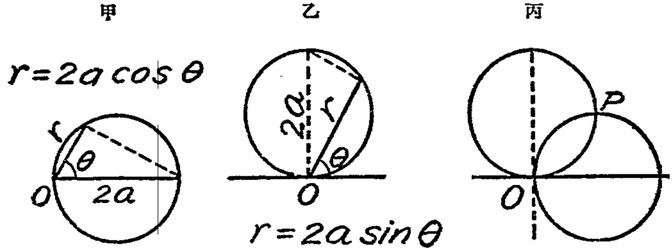


圖 10-2

例 設有一點 P，其移動之法則係使其距一定點 O 之遠度與其距一定直線 DD' 之遠度有固定之比率 m。試求此點 P 之軌跡。

按此乃圓錐曲線(conic sections)之定義。定點 O 名爲曲線之焦點(focus)；定直線 DD' 名爲曲線之準線(directrix)；比率 m 則名爲離心率(eccentricity)。若 $m<1$，軌跡爲橢圓(ellipse)；若 $m=1$，軌跡爲拋物線(parabola)；若 $m>1$，則軌跡爲雙曲線(hyperbola)。

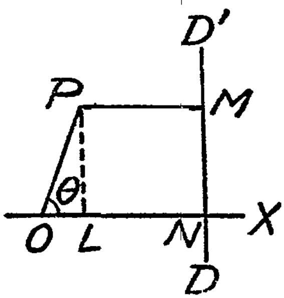


圖 10-3

茲以定點 O 爲極，通過 O 而垂直於 DD' 之直線爲初線 OX。若 O 至 DD' 之遠度爲 a，則自圖(10-3)知

$$\frac{OP}{PM}=\frac{r}{PM}=m,$$

但 $PM=ON-OL=ON-OP\cos\theta$

$$=a-r\cos\theta,$$

故所求之方程爲

$$r=m(a-r\cos\theta),$$

即
$$r=\frac{ma}{1+m\cos\theta}。$$

10-3．向徑與切線間之角　討論函數 $y=f(x)$之直角坐標圖線時，D_xy 之意義係表曲線之斜度，即切於曲線之直線與 OX 軸所作之角 τ 之正切。討論極坐標圖線時，此角 τ 之正切，其公式遠不如向徑 OP 與切線 PT 間夾角 ψ 之正切之簡單，故用極方程時，多以 ψ 角爲主，而於欲求 τ 時，則藉

$$\tan\tau=\tan(\theta+\psi)$$

一關係以定之，(圖 10-4)。

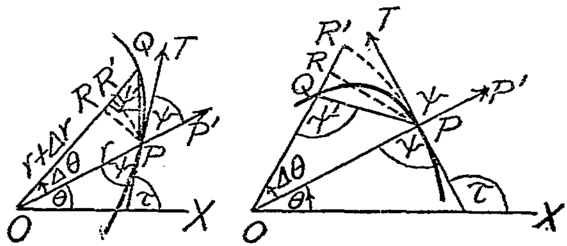


圖 10-4

令 $r=f(\theta)$在極坐標圖上表一曲線。當 θ 連續變更時，坐標爲(r,θ)之 P 點即將沿曲線移動。自 P 點作一"半切線"使其方向(以箭頭示之)與 P 移動之方向相同。令 ψ 表 OP' 向徑之延長部分 PP' 與 PT 所作之角，即 $\psi=\angle TPP'$。在曲線上取坐標爲 $(r+\Delta r,\theta+\Delta\theta)$ 之 Q 點，而作弦線 PQ。令 $\angle OQP=\psi'$。按照切線 PT 可視作弦線 PQ 之極限之原則，ψ' 之極限，即

$$\lim_{Q\to P}\psi'=\psi。$$

求ψ時，自P點畫一垂線PR於OQ，同時以$OP=r$爲半徑，O爲中心，作一弧與OQ相交於R'。如是，圖(10-4)

$$\tan\psi'=\tan\angle OQP=\frac{PR}{RQ},$$

故
$$\tan\psi=\lim_{Q\to P}\tan\psi'=\lim_{Q\to P}\frac{PR}{RQ};$$

但
$$PR=OP\sin\Delta\theta=r\sin\Delta\theta,$$
$$RQ=OQ-OR=r+\Delta r-OP\cos\Delta\theta$$
$$=r+\Delta r-r\cos\Delta\theta=r(1-\cos\Delta\theta)+\Delta r,$$

是以
$$\tan\psi=\lim_{Q\to P}\frac{PR}{RQ}=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{r\sin\Delta\theta}{\Delta r+r(1-\cos\Delta\theta)}$$

$$=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{r\dfrac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}}{\dfrac{\Delta r}{\Delta\theta}+\dfrac{r(1-\cos\Delta\theta)}{\Delta\theta}},$$

惟
$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}=1,$$

而
$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{(1-\cos\Delta\theta)}{\Delta\theta}=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{2\sin^2\left(\dfrac{\Delta\theta}{2}\right)}{\Delta\theta}$$

$$=\lim_{(\Delta\theta/2)\to 0}\sin\frac{\Delta\theta}{2}\left\{\frac{\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}}{\dfrac{\Delta\theta}{2}}\right\}=0,$$

故知
$$\tan\psi=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{r}{\dfrac{\Delta r}{\Delta\theta}}=\frac{r}{\dfrac{dr}{d\theta}}=\frac{rd\theta}{dr}。\qquad(4)$$

以上證明係假定當 θ 增大時，r 亦隨之增加如圖(10-4)甲，若 θ 增大後，r 反減少，如圖(10-4)乙。則 OQP 為鈍角，其正切為負。故

$$\tan\psi' = -\frac{PR}{RQ}$$

但此時圖(10-4)乙

$$RQ = OR - OQ = OP\cos\Delta\theta - (r+\Delta r) = -r(1-\cos\Delta\theta) - \Delta r,$$

是以
$$\tan\psi = \lim_{Q\to P}\left(-\frac{PR}{RQ}\right) = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{-r\Delta\theta\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}}{-r(1-\cos\Delta\theta)-\Delta r}$$

$$= \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{r}{\frac{\Delta r}{\Delta\theta}} = r\frac{d\theta}{dr}。$$

此即表示方程(4)永屬眞確。

例 1. 試討論圓錐曲線上切線與向徑所作之 ψ 角。

圓錐曲線之極方程為 $r=\frac{ma}{1+m\cos\theta}$（見前節之例）。故

$$dr = \frac{ma}{(1+m\cos\theta)^2}(m\sin\theta)\,d\theta,$$

$$\tan\psi = r\frac{d\theta}{dr} = \frac{ma}{(1+m\cos\theta)}\cdot\frac{(1+m\cos\theta)^2}{m^2 a\sin\theta} = \frac{1+m\cos\theta}{m\sin\theta}。$$

當 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 時（即在通徑之點），$\cos\theta=0$, $\sin\theta=1$,

$$\tan\psi = \frac{1}{m}。$$

在頂點，即 $\theta=0$, $\cos\theta=1$, $\sin\theta=0$, $\tan\psi=\infty$, 表示切線與 OX 垂直。

若 $m=1$，即曲線爲拋物線，則

$$\tan\psi=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\cot\frac{\theta}{2}$$

是即示　　$\psi+\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{2}$　或　$\psi=\frac{\pi-\theta}{2}$。

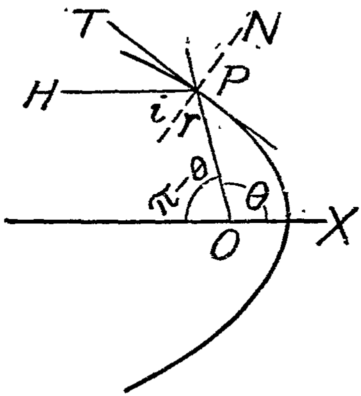


圖 10-5

惟 $\pi-\theta$ 爲向徑 OP' 與水平方向 HP（即與軸線 OX 平行之方向）所作之角，(圖10-5)，故知拋物線特性之一，即爲其上任何點之切線將此角等分。換言之，若以 HP 代表入射光線，則 PO 將爲反射光線，因入射角 i 與反射角 r 係相等。O 點所以命名爲焦點之故，即因與軸 OX 平行之光線，在拋物線面上反射後均焦聚於此點。

例 2. $r=Ae^{k\theta}$ 表一等角螺線。問 $\tan\psi$ 爲何？

$$\frac{dr}{d\theta}=kAe^{k\theta},$$

$$\tan\psi=r\frac{d\theta}{dr}=\frac{Ae^{k\theta}}{kAe^{k\theta}}=\frac{1}{k}。$$

10-4. 極坐標問題中之面積　令 $r=f(\theta)$ 表一曲線之極方程。今欲求在線內及兩向徑 OP_1 與 OP_2 間之面積，則可仿前此求面積之方法將此面積用多個向徑分之爲甚多之三角形部分。若 $d\theta$ 表此等小三角

形之一頂角，r 與 $r+dr$ 分表此小三角形兩邊向徑之長度如圖(10-6)，則當 $d\theta$ 爲甚小之時，三角形之小面積 dA 約爲

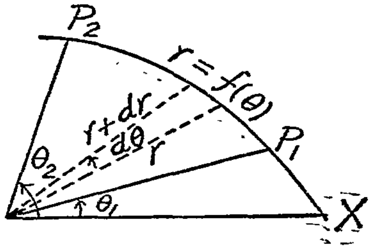


圖 10-6

$$dA=\frac{1}{2}\left(\frac{(r+dr)+r}{2}\right)^2 d\theta。$$

若 $d\theta$ 爲無窮小，dA 與 dr 俱爲無窮小，而於棄去較高級之無窮小後，乃得

$$dA=\frac{1}{2}r^2d\theta=\frac{1}{2}\Big(f(\theta)\Big)^2 d\theta。$$

若 $\angle P_1OX=\theta_1$，$\angle P_2OX=\theta_2$，則所求之面積按定積分原理將爲

$$A=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\Big(f(\theta)\Big)^2 d\theta。\tag{5}$$

例 1. 求在 $r=\theta$ 螺線內 $\theta=0$ 至 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 之面積。

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2\,d\theta=\frac{\theta^3}{6}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{48}=1.222\ \text{單位。}$$

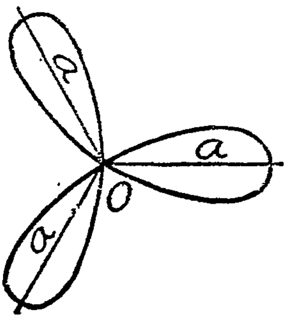


圖 10-7

例 2. 求在 $r=a\cos 3\theta$ 一葉內之面積。

$r=a\cos 3\theta$ 之圖線有三葉如圖(10-7)，各葉之面積相等。當 $\theta=0$ 時，$r=a$，而當 $3\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ 或 $\theta=\pm\frac{\pi}{6}$ 時，$r=0$。故第一葉之面積可視爲自 $\theta=-\frac{\pi}{6}$

始，經 $\theta=0$ 以至於 $\theta=+\frac{\pi}{6}$，其值乃爲

$$A=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} r^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} a^2\cos^2 3\theta\,d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 6\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\frac{a^2}{4}\left(\theta-\frac{\sin 6\theta}{6}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{a^2}{4}\left\{\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}=\frac{\pi a^2}{12}。$$

10-6．參變方程 當一點 P 沿一曲線移動時，不但此點之 (x,y) 或 (r,θ) 坐標隨時改變，其他與 P 點有關之數量亦常改變。有時利用一第三數量，例如 t，以確定 P 之坐標，更爲便利。如是則當 t 連續變化時，以 (x,y) 爲直角坐標，或 (r,θ) 爲極坐標，卽可得

$$\begin{cases}x=g(t)\\ y=f(t)\end{cases}\tag{6}$$

或

$$\begin{cases}r=G(t)\\ \theta=F(t)\end{cases}\tag{7}$$

以表所規定之曲線。此等方程中之第三變數（例如 t）名爲參變數或參數 (parameter)，而聯立方程 (6) 或 (7) 則名爲參變方程 (parametric equations)。玆舉數例如下：

例 1. 繪兩同心圓，半徑分別爲 a 及 b（圖 10-8）。今自中心畫一半徑 OR 與兩圓相交於 S 及 R。自 S 及 R 分別作直線 RPN 及 SP 與 OX 及 OY 平行，以相交於 P 點，試證 P 之軌跡爲一橢圓。

令 P 之橫縱坐標分別爲 x 及 y，而以 $\angle RON=t$ 爲參變數。由圖即得

$x=\overline{ON}=\overline{OR}\cos t=a\cos t,$

$y=\overline{NP}=\overline{MS}=\overline{OS}\sin t=b\sin t$。

自上列之參變方程消去 t 即得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

是即橢圓之直角坐標方程之正常形式矣。

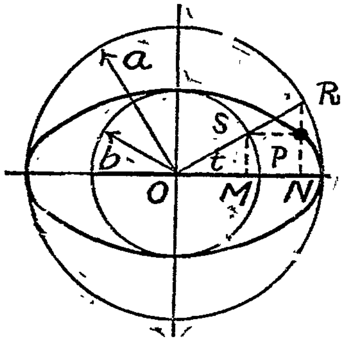


圖 10-8

自作圖之條件言之，當 t 自 0 連續變至 $t=\pi$ 時，整個橢圓即被描繪一次。但欲描繪他種曲線一次時，方程中之參變角 t (parametric angle) 未必均係自 0 連續變至 $t=2\pi$。

例 2． 有一圓輪正直的在平地上滾動。試求在輪周邊沿上一固定點之軌跡。

令輪之半徑爲 a，其中心爲 C，輪周之固定點爲 P，其與地面接觸之點爲 N。取 OX 及 OY 坐標軸線如圖 (10-9)。令 P 之坐標爲 x 及 y。

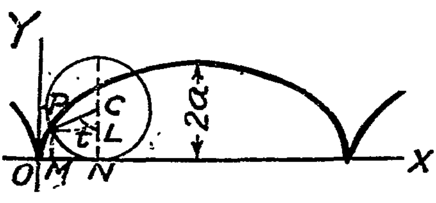


圖 10-9

自題意知 ON 距離等於 PN 弧長。若 $\angle PCN=t$，則

$$弧\ PN=at=\overline{ON}=\overline{OM}+\overline{MN}$$

但 $\overline{OM}=x, \overline{MN}=\overline{PL}=\overline{PC}\sin t=a\sin t$，是以

$$at=x+a\sin t \text{ 或 } x=a(t-\sin t) \tag{8a}$$

又 $$y=\overline{MP}=\overline{NL}=\overline{NC}-\overline{LC}=\overline{NC}-\overline{PC}\cos t$$

卽 $$y=a-a\cos t=a(1-\cos t) \tag{8b}$$

聯立方程(8)中之 t 不易消去以使 y 得爲 x 之顯函數，此乃本方程與橢圓方程不同之點！方程(8)所示之曲線常名爲擺線(cycloid)，其理由俟後申述。產生擺線之圓輪常名爲其母圓(generating circle)。齒輪上各齒之形狀多爲擺線或下例中漸伸線之一部分，是爲此兩種曲線在機動學上之應用。

例 3. 有繩繞於固定圓。今將其一端釘在圓上，向外伸引其自由之端使繩緊張，俾在任何時刻，繩均與圓相切。試求繩之自由端之軌跡。

令 C 表圓(圖10-10)，半徑爲 a。取中心 O 爲極，而以聯 O 於 P_0 (自由端與圓原始脗合之點)之 OP_0 直線爲始線。若 P 之極坐標爲(r,θ)，則自題所規定，知 NP_0 弧長等於$\overline{NP}$而 $\overline{NP}$ 與 $\overline{ON}$ 正交。令參變數 $t=\angle NOP_0$，如是自圖知 $\overline{ON}=\overline{OP}\cos(t-\theta)$，惟 $\overline{ON}=a, \overline{OP}=r$，故有

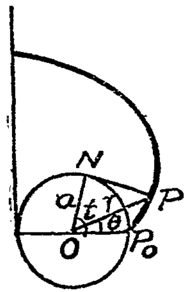


圖 10-10

$$a=r\cos(t-\theta) \tag{9a}$$

又因$\overline{NP}=NP_0$ 弧長$=\overline{OP}\sin(t-\theta)$，而 NP_0 弧長 $=at$，故

$$at=r\sin(t-\theta) \tag{9b}$$

方程(9)所隱示之曲線，其名爲圓上之漸伸線(involute)。若認 t 爲參數而欲將 r 及 θ 分別表爲 t 之顯函數，則可將(9b)除以(9a)而得

$$\tan(t-\theta)=t \quad 或 \quad \theta=t-\tan^{-1}t; \tag{10a}$$

又將兩方程平方相加卽得

$$r^2=a^2(1+t^2),$$

或

$$r=a\sqrt{(1+t^2)}。 \tag{10b}$$

方程(10)之形狀已能與方程(7)所示者符合，是爲圓上漸伸線之參變方程之極坐標式。

10-6．由參變方程所求得之紀數　若參變方程所表之曲線，其斜度有確定之值，則此斜度亦可以紀數表之爲

$$\tan\tau=\frac{dy}{dx}, \tag{11a}$$

或用極坐標之 ψ 角而表作

$$\tan\psi=r\frac{d\theta}{dr}。 \tag{11b}$$

計方程(11)所示之值時，可逕將 dy, dx, $d\theta$, dr 各微分表爲參數(例如 t)及其微分(例如 dt)之函數，而後按所示之除法演算，此蓋因若 t 爲參數，則

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad 與 \quad r\frac{d\theta}{dr}=r\frac{\frac{d\theta}{dt}}{\frac{dr}{dt}} \tag{12}$$

係恆等式也。

例 1. 求通過橢圓 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ 上 $t=\frac{\pi}{4}$ 點之切線與法線方程。

$$\frac{dx}{dt}=-a\sin t,\ \frac{dy}{dt}=b\cos t,$$

故
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b\cos t}{a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t。$$

當 $t=\frac{\pi}{4}$ 時, $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{b}{\sqrt{2}}$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}$, 故切線方程爲

$$\left(y-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{b}{a}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right),$$

即
$$bx+ay=\sqrt{2}\,ab,$$

而法線方程爲
$$\left(y-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)=+\frac{a}{b}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

或
$$\sqrt{2}\,(ax-by)=a^2-b^2$$

例 2. 證切於擺線上任意點之直線與過該點之法線分別穿過母圓(generating circle)之最高及最低兩點。

擺線方程爲 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$。

故
$$\tan\tau=\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t\,dt}{a(1-\cos t)\,dt}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

$$=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\cot\frac{t}{2}\text{ 或 }\tau+\frac{t}{2}=\frac{\pi}{2}。$$

由此乃知圖(10-9),過 P 點之切線係與弦線 PN 垂直,因 $\angle PNO=\frac{t}{2}$ 也。此即示切線 PT 通過母圓之最高點 T 而法線 PN 則通過母圓

最低點 N。

例 3. 求圓上漸伸線 $r=a\sqrt{1+t^2}$，$\theta=t-\tan^{-1}t$，之斜度爲 0 及∞各點。

$$\tan\psi=r\frac{d\theta}{dr}=\frac{a\sqrt{1+t^2}\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt}{a\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}dt}=\frac{1+t^2-1}{t}=t$$

因 $\tan(t-\theta)=t$，故知

$$\tan\psi=t=\tan(t-\theta)\text{ 或 }\psi=t-\theta\pm n\pi,\ n\text{ 表任何整數；}$$

又因 $\tan\tau=\tan(\theta+\psi)$，故有

$$\tan\tau=\tan(t\pm n\pi)。$$

在斜度爲 0 之點，$\tan\tau=0$，$t\pm n\pi=0$，即 $t=0,\ \pi,\ 2\pi,\cdots\cdots$；在斜度爲∞之點，$\tan\tau=\infty$，$t\pm n\pi=\frac{\pi}{2}$，即 $t=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\cdots\cdots$。自圖(10-10)言之，在斜度爲 0 之點，$N$ 位於 P_0 或 R，而在斜度爲∞之點，N 則位於 Q 或 S。

既知初級紀數 $\frac{dy}{dx}=F(t)$ 乃 t 之函數，欲求其二級或更高級之紀數，可應用(2-8)節原理或(5-5)節方程(6)而寫

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}F(t)=\frac{dt}{dx}\left\{\frac{d}{dt}F(t)\right\} \tag{13a}$$

仿此，設 $\frac{d^2y}{dx^2}=G(t)$；則 $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}G(t)=\frac{dG(t)}{dt}\ \frac{dt}{dx}$。餘可類推。至若所已知者爲 $\frac{dy}{dt}$ 及 $\frac{dx}{dt}$ 之值，則參照(2-6)節公式(D)即 $\left(\frac{u}{v}\right)$ 之紀數，與(5-7)節原理即可推得：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left\{\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right\}=\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)\right\}-\left(\frac{dy}{dt}\right)\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right)\right\}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{dx}{dt}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\right\}\frac{dt}{dx}-\left(\frac{dy}{dt}\right)\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)\right\}\frac{dt}{dx}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)-\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} \tag{13b}$$

較高級之紀數亦可仿此計之。若以公式(13a)與(13b)相較,則應用時前者似較便利!

例 試示擺線 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 之彎曲方向永爲向下。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t\,dt}{a(1-\cos t)\,dt}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)=\frac{dt}{dx}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{a(1-\cos t)}\left\{\frac{(1-\cos t)\cos t-\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}\right\}$$

$$=\frac{\cos t-1}{a(1-\cos t)^3}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}。$$

若用方程(13b),則因

$$\frac{dy}{dt}=a\sin t,\qquad \frac{dx}{dt}=a(1-\cos t),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=a\cos t,\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=a\sin t,$$

代入後仍可得上列結果。此結果旣示無論 t 爲何，$\frac{d^2y}{dt^2}$ 恆爲負，故擺線永係向下彎曲。

10-7. 面積　若表曲線之參變方程已知，則

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx,\ \int_{y_1}^{y_2} x\,dy \quad 及 \quad \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\,d\theta$$

各定積分仍如前所述分別表適當之面積。惟因 y 與 dx 或 x 與 dy，或 r 與 $d\theta$，均可表作參數 t 之函數，故此等定積分均可改爲如

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$$

之形式而計之。在此式中最須注意者乃上下限 t_1 及 t_2 之值，其計算法可以相關之 x,y 或 r,θ 值代入參變方程中而解出 t。

例　求橢圓 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ 內之面積。

所求面積顯爲　$A=4\int_0^a y\,dx$　或　$A=4\int_0^b x\,dy$。

用第一式，則因 $dx=-a\sin t\,dt$，且當 $x=a$, $t=0$, $x=0$, $t=\frac{\pi}{2}$ 故

$$A=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(b\sin t)(-a\sin t)\,dt=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=2ab\left\{t-\frac{1}{2}\sin 2t\right\}_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi ab。$$

若用第二式，結果亦同此，讀者可自證之！

第十章習題

1. 用極坐標作下列各曲線，並求其射角 ψ（向徑與切線所作之角）

及切角 τ（切線與始線所作之角）：

(a)圓 $r=a\sin\theta$;　(b)拋物線 $r=a\sec^2\dfrac{\theta}{2}$;

(c)Archimedes 螺線 $r=a\theta$;　(d)倒值螺線 $r=\dfrac{a}{\theta}$。

2. 繪下列各曲線並求 ψ 與 θ 應滿足之關係：

(a)三葉玫瑰：$r=a\cos 3\theta$;

(b)心形曲線：$r=a(1-\cos\theta)$;

(c)橫 8 字形：$r^2=a^2\cos 2\theta$;

(d)$r=\cos n\theta$;

(e)$r=c-a\cos\theta$，如 $c=2a$，或 $c=\dfrac{a}{2}$

3. 求下列各對曲線相交之角：

(a)$r=a\theta$, $r\theta=a$,

(b)$r\sin\theta=2a$, $r=a\sec^2\dfrac{\theta}{2}$;

(c)$r=\sin 2\theta$, $r=1+\cos 2\theta$;

(d)$r^2=16\sin 2\theta$, $r^2\sin 2\theta=4$。

4. 求下列各曲線內之面積：

(a)$r=a\sin 3\theta$;　(b)$r^2=4\sin 2\theta$;　(c)$r=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$;

(d)$r=\cos 3\theta-\cos\theta$;　(e)$r=a(\sin 2\theta+\cos 2\theta)$。

5. 求下列各曲線所包圍之面積：

(a)$r=\tan\theta$，與 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$;

(b) $r=e^{\frac{\theta}{2}}$，與 $\theta=\frac{\pi}{4}$，及 $\theta=\frac{\pi}{2}$，

(c) $r^3=\cos 2\theta$，與 $r^2=\sin 2\theta$；

(d) $r=\sqrt{2}\cos\theta$ 與 $r^2=\sqrt{3}\sin 2\theta$。

6. 問心形曲線與過曲尖(cusp)而垂直於其軸線之直線，其相交之角爲何?又問心形曲線上切線與其軸線平行或垂直之點何在?

7. 問橫 8 字形線 ($r^2=a^2\cos 2\theta$) 上切線與其軸線平行或垂直之點何在?

8. 若 $r=F(\theta)$ 表一曲線之極坐標方程，今欲求其切線與始線平行之點，則可認 θ 爲自變數而將 $y=r\sin\theta$ 與原方程分別微分以得

$$\frac{dy}{d\theta}=r\cos\theta+\sin\theta\cdot\frac{dr}{d\theta}=f(\theta)$$

爲 θ 之函數，然後再令 $\frac{dy}{d\theta}$ 爲 0 以求 θ，試示如是計算，其效果實與令 $\psi+\theta=n\pi$ 相同。

9. 試示過雙曲線 $r=\frac{m}{\sqrt{3}-\cos\theta}$ 通徑一端之切線與其橫軸線作 60 度角。

10. 試示過橢圓 $r=\frac{m}{\sqrt{3}-\cos\theta}$ 通徑一端之切線與其長軸作 30° 角。

11. 試求過下列各曲線上指定點之切線與法線方程：

(a) $x=3e^{-t}$，$y=2e^{t}$，於 $t=0$ 點；

(b) $x=\sin t$，$y=2\cos t$，於 $t=\frac{\pi}{4}$，

(c) $x=\ln(t+2)$，$y=t$，於 $t=2$ 點。

12．求前題各曲線之次切線與次法線之長（參閱第三章習題8所述之定義）。

13．求下列各曲線上切線取水平或垂直方向之點：

(a) $x=\dfrac{2t^2-1}{t^4}$, $y=\dfrac{1}{t}$;　　(b) $x=\cos^4 t$, $y=\sin^4 t$。

14．求下列各曲線之切線長，法線長，次切線長，及次法線長，（參閱第三章習題8所述之定義）：

(a) $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$;

(b) $x=4a\cos^3 t$, $y=4a\sin^3 t$;

(c) $x=a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$;

(d) $x=\dfrac{3t}{1+t^3}$, $y=\dfrac{3t^2}{1+t^3}$;

(e) $x=\dfrac{a}{t}\cos t$, $y=\dfrac{a}{t}\sin t$。

15．有半徑爲 b 之圓 B 在一半徑爲 a 之固定圓 A 外滾動。試證圓 B 上任意點 P 所描繪之曲線（名爲外擺線 epicycloid）可以下列參變方程表之：

$$x=(a+b)\cos\theta-b\cos\left(\frac{a+b}{b}\theta\right),$$

$$y=(a+b)\sin\theta-b\sin\left(\frac{a+b}{b}\theta\right);$$

此中之 θ 表連兩圓心之直線與始線所作之角。又求外擺線之 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。作外擺線之圖線於方格紙上。若 $a=b$，試示外擺線即爲心形曲線。

16. 若前題之圓 B 係在圓 A 內滾動，$b<a$，則所得者爲次擺線 (hypocycloid)。試求其方程，其 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$。試就 $a=2b$ 及 $a=4b$ 兩條件討論次擺線之形狀。令 $b=\frac{a}{3}$ 與令 $b=\frac{2a}{3}$ 所得之次擺線，完全相同，試證之。作此曲線於方格紙上。

17. 設 OA 表一圓輪上之一固定半徑，P 點位在此半徑之內，Q 點則位在此半徑之延長部分上。今令圓沿一直線 TT 滾動，則 P 點或 Q 點之軌跡名爲餘擺線(trochoid)。試求其參變方程。問餘擺線上斜度最大之點何在?

18. 若前題之直線 TT 係另一圓，而滾動之圓或在其外或在其內，所得之軌跡分名爲外餘擺線(epitrochoid)及次餘擺線(hypotrochoid)。試求此等曲線之參變方程，並繪其形狀於方格紙上。

19. 求下列各曲線內之面積:

(a) $x=a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$;

(b) $x=a\theta$, $y=a(1-\cos\theta)$;

(c) $x=a\cos^3\theta$, $y=a\sin^3\theta$。

20. 求下列各曲線一拱下之面積:

(a) $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$;

(b) $x=a\theta-b\sin\theta$, $y=a-b\sin\theta$。

21. 證一四尖之外擺線與其固定圓間之面積爲 $\frac{7\pi a}{8}$。

第十一章　曲線弧及曲率

11-1．又一重要極限　求微分時，其關鍵多繫於極限之計算，前已屢述之。欲計一曲線之弧長或曲線弧之微分，亦有一重要極限之値先須決定。此極限卽當弧長趨於 0 時，其値與其弦長之比趨於 1 是也。若令 A 及 B 表光滑曲線上之二點，則有

$$\lim_{B\to A}\frac{AB\text{ 弧}}{AB\text{ 弦}}=1。\tag{1}$$

證此關係之方法甚多。玆先自 A 及 B 分別繪切於弧之直線 AT 與 BT。復自 T 立一垂線於 AB 以交 AB 於 D 點。如是若在 AB 段落內，曲線未有來往的彎轉如圖(11-1)中虛線所示，則

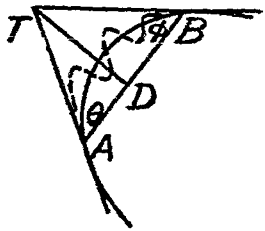


圖 11-1

$$AB\text{ 弦}<AB\text{ 弧}<(AT+TB),$$

或
$$1<\frac{AB\text{ 弧}}{AB\text{ 弦}}<\left(\frac{AT+TB}{AB}\right)。$$

惟
$$AT=AD\sec\theta,\quad TB=DB\sec\phi,$$

故
$$AT+TB=AD\sec\theta+DB\sec\phi$$
$$=AB\sec\theta+DB(\sec\phi-\sec\theta),$$

而
$$\frac{AT+TB}{AB}=\sec\theta+\frac{DB}{AB}(\sec\phi-\sec\theta)。$$

當 $B\to A$ 時，θ 及 ϕ 均趨於 0，$\sec\theta$ 與 $\sec\phi$ 均趨於 1，且

$$\lim(DB/AB)=k\leqq 1,$$

而
$$\lim_{B\to A}\frac{AT+TB}{AB}=1+k(1-1)=1,$$

是以當 $B\to A$ 時，$\lim\limits_{B\to A}\dfrac{AB\text{弧}}{AB\text{弦}}$之值係在 1 與以 1 爲極限兩數之間，而其値遂亦爲 1。讀者可注意若已知方程(1)之極限 1，則 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 一事亦可由是推演而得之。

11-2．弧之微分與弧長　欲求曲線上某段落內之弧長，應先知弧之微分之算式，此蓋因某段內弧之長 s 可視作無限多個之微分的弧長 ds 之和，故在適當上下限內求微分弧之積分卽可算出所欲得之答案。但因甚多之被積函數雖甚簡單，其積分仍有不能用前此所已討論之初等函數(如代數、三角、對數或指數函數等)表示之者，故此等問題之解答，有時反用以爲某高等函數之定義，例如橢圓函數(參閱本節例 4)。茲在曲線上取一定點，並規定向一方繪畫之弧爲正，他方爲負。如是，則曲線上任意點 P 之位置可由 AP 弧長 s 確定之，s 之正負視由 A 至 P 之方向與規定之正向同否而定。由是言之，若以 s 爲參數，則所討論之曲線，其參變方程可用

$$\begin{cases}x=g(s)\\ y=f(s)\end{cases}\tag{2}$$

或

$$\begin{cases}r=G(s)\\ \theta=F(s)\end{cases}\tag{3}$$

表示之。茲先討論用直角坐標時，弧之微分之公式。

令方程(2)所代表之曲線如圖(11-2)所示。於坐標爲(x,y)之 P 點作一“半切線” PT，使其方向與弧之正向相同。令 τ 表 OX 至 PT 之

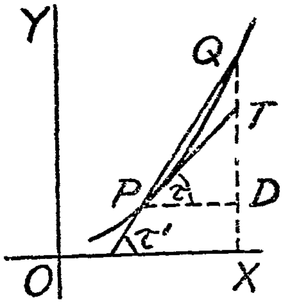


圖 11-2

角。今與 s 以一增量 Δs，則 P 將移至坐標爲 $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 之 Q 點。又令 PQ 弦與 OX 所作之角爲 τ'，則自圖(11-2)知(PQ 弧長 $=\Delta s$)，

$$\cos\tau'=\frac{PD}{PQ}=\frac{\Delta x}{PQ}=\frac{\Delta s}{PQ}\,\frac{\Delta x}{\Delta s},$$

$$\sin\tau'=\frac{DQ}{PQ}=\frac{\Delta y}{PQ}=\frac{\Delta s}{PQ}\,\frac{\Delta y}{\Delta s}。$$

當 $Q\to P$，卽 $\Delta s\to 0$ 時，$\tau'\to\tau$，而因方程(1)之故，乃有

$$\cos\tau=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta s}{PQ}\,\frac{\Delta x}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta s}=\frac{dx}{ds}, \tag{4a}$$

及
$$\sin\tau=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta s}{PQ}\,\frac{\Delta y}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta s}=\frac{dy}{ds}。 \tag{4b}$$

由是卽知
$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1。 \tag{5}$$

若改用微分以示之，此方程可寫爲

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2。 \tag{6}$$

卽
$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx, \tag{7a}$$

或
$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy。 \tag{7b}$$

方程(6)之解释實甚簡單，蓋自直角三角形(圖11-2)，吾人可認 $PD=dx$，$DT=dy$，及 $PT=ds$。

設改用極坐標，而仍以弧長 s 爲自變數，則仿照上述演算法亦可推

得

$$(ds)^2=(rd\theta)^2+(dr)^2。\tag{8}$$

即

$$ds=\sqrt{r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2+1}\,dr,\tag{9a}$$

或

$$ds=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta。\tag{9b}$$

此諸關係之推證,應由讀者自爲之。

推求方程(6)至(9)時,實不必認 s 爲自變數,蓋若以 x（或 y）或 r（或 θ）爲自變數,則亦可示此諸關係爲正確。茲特顯示當 s 非自變數時,方程(8)應如何推演於下:

令 $r=f(\theta)$ 表曲線之極方程,(圖11-3)。又令 A 爲曲線上之一固定參考點, P 爲一變動點。復以 s 表 AP 弧長。由是觀之, s 亦可視作 θ 之函數,此蓋因已知 θ, P 點即可確定,而 s 亦得以確定。

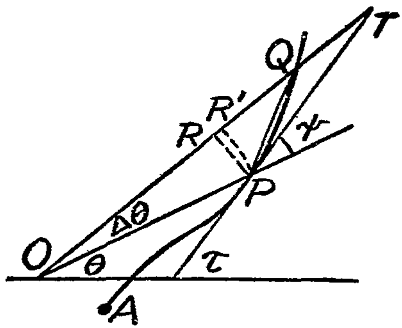


圖 11-3

令 P 之坐標爲 (r,θ),而在曲線上另尋得坐標爲 $(r+\Delta r,\theta+\Delta\theta)$ 之 Q 點。如是, PQ 弧長爲 Δs。繪 PQ 弦及 OQ 向徑,再自 P 作垂線 PR 於 OQ,並以 OP 爲半徑, O 爲中心,作 PR' 弧如圖(11-3)。自直角三角形 PRQ 有

$$\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2+\overline{RQ}^2=\frac{\overline{PR'}^2}{\overline{PR}^2}\overline{PR}^2+\overline{RQ}^2;$$

惟
$$\overline{PR}=\overline{OP}\sin\angle QOP=r\sin\Delta\theta,$$
$$\overline{PR'}=\overline{OP}\,\Delta\theta\qquad=r\,\Delta\theta,$$
$$\overline{RQ}=\overline{RR'}+\overline{R'Q}=\overline{OP}-\overline{OR}+\overline{R'Q}=r(1-\cos\Delta\theta)+\Delta r,$$

故上列之勾股弦關係亦可寫爲

$$\left(\frac{\overline{PQ}}{\Delta s}\right)^2(\Delta s)^2=\left(\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}\right)^2(r\Delta\theta)^2+\Big(\Delta r+r(1-\cos\Delta\theta)\Big)^2。$$

再將此方程兩方除以$(\Delta\theta)^2$，則有

$$\left(\frac{PQ\text{ 弦}}{PQ\text{ 弧}}\right)^2\left(\frac{\Delta s}{\Delta\theta}\right)^2=\left(\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}\right)^2r^2+\left(\frac{\Delta r}{\Delta\theta}+\frac{r(1-\cos\Delta\theta)}{\Delta\theta}\right)^2;$$

又因當 $Q\to P$ 時，$\Delta\theta\to0$，

且
$$\lim_{\Delta\theta\to0}\frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta}=0,\quad\lim_{\Delta\theta\to0}\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}=1,\quad\lim_{Q\to P}\frac{PQ\text{ 弦}}{PQ\text{ 弧}}=1,$$

及
$$\lim_{\Delta\theta\to0}\frac{\Delta s}{\Delta\theta}=\frac{ds}{d\theta},\quad\lim_{\Delta\theta\to0}\frac{\Delta r}{\Delta\theta}=\frac{dr}{d\theta},$$

是以
$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2=r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2,$$

將此關係乘以微分 $(d\theta)^2$ 則得方程(8)矣。由此結果觀之，在圖(11-3)中，吾人可逕視 $PR=r\,d\theta$，$RT=dr$，$PT=ds$ 亦無不可。此與前此圖(11-2)中之 $PD=dx, DT=dy$ 而 $PT=ds$ 之情況甚爲相似。仿此，乃有

$$\cos\psi=\frac{dr}{ds},\tag{10a}$$

$$\sin\psi=\frac{PR}{PT}=\frac{r\,d\theta}{ds}。\tag{10b}$$

是可視爲與方程(4)相對應者也。

讀者至此當注意方程(6)及(8)雖可用以表示同一曲線上之弧長之

微分關係，但切不可因

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2=r^2(d\theta)^2+(dr)^2,$$

而誤以為　$(dx)^2=r^2(d\theta)^2$，　及　$(dy)^2=(dr)^2$。

例 1.　求曲線 $27y^2=x^3$ 自原點至 $x=15$ 點之弧長。

微分此方程得　$$18\,y\,dy=x^2\,dx$$

或　$$324\,y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=x^4。$$

茲以 $y^2=\frac{x^3}{27}$ 代入，乃有 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{x}{12}$。於是

$$s=\int_0^{15}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^{15}\sqrt{1+\frac{x}{12}}dx$$

$$=12\int_0^{15}\sqrt{1+\frac{x}{12}}d\left(1+\frac{x}{12}\right)$$

$$=12\left\{\frac{2}{3}\left(1+\frac{x}{12}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}\Bigg|_0^{15}=8\left\{\left(1+\frac{15}{12}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right\}$$

$$=8\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^3-1\right\}=27-8=19。$$

例 2.　試求擺線一拱之全長。

擺線方程為 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$。

故　$$dx=a(1-\cos t)dt,\ dy=a\sin t\,dt;$$

而　$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt$$

$$=a\sqrt{2-2\cos t}\,dt=2a\sin\frac{t}{2}dt。$$

在擺線一拱之始終兩點，y 均為 0，故於此二點，t 應分別為 $t=0$ 及

$t=2\pi$。如是，一拱之弧長爲

$$s=\int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\,dt=4a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,d\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a。$$

例 3. 自 $\theta=0$ 起，問等角螺線 $r=e^\theta$ 之弧長爲何？

因 $$\frac{dr}{d\theta}=e^\theta,$$

故 $$s=\int_0^\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^\theta\sqrt{e^{2\theta}+e^{2\theta}}\,d\theta$$

$$=\int_0^\theta\sqrt{2}\,e^\theta\,d\theta=\sqrt{2}\,(e^\theta-1)。$$

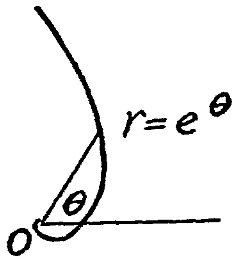


圖 11-4

此螺線旋轉於極 O 之次數雖係無限多（圖 11-4），但自 $\theta=0$ 始，向負方計量，此曲線之全長則爲有限，因上述結果表示當 $\theta\to-\infty$ 時，所得之弧長之數值係以 $\sqrt{2}$ 爲極限，即

$$\lim_{\theta\to-\infty}|s|=\lim_{\theta\to-\infty}\sqrt{2}\left|(e^\theta-1)\right|=\sqrt{2}。$$

例 4. 求橢圓 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ 之 ds。

$$dx=-a\sin t\,dt,\quad dy=b\cos t\,dt,$$

故 $$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt。$$

若令 $$m=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$$ 爲橢圓之離心率(eccentricity)，則

$$ds=\sqrt{a^2(1-\cos^2 t)+b^2\cos^2 t}\,dt=a\sqrt{1-m^2\cos^2 t}\,dt。$$

設欲求某段內之弧長，則將遇如下之積分

$$s=\int_0^t \sqrt{1-m^2\cos^2 t}\,dt,\ (m<1) \tag{11}$$

此積分不能用所已討論之各初等函數表之。在實用問題中，其地位頗爲重要，故另名之爲橢圓積分(elliptical integral)。

11-3. 曲率及曲率半徑之定義 在平面解析幾何中，須用及微分弧一概念之問題，爲曲線之曲率及其曲率半徑。茲於本節中述曲率及曲率半徑之概念與其定義，而於下節推求計算時所用之公式。

由二級紀數 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 之正負，可決定一曲線 $y=f(x)$ 之彎曲方向，前已述及（參閱 3-5 節）。惟彎曲之程度，——簡稱曲率 (curvature)——其數值應如何量度，尙待規定。

自線上一 P 點作一"半切線" PT。令 OX 軸至 PT 之角爲 τ。如是當 P 沿曲線移動時，τ 角之值亦隨之改變。此角改變之多寡，視 P 點之位置而異。例如 P 自 P_1 點移至 P_2 時（圖11-5），所移動之距離（即 P_1P_2 弧）雖較長，而 τ 之改變（即 $\tau_2-\tau_1$）則不大；若自 P_3 移至 P_4 點，所移動之距離（即 P_3P_4 弧）雖較短，而 τ 角之改變 $\tau_4-\tau_3$）則頗大。

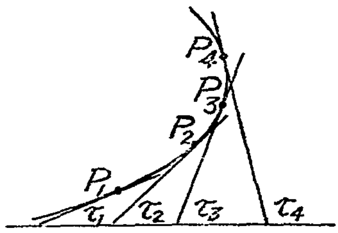


圖 11-5

由是言之，曲率愈甚，則每單位弧長兩端之切線，其方向角 τ 之差必愈大。故若 $\Delta\tau=\tau_2-\tau_1$ 表弧 P_1P_2 兩端切線所作之角，Δs 表弧長 P_1P_2，則在 Δs 弧內

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta s}=Q_{av}$$

可視爲曲線之平均曲率(average curvature)。若 $P_2\to P_1$，卽 $\Delta s\to 0$，則

$$Q=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\tau}{\Delta s}=\frac{d\tau}{ds} \tag{12}$$

可視爲 P_1 或 P_2 點曲率之定義。例如曲線爲圓，其弧長 s 與半徑 a 及兩半徑間之夾角 θ 之關係爲 $s=a\theta$。惟因在兩半徑端之切線，其夾角 τ 亦等於 θ，故 $s=a\tau$ 而

$$Q=\frac{d\tau}{ds}=\frac{1}{a},$$

表示圓之曲率有固定值且等於半徑之倒數。他種曲線之曲率雖非固定值，然爲便於應用起見，其倒值則名爲曲率半徑(radius of curvature)而以 R 表之，卽

$$R=\frac{1}{Q}=\frac{ds}{d\tau}。 \tag{13}$$

11-4. 曲率半徑之公式 若已知曲線之方程爲 $y=f(x)$，則 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 可立卽計得，而方程(12)與(13)最好須改表之爲 $\frac{dy}{dx}$ 與 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 之項，方易應用。改換之法不難，只須記得

$$\tan\tau=\frac{dy}{dx} \quad 或 \quad \tau=\tan^{-1}\frac{dy}{dx}=\tan^{-1}D_xy,$$

及

$$ds=\sqrt{1+(D_xy)^2}\,dx$$

兩關係。如是微分 τ 卽得 $\quad d\tau=\frac{D_x(D_xy)\,dx}{1+(D_xy)^2},$

故 $$R=\frac{ds}{d\tau}=\frac{\sqrt{1+(D_xy)^2}}{\dfrac{D_x{}^2y}{1+(D_xy)^2}}=\frac{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}},\tag{14}$$

而 $$Q=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}。\tag{15}$$

由方程(14)及(15)觀之，R 與 Q 之正負將隨$\frac{d^2y}{dx^2}$之正負而定，換言之，當$\frac{d^2y}{dx^2}$爲正時，R 與 Q 亦爲正，彎曲方向乃向上；反之則向下。

例 1. 求 $y=\tan x$ 曲線上 $x=\frac{\pi}{4}$點之曲率半徑。

$$\frac{dy}{dx}=\sec^2 x;\quad \frac{d^2y}{dx^2}=2\sec^2 x\tan x,$$

故在 $x=\frac{\pi}{4}$點，$\frac{dy}{dx}=2$；$\frac{d^2y}{dx^2}=4$；而所求之曲率半徑遂爲

$$R=\frac{(1+4)^{\frac{3}{2}}}{4}=\frac{5}{4}\sqrt{5}\text{單位。}$$

例 2. 問 $y=\frac{1}{3\sqrt{5}}x^3$ 曲線上曲率最大之點何在?

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{\sqrt{5}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2x}{\sqrt{5}},$$

$$Q=\frac{\dfrac{2x}{\sqrt{5}}}{\left(1+\dfrac{x^4}{5}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{10x}{(5+x^4)^{\frac{3}{2}}};\quad \frac{dQ}{dx}=\frac{10}{(5+x^4)^{\frac{3}{2}}}-\frac{15x(4x^3)}{(5+x^4)^{\frac{5}{2}}};$$

令此爲0，即得 $5+x^4-6x^4=0$，或 $x^4=1$，即 $x=\pm1$。當 $|x|<1$ 時，

$\frac{dQ}{dx}$爲正，而當 $|x|>1$ 時，$\frac{dQ}{dx}$爲負，故於 $x=\pm 1$ 點，$|Q|$ 實爲極大。

11-5. 曲率圓與曲率中心 設圖(11-6)之 PN 表曲線上 P 點之法線。茲在此法線上，曲線之凹向內，一點 C，使 PC 之長等於 P 點之曲尋得率半徑。若以 C 爲中心，曲率半徑 R 爲半徑，畫一圓，則此圓不但將與曲線相切於 P 點，且二者於此點之曲率亦相同。此圓名爲曲率圓 (circleof curvature)，其中心 C 則名爲曲率中心 (center of curvature)。曲線 $y=f(x)$ 上 (x_0,y_0) 之曲率中心 C，其坐標(α,β)不難以 x_0 爲參變數而表示之。令過 P 點之曲率半徑爲 R_0，則自圖(11-6)卽知

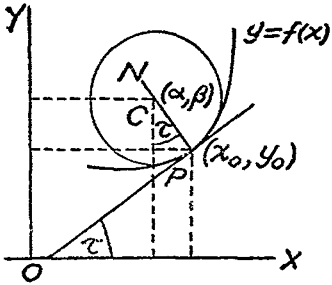


圖 11-6

$$\alpha=x_0-R_0\sin\tau,\quad \beta=y_0+R_0\cos\tau。\tag{16}$$

推
$$R_0=\frac{(1+\overline{D_xy_0}^2)^{\frac{3}{2}}}{D_x^2y_0};\quad \sin\tau=\frac{dy_0}{ds}=\frac{D_xy_0}{(1+\overline{D_xy_0}^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\cos\tau=\frac{dx_0}{ds}=\frac{1}{(1+\overline{D_xy_0}^2)^{\frac{1}{2}}},$$

故
$$\alpha=x_0-\frac{D_xy_0\,(1+\overline{D_xy_0}^2)}{D_x^2y_0};\quad \beta=y_0+\frac{1+\overline{D_xy_0}^2}{D_x^2y_0}。\tag{17}$$

讀者可注意推求方程(16)時，雖用圖(11-6)所示之特殊圖形，但方程(17)則可用於任何位置或形狀之圖線，此乃因若曲線之彎曲方向如

係向下，則 $D_x^2y_0$ 將爲負，而曲率中心之橫坐標 α 將較 x_0 爲大，其縱坐標 β 將較 y_0 爲小；換言之，方程(16)中 R_0 之符號均須改變。又如曲線之斜度角較 $90°$ 爲大，則 D_xy_0 將爲負。而當彎曲方向爲向上時（即 $D_x^2y_0$ 爲正）曲率中心之橫與縱坐標將分別較 P 點之 x_0 與 y_0 爲大。讀者至此應自行繪圖以示方程(17)實可用於任何情形。

11-6. 曲率中心之軌跡——縮閉線　一曲線上各點曲率中心之軌跡，名爲該曲線之縮閉線 (evolute)。吾人可證明一曲線之法線，即爲其縮閉線上相應之切線；因此，一曲線之縮閉線亦即該曲線上各點法線之包絡線 (envelope of normals)。

方程(16)或(17)，加以適當解釋，實即縮閉線之參變方程。茲舉兩例以示之：

例 1.　求橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 之縮閉線之方程。

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x\dfrac{dy}{dx}-y}{y^2}=-\frac{b^2(b^2x^2+a^2y^2)}{a^4y^3}=-\frac{b^4}{a^2y^3}。$$

故若令 X 及 Y 爲所求縮閉線之坐標，而以 x_0 爲參變數，則自方程(17)得：

$$X=x_0+\frac{b^2x_0(1+b^4x_0^2/a^4y_0^2)}{-a^2y_0(b^4/a^2y_0^3)}=x_0-\frac{x_0(a^4y_0^2+b^4x_0^2)}{a^4b^2}$$

$$=x_0\left(\frac{a^2b^2x_0^2-b^4x_0^2}{a^4b^2}\right)=\frac{a^2-b^2}{a^4}x_0^3,$$

$$Y=y_0-\frac{a^2y_0^3(1+b^4x_0^2/a^4y_0^2)}{b^4}=y_0\left(\frac{b^2a^2y_0^2-a^4y_0^2}{a^2b^4}\right)$$

$$=\frac{b^2-a^2}{b^4}y_0^3;$$

惟 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，故所求縮閉線之直角坐標方程爲：

$$\left(\frac{aX}{a^2-b^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{bY}{b^2-a^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1。$$

若用小寫之 x, y 代 X, Y, 則得（圖線見圖 11-7）：

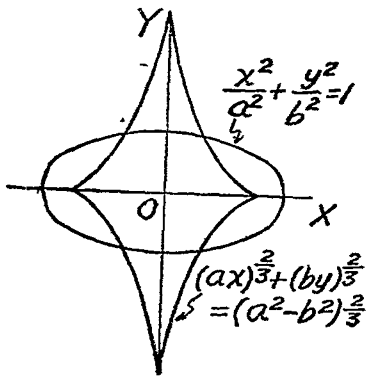


圖 11-7

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}。$$

例 2.　示圓上漸伸線：

$$x=a(t\sin t+\cos t),\quad y=a(\sin t-t\cos t)$$

之縮閉線卽爲原圓 $X^2+Y^2=a^2$。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a(\cos t+t\sin t-\cos t)\,dt}{a(t\cos t+\sin t-\sin t)\,dt}=\tan t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\tan t=\frac{\sec^2 t\,dt}{at\cos t\,dt}=\frac{1}{at\cos^3 t},$$

故所求之縮閉線之坐標爲

$$X=a(t\sin t+\cos t)-\tan t(1+\tan^2 t)at\cos^3 t$$

$$=a(t\sin t+\cos t-t\sin t)=a\cos t,$$

及 $$Y=a(\sin t-t\cos t)+(1+\tan^2 t)at\cos^3 t=a\sin t,$$

卽 $$X^2+Y^2=a^2$$

由此例言之，一曲線亦可視爲其縮閉線之一漸伸線。此事之普遍的證明，可分爲兩部分，其一卽前此所述任何曲線之法線爲其縮閉線之切線，其他爲任何曲線上之兩個曲率半徑之差，卽等於其縮閉線相應兩點間之弧長。證不難，讀者可自爲之。

第十一章習題

1. 試以弧長 s 爲自變數以推出公式(9)。
2. 試以 x 或 y 爲自變數以推出公式(7)。
3. 求以下各曲線之弧長：

(a) $y^3=x^2$, 自原點至 $x=8$;

(b) $y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{2x}$, 自 $x=1$ 至 $x=3$;

(c) $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, 自 $x=0$ 至 $x=a$;

(d) $e^y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$ 自 $x=a$ 至 $x=b$;

(e)心形曲線: $r=a(1+\cos\theta)$全長;

(f)圓上漸伸線: $x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)$,

自 $t=0$ 起至 $t=\pi$;

(g)曲線 $x=e^t\sin t, y=e\cos t$, 自 $t=0$ 至 $t=\pi$,

(h) $r=a(\theta^2-1)$ 自 $\theta=0$ 起。

4. 示倒置擺線 $x=a(t+\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 之弧長, 自 $t=0$ (頂點) 量起至 P 點,其值爲 $s=4a\sin\tau$, $\tan\tau$ 表過 P 點之斜度。

5. 求以下諸曲線之曲率:

(a) $y=\ln\cos x$,

(b) $xy=a^2$;

(c) $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$;

(d) $y=a x^2$。

6. 設 $r=f(\theta)$爲曲線之極方程,試示曲率之公式爲

$$Q=\frac{r^2-rr''+2r'^2}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{其中} r'=\frac{df}{d\theta},\quad r''=\frac{d^2f}{d\theta^2}。$$

7. 求以下各曲線上任意點之曲率半徑:

(a) $r=a\theta$;

(b) $r=2a(1-\cos 2\theta)$;

(c) $r^2=a^2\cos 2\theta$;

(d) $r^2\cos 2\theta=a^2$;

(e) $r=ae^{k\theta}$;

(f) $r=a(1-2\cos\theta)$。

8. 設以弧長 s 爲參數而表曲線之參變方程爲 $x=G(s)$, $y=F(s)$, 試示曲率之公式爲

$$Q=\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}=-\frac{G''}{F'}=\frac{F''}{G'}。$$

9. 令 n 爲一正值參變數，當 $x>0$ 時，試求 $y=x^n$ 各曲線上曲率最大之點之軌跡。

10. 求以下各曲線上指定點之曲率圓：

(a) $y=\cos x$, 在 $x=\pi$ 點；

(b) $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, 在 $t=0$ 及 $\frac{\pi}{2}$ 點；

如用此兩圓之一部份以繪原橢圓，試作圖以示其互相符合之情況。

(c) $y^3+x-2y=0$, 在 $(1,1)$ 點；

(d) $y=a^x$ 在 $(0,1)$ 點。

11. 求以下各曲線之縮閉線：

(a) $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, (擺線)；

(b) $x=2\cos t-\cos 2t$, $y=2\sin t-\sin 2t$, (外擺線)；

(c) $x=2\cos t+\cos 2t$, $y=2\sin t-\sin 2t$, (內擺線)；

(d) $y^2=2x$ (拋物線)。

12. 試以一曲線之弧長爲參數，而求該曲線縮閉線之參變方程。

13. 由題(10)結果,示明一曲線之法線卽爲其縮閉線上相應點之切線,且一曲線上兩曲率半徑之差,卽等於其縮閉線上相應兩點間之弧長。

第十二章　積分方法

12-1. 積分表　求函數之積分，其方法較諸求函數之微分，實爲較繁艱。爲便於應用起見，遂有積分表之刊印，將較常用之積分，分類登記，以資檢用。此等表篇幅之較大者當推 Bierens de Haan 所計之定積分表(Tables d'integrales définies)；而流傳較廣者，則爲 B. O. Pierce 教授所編之積分簡表(A Short Table of Integrals)。此外，各微積分教本多附有更簡要之積分表，以便讀者。欲示積分表中各公式之眞確，固可將兩方微分而示之，但在純粹數學方面言之，各公式應如何推演，實爲甚重要且富有趣味之問題。至於應用方面，因有時所欲求之積分，表中未曾列入，惟可由表中其他公式推算而得，故有系統的積分方法，亦爲實用數學家所亟欲考究。本章目的卽爲略舉各種常用之較重要之積分方法。

12-2. 最基本之積分　最基本之積分公式實不甚多。玆將積分常數略去而將此等公式之曾經前此證過者，彙集於下，以資參考($a,b,c\cdots\cdots$等爲常數)：

A. 普通公式：

(I) $\int\left\{f(x)\pm g(x)\pm\cdots\right\}dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx\pm\cdots,$

(II) $\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx;$

(III) $\int f(u)\dfrac{du}{dx}dx=\int f(u)\,du;$

B. 特別公式（積分常數均略去未列）：

$$\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1},\ n\neq -1 \tag{1}$$

$$\int \frac{du}{u}=\ln|u| \tag{2}$$

$$\int \sin u\, du=-\cos u \tag{3}$$

$$\int \cos u\, du=\sin u \tag{4}$$

$$\int \sec^2 u\, du=\tan u \tag{5}$$

$$\int \sec u \tan u\, du=\sec u \tag{6}$$

$$\int e^u\, du=e^u \tag{7}$$

$$\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a} \tag{8}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du=\sin^{-1}u \tag{9}$$

$$\int \frac{1}{1+u^2}du=\tan^{-1}u \tag{10}$$

自上述各公式卽可推得不少之常用積分，玆分別陳述之。

12-3. 代替法 代替法之理論，已包含在普通公式(III)中，前曾屢用之。簡言之，此法係另選一適當之變數代入被積函數 $f(x)$ 及微分 dx 中，以使所欲求之積分可化爲上列各特別公式之一。讀者對於此法之應用，貴能一見卽知應如何代替，此與善於觀察之生物學家遇及動物或植物時，能卽知其屬於何門類頗相似。

例如 $\int\sqrt{a+bx}\,dx$，$\int x(1-x^2)^{\frac{2}{3}}dx$，(頁107)，$\int \cos ax\,dx$，(頁148)，

$\int e^{ax}dx$(頁 183) 及 $\int \tan x\,dx$(頁 188) 等皆是。

12-4. $\sin^m x \cos^n x$ 之積分　若 m 或 n 爲整數，則 $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ 可依照特別公式(1),(2),(3)及(4)以推演之。但演算之時，尙需下列三角公式：

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1 \tag{11}$$

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2} \tag{12}$$

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2} \tag{13}$$

及

$$\sin 2x=2\sin x\cos x \tag{14}$$

玆分爲三目而討論之如下：

(A) 若 m 爲正奇數，例如 $2q+1$ (q 爲任何正整數或 0)，則 $\sin^m x\,dx$ 可寫爲

$$-\sin^{2q} x\,d\cos x=-(1-\cos^2 x)^q\,d\cos x。$$

如以 $u=\cos x$ 代入，則

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx=-\int(1-\cos^2 x)^q\cos^n x\,d(\cos x)$$

$$=-\int(1-u^2)^q u^n\,du,$$

再用二項定理展開 $(1-u^2)^q$，則被積函數將爲 u 之多項式，而公式(1)即可應用矣，

例 1. $\int \sin^3 x\cos^4 x\,dx=-\int(1-\cos^2 x)\cos^4 x\,d\cos x$

$$=\int(\cos^6 x-\cos^4 x)\,d\cos x=\frac{\cos^7 x}{7}-\frac{\cos^5 x}{5}+C。$$

(B) 若 n 爲正奇數，例如 $2p+1$ (p 爲任何正整數或 0)，則類推上

述方法即有

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx=\int(\sin^m x)(1-\sin^2 x)^p\,d\sin x$$

$$=\int v^m(1-v^2)^p\,dv,$$

而公式(1)復可應用。

例 2. $\int\cos^5 x\sin^{-\frac{1}{2}}x\,dx=\int\cos^4 x\sin^{-\frac{1}{2}}x\,d\sin x$

$$=\int(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)\sin^{-\frac{1}{2}}x\,d\sin x$$

$$=\int(\sin^{-\frac{1}{2}}x-2\sin^{\frac{3}{2}}x+\sin^{\frac{7}{2}}x)d\sin x$$

$$=2\sin^{\frac{1}{2}}x-\frac{4}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x+\frac{2}{9}\sin^{\frac{9}{2}}x+C。$$

(C) 若 m 及 n 均爲正偶數，則可先用方程(14)，(13)或(12)化被積函數爲倍角之正弦與餘弦，然後再展爲多項式而積分之。

例 3. $\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx=\int\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2\cos^2 x\,dx$

$$=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x(1+\cos 2x)dx$$

$$=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\,dx+\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\frac{d\sin 2x}{2}$$

$$=\frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)dx+\frac{1}{16}\frac{\sin^3 2x}{3}$$

$$=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C。$$

例 4. $\int\sin^4 x\,dx=\frac{1}{4}\int(1-\cos 2x)^2\,dx$

$$=\frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1}{2}+\frac{\cos 4x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2}-\sin 2x+\frac{\sin 4x}{8}\right)+C。$$

12-5．倍數角正弦與餘弦相乘之積分　遇被積函數為 $\sin px\cos qx$，或 $\sin px\sin qx$ 或 $\cos px\cos qx$ 各乘積時，可先用下列三角公式：

$$2\sin px\cos qx=\sin(p-q)x+\sin(p+q)x \tag{15}$$

$$2\sin px\sin qx=\cos(p-q)x-\cos(p+q)x \tag{16}$$

$$2\cos px\cos qx=\cos(p-q)x+\cos(p+q)x \tag{17}$$

將各乘積改為適當之和，然後再引用公式(3)與(4)而積分之。

例　$\int\cos 3x\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int\left(\cos(3-2)x+\cos(3+2)x\right)dx$

$$=\frac{1}{2}\int(\cos x+\cos 5x)\,dx=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{10}\sin 5x+C。$$

12-6． $\int\tan^m x\sec^n x\,dx$ 與 $\int\cot^m x\csc^n x\,dx$　設 n 為正偶數而 m 非正奇數，則因有

$$1+\tan^2 x=\sec^2 x \tag{18}$$

$$d\tan x=\sec^2 x\,dx \tag{19}$$

及

$$1+\cot^2 x=\csc^2 x \tag{20}$$

$$d\cot x=-\csc^2 x\,dx \tag{21}$$

各關係，故若令 $n=2p+2$，p 為適當之整數，復以 $u=\tan x$，或 $v=\cot x$ 代入，則

$$\int\tan^m x\sec^n x\,dx=\int\tan^m x\sec^{2p}x(\sec^2 x\,dx)$$

$$=\int u^m(1+u^2)^p\,du,$$

$$\int \cot^m x\csc^n x\,dx=\int \cot^m x\csc^{2p} x\csc^2 x\,dx$$

$$=-\int v^m(1+v^2)^p\,dv,$$

而於展開後復可按項積分之矣。

例 1. $\int \tan^{\frac{2}{3}}x\sec^4 x\,dx=\int \tan^{\frac{2}{3}}x(1+\tan^2 x)\,d\tan x$

$$=\frac{3}{5}\tan^{\frac{5}{3}}x+\frac{3}{11}\tan^{\frac{11}{3}}x+C_{\circ}$$

例 2. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}dx=\int \cot^4 x\csc^2 x\,dx=-\int \cot^4 x\,d\cot x$

$$=-\frac{1}{5}\cot^5 x+C_{\circ}$$

設 m 為正奇數，n 為任何數，則積分之法有二：其一係將 $\tan x$, $\sec x$, $\cot x$, 或 $\csc x$ 表爲 $\sin x$ 與 $\cos x$ 之函數而後應用 (12–4) 節 (A) 目或(B) 目方法；其他則應用方程(18)或(20)及

$$d\sec x=\sec x\tan x\,dx \tag{22}$$

$$d\csc x=-\csc x\cot x\,dx \tag{23}$$

之關係而令 $u=\sec x$, $v=\csc x$, 將所求之積分化爲(令$m=2q+1$)：

$$\int \tan^m x\sec^n x\,dx=\int \tan^{2q} x\sec^{n-1} x\,d\sec x=\int (u^2-1)^q u^{n-1}\,du,$$

$$\int \cot^m x\csc^n x\,dx=-\int \cot^{2q} x\csc^{n-1} x\,d\csc x=-\int (v^2-1)^q v^{n-1}\,dv,$$

然後展開再按項積分之。

例 3. $\int \tan^5 x\sec^{\frac{1}{2}}x\,dx=\int (\sec^2 x-1)^2\sec^{-\frac{1}{2}}x\,d\sec x$

$$=\int (\sec^{\frac{7}{2}}x-2\sec^{\frac{3}{2}}x+\sec^{-\frac{1}{2}}x)\,d\sec x$$

$$=\frac{2}{9}\sec^{\frac{9}{2}}x-\frac{4}{5}\sec^{\frac{5}{2}}x+2\sec^{\frac{1}{2}}x+C。$$

或
$$\int \tan^5 x\sec^{\frac{1}{2}}x\,dx=\int \sin^5 x\cos^{-\frac{11}{2}}x\,dx$$

$$=-\int(1-\cos^2 x)^2\cos^{-\frac{11}{2}}x\,d\cos x$$

$$=-\int(\cos^{-\frac{11}{2}}x-2\cos^{-\frac{7}{2}}x+\cos^{-\frac{3}{2}}x)d\cos x$$

$$=\frac{2}{9}\cos^{-\frac{9}{2}}x-\frac{4}{5}\cos^{-\frac{5}{2}}x+2\cos^{-\frac{1}{2}}x+C。$$

12-7. $\frac{px+q}{ax^2+bx+c}$**之積分**　此積分只需公式(10)與(2),茲分 $p=0$ 及 $p\neq 0$ 兩目而討論之。.

(A) $p=0$; 遇此之時，可將 ax^2+bx+c 配成兩完全平方之和或差,如

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\};$$

若 $4ac>b^2$, 則用 $u=x+\frac{b}{2a}$, $k^2=\frac{4ac-b^2}{4a^2}$代入,乃有

$$\int\frac{q\,dx}{ax^2+bx+c}=\frac{q}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}$$

$$=\frac{q}{a}\int\frac{du}{u^2+k^2}=\frac{q}{ak}\int\frac{d\left(\frac{u}{k}\right)}{\left(\frac{u}{k}\right)^2+1}$$

而公式(10)卽可應用。

若 $4ac<b^2$, 則以 $u=x+\frac{b}{2a}$, $m^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$代入,乃有

$$\int\frac{q\,dx}{ax^2+bx+c}=\frac{q}{a}\int\frac{du}{u^2-m^2}=\frac{q}{2am}\int\left(\frac{du}{u-m}-\frac{du}{u+m}\right),$$

而公式(2)即可應用。

例 1. $$\int\frac{dx}{2x^2+4x+3}=\int\frac{dx}{2(x+1)^2+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\sqrt{2}\,(x+1)}{2(x+1)^2+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\sqrt{2}\,(x+1)+C。$$

例 2. $$\int\frac{dx}{2x^2+4x-1}=\int\frac{dx}{2(x+1)^2-3}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2-\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{3/2}}\ln\frac{x+1-\sqrt{3/2}}{x+1+\sqrt{3/2}}+C。$$

(B) $p\neq 0$；遇此之時，可先將分子配成分母之紀數與一常數之和如下：

$$\int\frac{(px+q)\,dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{\frac{p}{2a}(2ax+b)+\left(q-\frac{pb}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}dx$$

$$=\frac{p}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c}+\left(q-\frac{pb}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

右邊第一積分可用公式(2)，第二積分則可按前段所述之方法求之。

例 3. $$\int\frac{(3x+4)\,dx}{x^2+4x+3}=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+4)-2}{x^2+4x+3}dx$$

$$=\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+3)-\int\frac{2\,dx}{(x+2)^2-1}$$

$$=\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+3)-\ln\frac{x+1}{x+3}+C。$$

12-8. 有理函數之積分 凡函數可表爲兩多項式之商者，名爲有

理函數，例如

$$R(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_{m-1}x+b_m},$$

此中各 a 與各 b 均爲常數，m 與 n 則爲正整數。如 $n\geqq m$，則照其所示之除法計算後，即可寫 $R(x)$ 爲

$$R(x)=P(x)+\frac{f(x)}{F(x)},$$

此中之 $P(x)$，$f(x)$ 及 $F(x)$ 均爲 x 之多項式，惟 $f(x)$ 之次數較 $F(x)$ 低，二者之間且無公共之因子。$P(x)$ 之積分不難立即求得，故所待討論者，僅有 $\frac{f(x)}{F(x)}$ 之積分。茲分四目陳述之。

(A) 若 $F(x)$ 之 m 個根均爲實數，且無重複者，例如 s_1，s_2，……s_m，則可將之寫爲

$$F(x)=b_0(x-s_1)(x-s_2)\cdots\cdots(x-s_m)。$$

於是按代數原理 $\frac{f(x)}{F(x)}$ 分數可拆爲 m 個部分分數(partial fractions)，其分母各爲 $(x-s_1)$，$(x-s_2)$，……，$(x-s_m)$ 等如下：

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_1}{x-s_1}+\cdots\cdots+\frac{A_m}{x-s_m},$$

此中各 A 代表適當之常數，而積分時逕用公式(2)。求各部分分數中之各常數(例如 A_m)，其法甚多。最速者似爲將恆等式兩邊各乘以 $(x-s_m)$ 後，再令 $x=s_m$，如是右邊爲 A_m，

而 $$A_m=\left(\frac{f(x)}{(x-s_1)(x-s_2)\cdots(x-s_{m-1})}\right)_{x=s_m}=\frac{f(s_m)}{F'(s_m)}$$

此中之 $F'(x)=\frac{d}{dx}F(x)$，$F'(s_m)$ 指將 s_m 代 $F'(x)$ 中 x 後所得之值。

例 1. 求$\int\frac{3x+1}{x(x^2-1)}dx$。

被積函數之分子，其次數已較低於其分母，故可卽行拆爲部分分數。分母 $F(x)$ 之根有三，卽 $s_1=0$，$s_2=1$ 及 $s_3=-1$，故令

$$\frac{3x+1}{x(x^2-1)}\equiv\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x+1}。$$

欲定 A_1 之值，將此恆等式兩邊各乘以 x，再以 $x=0$ 代入，如是得

$$A_1=\left(\frac{3x+1}{x^2-1}\right)_{x=0}=\frac{1}{-1}=-1,$$

同樣 $$A_2=\left(\frac{3x+1}{x(x+1)}\right)_{x=1}=\frac{3+1}{1(1+1)}=\frac{4}{2}=2,$$

而 $$A_3=\left(\frac{3x+1}{x(x-1)}\right)_{x=-1}=\frac{-3+1}{-1(-1-1)}=\frac{-2}{2}=-1,$$

是以 $$\int\frac{3x+1}{x(x^2-1)}dx=-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{2\,dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x+1}$$

$$=-\ln x+2\ln(x-1)-\ln(x+1)+\ln c$$

$$=\ln\frac{c(x-1)^2}{x(x+1)}。$$

(B) 若 $F(x)$ 之 m 個根均爲實數而其中復有重複 r 次之根 s，則 $F(x)$ 可寫爲

$$F(x)=b_0(x-s_1)\cdots\cdots(x-s)^r\cdots\cdots(x-s_m),$$

而分析爲部分分數時，乃有

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_1}{x-s_1}+\cdots\cdots+\frac{B_1}{(x-s)}+\frac{B_2}{(x-s)^2}+\cdots\cdots+\frac{B_r}{(x-s)^r}+$$

$$\cdots\cdots+\frac{A_m}{x-s_m}。$$

此中各 A 及 B_r 均不等於 0，但其他各 B 可為 0。

求積分時只須用公式 (1) 與 (2)。此中各 A 可依前所述之方法求之。至於各常數 B，可用同法先求 B_r，再自恆等式兩方減去 $\frac{B_r}{(x-s)^r}$ 一分數，而後用前法以求 B_{r-1}。其他各 B 可仿此逐步計之。

例 2. 求
$$\int\frac{3x^2+2x-3}{x^3(x+1)}dx。$$

令
$$\frac{3x^2+2x-3}{x^3(x+1)}\equiv\frac{A}{x+1}+\frac{B_3}{x^3}+\frac{B_2}{x^2}+\frac{B_1}{x},$$

乘兩邊以 $(x+1)$，再以 $x=-1$ 代入即得
$$A=\left(\frac{3x^2+2x-3}{x^3}\right)_{x=-1}=\frac{3-2-3}{-1}=2;$$

乘兩邊以 x^3，再以 $x=0$ 代入，則得
$$B_3=\left(\frac{3x^2+2x-3}{x+1}\right)_{x=0}=-3;$$

將 $\frac{B_3}{x^3}$ 移至左邊，則有
$$\frac{3x^2+2x-3}{x^3(x+1)}+\frac{3}{x^3}=\frac{3x^2+2x-3+3x+3}{x^3(x+1)}$$
$$=\frac{3x^2+5x}{x^3(x+1)}=\frac{3x+5}{x^2(x+1)}\equiv\frac{2}{x+1}+\frac{B_2}{x^2}+\frac{B_1}{x}。$$

乘兩邊以 x^2，再以 $x=0$ 代入，乃有
$$B_2=\left(\frac{3x+5}{x+1}\right)_{x=0}=5,$$

欲求 B_1 固可再自恆等式兩邊減去 $\frac{B_2}{x^2}$ 而後仿前法計之。但因只餘 B_1 一常數未知，故可任意令 x 為一適當值，即可計得之。設令 $x=1$，則有

$\frac{3+5}{2}=\frac{2}{2}+5+B_1$，即 $B_1=4-6=-2$。

故
$$\int\frac{3x^2+2x-3}{x^3(x+1)}dx=\int\left(\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x^3}+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x}\right)dx$$
$$=2\ln\frac{x+1}{x}+\frac{3}{2}x^{-2}-5x^{-1}+C。$$

(C) 若 $F(x)$ 之根不全爲實數，則 $F(x)$ 之中必含如 $a_1x^2+b_1x+c_1$ 之因子，且 $b_1^2<4a_1c_1$。設此等因子未曾重複，則 $\frac{f(x)}{F(x)}$ 應拆爲

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_2}{x-s_1}+\frac{A_2}{s-s_2}+\cdots\cdots+\frac{p_1x+q_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}$$
$$+\frac{p_2x+q_2}{a_2x^2+b_2x+c_2}+\cdots\cdots,$$

此中各 A 不等於 0，同下標之 p 與 q 不能同爲 0。

求積分時除公式(2)外，尙需(12-7) 節所述之方法。此中各 A 仍可用前此所述之法計之，至於各 p 與各 q 之值，可先將已求得含各 A 之分數減去，然後通分右方分數，再行比較分子各乘冪之係數。

例 3. 求 $\int\frac{x^4-2x^3+6x-13}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}dx$。

因分子與分母同次，故應先相除以得

$$\frac{x^4-2x^3+6x-13}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}=1-\frac{2(x^2-4x+7)}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}。$$

因 $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=(x^2+1)(x-1)^2$，故可寫

$$\frac{x^2-4x+7}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}=\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{px+q}{x^2+1};$$

乘以 $(x-1)^2$ 後再以 $x=1$ 代入，即得

$$B_2=\left(\frac{x^2-4x+7}{x^2+1}\right)_{x=1}=\frac{1-4+7}{1+1}=\frac{8-4}{2}=2;$$

將$\frac{B_2}{(x-1)^2}$移至左邊而化之，則

$$\frac{x^2-4x+7-2(x^2+1)}{(x-1)^2(x^2+1)}\equiv\frac{B_1}{x-1}+\frac{px+q}{x^2+1},$$

或
$$\frac{-x^2-4x+5}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{-\ (5+x)}{(x-1)(x^2+1)}\equiv\frac{B_1}{x-1}+\frac{px+q}{x^2+1};$$

次乘以$(x-1)$後再以 $x=1$ 代入，乃得

$$B_1=\left(\frac{-(5+x)}{x^2+1}\right)_{x=1}=-\frac{5+1}{1+1}=-3;$$

再將$\frac{B_1}{x-1}$移至左邊而化之，則

$$\frac{3x^2+3-5-x}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{3x^2-x-2}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{3x+2}{x^2+1}\equiv\frac{px+q}{x^2+1};$$

比較分子各 x 乘冪之係數卽得 $p=3$, $q=2$。是以

$$\int\frac{x^4-2x^3+6x-13}{(x^2+1)(x-1)^2}dx=\int dx-2\int\left(\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{3}{x-1}+\frac{3x+2}{x^2+1}\right)dx$$

$$=x+4\,(x-1)^{-1}+6\ln(x-1)-3\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}-4\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=x+\frac{4}{x-1}+6\ln(x-1)-3\ln(x^2+1)-4\tan^{-1}x+C。$$

(D) 若 $F(x)$ 中之二次因子與一次因子均有重複者，則$\frac{f(x)}{F(x)}$應拆爲合$\frac{B_t}{(x-s)^t}+\cdots\cdots+\frac{B_1}{(x-s)}$及$\frac{p_rx+q_r}{(ax^2+bx+c)^r}+\cdots\cdots+\frac{p_1x+q_1}{ax^2+bx+c}$各部分分數。此中常數 B_t 不等 0，p_r 與 q_r 不得同爲 0，其餘各 B 與 p 及 q 則可爲 0。至於其值均可按前述方法計之。拆爲部分分數後只有下

列兩普通形式

$$\int\frac{dx}{(x-s)^n} \quad 及 \quad \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}dx;$$

前者可逕用公式(1)或(2)，而後者可化爲

$$\int\frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}dx=\int\frac{\frac{p}{2a}(2ax+b)+\left(q-\frac{pb}{2a}\right)}{(ax^2+bx+c)^n}dx$$

$$=\frac{p}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{(ax^2+bx+c)^n}+\left(q-\frac{pb}{2a}\right)\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}。$$

此中之第一積分亦屬於公式(1) 或 (2)之類，其第二積分則於將二次式 ax^2+bx+c 配成兩平方之和或差後，可用後(12-13)節(A)目之公式逐步簡化之，以至只須求 $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$。惟此積分之算法已見前 (12-7) 節(A)目，故本目各積分亦得分別計之。

綜合各結果言之，凡有理函數之積分必可以有理、對數或反正切三種初等函數表之。

例 4. 求 $\int\frac{3x^4+x^3+8x^2+x+2}{x(x^2+1)^2}dx$

令 $$\frac{3x^4+x^3+8x^2+x+2}{x(x^2+1)^2}\equiv\frac{A}{x}+\frac{p_1x+q_1}{x^2+1}+\frac{p_2x+q_2}{(x^2+1)^2}$$

乘以 x 後再令 $x=0$，卽得 $A=2$。自兩邊減去 $\frac{A}{x}=\frac{2}{x}$ 則有

$$\frac{3x^4+x^3+8x^2+x+2-2(x^4+2x^2+1)}{x(x^2+1)^2}=\frac{x^3+x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$\equiv\frac{p_1x+q_1}{x^2+1}+\frac{p_2x+q_2}{(x^2+1)^2}。$$

乘以 $(x^2+1)^2$ 後再令 $x^2=-1$，維持 x 不變而比較係數，則因

$$p_2x+q_2\equiv(x^3+x^2+4x+1)_{x^2=-1}\equiv-x-1+4x+1\equiv3x,$$

故 $p_2=3$, $q_2=0$。再減去$\frac{3x}{(x^2+1)^2}$，乃有

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{(x^2+1)^2}=\frac{x+1}{x^2+1}\equiv\frac{p_1x+q_1}{x^2+1};$$

比較分子各項之係數,即知 $p_1=1$, $q_1=1$。故所求之積分爲

$$\int\frac{3x^4+x^3+8x^2+x+2}{x(x^2+1)^2}=\int\left\{\frac{2}{x}+\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{3x}{(x^2+1)^2}\right\}dx$$

$$=\int\frac{2\,dx}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{3}{2}\int\frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}$$

$$=2\ln x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\tan^{-1}x-\frac{3}{2(x^2+1)}+C。$$

12-9. 被積函數含$(ax+b)^{\frac{1}{p}}$及$(ax+b)^{\frac{1}{q}}$時 今若令$(ax+b)^{\frac{1}{r}}=t$, r 爲 p 與 q 之最小公倍數，例如 $r=np=mq$ (m 與 n 均爲正整數)，則$(ax+b)^{\frac{1}{p}}=(ax+b)^{\frac{n}{r}}=t^n$, $(ax+b)^{\frac{1}{q}}=t^m$, $dx=\frac{rt^{r-1}\,dt}{a}$。如是被積函數可化爲 t 之有理函數,而得應用(12-8)節之方法以積分之。

例 1. 求 $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$。

令$t=x^{\frac{1}{6}}$, $x=t^6$, $dx=6t^5\,dt$,如是

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3\,dt}{t+1}=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln(t+1)+C$$

$$=2x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{3}}+6x^{\frac{1}{6}}-\ln(1+x^{\frac{1}{6}})^6+C。$$

例 2. 求 $\int x\sqrt[3]{x+a}\,dx$。

令 $t=\sqrt[3]{x+a}$，即 $x+a=t^3$, $dx=3t^2\,dt$, 故

$$\int x\sqrt[3]{x+a}\,dx=\int(t^3-a)t(3t^2)\,dt=3\int(t^6-at^3)\,dt$$

$$=3\left(\frac{t^7}{7}-\frac{a}{4}t^4\right)+C=\frac{3}{28}(4t^3-7a)t^4+C$$

$$=\frac{3}{28}(4x-3a)(x+a)^{\frac{4}{3}}+C。$$

12-10. $\sin x$ 及 $\cos x$ 之有理函數之積分 遇 $\sin x$ 與 $\cos x$ 之有理函數時，其積分常可藉種種巧妙方法計得之，惟此等巧妙方法不易學習耳。除此等捷徑外，一普通方法係用 $t=\tan\frac{x}{2}$ 或 $x=2\tan^{-1}t$ 以代入。如是，因

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

及 $$dx=2\,d\tan^{-1}t=\frac{2\,dt}{1+t^2},$$

故所欲求之積分，可改爲 t 之有理函數之積分。既化爲 t 之有理函數後，即可應用(12-8)節各原則以演算之。

例 1. $$\int\sec x\,dx=\int\frac{dx}{\cos x}=\int\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$=2\int\frac{dt}{1-t^2}=\int\frac{dt}{1+t}+\int\frac{dt}{1-t}=\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)+C$$

$$=\ln\left\{\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right\}+C=\ln(\sec x+\tan x)+C$$

$$=\ln\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)+C。$$

此答案中後列三個不同之形式,應由讀者根據三角學原理自計之。

例 2. $\displaystyle\int\frac{\cos x\,dx}{1+\cos x}=\int\frac{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\left(\frac{2\,dt}{1+t^2}\right)}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{1-t^2}{1+t^2}dt$

$$=\int\left(\frac{2}{1+t^2}-1\right)dt=2\tan^{-1}t-t+C=x-\tan\frac{x}{2}+C。$$

12-11. 被積函數含$\sqrt{k^2-x^2}$或$\sqrt{x^2\pm k^2}$ 若被積函數中除x之有理函數外，倘有$\sqrt{k^2-x^2}$或$\sqrt{x^2\pm k^2}$之有理函數，或可化爲此等形式之有理函數,例如$\sqrt{ax^2+bx+c}$,則可用下述之三角函數代替x,以消去根號:

(A)遇$\sqrt{k^2-x^2}$時,令$x=k\sin\theta$,則

$$\sqrt{k^2-x^2}=k\cos\theta,\ dx=k\cos\theta\,d\theta;$$

(B)遇$\sqrt{x^2-k^2}$時,令$x=k\sec\theta$,則

$$\sqrt{x^2-k^2}=k\tan\theta,\ dx=k\sec\theta\tan\theta\,d\theta;$$

(C)遇$\sqrt{x^2+k^2}$時,令$x=k\tan\theta$,則

$$\sqrt{x^2+k^2}=k\sec\theta,\ dx=k\sec^2\theta\,d\theta。$$

用此等代替，被積函數即可改爲 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 之有理函數，而(12-9)節之方法復得應用。

例 1. 求 $\int\frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$。

令 $x=2\sin\theta$, 則 $dx=2\cos\theta\,d\theta$, $(4-x^2)^{\frac{3}{2}}=8\cos^3\theta$, 故

$$\int\frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{2\cos\theta\,d\theta}{8\cos^3\theta}=\frac{1}{4}\int\sec^2\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\tan\theta+C。$$

欲化 $\tan\theta$ 爲 x 之函數,可自 $\sin\theta=\frac{x}{2}$ 計得:

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2},$$

是以知

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}},$$

而上列結果即可寫爲

$$\int\frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{4\sqrt{4-x^2}}+C。$$

例 2 求 $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx$。

令 $x=a\sec\theta$, 則 $dx=a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$, $\sqrt{x^2-a^2}=a\tan\theta$

故
$$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx=\int\frac{(a\tan\theta)(a\sec\theta\tan\theta)d\theta}{a^4\sec^4\theta}$$
$$=\int\frac{\tan^2\theta}{a^2\sec^3\theta}d\theta=\int\frac{\cos\theta\sin^2\theta}{a^2}d\theta$$
$$=\int\frac{\sin^2\theta}{a^2}d\sin\theta=\frac{\sin^3\theta}{3a^2}+C;$$

欲化 $\sin\theta$ 爲 x 之函數,可自 $\sec\theta=\frac{x}{a}$ 計得

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2},$$

故
$$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx=\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^3}+C。$$

例 3. 求 $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}$。

因 $x^2+6x+13$ 可配爲兩平方之和，如 $(x+3)^2+4$，故如令$(x+3)=2\tan\theta$，則 $dx=2\sec^2\theta\,d\theta$，$\sqrt{x^2+6x+13}=2\sec\theta$。

如是
$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}=\int\frac{(2\tan\theta-3)2\sec^2\theta\,d\theta}{2\sec\theta}$$
$$=2\int\tan\theta\sec\theta\,d\theta-3\int\sec\theta\,d\theta$$
$$=2\sec\theta-3\ln(\sec\theta+\tan\theta)+C'$$
$$=\sqrt{x^2+6x+13}-3\ln\left[x+3+\sqrt{x^2+6x+13}\right]+C$$

C 與 C' 爲不同値之積分常數。(問其相差之數爲何？)

12-12. 分部積分法 前此所述之積分方法，均以適當之代替爲出發點，而將被積函數與其跟隨之微分，化爲已知之積分，如公式(1)至(10)者，然後計算之。此外尙有另一極重要之方法，係將欲求之積分，引用

$$d(uv)=v\,du+u\,dv \tag{24}$$

一基本微分關係，化爲已知或較易於計算之積分，此法名爲分部積分法(integration by parts)，實一銳利之工具，但初學者於未明其涵義之前，切勿亂用，以免有循環計算之弊！此法之理論如下：將方程(24)改寫爲

$$u\,dv=d(uv)-v\,du \tag{25}$$

再求其積分，乃得

$$\int u\,dv=\int d(uv)-\int v\,du=uv-\int v\,du \tag{26}$$

設 $\int f(x)\,dx$ 不易計算，但 $f(x)\,dx$ 可寫爲 $\left(u\dfrac{dv}{dx}\right)dx$，

且 $\int v\,du$ 頗易計算，則用方程(26)卽可計出 $\int f(x)\,dx=\int u\,dv$。

例 1. 求 $\int \ln x\cdot dx$。

若以 $u=\ln x$, $dv=dx$ 或 $v=x$，則 $du=\dfrac{dx}{x}$，而

$$\int\underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv}=\underbrace{x}_{v}\,\underbrace{\ln x}_{u}-\int\underbrace{x}_{v}\,\underbrace{\frac{dx}{x}}_{du}=x\ln x-x+C。$$

例 2. 求 $\int \sin^{-1}x\,dx$

令 $u=\sin^{-1}x$, $dv=dx$, 或 $x=v$。因 $du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$，

故
$$\int\underbrace{\sin^{-1}x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv}=\underbrace{x}_{v}\,\underbrace{\sin^{-1}x}_{u}-\int\underbrace{x}_{v}\,\underbrace{\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{du}$$

$$=x\sin^{-1}x+\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+C。$$

例 3. $\int x\tan^{-1}x\,dx=\dfrac{1}{2}\int\underbrace{\tan^{-1}x}_{u}\,\underbrace{d(x^2)}_{dv}$

$$=\frac{1}{2}\underbrace{x^2}_{v}\underbrace{\tan^{-1}x}_{u}-\frac{1}{2}\int\underbrace{x^2}_{v}\underbrace{d\tan^{-1}x}_{du}$$

$$=\frac{1}{2}x^2\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2\,dx}{1+x^2}$$

$$=\frac{x^2\tan^{-1}x}{2}-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\frac{x^2\tan^{-1}x}{2}-\frac{x}{2}+\frac{\tan^{-1}x}{2}+C。$$

例 4. $\int x^2 e^x dx=\int\underbrace{x^2}_{u}\underbrace{d\,e^x}_{dv}=\underbrace{x^2}_{u}\underbrace{e^x}_{v}-\int\underbrace{e^x}_{v}\underbrace{d(x^2)}_{du}$

$$=x^2e^x-2\int xe^x\,dx;$$

再用分部積分法於$\int xe^x\,dx$,乃有

$$\int x^2e^x\,dx=x^2e^x-2\int x\,de^x=x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^x\,dx\right)$$
$$=x^2e^x-2x\,e^x+2\,e^x+C=(x^2-2x+2)e^x+C。$$

在例(1)至(3)中,因 $\ln x$, $\sin^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ 之紀數爲代數函數,故分別令之爲 u, 而此法乃生效。在例(4)中, x^2 與e^x 雖均易積分,但必須令 $u=x^2$, 然後 x 之指數方可遞減於 0 如上。若誤令 $u=e^x$, 及 $x^2dx=d\left(\frac{x^3}{3}\right)$, 則分部積分後, x 之指數將反增高,而與本法之用意背道而馳!又者,既將所求之積分化簡爲求$\int xe^x\,dx$,則仍應本原來用意,再令 $v=e^x$ 而簡化之。若復誤以 $e^x=v$, $dv=x\,dx$, 則將回至原有之積分$\int x^2e^x\,dx$, 而前功將盡棄矣!

例 5. $$\int\underbrace{\sqrt{a^2-x^2}}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv}=\underbrace{x}_{v}\,\underbrace{\sqrt{a^2-x^2}}_{u}-\int\frac{x(-2x)dx}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{(a^2-x^2-a^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

右邊中項與左邊相同，符號相反，故移至左邊後再以 2 除之卽得

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+C。$$

讀者可注意在例(4)中，分部積分後右邊之新積分較左邊原積分爲簡；本例右邊則爲原積分乘以異於 1 之常數，故可移此項於左邊計之。有時經分部積分兩次後，方得原積分乘以異於 1 之常數，如下例。

例 6. $$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\int\underbrace{\cos bx}_{u}\,\underbrace{d\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)}_{dv}$$

$$=\underbrace{\frac{e^{ax}}{a}}_{v}\underbrace{\cos\ bx}_{u}-\int\underbrace{\frac{e^{ax}}{a}}_{v}\,\underbrace{d\cos bx}_{dv}$$

$$=\frac{e^{ax}}{a}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

$$=\frac{e^{ax}\cos bx}{a}+\frac{b}{a}\int\underbrace{\sin bx}_{u}\,\underbrace{d\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)}_{dv}$$

$$=\frac{e^{ax}\cos bx}{a}+\frac{b}{a}\left(\underbrace{\frac{e^{ax}}{a}}_{v}\underbrace{\sin\ bx}_{u}-\int\underbrace{\frac{e^{ax}}{a}}_{v}\,\underbrace{d\sin bx}_{du}\right)$$

$$=\frac{e^{ax}\cos bx}{a}+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx;$$

將第三項移至左邊乃得

$$\frac{a^2+b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C$$

或
$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}+C。$$

綜上以言，在未用分部積分法以前，吾人應先細察被積函數之形式，以定是否可用其他方法求之。如有其他代替或明顯之算法，則仍以採用之爲宜。至於用分部積分法時，眼光須特別放遠，以考慮應如何轉變問題，方可能有答案；否則循環計算，徒耗寶貴之光陰，而不得任何結果！

12-13．化簡公式　應用分部積分法，常可將欲求之積分中之被積函數簡化，使其次數減低如(12-12)節例(4)。此等化簡公式之應用，有時雖仍不免繁長，然有些函數，如(12-8)節(D)目，則非如是將無法以積分之，故亦屬重要積分方法之一種。茲舉數例以示之：

(A) $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$之化簡公式。

欲簡化此公式，須將 n 減少。茲先用分部積分法求

$$\int\underbrace{\frac{1}{(x^2+a^2)^m}}_{u}\underbrace{dx}_{dv}=\underbrace{\frac{x}{(x^2+a^2)^m}}_{uv}-\int\underbrace{x}_{v}\underbrace{\frac{(-2m\,x)dx}{(x^2+a^2)^{m+1}}}_{du}$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^m}+2m\int\frac{(x^2+a^2-a^2)}{(x^2+a^2)^{m+1}}dx$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^m}+2m\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^m}-2m\,a^2\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{m+1}},$$

即　$$2ma^2\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{m+1}}=\frac{x}{(x^2+a^2)^m}+(2m-1)\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^m}。$$

令 $m+1=n$，即 $m=n-1$，復將兩邊除以 $2ma^2=2(n-1)a^2$

則　$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$+\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\qquad(27)$$

例 1.　$$\int\frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}=\int\frac{dx}{[(x+1)^2+4]^2}=\int\frac{d(x+1)}{[(x+1)^2+4]^2}$$

$$=\frac{x+1}{2\times4(x^2+2x+5)}+\frac{1}{8}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4}$$

$$=\frac{x+1}{8(x^2+2x+5)}+\frac{1}{16}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C。$$

(B)　$\int\cos^n x\,dx$ 與 $\int\sin^n x\,dx$ 之化簡公式。

n 爲正奇數時，此等函數均甚易積分（見前 12-4 節）。若 n 非正奇數，計算則較繁，故此等化簡公式亦甚有用，其法如下：

$$\int\cos^n x\,dx=\int\underbrace{\cos^{n-1}x}_{u}\ \underbrace{d\sin x}_{dv}$$

$$=\underbrace{\cos^{n-1}x}_{u}\ \underbrace{\sin x}_{v}-\int\underbrace{\sin x}_{v}\ \underbrace{d\cos^{n-1}x}_{du}$$

$$=\cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\int\sin^2 x\cos^{n-2}x\,dx$$

$$=\cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\,dx-(n-1)\int\cos^n x\,dx,$$

移項後再除以 n，乃有

$$\int\cos^n x\,dx=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx\qquad(28)$$

用同樣方法，或以 $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 代方程(28)中之 x，即可證得

$$\int \sin^n x\,dx=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx \tag{29}$$

當 n 為正整數時，用公式(26)與(27)，即可將 n 減少。若 n 為負，則應將此等公式反用，即以 $-p=n-2$，p 為正數，而寫之為

$$\int \cos^{-p}x\,dx=\frac{1}{p-1}\cos^{1-p}x\sin x+\frac{2-p}{1-p}\int \cos^{2-p}x\,dx \tag{30}$$

$$\int \sin^{-p}x\,dx=\frac{1}{1-p}\sin^{1-p}x\cos x+\frac{2-p}{1-p}\int \sin^{2-p}x\,dx \tag{31}$$

例 2. $\int \sin^4 x\,dx=-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x+\frac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx$

$$=-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\sin x\cos x+\frac{1}{2}\int dx\right)$$

$$=-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x-\frac{3}{8}\sin x\cos x+\frac{3}{8}x+C。$$

例 3. $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx=\int (1-\cos^2 x)\cos^4 x\,dx$

$$=\int \cos^4 x\,dx-\int \cos^6 x\,dx$$

$$=\int \cos^4 x\,dx-\frac{1}{6}\cos^5 x\sin x-\frac{5}{6}\int \cos^4 x\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\int \cos^4 x\,dx-\frac{1}{6}\cos^5 x\sin x$$

然後再簡化之。

例 4. $\int \sec^3 x\,dx=\int \cos^{-3}x\,dx=\frac{1}{2}\cos^{-2}x\sin x+\frac{1}{2}\int \sec x\,dx$

$$=\frac{1}{2}\tan x\sec x+\frac{1}{2}\ln(\tan x+\sec x)+C。$$

(C) $\int \tan^n x\,dx$ 與 $\int \cot^n x\,dx$ 之化簡公式

因 $d\tan x=\sec^2 x$，且 $\tan^2 x=\sec^2 x-1$，欲簡化此公式，勿庸用分部積分法卽可得：

$$\begin{aligned}\int \tan^n x\,dx&=\int(\sec^2 x-1)\tan^{n-2} x\,dx\\&=\int \tan^{n-2} x\,d\tan x-\int\tan^{n-2}dx\\&=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-\int\tan^{n-2}x\,dx\end{aligned}\tag{32}$$

用同樣方法可得

$$\int \cot^n x\,dx=-\frac{\cot^{n-1}x}{n-1}-\int\cot^{n-2}x\,dx\tag{33}$$

例 5. $\int \cot^4\frac{x}{3}\,dx=3\int\cot^4\frac{x}{3}d\left(\frac{x}{3}\right)$

$$\begin{aligned}&=-\frac{3\cot^3\frac{x}{3}}{3}-3\int\cot^2\left(\frac{x}{3}\right)d\left(\frac{x}{3}\right)\\&=-\cot^3\frac{x}{3}+3\cot\left(\frac{x}{3}\right)+3\int d\left(\frac{x}{3}\right)\\&=x-\cot^{-3}\frac{x}{3}+3\cot\left(\frac{x}{3}\right)+C。\end{aligned}$$

12-14. 無限定積分 陳述定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 之定義時，吾人假定在 $x=a$ 至 $x=b$ 間隔內，$f(x)$ 爲x之連續函數，且 a 與 b 均爲有限値。今若 a 或 b 爲無限大，或於 a 至 b 間隔內一點，被積函數 $f(x)$ 爲無限大，則此定積分之意義爲何，倘須另行規定。玆名此種積分爲無限積分(infinite integral)。無限積分，實用上亦頗常見，玆分別述之，以作本章

之結束。

A. 上下限為無限大時　令 $f(x)$ 於 $x \geqq a$ 時恆為連續。若當 $t \to \infty$ 時，積分 $\int_a^t f(x)\,dx$ 有一極限，則此極限即以記號 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 表之，故據定義有

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx \tag{34}$$

令 $F(x)$ 表 $f(x)$ 之一不定積分，則上式亦可寫為

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty}\Big(F(x) - F(a)\Big) = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a)$$

$$= F(+\infty) - F(a) \tag{35}$$

方程(35)之形狀雖與(7-3)節方程(16)完全相似，然其所代表之意義，則不可不特加注意！仿此

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx。 \tag{36}$$

而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx \tag{37}$$

此中 c 為一任意實數。

例 1. $\int_0^t \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} t,\ \lim_{t\to\infty} \tan^{-1} t = \frac{\pi}{2}$；

故

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}。$$

例 2. $\int_1^t \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = 2t^{\frac{1}{2}} - 1$，

故

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{t\to+\infty} \left\{2t^{\frac{1}{2}} - 2\right\} = +\infty。$$

例 3. $\int_0^t \cos x\,dx=\sin t$; $t\to\infty$ 時 $\sin t$ 不趨於一極限,

故 $\int_0^{+\infty}\cos x\,dx$ 無意義。

B. 被積函數爲無限大時　設於 $x=a$ 至 $x=b$ $(b>a)$ 間隔內,除 b 點外 $f(x)$ 皆爲連續,而 $|f(b)|$ 則趨於∞。若當 $t\to b-$ 時,積分 $\int_a^t f(x)\,dx$ 有一極限,則吾人以記號 $\int_a^b f(x)\,dx$ 表此極限,即

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{t\to b-}\int_a^t f(x)\,dx \tag{38}$$

同樣,若 $|f(a)|=\infty$,則

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{t\to a+}\int_t^b f(x)\,dx \tag{39}$$

又若 $f(x)$ 於 a 至 b 間隔內之一值 c 變爲 $\pm\infty$,而除此之外均係連續,則 $\int_a^b f(x)\,dx$ 可以下列方程表之:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{t\to c-}\int_a^t f(x)\,dx+\lim_{t\to c+}\int_t^b f(x)\,dx \tag{40}$$

令 $F(x)$ 表 $f(x)$ 之一不定積分,則(40)可寫爲

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{x\to c-}F(x)-F(a)+F(b)-\lim_{x\to c+}F(x)$$

$$=F(b)-F(a)+\lim_{x\to c-}F(x)-\lim_{x\to c+}F(x) \tag{41}$$

若 $F(x)$ 於 $x=c$ 點爲連續,則 $\lim\limits_{x\to c-}F(x)$ 與 $\lim\limits_{x\to c+}F(x)$ 相等,方程(41)之結果可化爲

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a) \tag{42}$$

仍與(7-3)節之方程(16)無異。但若 $F(x)$ 非連續函數,則方程(42)不

能成立。

例 1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1-}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1-} \sin^{-1} t = \frac{\pi}{2}$。

例 2. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{-1}^1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$,

蓋被積函數$\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$於 $x=0$, 雖爲∞, 而其積分$\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 則係連續於是點,故可用方程(42)計之。

例 3. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to 0-}\int_{-1}^t \frac{dx}{x^2} + \lim_{t\to 0+}\int_t^1 \frac{dx}{x^2}$

$$= \lim_{t\to 0-}\left(-\frac{1}{t}\right) - 1 + (-1) - \lim_{t\to 0+}\left(-\frac{1}{t}\right)$$

$$= +\infty - 1 - 1 - (-\infty) = +\infty,$$

本題若誤用方程(42),則所得之結果將爲

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^1 = -1-1 = -2 \text{ 而大錯矣!}$$

第 十 二 章 習 題

1. 已與下列各函數 $f(x)$ 求 $F(x) = \int f(x)dx$:

(a) $\frac{x}{b^2+c^2x^2}$, (b) $\frac{1}{x\ln x \ln x \ln x}$,

(c) $e^{a\ln x} + e^{x\ln a}$ (d) $\frac{1}{x\ln x^2}$,

(e) $\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$; (f) $\frac{1}{1+e^x}$,

(g) $\left(\frac{1}{9+x^2}\right)\tan^{-1}\frac{x}{3}$; (h) $\frac{1}{\sqrt{a+x}+\sqrt{x}}$,

(i) $\dfrac{a+bx}{A+Bx}$　　(j) $\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}-\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$,

(k) $\dfrac{a\sqrt{bx}-b\sqrt{ax}}{x(\sqrt{ax}-\sqrt{bx})}$,　　(l) $\dfrac{x\sqrt{\ln(x^2+a^2)}}{x^2+a^2}$。

2. 已與以下之三角函數 $f(\theta)$，求 $F(\theta)=\int f(\theta)\,d\theta$:

(a) $\sin^{\frac{2}{3}}\theta\cos^3\theta$;　　(b) $\dfrac{\sin^3\theta}{1+\cos\theta}$,

(c) $\sin^4\theta\cos^2\theta$;　　(d) $\sin 3\theta\sin 5\theta$;

(e) $\cos\theta\cos 2\theta\cos 3\theta$;　　(f) $\tan^2\theta\sec^4\theta$;

(g) $(\sec 3\theta-\tan 3\theta)^2$;　　(h) $\cot^3\theta\csc^4\theta$;

(i) $\dfrac{1}{\sin^3\theta}$;　　(j) $\dfrac{\cot\theta}{\sin\theta-1}$;

(k) $\dfrac{1}{\sin^3\theta\cos^3\theta}$,　　(l) $\dfrac{1}{\sin\theta(a+b\cos\theta)}$;

(m) $\dfrac{(1+\sin\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$;　　(n) $\dfrac{1}{\sin\theta+\tan\theta}$,

(o) $\dfrac{1}{2\csc\theta-\sin\theta}$,　　(p) $\dfrac{1}{3+2\cos\theta}$。

3. 已與下列各有理函數 $f(u)$，求 $F(u)=\int f(u)\,du$:

(a) $\dfrac{2u+5}{u^2+2u+5}$;　　(b) $\dfrac{u^2-u+3}{u^4-5u^2+4}$;

(c) $\dfrac{u+2}{\sqrt{4u^2-u}}$;　　(d) $\dfrac{2u^2-u-1}{2u^3-2u^2-u}$;

(e) $\dfrac{3u^2-8u-1}{(u-1)^3(u+2)}$;　　(f) $\dfrac{5-7u}{u^4-2u^3+5u^2}$,

(g) $\dfrac{1}{(u-1)^2(u^2+1)^2}$,　(h) $\dfrac{(2u^2-7)}{(u^2-3u+4)(u^2-3u+1)}$,

(i) $\dfrac{1}{(u^3-1)^2}$,　(j) $\dfrac{u^4+18u^2-28u}{(u+2)(u^2-2u+4)^2}$。

4. 已與以下之 $f(y)$，試用適當之代替而求 $F(y)=\int f(y)dy$:

(a) $\dfrac{y}{(1+y)^{\frac{1}{2}}+(1+y)^{\frac{1}{3}}}$,　(b) $\dfrac{y}{(a+by)^{\frac{3}{2}}}$,

(c) $(a+y)^{\frac{2}{3}}y^3$;　(d) $y^3\,(a+y^2)^{\frac{1}{3}}$;

(e) $\dfrac{(1+y^3)^{\frac{2}{3}}}{y}$;　(f) $y^3\sqrt{a^2+y^2}$;

(g) $\dfrac{\sqrt{(y^2-a^2)^3}}{y}$;　(h) $\sqrt{2ay-y^2}$;

(i) $y\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}$;　(j) $\sqrt{a^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}$;

(k) $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{a-y}}$;　(l) $\dfrac{\sqrt{y}-\sqrt{a}}{\sqrt{y+a}}$,

(m) $\sqrt{y(1+y^3)}$;　(n) $(9+y^2)^{-\frac{3}{2}}$;

(o) $\dfrac{y^4}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}}$;　(p) $\dfrac{1}{y\sqrt{8y^2+6y+1}}$;

(q) $\dfrac{1}{y^2\sqrt{27y^2+6y-1}}$。

5. 用分部積分法，求以下 $f(x)$ 之 $F(x)=\int f(x)dx$:

(a) $(a^2+x^2)\ln(a^2+x^2)$;　(b) $x^2\ln\ln x$;

(c) $x^2\sin^{-1}x$;　(d) x^3e^{2x};

(e) $\sqrt{x^2+a^2}$;　(f) $x\sin 2x$;

(g) $\tan^2 x \sec x$,　　(h) $\sec^5 x$;

(i) $e^{ax}\sin(bx+c)$;　　(j) $e^{3x}\sin 3x\cos x$;

(k) $\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x$;　　(l) $\dfrac{\tan^{-1}\sqrt{x}}{x^2}$,

(m) $x\,e^{ax}\cos bx$;　　(n) $x\ \sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$。

6. 求以下各積分之化簡公式:

(a) $\displaystyle\int\frac{x^n}{\sqrt{a+bx}}dx$;　　(b) $\displaystyle\int x^n e^{ax}\,dx$;

(c) $\displaystyle\int x^m\cos^n x\,dx$;　　(d) $\displaystyle\int x^m\sin^n x\,dx$;

(e) $\displaystyle\int e^{ax}\tan^n x\,dx$;　　(f) $\displaystyle\int e^{ax}\cot^n x\,dx$。

7. 求以下各積分:

(a) $\displaystyle\int\sqrt{x+\sqrt{2+x}}\,dx$;　　(b) $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$;

(c) $\displaystyle\int\frac{[(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+x]^n}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}dx$;　　(d) $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)^2}dx$;

(e) $\displaystyle\int\frac{1}{a^2+b^2\cos^2 x}dx$;　　(f) $\displaystyle\int\frac{1}{a+b\tan x}dx$;

(g) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sin(a+x)}dx$;　　(h) $\displaystyle\int\frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2+x^4}}dx$。

8. 求下列諸曲線所包圍之面積:

(a) 橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

(b) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$;

(c) $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$及其漸近線 $x=2a$;

(d) $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$;

(e) $16a^3y^2=b^2x^2(a-2x)$,

(f) $r\cos\theta=a\cos 2\theta$;

(g) $r^2\cos\theta=a^2\sin 3\theta$;

(h) $r^2=\frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}$。

9. 求下列諸曲線之弧長:

(a) 抛物線 $r=\frac{2a}{1+\cos\theta}$ 自 $\theta=0$ 至 $\theta=\frac{\pi}{2}$;

(b) 螺線 $r=\frac{1}{\theta}$, 自 $\theta=1$ 至 $\theta=\frac{1}{2}$;

(c) 蔓葉線(cissiod) $r=2a\tan\theta\sin\theta$ 自 $\theta=0$ 至 $\theta=\frac{\pi}{4}$;

(d) 次擺線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 之全長;

(e) $3ay^2=x(x-a)^2$。

10. 求以下二曲線之方程式:

(a) 斜度爲 xy, 通過$(2,1)$點;

(b) 斜度爲$\frac{xy}{1+x^2}$通過$(0,1)$點。

11. 求心形曲線 $r=2a(1-\cos\theta)$ 與圓 $r=2a\cos\theta$ 間之公共面積。

12. 求外擺線(epicycloid): $x=(a+b)\cos\theta-b\cos\left(\frac{a+b}{b}\theta\right)$,

$$y=(a+b)\sin\theta-b\sin\left(\frac{a+b}{b}\theta\right)$$

一拱之長；自所得結果推計次擺線 (hypocycloid) 一拱及心形曲線之長。

13. 用 $t=x+\sqrt{a+bx+x^2}$ 爲變數以求下列諸積分 (a 與 b 爲適當之常數)：

(a) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$, (b) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+2}}$,

(c) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x+1}}$, (d) $\int\frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2}dx$;

(e) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$。

14. 若 $a+bx-x^2=(x-A)(B-x)$，A 與 B 均爲實數，試以

$t=\frac{\sqrt{a+bx-x^2}}{x-A}$ 或 $\frac{\sqrt{a+bx-x^2}}{B-x}$ 爲變數而求下列諸積分：

(a) $\int\frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$, (b) $\int\frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$,

(c) $\int\frac{x\,dx}{(2+3x-2x^2)^{\frac{3}{2}}}$, (d) $\int\frac{dx}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}$,

(e) $\int\frac{dx}{x\sqrt{5-4x-x^2}}$。

15. 試討論 $\int x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}dx$ 之化簡公式，此中 m, n, r 及 s 均爲整數，且 n 爲正。試由是求

(a) $\int x^3(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx$; (b) $\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$;

(c) $\int x^5(1+x^2)^{\frac{2}{3}}dx$; (d) $\int\frac{dx}{x^2(a+x^2)^{\frac{5}{3}}}$,

(e) $\int\frac{dx}{x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$,　　(f) $\int\frac{x^2\,dx}{(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}}$。

16．試令 $t=\frac{1}{x}$ 以求下列諸積分：

(a) $\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$,　　(b) $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}}$,

(c) $\int\frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}dx}{x^4}$,　　(d) $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$。

17．$\int_0^{2\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\begin{cases}0, & 若\ m\neq n,\\ \pi, & 若\ m=n。\end{cases}$

$\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\begin{cases}0, & 若\ m\neq n,\\ \pi, & 若\ m=n。\end{cases}$

18．示明以下各定積分：

(a) $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{4}$,

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-k^2\sin^2 x}=\frac{\pi}{2\sqrt{1-k^2}}$, $k^2<1$;

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$

$$=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(n)}\cdot\frac{\pi}{2}\ \text{如}\ n\ \text{爲偶數；}$$

$$=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(n-1)}{1\cdot3\cdot5\cdots(n)}\quad\text{如}\ n\ \text{爲奇數。}$$

(d) $\int_0^{\pi}\frac{x\,dx}{1+a\sin x}=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)dx}{1+a\sin x}$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\right),\ \text{如}\ |a|<1;$$

$=\pi$，如 $a=1$；

$=\infty$，如 $a=1$；

$=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}\ln(a+\sqrt{a^2-1})$，如 $|a|>1$。

(e) $\int_0^\infty \frac{du}{(u^2+1)^n}=\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 2}\frac{\pi}{2}$。

19. 求以下各無限積分：

(a) $\int_3^\infty \frac{dx}{x^2-2x}$， (b) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{\frac{4}{3}}}$；

(c) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+5}$， (d) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$，

(e) $\int_{-a}^0 \frac{dx}{x^2}$，$a>0$； (f) $\int_{-a}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$，$a>0$。

20. 試以圓 $x^2+y^2=a^2$ 內之適當面積解釋

$$\int_{-t}^t \sqrt{a^2-x^2}\,dx=t\sqrt{a^2-t^2}+a^2\sin^{-1}\frac{t}{a}。$$

（參考12-12節例 5）。

21. 茲用下列各關係爲雙曲線函數(hyperbolic function)之三基本定義：

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}; \quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}; \quad \tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}。$$

試示 $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$，

$\int \sinh x\,dx=\cosh x+C$，及 $\cosh x\,dx=\sinh\int x+C$。

22. 令 $y=\sinh x$ 與 $x=\sinh^{-1}y$，$y=\cosh x$ 與 $x=\cosh^{-1}y$ 及 $y=\tanh x$ 與 $x=\tanh^{-1}y$ 分別爲三個相應之同意義的方程。試自前題之定義示明：

$$\sinh^{-1}y=\ln(y+\sqrt{y^2+1}),$$

$$\cosh^{-1}y=\ln(y+\sqrt{y^2-1}),$$

及
$$\tanh^{-1}y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)。$$

若以 $u=\cosh x$, $u=\sinh x$ 或 $u=\tanh x$ 為代替，試示

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\cosh^{-1}u+C,\int\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}=\sinh^{-1}u+C,$$

及
$$\int\frac{du}{1-u^2}=\tanh^{-1}u+C。$$

並以之與基本公式(9)'及(10)相比較。

第十三章　體積、面積、及質量

13-1．定積分之應用　第七章討論定積分時，特別注重其意義及基本算法。因當時所授之積分方法甚爲有限，故對於定積分之應用，僅以平面面積爲例。茲已說明較重要之積分方法，其應用自可再爲推廣。爲簡便起見，吾人此後均將由題意先求一微分關係如（參考 7-4 節方程 17）

$$du=f(x)dx \tag{1}$$

者，而逕由之以計得在適當之上下限 x_2 及 x_1 內之定積分：

$$u=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx \tag{2}$$

如是排列方程，雖未盡嚴格，但如有必要，讀者固可仿(7-2)及(7-3)各節所述無限和與定積分之關係逐步推演之也。

13-2．旋轉體之體積　設 AB 爲曲線 $y=f(x)$ 在 $x=x_1$ 至 $x=x_2$ 間隔內之弧。若以平面 $DCBA$（圖 13-1）繞 X 軸旋轉一周，卽得一旋轉體(solid of revolution)。茲述求此體積之算法。

設於橫坐標爲 x 與 $x+dx$ 之 P 與 Q 兩點之處各畫縱線 PS 與 QR 將 $DCBA$ 面積截出一細條 $PQRS$ 如圖(13-1)。當 $DCBA$ 面積繞 X 軸旋轉一周時，此細條所旋成之形狀與一薄圓片甚近似。圓片之厚爲 dx，其半徑約爲 $PS=y$。因此，若薄片之厚無限減小，卽 dx 爲無窮小，則薄片之體積 dV 亦爲無窮小，二者之關係爲

$$dV=\pi\, y^2\, dx \tag{3}$$

今若將 $DCBA$ 面積分爲無數細條，則所求之體積將爲類似上述之各薄

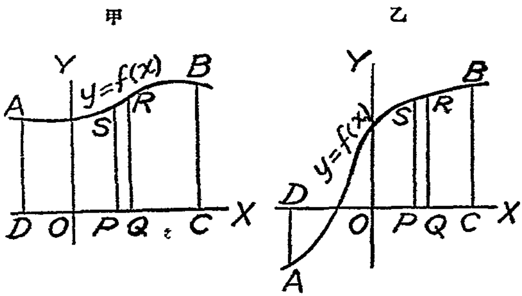


圖 13-1

圓片體積之總和。是故以 $x=x_2$ 及 $x=x_1$ 爲上下限而計方程(3)之定積分，即可得所求旋轉體之體積：

$$V=\int_{x_1}^{x_2}\pi\, y^2\, dx=\pi\int_{x_1}^{x_2}[f(x)]^2 dx \tag{4}$$

因 y^2 永爲正，故不論 $y=f(x)$ 曾否與 X 軸相交，只須 $x_2>x_1$，方程(4)之體積卽爲正。換言之，若曲線曾與 X 軸相交如圖(13-1)乙，則旋轉體將類似兩個錐體，其體積仍可由方程(4)計之。

例 1. 求橢圓球之體積。

橢圓球可以橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 之上半繞 X 軸旋轉一周而成，因 $y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$，且球之左右兩端（卽橢圓與 X 軸交點）爲 $x=\pm a$，故所求之體積爲：

$$V=\int_{-a}^{a}\pi\, y^2\, dx=\pi\int_{-a}^{a}b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

$$=\pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a}=\pi b^2\left\{\left(a-\frac{a}{3}\right)-\left(-a+\frac{a}{3}\right)\right\}$$

$$=\frac{4\pi b^2 a}{3}。$$

在本題中讀者應注意橢圓曲線$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$雖有上下兩半，但只須用其上半旋轉一周，即可得所求之物體。又因自 $x=-a$ 至 $x=0$ 與自 $x=0$ 至 $x=a$ 之半橢圓球，其體積完全相等，故所欲求之體積，亦可視爲半橢圓球之兩倍。惟半橢圓球之體積爲

$$\pi\int_0^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi\int_{-a}^0 b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx,$$

故所求之體積爲

$$V=2\pi\int_0^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

或
$$2\pi\int_0^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi\int_{-a}^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx;$$

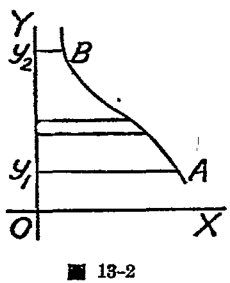


圖 13-2

由是知凡所求之體積可分爲兩個相等部分時，其下限（或上限）可改爲較簡之值，例如0，而將所得之結果乘2。

本例之球係以 X 軸爲旋轉軸，今若將 $x=g(y)$ 曲線繞 Y 軸旋轉，如圖(13-2)則仿方程(3)及(4)，即可推出所得之體積爲：

$$V'=\pi\int_{y_1}^{y_2}x^2\,dy \tag{5}$$

例 2. 若將前例之橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$之右半繞 Y 軸旋轉一周，則

所得之體積爲

$$V'=2\pi\int_0^b x^2\,dy=2\pi\int_0^b a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy$$

$$=2\pi a^2\left(y-\frac{y^3}{3b^2}\right)\Big|_0^b=\frac{4\pi ba^2}{3}。$$

V 與 V' 所表之兩體積,其一係橄欖形之橢圓球(prolate ellipsoid),其他則爲扁形橢圓球(oblate ellipsoid)。

例 3. 將 $x=-\frac{\pi}{3}, x=\frac{2\pi}{3}, y=\frac{x}{\pi}$ 及 $y=\sin x$ 四線所包圍之面積,圖(13-3),旋轉於 X 軸,問所得之體積爲何?

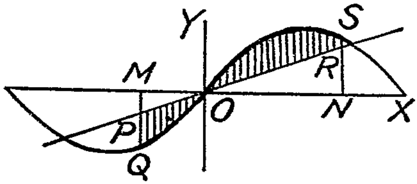


圖 13-3

所求之體積 V 爲 $MQOSN$ 與 $MPORN$ 兩面積旋轉於 X 軸所成兩體積之差。前者爲

$$V_1=\pi\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sin^2 x\,dx=\pi\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sin(4\pi/3)}{2}+\frac{\pi}{3}-\frac{\sin(2\pi/3)}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{2}$$

後者則為

$$V_2=\pi\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(\frac{x}{\pi}\right)^2dx=\frac{x^3}{3\pi}\Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}=\frac{\pi^2}{3}\left(\frac{8}{27}+\frac{1}{27}\right)=\frac{\pi^2}{9},$$

故
$$V=V_1-V_2=\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{9}=\frac{7\pi^2}{18}。$$

例 4. 將擺線一拱繞 X 軸旋轉一周，問所得體積爲何？擺線參變方程爲

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t);$$

其一拱與 X 軸相交之點爲 $x=0$ 與 $x=2\pi a$。若將自變數改爲 t，則當 $x=0$ 時 $t=0$；當 $x=2\pi a$ 時，$t=2\pi$。故所求之體積爲

$$V=\int_0^{2\pi a}\pi y^2\,dx=\int_0^{2\pi}\pi a^2(1-\cos t)^2a(1-\cos t)\,dt$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2t-\cos^3t)\,dt$$

$$=\pi a^3\left\{t-3\sin t+\frac{3}{2}(t+\sin t\cos t)-\left(\sin t-\frac{\sin^3 t}{3}\right)\right\}_0^{2\pi}$$

$$=\pi a^3(2\pi+3\pi)=5\pi^2a^3。$$

例 5. 將心形曲線 $r=a(1-\cos\theta)$ 旋轉於 X 軸一周，求所成之體積，(圖 13-4)。

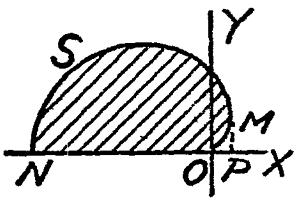


圖 13-4

若以 θ 爲參數，則此曲線之參變方程將爲：

$$x=a(1-\cos\theta)\cos\theta,$$

$$y=a(1-\cos\theta)\sin\theta=a\left(\sin\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right)。$$

玆先求 M 點之坐標(圖13-4)。在 M 點 $\frac{dy}{dx}=\infty$，卽

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos\theta-\cos 2\theta}{-\sin\theta+2\cos\theta\sin\theta}=\infty,$$

因 $\cos\theta-\cos 2\theta$ 爲有限,故上列方程表示

$$-\sin\theta+2\cos\theta\sin\theta=0,$$

卽 $\sin\theta=0$ 或 $\cos\theta=\frac{1}{2}$，卽 $\theta=0$ 或 π，及 $\theta=\frac{\pi}{3}$,惟 $\theta=0$，$r=0$ 係 O 點（該點之斜度並非∞），$\theta=\pi$，$r=2a$ 係 N 點，故 M 點之極坐標爲 $\theta=\frac{\pi}{3}$,$r=\frac{a}{2}$,其 X 坐標乃 $x=\frac{a}{2}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a}{4}$。今若求自 $x=-2a$(N 點)至 $x=\frac{a}{4}$(P 點)之定積分 $\int y^2\,dx$，所得者將爲 $NSMP$ 面積旋轉而成之體積 V_1。自此減去 OMP 面積旋轉而成之體積 V_2，方爲所求心形之體積 V。但

$$V_1=\pi\int_{-2a}^{\frac{a}{4}} y^2\,dx$$

$$=\pi a^3\int_{\pi}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\theta(1-\cos\theta)^2(2\cos\theta\sin\theta-\sin\theta)\,d\theta$$

$$=\pi a^3\int_{\pi}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)\,d\theta \tag{6}$$

此中 $f(\theta)=\sin^2\theta(1-\cos\theta)^2(2\cos\theta\sin\theta-\sin\theta)$

$$=(1-\cos^2\theta)(1-\cos\theta)^2(2\cos\theta-1)\sin\theta \tag{7}$$

同樣,因在 $\theta=0$ 至 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 間隔內，y 及 x 與 θ 之關係仍可用前此之方程表之,故

$$V_2=\pi\int_0^{\frac{a}{4}} y^2dx=\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta \tag{8}$$

是以 $V=V_1-V_2=\pi a^3\left\{\int_\pi^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta\right\}$

$$=\pi a^3\left\{\int_\pi^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^0 f(\theta)d\theta\right\}=\pi a^3\int_\pi^0 f(\theta)d\theta \tag{9}$$

再以 $u=\cos\theta$ 代入,於 $\theta=\pi$ 時, $u=-1$; $\theta=0$ 時, $u=1$, 故得

$$V=\pi a^3\int_{-1}^1 -(1-u^2)(1-u)^2(2u-1)du$$

$$=\pi a^3\int_1^{-1}(-1+4u-4u^2-2u^3+5u^4-2u^5)du$$

$$=\pi a^3\left(-u+2u^2-\frac{4}{3}u^3-\frac{u^4}{2}+u^5-\frac{u^6}{3}\right)_1^{-1}$$

$$=\pi a^3\left(\left(1+2+\frac{4}{3}-\frac{1}{2}-1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+2-\frac{4}{3}-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$=\pi a^3\left(2+\frac{8}{3}-2\right)=\frac{8\pi a^3}{3}。$$

本例之(6)、(8)、(9)各方程所表示之關係甚爲重要。方程(9)表示所求定積分之上下限可逕用 O 與 N 點之坐標而不必顧及 M 點。凡遇原係由兩積分相減(例如 V_1 與 V_2)而得之結果,其被積函數〔例如 $f(\theta)$〕之值,於參數 θ 自下限(例如 N)經過中間之 M 點連續變至上限 O 點時,均爲單值的,則〔自 N 至 M 之 $f(\theta)d\theta$ 之定積分〕減去〔自 O 至 M 之 $f(\theta)d\theta$ 之定積分〕,即等於〔自 N 至 O 之 $f(\theta)d\theta$ 之定積分〕。此理與(自 n

至 m 之線段)，減去(自 O 至 m 之線段)即得(自 n 至 O 之線段)一理頗爲相似。

13-3. 截面已知的物體之體積　前節所述求體積之方法可以擴展之於截面已知的物體。此蓋因方程(3)中之 πy^2 實即旋轉體之截面積 A 也。設在物體上，圖(13-5)，任取一直線爲 X 軸，而在此直線上任取一點爲原點 O。若於距 O 爲 x 及 $x+dx$ 之處，作兩平面與 X 軸垂直，則可自物體割出一薄片，厚爲 dx，其截面 A 顯然爲 x 之函數。當 dx 爲無窮小時，此薄片之體積 dV 亦爲無窮小，二者之關係即爲

$$dV = A\,dx \tag{10}$$

是即方程(3)之較普遍公式。今假定物體上各截面如 A 者，其與 x 之關係已知，則將類似方程(10)之各薄片之體積相加，即得物體之總體積 V。換言之，用適當之上下限 x_1 與 x_2 而計方程(10)之定積分，即得

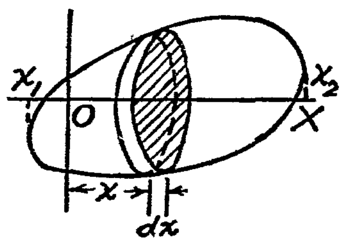


圖 13-5

$$V = \int_{x_1}^{x_2} A\,dx \tag{11}$$

例 1. 求橢圓體之體積。

前節兩例所討論之橢圓球，乃以橢圓旋轉而成。至於普通橢圓體之各截面(縱、橫、及側)則均爲橢圓，形頗似橄欖，但非旋轉體。令其三"半軸"之長分別爲 a, b 及 c。茲取 X 軸之方向與長爲 a 之半軸脗合，而令原點 O 位於體之中心如圖(13-6)，即 $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$。在距原點爲 x 之 P 點處，作正交於 X 軸之平面 $QRQ'R'$，此平面自體所截出

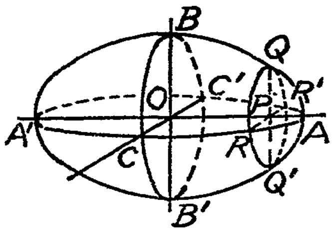


圖 13-6

之截面係一橢圓，其半軸分別爲 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{PR}$。Q 點既係位在半軸爲 a 及 b 之 $AQBA'B'Q'$ 橢圓上，故若 Q 之坐標爲(x,y)，其所滿足之方程應爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，或 $\overline{PQ}=y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$。同理，因 R 係位在半軸爲 a 及 c 之 $ARC\,A'\,C'\,R'$ 橢圓上，故半軸 $\overline{PR}=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$。但橢圓 $QRQ'R'$ 之面積 A 係等於 $\pi\times\overline{PQ}\times\overline{PR}$，即

$$A=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

且體左右兩端之 X 坐標分別爲 $-a$ 及 a，故所求之體積爲

$$V=\int_{-a}^{a}A\,dx=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)_{-a}^{a}$$

$$=2\pi bc\left(a-\frac{a}{3}\right)=\frac{4\pi}{3}abc。$$

例 2. 設有兩個正交同大之正圓柱，半徑爲 a，問其公有之體積爲何？

爲便於作圖起見，圖(13-7)僅示此體之八分之一。OB 表縱立圓柱之軸，$ASCO$ 表其圓截面之四分之一；OC 表橫臥圓柱之軸，$AQBO$ 表其圓截面四分之一。令 X 軸取 OA 方向。於 $OP=x$ 處，竪一平面與

OX 正交。此平面與橫柱相交於 QR 直線而與縱柱相交於 SR 直線。因 QR 及 SR 係分別與 CC 及 OB 平行，故知 $PQ \parallel SR$，$PS \parallel QR$，且因半徑 $OQ=OS$，故 $PQRS$ 係一正方形，其面積遂爲 $\overline{PQ}^2$。惟 $OP=x$，$OQ=a$（圓柱半徑），故 $\overline{PQ}^2=a^2-x^2$ 而在 P 處薄片之體積遂爲

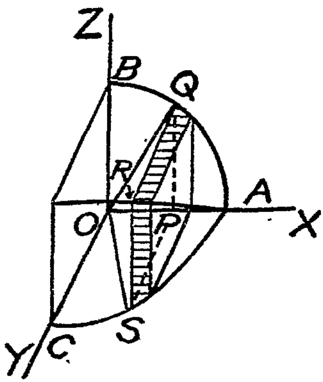


圖 13-7

$$dV=\overline{PQ}^2\,dx=(a^2-x^2)dx。$$

所求之體積 V 既爲圖中所示之八倍，

故 $$V=8\int_0^a (a^2-x^2)dx=8\left\{a^2x-\frac{x^3}{3}\right\}_0^a=\frac{16}{3}a^3。$$

13-4. 旋轉體之面積　設自 $x=x_1$ 至 $x=x_2$ 間隔內，$y=f(x)$ 曲線之弧 AB 全在 X 軸之上（圖 13-8），卽 y 之値均爲正，且爲單値的。茲將 AB 繞 X 軸旋一周；其所成之面積，亦可仿(13-2)節法求之。在 $OP=x$ 及 $OQ=x+dx$ 之處豎縱線 PS 及 QR。將 AB 弧截出一段 $SR=ds$。此短段繞 X 軸旋一周所成之面積將與一正圓錐截體之旁面積相彷彿。若 ds 爲無窮小，則此薄截體之斜高可視爲卽等於 ds，而其兩底面周線之平均長將爲 $2\pi y$，故其旁面積 dA 爲

$$dA=2\pi y\,ds \tag{12}$$

所求旋轉體面積卽爲類似上述薄截體之旁面積之總和。若令 x 爲自變數，則 $ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$，而所求面積爲

$$A=\int_{x_1}^{x_2} 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$=2\pi\int_{x_1}^{x_2} f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \qquad (13)$$

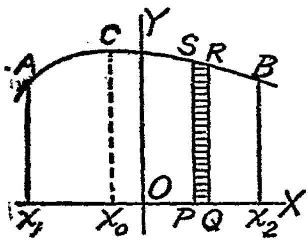


圖 13-8

方程(13)亦可改用 y 爲自變數，但此時表 AB 弧之曲線 $x=g(y)$ 須爲 y 之單值函數，否則須分爲數支而討論之。例如在圖（13-8）中，弧 AB 須先分爲 AC 及 CB 兩部分。在 AC 部分內因 y 係漸增，故 dy 爲正，而

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy=\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy,$$

至於在 CB 部分內，因 y 漸減，故 dy 爲負，而 ds 之絕對值應爲

$$ds=-\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy=-\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy。$$

如是若 A,B,C 三點之坐標分別爲 y_1, y_2 及 y_c，則 AC 弧所旋成之面積爲

$$A_1=2\pi\int_{y_1}^{y_c} y\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy=2\pi\int_{y_1}^{y_c}\phi(y)dy,$$

假定 $\phi(y)=y\sqrt{1+[g'(y)]^2}$；而 CB 弧所旋成之面積則爲

$$A_2=2\pi\int_{y_c}^{y_2} y\left(\sqrt{1+[g'(y)]^2}\right)dy=-2\pi\int_{y_c}^{y_2}\phi(y)dy,$$

總面積遂爲

$$A=A_1+A_2=2\pi\int_{y_1}^{y_0}\phi(y)dy-2\pi\int_{y_c}^{y_2}\phi(y)dy \tag{14}$$

讀者當已注意方程(14)絕不與 $2\pi\int_{y_1}^{y_2}\phi(y)dy$ 相等！因此爲免除誤會起見，此後將不用此方程。

此外若 y 可直接表爲 s 之函數，或 y 與 s 均可表爲另一參數 t 之函數，只須在所規定之間隔內，y 爲 s 或 t 之單值正函數，即 $y(s)=Y(t)$，而自弧之一端 A（即 $s=s_1$，或 $t=t_1$）移至弧之他端 B（即 $s=s_2$ 或 $t=t_2$）時，s 與 t 係恆增，則〔參考 13-2 節例 5 之方程(6)，(8)及(9)〕

$$A=2\pi\int_{s_1}^{s_2}[y(s)]ds=2\pi\int_{t_1}^{t_2}\left(Y(t)\frac{ds(t)}{dt}\right)dt \tag{15}$$

之值亦爲所欲求之面積。此方程之應用，有時較方程(13)更便。

例 1.　設以 $2mx=y^2$ 旋於 X 軸而成一拋物面。若欲得 $\frac{2\pi}{3}m^2$ 面積，且弧之一端係自 $x=0$ 起，問其他端之坐標 x 爲何？

$$A=2\pi\int_0^x y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=2\pi\int_0^x y\sqrt{1+\frac{m^2}{y^2}}\,dx$$

$$=2\pi\int_0^x\sqrt{m^2+y^2}\,dx=2\pi\int_0^x\sqrt{m^2+2mx}\,dx$$

$$=\frac{2\pi}{3m}(m^2+2mx)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x=\frac{2\pi}{3}m^2\left\{\left(1+\frac{2x}{m}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right\}$$

但　$A=\dfrac{2\pi m^2}{3}$，故 $1=\left(1+\dfrac{2x}{m}\right)^{\frac{3}{2}}-1$，而 $x=\dfrac{m}{2}\left(2^{\frac{2}{3}}-1\right)$。

例 2.　求擺線一拱旋轉於 X 軸所成之表面面積。

擺線參變方程爲 $x=a(t-\sin t)$ 及 $y=a(1-\cos t)$。茲以 t 爲自變數。因一拱擺線兩端之 t 分爲 $t=0$ 及 $t=2\pi$，且

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\ dt$$

$$=a\sqrt{2(1-\cos t)}\ dt,$$

故
$$A=2\pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)}\ dt$$

$$=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\ dt=16\ \pi a^2\int_0^{2\pi}\left(\cos^2\frac{t}{2}-1\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right)$$

$$=16\pi a^2\left(\frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}-\cos\frac{t}{2}\right)_0^{2\pi}$$

$$=16\pi a^2\left\{\left(-\frac{1}{3}+1\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right\}=\frac{64}{3}\pi a^2。$$

例 3. 求心形曲線 $r=a(1-\cos\theta)$ 旋於其始線之面積。

所求面積，自圖(13-4)言之，似應分爲兩部分，其一爲 NSM 弧所產生者，其他則爲 OM 弧所產生者，但若以 θ 爲自變數，則當 θ 自 0 連續增至 π 時，曲線卽可自 O 經 M 及 S 而被描至 N，且因

$$y=r\sin\theta=a(1-\cos\theta)\sin\theta,$$

$$ds=\sqrt{(rd\theta)^2+(dr)^2}=a\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\ d\theta$$

$$=2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta,$$

故
$$y\,ds=2a^2(1-\cos\theta)\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}d\theta,$$

其中 $2a^2(1-\cos\theta)\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}=8a^2\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{osc}\frac{\theta}{2}$ 一函數自 $\theta=0$ 至 $\theta=\pi$ 乃 θ 之單值正函數。是以求面積時，可逕用方程(15)而計之爲

$$A=2\pi\int_{\theta_1=0}^{\theta_2=\pi}y\ ds=16\ \pi a^2\int_0^{\pi}\sin^4\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{32}{5}\pi a^2 \sin^5\frac{\theta}{2}\Big|_0^\pi=\frac{32}{5}\pi a^2。$$

本例算法與前此(13-2)節例(5)算法之理論實係相同，雖則前例爲兩體積相減而本例則爲兩面積相加，此爲讀者須特加注意之點！

13-5．密度及質量　與面積及體積相類似之問題爲密度不均勻的物體之質量。密度(density)之意，係指每單位體積(volume)內物體所含之質量(mass)。故按此定義，如物體之密度係均勻的，則其質量 m，密度 q 及體積 V 有下述關係：

$$m=qV \tag{16}$$

若物體之密度非均勻的，而欲計其質量，則可先將物體分爲甚多之小體積或元體 (element)。此等元體之形狀、大小、位置、及分法除必須滿足一條件外，別無限制。此條件爲：各元體內之密度須可視爲均勻的。如以 q 表此密度，其值當然視各元體之位置而定，則各元體之質量將爲

$$dm=q\,dV \tag{17}$$

整個物體之質量既係此等元體質量之總和，故在適當之上下限內求方程(17)之定積分，即得所求之質量。

前此所討論之各定積分，其被積函數均係一個自變數之函數，故本題中之 q 雖可爲三個坐標之函數，但如欲應用已授方法，q 須暫認爲一個變數之函數。至於微分 dV 亦應先表爲同一自變數之微分後，方得積分方程(17)。例如若以 x 爲自變數而 V 與 x 之關係已知，則在適當之上下限 x_2 與 x_1 內，(17)之積分可寫作

$$m=\int_{x_1}^{x_2}\left(q(x)\frac{d}{dx}V(x)\right)dx \tag{18}$$

例 1. 有均厚之三角片，其密度與距其底邊之遠度成正比。若頂點之密度爲 a，試求此片之質量。

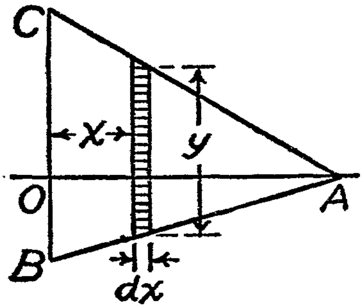


圖 13-9

取通過頂點而正交於底邊之直線爲 X 軸；令原點位在底邊上，如圖 (13-9)。題設密度與距底邊遠度成正比，即 $q=kx$，故即以 x 爲自變數。令三角形高爲 h，則因頂點之密度爲 a，故 $a=kh$，或比例係數 $k=\frac{a}{h}$，而密度 q 與 x 之關係遂爲

$$q=\frac{ax}{h}。$$

茲將三角形分爲無數與底邊平行之細條。若三角片之厚爲 b，一細條之寬爲 dx，其長爲 y，則在 x 處之細條，其體積將爲 $dV=by\,dx$，而其質量遂爲

$$dm=q\,dV=\frac{ax}{h}(by\,dx)。$$

令底邊 BC 長爲 c，則自圖即知 $\frac{y}{c}=\frac{h-x}{h}$，故

$$dm=\frac{ax}{h}\left(\frac{bc}{h}(h-x)\right)dx$$

而 $$m=\int_0^h\frac{abc}{h^2}(hx-x^2)\,dx=\frac{abc}{h^2}\left(h\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^h$$

$$=\frac{abch}{6}=\frac{aV}{3}。$$

此中 $V=\frac{bch}{2}$ 乃三角片之體積。換言之，若以 $\frac{m}{V}$ 爲片之平均密度，則其值將爲 $\frac{a}{3}$，卽頂點密度之三分之一。

例 2. 半徑爲 5 厘米之圓球，其密度與距中心之平方成正比，在表面上之密度則爲 25 克/立方厘米，求球之質量。

令 r 表距中心之遠度。題設 $q=kr^2$，且當 $r=5$ 時，$q=25$，故 $k=1$，而

$$q=r^2。$$

半徑相等各點之密度既係相同，最便於應用之元體係半徑爲 r，厚爲 dr 之圓殼。圓殼之體積約等於 $4\pi r^2\,dr$（卽球面積 $4\pi r^2$ 乘以殼厚 dr），故元體之質量爲

$$dm=q\,dV=4\pi r^4\,dr,$$

由是乃得球之質量爲

$$m=\int_0^5 4\pi r^4 dr=\frac{4\pi}{5}r^5\Big|_0^5=2500\pi\ 。$$

第　十　三　章　習　題

1. 茲將下列諸曲線所包圍之面積依所示之直線爲軸旋轉一周，試求所得之體積：

(a) 抛物線 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$，$x=0$，及 $y=0$，繞 $y=0$；

(b) 四尖次擺線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$，繞 $y=0$；

(c) 箕舌線(witch) $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$，$y=0$，繞 $y=0$；

(d)半立方抛物線 $y^2=x^3, x=0, y=a$, 繞 $y=a$;

(e) $y^2=x^3, y=0, x=b$, 繞 $x=0$;

(f)蔓葉線 (cissoid) $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$, 繞其漸近線 $x=2a$ 爲軸;

(g) $\begin{cases} x=a\cos 3\theta \\ y=a\sin 3\theta \end{cases}$ 繞 $y=0$;

(h) $\begin{cases} x=t^2 \\ y=4t-t^3 \end{cases}$ 繞 $y=0$;

(i)垂鏈線 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}), x=0, x=h$, 繞 $y=0$;

(j)雙曲線 $x^2-y^2=1, y=\pm 1$, 繞 $y=0$。

2. 以一平面截圓球,截體高 h, 球之半徑爲 r, 求所截之體積。

3. 一軟木球,直徑爲 4 寸,比重爲 $\frac{1}{4}$,浮於水面,問球之中心高出水面若干?

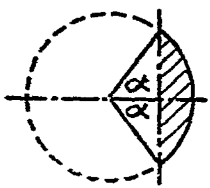


圖 13-10

4. 有圓弧一段在圓中心所張之角爲 2α, 今將該弧繞其所割之弦旋轉一周,問所成之體積若干?(參考附圖 13-10)。

5. 將心形曲線 $r=a(1+\cos\theta)$ 自 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 到 $\theta=\pi$ 部分之面積旋轉於始線一周,求所成之體積。

6. 自抛物線 $y^2=4px$ 之頂點 O 到其通徑之一端作一直線 OE。茲以 OE 弧繞 OE 線爲軸,旋轉一周,求其體積,(圖13-11)。

7. 試證明稜錐體(pyramid)或錐體(cone)之體積爲其底面 B 及高 h

乘積之三分之一。

8. 設已知四尖次擺線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 之面積為 $\frac{3}{8}\pi a^2$，試求立體 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 之體積。

9. 設以平面 $z=c$ 截立體 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$，問所截出之體積為何？

10. 試求在次列兩曲面內之體積：$x^2+y^2=8z^2$ 及 $x^2+y^2+z^2=9$。

11. 一無線電塔，其水平截面均為正方形，正方形之四角係位於兩正交之拋物線上，如 EAC 與 BAD (圖13-12)。兩拋物線之軸 OA 與塔

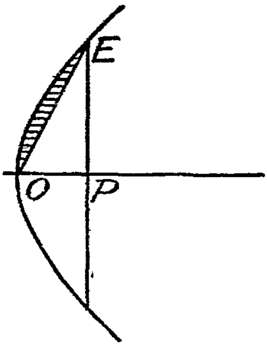


圖 13-11

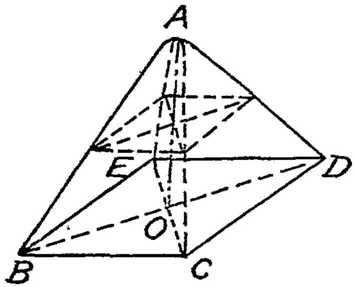


圖 13-12

軸符合，其頂亦與塔頂相合。若 $OD=OC=a$，$OA=b$，求塔所包含之體積

12. 今以一斜平面與圓柱體一正截面相交於其直徑，若斜平面與正截面所作之角為 α，問兩面自柱體所截出之體積若干？（柱之半徑為 a）。

13. 有一楔形固體如圖(13-13)，其頂爲一直線 BC，其底爲一半徑爲 a 之圓（與 BC 線平行），此體與 BC 及圓正交之截面均爲三角形。若自 BC 線至圓之垂直距離爲 b，試求其體積。

14. 一號角 $ACEFD$，圖(13-14)，係以半徑漸增之圓爲其截面，其一

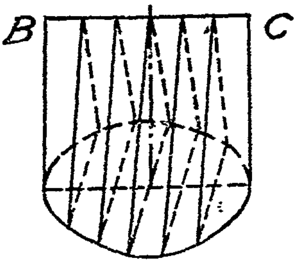


圖 13-13

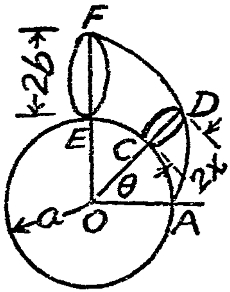


圖 13-14

邊則與一圓周（半徑爲 a）相切如圖。設通過圓中心而與半徑 OA 作 θ 角之直線適與號角截面相交於其直徑 CD，CD 之長 $2x$ 則與 θ 角成正比，而當 $\theta=90°$ 時，此直徑 EF 則爲 $2b$，試求號角之體積。

15. 設自直徑爲 15 寸之圓柱，挖去一邊長爲 6 寸之洞，洞軸與柱軸正交，試求挖去之體積。

16. 將下列各曲線，依所示之軸旋轉一周，試求所成之面積：

(a) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$，繞 $y=0$；

(b) $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ 繞 $y=0$；

(c) $x=e^t\cos t, y=e^t\sin t$ 自 $t=0$ 至 $t=\frac{\pi}{2}$，繞 X 或 Y 軸；

(d)一等角螺線 $r=ae^{\lambda\theta}$,(自 $\theta=0$ 至 $\theta=\pi$ 之一弓狀弧),旋轉於其始線;

(e)$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 繞 X 軸或 Y 軸。

(f)一拋物線 $y^2=4px$ 爲通徑所截之弧,繞通徑旋轉。

17. 有一球形之黃銅殼浮於水中,其直徑爲一米,其厚爲一毫米,銅之比重爲 8.9,問沉入水中之部分爲若干米?

18. 有兩細線,其一之密度與距一端之遠度成正比,其他則與此距離之平方成正比,試分求其質量。

19. 一圓柱體高爲 h,半徑爲 a,其各點之密度係與距柱軸遠度之立方成正比,若在柱面之密度爲 b,問柱之質量爲何?

20. 一半球體各點之密度與距底面之遠度之平方成正比,求此球體之質量。

21. 一薄直角三角形各點之密度與距直角頂之遠度成正比,用極坐標求此三角形之平均密度。

22. 一正圓錐體高爲 h,底面半徑爲 a,其各點之密度與距錐軸遠度成正比,若在錐底半徑爲 a 處之密度爲 b,求錐之質量。

第十四章　力學上之應用

14-1. 力學與微積分　Newton 發明微積方法，其動機原爲解決力學上之需要。自此法大明之後，應用範圍日廣，而力學上之問題，反因其所需之概念較難把握，而不爲初學者所注重。應用微積分於力學之時，初學者所遇之困難，既多爲未能徹底了解所用之物理的觀念，而非微分或積分之計算，其根本補救方法，自當從灌輸物理學知識入手。本章於陳列各微積分公式之前，對於各公式之來源及其物理的意義，亦作簡要論述，以助讀者。至於較詳之討論，可參考大學程度之物理學或力學課本。

本章所討論之問題，可分爲兩類：其一爲物體在平面曲線上之運動（包括切線及法線加速度之觀念），其他則爲力學中較常用之定積分，如質量中心，轉動慣量，液體靜壓，靜壓中心及功等。

14-2. 曲線上之運動　設有一點 P 沿曲線 $y=f(x)$ 運動。其在各時刻之速度，其數值可照(4-2)節所述，定爲每單位時間內所行之弧長，

即
$$v=\frac{ds}{dt} \tag{1}$$

但 P 之軌跡係曲線，故除以方程(1)示其數值外，復須指出其運動之方向，此方向實即切於曲線之方向，可由 $\tan\tau=\frac{dy}{dx}$ 所示之 τ 角定之。惟 $(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2$，故方程(1)亦可寫爲

$$v^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \tag{2}$$

此中之$\frac{dx}{dt}$與$\frac{dy}{dt}$.可視爲P點在OX與OY方向之投影之運動速度。換言之,在曲線上之運動速度,可分解爲兩個垂直部分：其一與OX方向同,其他則與OY方向同。反之,如一點在OX與OY兩軸上投影之運動速度$v_x=\frac{dx}{dt}$及$v_y=\frac{dy}{dt}$已知,則此點沿曲線移動之速度,其數值（可名爲快慢 speel）將爲：

$$v=\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2} \tag{3}$$

而其移動之方向與OX軸所作之角τ（即切線之方向角）,其正切將爲

$$\tan\tau=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{v_y}{v_x} \tag{4}$$

分解一有方向性之數量（例如速度）爲數部分時，實不必限定此等部分之數目爲二，或其方向互爲直角而與OX及OY平行。但因直角三角形勾股弦關係甚爲簡便,故分解之時，多取二個正交之方向。此外,欲完全表示在平面上有方向性之量（例如速度）,既只須提及其數值（即v）與方向（即τ），故若已知此等量在任意兩正交方向之分值,該量即可確定。例如以極坐標之向徑爲準,則v亦可分解爲與向徑r平行及與之垂直之兩部分,因

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \tag{5}$$

故仿前此所述，此中之$\frac{dr}{dt}$可視爲v在r方向之分速度，而$r\frac{d\theta}{dt}$則應

視爲 v 在與 r 正交方向之分速度。

由
$$v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{ds}{dt}\frac{dx}{ds}=v\cos\tau,$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=\frac{ds}{dt}\frac{dy}{ds}=v\sin\tau=v\cos\left(\tau-\frac{\pi}{2}\right),$$

及
$$\frac{dr}{dt}=\frac{ds}{dt}\frac{dr}{ds}=v\cos\psi=v\cos(\tau-\theta),$$

$$r\frac{d\theta}{dt}=\frac{ds}{dt}\frac{r\,d\theta}{ds}=v\sin\psi=v\cos\left(\tau-\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$

諸方程言之,在某規定方向之分速度 v_ϕ 其定義可即寫爲

$$v_\phi=v\cos(\tau-\phi) \tag{6}$$

ϕ表規定方向與 OX 所作之角,τ 表 v 與 OX 所作之角,圖(14-1)。

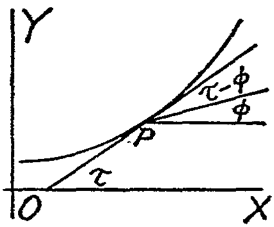


圖 14-1

14-3. 加速度 仿照直線上運動之情形,速度對時間 t 之變化率名爲加速度。但因物係沿曲線運動,速度之變化實包括快慢變化與方向變化兩項。欲將此兩項變化全行示明,自非一個數量所能奏效。例如因物之速度係沿切線方向,其數值爲 v,初讀者或將斷定其加速度爲

$$\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}。$$

其實此僅指物在切線方向之加速度 a_t 而非其加速度之全值。欲求後者,仍以先分別求在兩正交方向分速度之變化率,然後再按直角三角形勾股弦關係將之合併。例如因 v_x 及 v_y 分別表 v 在 OX 與 OY 方向之

分速度,故在此兩方向之加速度分別爲

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2} \text{ 及 } a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2} \tag{7}$$

而由直角三角形勾股弦定理乃得加速度之總值爲

$$a=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2} \tag{8}$$

其方向與 OX 方向作 $\tan^{-1}\frac{a_y}{a_x}$ 角。

例　有物沿半徑爲 R 之圓以固定之快慢 V 而動,試求其加速度。

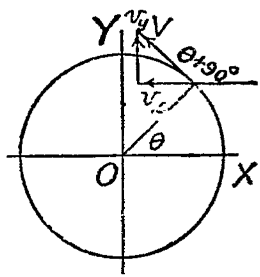


圖 14-2

物之快慢雖爲固定不變，但因係沿圓而動，故其速度方向常改，而其加速度遂不等於 0。茲先求 v_x 及 v_y。自圖(14-2)觀之，如將 V 分解爲水平及垂直兩部分，卽得

$$v_x=-V\sin\theta=-\frac{V}{R}y,$$

及

$$v_y=V\cos\theta=\frac{V}{R}x。$$

次求 v_x 及 v_y 對 t 之紀數以定 P 點在 OX 與 OY 方向之分加速度 a_x 及 a_y：

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=-\frac{V}{R}\frac{dy}{dt}=-\frac{V}{R}v_y=-\left(\frac{V}{R}\right)^2x \tag{9a}$$

$$a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{V}{R}\frac{dx}{dt}=\frac{V}{R}v_x=-\left(\frac{V}{R}\right)^2y \tag{9d}$$

將此兩值之平方相加後再開方,卽得加速度之數値爲

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\frac{V^2}{R^2}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{V^2}{R} \tag{10}$$

至於 a 之方向，則自方程(9)卽知其係自 P 向 O。

方程(9)表示物體作等速圓周運動時，其在任何直徑上之投影之加速度，其方向與位移相反，其數值則與位移成正比。此與(8-19)節簡諧運動之定義相符。是以若認直線上之簡諧運動，如(8-19)節所述者，爲一適當等速圓周運動之投影，卽知前此所用之常數 p 卽等於 $\frac{V}{R}$，惟 $\frac{V}{R}$ 實亦 P 點轉動於 O 點之角速度（見 4-4 節），故簡諧運動公式

$$x=A\sin(pt+\alpha)$$

中之 p，常名爲角速度(angular velocity)。

14-4．切線與法線加速度 沿一曲線運動之物體，其在任意時刻之速度 $v=\frac{ds}{dt}$ 旣係沿切線之方向，故在此方向之加速度 a_T（名爲切線加速度(tangential acceleration)，按照定義，顯然爲 v 對 t 之變化率，卽

$$a_T=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2} \tag{11}$$

今速度方向旣亦常改，故除此之外，尙有一分加速度，其方向與切線垂直，卽沿法線之方向。玆名後者爲法線加速度 (normal acceleration)。欲求法線加速度 a_N，可先求在一指定方向之分速度，而後求此分速度對時間之變化率。令此指定方向與 OX 軸作 ϕ 角，如是切線與此方向所作之角將爲 $(\tau-\phi)$，而在此方向之分速度依方程(6)係：

$$v_\phi=v\cos(\tau-\phi) \tag{6}$$

v 與 τ 旣隨所討論之 P 點而異，故求(6)對 t 之紀數時，v 與 τ 均應視爲 t 之函數。因此在 ϕ 方向之分加速度 a_ϕ 將爲

$$a_\phi=\frac{dv_\phi}{dt}=\frac{d}{dt}\Big(v\cos(\tau-\phi)\Big)$$

$$=\frac{dv}{dt}\cos(\tau-\phi)-v\sin(\tau-\phi)\frac{d\tau}{dt}$$

$$=\frac{d^2s}{dt^2}\cos(\tau-\phi)-\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left(\frac{d\tau}{ds}\right)\sin(\tau-\phi) \tag{12}$$

若 $\phi=\tau$，則所得者顯係方程(11)之切線加速度；若 $\phi=\tau+\frac{\pi}{2}$，卽法線方向，則 $\cos(\tau-\phi)=0, \sin(\tau-\phi)=-1$，而 $a_\phi=a_N$，

故
$$a_N=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d\tau}{ds}=\frac{v^2}{\frac{ds}{d\tau}} \tag{13}$$

試以此結果與等速圓周運動之加速度方程(10)相較，則知 $\frac{ds}{d\tau}$ 相當於一圓之半徑，此與前(11-3)節中採用 $\frac{ds}{d\tau}$ 爲曲率半徑之定義完全溝通。讀者當已注意在本段論述中，吾人仍先求一普通答案，可以適用於任何 ϕ，然後於欲求 a_N 時將 $\phi=\tau+\frac{\pi}{2}$ 之特別值代入。若起始卽將 $\phi=\tau+\frac{\pi}{2}$ 代入方程(6)中，a_N 之值將無法推得之矣。

例　試證若擺錘(bob of pendulum)被限制在擺線(cycloid)上運動，則其切線加速度係與錘離靜止位置之弧長成正比。是以無論擺幅爲何，此種擺子之運動，乃屬於眞正簡諧運動。

令圖(14-3)$X'CX$ 表擺線，$X'S$ 與 SX 表限制繩 SP 運動之面，P 爲擺錘，取原點 O 及 OX 軸如圖(14-3)。

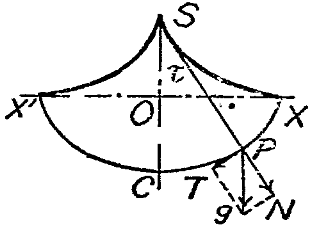


圖 14-3

$X'CX$ 擺線之方程乃

$$x=b(\phi+\sin\phi),\ y=-b(1+\cos\phi)。$$

擺錘所受之重力加速度 g 可分爲 PT 及 PN 兩部分。PN 之影響，係拉擺繩使不鬆；$PT=g\sin\tau$，則係使擺錘 P 向 C 移動。故若令 s 表 CP 弧長，則切線加速度爲

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g\sin\tau$$

而本題之意，係證弧長乃與 $\sin\tau$ 成正比。自擺線方程可得 CP 弧長：

$$s=\int_0^x\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=b\int_0^\phi\sqrt{(1+\cos\phi)^2+\sin^2\phi}\,d\phi$$

$$=b\int_0^\phi\sqrt{2+2\cos\phi}\,d\phi=2b\int_0^\phi\cos\frac{\phi}{2}\,d\phi=4b\sin\frac{\phi}{2}。$$

但
$$\sin\tau=\frac{dy}{ds}=\frac{b\sin\phi\,d\phi}{2b\cos\frac{\phi}{2}d\phi}=\sin\frac{\phi}{2},$$

是以
$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g\sin\tau=-g\sin\frac{\phi}{2}=-\frac{g}{4b}s。$$

由是乃知（參考 8–19 節） $s=A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{4b}}t+\alpha\right)$，

而擺之 $p=\sqrt{\frac{g}{4b}}$，或其週期（即來回一次所需之時間）爲 $T=\frac{2\pi}{p}=4\pi\sqrt{\frac{b}{g}}$。欲使 $T=2$ 秒（即欲得“秒擺” seconds pendulum)，則 b 之值應爲（即母圓之半徑）

$$b=\frac{g}{4\pi^2}=\frac{980}{4\pi^2}\text{厘米},$$

或約 25 厘米弱，而 SC 長則約 1 米。

14-5. 拋射體方程　前數節所討論之問題,乃由已知運動之情況以推求加速度。茲將題反轉,令已知者爲加速度而所欲求者爲物體所作之軌跡。拋射體之運動,即爲此問題中之較常見者。

物體因受地球吸力之影響而有一鉛直向下之重力加速度 g(acceleration due to gravity)。在尋常距離內,g 之價値可認爲固定不變。今若向鉛直方向拋射物體,則其運動情況,因係在一鉛直之直線上,可逕以前此(6-7)節之方法討論之,不必另述。設物體拋出之方向非鉛直的,而與水平方向作 α 角(圖 14-4),射出時之快慢爲 V。茲所欲知者乃其軌跡,其所能達之最高點,以及其復落至與拋出點同高之處之距離(此距離名爲其水平射程 range)等問題。假定空氣所生之阻力等可以不計,則拋出之後,物只受重力加速度 $-g$(負號表向下)之影響。如是,其在鉛直方向與水平方向加速度之方程乃分別爲

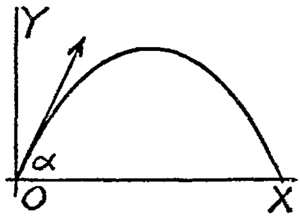


圖 14-4

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=0,\ 及\ a_y=\frac{dv_y}{dt}=-g;$$

積分之,則得　$v_x=C_1,\quad v_y=C_2-gt,$

C_1 與 C_2 爲兩個積分常數。當拋出之時(即 $t=0$),鉛直速度乃 $V\sin\alpha$ 而其水平速度則爲 $V\cos\alpha$, 故積分常數 C_1 與 C_2 應分別等於 $V\cos\alpha$ 及 $V\sin\alpha$。換言之,在任何時刻 t,分速度 v_x 及 v_y 與 t 之關係爲

$$v_x=\frac{dx}{dt}=V\cos\alpha,\ 及\ v_y=\frac{dy}{dt}=V\sin\alpha-gt;$$

再積分之，乃有

$$x=(V\cos\alpha)t+C_3,\ 及\ y=(V\sin\alpha)t-\tfrac{1}{2}gt^2+C_4。$$

若所用坐標之原點適位在拋出點，則於 $t=0$ 時，$x=0$，$y=0$，而積分常數 C_3 與 C_4 均爲 0。所求軌跡之參變方程遂爲

$$x=(V\cos\alpha)t \tag{14a}$$

$$y=(V\sin\alpha)t-\tfrac{1}{2}gt^2 \tag{14b}$$

消去 t 乃得一二次方程

$$y=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2V^2\cos^2\alpha} \tag{15}$$

此爲二次方程所表之曲線命名爲拋物線之故。當拋射體達其最高點之時，按極大之理，$\frac{dy}{dt}$ 應爲 0，但

$$\frac{dy}{dt}=v_y=V\sin\alpha-gt,$$

若令之爲 0，即知到達極高點之時刻乃 $t=\frac{V\sin\alpha}{g}$。以此代入方程 (14b) 中乃知極高之點爲

$$y_{\max}=\frac{V^2\sin^2\alpha}{g}-\frac{V^2\sin^2\alpha}{2g}=\frac{V^2\sin^2\alpha}{2g}。$$

若拋出之角 α 可以變更，則此結果顯然表示欲得最大之極高點 H，α 必須爲 $90°$ 或拋出方向必須爲鉛直向上，此實常識勿庸贅述。此時 $H=\frac{V^2}{2g}$ 可名爲最高射程。

當物復回至與拋出點同高之處時，$y=0$。惟 (14b) 示除原始時刻 $t=0$ 外，$y=0$ 之答案尙有

$$t=\frac{2V\sin\alpha}{g}$$

一值；以之代入(14a)中，則得水平射程

$$x=\frac{2V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}=\frac{V^2}{g}\sin 2\alpha。$$

若拋出角 α 可以改變，則欲得最大之水平射程，必須令 $2\alpha=90°$ 或 $\alpha=45°$ 此最大之水平射程

$$\frac{V^2}{g}=2H \tag{16}$$

遂爲最高射程 H 之兩倍。

例 若高射砲彈所能達之最高度爲 H，今以之擊高 h 之敵機，問在何半徑內之敵機均有被擊中之可能？

取原點於砲位。試以各個不同之拋出角 α 而畫出多個拋物線如圖

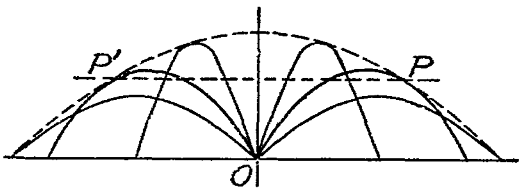


圖 14 5

(14-5)，則知 $P'P$ 可表敵機不得飛入之範圍。因此，本題命意即：若 α 可以隨意變更，問當 $y=h$ 時，x 之最大值爲何？以 $h=y$ 及最高射程 $H=\frac{V^2}{2g}$ 代入方程(15)，乃有

$$h=x\tan\alpha-\frac{x^2}{4H}\sec^2\alpha \tag{17}$$

以示 $P'P$ 橫線上各點之橫坐標 x 與拋出角 α 之關係。求對 α 之紀數，

則得

$$0=\tan\alpha\frac{dx}{d\alpha}+x\sec^2\alpha-\frac{x\sec^2\alpha}{2H}\frac{dx}{d\alpha}-\frac{x^2}{2H}\sec^2\alpha\tan\alpha。$$

若在此中令$\frac{dx}{d\alpha}=0$,則

$$x\sec^2\alpha-\frac{1}{2H}x^2\sec^2\alpha\tan\alpha=0$$

其答案除 $x=0$ 外,尙有

$$x\tan\alpha=2H,\text{ 或 }\sec^2\alpha=\frac{x^2+4H^2}{x^2},$$

此卽示 P 點之橫坐標 x 與拋出角 α 之關係。以之代入原軌跡方程(17)中卽有 $h=2H-\frac{x^2+4H^2}{4H}=\frac{4H^2-x^2}{4H}$,

或 $$x^2=4H^2-4Hh,$$

卽 $$x=\pm2\sqrt{H(H-h)}。$$

14-6. 質量中心 設以力加諸一物體,則物體之普通運動情況將爲轉動與移動兼而有之。若所加之力適通過物體之質量中心 (center of mass),則物體將不旋轉,其上各點運動之軌跡均爲平行的,而其運動情況遂與一同値質量集中於此點之小物體相同。此爲質量中心之物理的意義。對稱的物體,其質量中心之位置卽在其幾何的中心。至於不對稱的物體之質量中心,其尋求方法仍爲先將物體分爲甚多之小元體(參考 13-5 節),然後求兩元體之質量中心,再次第擴展之於所有之元體;因是,在未述本題算法之前,應知如何計算兩個及多個小物體之質量中心之位置。

令 m_1 及 m_2 表兩小物體之質量,其在一平面上之位置,則以(x_1,y_1)

及(x_2,y_2)表之。茲以一甚輕（卽質量甚小可以忽略之意）但甚強之桿將之連接。如是若於桿上任意點加力，則 m_1 與 m_2 因轉與移俱有，故其所作軌跡將非平行的。若所加之力適通過其質量中心（令此點之坐標爲 $\bar{x}$ 及 $\bar{y}$），圖(14-6)，則兩點之軌跡將爲平行的。換言之，若加一垂直之力，力之作用線位在 $x=\bar{x}$ 直線上，則 m_1 與 m_2 均將沿垂直方向以同一之加速度 a 而移動。此時，使 m_1 及 m_2 移動之力，按 Newton 定律，可視爲分別等於

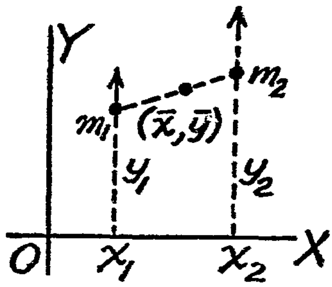


圖 14-6

$$F_1=m_1a \text{ 及 } F_2=m_2a,$$

但加於 $\bar{x}$ 處之力 F，其效果旣與 F_1 及 F_2 分別加於 m_1 及 m_2 相同，故 F 爲 F_1 及 F_2 兩平行力之合力，其數値係等於 $F=F_1+F_2$。對平面上任意點而言，F 之力矩(moment)必等於 F_1 與 F_2 對同點之力矩之和，求對原點 O 之力矩乃有：

$$F\bar{x}=F_1x_1+F_2x_2\ ,$$

因 $F=F_1+F_2=(m_1+m_2)a$，故

$$\bar{x}=\frac{F_1x_1+F_2x_2}{F_1+F_2}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}。$$

同樣，若令所加之力取水平方向，則可推得

$$\bar{y}=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}。$$

求三個小物體 m_1,m_2,m_3 之質量中心時，可先計其中任兩個之質

量中心 (x',y')，然後再假定此兩物之質量，係集中於此點，再求其與第三質量連合後之質量中心。按前所述

$$x'=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},\quad y'=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2};$$

與第三質量連合後，其質量中心之坐標，依照前述遂分爲

$$\bar{x}=\frac{m'x'+m_3x_3}{m'+m_3}=\frac{(m_1+m_2)\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}+m_3x_3}{(m_1+m_2)+m_3}$$

$$=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3},$$

及
$$\bar{y}=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}$$

再擴展之於 n 個物體，則結果顯然爲

$$\bar{x}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n} \tag{18a}$$

及
$$\bar{y}=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\cdots\cdots+m_ny_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n} \tag{18b}$$

若此等物體不在同一平面上，只須再加一公式：

$$\bar{z}=\frac{m_1z_1+m_2z_2+\cdots\cdots+m_nz_n}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n} \tag{18c}$$

以示其與三個坐標平面相距之遠度，卽可確定其位置。

自方程(18)之推求法觀之，若欲求一固體之質量中心，可先分之爲無數元體。令 dm 表一元體之質量，其質量中心坐標爲 (x,y,z)。若在適當之上下限內計 $\int x\,dm$，$\int y\,dm$ 及 $\int z\,dm$ 而後以 $m=\int dm$ 除之，卽得 $\bar{x}$，$\bar{y}$，及 $\bar{z}$。欲引用已授方法以計此諸值時，m 與 x，y，z，之關係須已知，然後 dm 方能表爲 x，y，z 或另一變數之函數，而

$$\bar{x}=\frac{\int_{x_1}^{x_2}\left(x\frac{dm}{dx}\right)dx}{m},\bar{y}=\frac{\int_{y_1}^{y_2}\left(y\frac{dm}{dy}\right)dy}{m},\bar{z}=\frac{\int_{z_1}^{z_2}\left(z\frac{dm}{dz}\right)dz}{m} \quad (19)$$

諸值，方可計得。至於所用質量爲 dm 之元體，其形狀、大小等等，除其質量中心必須位在(x,y,z)之點外，別無限制。

簡言之，方程(19)實爲質量中心位置之定義。若不欲細究其物理的意義，則逕以是爲本節之出發點而忽略前此之說明亦無不可。此外，質量中心與重心(center of gravity)，常混爲同一之觀念。此乃因大地對一物體各部分之吸引力可視爲平行的，故若以重力加速度 g 代前此之 a，物體各部分之重量代前此之各力 F_1,F_2 等，則方程(19)所示者，亦爲重心之坐標。惟若物體所佔之範圍過大，大地對其各部分之吸力不能視爲平行之時，重心與質量中心實非相同。此細微區別，本書此後將不計較。

由上所述，質量中心或重心一詞，均係與質量有關。但如遇密度 q 爲均勻之物體時，$m=qV$，$dm=q\,dV$，而方程(19)遂可改爲

$$\bar{x}=\frac{\int_{x_1}^{x_2}\left(x\frac{dV}{dx}\right)dx}{V},\bar{y}=\frac{\int_{y_1}^{y_2}\left(y\frac{dV}{dy}\right)dy}{V},\cdots\cdots\text{等} \quad (20)$$

故有時吾人亦言一體積之重心。又如物體爲薄片，其厚度 b 均等，則 $V=bA$，$dV=bdA$（A 表片之面積），而方程(20)復可寫作

$$\bar{x}=\frac{\int_{x_1}^{x_2}\left(x\frac{dA}{dx}\right)dx}{A},\cdots\cdots\text{等} \quad (21)$$

故有時吾人亦言一面積之重心。此等措詞純爲簡便起見，至於其物理的

意義，仍須於方程(19)中尋求之。

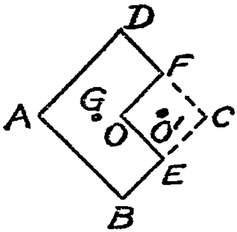


圖 14-7

例 1. 求圖(14-7)平面 $ABEOFD$ 之重心。

就對稱情形而言，重心 G 位置應在對稱軸 AOC 上。此缺角之正方可視爲由兩正方相減而成。$ABCD$ 正方之重心在 O，其面積爲 a^2，a 表 AB 邊長。$OECF$ 正方之重心在 O' 距 O 爲$\sqrt{2}\frac{a}{4}=\frac{a}{2\sqrt{2}}$，其面積爲$\frac{a^2}{4}$。若用基本方程(18a)，則以 $\bar{x}=0$, $x_1=OG$, $m_1=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3}{4}a^2$, $x_2=OO'=\frac{a}{2\sqrt{2}}$, $m_2=\frac{a^2}{4}$，卽有 $0=\frac{3a^2}{4}(\overline{OG})+\frac{a^2}{4}\frac{a}{2\sqrt{2}}$，或 $\overline{OG}=x_1=\frac{-a}{6\sqrt{2}}$。

例 2. 有一細棒其密度與距一端 O 之遠度成正比，試求其質量中心。

取棒長方向爲 X 軸，棒端 O 爲原點。在距 O 爲 x 之處，截一短段 dx。若以 a 表棒之均勻的截面積，則此元體之質量爲

$$dm=kx\,a\,dx,$$

此中之比例係數，可由棒他端之密度計之，若棒長爲 l，則

$$m=\int_0^l kax\,dx=\frac{1}{2}akl^2\,;\quad \int_0^l x\,dm=\int_0^l kax^2dx=ak\frac{l^3}{3},$$

而

$$\bar{x}=\frac{\int_0^l x\,dm}{m}=\frac{\frac{akl^3}{3}}{\frac{akl^2}{2}}=\frac{2}{3}l,$$

所得結果與棒密度之價值及截面積 a 均無關。

例 3. 求半圓球之重心(圖 14-8)。

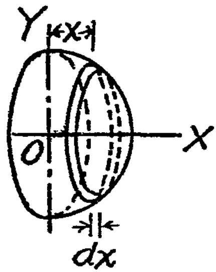


圖 14-8

取通過球心而與其底面正交之直線爲 X 軸。由對稱情況言之,重心必位在 X 軸上,令其距底面之位置爲 $\bar{x}$。在 x 處截出一薄片 dx,此片重心之 X 坐標爲 x,故可用作元體;片之半徑可視作等於 $y=\sqrt{a^2-x^2}$,a 表球之半徑。元體之體積遂爲

$$dV=\pi y^2dx=\pi(a^2-x^2)dx;$$

又因半球之體積爲 $V=\frac{2}{3}\pi a^3$,故

$$\bar{x}=\frac{\int xdV}{V}=\frac{\pi\int_0^a x(a^2-x^2)dx}{\frac{2}{3}\pi a^3}=\frac{\left(a^2\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^a}{\frac{2}{3}a^3}=\frac{\frac{a^4}{4}}{\frac{2a^3}{3}}=\frac{3}{8}a。$$

例 4. 求弓形之重心(圖 14-9)。

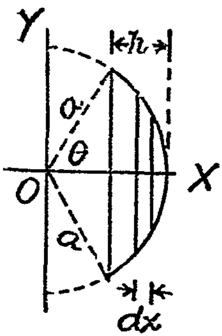


圖 14-9

取對稱軸線爲 X 軸,則重心必位在此軸線上。令圓之方程爲　　$x^2+y^2=a^2$。

玆所欲求者,爲自 $x=a-h$ 至 $x=a$(h 表弓形之高,a 表圓之半徑)之面積之重心。在 x 處截出一細條,寬爲 dx,長爲 $2y$。此條重心之 X 坐標顯然爲 x,故可用爲元體。元體面積爲 $dA=2y\,dx=2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$,是以重心位在

$$\bar{x}=\frac{\int x dA}{A}=\frac{\int_{a-h}^{a} 2x\sqrt{a^2-x^2}\,dx}{2\int_{a-h}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx}$$

$$=\frac{-\frac{2}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{a-h}^{a}}{\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)_{a-h}^{a}}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\left\{a^2-(a-h)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\pi}{2}a^2-(a-h)\sqrt{a^2-(a-h)^2}-a^2\sin^{-1}\frac{a-h}{a}}。$$

在此結果中,若改用 θ 代 h 以作參數,卽 $\cos\theta=\frac{a-h}{a}$,則更簡潔:因 $\sqrt{a^2-(a-h)^2}=a\sin\theta$,且 $\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{a-h}{a}=\theta$,故

$$\bar{x}=\frac{\frac{2}{3}a^3\sin^3\theta}{a^2(\theta-\sin\theta\cos\theta)}=\frac{2a\sin^3\theta}{3(\theta-\sin\theta\cos\theta)}。$$

14-7. 轉動慣量與迴轉半徑 設有小質量 m,轉動於一軸線,m 至軸之遠度爲 r。在短時內,其運動情況亦可視爲沿一直線而移動,此直線之方向,係與半徑爲 r 之圓周上切線相同(見前 4-6 節)。若使其運動之力爲 F,則按 Newton 定律,此力與切線加速度 a 之關係爲 $F=ma$。但此力對於旋轉軸之力矩 (moment of force)爲 $L=Fr$,而切線加速度與角加速度 α 之關係則爲: $a=r\alpha$,

故亦有 $L=Fr=mar=mr^2\alpha$,卽 $L=mr^2\alpha$;

換言之,移動之時,力 $F=$(質量 m)×(加速度 a),而轉動時,則力矩 $L=(mr^2)\times$(角加速度 α)。故如認質量 m 爲移動時之慣量,則 mr^2 卽

表示質量 m 旋於轉軸之慣量，r 爲 m 至轉軸之距離。茲以 I 表此轉動慣量* (rotational inertia)，即

$$I=mr^2 \tag{22}$$

故

$$L=I\alpha \tag{23}$$

方程(22)可視爲轉動慣量之基本定義。今若擴充之於數個質量 $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_n$，其距軸線之遠度分別爲 $r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n$ 則因轉動之時，各質量之角加速度均同，故所需之總力矩爲

$$(m_1r_1^2+m_2r_2^2+\cdots\cdots+m_nr_n^2)\alpha$$

而此等質量之轉動慣量遂爲

$$I=m_1r_1^2+m_2r_2^2+\cdots\cdots+m_nr_n^2 \tag{24}$$

欲求一物體之轉動慣量，吾人遂先將之分爲甚多之小質量——元體。此等元體之形狀、大小等無他限制，祇須其上各點距軸線之遠度均爲相等。若元體之質量爲 dm，其距軸線之遠度爲 r，則此元體之轉動慣量爲

$$dI=r^2dm \tag{25}$$

而整個物體之轉動慣量遂爲在適當上下限內 r^2dm 之積分。依照前述，如欲援用已授方法以計此定積分，可先將 m 與 r 之關係表出，然後即可得

$$I=\int_{R_1}^{R_2}\left(r^2\frac{dm}{dr}\right)dr \tag{26}$$

方程(26)可視爲轉動慣量之定義。由此言之，轉動慣量之起因，係

* 轉動慣量英名常作 moment of inertia。

由質量而來。惟在若干問題中吾人爲簡便起見，常言一體積或面積對某軸線之轉動慣量。前者實含有密度均勻的體積之意，而後者則含密度與厚度皆均勻之薄片之意，於是一體積對某軸線之 I，常寫爲

$$I=\int_{R_1}^{R_2}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right)dr \tag{27}$$

而一面積對某軸線之 I，則常寫作

$$I=\int_{R_1}^{R_2}\left(r^2\frac{dA}{dr}\right)dr \tag{28}$$

此與(19)，(20)，(21)各方程之意義頗相似。

由方程(24)，知 I 之値可等於物體之全部質量 m 乘以一適當長度之平方。令此適當之長爲 k，則按定義

$$I=m\cdot k^2 \tag{29}$$

而
$$k^2=\frac{\int_{R_1}^{R_2}r^2\left(\frac{dm}{dr}\right)dr}{m} \tag{30}$$

k 之名爲迴轉半徑(radius of gyration)，其重要性乃在於當物體爲勻密之時，其値只由物體之幾何的形狀決定之。因此，爲便於應用起見，吾人常將某種體積或面積之迴轉半徑計列成表。

例 1. 有細桿長爲 b，今以通過其一端 A 而垂直於桿長 AB 之線爲軸，求其 I 及 k。

取 AB 爲 X 軸，而在其上 x 處截出 dx 一段。此段之質量爲 $dm=aq\,dx$，a 表桿之截面，q 表密度，二者均爲常數。此段距原點 O 之遠處可視爲 x，故

$$I=\int_0^b x^2\,aq\,dx=aq\,\frac{x^3}{3}\bigg|_0^b=\frac{aqb^3}{3}。$$

但桿之質量爲 $m=aqb$，故 $I=\frac{mb^2}{3}$ 而 $k=\frac{b}{\sqrt{3}}$。

例 2. 一圓盤，半徑爲 a，其密度與距中心之遠度成正比。茲以通過中心而垂直於盤面之直線爲軸，求其 I 與 k。

本題之元體應爲同心環。環之半徑可視爲 r，其寬爲 dr。若盤之厚度爲 b，則元體積爲 $dV=2\pi\,rb\,dr$，因密度 $q=cr$（c 爲一比例係數），故 $dm=q\,dV=cr\,dV=2\pi\,bc\,r^2\,dr$，而

$$I=\int_0^a 2\pi\,bcr^4\,dr=2\pi\,bc\frac{r^5}{5}\bigg|_0^a=\frac{2\pi bc}{5}a^5;$$

但盤之質量爲 $m=\int_0^a 2\pi\,bcr^2\,dr=2\pi\,bc\frac{a^3}{3}$，故 $k^2=\frac{I}{m}=\frac{3a^2}{5}$，

而
$$k=\sqrt{\frac{3}{5}}\,a。$$

14-8. 轉動慣量一定理　設已知一物體旋轉於通過其重心 G 之一軸線之轉動慣量 I_0，茲將其轉動軸線平行的移至距中心 G 爲 h 之 H 處，則其對後述軸線之轉動慣量將爲(圖 14-10)：

$$I=I_0+mh^2 \qquad (31)$$

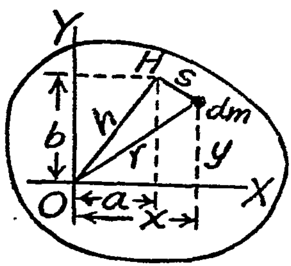


圖 14-10

就迴轉半徑言，若以 k_0 爲對通過重心軸線之值，k 爲對另一平行軸線之值，當兩軸距離爲 h 時，則將有

$$k^2=k_0^2+h^2 \tag{32}$$

此定理之證如下，圖(14-10)。以重心 G 爲原點 O。令旋轉軸爲過 H 而垂直於紙面之直線，其距重心之遠度爲 h。取一元體，其質量爲 dm，其距H軸之遠度爲 s。作一平面通過元體而與紙面平行。如是若取 X 及 Y 軸如圖(14-10)，則

$$h^2=a^2+b^2;\ r^2=x^2+y^2,$$

而
$$s^2=(x-a)^2+(y-b)^2,$$

卽
$$s^2=h^2+r^2-2ax-2by;$$

故以 H 爲轉軸時，於適當之上下限內可得物體之 I 爲

$$I=\int s^2dm=\int(h^2+r^2-2ax-2by)\,dm \tag{33}$$

但若轉軸通過 O，則

$$I_0=\int r^2\,dm;$$

又因 h，a，及 b 均爲常數，故

$$\int h^2dm=mh^2。$$

且據重心定義及 O 之位置，$\bar{x}=\bar{y}=0$。是以

$$\int 2ax\,dm=2a\int x\,dm=2am\bar{x}=0,$$

$$\int 2b\,y\,dm=2b\int y\,dm=2b\,m\bar{y}=0;$$

以此等關係代入方程(33)中，卽有方程(31)。

例 1. 已知一圓盤對通過中心而垂直於盤面之轉動慣量爲 $\frac{1}{2}ma^2$，求其對盤周上一點而垂直於盤面之直線之轉動慣量 I。

兩軸之距離 h 等於半徑 a，故

$$I=ma^2+\frac{1}{2}ma^2=\frac{3}{2}ma^2。$$

例 2.　有圓盤直徑為 $2a$，今以距中心為 $\frac{a}{2}$ 之點為心，另挖去一較小圓盤，直徑為 a，求所得物體對通過中心 O 而垂直於盤面之軸之迴轉半徑 k，圖(14-11)。

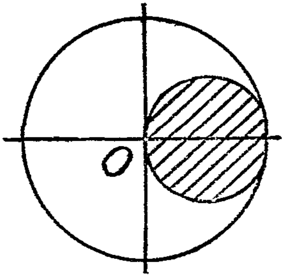


圖 14-11

未挖去小圓盤前，圓盤對於轉軸 O 之轉動慣量 I_1 為

$$I_1=\frac{1}{2}m_1a^2=\frac{c}{2}\pi a^4$$

因 $m_1=c\pi a^2$，c 為一比例常數。挖去之圓盤其對 O 之轉動慣量為

$$I_2=\frac{m_2}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2+m_2\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{3}{2}m_2\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{3}{8}\left(c\pi\frac{a^2}{4}\right)a^2=\frac{3}{32}c\pi a^4。$$

若挖去小圓盤後物體之轉動慣量為 I_3，則因 $I_1=I_2+I_3$ 之故，乃有

$$I_3=I_1-I_2=\frac{1}{2}c\pi a^4-\frac{3}{32}c\pi a^4=\frac{13}{32}c\pi a^4$$

但原盤挖去小圓盤後，其質量為

$$m_3=m_1-m_2=\pi ca^2-\pi c\frac{a^2}{4}=\frac{3c}{4}\pi a^2,$$

故
$$k^2=\frac{I_3}{m_3}=\frac{13}{24}a^2,\text{ 即 } k=\sqrt{\frac{13}{24}}a。$$

14-9. 液體靜壓　設在一液體中，深度為 y 之處，作一水平平面。若此平面之面積為 A，則因須支持在面上高為 y，截面為 A 之液柱之故，此面所受之總力為

$$F=wyA \tag{34}$$

w 表液柱每單位體積之平均重量。換言之，每單位面積所受之壓力 P (hydrostatic pressure) 卽等於

$$P=\frac{F}{A}=wy \tag{35}$$

由液體靜力學之原理，吾人且知在靜止液體內某點之壓力，各方皆同，雖則方程(34)係就垂直方向以說明之。是以不論平面面積之形狀大小及方向，只須其上各點距液面之深度相等，其每單位面積所受之力亦均相同。故欲求一不規則或範圍頗大之平面面積所受之力時，可先分之爲甚多之元面積 dA。若此元面積各部分之深度均等於 y，則其所受之力爲

$$dF=PdA=wy\,dA \tag{36}$$

因面積爲一平面，故各元面積所受之壓力均爲平行的，而在適當上下限內求(36)之積分，卽可求得該面積所受之總力。若 w 爲常數，而 A 與 y 之關係均已知，則方程(36)可寫爲

$$F=w\int_{y_1}^{y_2}\left(y\frac{dA}{dy}\right)dy \tag{37}$$

y_2 與 y_1 分表所討論平面面積沒在液中之最深與最淺之點。方程(37)實卽液體內平面面積所受之靜壓之定義。

例　設有一水槽，其截面爲一倒置之三角形，高爲 h，底爲 a (居上)。今滿盛以水，問槽兩端面所受之總壓力各爲何?

以水面爲參考。取甚多之水平線將三角形分爲甚多之細條，每條上各點距水面遠度可視爲均等。茲取距水面爲 y 之細條，令其垂直寬度

爲 dy，而水平長度則爲 x。此條所受之力爲

$$dF=wy\,dA=w\,xy\,dy,$$

但自圖(14-12)知

$$\frac{x}{a}=\frac{h-y}{h},$$

故

$$dF=w\frac{a(h-y)}{h}y\,dy,$$

而三角形所受之全力乃爲

$$F=\int_0^h\frac{wa}{h}(h-y)y\,dy=\frac{wa}{h}\left(\frac{hy^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^h$$

$$=\frac{wah^2}{6}=w\frac{h}{3}\left(\frac{ah}{2}\right)=w\frac{h}{3}A,$$

A 表三角形之總面積。至於$\left(w\frac{h}{3}\right)$，按方程(35)，可視爲三角形每單位面積所受之平均壓力，此平均壓力即等於在水平面下深度爲$\frac{h}{3}$處之壓力。此外，讀者當已注意，只須截面爲三角形，不論其爲直角的、等腰的、或他式，結果均如上述。

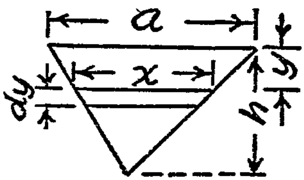


圖 14-12

14-10. 靜壓中心　自前節之例言之，置於液體中之一平面面積，其所受之全壓力，等於面積上之一適當點所受之壓力乘以面積總值。此適當點之壓力，可視爲所討論平面面積上之平均壓力。除此點外，吾人又可尋得一點，其地位宛如加於面上全壓力所集中之處，此點則名爲靜壓中心 (center of hydrostatic pressure)。依據前此所述求重心或質量中心之方法，此點既係甚多平行力 $dF=wy\,dA$ 之合力位置，故若令此

點距水面之深度為 $\bar{y}$，則求各力對水面上一直線之力矩，即得

$$F\bar{y}=\int y\,dF$$

或
$$\bar{y}=\frac{1}{F}\int_{y_1}^{y_2} wy^2 dA=\frac{1}{F}\int_{y_1}^{y_2} wy^2\frac{dA}{dy}dy \tag{38}$$

是即靜壓中心距液面深度之定義。

例　求前節三角形之靜壓中心。

因
$$dF=wy\,dA=\frac{wa(h-y)}{h}y\,dy,\text{ 故}$$

$$\bar{y}=\frac{1}{F}\int_0^h\frac{wa(h-y)y^2dy}{h}=\frac{6}{wah^2}\,\frac{wa}{h}\left\{h\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right\}_0^h$$

$$=6h\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{h}{2}。$$

以此與前例相較，乃知三角形面積之靜壓中心位在底線（在液面）至頂點之半途，而壓力與平均壓力相等之點係位在底線（在液面）至頂點三分之一處。

14-11. 功　設加一不變之力 F 於一物體。當物體沿一直線移動之時，此力所作之功 W，係等於力在移動方向之分力 $F\cos\theta$ 與所行路程 s 之乘積，即

$$W=(F\cos\theta)s \tag{39}$$

θ 表 F 與 s 兩方向間之角。自此定義方程言之，若所加之力非不變者，即 F 與 θ 在路程上各點均不同，或所行之路程 s 非一直線，則將路程分為甚多之小段 ds 後，可得在每段落內所作之功為

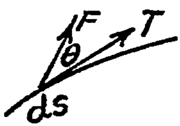


圖 14-13

$$dW=F\cos\theta\,ds \tag{40}$$

θ 表力 F 與軌跡 s 上切線 T 間之角，圖(14-13)，F 與 θ 既係 s 之函數，故於適當上下限內求方程(40)之積分，即得所作之全功爲

$$W=\int_{s_1}^{s_2} F\cos\theta\, ds。\tag{41}$$

是爲功之定義方程之一。

例 1. 若加 20 仟克之力於一鋼線上，線則伸一厘米。問此力所作之功若干？

據 Hooke 定律，線之伸長 x 與所加之力成正比，故 $F=kx$。今已知當 $F=20$ 仟克時，$x=1$ 厘米，乃得 $k=20\ \dfrac{\text{仟克}}{\text{厘米}}$，即 $F=20x$。所加之力既係沿線之方向，故 $\theta=0$。當線之伸長自 x 增至 $x+dx$ 時，F 力所作之功爲

$$dW=F\,dx=20x\,dx。$$

自 $x=0$ 伸至 $x=1$，所作之功遂爲

$$W=\int_0^1 20\,x\,dx=\left.\frac{20\,x^2}{2}\right|_0^1=10\ \text{厘米－仟克}。$$

例 2 設有氣體其原始壓力爲 p_1，今按等溫的手續 $pv=C$（常數）壓縮之，使其壓力增至 p_2，問所作之功若干？

假定此氣體係處在一筒中，今在筒上置活塞並加力以壓縮之。令 A 表活塞之截面積，則當活塞進行一短距離 dx 時，氣體之容積減小 $dv=Adx$。惟加諸活塞之力既爲 $F=pA$（p 爲每單位面積之壓力）故將活塞推入 dx 距離所作之功爲

$$dW=-F\,dx=-pA\,dx=-p\,dv,$$

此中右邊之負號用以表壓縮時 dx 與 dv 均減少之意。惟按等溫手續壓

縮，$pv=C$，故以 p 爲自變數卽有

$$dW=-p\frac{dv}{dp}dp=-p\left(-\frac{C}{p^2}\right)dp=\frac{C}{p}dp,$$

所作之功遂爲

$$W=\int_{p_1}^{p_2}\frac{C}{p}dp=C\ln p\Big|_{p_1}^{p_2}=C\ \ln\frac{p_2}{p_1}。$$

推求方程(40)之時，吾人係將所行之全距離分爲甚多之小距離，而後計在此小距離內，力 F 所作之功 dW。有時，吾人可將所加之全力分爲甚多之小力 dF，每力所行之距離爲 y 而與之作 θ 角。如是則此小力 dF 行距離 y 所作之功將爲

$$dW=y\cos\theta\,dF, \tag{42}$$

在適當之上下限內求此方程之積分，卽得所作之全功爲

$$W=\int y\cos\theta\,dF。 \tag{43}$$

例 3. 玆以唧筒將水由一半圓球形之水池中抽出。若池滿貯水，問所作之功若干？(圖 14-14)

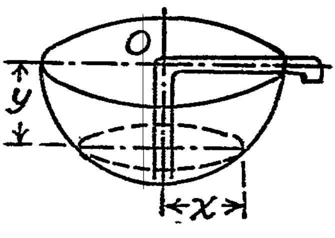


圖 14-14

令水池之半徑爲 R，每單位體積水之重量爲 w。玆在離水面爲 y 之處截得一薄水層，其厚度爲 dy，其半徑遂爲 $x=\sqrt{R^2-y^2}$。此薄水層之重量爲 πwx^2dy。將此水量抽出池外，此重量應升高 y，故所作之功爲

$$dW=\pi wx^2\,y\,dy=\pi wy(R^2-y^2)dy。$$

抽盡水所作之全功遂爲

$$W=\int_0^R \pi wy(R^2-y^2)dy=\pi w\left(\frac{R^2y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^R=\frac{\pi wR^4}{4}。$$

第十四章習題

1. 一點運動之方程爲 $x=a\cos\omega t, y=b\sin\omega t$，試描其軌跡，並求其速度及切線與法線加速度。若 $a>b>0$，其速度及法線加速度於何點爲極大或極小?

2. 一點運動之方程爲 $x=a\cos\omega t$, $y=a\sin 2\omega t$。試描其軌跡。又問於何點其速度方爲極大或極小?

3. 一圓輪以等角速度 ω 沿一直線滾動，周緣上一固定點之軌跡爲擺線 $x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$，試求此點之速度，問何處其值爲最大?

4. 有一物以每秒 20 尺之速度，沿半徑爲 200 尺之圓周運動。當此物離一固定直徑 100 尺時，問其於此直徑上之射影之速度及加速度爲何?

5. 有一點以每秒 C 尺之快慢沿一心形曲線 $r=a(1-\cos\theta)$ 運動。當 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 時，問連該點於原點之向徑，其轉動速度爲何?.

6. 一童在平地上能投一石達 40 米之遠，若彼在一高 14 米之屋頂上，問所投之石離屋之最遠距離爲何?重力加速度 $=9.8$ 米/秒^2。

7. 一斜面與水平方向所作之角爲 β，設有物以初速 V 射出，問其在斜面上之射程爲何?又證所得之最大射程爲

$$R=\frac{V^2}{g}\frac{1}{1+\sin\beta}。$$

8. 將一拋射物以每秒 V 尺之速度拋出，使擊中位在同一水平面上而在其射程內之鵠的，試證射出之角可有二個不同之值，若其一爲 $(45^\circ+\alpha)$，則其他爲 $(45^\circ-\alpha)$。

9. 一槍連射二彈，其一之射出速度爲 V，與水平方向作角 α，其他之射出速度爲 V'，其方向角則爲 α'。若兩彈同在一垂直平面內，試證若兩彈中途相遇，出發前後相差之時間爲

$$\frac{2}{g}\,\frac{VV'\sin(\alpha-\alpha')}{V\cos\alpha+V'\cos\alpha'}。$$

10. 有過山砲位在距山 3500 米之處，設山高 700 米，砲彈之初速爲每秒 207 米，問砲彈所不能擊中山後之區域約若干米?

11. 一童立於一高 10 米之屋頂，欲擲一球與立在馬路他邊之另一童，路闊 20 米，若彼沿水平方向投射，問其拋射速度爲何?

12. 設 AB 表一牆，其頂點爲 B，牆底爲 A，C 爲槍彈出發點，$\alpha=\angle BCA$ 角，AC 距離爲 a，若槍彈適可越過牆頂，試證其最小之射出速度爲(AC 垂直於 AB)：

$$\sqrt{ga\left(\frac{1+\tan(\alpha/2)}{1-\tan(\alpha/2)}\right)},\quad g=\text{重力加速度}。$$

13. 求下列諸曲線所包圍面積之質量中心:

(a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$; $y=0$; $x=0$;

(b) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，(於第一象限內);

(c) $y^2=4x^2-x^3$;

(d) $y^2=2px$;　與　$y=mx$，

(e) $y^2=ax$; $x^2=by$;

(f)蔓葉線 $y^2(2a-x)=x^3$; $x=2a$;

(g)箕舌線 $x^2y=4a^2(2a-y)$, $y=a$,

(h)心形線 $r=a(1+\cos\theta)$;

(i)雙紐線 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 之一葉;

(j)擺線 $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$,一拱與 X 軸間之面積。

14. 求下列各物質曲線之質量中心:

(a)一直線內各點之密度與其離一端之距離成正比;

(b)一等角螺線 $r=e^{\theta}$ 自 $\theta=0$ 至 $\theta=\pi$ 弧(密度均勻);

(c)擺線 $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$一拱(密度均勻);

(d)垂鏈線 $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ 之弧從 $x=-a$ 至 $x=a$(密度均勻)。

15. 求下列諸旋轉體體積之質量中心:

(a)正圓錐體;

(b) $y=a\sin 2x$ 之一弧自 $x=0$ 至 $x=\frac{\pi}{4}$繞 X 軸;

(c) $y^2=4ax$(第一象限內)自 $y=0$ 至 $x=a$ 直線繞 Y 軸;

(d) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (第一象限內) 繞 X 軸;

(e)心形曲線 $r=a(1+\cos\theta)$ 之上半繞始線爲軸;

(f)自一正圓柱體截去一同高同底之正圓錐體所剩餘之體積。

(g)第十三章第六題之旋轉體。

16. 求下列諸旋轉面之質量中心:

(a) $x^2+y^2=2ax$ 繞 X 軸;

(b) 心形曲線 $r=a(1+\cos\theta)$ 之上半葉繞始線旋轉所成之面。

17. 一圓弧所張之圓心角為 2θ, 試求 (1) 此圓弧之重心, (2) 此圓弧所包圍之扇形面積之重心。

18. 求拋物線與其通徑間之上半面積繞通徑旋轉一周所得體積之質量中心。

19. 一半圓片之半徑為 a, 片內各點之密度與距圓心遠度之平方成正比, 求其質量中心。

20. 一正圓錐體內各點之密度與距錐軸之遠近成正比, 求其質量中心。

21. 試證下列各物體之轉動慣量及迴轉半徑(密度為均勻的):

物體之質量為 M	轉動軸之位置	轉動慣量	迴轉半徑
(a) 棒(長 l)	通過棒中心, 垂直於棒	$\frac{1}{12}Ml^2$	$k=$?
(b) 長方形(邊 $2a$ 及 $2b$)	通過中心, 而平行於 $2a$ 之一邊	$\frac{1}{3}Mb^2$	?
(c) 長方形(邊 $2a$ 及 $2b$)	通過中心, 垂直於面	$\frac{1}{3}M(a^2+b^2)$	?
(d) 圓柱體(半徑為 h)	與柱軸脗合	$\frac{1}{2}Ma^2$	?
(e) 三角形之面(高 h)	與底邊脗合	$\frac{1}{6}Mh^2$	?
(f) 橢圓(軸長 $2a, 2b$)	與 $2a$ 軸脗合	$\frac{1}{4}Mb^2$	?

22. 求下列密度不均勻各物體之轉動慣量及迴轉半徑：

(a) 圓柱體內各點之密度與其至柱軸之距離成正比，旋轉軸與柱軸脗合；

(b) 一圓錐體之面，各點之密度與距頂點之遠度成正比，旋轉軸與錐軸脗合；

(c) 一圓錐體內各點之密度與其至軸之距離成正比，旋轉軸與該軸脗合。

23. 設有位在 XOY 平面上之一面積。今已知其旋轉於 OX 與 OY 軸之轉動慣量 I_{xx}, I_{yy} 與 I_{xy} 如下：

$$I_{xx}=\int y^2\,dm,\ I_{yy}=\int x^2\,dm,\ I_{xy}=\int xy\,dm。$$

今若取過原點而與 OX 軸作 α 角之直線爲旋轉軸，試證對此旋轉軸之轉動慣量爲 $I=I_{xx}\cos\alpha+2\,I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha+I_{yy}\sin^2\alpha$。

24. 求拋物線 $y^2=4ax$ 與 $x=a$ 內之面積(a)對 X 軸及(b)對 Y 軸之轉動慣量及迴轉半徑。

25. 求擺線 $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ 自 $\theta=0$ 至 $\theta=2\pi$ 之弧長對 X 軸之轉動慣量及迴轉半徑。

26. 一橫臥之水管，直徑爲 $2a$，問垂直截面上之總壓力爲何？若半貯以水，則截面上之總壓力爲何？靜壓中心何在？

27. 一水槽，其垂直截面爲一向上之拋物線，若水槽口闊爲 $4p$，深爲 p，求截面所受之總壓力及其靜壓中心？

28. 一圓柱體器皿半盛以水，半盛以油，水油不能相混，油之密度爲水之半，求分離柱體曲面爲兩半之力，及底面壓力。

29. 有一球體半徑爲一米，內貯滿水，求分離球面爲兩半之力。

30. 設有某種氣體之脹縮係依絕熱手續(adiabatic process)進行，則壓力 p 與容積 V 之關係爲 $pV^{1.4}=C$ (C 爲常數)。問當容積自 V_1 變至 V_2，該氣體所作之功爲若干?

31. Van der Waal 之氣態方程在溫度不變情況下爲:

$$p=\frac{C}{V-b}-\frac{a}{V^2},$$

此中 a, b, c 爲常數，p 與 V 分別表壓力與積容。若容積自 V_1 脹到 V_2，求所作之功。

32. 按萬有引力定律，二質點間之吸引力爲 $F=k\frac{m_1 m_2}{r^2}$，k 爲常數，m_1、m_2 爲二質點之質量，r 爲距離。若二質點 m_1, m_2 起始之距離爲 a，質點 m_1 沿某曲線移動至離 m_2 爲 b 之處，試求所作之功。

33. 一均勻之棒，長 l，每單位長之密度爲 c，吸引位在同一直線上之一質點 m，該點距棒之近端爲 a。問當該質點因吸力而自原位置移動 b 距離時所作之功。

34. 兩帶電小球，中心相距爲 r，各帶電荷 Q_1 及 Q_2，其互相推拒之力可由 Coulomb 定律計算之: $F=\frac{kQ_1Q_2}{r^2}$，k 爲常數。設當 $r=50$ 厘米，$F=20$ 克重。令兩球之距離自 $r=75$ 厘米變爲 $r=100$ 厘米，求所作之功。

35. 彈性體所受壓縮之力 F，與縮短距離 x 之關係，亦按 Hooke 定律 $F=kx$ 計算之。今有彈簧一個，原長一米，每壓縮一厘米需力 5 克重，若自 80 厘米縮至 60 厘米，問作功若干?

36. 有錐形貯水池，深 15 米，口徑 26 米，滿盛以水。今以唧筒將水吸盡，問作功若干？

37. 有橫置圓柱形之貯水池，柱長 h，半徑為 a，以唧筒吸取其水，問作功幾何？

第十五章　均值定理與不定式

15-1．算術的平均　測定一量或搜集統計，所得結果常參差不齊，故於欲得一可以代表全體數據之數值時，多用諸值之算術的平均。若 $y_1, y_2 \cdots\cdots, y_n$ 表所得結果之 n 個價值，其算術的平均 $\bar{y}$ 之定義爲

$$\bar{y}=\frac{y_1+y_2+\ \cdots\ +y_n}{n}=\frac{\Sigma y}{n}。\tag{1}$$

方程(1)所表者乃 n 個數值之平均。今若有一函數 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 至 $x=b$ 間隔內連續的變更，則在此間隔內，任取 n 個 y 之值而平均之以亦可視爲在該間隔內 y 之平均值。但若所用之 n 個 y 值未加以適當之限制，則所得之平均既無客觀的價值，且亦不足以代表函數在規定間隔內之全體。欲使所得平均可以代表全體各值，則所選擇之 n 個 y 值應平均的分佈於規定間隔內，此意義可以微積分原理表示之如下：將此間隔 a 至 b 分爲 n 個相等的小間隔 h，卽 $nh=b-a$，而於每小間隔（例如自 $x=x_{k-1}$ 至 $x=x_k$）取一點 x'_k，則與此等 x'_k 相對應之諸 y，卽 $y_1=f(x'_1)\cdots\cdots, y_n=f(x_n')$，其算術的平均將爲

$$\bar{y}=\frac{y_1+y_2+y_3+\cdots\cdots+y_n}{n}=\frac{y_1h+y_2h+\cdots\cdots+y_nh}{nh}$$

$$=\frac{y_1h+y_2h+\cdots\cdots+y_nh}{b-a}。\tag{2}$$

自方程(2)之最後分數之分子觀之，若未曾將自 a 至 b 間隔分爲相等之

小間隔，則計算平均值 $\bar{y}$ 時，應將各 y 乘以每間隔之間距 h 方不至於對各 y 有所偏袒。換言之，若 $h_1, h_2, \cdots\cdots, h_n$ 表各間隔之間距，即

$$h_1+h_2+\cdots\cdots+h_n=b-a$$

則平均值 $\bar{y}$ 應爲

$$\bar{y}=\frac{y_1h_1+y_2h_2+\cdots\cdots+y_nh_n}{b-a}=\frac{\sum_{k=1}^{k=n}y_k h_k}{b-a}。\tag{3}$$

今若令各 h 無限減短，同時 n 無限增多，則方程(3)分子所示之無限和即與前此所定之自 a 至 b 之定積分 $\int_a^b y\,dx$ 之意義相同。是以依照本段所述之理，在 a 至 b 間隔內一函數 $y=f(x)$ 之平均值，吾人可採其定義爲

$$\bar{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b y\,dx\tag{4}$$

讀者可注意方程(4)實係定義，其來源可視爲尋常算術的平均值（即方程 1）之推廣式。但如不欲考究採此定義之原因，則逕以方程(4)爲本節之發軔點亦無不可。

由方程(4)所定之平均值，其應用甚廣。例如將此方程寫爲

$$\bar{y}=\frac{\int_a^b y\,dx}{\int_a^b dx},\tag{5}$$

而以之與前此質量中心（或重心）之定義方程相較，則知質量中心坐標 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 可視爲物體內各質點距三個坐標平面遠度之平均值（見前14章方程 19,20,21 等）。又若以之與迴轉半徑之平方 k^2 相較，則知 k^2 可視爲物體內各點距轉軸之平方（即 r^2）之平均（見 14 章方程 30）。一量之算術的平均與其平方的平均，在應用上均甚常見，惟二者之值週

異，切不可相混。就質量中心與迴轉半徑言之，其區別所在當已略見。爲簡便起見，算術的平均，如方程(4)或(5)所示者，此後將名之爲平均值。茲在下數節申論平均值之應用。

例 在第一象限內試求圓周 $x^2+y^2=a^2$ 上縱坐標 y 對於橫坐標 x 之平均 $\bar{y}$。設所計者爲 y 對弧 s 之平均值，試比較兩結果。

據公式(4)
$$\bar{y}=\frac{\int_0^a y\,dx}{a-0}=\frac{1}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

設以 $x=a\sin t$，則當 x 自 0 變至 a 時，t 將自 0 變至 $\frac{\pi}{2}$，且 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$，$dx=a\cos t\,dt$，故

$$\bar{y}=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2 t\,dt=a\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a}{4}=0.785\,a$$

若對 s 求平均，則須用下列公式：

$$\bar{y}_s=\frac{2}{\pi a}\int_0^{\frac{\pi a}{2}}y\,ds\text{。}$$

設改用極坐標，則圓之方程爲 $r=a$ 而 $y=a\sin\theta$，$ds=a\,d\theta$，當 $s=0$，$\theta=0$；如 $s=\frac{\pi a}{2}$，則 $\theta=\frac{\pi}{2}$，故

$$\bar{y}_s=\frac{2}{\pi a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin\theta\,d\theta=\frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=\frac{2a\cos\theta}{\pi}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$=\frac{2a}{\pi}=0.635\,a\text{。}$$

由本例言之，求平均值時，必須標明對何量而計。若將第一象限按

橫坐標 x 或弧 s 分爲多個相等部分（圖 15-1 甲及乙），則知計 $\bar{y}_s$ 時靠近 A 點之各縱線爲數較密，且較短，故其效果遂使 $\bar{y}_s$ 較小於 $\bar{y}$。

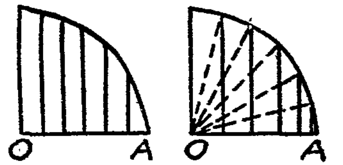


圖 15-1

15-2. 均值定理之積分式　就方程(4)言之，$y=f(x)$ 之平均值

$$\bar{y}=\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

顯然係在 y 之最大及最小兩值之間，此乃因若以 x 爲橫坐標，$y=f(x)$ 爲縱坐標，則分子表在曲線 $y=f(x)$ 下，X 軸上，$x=a$ 與 $x=b$ 兩縱線間之面積，而分母 $(b-a)$ 表兩縱線之距離，故分子所表之面積必在最大之 y 乘以 $(b-a)$，與最小之 y 乘以 $(b-a)$ 二者之間。$y=f(x)$ 既係連續於 a 至 b 間隔內，故在此間隔內最少必有一適當之 x_1 值，其相應之 $f(x_1)$ 可等於 $\bar{y}$。此理之嚴格的解析證明稍難，但自圖(15-2)觀之，實甚顯然。換言之，方程(4)可改寫爲

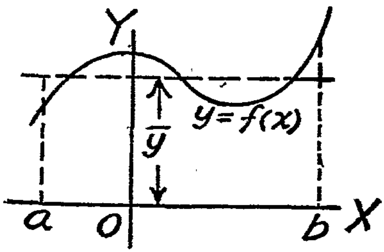


圖 15-2

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(x_1),\quad a<x_1<b。\tag{6}$$

方程(6)常名爲均值定理之積分式。此中應特別注意者，爲 x_1 係在 a 至 b 間隔內，至其確實價值則未規定。在多數問題中，吾人只須知某量所

在之範圍，故此點雖未確定，實屬無礙。表示方程(6)之另一法係將 x_1 表爲 a 至 b 間之一分數。因吾人可令

$$x_1=a+\theta(b-a)$$

θ 爲一適當之分數，故均值定理之積分式又常寫作

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f[a+\theta(b-a)],\ 0<\theta<1, \tag{7a}$$

或以 $h=b-a$ 代入，即 $b=a-h$，(7a)復可化爲

$$\int_a^{a+h} f(x)dx=hf(a+\theta h),0<\theta<1。 \tag{7b}$$

例 試由均值定理證 $\frac{k}{1+k}<\ln(1+k)<k$。

因 $\ln(1+k)=\int_0^k \frac{dx}{1+x}$，且自 $x=0$ 至 $x=k$ 間隔內，$y=f(x)=\frac{1}{1+x}$ 之最大值爲 $\frac{1}{1+0}=1$，其最小值爲 $\frac{1}{1+k}$，故

$$\bar{y}=\frac{1}{k}\int_0^k \frac{dx}{1+x}.$$

之值係在 1 與 $\frac{1}{1+k}$ 之間，即

$$1>\frac{1}{k}\int_0^k \frac{dx}{1+x}>\frac{1}{1+k}$$

或

$$k>\ln(1+k)>\frac{k}{1+k} \qquad \text{Q.E.D.}$$

15-3. Rolle 定理 令 $y=g(x)$ 爲一連續且有紀數之函數，而當 $x=a$ 及 $x=b$ 時，其值均爲 0，即 $g(a)=g(b)=0$。此函數之圖線將爲一光滑連續曲線，在 $x=a$ 及 $x=b$ 處與 X 軸相交(圖 15-3)。自圖不難察知曲線在 a 至 b 間隔內，至少有一點其切線係與 X 軸平行（例如圖

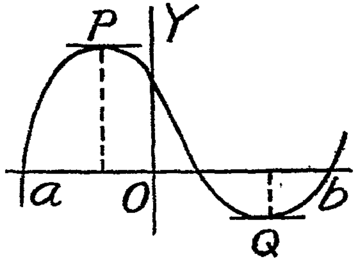


圖 15-3

中之 P 或 Q 點）。若此點之 X 坐標爲 x_1，則有 $g'(x_1)=0$，$g'(x)$ 表 $y=g(x)$ 對 x 之一級紀數。此定理名爲 Rolle 定理，可用嚴格的數學分析方法證之，茲則僅陳述之如下：

定理　設 $g(x)$ 係連續於 (a,b) 間隔內，且 $g(a)=g(b)=0$，而在間隔之內任意點（不必包括 $x=a$ 及 $x=b$ 兩值），$g(x)$ 均有其紀數 $g'(x)$，則必有一值 x_1，可使其紀數 $g'(x_1)=0$，$a<x_1<b$。

引用 Rolle 定理時，吾人應特別注意所假設之條件是否滿足，以免推斷錯誤。譬如圖 (15-4) 甲所示之函數非連續，圖乙之函數在 c 點之紀數爲無限大，圖丙之函數，其在 $x=c$ 點之紀數左右不等，均與 Rolle 定理中之假設不合，故在此等情況下，a 與 b 間實無從尋得一點 x_1 可使 $g'(x_1)=0$。換言之，此等曲線在 a 至 b 間，並無切線取水平方向之點 x_1

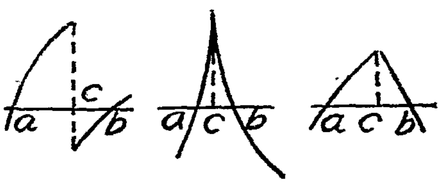


圖 15-4

15-4. 均值定理之微分式　說明 Rolle 定理時，前雖係藉幾何的

直覺，但此定理之功用，實在於可以不藉幾何的直覺而由之推得意義更廣的解析定理，以作更進一步之探討（見後16-2節）。茲先用之以證均值定理之另一式如下：

定理 設在 $x=a$ 至 $x=b$ 之間隔內，函數 $F(x)$ 爲連續的且有確定紀數，則在 a 至 b 間，必有 x 之一值 x_1（不等於 a 或 b）可使

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(x_1),\ a<x_1<b, \tag{8}$$

$F'(x)$ 表 $F(x)$ 對 x 之一級紀數。

欲證此定理，先令 $F(b)-F(a)-k(b-a)=0$，k 表一適當之常數。次將左邊之 a 改爲變數 x 而造成一函數

$$g(x)=F(b)-F(x)-k(b-x)。$$

如是，函數 $g(x)$ 滿足 Rolle 定理之各條件，且 $g(a)=g(b)=0$，故必有一 x_1，足使

$$g'(x_1)=-F'(x_1)+k=0,\ a<x_1<b;$$

由是知前此之 k 可表爲 $F'(x_1)$ 而

$$F(b)-F(a)-(b-a)F'(x_1)=0,$$

是卽方程(8)。

方程(8)常名爲均值定理之微分式，其幾何的意義亦甚簡明。令 APB 表 $y=F(x)$ 曲線在 $x=a$ 至 $x=b$ 間隔內之部分，$\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$ 所表者乃 AB 弦線之斜度。今 $F(x)$ 係連續於 a 至 b 間隔內，且有確定紀數，故在 APB 弧上最少必可尋得一適當之 P 點(圖 15-5)，其切線方向係與 AB 相同。若此適當點之 X 坐標爲 x_1，則其處之斜度爲 $F'(x_1)$，

故有方程(8)。

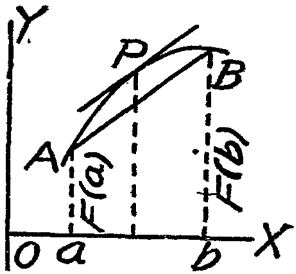


圖 15-5

方程 (8) 所以亦名均值定理之故，實因其可自方程(6)蛻化而來。因如令

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \; F'(x) = f(x),$$

則 $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

故方程(6)可寫爲

$$F(b) - F(a) = (b-a)\,F'(x_1),$$

$$a < x_1 < b,$$

而與方程(8)相符矣。同樣若以 $b=h+a$ 代入，方程(8)亦可寫成下列兩式：

$$F(a+h) - F(a) = h\,F'(x_1), \; a < x_1 < (a+h), \tag{9a}$$

或 $$F(a+h) = F(a) + hF'(a+\theta h), \; 0 < \theta < 1。\tag{9b}$$

例　已知 $\tan^{-1}1 = 0.7854$，問 $\tan^{-1}1.02$ 之値準確至小數點後三位爲何？

令 $F(x) = \tan^{-1}x$，$F'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$，$a=1$，$h=0.02$，則方程(9a)變爲

$$\tan^{-1}1.02 = \tan^{-1}1 + 0.02\left(\frac{1}{1+x_1{}^2}\right), \; 1 < x_1 < 1.02,$$

$1+x_1{}^2$ 最小値爲 2，其最大値爲 2.0404，故 $\tan^{-1}1.02$ 之範圍在

$$\left(0.7854 + \frac{0.02}{2}\right) = 0.7854 + 0.0100 = 0.7954,$$

與 $$\left(0.7854 + \frac{0.02}{2.0404}\right) = 0.7854 + 0.0098 = 0.7952$$

之間,而其值準確至小數點後三位當為 0.795。

15-5. 不定式 第一章討論極限問題時,曾言及有些函數,於 $x=a$ 點,無確定之值,惟當 $x\to a$ 時,則有確定之極限;在此情形下,吾人常規定此極限為該函數在 $x=a$ 點之值(見1.12節最末一段),以使函數連續於是點,所謂求一不定式(indeterminate form)之值云者,實即計函數之極限之另一說法而已。

凡當 $x=a$ 時,函數之形式變為 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\times\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0, 或 $\infty-\infty$ 七式之一者,均名為不定式。$\frac{0}{0}$ 與 $\frac{\infty}{\infty}$ 之值不定,甚易了解,因任何數與0(或∞)相乘均為0(或∞),故此二者實可等於任何數。同理,$0\times\infty$ 可改為 $\frac{0}{\frac{1}{\infty}}$ $\left(\text{即}\frac{0}{0}\right)$ 或 $\frac{\infty}{\frac{1}{0}}$ $\left(\text{即}\frac{\infty}{\infty}\right)$,故亦為不定式。若求 1^∞, 0^0 及 ∞^0 三式之對數後,而分別化之為 $\infty\times 0$, $0\times(-\infty)$ 及 $0\times\infty$, 即知此三者確為不定式。此與 $1^0=1$, $0^\infty=0$ 之有定值,頗易相混,初學者應特別留意而區別之。至於 $\infty-\infty$ 為不定式之理,則因兩甚大之數之差,常可有一恆定值,而此恆定差值復可為任何數。欲計 $\infty-\infty$ 不定式之時,常亦先化之為 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$,故計算不定式之關鍵繫於 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 之演算。欲計 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$,吾人尚應再用 Rolle 定理以證下述之均值定理之推廣式,庶運用可以較便。

15-6. 均值定理之推廣式 設在 $x=a$ 至 $x=b$ 間隔內,函數 $F(x)$ 與 $G(x)$ 係連續的,且有確定之紀數。若 $G'(x)$ 在間隔內(不必包括 $x=a$,或 $x=b$ 兩點)不等於0,則在 a 至 b 間必有 x 之一值(不等於 a 或

b)可使

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(x_1)}{G'(x_1)},\ a<x_1<b。\tag{10}$$

證此公式之方法與證方程(8)之方法頗相似。在下章亦將復用之，玆特重述一次。令 $F(b)-F(a)-k[G(b)-G(a)]=0$，k 表特定之常數。次將左邊之 a 改爲變數 x 而造成一函數

$$g(x)=F(b)-F(x)-k[G(b)-G(x)]。$$

此函數滿足 Rolle 定理各條件，且 $g(a)=g(b)=0$，故必有一 x_1 足使

$$g'(x_1)=-F'(x_1)+kG'(x_1)=0,\ a<x_1<b。$$

惟 $G'(x_1)\neq 0$，故知前此之 k 爲 $F'(x_1)/G'(x_1)$ 而方程(10)屬眞。

15-7．不定式 0/0　若 $F(x)$ 與 $G(x)$ 均有紀數而 $F(a)=0, G(a)=0$，且當 $x\to a$ 時，$F'(x)/G'(x)$ 有確定極限，則

$$\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{G'(x)}。\tag{11}$$

欲證此關係，可用方程(10)以得

$$\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(x_1)}{G'(x_1)},\ a<x_1<x,$$

因 $F(a)=G(a)=0$，故

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F'(x_1)}{G'(x_1)},\ a<x_1<x,$$

當 $x\to a$，x_1 亦趨於 a，故有方程(11)。假如方程右邊趨於正或負無限大，則左邊亦然。又若 $F'(a)$ 與 $G'(a)$ 復均爲 0，且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F''(x)}{G''(x)}$ 存在，則再用方程(11)即有：

$$\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F''(x)}{G''(x)}\text{或}\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F''(x)}{G''(x)}。\tag{12}$$

若用二級紀數，仍得不定式，則應再類推之，以求分母與分子之三級紀數，直到結果爲確定值或無限大爲止。惟於未求較高級紀數之前，必須先驗證所得者實爲不定式方可。若已得確定值而再行微分，則結果將大誤矣！此外，讀者當已注意方程(11)或(12)所示者乃分母與分子個別之紀數，並非整個分數之紀數。

例　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x^2-x}$,

當 $x=0$ 時，$e^x-1=0$, $x^2-x=0$，故用方程(11)有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2x-1}=\frac{1}{0-1}=-1。$$

今若誤將 $\dfrac{e^x}{2x-1}$ 之分子與分母再分別微分，則將得 $\dfrac{e^x}{2}$ 而其極限爲 $\dfrac{1}{2}$，非應得之答案 -1！

15-8．不定式∞/∞　若 $F(a)=\infty$, $G(a)=\infty$，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F(x)}{G(x)}$ 之值可改寫爲 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x)=\dfrac{1}{G(x)}$, $Q(x)=\dfrac{1}{F(x)}$ 以使其形式爲 $\dfrac{0}{0}$ 而後應用前節方法計算之。但 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 之紀數有時甚繁而 $F'(x)$ 與 $G'(x)$ 則甚簡便。遇此之時，則

$$\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{G'(x)}。\tag{13}$$

一關係仍可成立。若方程(13)右邊仍爲不定式，須再分求其分子與分母之紀數，而計其極限。若結果爲∞，則所求之極限即係無限大。方程(13)之證稍繁，玆述之如下：

先假定 a 爲無限大。任取一數 $x'<x$。如是按方程(10)乃有

$$\frac{F(x)-F(x')}{G(x)-G(x')}=\frac{F'(x_1)}{G'(x_1)},\quad x'<x_1<x,$$

或
$$\frac{F(x)\left(1-\dfrac{F(x')}{F(x)}\right)}{G(x)\left(1-\dfrac{G(x')}{G(x)}\right)}=\frac{F'(x_1)}{G'(x_1)},\ x'<x_1<x。\tag{14}$$

今若令 x' 無限增大，則 x_1 與 x 均將無限增大。設限制 x' 之增大率使其較緩於 x，俾下列兩極限均得為 0，

$$\lim_{\substack{x'\to\infty\\x\to\infty}}\frac{F(x')}{F(x)}=0,\quad \lim_{\substack{x'\to\infty\\x\to\infty}}\frac{G(x')}{G(x)}=0,$$

則方程(14)左邊之極限將為

$$\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}$$

而其右邊則為 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F'(x)}{G'(x)}$，故有方程(13)。

若 a 非無限大，則令 $x=a+\dfrac{1}{y}$ 以使當 $x\to a$ 時 $y\to\infty$。如是令 $F(x)=$ $=f(y)$，$G(x)=g(y)$，則

$$F'(x)=-y^2f'(y),\quad G'(x)=-y^2g'(y),$$

故
$$\frac{F'(x)}{G'(x)}=\frac{f'(y)}{g'(y)}。$$

因
$$\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{y\to\infty}\frac{f(y)}{g(y)}=\lim_{y\to\infty}\frac{f'(y)}{g'(y)}=\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{G'(x)},$$

故方程(13)為真。

例 1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cot x}{\ln x}$。

因 $\frac{\cot 0}{\ln 0}=\frac{\infty}{-\infty}$,故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cot x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\csc^2 x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{\sin^2 x}$,

因 $\frac{-0}{\sin^2 0}=\frac{0}{0}$,故須再行分別微分分子與分母而得:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cot x}{\ln x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2\sin x\cos x}=-\infty。$$

例 2. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$。

若 $n\leqq 0$, 則 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$顯然爲 0,因分子恆小於一定數,而分母則趨於無限大。設 $n>0$, 則當 $x\to\infty$ 時, x^n 及 e^x 均趨於 ∞, 故 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}$。若 $(n-1)$仍>0, 則可再分求分子及分母之紀數而得 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}$。如是演算若干次後,當有一時分子 x 之指數 $\leqq 0$。是以無論 n 爲何,所求之極限恆爲 0。

15-9. 不定式 $0.\infty$ 與 $\infty-\infty$ 此等不定式可化爲 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 已如(15-5)節所述。至於應如何演算,方最便捷,純視算者之經驗定之。舉例如下:

例 1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x$。

$$\lim_{x\to 0}x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0,$$

若寫之爲 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}}$,則演算將更繁!

例 2.　求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$。

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0。$$

15-10.　0^0，1^∞ 及 ∞^0 不定式　凡函數取此等不定式者均屬於 $y=[F(x)]^{f(x)}$ 之類。今若求 y 之對數，則有 $\ln y=f(x)\ln F(x)$ 而可化之爲 $0\times\infty$ 不定式。如是，按前節方法，卽可先計得對數 $\ln y$ 之極限，而後再由之以計 y 之極限。例如下：

例 1.　求 $\lim\limits_{x\to 0}x^x$，(此爲 0^0 式)。

令 $y=x^x$。求對數則有 $\ln y=x\ln x$，於是因 $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$（見前節例 1），故 $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=0$ 或 $\ln(\lim\limits_{x\to 0}y)=0$ 而 $\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}x^x=e^0=1$。

例 2.　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$，(此爲 1^∞ 式)。

令 $y=\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$；求對數則有 $\ln y=x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)=\dfrac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$，

而於 $x\to\infty$ 時將取 $\frac{0}{0}$ 式，故

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{1+\frac{a}{x}}\right)\left(-\dfrac{a}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{1+\frac{a}{x}}=a。$$

是以
$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a。$$

例 3.　求 $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{2x}+x)^{\frac{1}{x}}$，(此爲 ∞^0 式)。

令 $y=(e^{2x}+x)^{\frac{1}{x}}$，求對數則有 $\ln y=\dfrac{\ln(e^{2x}+x)}{x}$，而於$x\to\infty$ 時，將取 ∞/∞ 式，故分別微分分子與分母後，得

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}+1}{e^{2x}+x}。$$

當 $x\to\infty$ 時，此仍爲 ∞/∞，再分求紀數乃得

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{4e^{2x}}{2e^{2x}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{2+e^{-2x}}=2。$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{2x}+x)^{1/x}=e^2$。

第十五章習題

1. 茲自圓周上一點 P 作弦線至周上其他各點。若以弦與過 P 點之直徑所夾之角爲變數，問弦長之平均值爲何？

2. 由斜面上滑下物體之初速爲 V_0，經過時間 t 秒後，其速度 $v=V_0+at$，若行程爲 s，則 $v=\sqrt{V_0^2+2as}$。設初速 V_0 爲 0，$a=8$ 米/秒。求在2 秒鐘內之平均速度，與在 16 米行程內之平均速度；並說明兩者何以不同。

3. 有一球形橡皮袋，半徑 r 爲 25 厘米，內貯氣體，氣壓 p 爲每方厘米 3 仟克，今將該袋內氣體依等溫律 $pV=C$ 壓縮，使其半徑縮至 15 厘米。若以 (a) 體積 V 爲自變數或以 (b) 半徑 r 爲自變數，試分別計算壓縮時之平均氣壓。

4. 在交流電原理中常用 $\sin^2 x$ 自 $x=0$ 至 $x=\pi$ 之平均值，試求此值。問此值與其自 $x=0$ 至 $x=2\pi$ 之平均值有無區別？又問此平均值與同間隔內 $\sin x$ 之平均值之比爲何？

5. 某電位差爲 $e=E_0+E_1\sin(\omega t+\alpha_1)+E_2\sin(2\omega t+\alpha_2)+\cdots\cdots+E_n\sin(n\omega t+\alpha_n)$。試求其一週期內，即 $t=0$ 至 $t=\dfrac{2\pi}{\omega}$，之均方根(即平均平方值之平方根)。

6. 簡諧運動之物體其行程爲 $s=\cos\omega t$。自 $t=0$ 至 $t=\dfrac{\pi}{2\omega}$ 時間內，求對 t 之平均行程，及對 t 之平均速度。

7. 一拋射體之初速爲 V，射出角爲 α，其射程爲 $\dfrac{V^2\sin^2\alpha}{g}$。設 α 自零變到 $\dfrac{\pi}{4}$，問射程之平均值爲何?又若令速度自 0 變至 V，問其平均射程爲何?

8. 由均值定理之積分式，示以下各關係：

(a) $\dfrac{2k}{1+k^2}>\ln\left(\dfrac{1+k}{1-k}\right)>2k,\ 0<k<1$;

(b) $k<\sin^{-1}k<\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}},\ k>0$;

(c) $0<\ln(1+k^2)<\dfrac{2k^2}{1+k^2},\ 0<k<1$;

(d) $(1+k)<e^k<\dfrac{1}{1-k},\ 0<k<1$。

9. 由均值定理之微分式 $F(b)=F(a)+(b-a)F'(x_1)$，下列各題中之 x_1 值。

(a) $F(x)=e^x,\ a=0,\ b=1$;

(b) $F(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2},\ a=0,\ b=1$;

(c) $F(x)=x^3,\ a=0,\ b=1$;

(d) $F(x)=\log x,\ a=1,\ b=2$。

10．求下列四值準確至小數點後三位：

(a) $e^{-0.1}$;　(b) $\ln 1.05$;

(c) $\sin(0.05)$;　(d) $\cos(1.55)$

11．求下列極限：

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$　(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}$;

(c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{\cos^2 2x}$,　(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{\tan x-x}$;　(f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\cos x-\sin x}{2\sin x\cos x-\cos x}$。

12．(a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$,　(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sec\frac{\pi x_1}{2}}{\ln(1-x)}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_{n-1}x+b_n}$。

試分別討論(1)$n>m$，(2)$n=m$ 及 (3)$n<m$ 三情形。

13．(a) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$;　(b) $\lim\limits_{x\to 1}\sec\dfrac{\pi x}{2}\ln x$,

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$;　(d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$。

14．(a) $\lim\limits_{x\to 0+}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;　(b) $\lim\limits_{x\to 0-}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$;　(d) $\lim\limits_{x\to 0}(x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$;

(e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$。

15. (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\ln\ln x}$;　　(b) $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x}$;　　(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^2}$;　　(f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$。

16. 設 $f(x)$ 及 $p(x)$ 在 $a\leqq x\leqq b$ 間隔內爲連續函數，且 $p(x)\geqq 0$，試示

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx=f(x_1)\int_a^b p(x)\,dx,\ a\leqq x_1\leqq b。$$

17. 按 $\int_1^x x^n\,dx=\dfrac{x^{n+1}-1}{n+1}$，如 $n\neq -1$。今若將此公式寫爲

$$\int_1^x x^n\,dx=\lim_{m\to n}\left(\frac{x^{m+1}-1}{m+1}\right),$$

則亦可用於 $n=-1$ 之時，試申論之。

第十六章　級數

16-1．函數之近似值　第五章論微分時，吾人曾言一函數 $y=F(x)$ 在某點 x_0 之增量約等於 $\Delta y \cong \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \Delta x$，$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ 表函數在 x_0 之紀數，Δx 則表自變數 x 之增量。由是知當 x 自 x_0 增至 $x_0+\Delta x$ 時，y 將自 y_0 約增至

$$y_0+\Delta y = F(x_0+\Delta x) \cong F(x_0)+\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \Delta x。 \tag{1}$$

若令 $x_0=a, \Delta x=h$，則 $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=F'(a)$，而此方程可寫爲

$$F(a+h) \cong F(a)+hF'(a)。 \tag{2}$$

試以此與前章均值定理方程(9)，即

$$F(a+h)=F(a)+hF'(x_1)，\ a<x_1<(a+h)。 \tag{3}$$

相較，即知近似方程(2)與準確方程(3)不同之點乃在於後者最末項爲 $hF'(x_1)$ 而非 $hF'(a)$，且 $x_1>a$。因吾人僅知 x_1 之範圍而不知其確值，故嚴格言之，方程(3)亦僅爲一近似的公式，其準確程度須視函數 F 之性質而定。例如在(15-4)節所舉之例中，因 x_1 未能確定之故，用公式(3)只知 $\tan^{-1}1.02$ 之值準確至小數點後第三位爲 0.795。今若欲得更多一位或數位之可靠數碼，則公式(3)倘須補充。補充之法可仿(15-4)節引用 Rolle 定理以求所謂有剩餘之 Taylor 定理如下。

16-2．有剩餘之 Taylor 定理　設將方程(2)中之 h 仍改爲 $(b-a)$，

卽 $a+h=b$，且另加一項以使之可成一準確等式如次：

$$F(b)-F(a)-(b-a)F'(a)-k(b-a)^2=0, \tag{4}$$

此中之 k 爲一待定常數，其值可仿前(15-4)節證方程(8)之法求之。如是仿前，將方程(4)中之 a 改爲 x 以造成一函數

$$g(x)=F(b)-F(x)-(b-x)F'(x)-k(b-x)^2。$$

設在自 $x=a$ 至 $x=0$ 間隔內，$F(x)$ 之一級紀數 $F'(x)$ 及其二級紀數 $F''(x)$ 均有確定有限值，則 $g(x)$ 合於 Rolle 定理各條件。於是，因 $g(a)=g(b)=0$，故在 a 至 b 間必有一 x_1 值足使 $g'(x_1)=0$，卽

$$g'(x_1)=-F'(x_1)+F'(x_1)-(b-x_1)F''(x_1)+2k(b-x_1)=0,$$

$$a<x_1<b;$$

或

$$k=\frac{F''(x_1)}{2}。$$

換言之，較方程(3)更進一步之公式爲

$$F(b)=F(a)+(b-a)F'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}F''(x_1), a<x_1<b, \tag{5a}$$

或

$$F(a+h)=F(a)+hF'(a)+\frac{h^2}{2}F''(a+\theta h), 0<\theta<1。 \tag{5b}$$

例　求 $u=\tan^{-1}1.05$ 準確至小數點後第四位。

因　$F(x)=\tan^{-1}x; F'(x)=\frac{1}{1+x^2}; F''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},$

故　$u=\tan^{-1}1+0.05\left(\frac{1}{1+1}\right)-\frac{0.0025}{2}\frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2}, 1<x_1<1.05,$

最後一項之值旣在 -0.00062 與 -0.00059 之間，故準確至小數點後第四位，依4捨5入原則，當爲

$$\tan^{-1}1.05=0.7854+0.0250-0.0006=0.8098。$$

若欲得更佳之近似值，吾人可將方程(5)再擴充為

$$F(b)=F(a)+(b-a)F'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}F''(a)$$

$$+\frac{(b-a)^3}{3!}F'''(x_1) \tag{6a}$$

此中之 x_1 仍在 a 與 b 之間，即 $a<x_1<b$；或令 $0<\theta<1, b=a+h$，則

$$F(a+h)=F(a)+hF'(a)+\frac{h^2}{2!}F''(a)+\frac{h^3}{3!}F'''(a+\theta h) \tag{6b}$$

仿此推廣，即得有剩餘之 Taylor 定理如下：

若在 a 至 b 間隔內，$F(x)$ 之 n 級紀數有確定之有限值，即 $F(x)$, $F'(x)$, ……, $F^{(n)}(x)$ 各函數均有確定有限值，則

$$F(b)=F(a)+(b-a)F'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}F''(a)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n-1)}(a)+\frac{(b-a)^n}{n!}F^{(n)}(x_1), a<x_1<b, \tag{7a}$$

或 $$F(a+h)=F(a)+hF'(a)+\frac{h^2}{2!}F''(a)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{n!}F^{(n)}(a+\theta h),\ 0<\theta<1, \tag{7b}$$

此中最後一項名為剩餘 R_n，即

$$R_n=\frac{h^n}{n!}F^{(n)}(a+\theta h), 0<\theta<1。 \tag{8}$$

當推廣均值定理以求 Taylor 定理時，吾人曾假定 k 為一待定之常數，而剩餘之形式為 $R_n=k(b-a)^n$。其實此假定中之 n 可取他值，而所得之 R_n 有時更易應用。例如令 $n=p$ 為任何正整數，而寫

$$F(b)=F(a)+(b-a)F'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}F''(a)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n-1)}(a)+k(b-a)^p$$

次再依前此方法,將 a 改爲 x 以造成一函數 $g(x)$，而應用 Rolle 定理，則可證（應由讀者自證之）：

$$k=\frac{(b-a)^{n-p}(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p}F^{(n)}[a+\theta(b-a)],\ 0<\theta<1, \tag{9a}$$

而剩餘之較普通形式遂爲

$$R_n=\frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p}F^{(n)}[a+\theta(h)],\ 0<\theta<1, \tag{9b}$$

令 $p=n$，則此結果即變爲(8)；若令 $p=1$，則得

$$R_n=\frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n)}(a+\theta h),\ 0<\theta<1, \tag{10}$$

(8)所示之 R_n 常名爲 Lagrange 式,而(10)則名爲 Cauchy 式，其應用將於下節與(16-12)節例中述之。

16-3．Taylor 級數與 Maclaurin 級數　若根據方程(7)棄去剩餘 R_n 以作函數之近似值,則其所犯之誤差即等於所棄去之剩餘。有時當 n 無限增大時，R_n 之絕對值趨於 0。如是，欲得任何程度之準確值,只須採用適當項數即可。遇此情形，改用 x 代 b 以示其可爲任何適當之值後,方程(7)常寫爲

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}\left\{F(a)+(x-a)F'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}F''(a)+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{(x-a)^n}{n!}F^{(n)}(a)\right\}。$$

或即縮寫爲

$$F(x)=F(a)+(x-a)F'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}F''(a)$$

$$+\frac{(x-a)^3}{3!}F'''(a)+\cdots\cdots, \tag{11a}$$

此中右邊最後諸小點卽以表示項數無限多未曾寫完，且每項之値均可仿前寫出。似此種項數爲無限多之和，而每項之値均可按一定律例寫出之者，其名爲無限級數或級數 (infinite series 或 series)；方程 (11a) 右邊所示者則稱爲 Taylor 級數。若令 $a=0$ 則得 Maclaurin 級數如下：

$$F(x)=F(0)+xF'(0)+\frac{x^2}{2!}F''(0)+\frac{x^3}{3!}F'''(0)+\cdots\cdots \tag{11b}$$

例 1. 試求 e^x 之 Maclaurin 級數。

令 $F(x)=e^x$，則 $F'(x)=F''(x)=\cdots\cdots=F^{(n-1)}(x)=e^x$。

故 $F(0)=F'(0)=F''(0)=\cdots\cdots=F^{(n-1)}(0)=e^0=1$ 而

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n e^{\theta x}}{n!},$$

剩餘 $$R_n=\frac{x^n e^{\theta x}}{n!},\ 0<\theta<1。$$

玆須證 $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n|=0$。證此不難，因若 $x<0$，則 $e^{\theta x}<1$，$|R_n|<\frac{x^n}{n!}$；若 $x>0$，則 $e^{\theta x}<e^x$，而 $0<R_n<\frac{x^n e^x}{n!}$。但無論 x 爲何有限値，e^x 之値仍係有限，故如能知當 $n\to\infty$ 時，$\frac{x^n}{n!}\to 0$，則 $\lim|R_n|=0$。今因

$$\frac{x^n}{n!}=\frac{x}{1}\times\frac{x}{2}\times\frac{x}{3}\times\cdots\cdots\times\frac{x}{(n-1)}\times\frac{x}{n},$$

故無論 x 爲何値，自一適當之 m 起，$\frac{x}{m}<\frac{1}{p}$，p 爲一大於 1 之數。令

起始 m 個因子之積爲 c，則，

$$\frac{x^n}{n!}=\frac{x^m x^{n-m}}{n!}<c\left(\frac{1}{p}\right)^{n-m}$$

惟 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p}\right)^{n-m}=0$，因 $p>1$，故知無論 x 爲何有限値，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$，而 e^x 之 Maclaurin 級數遂爲

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots,\ |x|<\infty。\tag{12}$$

例 2.　求 $\sin x$ 與 $\cos x$ 之 Maclaurin 級數。

令
$$\begin{aligned}
F(x)&=\sin x, & F(0)&=0,\\
F'(x)&=\cos(x), & F'(0)&=1,\\
F''(x)&=-\sin x, & F''(0)&=0.\\
F'''(x)&=-\cos x, & F'''(0)&=-1;
\end{aligned}$$

自此以後，各値將依序重見。至於剩餘則可用 Lagrange 式(8)

$$R_n=\frac{h^n}{n!}F^{(n)}(x_1)=\frac{h^n}{n!}\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x_1\right),\ a<x_1<b,$$

以證其趨於 0。因正弦與餘弦之絕對值不大於 1，故當 $n\to\infty$ 時，$R_n\to0$。是以吾人可將 $\sin x$ 展爲 Maclaurin 級數如下：

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots,\ |x|<\infty;\tag{13}$$

同樣，可證

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots,\ |x|<\infty。\tag{14}$$

自方程(11a)與(11b)觀之，一函數 $F(x)$ 似可以一無限多項之和代表之。驟觀之，此事不難領悟，因前此所述之定積分，亦係無限多項之和之

極限也。然此處所用之無限多項，實與定積分之無限多項有別，因後者之項數雖爲無限多，但每項之值則均爲無窮小；至於方程(11a)或(11b)各項則非無窮小，而其無限多項之和在適當情形下仍有確定之極限。是以吾人對於方程(11a)與(11b)之有效範圍應作較詳之探討。此問題與級數之散斂性有關，茲在下數節述之。

16-4. 級數之收斂與其發散 設令 S_n 表一級數起始 n 項之和，即

$$S_n=u_1+u_2+\cdots\cdots u_{n-1}+u_n\text{。} \tag{15}$$

u_n 表級數之第 n 項，其值於規定 n 後即可按各項組成之律例寫出。若當 $n\to\infty$ 時，$\lim S_n$ 趨於一極限 U（不爲無限大），則吾人稱級數爲收斂的(convergent)，U 則名爲此收斂級數之和(sum)，即

$$U=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots=\sum_{\lambda=1}^{\infty}u_\lambda\text{。} \tag{16}$$

不收斂的級數則名爲發散級數 (divergent series)。例如 $1+2+3+\cdots\cdots$ 與 $1-1+1-1+\cdots\cdots$ 等皆是，蓋前者 n 項之和可無限增大，而後者 n 項之和或爲 0 或爲 1 則無確定極限也。

自定義言之，一收斂級數之和 U 既等於

$$U=\lim_{n\to\infty}S_n, \tag{17}$$

S_n 表其首 n 項之和，故一級數收斂與否，其關鍵不在於起始若干項，而實繫於級數末後各項之和。是以若删去收斂級數中有限數目之項，所剩餘之級數仍係收斂。此外因方程(17)亦可寫作

$$\lim_{(n-1)\to\infty}S_{n-1}=U, \tag{18a}$$

或
$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=U, \tag{18b}$$

是以
$$\lim_{n\to\infty} (S_n-S_{n-1})=U-U=0, \tag{19}$$

即
$$\lim_{n\to\infty} u_n=0\,, \tag{20}$$

u_n 表級數之第 n 項。方程(20)所示之條件僅爲必要的而非充足的。例如調和級數(harmonic series)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots \tag{21}$$

之第 n 項之極限爲 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$。今若將級數(21)各項依下法合併寫之

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots\cdots$$

即知自第一括弧起，各括弧內之值均較$\frac{1}{2}$爲大，故其無限多項之和可較任何指定之值爲大，而調和級數遂爲發散的。由方程(20)所示之必要條件言之，若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n\neq 0$，則級數必爲發散的無疑；換言之，$\lim\limits_{n\to\infty} u_n\neq 0$ 實爲級數發散之充足條件。

例　試討論幾何級數

$$a+ar^2+ar^3+\cdots\cdots \tag{22}$$

之散斂性。

本題之 $u_{n+1}=ar^n$，若 $|r|\geqq 1$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1}$ 將不爲 0，故若 $|r|\geqq 1$，幾何級數必係發散的。若 $|r|<1$，此級數可以收斂，但如欲確定其實係收斂的，可試求其首 n 項之和。此和爲

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1},$$

又因 $$rS_n=ar+ar^2+\cdots\cdots ar^{n-1}+ar^n,$$

故 $$(1-r)S_n=a-ar^n,$$

卽 $$S_n=\frac{a-ar^n}{1-r}。$$

惟當 $|r|<1$ 時，$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$，故

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a}{1-r}$$

有一確定之值，而當 $|r|<1$ 時，幾何級數遂爲收斂的。

上例表示幾何級數首 n 項之和可以計得；但欲計多數級數之首 n 項之和常爲極困難之事。故欲證驗一級數是否收斂，尙須另闢更易於應用之途徑。

16-5．比較證驗法 各項皆爲正數之級數，名爲正項級數(positive series)。設有一正項級數（簡稱爲級數 u）

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots,$$

今欲證驗其是否收斂，可取另一適當之正項級數〔簡稱爲級數(a)〕

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots$$

與之比較。

定理 I． 若已知級數(a)爲收斂的，而自某項起級數(u)各項均分別不大於級數(a)之各項，則級數(u)亦爲收斂的。

定理 II． 若已知級數(a)爲發散的，而自某項起，級數(u)各項均分別不小於級數(a)之各項，則級數(u)亦爲發散的。

定理 II 之證甚顯。欲證定理 I，須用下述之極限基本定理：設有變數其值恆增（或恆減）但永不超過（或小於）一定數，則此變數必有一極

限。此定理似甚顯明，但實仍須嚴格的證明，茲因其證不屬本書範圍，故不陳述。

級數(a)既係收斂的，則其和必有一極限。今級數(u)之各項自一適當之項起既分別不大於(a)之各項，是則級數(u)之和恆增但永不超過級數(a)之和，故按本節基本定理，級數(u)之和亦有一極限而係收斂的。

本節所述之比較證驗法，其成功與否端在於吾人能否已知一適當之發散或收斂級數與未知者相較。故所認識之級數愈多，則使用此法之成功機會亦愈多，通常用作比較之級數，其最簡單者爲幾何級數(22)與調和級數(21)二者。例如下：

例 1.　求下列級數(u)之收斂範圍：

$$\frac{1}{2}+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^4}{1+x^4}+\frac{x^6}{1+x^6}+\cdots\cdots$$

試以此與下列幾何級數(a)

$$x^2+x^4+x^6+\cdots\cdots$$

相比，卽知自第二項起 $u_{n+1}<a_n$。今於 $x<1$ 時，級數(a)爲收斂的，故於 $|x|<1$ 時，級數(u)亦爲收斂的。若$|x|=1$，各項均爲$\frac{1}{2}$，故顯然爲發散的。若$|x|>1$，則$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$ 而非 0，故亦非收斂的。此級數之收斂範圍遂爲$|x|<1$。

例 2.　討論下列級數(u)之收斂範圍：

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}+\frac{1}{8^p}+\cdots\cdots$$

當 $p>1$ 時，此級數之各項均不大於下列級數(a)：

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}\cdots\right)+\cdots\cdots,$$

但將級數(a)括弧內各項相加則可寫之爲

$$1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\frac{8}{8^p}+\cdots\cdots=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{(2^{p-1})^2}+\cdots\cdots,$$

此乃一幾何級數，其 $r=\frac{1}{2^{p-1}}$。今 $p>1$，故 $r<1$，而級數(a)爲收斂的。因此，當 $p>1$ 時，級數(u)亦爲收斂的。當 $p=1$ 時，級數(u)與調和級數同，故爲發散的。若 $p<1$，則其各項，自第二項始，均較調和級數各項爲大，故亦爲發散的。總之，此級數之收斂範圍僅限於 $p>1$。

16-6. 比值證驗法 比較證驗法須藉一已知級數以作比較；比值證驗法則只須由級數本身中取其第$(n+1)$項 u_{n+1} 與其第 n 項 u_n 之比值以驗之。令 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=L$，

(I) 若$|L|<1$，則級數收斂；

(II) 若$|L|>1$，則級數發散；

(III)若$|L|=1$，則本法不靈，即級數收斂與否不能用此法以決定之。遇此之時，或須改用比較證驗法。但若遇 L 之值可寫爲

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^p+an^{p-1}+\cdots\cdots}{n^p+bn^{p-1}+\cdots\cdots}$$

之時，則於 $(b-a)>1$，級數收斂，而於 $(b-a)\leqq 1$，級數發散。此證甚繁，茲不述。至於條件(I)之證須分爲兩部討論之。茲先證正項級數之合於條件(I)者收斂。因級數各項均爲正，故 $|L|=L$ 而 $L<1$。今在 L 與 1 間取一值 r 即 $L<r<1$。因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=L$，故自某項始（例如 m，$n\geqq m$）可有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<r$$

而自 u_m 項始，級數 $v_1+\cdots\cdots+u_m+u_{m+1}+\cdots\cdots$ 中之其餘各項即 $u_m+u_{m-1}+u_{m+2}+\cdots\cdots$ 將較正項級數 $v_m+ru_{m+1}+r^2u_{m+2}+\cdots\cdots$ 之和爲小。惟後者爲一收斂幾何級數$(r<1)$，是以前者亦爲收斂的。若 $|L|>1$，則自一適當之項始，$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}>1$，換言之，自某項始，$u$ 之各項之絕對值均較其前一項爲大，是以 u_n 之極限必非 0，而級數遂爲發散的。

例 1.　在 $\frac{1\cdot2}{1\cdot3}+\frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\cdots\cdots$ 級數中，

$$u_n=\frac{1\cdot2\cdots(n+1)}{1\cdot3\cdots(2n+1)};\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+2}{2n+3};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{2+\frac{3}{n}}=\frac{1}{2},$$

是以此級數爲收斂的

例 2.　在 $\frac{1}{10^{20}}+\frac{1\cdot2}{10^{40}}+\frac{1\cdot2\cdot3}{10^{60}}+\cdots\cdots$ 級數中，

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{10^{20}}。$$

當 $n\to\infty$ 時，其値無限增大，是以此級數爲發散的。

例 3.　在 $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\cdots\cdots$ 級數中，$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n+1}{2n+2}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{v_n}=1$，故不能用此法以作判定。但$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}$，$a=\frac{1}{2}$，$b=1$，$b-a=\frac{1}{2}<1$，乃知此級數爲發散的。

16-7. 絕對的與條件的收斂 若級數中正項或負項之數目係有限，則將此等有限之項數減去後，所得之級數之符號將爲純一而證驗正項級數散斂性之方法卽可應用。但有時級數中正負項之數目均爲無限多，於是證驗其散斂性之方法卽須用及前節之條件(I)。惟前節所述之證，僅得用於正項級數，欲證其亦可用於正負項兼有之級數則須用下述定理：

定理： 改變一級數中全體負項之符號，若所得之正項級數係收斂的，則原級數亦爲收斂的。

本定理亦係根據(16-5)節之基本極限定理而來。令下列級數(u)

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots \tag{25}$$

爲一正負項兼有之級數。今將其負項之符號悉改以得一正項級數(u')如下：

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots\cdots。 \tag{26}$$

若令U_n表原級數首n項之和，而以P_n與$-N_n$分別表其首n項中各正項與各負項之和，則有

$$U_n=P_n-N_n, \tag{27a}$$

同樣若以U'_n表級數(u')首n項之和，則必有

$$U'_n=P_n+N_n。 \tag{27b}$$

今知U'_n有極限，P_n與N_n均爲恆增的變數，但自(27b)復知P_n與N_n之值必不能超過U'_n之極限。是以P_n與N_n亦各有其極限(16-5節基本定理)。P_n與N_n旣有確定極限，U_n爲二者之差亦有確定極限，是以有如上述之定理。

讀者應注意本定理之逆定理不確。換言之，一正負項兼有之級數雖爲收斂的，而將其各負項之符號均改變後所得之正項級數則未必收斂。倘若後者亦收斂，則前者之收斂名爲絕對的(absolutely convergent)；否則名爲條件的收斂(conditionally convergent)。

根據本節定理，即知一級數收斂之充足條件實爲

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=L,\quad |L|<1,$$

如(16-6)節(I)所云。

例如因 $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$ 爲收斂級數，故 $1+x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots$ 亦爲收斂的，x 可爲任何有限值。

系　絕對的收斂級數中各項之次序可以任意改變而不影響於該級數之收斂性或其和之值。條件的收斂級數中各項之次序則不得任意改變，改變後之級數與原級數常不相同。

本系第一段之證不難可由讀者自求之；其第二段之證稍繁，茲不述，但可由下例見之。

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots\ (\text{見後 16-14 節})$$

乘以 $\frac{1}{2}$ 則

$$\frac{1}{2}\ln 2=\quad\frac{1}{2}\qquad-\frac{1}{4}\qquad+\frac{1}{6}-\cdots\cdots+$$

兩者相加，乃得

$$\frac{3}{2}\ln 2=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots$$

是卽將原級數中多項之次序改變後之級數，但其値顯異於原級數。

16-8. 交替級數 若級數各項之符號係交替的爲正負如

$$\pm(v_1-v_2+v_3-v_4+\cdots\cdots), \tag{28}$$

其中各 v 全爲正値，則其收斂之條件爲

$$v_{n+1}<v_n,\ 及 \lim_{n\to\infty} v_n=0。 \tag{29}$$

注意 $\lim\limits_{n\to\infty}(v_{n+1}/v_n)<1$，較本條件 $v_{n+1}<v_n$ 爲苛。

例如 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots+\cdots$ 爲收斂的，雖則調和級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots$ 係發散的。欲證條件(29)，可將級數(28)括弧內起始雙數之項之和寫爲

$$V_{2m}=(v_1-v_2)+(v_3-v_4)+\cdots\cdots+(v_{2m-1}-v_{2m})。 \tag{30a}$$

今 $v_{n+1}<v_n$，故各括弧內之値均爲正，而 V_{2m} 遂係恆增的。若取起始單數之項之和，則得

$$V_{2m+1}=v_1-(v_2-v_3)-(v_4-v_5)-\cdots\cdots-(v_{2m}-v_{2m+1}), \tag{30b}$$

表示 V_{2m+1} 之値係恆減的且較小於 v_1。由是並知 V_{2m} 之値不超過 v_1，因 $V_{2m}=V_{2m+1}-v_{2m+1}\leqq v_1$ 也。是以根據基本極限定理，V_{2m} 有一極限。同樣亦可證 V_{2m+1} 不小於 (v_1-v_2)，因

$$V_{2m+1}=V_{2m}+v_{2m+1}\geqq V_{2m}\geqq(v_1-v_2),$$

故 V_{2m+1} 亦有極限。最後因 $\lim\limits_{m\to\infty} v_{2m+1}=0$，且

$$\lim_{m\to\infty} V_{2m+1}=\lim_{m\to\infty} V_{2m}+\lim_{m\to\infty} v_{2m+1}=\lim_{m\to\infty} V_{2m},$$

乃知兩極限係相等，而級數遂爲收斂的。

由上述結果觀之，若自某項起棄去交替級數中末後各項，則所得之近似值之誤差，其數值必不超過所留最後之項之數值。

例　討論以下級數之散斂性：

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots。$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{-n}{n+1}x\right|=|x|$，故此級數於 $|x|<1$ 時為絕對收斂。如 $|x|>1$，其 v_n 之極限為

$$\lim_{n\to\infty}\left|u_n\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{nx^{n-1}}{1}\right|=\infty,$$

故為發散的。至於 $x=\pm1$ 時之情形為何，可以 $x=1$ 與 -1 分別代入而檢驗之。當 $x=1$ 時，級數為收斂的交替級數

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots,$$

因各項之數值均較小於其前一項之數值，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 也。若 $x=-1$，則為調和級數乘以 -1，故為發散的。綜言之，此級數之收斂範圍為 $-1<x\leqq1$。又如以此級數之首 n 項作級數之近似值，其誤差之數值不至超過 $\frac{x^n}{n}$。

16-9．冪級數　按一級數之各項並不限定須為常數，前已有多例，若各項均為 $(x-a)$ 之乘冪乘以一係數，如

$$b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\cdots\cdots \tag{31}$$

者，則稱之為冪級數(power series)。Taylor 與 Maclaurin 級數均為冪級數之良例。冪級數之收斂或發散，通常視 x 所取之值而定，有時 x 之值可至無限制（即可為任何有限值）。應用前此所述之比值證驗法，可

證若

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|=C, \tag{32}$$

則(A)當 $|x-a|<C$ 時，級數(31)爲絕對的收斂，

(B)當 $|x-a|>C$ 時，級數(31)爲發散的，

至於 $|x-a|=C$ 則須另行討論。此乃因收斂與發散條件分別爲

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}(x-a)^{n+1}}{b_n(x-a)^n}\right|<1,\ 即\ |x-a|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|, \tag{33a}$$

與

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}(x-a)^{n+1}}{b_n(x-a)^n}\right|>1,\ 即\ |x-a|>\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|。 \tag{33b}$$

16-10. 由冪級數確定之函數 本章之原始目的係以示明一函數在適當情形下可展爲一冪級數，例如 Taylor 與 Maclaurin 級數。反之，一冪級數在其收斂範圍內，亦表一函數，因在其收斂範圍內，與 x 以一定之值，該級數卽有一確定之和故也。至於所得之和可否以初等函數表之，則爲另一問題。其實各高等函數常卽以一收斂冪級數爲其定義：例如

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2 4^2}-\frac{x^6}{2^2 4^2 6^2}+\cdots\cdots,\ |x|<\infty, \tag{34a}$$

$$J_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^2 4}+\frac{x^5}{2^2 4^2 6}-\cdots\cdots,\ |x|<\infty, \tag{34b}$$

均可用 (33a) 證其爲收斂的。J_0 與 J_1 分名爲零級與壹級之 Bessel 函數，其在高等物理學與工程學中應用頗廣。

16-11. 再論 Taylor 及 Maclaurin 級數 欲將一函數 $F(x)$ 展爲 Taylor 或 Maclaurin 級數，必須證明所得剩餘 R_n 之極限趨於 0。欲證

$R_n \to 0$，除已舉之 e^x, $\sin x$, $\cos x$ 各例外，均屬甚難之事。故初步工作多先求冪級數之收斂範圍，然後再就此範圍內討論 R_n 是否趨於 0，因在此範圍外，R_n 根本卽不趨於 0。反言之，用 Taylor 或 Maclaurin 展開法，卽使所得之級數爲收斂的，而結果是否爲原函數之展開式亦尙須用 $R_n \to 0$ 一事證驗之。例如設函數 $F(x)$ 之 Maclaurin 級數爲

$$F(x)=F(0)+xF'(0)+\frac{x^2}{2!}F''(0)+\cdots\cdots,$$

今將 $G(x)=F(x)+e^{-\frac{1}{x^2}}$ 一函數亦按 Maclaurin 方法展開之，其各項亦將爲

$$F(0)+xF'(0)+\frac{x^2}{2!}F''(0)+\cdots\cdots,$$

因 $G(0)=F(0), G'(0)=F'(0), \cdots\cdots G^{(n)}(0)=F^{(n)}(0)$ 也。但此級數顯然非 $G(x)$，此蓋因將 $G(x)$ 用 Maclaurin 方法展開時，其剩餘 R_n 不趨於 0。是以 $G(x)$ 不得展爲 Maclaurin 級數。

例　展 $(1+x)^m$ 爲 Maclaurin 級數（m 爲任何數）。

若 m 爲正整數，所求之展開式之項數將爲有限，且卽初等代數中之二項定理。玆所欲論者爲 m 非正整數之展開式。令

$$F(x)=(1+x)^m, \qquad F(0)=1,$$

$$F'(x)=m(1+x)^{m-1}, \qquad F'(0)=m,$$

$$F''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2}, \qquad F''(0)=m(m-1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F^{(n)}(x)=m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

$$F^{(n)}(0)=m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)。$$

於是 $$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots+$$

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n:$$

因 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{(n-1)!}\,\frac{n!}{m(m-1)\cdots(m-n+1)}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{m-n+1}\right|=1,$$

是以除 m 爲正整數外，此級數於 $|x|>1$ 係發散的。至於 $|x|<1$ 時，其 R_n 之情形，可用 Cauchy 式之剩餘(10)討論之。

$$R_n=\frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{(n-1)!}m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)(1+\theta x)^{m-n}$$

$$=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)x^n}{(n-1)!}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}(1+\theta x)^{m-1},0<\theta<1,$$

故如 $|x|<1$，此中最後因子係有限値；因 $0<\theta<1$，是以若 $(m-1)>0$，則 $(1+\theta x)^{m-1}<2^{m-1}$（有限値）；如 $(m-1)<0$，則 $(1+\theta x)^{m-1}<(1-|x|)^{m-1}$(亦爲有限値)。至於$\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$則爲恆小於1之正値，因 $n>0$，而

$$0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1,\ |x|<1,\ 0<\theta<1$$

也。由是言之，R_n 趨於0與否可由其第一因子

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)x^n}{(n-1)!},\ |x|<1,$$

定之。惟此因子乃下列收斂級數之普通項：

$$m(m-1)x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{2!}x^3$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{3!}x^4+\cdots\cdots$$

故其極限爲 0。因此，$\lim_{n\to\infty} R_n=0$，而普遍的二項定理遂爲

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots \quad (35)$$

讀者可注意本證必須用 Cauchy 式之剩餘，若用 Lagrange 式剩餘，則將無結果。

16-12．冪級數之微積分　設有一冪級數

$$f(x)=b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\cdots\cdots,\ |x-a|<c。\quad (36)$$

今按項求其對 x 之積分或微分，以得

$$\int_a^x f(x)dx=b_0(x-a)+\frac{b_1}{2}(x-a)^2+\frac{b^2}{3}(x-a)^3+\cdots\cdots, \quad (37)$$

或 $$f'(x)=b_1+2b_2(x-a)+3b_3(x-a)^2+\cdots\cdots, \quad (38)$$

其收斂範圍仍爲 $|x-a|<c$。

讀者對此或將認爲當然之事無待贅述；實則一級數可否按項積分或微分，須頗繁蹟之理論方能判定，蓋按積分，微分與級數之和三者之基本定義，三種演算手續均爲依一定規律求極限。由此等規律之繁複情形言之，此三手續之次序，是否可以任意對調，實非明顯之事。所幸如級數係冪級數，則可按項積分或微分之。由是所得之級數，其收斂範圍與原級數同，且在收斂範圍內亦表原級數之積分函數或紀數。此事之證甚繁，茲略之。

試將(36)按項微分而令結果中之 x 爲 a，即可得

$$b_0=f(a),b_1=f'(a),\cdots\cdots b_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

以示(36)實卽 Taylor 級數。由此言之,若有一函數可展爲一冪級數,此冪級數必爲 Taylor 或 Maclaurin 級數無疑。

例 1 零級 Bessel 函數爲

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2 4^2}-\frac{x^6}{2^2 4^2 6^2}+\cdots\cdots,\quad |x|<\infty;$$

按項微分卽得

$$\frac{d}{dx}J_0(x)=-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{2^2 4}-\frac{x^5}{2^2 4^2 6}+\cdots=-J_1(x),\ |x|<\infty,$$

以示 J_0 與 J_1 之一關係。

例 2. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\cdots,\quad |x|<\infty;$

按項積分之卽有

$$\int_0^x \cos x\,dx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{5^5}{5!}-\cdots\cdots=\sin x,\quad |x|<\infty。$$

例 3. 求 $\ln(1+x)$ 之 Maclaurin 級數。

因 $\ln(1+x)=\int_0^x\frac{dx}{1+x}$, 且按二項定理

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots,\ |x|<1,$$

故知

$$\ln(1+x)=\int_0^x(1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots)dx$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots \tag{39}$$

讀者可注意此級數之收斂範圍實爲 $-1<x\leqq 1$ (見 16-8 節例)。雖則被積級數之收斂範圍僅爲 $|x|<1$。按項積分後之級數,其收斂範圍較大於原級一事,亦頗常見。

16-13. 冪級數之運算　在其公共收斂範圍內，兩個冪級數可互相加減或相乘。換言之，若公同之收斂範圍爲 $|x|<C$，由下列二函數

$$f(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots\cdots,$$

$$F(x)=B_0+B_1x+B_2x^2+B_3x^3+\cdots\cdots,$$

可得：

$$f(x)\pm F(x)=(b_0\pm B_0)+(b_1\pm B_1)x$$
$$+(b_2\pm B_2)x^2+\cdots\cdots,\quad |x|<C;$$

$$f(x)F(x)=(b_0B_0)+(b_1B_0+b_0B_1)x$$
$$+(b_2B_0+b_1B_1+b_0B_2)x^2+\cdots\cdots,|x|<C。$$

二收斂級數亦可相除，但所得之級數，其收斂範圍除爲分子之收斂範圍所限制外，且應較分母 $F(x)=0$ 之最小數值之根爲更小。

本節原理之證稍繁，茲略之。但在應用上此點頗便，因用此等原理卽不必藉 Taylor 或 Maclaurin 方法以求若干函數之級數也。

例1.　因 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots\cdots,-1<x\leqq1,$

及　$\ln(1-x)=-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}-\cdots\cdots,-1\leqq x<1,$

故相減之後卽有

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right),|x|<1。\tag{49}$$

例 2.　已知

$$\left.\begin{aligned}\sin x&=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots\\ \text{及}\quad \cos x&=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots\end{aligned}\right\},|x|<\infty,$$

相除乃得

$$
\begin{array}{r|l}
x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}-\cdots\cdots & 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\cdots\cdots \\ \hline
x-\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^5}{24}-\cdots\cdots & x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+\cdots\cdots \\ \cline{1-1}
\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{30}+\cdots\cdots & \\
\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{6}+\cdots\cdots & \\ \cline{1-1}
\dfrac{2x^5}{15} &
\end{array}
$$

惟 $\cos x=0$ 最小之根爲 $\frac{\pi}{2}$，故

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots\cdots,\quad |x|<\frac{\pi}{2} \tag{41}$$

例 3. 求 $\dfrac{1-3x}{1-3x+2x^2}$ 之 Maclaurin 級數。

令所求之級數爲 $b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots$，

乘以分母 $(1-3x+2x^2)$ 後卽得

$$
\begin{array}{l}
b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots\cdots \\
\qquad -3b_0x-3b_1x^2-3b_2x^3+\cdots\cdots \\
\qquad\qquad +2b_0x^2+2b_1x^3+\cdots\cdots \\ \hline
b_0+(b_1-3b_0)x+(b_2-3b_1+2b_0)x^2+(b_3-3b_2+2b_1)x^3+\cdots\cdots
\end{array}
$$

將此與分子 $(1-3x)$ 相較，則知

$$
\begin{array}{ll}
b_0=1; & \\
b_1-3b_0=-3, & 故\ b_1=0; \\
b_2-3b_1+2b_0=0, & 故\ b_2=-2; \\
b_3-3b_2+2b_1=0, & 故\ b_3=-6;
\end{array}
$$

而所求級數之首三項遂爲

$$\frac{1-3x}{1-3x+2x^2}=1-2x^2-6x^3+\cdots\cdots,\quad |x|<\frac{1}{2}。$$

其收斂範圍係由分母 $1-3x+2x^2$ 之根$\left(\text{卽}\frac{1}{2}\text{與 }1\right)$定之。若用 Maclaurin 方法發展此三例之函數，其繁長不言而喻。此爲本節所述方法之優點。

16-14. 極大與極小　吾人亦可利用 Taylor 級數以推得判定極大與極小之各條件。令

$$F(a+h)-F(a)=hF'(a)+\frac{h^2}{2!}F''(a)+\frac{h^3}{3!}F'''(a)+\cdots\cdots,\quad(42)$$

若 $F(x)$ 在 $x=a$ 點爲極大，則當 h 爲任何正或負之小值，$F(a+h)<F(a)$。h 既可正可負，故如欲 $F(a+h)<F(a)$，必有 $F'(a)=0$，且因 h^2 爲正，故 $F''(a)$ 須爲負。設或 $F''(a)=0$，則在極大點，$F'''(a)$ 亦必爲 0，而 $F^{(4)}(a)$ 則須爲負（參考 3-7 節）。

同樣，若 $F(x)$ 在 $x=a$ 點爲極小，則 $F(a+h)>F(a)$；因 h 爲任何正或負之小值，故乃有 $F'(a)=0$ 及 $F''(a)>0$ 之條件。餘可仿前。

16-15. 不定式　冪級數之又一應用在於計算不定式如 $\frac{0}{0}$者。玆舉兩例以示之：

例 **1.**　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-\sin 2x}{x^3+x^4}$。

$$e^x-e^{-x}-\sin 2x=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\right)$$

$$-\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\right)-\left(2x-\frac{8x^3}{3!}+\frac{32x^5}{5!}-\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{5x^3}{3}-\frac{x^5}{4}+\cdots\cdots$$

故所求之極限爲 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{5x^3}{3}-\dfrac{x^5}{4}+\cdots\cdots}{x^3+x^4}=\dfrac{5}{3}$。

例 2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+bx)^{\frac{a}{x}}$。

先計對數則有

$$\lim_{x\to 0}\frac{a}{x}\ln(1+bx)=\lim_{x\to 0}\frac{a}{x}\left(bx-\frac{(bx)^2}{2}+\frac{(bx)^3}{3}-\cdots\cdots\right)=ab,$$

$$\lim_{x\to 0}(1+bx)^{\frac{a}{x}}=e^{ab}。$$

第 十 六 章 習 題

1. 用有剩餘之 Taylor 定理,以證下列關係:

(a) $\cos x>1-\frac{1}{2}x^2$,

(b) $x>\sin x>x-\frac{1}{6}x^3$,
$\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$, $\left(\frac{\pi}{2}>x>0\right)$。

2. 計算下列諸值:

(a) $\tan 46°$ 準確至小數點後 3 位;

(b) $\sin 1°$ 準確至小數點後 6 位;

(c) $\sqrt{3}=\frac{7}{4}\sqrt{\frac{48}{49}}$ 準確至小數點後 7 位;

(d) $\sqrt{e}$ 準確至小數點後 4 位;

(e) $\frac{1}{\sqrt{1.01}}$準確至小數點後 4 位。

3. 問下列各級數之第 n 項 u_n 爲何，並測驗其散斂性。

(a) $\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\frac{1}{\sqrt{3^3}}+\cdots\cdots$，　(b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\cdots$，

(c) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots$，　(d) $\frac{2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{4}{2\cdot3\cdot4}+\frac{6}{3\cdot4\cdot5}+$；

(e) $\frac{1}{a}+\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{3a+2b}+\cdots$；(f) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\cdots$，

(g) $1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+$，　(h) $\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots$。

4. 若級數第 n 項之 u_n 如下列所示，試寫出其首三項，並測驗其散斂性。

(a) $\frac{4n!}{3\cdot(3+5)\cdots[3+(n-1)5]}$，　(b) $\frac{2(n+1)!n!}{(2n+1)!}$；

(c) $\frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n(n-1)}\,[n+\sqrt{n+1}]}$，　(d) $\frac{n\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{1+n^3}}$，

(e) $\frac{1}{(a+nb)[a+(n+1)b]}$，$(a,b<0)$.　(f) $\frac{n}{1+n\sqrt{n}}$，

(g) $\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$，　(h) $\frac{1+n^2}{n!}$；

(i) $-(-1)^n\frac{\ln(1+n)}{1+n}$；　(j) $\frac{1}{n(\ln n)^n}$。

5. 問下列各級數收斂時，x 值之範圍爲何？

(a) $1+x+2x^2+3x^3+\cdots\cdots$，　(b) $x+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\cdots\cdots$，

(c) $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2^2}-\frac{1}{3}\frac{x^3}{2^3}+\cdots\cdots$；　(d) $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots$；

(e) $\frac{x-1}{8}-\frac{1}{3}\frac{(x-1)^3}{8^3}+\frac{1}{5}\frac{(x-1)^5}{8^5}-\cdots\cdots,$

(f) $x+2!x^2+3!x^3+\cdots\cdots,$

(g) $\frac{1}{3}x-\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5}x^2+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7}x^3+\cdots\cdots,$

(h) $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x}{3}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^2}{3^2}+\cdots\cdots,$

(i) $\frac{1+\sin^2 x}{1}+\frac{1+\sin^2 2x}{2^2}+\frac{1+\sin^2 3x}{3^3}+\cdots\cdots,$

(j) $\sum\frac{(n^2-1)x^n}{n^3+2};$　　　(k) $\sum\left(\frac{2\pi}{\pi}\sin\frac{\pi}{2\pi}\right)^n x^n;$

(l) $\sum e^{-\sqrt{n}}x^n;$　　　(m) $\sum\frac{x^n\ln n}{n};$

(n) $\sum\frac{x^n}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$。

6. 用合併簡單級數之法,展開下列函數而得其起始四項,並決定收斂之區域:

(a) $\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}},$　　　(b) $(e^{x\cos x}\cos x\sin x)$。

7. 若 $\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{1}{2}x+\frac{B_1}{2!}x^2-\frac{B_2}{4!}x^4+\frac{B_3}{6!}x^6-\cdots\cdots,$

試示 $B_1=\frac{1}{16},B_2=\frac{1}{30},B_3=\frac{1}{42},\cdots\cdots B_1,B_2,B_3,\cdots\cdots$等名爲 Bernoulli 數。

8. 試用級數之加減乘除，積分或微分各法將下列函數展開爲 Maclaurin 級數(最少三項),並示明其收斂範圍。

(a) $\tan^{-1}x$;　(b) $\sin^2 x$;　(c) $e^x \sin x$,

(d) $e^x \cos x$,　(e) 2^x;　(f) $\ln(1+\sin x)$;

(g) $\cos(a \sin^{-1} x)$;　(h) $\sec x$,　(i) $\dfrac{2-x}{(2+x)(1+x^2)}$,

(j) $(1-2x-x^2)^{\frac{1}{2}}$;　(k) $e^{k\sin^{-1}x}$。

9. 證下列諸展開式:

(a) $$\ln x=\ln 3+\frac{x-3}{3}-\frac{(x-3)^2}{2\cdot 3^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(x-3)^n}{n.3^n}+\cdots;$$

$$-1<(x-3)\leqq 1;$$

(b) $$\sqrt{x}=\sqrt{a}+\frac{x-a}{2\sqrt{a}}-\frac{(x-a)^2}{2^2 2!a^{3/2}}+\frac{1\cdot 3(x-a)^3}{2^3 3!a^{5/2}}-\cdots\cdots,$$

$$|x-a|<a。$$

10. 示零級 Bessel 函數 $y=J_0(x)=1-\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{x^4}{2^2 4^2}-\dfrac{x^6}{2^2 4^2 6^2}+\cdots\cdots$

滿足下列微分方程: $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}+xy=0$。

11. 示 Legendre 多項式:

$$y=P_m(x)=\frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdot 1}{m!}\left\{x^m-\frac{m(m-1)}{2(2m-1)}x^{m-2}\right.$$

$$\left.+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 4\cdot(2m-1)(2m-3)}x^{m-4}-\cdots\cdots\right\}$$

滿足 $\dfrac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}\right\}+m(m+1)y=0$。

12. 示 n 級 Bessel 函數 $y=J_n(x)=\dfrac{x^n}{2^n n!}\left(1-\dfrac{x^2}{2^2(n+1)}\right.$

$$\left.+\frac{x^4}{2^4 2!(n+1)(n+2)}-\frac{x^6}{2^6 3!(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\cdots\right)$$

滿足 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0$, n 爲一正整數。

13. 求(a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$; (b) $\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x-\sin 2x}{x^2\ln(1+x)}$;

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{\tan^2 x}$, (d) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}$;

(e) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-2x)^{\frac{1}{2}}}{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-(1+4x)^{\frac{1}{4}}}$。

14. 試將 Taylor 定理中之剩餘 R_n 寫爲:

$$R_n(x)=F(b)-F(x)-(b-x)F'(x)-\frac{(b-x)^2}{2!}F''(x)-\cdots\cdots$$
$$-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n-1)}(x),$$

而示 $\frac{d}{dx}R_n(x)=-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n)}(x)$, $R_n(b)=0$, 及

$$R_n(a)=\int_a^b\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n)}(t)\,dt。$$

試利用前章題(16)之結果及此積分以估計 R_n 之值而得本章之方程(8)與(10)。問此估計法與本章所用以估計 R_n 之方法，其假定孰爲較苛?

第十七章　立體解析幾何

17-1．解析方法與幾何概念　前此所討論之問題均限於一個自變數之函數。微積分學中所用之自變數，其數目當然不限於一。討論兩自變數之函數時，固亦可藉純粹的解析方法；但如能利用立體幾何，則結果更易說明。立體解析幾何之原理，均可由平面幾何之理，引申而得之。茲於本章說明立體幾何要點，而於後數章討論微積分在立體幾何中之應用。

17-2．空間之直角坐標　欲定一點 P 在平面中之位置，只須取兩適當坐標軸（通常為互成直角之兩直線）而指明 P 點距此兩直線之遠度 x 與 y。設欲定一點 P 在空間之位置，則可取三個適當互相正交之平面，而指明 P 點距此三平面之遠度 x, y 與 z。用作參考之三平面名為坐標平面（co-ordinate plane），三平面公共之交點 O 名為原點，其三交線 OX、OY, OZ 則名為坐標軸（co-ordinate axes)。通常作圖之時，此三軸之位置則如圖（17-1）所示，即以紙面為 Y 及 Z 軸所在之平面而令 X 軸與之垂直向外。此種坐標制名為右手制（right-handed system)，蓋 OX, OY

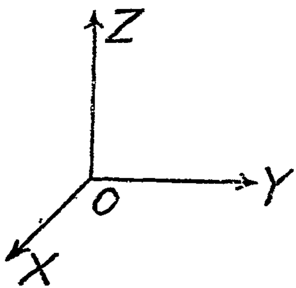


圖 17-1

及 OZ 之正方向可分別以右手之拇指、食指及中指三者互作直角表明之也。

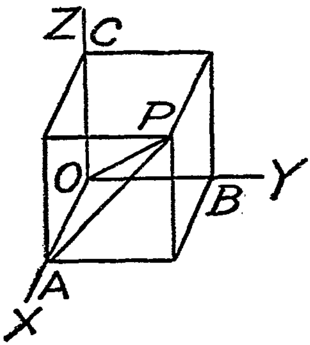


圖 17-2

坐標面既定之後，欲定任意點 P 之位置，可自該點作三平面分別與坐標面平行而與坐標軸分別交於 A,B,C 三點(圖 17-2)。令 $OA=x,OB=y,OC=z$，則 x,y,z 即爲 P 點距 YOZ，ZOX 及 XOY 三平面之遠度。玆名之爲 P 點之直角坐標，而簡寫之爲 $P=(x,y,z)$。因所用坐標制爲右手的，故 x,y,z 各值之正負應合於次述規定：

(A)在 YOZ 面前之 x 爲正，其後爲負；

(B)在 ZOX 面右之 y 爲正，其左爲負；而

(C)在 XOY 面上之 z 爲正，其下爲負。

讀者可注意上述坐標實卽(1-6)節所述者之推廣，蓋位於圖(1-1)紙面上諸點亦可認爲有三個坐標，特其 Z 坐標悉爲 0 而已。

17-3．方向角，方向餘弦，及方向數 在平面中任取一直線 SQ。其方向可由其與坐標軸(例如 X 軸)所作之角定之。與 SQ 平行之直線，其方向旣悉同，故表此角之時，常自原點 O 繪一直線 OP 與 SQ 平行(圖 17-3)。若 OP 與 X 軸所作之角爲 α，其與 Y 軸所作

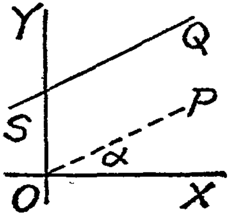


圖 17-3

之角爲β，則因 $\sin^2\alpha=\cos^2\beta$，故有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1 \tag{1}$$

之關係。同樣，若自原點作 OP 直線，與空間之任一方向 SQ 平行，(圖17-4)，而令 OP 與 OX, OY, OZ 各軸所作之角分別爲 α, β, γ，則有

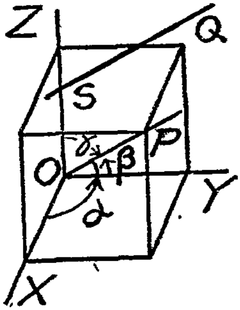


圖 17-4

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1。\tag{2}$$

方程（2）實卽方程（1）之推廣式，因在圖(17-3)中 $\alpha+\beta=90°$，$\cos\gamma=0$ 也。欲證方程(2)可參閱圖(17-2)。因

$$\overline{OP}^2=\overline{OA}^2+\overline{AP}^2=\overline{OA}^2+\overline{AF}^2+\overline{FP}^2$$

故若令 $OP=r$，則有

$$r^2=x^2+y^2+z^2。\tag{3}$$

惟 $\alpha=\angle POA$，$\beta=\angle POB$，$\gamma=POC$，且

$$\cos\alpha=\frac{OA}{OP}=\frac{x}{r};\ \cos\beta=\frac{OB}{OP}=\frac{y}{r};\ \cos\gamma=\frac{OC}{OP}=\frac{z}{r},$$

卽 $x=r\cos\alpha$，$y=r\cos\beta$，$z=r\cos\gamma$，故代入方程(3)後卽有方程(2)所示之關係。

方程 (2) 極爲重要。其中之 α, β, γ 各角名爲方向角 (direction angles)，其値以自 0 至 180° 之正角爲限。方向角之餘弦常分別以 $l=\cos\alpha$，$m=\cos\beta$，$n=\cos\gamma$ 表之，其名爲方向餘弦(direction cosines)。讀者可注意自 O 向 P 之方向角若爲 α, β, γ 則自 P 向 O 之方向角將

爲其補角，故自 O 向 P 之方向餘弦與自 P 向 O 之方向餘弦，其數值相等但其符號係相反，雖則兩方向均爲平行的。換言之，兩平行方向之方向餘弦，其符號爲正抑爲負，須由題意另行定之。

除以其方向角或方向餘弦決定空間之一方向外，吾人亦常用與方向餘弦 l,m,n 成正比之三數（名爲方向數 direction numbers）以定此方向。因有方程(2)所示之關係，即

$$l^2+m^2+n^2=1。 \tag{4}$$

故若所用之三數爲 $a=kl, b=km, c=kn$，k 爲一比例係數，則

$$a^2+b^2+c^2=k^2 \tag{5}$$

而 $$l=\frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ m=\frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ n=\frac{\pm c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; \tag{6}$$

此中之符號是否均爲正或負，仍須由題意另定之。

例 1. 設有 P 點，坐標爲 $(-2,1,2)$，問 OP 及 PO 兩方向之方向餘弦及方向角爲何。

因 $x=-2,\ y=1,\ z=2$，故 OP 距離爲

$$r=\sqrt{4+1+4}=3,$$

於是 OP 之方向餘弦爲

$$l=\frac{-2}{3},\ m=\frac{1}{3},\ n=\frac{2}{3}$$

其方向角遂爲

$$\alpha=\cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)=131.8°;\quad \beta=\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=70.5°,$$

$$\gamma=\cos^{-1}\frac{2}{3}=48.2°。$$

至於自 P 向 O 之方向餘弦則爲

$$l'=\frac{2}{3}, m'=-\frac{1}{3}, n'=-\frac{2}{3};$$

而其方向角爲

$$\alpha'=48.2°;\ \beta'=109.5°;\ \gamma'=131.8°。$$

例 2. 某方向之方向數爲 $-3,4,-5$，且 $l>0$，求其方向餘弦與方向角。

$$a=-3,\ b=4,\ c=-5,$$

$$k=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\pm\sqrt{9+16+25}=\pm5\sqrt{2},$$

但因規定 $l>0$，而 $a=-3$，故 k 應爲負，卽

$$l=\frac{-3}{-5\sqrt{2}}=0.425;\ m=\frac{4}{-5\sqrt{2}}=-0.665;\ n=\frac{-5}{-5\sqrt{2}}=0.707;$$

方向角則爲　　$\alpha=64.8°;\ \beta=124.4°;\ \gamma=45°$。

17-4. 兩點之距離　設平面中兩點之坐標分別爲 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2)，則其距離 s 爲

$$s=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_2)^2}。\qquad(7)$$

將此推廣，若空間兩定點 P_1 及 P_2 之坐標爲 (x_1, y_1, z_1) 及 (x_2, y_2, z_2)，則其距離將爲

$$s=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}。\qquad(8)$$

欲證(8)，可作過 P_1 及 P_2 兩平行於坐標面之平面如圖 (17-5)。令 $P_1P_2=s$。由圖知

$$P_1A=x_2-x_1,\ P_1B=y_2-y_1,\ P_1C=z_2-z_1,$$

且 P_1P_2 之方向餘弦爲

$$l=\frac{P_1A}{P_1P_2};\quad m=\frac{P_1B}{P_1P_2};\quad n=\frac{P_1C}{P_1P_2};$$

故 $$\left(\frac{x_2-x_1}{s}\right)^2+\left(\frac{y_2-y_1}{s}\right)^2+\left(\frac{z_2-z_1}{s}\right)^2=1,$$

而方程(8)卽隨此得以成立。若 P_1 與 P_2 係位於 XOY 平面中，則 $z_1=z_2=0$，方程(8)卽簡化爲方程(7)矣。

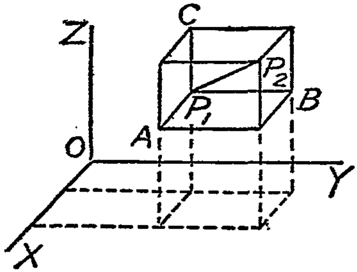


圖 17-5

例 求 $P_1=(1,-1,0)$ 與 $P_2=(1,2,4)$ 兩點間之距離及 P_1P_2 之方向餘弦與方向角。

$$x_2-x_1=1-1=0,\ y_2-y_1=2-(-1)=3,\ z_2-z_1=4-0=4,$$

故 P_1P_2 之距離爲

$$s=\sqrt{0+3^2+4^2}=5,$$

而自 P_1 至 P_2 之方向餘弦爲

$$l=\frac{0}{5}=0;\quad m=\frac{3}{5},\quad n=\frac{4}{5},$$

其方向角則爲

$$\alpha=90°;\ \beta=53.1°;\ \gamma=35.5°。$$

17-5. 直線之方程 在平面幾何中，通過兩點 (x_1,y_1) 及 (x_2,y_2) 之

直線,其方程爲

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}。\tag{9}$$

仿此,即知通過空間兩點 $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ 與 $P_2=(x_2,y_2,z_2)$ 之方程爲

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}。\tag{10}$$

證方程(10)方法與證方程(9)之法同。設過 P_1 點作三直線 P_1A, P_1B, P_1C 分別與 X, Y, Z 三軸平行而令 P_2A, P_2B, P_2C 與 P_1A, P_1B, P_1C 分別正交;圖(17-6)僅示P_1P_2 及 P_1A 兩線。令 P_1P_2 直線上任意點 P 之坐標爲 (x,y,z),則自直角三角形 P_1P_2A, P_1P_2B, 或 P_1P_2C, 即有

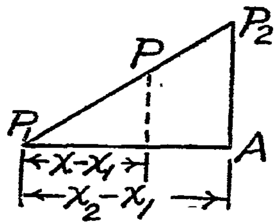


圖 17-6

$$\frac{P_1P}{P_1P_2}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1};$$

是即通過 P_1 及 P_2 之方程(10)。

若已與者爲一點 P_1, 及直線所取之方向(例如由其方向數 a,b,c 定之), 則因 x_2-x_1, y_2-y_1 及 z_2-z_1 分別與方向數成正比之故, 方程(10)即可寫爲

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}。\tag{11}$$

此式實與平面幾何中之直線方程之點斜式(point slope form)相當。蓋若所求直線係在 XOY 平面中,即 $z=z_1=0$, 則因

$$a=k\cos\alpha,\ b=k\cos\beta,\ c=k\cos\gamma,$$

故方程(11)即與常見之

$$(y-y_1)=\frac{b}{a}(x-x_1)=(x-x_1)\tan\alpha$$

相同。讀者應注意平面幾何中之直線僅由一個一次方程表之；空間直線之方程則需兩個一次方程。

例 1. 因 X 軸之方向餘弦為 $l=1, m=0, n=0$，且通過原點，故其方程按(11)為 $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}$，以 0 為分母之除法既無意義，此結果實表示 X 軸之方程為

$$y=0 \text{ 及 } z=0;$$

此實顯然，因 X 軸上各點之 Y 與 Z 坐標均為 0，而其 X 坐標則可為任何值。同樣，Y 軸方程為 $z=0$, $x=0$; 而 Z 軸方程則為 $x=0, y=0$。

例 2. 一直線通過 $P_1=(1,-1,0)$ 與 $P_2=(1,2,4)$ 兩點，求其方程。

自方程(10)即得：$\frac{x-1}{1-1}=\frac{y-(-1)}{2-(-1)}=\frac{z-0}{4-0}$

或 $x=1,\ 4(y+1)=3z$。

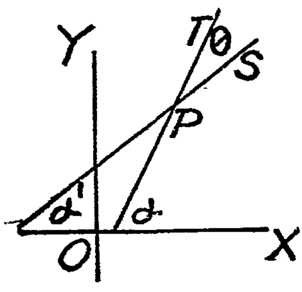


圖 17-7

17-6. 兩直線間之角．在平面幾何中，兩直線 PT 與 PS 間之角係等於其與 X 軸所成角 α 與 α' 之差，圖(17-7)，即

$$\theta=\alpha-\alpha';$$

若用方向餘弦表之，則得

$$\cos\theta=\cos(\alpha-\alpha')$$

$$=\cos\alpha\cos\alpha'+\sin\alpha\sin\alpha'=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'。\qquad(12)$$

空間兩直線所夾之角，其意義不若圖(17-7)所示者之明顯，因空間兩直線未必有交點也。所謂空間兩直線所夾之角，實即指過原點與此兩直線平行之兩直線間之角。此角 θ 之餘弦亦可將方程(12)增加一項而推廣之如次：

$$\cos\theta=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma' \tag{13a}$$

或
$$\cos\theta=ll'+mm'+nn' \tag{13b}$$

此中之 l,m,n 及 l',m',n' 分表兩直線之方向餘弦。欲證(13)，可作兩直線 OP 與 OP' 使與所設之直線平行。據定義，夾角 $\theta=\angle POP'$。若令 $OP=r$，$OP'=r'$，$PP'=s$，則自 POP' 三角形(圖 17.8)卽有

$$s^2=r^2+r'^2-2r'r\cos\theta \tag{14}$$

若 P 與 P' 之坐標分別爲 (x,y,z) 與 (x',y',z')，則

$$r^2=x^2+y^2+z^2,\ r'^2=x'^2+y'^2+z'^2$$

$$s^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2,$$

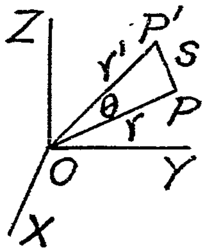


圖 17-8

卽
$$r^2+r'^2-s^2=2x'x+2y'y+2z'z;$$

以是代入(14)乃得

$$r'r\cos\theta=x'x+y'y+z'z。 \tag{15}$$

因 $l'=x'/r',m'=y'/r',n'=z'/r';l=x/r,m=y/r,n=z/r$，(15) 遂可化爲(13)。

由方程(13)言之，兩直線正交之必要且充足條件爲：

$$l'l+m'm+n'n=0 \tag{16a}$$

或改用其方向數，則
$$a'a+b'b+c'c=0, \tag{16b}$$

因 $\cos\theta=0$ 也。同樣，若兩直線之方向係相同，則 $\theta=0$, $l=l'$, $m=m'$, $n=n'$, 而 $l^2+m^2+n^2=1$，是卽方程(2)。

17-7. 平面之方程 空間之直線係由兩個一次方程表之。若僅有一個一次方程，其所表者實爲一平面。據此以言，方程(10)與(11)可視爲兩平面之交線。決定一平面之位置，其方法甚多，玆先假定已知者爲其中一點 P_0 之坐標 (x_0, y_0, z_0) 與其法線 ON 之方向數 a, b, c。如是令 $P=(x, y, z)$，爲此平面中任意點，則 P_0P 與 ON 正交，而據方程(16)卽有

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0, \tag{17}$$

反之，任一含 x, y, z 之一次方程如

$$ax+by+cz+F=0 \tag{18}$$

者皆代表一平面。蓋若 $P_0=(x_0, y_0, z_0)$ 點滿足方程(18)，則

$$ax_0+by_0+cz_0+F=0, \tag{19}$$

而將二者相減之後卽有方程(17)。

例 1. 各坐標面之方程如下：

XOY 面：$z=0$; YOZ 面：$x=0$; ZOX 面：$y=0$。

例 2. 設有一平面與 X, Y, Z 各軸分別相交於 A, B, C，若此三點之坐標(卽名爲該平面之截距 intercept)，分別爲 $(A, 0, 0)$, $(0, B, 0)$ 及 $(0, 0, C)$，則以之次第代入(18)卽知

$$a=-\frac{F}{A};\ b=-\frac{F}{B};\ c=-\frac{F}{C};$$

而所求平面之方程遂爲

$$\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=1; \tag{20}$$

此可視爲平面幾何中直線方程截距式 (intercept form) 之推廣。

17-8. 曲面之方程　在平面幾何中一自變數之函數可以一曲線表之；同樣，在立體幾何中，二自變數之函數，如 $z=F(x,y)$ 者，可以一曲面示之，例如前節之平面。欲說明各種曲面之情況，因須用三維空間，自不若說明平面曲線之易。但如以適當之平面截所求之曲面，使其相交之曲線得呈現於平面上，則曲面狀況爲何當較易了然。例如作平行於坐標面之平面，如 $z=z_0$，且以 X 軸與 Y 軸在此截面上之射影爲坐標軸，則原方程將變爲含 y 與 x 兩變數之函數而其所表之曲線爲何卽可描得。例如次：

例 1.　論 $x^2-4y=0$ 之形狀。

在 XOY 平面上 $x^2-4y=0$ 之軌跡爲一拋物線，(圖 17-9)。今原方程不含 z，故 z 可爲任何値。是以若作一直線垂直於 XOY 面而過 $x^2-4y=0$ 拋物線上之任意點，此直線上之 X, Y, Z 坐標亦將滿足此方程。準此卽知 $x^2-4y=0$ 所代表者爲一拋物形曲面，如圖 (17-9)。讀者至此當已注意若原方程缺少一變數，則該方程卽表一柱面。

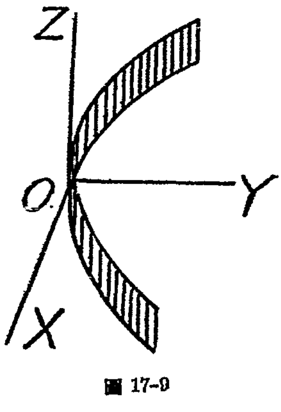


圖 17-9

例 2.　論 $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ 之形狀。

以 $z=z_0$ 平面截此曲面，所得之曲線，在 XOY 平面之射影，其方程爲

$$z_0=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},$$

此卽表示若 z_0 爲任何正值，所得之曲線均爲橢圓。至若 z_0 爲負，則 x 與 y 不能均爲實數；換言之，z 不得爲負。故曲面係位在 XOY 平面之上部。若以 $x=x_0$ 平面或 $y=y_0$ 平面截此曲面，所得之曲線，其射影在 XOY 平面中之方程爲

$$z=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \text{ 或 } z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2},$$

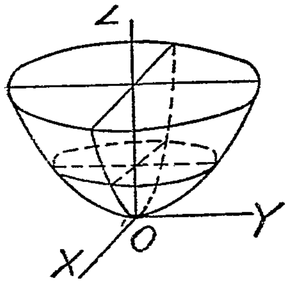


圖 17-10

表示其爲向上之拋物線。故所求曲面之形狀係如圖(17-10)所示，原截面或爲橢圓或爲拋物線，故此曲面所包圍之體積稱爲橢圓拋物體(elliptic paraboloid)。

17-9. 曲線之方程 空間之曲線均可視爲兩個曲面之交線，故空間曲線，亦可以兩個適當聯立方程，如

$$z=F(x,y),\quad z=G(x,y) \tag{21}$$

者，表示之。例如 X 軸可視爲 XOY 平面 $z=0$ 與 ZOX 平面 $y=0$ 之交線。但因通過一曲線之曲面可有無限多個，故表同一曲線之聯立方程，其形式亦儘可不同。

除以兩聯立方程表空間曲線外，吾人亦可利用一參數 t 以示之。令曲線上任意點 P 之坐標與參數 t 之關係爲

$$x=f(t),\quad y=g(t),\quad z=h(t); \tag{22}$$

今若能自此三關係中之一解出 t 以使 t 爲 x, y 或 z 之函數，然後再代入其他兩關係，所得之兩方程將爲兩個柱面，其交線卽爲所求之曲線。例如若自 $z=h(t)$ 解出 t 而得 $t=H(z)$，則方程(22)可寫爲

$$x=f[H(z)]=F(z) \tag{23a}$$

及

$$y=g[H(z)]=G(z)。 \tag{23b}$$

(23a)中未含 y，故爲與 Y 軸平行之柱面；(23b)未含 x，乃與 X 軸平行之柱面。二者相交之曲線卽參變方程(22)所示者也。

例　問 $x=a\cos t,\ y=a\sin t, z=bt$ 所代表之曲線爲何。

自 $x^2+y^2=a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t=a^2$ 一關係言之，此曲線必係位在圓柱 $x^2+y^2=a^2$ 上。又因 t 每增加 2π，z 增加 $2\pi b$ 而 x 與 y 之值與原值同，故知所得者爲一盤旋圓柱而上之螺旋線(helix)，其螺距 (pitch) 則爲 $2\pi b$。

17-10. 曲面之參變方程　設引用兩個參數 (例如 s 與 t) 而表 P 點之坐標爲

$$x=F(s,t), y=G(s,t), z=H(s,t)。 \tag{24}$$

假定由此三關係中之二可解出 s 及 t 使爲兩變數之函數，例如令 $s=S(x,y)$，$t=T(x,y)$ 則以此兩值代入第三關係卽得

$$z=H[S(x,y), T(x,y)]=h(x,y), \tag{25}$$

是卽一曲面之方程。由是知方程(24)在適當情況下亦表一曲面。

例　若 ϕ 與 θ 爲兩個參數，問

$$x=a\cos\phi\cos\theta,\ y=b\cos\phi\sin\theta,\ z=c\sin\phi$$

所代表者爲何?

將 x 與 y 平方後以消去 θ, 卽有

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2\phi;$$

再加以 z 之平方以消去 ϕ 乃得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

是爲一橢圓體之方程,因若以 $x=x_0$, $y=y_0$ 或 $z=z_0$, $\{|x_0|<|a|, |y_0|<|b|, |z_0|<|c|\}$,平面截之,所得之曲線均爲橢圓也。

第十七章習題

1. 自原點作直線至 P 點,坐標如下,求 OP 及 PO 兩方向之方向餘弦及方向角:

(a) $P=(3,4,-12)$; (b) $P=(-1,-2,2)$;

(c) $P=(-2,6,3)$; (d) $P=(0,-3,4)$。

2. 求連 P 與 R 各直線之方向餘弦及方向角:

	(a)	(b)	(c)	(d)
P	(−6,2,3)	(5,−1,−6)	(4,−3,1)	(−4,2,−1)
R	(6,−2,0)	(0,3,14)	(2,3,−2)	(−2,0,0)

並求(a)與(b),(b)與(c),(c)與(d)及(d)與(a)各對直線間之角。

3. 已知以下各方向之方向數,計其方向餘弦:

(a) −2,−2,2; (b) −2,3,6;

(c) 4,20,−5; (d) −6,2,−3。

4. 說明以下各方向:

(a) $\cos\alpha=\cos\beta=0$;　(b) $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$,

(c) $\cos\gamma=0, \cos\alpha=1$;　(d) $\cos\alpha=\frac{1}{2}$; $\cos\beta=-\frac{1}{2}$。

5. 求與以下各題兩方向（由其方向數決定者）正交之方向：

(a) 3,4,2; 1,2,3;　(b) 5,6,−3; 2,−4,−1;

(c) 0,1,0; 0,0,1;　(d) 2,1,−1; 4,2,0。

6. 三角形之三頂點爲 (7,3,4), (1,0,6), 及(4,5,2), 試計其各邊之長,及各邊在三坐標面中與其在坐標軸上各投影之長。

7. 三角形之三頂點爲(7,3,4),(1,0,6)及(4,5,−2)。求各邊之方向數,並示其爲一直角三角形。

8. 四邊形之頂點爲(5,5,2),(7,5,−3),(3,2,−1)及(1,2,4)。討論其性質。

9. 連 $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ 及 $P_2=(x_2,y_2,z_2)$ 之直線爲 $P=(x,y,z)$ 點所分,其比率爲 $k=P_1P/PP_2$, 試證

$$x=\frac{x_1+kx_2}{1+k},\quad y=\frac{y_1+ky_2}{1+k},\quad z=\frac{z_1+kz_2}{1+k};$$

由以上結果,求等分(3,2,1)至(4,−2,6)直線之點。

10. 求以下各直線之方程：

(a)過(4,5,−2)與(7,3,4)兩點；

(b)過(1,0,6),其方向數爲 6,3,−2;

(c)過(−1,−2,4),而與連(−3,0,3,)於(−1,−1,2)之直線平行；

(d)過(1,2,3),正交於 $3x-4y+5z=6$ 平面；

(e)過$(2,-1,-3)$，與 $x+2y-3z=2$ 及 $5x-3z+4=0$ 兩平面平行；

(f)過$(0,0,3)$，與 $y=4, z=3$；及 $2x=5, 3y=7$ 兩直線正交。

11. 求以下各平面之方程：

(a)過$(2,-3,1)$與方向 $a=2, b=1, c=-1$ 正交；

(b)過$(2,4,3)$，平行於 $5x-2y+3z=7$ 平面；

(c)過$(1,-2,1)$，正交於 $3x+y+z=2$ 及 $x-2y+z=4$ 兩平面；

(d)過$(3,4,1)$與$(2,6,-2)$兩點，正交於 $2x-3y+4z=2$ 平面；

(e)與 X, Y, Z 三軸相交之截距分別爲 $3, 2$，及 -6；

(f)過$(2,5,-3)$，$(-2,-3,5)$，$(5,3,-3)$三點。

12. 若 l, m, n 分表 $lx+my+nz+p=0$ 平面之法線方向餘弦，試示自 $P=(x_0, y_0, z_0)$ 點至此平面之距離爲：

$$lx_0+my_0+nz_0+p。$$

13. 已知兩平面之方程爲 $lx+my+nz+p=0$ 及 $l'x+m'y+n'z+p'=0$，(a)求其交線之方向數；(b)計二者間之夾角；(c)示等分二者間夾角之平面之方程爲

$$lx+my+nz+p=l'x+m'y+n'z+p'。$$

14. 示通過 $A=(x_1, y_1, z_1)$，$B=(x_2, y_2, z_2)$，及 $C=(x_3, y_3, z_3)$三點之平面可用以下行列式表之：

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0。$$

15. 若 $A(x^2+y^2+z^2)+2Lx+2My+2Nz+D=0$ 爲一圓球面，問其半徑與中心之坐標各爲何？何時此球不存在？

16. 求以下各圓之半徑及中心：

(a) $x^2+y^2+z^2=25$, $z=3$;

(b) $x^2+y^2+z^2=6x+4y$, $2x+y+2z=1$;

(c) $x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z=2$, $6x+2y-3z+5=0$;

(d) $x^2+y^2+z^2=2x$; $8x-y=3$。

17. 試由 $Ax^2+By^2+Cz^2+2Fyz+2Gzx+2Hxy=0$ 一方程解出 x 使爲 y 與 z 之顯函數而示明如其所表者爲兩平面，則各係數應滿足下列兩關係($A\neq 0$)：

$$A\Delta_3=A\begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}=A(ABC+2FGH-AF^2-BG^2-CH^2)=0;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} A & H \\ H & B \end{vmatrix}=(AB-H^2)\leqq 0。$$

一般言之，本題之曲面爲通過原點之錐面，試示明之。

18. 由(17)題結果，令 $z=1$，試示圓錐曲線

$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0$$

之性質將如下表所示：

	$\Delta_2>0$(橢圓類)	$\Delta_2=0$(拋物線類)	$\Delta_2<0$(雙曲線類)
$\Delta_3=0$	點 （半徑爲 0 之圓）	如 $G^2>AC$，兩平行線 如 $G^2=AC$，一直線 如 $G^2<AC$，無軌跡	兩相交直線
$\Delta_3\neq 0$	如 $A\Delta_3<0$，橢圓 如 $A\Delta_3>0$，無軌跡	拋物線	雙曲線

19. 利用平行於各坐標面之平面截以下各曲面而討論其形狀;

(a) $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-k^2=0$; (b) $y^2+z^2=4x$;

(c) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$; (d) $a^2x^2+y^2=z^2$;

(e) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; (f) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2cz$;

(g) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$; (h) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$;

(i) $(x^2+y^2+z^2+a^2-b^2)^2=4a^2(x^2+y^2)$;

(j) $ayz+bzx+cxy=0$。

20. 求以下各曲面之直角坐標方程(u 與 v 爲參數):

(a) $x=u\cos v$, $y=u\sin v$ $z=kv$;

(b) $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=ku$;

(c) $x=au\cos v$, $y=bu\sin v$, $z=cu$;

(d) $x=a\cos v$, $y=b\sin v$, $z=u$,

(e) $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=u^2$

21. 試用兩個適當柱面說明以下各曲線(a,b,c 爲常數, t 爲參數):

(a) $x=at$, $y=bt^2$, $z=ct^3$;

(b) $x=a\sin t$, $y=b\cos t$, $z=ct$;

(c) $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=kt$;

(d) $x=a\cos t$, $y=a\cos(t-2\pi/3)$; $z=a\cos(t+2\pi/3)$;

(e) $x=\cos(t+a)$, $y=\cos(t+b)$, $z=\cos(t+c)$;

(f) $x=A\cos(t+a)$, $y=B\cos(t+b)$, $z=C\cos(t+c)$。

22. 試用一適當參數表出以下各題兩曲面之交線:

(a) $y^2+z^2=a^2$, $x^2+z^2=b^2$;

(b) $x+y+z=0$, $ax+by+cz+d=0$;

(c) $5x^2-yz-2zx+2xy+2x+2y=0$, $2x^2-zx+x+y=0$ (試用 $t=y/x$ 爲參數)。

(d) $z^2+2z-y+2=0$, $y^2-2y-x-1=0$〔試用 $t=(y-1)/(z-1)$ 爲參數〕。

23. 試以 $Ax+By+Cz=k$ (k 爲參數) 各平行平面截題(19)各曲面而討論其平行截面(parallel sections)之形狀。

24. 已與一二次三元方程：

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Fyz+2Gzx+2Hxy$$
$$+2Lx+2My+2Nz+D=0,$$

今將坐標軸平行移於 (α,β,γ) 點，若所得之方程不含 x,y,z 之一次各項，試示行列式(名爲判別式 discriminant)。

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}\neq 0。$$

在此情形下，(α,β,γ) 點名爲此二次曲面 (quadric surface) 之中心(center)。

25. 將前題之原點移至該二次曲面之中心後，試示所得方程之常數將爲 Δ_4/Δ_3，Δ_4 與 Δ_3 表以下兩行列式：

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} A & H & G & L \\ H & B & F & M \\ G & F & C & N \\ L & M & N & D \end{vmatrix};\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}。$$

26．由題(17)及題(25)結果，試斷定一二次曲面之形狀可大體的說明如次（參考題18）：

	$\Delta_3 \neq 0$	$\Delta_3 = 0$
$\Delta_4 \neq 0$	有心的二次曲面 或無軌跡	拋物面
$\Delta_4 = 0$	錐　面 或　點	柱面或無軌跡

第十八章　偏微分及其應用

18-1 .多元函數　茲於本章開始討論兩個及兩個以上自變數之函數,即多元函數 (functions of several variables)之微積各問題。設 S 爲 XOY 平面上之一部分。若在此區域內任擇一點 $P\ (x,y)$,即指定 x 與 y 之値),立可有一値 u 與之相應,則稱 u 爲 x,y 兩自變數在 S 區域內之函數,而以記號表之如次:

$$u=f(x,y)。\tag{1}$$

同樣,令 V 爲空間之一部分;若在 V 內任擇一點 $P(x,y,z)$,即有一値 v 與之相應,則 u 爲 x,y,z 三變數在 V 區域內之函數

$$u=F(x,y,z)。\tag{2}$$

自變數之數目超過二個時,用幾何圖形以說明函數與其自變數之關係(參考十七章),實不可能,然吾人爲便利計,亦常擴充平面及立體幾何之各概念以作解釋,例如稱 n 個自變數 $x,y,z\cdots\cdots$ 爲 n 維空間之點之坐標。此種推廣,讀者可自爲之,茲不俱述。

多元函數之連續性,其定義可由(1-2)節所述之一元函數之連續定義推廣之如下:令 $F(x,y,\cdots\cdots)$ 表 $x,y,\cdots\cdots$ 等變數之函數,若無論依何律例,當 $x\to a,\ y\to b,\cdots\cdots$ 時,$F(x,\ y,\ \cdots\cdots)$ 所趨之極限,等於 $F(x,y,\cdots\cdots)$ 於 $x=a,y=b,\cdots\cdots$ 時之値,即

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b\\ \cdots\cdots}} F(x,y,\cdots\cdots)=F(a,b,\cdots\cdots)$$

則稱 $F(x,y,\cdots\cdots)$ 連續於 $(a,b,\cdots\cdots)$ 點。

18-2. 偏紀數　設 u 爲 x,y 兩自變數之函數：$u=f(x,y)$。若視 y 爲常數而求 u 對 x 之紀數，則所得之結果稱爲 u 對 x 之偏紀數(partial derivative)，而以記號 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial x}$，或 $f_x(x,y)$ 表之。換言之，函數 f 對 x 之偏紀數，其定義爲：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\right)。$$

同樣，視 x 爲常數而求 u 對 y 之紀數，乃得 u 對 y 之偏紀數：

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\right)。$$

上述定義亦可推廣於二元以上之函數。例如函數 $u=f(x,y,z)$ 可有次列諸偏紀數：$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}\left(\text{卽}\frac{\partial f}{\partial x}，\frac{\partial f}{\partial y}，\frac{\partial f}{\partial z}\right)$。由上所述，卽知有偏紀數之函數，必係連續，雖則連續多元函數未必均有偏紀數。

例　若 $y=x^y+z$，則 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}x^y=yx^{y-1}$；

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}x^y=x^y\ln x；\text{ 而 }\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial z}{\partial z}=1。$$

18-3. 偏紀數之幾何的意義　設圖(18-1)所示曲面之方程爲：

$$z=f(x,y)。\tag{3}$$

過曲面上之一定點 P (在此點 $x=x_0$，$y=y_0$)，作 $ABCD$ 平面(卽 $y=y_0$ 平面)與 XOZ 面平行。令 IPJ 表此平面與曲面相交之曲線。若以 OX 及 OZ 在 $ABCD$ 上之射影爲坐標軸，則曲線 IPJ 之方程爲：

$$z=f(x,y_0)。$$

在此平面上，$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$顯然與$\left(\frac{dz}{dx}\right)$之意義相同，故在 $x=x_0$，$y=y_0$ 點之$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ 可視爲 IPJ 曲線過 P 點之斜度。同樣，作 $EFGH$ 平面與 YOZ 平行，令其與曲面相交之曲線爲 KPL，則在$x=x_0$，$y=y_0$ 點之$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ 可視爲 KPL 曲線過 P 點之斜度。

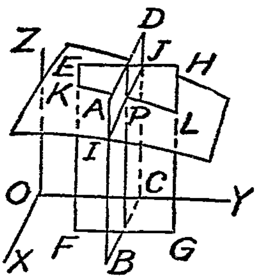


圖 18-1

18-4．切面與法線　既知過 $x=x_0$，$y=y_0$，$z=z_0$ 點之兩切線之斜度分別爲$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0$及$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0$如前節末所述，則過此點之切面方程即可確定。因過曲面 $z=f(x,y)$ 上任意點之切面必含過該點而切於該面之切線全體，故此切面可由其中之任二切線定之。據(17-7)節方程(17)，吾人可將切面之方程寫爲：

$$z-z_0=A(x-x_0)+B(y-y_0), \tag{4}$$

此中之 A 及 B 爲兩個待定之常數。欲求其值，可依次令 $y=y_0$ 平面，或 $x=x_0$ 平面，與方程(4)之平面相交，其交線之斜度必分別等於在 $x=x_0$，$y=y_0$ 點之$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$與$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$，即$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0$與$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0$。換言之，平面(4)與 $y=y_0$ 平面之交線爲 $z-z_0=A(x-x_0)$，其斜度爲 $A=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0$；平面(4)與 $x=x_0$ 平面之交線爲 $z-z_0=B(y-y_0)$，其斜度爲 $B=\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0$；而切於曲面 $z=f(x,y)$之平面，其方程遂爲：

$$z-z_0=(x-x_0)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0+(y-y_0)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0。 \tag{5}$$

又按 (17-7) 節方程 (17)，與此切面正交之直線，其方向數係與 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0$，$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0$ 及 -1 三數成正比，故按 (17-5) 節方程 (11)，過 $P(x_0,y_0,z_0)$ 點之法線方程爲：

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0}=\frac{z-z_0}{-1}。\tag{6}$$

18-5. 高級偏紀數　$f(x,y)$ 之偏紀數 $f_x(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$ 既仍爲 x 及 y 之函數，故亦可有偏紀數，其名爲 $f(x,y)$ 之二級偏紀數。此等二級偏紀數，驟視之，似有四個如下：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\text{以}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\text{或 } f_{xx}(x,y)\text{表之；}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\text{以}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\text{或 } f_{xy}(x,y)\text{表之；}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\text{以}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial}\text{或 } f_{yx}(x,y)\text{表之；}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\text{以}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\text{或 } f_{yy}(x,y)\text{表之。}$$

但吾人可證明：若 $f(x,y)$ 之二級偏紀數 f_{xy} 與 f_{yx} 爲連續函數，則二者彼此相等，故四者之中實僅有三個不同之值。欲證 $f_{xy}=f_{yx}$，先令

$$u=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)+f(x,y),$$

而視 x 及 $x+\Delta x$ 爲常數，且寫 $F(y)=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$。如是按均値定理，如 $0<\theta_1<1$，則

$$u=F(y+\Delta y)-F(y)=F'(y+\theta_1\Delta y)\Delta y$$

$$=[f_y(x+\Delta x,y+\theta_1\Delta y)-f_y(x,y+\theta_1\Delta y)]\Delta y,$$

故　$$u=f_{xy}(x+\theta_2\Delta x,y+\theta_1\Delta y)\Delta y\Delta x,0<\theta_1<1,0<\theta_2<1。\tag{7}$$

仿此若令 $G(x)=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$，即可證

$$u=f_{yx}(x+\theta'_1\Delta x,y+\theta'_2\Delta y)\Delta x\Delta y,\ 0<\theta'_1<1,0<\theta'_2<1, \quad (8)$$

由(7)及(8)乃得

$$f_{xy}(x+\theta_2\Delta x,y+\theta_1\Delta y)=f_{yx}(x+\theta'_1\Delta x,y+\theta'_2\Delta y) \quad (9)$$

惟 f_{xy} 及 f_{yx} 均爲連續函數,故令(9)中之 Δx 及 Δy 趨於0，即有

$$f_{xy}=f_{yx}.$$

根據上述原理，依照各種不同之次序將 $f(x,y)$ 對 x 求偏紀數 m 次，對 y 求偏紀數 n 次，所得之結果均屬相等，故可以同一記號表之。例如 $\dfrac{\partial^5 f}{\partial x^2\partial y^3}$ 代表 $f(x,y)$ 對 x 求偏紀數兩次，對 y 求偏紀數三次之結果。

以上所述顯然可以推廣於三元或三元以上之函數。

例 1.　設 $u=e^x\cos y$，試求其二級及其三級偏紀數。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y;\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^x\cos y;\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-e^x\sin y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y;\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-e^x\cos y;\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-e^x\sin y.$$

此結果顯然表示 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$。

又
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=e^x\cos y;\ \frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2}=-e^x\sin y;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}=-e^x\cos y;\ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=e^x\sin y;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial x}=-e^x\sin y;\ \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial x\partial y}=-e^x\sin y;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial y\partial x}=-e^x\cos y;\ \frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x\partial y}=-e^x\cos y;$$

亦表示
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial x\partial y}=\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2}。$$

及
$$\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial y\partial x}=\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x\partial y}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}。$$

例 2. 設 $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}$, $\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}=-\frac{\partial v}{\partial r}$, u 與 v 各爲 r 及 θ 之函數,試示

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0。$$

微分第一方程得　$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial\theta};$$

因 $\frac{\partial u}{\partial\theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}$ 而 r 與 θ 俱爲自變數,故 $\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=-r\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial r}$; 是以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$$
$$=\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial r}=0。$$

18-6. 全微分　設 $f(x,y)$ 及其偏紀數 f_x 及 f_y 均爲 x 及 y 之連續函數,今將 x 及 y 之値改變,令 Δx, Δy 分表二者之增量,如是所產生之增量 Δu 將爲

$$\Delta u=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y),$$

或
$$\Delta u=[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]$$
$$+[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)] \qquad (10)$$

據均值定理,

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)$$
$$=f_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)\Delta x,\ 0<\theta_1<1;$$

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$$
$$=f_y(x,y+\theta_2\Delta y)\Delta y,\ 0<\theta_2<1。$$

將此代入(10)內，得

$$\Delta u=f_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)\Delta x+f_y(x,y+\theta_2\Delta y)\Delta y。$$

f_x 及 f_y 既爲連續函數，故當 Δx 及 Δy 皆趨於 0 時，此中之 Δx 與 Δy 之係數分別趨於 $f_x(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$。換言之，兩係數與 $f_x(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$ 相差將爲二無窮小 h 及 k，故可寫

$$\Delta u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)+(h\Delta x+k\Delta y) \tag{11}$$

茲仿前次第五章微分之定義，名公式 (11) 右邊第一括弧內之部分爲 u 之全微分(total differential)，且亦仿一元函數之微分記號以 du 表之，卽：

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y \tag{12}$$

至於公式 (11) 之第二括號內所含之兩項既均爲兩無窮小之乘積，其值與第一括號內之值(卽 du)相較實爲甚小。換言之，du 乃 Δu 之主要部分，故當 Δx 及 Δy 均甚小之時，du 可視爲 Δu 之近似值，此與一元函數之情況相似（參閱 5-2 節）。

在方程(12)中，若令 u 依序等於自變數 x 及 y，則得 $dx=\Delta x$ 及 $dy=\Delta y$ 故自變數之全微分卽等於其增量，而定義方程（12）可改寫爲：

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{13}$$

吾人可用同樣之方法討論兩元以上之函數之增量。例如若三元函數 $u=f(x,y,z)$ 及其偏紀數 f_x, f_y, f_z 均爲連續，則可將其增量化作與(12)類似之形式，其主要部分，卽 u 之全微分，係由下列公式計之：

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz \tag{14}$$

例 1. $u=x^y+z$ 之全微分爲

$$du=yx^{y-1}dx+x^y\ln x\,dy+dz。$$

例 2. 一正長方體之邊長爲 3.07, 3.96, 12.10 尺，問其對角線之長約爲若干。

答案顯然爲$\sqrt{3.07^2+3.96^2+12.10^2}$。但用本節原理，其算法應如下：

邊長爲 x,y,z 之正長方體，其對角線之長爲：$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，

因 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$；$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$；$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$。

故
$$du=\frac{xdx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}。$$

以 $x=3$, $y=4$, $z=12$, $dx=3.07-3=0.07$, $dy=3.96-4=-0.04$, $dz=12.10-12=0.10$ 代入上二式內，得 $u=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=13$,

$du=\frac{0.07\times 3-0.04\times 4+0.10\times 12}{13}=\frac{1.25}{13}=0.10$，故所求對角線之長約爲 $13+0.10=13.10$ 尺。

18-7. 函數的函數之紀數 若 u 爲 x 之函數，x 又爲自變數 t 之函數，則 u 對 t 之紀數爲：

$$\frac{du}{dt}=\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} \tag{15}$$

此方程已於前（2-8）節證明。兹推廣之。設 u 爲 x,y 兩變數之函數 $[u=f(x,y)]$ 而 x,y 又皆爲自變數 t 之函數，則 u 亦爲 t 之函數，其對 t 之紀數，可由下列方程求之：

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{16}$$

欲證此，試與 t 以一增量 Δt，令$\Delta x,\Delta y,\Delta u$ 表相應之 x,y,u 之增量，則

$$\Delta u=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y) \tag{17}$$

依照上節之方法，此方程可化爲：

$$\Delta u=f_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)\Delta x+f_y(x,y+\theta_2\Delta y)\Delta y,\ \begin{matrix}0<\theta_1<1\\0<\theta_2<1\end{matrix};$$

將兩邊各除以 Δt，則有

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}=f_x(x+\theta_1\Delta x,\ y+\Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t}+f_y(x,y+\theta_2\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t} \tag{18}$$

令　$\Delta t\to 0$，則$\dfrac{\Delta u}{\Delta t}\to\dfrac{du}{dt}$，$\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\to\dfrac{dx}{dt}$，$\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\to\dfrac{dy}{dt}$，

$$f_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)\to f_x(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x},$$

及

$$f_y(x,y+\theta_2\Delta y)\to f_y(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y},$$

故乃得所欲證之結果。

若除 t 外，尙有其他自變數，則 u,x，及 y 均應視爲多元自變數之函數，而方程(18)中之紀數均應改用偏紀數表之，即

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \tag{19}$$

因當 Δt 趨於 0 時，$\dfrac{\Delta u}{\Delta t}$，$\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ 及 $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ 僅表 u，x 與 y 對 t 之偏紀數也。

用同樣之方法可證：若 $u=f(x,y,z)$，則當自變數僅有 t 一個時，

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} \tag{20}$$

而當自變數不止 t 一個時，則

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \tag{21}$$

餘類推。

例 若 $u=x^2y-y^2x$，且 $x=2t-3$，$y=t^2+2$，求 $\dfrac{du}{dt}$。

據方程(16)，
$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

但
$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy-y^2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=x^2-2xy,\ \frac{dx}{dt}=2,\ \frac{dy}{dt}=2t,$$

故
$$\frac{du}{dt}=2(2xy-y^2)+2t(x^2-2xy)\text{。}$$

讀者可自將 $x=2t-3$，$y=t^2+2$ 之關係代入，然後簡化之。

18-8．函數的函數之微分 (18-6)節方程(13)所示之關係，無論 x,y 是否自變數均恆眞確。蓋設 x 及 y 皆爲另一變數 t 之函數，則

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt};$$

以 dt 乘以上之兩邊，即得

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\text{。}$$

又如 x,y 爲 s,t 兩自變數之函數：$x=F(s,t)$，$y=G(s,t)$，則

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t};$$

將前者乘以 ds，後者乘以 dt，然後相加，得

$$\frac{\partial u}{\partial s}ds+\frac{\partial u}{\partial t}dt=\frac{\partial u}{\partial x}\left\{\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial x}{\partial t}dt\right\}+\frac{\partial u}{\partial y}\left\{\frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial y}{\partial t}dt\right\};$$

因 s,t 爲自變數，故

$$\frac{\partial u}{\partial s}ds+\frac{\partial u}{\partial t}dt=du,\ \frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial x}{\partial t}dt=dx,\ \frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial y}{\partial t}dt=dy,$$

以之代入以上後乃得

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{13}$$

此爲方程(13)甚重要之最大理由。

同樣吾人可證明若 $u=f(x,y,\cdots\cdots)$，無論 $x,y\cdots\cdots$ 是否自變數，恆有

$$du=f_x dx+f_y dy+\cdots\cdots \tag{22}$$

質言之，下列兩微分關係仍屬眞確：

$$df(u)=f'(u)du,\quad d(uv)=v\,du+u\,dv,$$

此中之 u,v 可爲自變數或其他變數之函數。

例 1. $d\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{d(x^2+y^2+z^2)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$=\frac{2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}。$$

例 2. $d\ln(x^3+xy)=\dfrac{d(x^3+xy)}{x^3+xy}=\dfrac{3x^2dx+x\,dy+y\,dx}{x^3+xy}$

$$=\frac{(3x^2+y)\,dx+x\,dy}{x^3+xy}。$$

18-9. 記號問題　當 $u=f(x,y)$ 爲 x 與 y 之顯函數時，u 對 x 或對 y 之偏紀數 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial u}{\partial y}$，據前述定義，其意義實甚顯然。設除 $u=f(x,y)$ 外，復有 $y=g(x,z)$ 一關係與之聯立，今欲求 $\frac{\partial u}{\partial x}$。此時吾人在未求偏紀數前應先問何者爲自變數。前此所用之偏紀數之記號雖足以顯示此點，但本題則須特別謹愼，因自變數可爲 x 與 y，或 x 與 z，或 y 與 z。若自變數爲 x 與 y，則 u 對 x 之偏紀數之記號有時寫爲 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y$，下標即所以表示暫認爲常數之變數。同樣，$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_z$ 表示自變數爲 x 與 z，但所求之偏紀數係對 x 言。至於若 y 與 z 爲自變數，則 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 一記號根本無意義。據此以言，吾人自 $u=f(x,y)$ 及 $y=g(x,z)$ 兩聯立方程可推得下列關係。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_z=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \tag{23}$$

此實卽方程(19)之另一寫法也。若依方程(19)之寫法，則得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial x},$$

其意義則殊欠明顯。

例　在熱力學中，壓力 p，容積 v 及溫度 t 可以所謂物態方程式 $F(p,v,t)=0$ 者表之。但有時所用之兩自變數並非由 p,v,t 三者中選擇其二。例如採用 t 與內能 E 爲自變數，吾人亦可求 v 對 t 之偏紀數。如是，按方程(23)乃有

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_E=\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p+\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_t\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_E。$$

18-10. 隱函數之紀數　設方程 $f(x,y)=0$ 確定 y 爲 x 之隱函數，前(2-9)節曾言，若視 y 爲 x 之函數而求此方程兩邊對 x 之紀數，則由所得之結果，卽可解出 $\frac{dy}{dx}$ 之值。據(17-8)節之理，$\frac{dy}{dx}$ 之值亦可用函數 f 之偏紀數表之，因

$$df(x,y)=d(0)=0=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

故卽可得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x} \tag{24}$$

此結果且可推廣於二元以上之函數。例如 $f(x,y,z)=0$ 確定 z 爲 x,y 二變數之隱函數，則 z 對 x（或 y）之偏紀數可自 $df=0$ 求之。因

$$df=0=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

惟求 z 對 x 之偏紀數時，y 應視爲常數，而自此乃得

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} \tag{25a}$$

同樣亦有

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x=-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} \tag{25b}$$

例 1.　設 $x^2+y^2+z^2=a^2$。求 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ 及 $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$。

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2=0;\ \frac{\partial f}{\partial x}=2x;\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y;\ \frac{\partial f}{\partial z}=2z。$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}=-\frac{2x}{2z}=-\frac{x}{z};\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x=-\frac{y}{z}。$$

例 2. 若$f(x,y,z)=0$，試證$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x=-1$。

在所欲證之結果中，$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$，$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$，$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x$三個偏紀數之意義須特加說明。因$f(x,y,z)$中之$x,y,z$三變數，其地位均同，故任一變數可視爲其他二變數之函數。於是，$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$係指當$z$爲$x$及$y$之函數時，$z$對$x$之偏紀數；$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$則指當$x$爲$y$及$z$之函數時，$x$對$y$之偏紀數；$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x$之意義可仿此釋之。是以應用公式(25)即有

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}};\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}};\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}},$$

三者相乘乃得 -1。

18-11. 空間曲線之切線與法面 表示空間曲線之方法有三已見前(17-9)節：

(一)參變方程： $x=f(t),y=g(t),z=h(t)$, (26)

(二)兩柱面之交線： $y=\phi(x),z=\psi(x)$, (27)

(三)任何兩曲面之交線： $F(x,y,z)=0,G(x,y,z)=0$, (28)

先就方程(26)論之。當$t=t_0$時，令曲線上P點之坐標爲x_0,y_0,z_0。

今與 t 以一增量 Δt，以達到曲線上坐標爲 $x_0+\Delta x$，$y_0+\Delta y, z_0+\Delta z$ 之 Q 點，如是 PQ 割線之方向數係與 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 成正比。今若令 $\Delta t\to 0$ 以使 Q 沿曲線趨於 P，則 PQ 割線將趨與曲線相切，而 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 之極限將變爲此切線之方向數。但

$$\Delta x:\Delta y:\Delta z=\frac{\Delta x}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta t}\to\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dz}{dt}$$

是以過 (x_0, y_0, z_0) 點而切於曲線之切線方程爲：

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_0}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{dy}{dt}\right)_0}=\frac{z-z_0}{\left(\frac{dz}{dt}\right)_0} \tag{29}$$

而過同點之法面方程則爲

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{dy}{dt}\right)_0(y-y_0)+\left(\frac{dz}{dt}\right)_0(z-z_0)=0 \tag{30}$$

例 1.　$x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=kt$ 表盤旋圓柱 $x^2+y^2=a^2$ 面上之一螺旋線。試求過其上 (x_0, y_0, z_0) 點之切線與法面方程。

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0=-(a\sin t)_0=-y_0;\left(\frac{dy}{dt}\right)_0=(a\cos t)_0=x_0;\left(\frac{dz}{dt}\right)_0=k;$$

故過 (x_0, y_0, z_0) 點之切線方程爲

$$\frac{x-x_0}{-y_0}=\frac{y-y_0}{x_0}=\frac{z-z_0}{k},$$

而過同點之法面方程則爲

$$-y_0(x-x_0)+x_0(y-y_0)+k(z-z_0)=0。$$

若曲線係由方程 (27) 定之，則可視 $x=t$；如是方向數係與 $1:\left(\frac{dy}{dx}\right)_0:\left(\frac{dz}{dx}\right)_0$ 成正比，而切線與法面方程將分別爲

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_0}=\frac{z-z_0}{\left(\frac{dz}{dx}\right)_0} \tag{31}$$

及

$$(x-x_0)+\left(\frac{dy}{dx}\right)_0(y-y_0)+\left(\frac{dz}{dx}\right)_0(z-z_0)=0 \tag{32}$$

例 2. 求 $y^2=2mx, z^2=m-x$ 曲線上切線及法面方程。

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\frac{m}{y_0}$; $\left(\frac{dz}{dx}\right)_0=-\frac{1}{2z_0}$，故切線方程爲

$$(x-x_0)=\frac{y_0}{m}(y-y_0)=-2z_0(z-z_0),$$

而法面方程則爲

$$(x-x_0)+\frac{m}{y_0}(y-y_0)-\frac{z-z_0}{2z_0}=0。$$

若曲線係以方程(28)表之，則所求之切線方程最好以切於兩曲面之切面之交線示之。自(18-4)節方程(5)知與切面正交之直線，其方向數係與$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0$，$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0$，$-1$ 成正比，但

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)};\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)},$$

故所求之方向數亦可寫爲

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0:\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0:\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0。$$

因此，過(x_0,y_0,z_0)點而切於 $F(x,y,z)=0$ 與 $G(x,y,z)=0$ 兩曲面之切面分別爲

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0(y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0(z-z_0)=0,$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 (x-x_0)+\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0 (y-y_0)+\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_0 (z-z_0)=0。$$

此兩聯立方程所表之直線可改表爲

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_0}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_0}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_0} \tag{33}$$

以與方程(29)或(31)相對應。同樣,法面之方程爲

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_0 (x-x_0)+\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_0 (y-y_0)+\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_0 (z-z_0)=0 \tag{34}$$

此中各行列式內之各數爲 F 與 G 兩函數在 (x_0,y_0,z_0) 點之相應偏紀數。

例 3. 求過 $x_0=1,\ y_0=1,\ z_0=1$ 點而切於圓:

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3x=0;\ G(x,y,z)=2x-3y+5z-4=0$$

之切線方程。

因 $F_x=2x-3,\qquad F_y=2y,\qquad F_z=2z;$

$G_x=2,\qquad G_y=-3,\qquad G_z=5;$

故
$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_0=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}=16;$$

$$\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_0=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=9;\ \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_0=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-1;$$

而所求之切線方程爲

$$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}。$$

18-12. 弧長 空間曲線上兩鄰點 P 與 Q 之距離之平方既爲

$$\overline{PQ}^2=\overline{\Delta x}^2+\overline{\Delta y}^2+\overline{\Delta z}^2,$$

故依照平面曲線弧長之計算法即可推得

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2。$$

若以方程(26)表所與之曲線，則弧長將為

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2+[h'(t)]^2}\,dt \tag{35}$$

若曲線為兩柱面之交線如方程(27)所示，則

$$s=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx \tag{36}$$

最後，如曲線係以兩曲面之交線如方程(28)所示者表之，則因

$$dx:dy:dz=\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}=j_x:j_y:j_z$$

故 $$\frac{dx}{ds}=\frac{j_x}{\sqrt{j_x^2+j_y^2+j_z^2}}$$

而 $$s=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{j_x^2+j_y^2+j_z^2}}{j_x}dx \tag{37}$$

此中各 j 即代表所示之行列式。

例 1. 求以下螺旋線自 $t=0$ 至 $t=t$ 之弧長：

$$x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ z=4t。$$

$$s=\int_0^t\sqrt{9\sin^2 t+9\cos^2 t+16}\,dt=\int_0^t 5\,dt=5t。$$

例 2. 求 $F(x,y,z)=y-x=0,\ G(x,y,z)=z-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=0$

曲線上自 $x=2$ 至 $x=7$ 之弧長。

$$F_x=-1,\qquad F_y=1,\qquad F_z=0;$$

$$G_x=-\sqrt{x},\qquad G_y=0,\qquad G_z=1;$$

$$J_x=\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1;\ J_y=\begin{vmatrix}0 & -\frac{1}{\sqrt{x}}\\ 1 & -\sqrt{x}\end{vmatrix}=1;\ J_z=\begin{vmatrix}-\frac{1}{\sqrt{x}} & 1\\ -\sqrt{x} & 0\end{vmatrix}=\sqrt{x};$$

$$s=\int_2^7\frac{\sqrt{J_x^2+J_y^2+J_z^2}}{J_x}dx=\int_2^7\sqrt{2+x}\,dx=\frac{2}{3}(2+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^7$$

$$=\frac{2}{3}(27-8)=\frac{38}{3}。$$

18-13. 多元函數之 Taylor 定理　設有二元函數 $f(x,y)$，並知 x_0,y_0 爲 x,y 之任意一對值。今與 x,y 以增量 h 及 k 後，相應之函數之值變爲 $f(x_0+h,y_0+k)$。茲欲將 $f(x_0+h,y_0+k)$ 發展爲 h 及 k 之冪級數。

先假設有一輔助函數

$$F(t)=f(x_0+ht,y_0+kt) \tag{38}$$

可發展爲 Maclaurin 級數：

$$F(t)=F(0)+F'(0)t+\frac{F''(0)}{2!}t^2+\cdots\cdots+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n$$

$$+\frac{F^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1},\ 0<\theta<1;$$

命 $t=1$，遂有

$$F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{F''(0)}{2!}+\cdots\cdots+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}+\frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}, \tag{39}$$

但　$F(1)=f(x_0+h,y_0+k)$，$F(0)=f(x_0,y_0)$，

且　$F'(t)=\dfrac{d}{dt}f(x_0+ht,y_0+kt)$

$$=f_x(x_0+ht,\ y_0+kt)\frac{d}{dt}(x_0+ht)+f_y(x_0+ht,\ y_0+kt)\frac{d}{dt}(y_0+kt)$$

$$=hf_x(x_0+ht,y_0+kt)+kf_y(x_0+ht,y_0+kt),$$

$$\therefore\ F'(0)=hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 h+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 k,$$

此中$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$及$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$係代表$f(x,y)$在$(x_0,y_0)$點之偏紀數。同樣，

$$F''(t)=\frac{d}{dt}hf_x(x_0+ht,y_0+kt)+\frac{d}{dt}kf_y(x_0+ht,y_0+kt)$$

$$=[hf_{xx}(x_0+ht,y_0+kt)+kf_{yx}(x_0+ht,y_0+kt)]h$$

$$+[hf_{xy}(x_0+ht,y_0+kt)+f_{yy}(x_0+ht,y_0+kt)]k$$

$$=h^2f_{xx}(x_0+ht,y_0+kt)+2hkf_{xy}(x_0+ht,y_0+kt)$$

$$+k^2f_{yy}(x_0+ht,y_0+kt)。$$

$$F''(0)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 h^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0 hk+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 k^2。$$

仿此，亦可得

$$F'''(0)=\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 h^3+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right)_0 h^2k+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right)_0 hk^2+\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0 k^3$$

....

由此類推，即知若令

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)\ 代表\ hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0),$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)代表\left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x_0,y_0)$$

$$=h^2f_{xx}(x_0,y_0)+2hkf_{xy}(x_0,y_0)+k^2f_{yy}(x_0y_0),$$

....

則自(39)知二元函數之 Taylor 定理可寫爲：

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k),0<\theta<1, \tag{40}$$

又在此中，令 $x_0=y_0=0$，則得 Maclaurin 公式：

$$f(h,k)=f(0,0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0,0)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(\theta h,\theta k),\ 0<\theta<1, \tag{41}$$

18-14．二元函數之均值定理　若於方程(39) 中，取 $n=1$，且將 $f(x_0,y_0)$項遷至左邊，則得

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$$

$$=hf_x(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+kf_y(x_0+\theta h,y_0+\theta k), \tag{42}$$

或以 x,y 代 x_0+h,y_0+k；x_1,y_1 代 $x_0+\theta h,y_0+\theta k$，則可得

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=(x-x_0)f_x(x_1,y_1)+(y-y_0)f_y(x_1,y_1), \tag{43}$$

此中(x_1,y_1)爲連(x_0,y_0)及(x,y)線段上之一點。是爲二元函數之均值定理。

18-41．極大與極小　設二元函數 $z=f(x,y)$ 在 XOY 平面上之一點 $P(x_0,y_0)$ 之值，較其在 P之鄰近各點之值皆大，則 z 之值在此點爲一極大；反之，若 z 之值較其鄰近各點之值皆小，則 z 在此點爲一極小。

當 $f(x,y)$ 於 $x=x_0, y=y_0$ 點爲極大或極小時，其在此點之偏紀數顯然必須爲 0:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0, \tag{44}$$

此蓋因過此點之切面必取水平之方向，而此兩偏紀數可視爲切面上兩個直線之斜度也。至於所求之點，果爲極大或極小與否，尙須用二級紀數證驗之。此與單元函數極大與極小情形頗相似，但證驗之法較繁，其原理如下：

設 $\frac{\partial f}{\partial x}=0, \frac{\partial f}{\partial y}=0$, 則按方程(40)，$f(x_0+h, y_0+k)$ 可寫爲

$$f(x_0+h, y_0+k)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+\frac{1}{6}R,$$

或

$$\Delta z=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+\frac{1}{6}R, \tag{45}$$

此中 $$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$R=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x_0+\theta h, y_0+\theta k), \quad 0<\theta<1。$$

若 A, B, C 三數不全爲 0，則當 h 及 k 之值夠小時，Δz 之正負號視 $\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)$ 而定，因 R 中各項均爲 h, k 之三次式，故爲較高級之無窮小也。

欲知二次式 $(Ah^2+2Bhk+Ck^2)$ 之符號與 A,B,C 之關係，可寫之爲：

$$Q(h,k)=Ah^2+2Bhk+Ck^2=A(h-\alpha k)(h-\beta k),$$

其中　$A\alpha=-B+\sqrt{B^2-AC}$　$A\beta=-B-\sqrt{B^2-AC}$。

如是知若 $B^2>AC$，則 α 與 β 爲實數，而所用之 h 與 k 如滿足 $\alpha k<h<\beta k$，則 $(h-\alpha k)(h-\beta k)$ 之符號爲負，否則爲正；故如 $B^2>AC$，則二次式 $Q(h,k)$ 之符號可正，亦可負。反之，如 $B^2<AC$，α 與 β 同爲複數，二次式應寫爲

$$Q(h,k)=\frac{1}{A}\left\{(Ah+Bk)^2+(AC-B^2)k^2\right\},$$

括弧內之值旣爲兩平方之和，除 $h=k=0$ 外，無論 h 與 k 爲何，其值均爲正。故如 $B^2<AC$，(此時 C 與 A 之符號當然相同)，二次式 $Q(h,k)$ 之符號將爲確定，卽與 A 或 C 之符號相同。至若 $B^2=AC$，則 $Q(h,k)$ 將爲一完全平方如 $\frac{1}{A}(Ah+Bk)^2$，而用適當之 h 與 k，其值可爲 0。

根據以上之代數原理，可知欲定二元函數之極大與極小，除方程(44)所示之必要條件外，尙應分別討論之如下：

(1)若 $B^2-AC<0$，且

(a) A 及 C 之符號爲正，卽 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0$，則

$\Delta z>0$，而函數在此點爲極小；

(b) A 及 C 之符號爲負，卽 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0$，則

$\Delta z<0$，而函數在此點爲極大。

(2)若 $B^2-AC>0$，則 Δz 在此點無定號，故非極大或極小。

(3) $B^2-AC=0$；在此種情形下函數是否極大或極小不能由二級偏紀數判定之，因二次式 $Q(h,k)$ 可以爲 0，Δz 之符號須由 R 決

定之也。

例 1. 試示 $u=x^3+3x^2-2xy+5y^2-4y^3$ 在原點之值為一極小。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+6x-2y;\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2x+10y-12y^2;$$

在原點,此兩偏紀數顯均為 0,故此點可為極值。令$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x+6;\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=10-24y;\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-2$,故於原點$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=4-6\times10=-56<0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}>0$, 而原點遂為一極小。

例 2. 求內接於橢圓體$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 之最大正長方體。令 V 表一內接於此橢圓體內之正長方體之體積: $V=8xyz$,

則
$$\frac{\partial V}{\partial x}=8y\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right),\ \frac{\partial V}{\partial y}=8x\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2y}{b^2z}。$$

令
$$\frac{\partial V}{\partial x}=0,\ \frac{\partial V}{\partial y}=0,\ \text{乃得}$$

$$y\left(z-\frac{c^2x^2}{a^2z}\right)=0,\ x\left(z-\frac{c^2y^2}{b^2z}\right)=0。$$

或
$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=K^2。$$

代入橢圓體方程乃得 $K^2=\frac{1}{3}$而所求正長方體各邊之長為

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}},\quad y=\frac{b}{\sqrt{3}},\quad z=\frac{c}{\sqrt{3}}。$$

故所求之體積 $V=\frac{8}{9}\sqrt{3}\,abc$。

第十八章習題

1. 求下列各函數之一級偏紀數：

(a) $u=\sin xy$;　(b) $u=ax^2+2bxy+cy^2$;

(c) $u=x\ln y$;　(d) $u=x^3+y^3+z^3$;

(e) $u=e^{xyz}$;　(f) $u=z\sin^{-1}\left(\frac{y^2}{x^2}\right)$。

2. 求下列各曲面過 (x_0, y_0, z_0) 點之法線與切面方程：

(a) $z=\tan^{-1}\frac{y}{x}$;　(b) $z=ax^2+by^2$;

(c) $x^2+y^2+z^2=a^2$:

(d) $Ax^2+By^2+Cz^2+2Fyz+2Gzx+2Hxy+2Lx$

$+2My+2Nz+D=0$。

3. 求下列兩曲面相交之角：

(a) $x^2+y^2+z^2=14, 3x^2+y^2+z^2=16$, 於 $(-1,-2,3)$ 點；

(b) $x^2+3y^2+2z^2=9, x^2+y^2+z^2=8x+8y-18$, 於 $(2,1,1)$ 點；

(c) $3x^2+2y^2=2z+1, x^2+y^2+z^2=4y+2z-2$, 於 $(1,1,2)$ 點。

4. 問橢圓球 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上 $(-1,-2,3)$ 點之切面與 XOY 坐標面相交之角爲何？

5. 求下列函數之二級各偏紀數：

(a) $u=ax^2y+bxy^2+cx^2y^2$;　(b) $u=x\cos xy$;

(c) $u=x^y$;　(d) $u=xyz$;

(e) $u=\dfrac{xyz}{x+y+z}$, (f) $u=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$;

(g) $u=x\sin y+y\sin x$, (h) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

(i) $u=e^{xy}+ye^x+xe^y$; (j) $u=\ln\left\{x\tan^{-1}\sqrt{x^2+y^2}\right\}$。

6. 若 $u=x(y-z)$ 而 $x=r+2s$, $y=s-t, z=t$,

求 $\dfrac{\partial u}{\partial r}$, $\dfrac{\partial u}{\partial s}$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}$。

7. 令 u 爲 x 與 y 之函數,若 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,求 $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ 與 $\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$, 並示 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$。

8. 試示下列諸等式:

(a) 若 $u=(ax^2+by^2+cz^2)^3$, 則 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2}$;

(b) 若 $u=\dfrac{xy}{x+y}$, 則 $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$;

(c) 若 $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,則 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$;

(d) 若 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, 則 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$;

(e) 若 $u=(x+y)e^{y+z}$, 則 $\dfrac{\partial^4 u}{\partial z^2\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^4 u}{\partial y\partial z^2\partial x}=\dfrac{\partial^4 u}{\partial y\partial x\partial z^2}$,

(f) 若 $u=x\phi\left(\dfrac{y}{x}\right)+(x-1)y\ln x$,則

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x+1)y;$$

(g) 若 $u=xf\left(\dfrac{x}{y}\right)+\phi\left(\dfrac{x}{y}\right)$, 則

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;$$

(h)若 $u=f(x+at), v=F(x-at)$，則

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}。$$

9. 命 u 爲 x 及 y 之函數。令

(a)若 $x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$,

試示 $$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y'}\right)^2$$

及 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}。$$

(b)若 $x^2+y^2=r^2,\ y=x\tan\theta$,

試示 $$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2,$$

及 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}。$$

(c)若 $x=e^r\cos t,\ y=e^r\sin t$,

證 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{-2r}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)。$$

10. 若 u 與 v 均爲 x 與 y 之函數，而 $v=f(u)$，試示

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}。$$

11. 若 $x=f(u,v), y=g(u,v)$，試示

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y=1,$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y=0。$$

並由此兩方程以計$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_y$與$\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)_y$；仿此，計$\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_x$及$\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)_x$。

12．設 $x=u+v$, $y=u^2+v^2$, 試由前題結果求$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_y$，$\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)_y$等。

13．若 $F(x,y,z,w)=0$, 試示

(a)$\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial w}=1$, (b)$\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$。

(c)$\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial w}=1$,

計算此中各偏紀數時，除分子與分母所示之變數外，其他均視爲常數。

14．若 $f(x,y)=0$, 試示

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\{f_{xx}(f_y)^2-2f_{xy}f_xf_y+f_{yy}(f_x)^2\}}{f_y{}^2},$$

並以 $e^x\cos y+xy=0$ 爲例。

15．求下列各函數 u 之全微分：

(a)$u=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}+\tan^{-1}\dfrac{x}{y}$; (b)$u=x^y y^z z^x$;

(c)$u=e^x\ln yz$ 而 $z=\sin xy$; (d)$u=f\left(x^2+y^2, \dfrac{x+y}{z}\right)$。

16．求下列各曲線之切線與法面方程：

(a)$xy+yz=4$, $x^2+y^2+z^2=14$, 過$(-1,2,3)$點；

(b)$y^2=2mx$, $z^2=m-x$ 過(x_0,y_0,z_0)點；

(c)$2x^2+3y^2+z^2=9$, $z^2=3x^2+y^2$, 過$(1,-1,2)$點；

(d)$x=\dfrac{t}{1+t}$, $y=\dfrac{t+1}{t}$, $z=t^2$, 過 $t=1$ 點；

$$(\mathrm{e})\quad \left.\begin{aligned} F(x,y,z)&=x^2+y^2+z^2-4a^2=0\\ G(x,y,z)&=x^2+y^2-2ax=0\end{aligned}\right\}\text{過任意點}(x_0,y_0,z_0)；$$

$$(\mathrm{f})\quad \left.\begin{aligned} F(x,y,z)&=x^2+y^2-a^2=0\\ G(x,y,z)&=y-x\tan\frac{z}{c}=0\end{aligned}\right\}\text{過任意點}(x_0,y_0,z_0)。$$

17. 求 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 曲線與 $3x-7y+2z=0$ 平面相交之角。

18. 證螺旋線 (helix) $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=kt$ 與 Z 軸所作之角有固定值。

19. 試示兩曲面 $F(x,y,z)=0$ 及 $G(x,y,z)=0$ 於其交點 $P=(x_0,y_0,z_0)$ 如係垂直，則

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_0=0。$$

20. 求平面 $ax+by+cz-p=0$ 上最近於原點之點。

21. 求曲面 $xyz=a^3$ 上最近於原點之點。

22. 若 $x=r\sin\phi\cos\theta$, $y=r\sin\phi\sin\theta$, $z=r\cos\phi$,

$V=f(x,y,z)=F(r,\theta,\phi)$，試示

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$$
$$+\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\cot\phi}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \phi},$$

及 $$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2=\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)^2$$
$$+\frac{1}{r^2\sin^2\phi}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2。$$

23. 設以下各函數可展爲 Taylor 或 Maclaurin 級數，試示

(a) $e^x \cos y = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + \cdots\cdots$,

(b) $\sin x \sin y = \frac{2xy}{2!} + \frac{4x^3y + 4xy^3}{4!}$

$$-\frac{6x^5y + 20x^3y^3 + 6xy^5}{6!} + \cdots\cdots,$$

(c) $a^x \ln(1+y) = y + \frac{1}{2}(2xy \ln a - y^2 + x^2 y \ln^2 a - xy^2 \ln a)$

$$+\frac{1}{3}y^3 + \cdots\cdots,$$

24. (a) 求 $z = x^2 + xy + y^2$ 之極大與極小;

(b) 求 $z = x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x - 6y$ 之極大與極小;

(c) 求 $z = x^3 - y^3 + x^2 + y^2$ 之極大與極小。

25. 若 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 及 $lx + my + nz = 0$,

證
$$\frac{dx}{\frac{ny}{b^2} - \frac{mz}{c^2}} = \frac{dy}{\frac{lz}{c^2} - \frac{nx}{a^2}} = \frac{dz}{\frac{mx}{a^2} - \frac{ly}{b^2}}。$$

26. 一柱體長一米,半徑爲 2 釐米,若長增加一釐米,半徑增加 0.01 釐米,問體積增加若干?

27. 正圓錐體之斜高爲 40 釐米,底半徑爲 20 釐米,測量時之可能誤差爲 0.2 釐米,求(a)所計得之體積及(b)斜曲面積之最大可能誤差。

28. $S = \frac{A}{A-W}$ 爲測定物體比重之公式,A 表物體在空氣中之重,S 表比重,設稱 A 之可能誤差爲 0.05 克,W 之可能誤差爲 0.02 克;命 $A = 90$ 克,$W = 50$ 克,求最大之可能誤差。

29. 鐘擺之週期爲 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,若 Δl 及 Δg 爲測定時之可能誤差,

求 T 之最大可能誤差。

30. 砲彈射程爲 $R=\dfrac{V^2\sin 2\alpha}{g}$，若各量之可能誤差爲 ΔV, $\Delta\alpha$，及 Δg，求 R 之最大可能誤差。

31. 一圓錐體之高爲100釐米，每秒縮短10釐米，其底半徑爲50釐米，每秒增長5釐米，求其體積之變化率。

32. 由下列函數的函數，求其紀數：

(a)若 $u=x^2+y^2$, $x=r\cos t$, $y=r\sin t$，求$\dfrac{\partial u}{\partial r}$及$\dfrac{\partial u}{\partial t}$；

(b)若 $u=e^{xy}$, $x=\sqrt{r^2+s^2}$, $y=\tan^{-1}\dfrac{s}{r}$，求$\dfrac{\partial u}{\partial r}$及$\dfrac{\partial u}{\partial s}$；

(c)若 u 爲 x,y 之函數，$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial r}$及$\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$。

33. 自下列諸函數的函數，求指定之紀數或全微分：

(a)若 $u=2x^2+3xy+y^2$, $x=\tan 2t$, $y=\sin 2t$，求$\dfrac{du}{dt}$,

(b)若 $u=x^3-12yz^2+6xyz+3y^2$, $y=\sin x$, $z=\cos x$，求$\dfrac{du}{dx}$;

(c)若 $u=e^{ax}(y-z)$, $y=\sin x$, $z=\cos x$，求$\dfrac{dy}{dx}$。

34. 求下列二題之$\dfrac{dy}{dx}$：

(a) $e^x+e^y=2xy$;　　(b) $\sqrt{x^2+y^2}-a\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=0$。

35. 由下列諸式求$\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_y$及$\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_x$：

(a) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$;　　(b) $xy+yz+zx=1$;

(c) $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=1$; (d) $e^x+e^y+e^z=3xyz$。

36. 求下列曲線之弧長:

(a) $2y=x^2$, $3z=4x^{\frac{3}{2}}$, 自 $x=0$ 至 $x=1$;

(b) $x=3\theta\cos\theta$, $y=3\theta\sin\theta$, $z=4\theta$ 自 $\theta=0$ 至 $\theta=4$;

(c) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2-4=0 \\ x^2+y^2-2x\quad\;\;=0 \end{array}\right\}$ 自 $x=0$, $y=0$ 至 $x=1$, $y=1$;

(d) $x=2a(\sin^{-1}t+t\sqrt{1-t})$, $y=2at^2$, $z=4at$, 自 $t=t_1$ 至 $t=t_2$。

37. 有一開口長方體之匣,其三邊之長爲 x,y,z; 若匣之五塊旁與底面積之和有固定值,求其最大容積。

38. 若 $xyz=k$ (常數), 當 $u=\frac{xyz}{ax+by+cz}$ 爲極大時,求 x,y,z 之值。

第十九章　重積分

19-1．定積分意義之回膂　第七章討論定積分時，吾人先由求面積一問題，說明$\int_a^b f(x)dx$定積分之意義，及其與無限和

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ (\Delta x)_k\to 0}}\sum_{k=1}^{k=n} f(x_k')\,(\Delta x)_k$$

之關係。該時吾人對此陳述方法曾略有批評，而提出嚴格的分析方法所應顧及各點(見7-4節)。自此之後，討論定積分之應用時〔例如第(11)章之弧長與第(13)與(14)章之各定積分〕，吾人爲簡捷起見，均不顧(7-4)節之評語，而由題意求得一適當之微分關係如

$$du=f(x)\,dx \tag{1}$$

者，然後於適當之上下限內，計其定積分以作所求之值。自此諸章各問題之解答方法言之，各問題之難點卽在於應如何選擇自變數（例如x），方能將上列之微分關係寫出。例如求一密度不均勻之立體之質量時，吾人先有元體質量dm與元體體積dV及密度q之關係

$$dm=q\,dV \tag{2}$$

然後由題意選一適當之自變數x使q爲x之函數，$dV=\frac{dV}{dx}dx$，亦爲x之一函數$g(x)$與dx相乘，再寫之如方程(1)之形狀。又例如求液體靜壓時，先由物理學原理推得元面積dA所受之壓力dF爲

$$dF=wy\,dA \tag{3}$$

(見十四章)，然後再將元面積 dA 改爲 $g(y)dy$ 以使 $dF=wy\,g(y)dy$ 而積分之。嚴格言之，方程(3)之元體乃一面積 dA，故若按無限和觀念言之，由之所求得之定積分實係所號爲二重積分者(double integral)；同理方程(2)之元體乃一體積 dV，由之所求得之定積分實所號爲三重積分者(triple integral)。此等多重積分 (multiple integral)之意義，可仿照(7-2)節之陳述而推廣之，玆不述。

19-2．積分二次　由上述觀之，某題能否以一單次積分，如

$$u=\int_a^b f(x)dx \tag{4}$$

者，作其解答，全視 $f(x)$ 能否由題意求出。有時依題意以尋求 $f(x)$ 不甚易，但當已與 x 之值後，$f(x)$ 之值可由另一定積分求得之，例如

$$f(x)=\int_{y_1}^{y_2} g(x,y)dy \tag{5}$$

此中之 y_1 與 y_2 均爲 x 之函數，而計算之時，變數只有 y 一個，x 暫係不變。如是若以方程(5)中之 $f(x)$ 代入方程(4)，則經過兩次積分後，u 之值亦可計得，即

$$u=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} g(x,y)dy \tag{6}$$

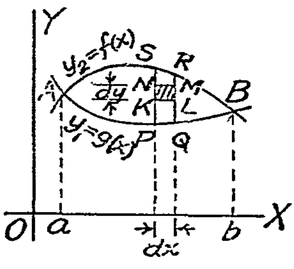


圖 19-1

19-3．面積與積分二次　設欲求在 $y_2=f(x)$ 及 $y_1=g(x)$ 兩曲線內之面積 $APBRA$ (圖 19-1)。按第七章所述之方法，吾人先將此面積分爲甚多細條如 $PQRS$ 者。每條之寬既爲 dx，其長約爲 y_2-y_1，故其面積爲

$$dA=(y_2-y_1)dx \tag{7}$$

因 $y_2-y_1=f(x)-g(x)$，故欲得所求面積 A，即可將方程(7)積分一次計得之：

即
$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx \tag{8}$$

如欲改用積分二次以求此面積，可將細條 $PQRS$ 之面積再分爲甚多之元面積如 $KLMN$ 者。此等長方形元面積之寬均爲 dx，其長則爲 dy，即元面積爲 $dS=dx\,dy$。今令 y 自 y_1 變至 y_2，而後將所得之各元面積相加，即得細條 $PQRS$ 之面積爲

$$dx\int_{y_1}^{y_2} dy=dx(y_2-y_1) \tag{9}$$

是即方程(7)。綜言之，若將 $APBRA$ 面積依縱橫線分之爲甚多之元面積 $dS=dx\,dy$，再於適當之上下限內求 y 之定積分，dx 暫認爲固定，則得方程(9)所示之關係；然後於適當之上下限內求方程(9)之定積分乃得所求之面積

$$A=\iint_S dS=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} dy \tag{10}$$

方程(10)中間之記號 $\iint_S dS$，乃以表示所求之積分係先分區域 S 爲甚多之元面積如 dS 者，然後求展布於所討論區域 S 上之積分。至於此積分之計算法，則仍須依方程(10)最右邊所示積分二次之步驟行之。

若所欲求之面積係在 $\theta=\theta_1$，$\theta=\theta_2$ 及 $r_1=F(\theta)$ 曲線之內，則按(10-4)節方法吾人可將此面積用夾角爲 $d\theta$ 之 OP 及 OQ 兩向徑分之爲甚多之扇形如圖(19-2)中之 OPQ 者。前已言及，此等扇形面積約爲

$$dA=\tfrac{1}{2}r_1^2 d\theta \tag{11}$$

因 $r_1=F(\theta)$ 已可表爲 θ 之函數，故所求者可逕自下列之單次積分

$$A=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}[F(\theta)]^2d\theta \tag{12}$$

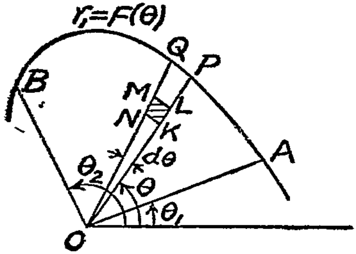


圖 19-2

計之。惟扇形 OPQ 之面積，亦可另行積分求得之。其法係將扇形用通過原點 O 之同心圓弧分爲甚多之四邊形 $KLMN$ (圖19-2)。若 r 表 OK，則 $KL=NM=dr$，KN 與 LM 兩弧長各爲 $r\,d\theta$ 與$(r+dr)d\theta$。因 dr 與 $d\theta$ 均爲無窮小，故於忽略二級無窮小 $dr\,d\theta$ 之值後，$KLMN$ 元面積可寫爲 $dS=r\,d\theta\,dr$。惟在 OPQ 內之各元面積如 $KLMN$ 者，其 $d\theta$ 均係固定，故求 OPQ 面積時，只須任 r 自 0 變至 $r_1=F(\theta)$，即可得其值爲

$$d\theta\int_0^{r_1}r\,dr=d\theta\left(\frac{1}{2}r_1^2\right)=\frac{d\theta[F(\theta)]^2}{2} \tag{13}$$

是即方程(11)矣。由是知若將 OAB 面積按向徑及同心圓弧分之爲甚多之元面積 $dS=r\,d\theta\,dr$，再於適當之上下限內求對 r 之定積分，$d\theta$ 暫認爲固定，則得方程(13)之關係；得此後，復於適當之上下限內求對 θ 之定積分乃得所求之面積：

$$A=\iint_s dS=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\int_0^{r_1}r\,dr \tag{14}$$

19-4．體積與積分二次 在上節討論求面積之兩例中，第一次積分時，被積函數爲 1 (方程 10)，或 r (方程 14)，均甚簡單，故實無須經

二次積分後方能計得其答案。設遇他種問題，有時非積分二次不可。最常見之例當以計算位在一曲面 $z=g(x,y)$ 下，XOY 平面上，及 $y_1=F(x)$ 與 $y_2=G(x)$ 兩柱面間之體積(圖19-3)。茲將兩柱面在 XOY 平面上所包圍之面積依縱橫線分爲甚多之元面積 $dx\,dy$。在每個元面積

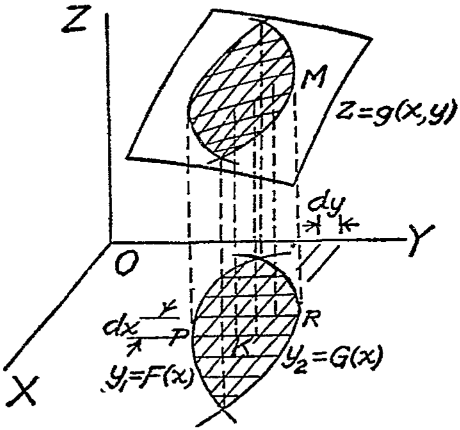


圖 19-3

之四角豎立與 Z 軸平行之垂線以與 $z=g(x,y)$ 曲面相交。由是所得之稜柱 KM，其體積將爲

$$dV=z\,dS=g(x,y)\,dx\,dy \tag{15}$$

茲若維持 x 不變而令 y 自 $y_1=F(x)$ 變至 $y_2=G(x)$，則求方程(15)中 $g(x,y)\,dx\,dy$ 對 y 之積分後，其值將等於厚爲 dx 之薄片之體積，即

$$PRM\text{ 體積 }=dx\int_{y_1}^{y_2} g(x,y)\,dy \tag{16}$$

經此第一次積分後，方程(16)遂可變爲 $f(x)dx$ 之形式，故再求其

對 x 之定積分卽得各薄片體積之和(卽所求之體積)爲

$$V=\iint_s z\,dS=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} g(x,y)\,dy \tag{17}$$

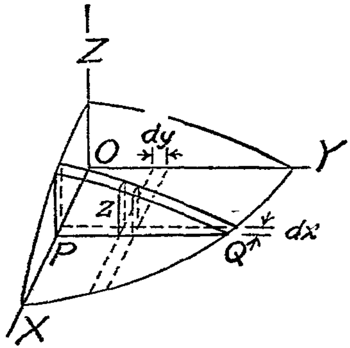


圖 19-4

例 求 XOY 平面與下列拋物面(paraboloid)間之體積：

$$z=1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}$$

因此物體對 YOZ 與 ZOX 兩平面均係對稱，故所求體積實爲圖(19-4)所示者之四倍。此體與 XOY 平面相交爲橢圓

$$1=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9};$$

是以若維持 x 固定而截出一厚爲 dx 之薄片，則薄片一邊 P 之 Y 坐標爲 $y_1=0$，其他邊 Q 之 Y 坐標則爲 $y_2=3\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$。於是薄片之體積爲

$$dx\int_{y_1}^{y_2} z\,dy=dx\int_0^{y_2}\left(1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\right)dy$$

$$=dx\left\{\left(1-\frac{x^2}{4}\right)y-\frac{y^3}{27}\right\}_0^{y_2}=dx\left\{1-\frac{x^2}{4}-\frac{{y_2}^2}{27}\right\}y_2$$

$$=\frac{1}{4}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}dx;$$

再將各薄片體積相加，卽求上列結果自 $x=0$ 至 $x=2$ 之定積分，卽得

$$\frac{V}{4}=\iint_s z\,dS=\int_0^2\frac{1}{4}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}dx。$$

若以 $x=2\sin\theta$ 代入，卽可計算得 V 之值爲

$$V=\left(\frac{x}{4}(10-x^2)\sqrt{4-x^2}+6\sin^{-1}\frac{x}{2}\right)_0^2=3\pi。$$

19-5. 二重積分　自嚴格分析立場觀之，吾人曾言方程(2)與(3)之積分實爲所號爲三重與二重積分者。茲在本節述二重積分之定義及其計算法，至於三重積分則於(19-10)節論之。

設 $g(x,y)$ 爲自變數 x 及 y 在 S 區域內之連續函數。茲將此區域用任意方法分爲n個小區域 $(\Delta S)_1$，$(\Delta S)_2$，……，$(\Delta S)_n$。在每小區域 $(\Delta S)_k$ 內任擇一點 P_k，坐標爲(x_k,y_k)而計下列之和：

$$g(x_1,y_1)(\Delta S)_1+g(x_2,y_2)(\Delta S)_2+\cdots\cdots+g(x_n,y_n)(\Delta S)_n \qquad (18)$$

當 n 無限增大，各小區域 $(\Delta S)_k$ 間任意兩點之距離皆趨於 0 時，方程(18) 之極限名爲展布於區域 S 上函數 $g(x,y)$ 之二重積分 (double integral)，其記號常寫爲

$$\iint_S g(x,y)\,dS=\lim_{\substack{n\to\infty\\(\Delta S)_k\to 0}}\sum_{k=1}^{k=n}g(x_k,y_k)(\Delta S)_k \qquad (19)$$

在方程(19)中，若視函數 $z=g(x,y)$ 爲一曲面，則依上節所述，所求之無限和可視爲一適當立體之體積。此理與(7-3)節所述之單次定積分之理相似。是以二重積分之值，可由積分二次計得之。換言之，如取縱橫線爲網絡，分區域S爲甚多之元面積 $dx\,dy$，則二重積分(19)之值可寫爲

$$\iint_S g(x,y)\,dS=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2}g(x,y)\,dy$$

$$=\int_A^B dy\int_{x_1}^{x_2}g(x,y)\,dx \qquad (20)$$

此中之 $a,b,\ A,B$ 爲適當之常數，y_1 與 y_2 爲 x 之函數（由區域 S 圖線之方程定之），x_1 與 x_2 則爲 y 之函數（亦由區域 S 圖線之方程定之）。求 $\int_{y_1}^{y_2} g(x,y)\,dy$ 時，x 應暫認爲不變，而求 $\int_{x_1}^{x_2} g(x,\ y)dx$ 時，y 則應暫認爲不變。不寧如是，所用之網絡可爲任何形狀。例如若以向徑與以原點爲中心之同心圓弧作網絡，則二重積分 (19) 亦可依下列之公式，積分二次以計之 $[g(x,y)=G(r,\theta)]$：

$$\iint_S G(r,\theta)dS=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1}^{r_2} rG(r,\theta)\,dr$$

$$=\int_u^v r\,dr\int_{\theta_1}^{\theta_2} G(r,\theta)\,d\theta \qquad (21)$$

此中之 r_1 與 r_2 係 θ 之函數，θ_1 與 θ_2 則爲 r 之函數，$\alpha,\beta,\ v,u$ 均爲常數。至於其算法可仿前行之，茲不贅。讀者當已注意方程 (19) 係定義，方程 (20) 與 (21) 則爲實施此定義以作計算之定理，其證雖係藉幾何的直覺，然亦可用純粹分析方法（參考 7-2 及 7-3 節）。

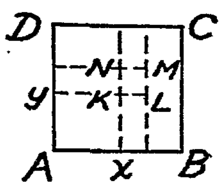
19-6. 二重積分之應用 甚多之物理學及幾何學上問題均易直接排成二重積分。排成二重積分之後，欲計其值，必須積分二次。如是，計算之前，其先決問題有下列數端：

(1) 元面積應爲何，即元面積是否用 $dx\,dy$ 或 $r\,d\theta\,dr$？

(2) 積分之次序爲何，即是否先對 x（或 r）積分或先對 y（或 θ）積分？

(3) 所用之上下限爲何？

此等問題對於計算之難易有莫大影響，讀者應多加練習方知所從違。茲舉數例於下：



19-5

例 1.　設有一厚薄均匀之正方薄片$ABCD$。每邊寬a,厚b,其各處之密度與距一角(例如A)之距離之平方成正比。若在C角之密度爲c,求其質量,質量中心,與旋轉於AB或AD邊之迴轉半徑,(圖 19-5)。

先論質量。本題當用直角坐標,因如是則上下限較簡。按定義$dm=bq\,dS$或$m=\iint_s bq\,dS$, q表密度。玆於坐標爲(x,y)之點作一面積$KLMN$,其各邊與X及Y軸分別平行。此元面積距A之遠度之平方爲x^2+y^2,故其密度q爲

$$q=k(x^2+y^2)$$

欲定比例係數k之値,以C點之坐標(a,a)及密度c代入,乃有$c=k(a^2+a^2)$或$k=\dfrac{c}{2a^2}$。所求之質量對於對角線AC顯係對稱,故積分次序如何不必細究。假定先對y積分,則

$$m=\iint_s bq\,dS=\int_0^a dx\int_0^a \frac{bc}{2a^2}(x^2+y^2)\,dy$$

$$=\int_0^a \frac{bc}{2a^2}\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^a dx=\int_0^a \frac{bc}{2a}\left(x^2+\frac{a^2}{3}\right)dx$$

$$=\frac{bc}{2a}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{a^2x}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{a^2bc}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{a^2bc}{3}。$$

次論其質量中心。自對稱情況言之,質量中心必位在對角線AC上,故只須求其距Y軸遠度$\bar{x}$。因$dm=bq\,dS$,故按定義卽有

$$\bar{x}=\frac{1}{m}\int x\,dm=\frac{1}{m}\iint_s bx\,q\,dS,$$

卽
$$\bar{x}=\frac{3}{a^2bc}\int_0^a dx\int_0^a \frac{bc}{2a^2}x(x^2+y^2)dy$$

$$=\frac{3}{2a^4}\int_0^a dx\left(x^3y+\frac{xy^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{3}{2a^3}\int_0^a\left(x^3+\frac{xa^2}{3}\right)dx$$

$$=\frac{3}{2a^3}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{a^2x^2}{6}\right)\Big|_0^a=\frac{3a}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{8}a。$$

再計其對 AD 軸之轉動慣量 I。將 $dm=bq\,dS$ 代入 I 之定義中，卽有

$$I=\int x^2dm=\iint_s x^2bq\,dS=\int_0^a dx\int_0^a \frac{bc}{2a^2}x^2(x^2+y^2)dy$$

$$=\frac{bc}{2a^2}\int_0^a dx\left(x^4y+\frac{x^2y^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{bc}{2a}\int_0^a\left(x^4+\frac{x^2a^2}{3}\right)dx$$

$$=\frac{bc}{2a}\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3a^2}{9}\right)_0^a=\frac{a^4bc}{2}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{9}\right)=\frac{7}{45}a^4bc=\frac{7}{15}ma^2。$$

故迴轉半徑爲

$$K=\sqrt{\frac{I}{m}}=\sqrt{\frac{7}{15}}\,a。$$

例 2. 求圓球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 與圓柱面 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$ 內公有之體積。

此立體對 XOY 及 ZOX 坐標面均爲對稱，故所求之體積可視爲展布於半圓 OBA 上之二重積分之四倍(圖 19-6)，卽

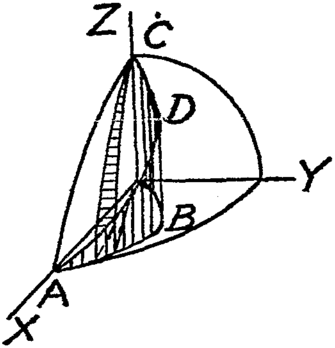
$$V=4\iint_s z\,dS。$$

但 OBA 圓柱與 XOY 坐標面相交之圓可以極坐標表之爲

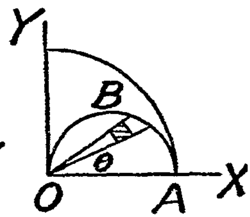
$$r=a\cos\theta;$$

茲令 $dS=r\,d\theta\,dr$ 而先對 r 積分。如是 (圖 19-6 乙)，

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2-r^2}\,dr,$$



甲



乙

圖 19-6

因 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}=\sqrt{a^2-r^2}$ 也，由是得

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\left(-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right)_0^{a\cos\theta}=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^3(1-\sin^3\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{4}{3}a^3\left(\theta+\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)。$$

例 3．試將 $\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy$ 改爲二重積分而述其所展布之區域爲何。

在 XOY 平面上，於 $x=x$ 之處作一細條 dx。第一次積分時，y 之上下限爲 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 與 $y=0$，故知與各細條相交之上下曲線之方程應分別爲半圓 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 及 X 軸 $y=0$。第二次積分時，x 之上下限爲 $x=a$ 與 $x=0$；自圖（19-7）遂知此二重積分所展布之區域爲圓

$x^2+y^2=a^2$ 在第一象限內之面積。

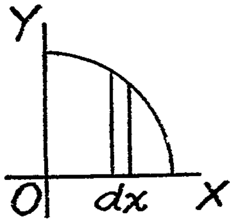


圖 19-7

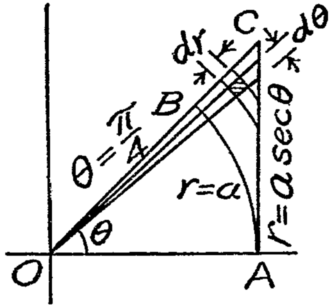


圖 19-8

例 4. 試將 $P=\int_a^{a\sqrt{2}}dr\int_{\cos^{-1}\frac{a}{r}}^{\frac{\pi}{4}} rF(r,\theta)\,d\theta$ 之積分次序改變。

欲改變積分次序，須先知如將 P 改為二重積分後，其所展布之面積為何。茲在 (r,θ) 平面上作一細圓條 dr (圖 19-8)。第一次積分時，θ 之上下限為 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 及 $\theta=\cos^{-1}\frac{a}{r}$ 或 $\cos\theta=\frac{a}{r}$ 卽 $r=a\sec\theta$。故此細條之兩端點，一係位於 $AC(r=a\sec\theta)$ 直線上，其他則係位於 $OC\left(\theta=\frac{\pi}{4}\right)$ 直線上。第二次積分時，r 係自 a 變至 $a\sqrt{2}$，卽自 AB 弧變至 C 點。故所求之二重積分所展布之區域為 ACB 面積。今若改變積分次序，則第一次積分時，r 應自 AB 弧(卽 $r=a$)上之值變至 AC 直線上（卽 $r=a\sec\theta$)之值。第二次對 θ 積分時，θ 應自 A 點之值(卽 $\theta=0$)變至 OC 直線上之值$\left(卽\ \theta=\frac{\pi}{4}\right)$。故

$$P=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_a^{a\sec\theta} rF(r,\theta)\,dr$$

19-7. Pappus 定理　利用二重積分之意義，可得兩簡單公式以示旋轉體積（或面積）與用以旋轉之面積（或曲線）之重心位置之關係。此兩公式常名爲 Pappus 定理。茲述之：

定理　設以平面上一完閉面積 S（或曲線弧 s）繞同平面上但不與 S（或 s）相交之一直線旋轉一周，其所產生之體積 V（或面積 A）將爲：

$$V=2\pi hS \tag{22}$$

$$A=2\pi hs \tag{23}$$

此中之 h 表面積 S（或曲線弧 s）之重心距旋轉軸之遠度。

證方程(22)時，取旋轉軸爲 X 軸。若 dS 表距 X 軸爲 y 之一小面積，則旋轉一周後，此小面積所旋成之體積將爲 $2\pi y\,dS$。所求之全部體積遂爲

$$V=2\pi\iint_s y\,dS;$$

但按重心定義 $\iint_s y\,dS$ 係等於面積 S 之總值乘以其重心距 X 軸（旋轉軸）之遠度 $\bar{y}=h$，即 $hS=\iint_s y\,dS$，故知

$$V=2\pi hS。$$

如(22)所示。若以曲線弧 s 代上述之面積，即得方程(23)。

例　將 $x^2+(y-b)^2=a^2$，$a<b$ 繞 OX 軸旋一周以成一鉤環。求其面積與體積。

圓之重心係在圓心 $\bar{y}=h=b$ 之處，圓之面積爲 $S=\pi a^2$，圓周長 $s=2\pi a$，故鉤環體積爲

$$V=(2\pi b)\pi a^2=2\pi^2a^2b;$$

其表面面積則為

$$A=(2\pi b)(2\pi a)=4\pi^2 ab。$$

19-8．曲面面積　設有一曲面 A 可以 $z=f(x,y)$ 表之。茲在其上取一點 P，而作一平面 PQR。自曲面上截出一完閉交線，此交線在 XOY 平面上將有一投影面積 dS。PQR 平面與 XOY 平面所成之角度即等於兩平面之法線所作之角。若 PN 表 PQR 平面之法線，其方向角為 α',β',γ'，則 γ' 即為 PQR 與 dS 間之角(圖 19-9)。自射影情況言之，dS 與 PQR 面積之關係遂為

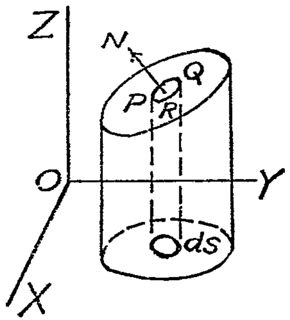


圖 19-9

$$PQR\text{ 面積}=\frac{dS}{\cos\gamma'}$$

所謂曲面 $z=f(x,y)$ 之面積 A 者，即指將類似 PQR 之面積相加，任其數目無限增多，每個之範圍無限減小時之和。惟當 PQR 無限減小時，γ' 將趨於過 P 點之曲面法線之 γ 值。是以曲面面積之定義可排為下列之二重積分：

$$A=\iint_s\frac{dS}{\cos\gamma}=\iint_s\sec\gamma\,dS \tag{24}$$

若曲面 $z=f(x,y)$ 上各點均有確定之法線，即 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 之值在曲面上各點(即 S 區域內)均為連續函數，則據(18-4)節所述

$$\frac{1}{\cos\gamma}=\sec\gamma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

而方程(24)遂可寫爲

$$A=\iint_S\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dS \tag{25}$$

由是卽可利用積分兩次以計其值。

例　求圓球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 爲圓柱 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$ 所截出之曲面積（參閱19-6節例2，圖19-6）。

於圓球上

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$$

故 $\sec\gamma=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=\frac{a}{z}$。因圓柱 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$ 與 XOY 平面相交之圓可以 $r=a\cos\theta$ 極方程示之。且在圓球上半，

$$\sec\gamma=\frac{a}{z}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

其與 r 之關係尙簡，故元面積可採用 $r\,d\theta\,dr$。所求之 A 爲圖(19-6)所示 $ADCA$ 之四倍，故

$$A=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}dr=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\,\theta\left(-\sqrt{a^2-r^2}\right)_0^{a\cos\theta}$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)d\theta=4a^2(\theta+\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi a^2-4a^2。$$

計算本題時，有一缺點，卽當 $\theta=0$ 時，$r=a$，被積函數將爲無限大。爲避免此缺點起見，吾人可先用一異於 O 之 α 爲 θ 之下限，然後再令 $\alpha\to 0$。如是

$$4\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{0}^{a\cos\theta} \frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}} dr = 4\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} a^2(1-\sin\theta)d\theta$$

$$=4a^2(\theta+\cos\theta)\Big|_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} = 4a^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\cos\alpha\right)。$$

當 $\alpha \to 0$ 時，此結果即爲所求之値如上。換言之，凡遇被積函數之値於上下限爲無限大之時，均應照此法計算之（參較十二章）。

19-9．積分三次 擴充 (19-2) 節所述，即知若遇排列方程以計某積分 u 時，方程(6)之 $g(x,y)$ 仍可以另一積分表之如

$$g(x,y)=\int_{z_1}^{z_2} h(x,y,z)dz,$$

此中之 z_1 與 z_2 均爲 x 與 y 之函數，則 u 之値可由積分三次計之，即

$$u=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} dy\int_{z_1}^{z_2} h(x,y,z)dz \tag{26}$$

(19-4) 節求體積之問題實即此方程最簡單之例。欲明此理，先將立體切成薄片如 PR，再切此薄片以成細桿如 KM，最後乃切細桿以成小塊 EE'（圖 19-10）。立體係各薄片之和，各薄片乃各細桿之和，而各細桿復爲各小塊之和。今每小塊體積爲 $dx\,dy\,dz$。故若令小塊之兩邊位置變更，即以 z 爲自

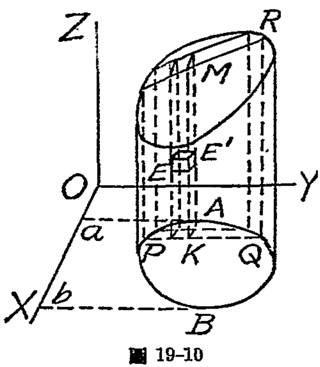


圖 19-10

變數而令其値自 $z=0$ 變至曲線上 $z=g(x,y)$ 之値以求 $dx\,dy\,dz$ 對 z 之積分，則得細桿 KM 之體積爲

$$dx\,dy\int_0^z dz。$$

再令 y 之位置變更，即維持 x 不變，而令 y 自 P 點之值 y_1 變至 Q 點之值 y_2（y_1 與 y_2 當然均爲 x 之函數）以求對 y 之積分，則得薄片之體積爲

$$dx\int_{y_1}^{y_2} dy\int_0^z dz。$$

最後再令 x 自 A 點之值 a 變至 B 點之值 b，以求對 x 之積分即有全部體積

$$V=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} dy\int_0^z dz。$$

以此與方程(26)相較乃知該方程中 $h(x, y, z)=1$，其 z 之上下限則分別爲 $z_2=z=g(x,y)$ 及 $z_1=0$。因 $h(x,y,z)=1$，且上下限 z_2 與 z_1 均甚簡，故用此法以求體積實未見便利。但如 $h(x,y,z)$ 表各點之密度，則此法頗便於計算不均密立體之質量。

例　設有一正方體，其各點之密度與距一角 A 之遠度之平方成正比，求其質量。

令體之一邊長爲 a，其最大之密度爲 c。如是以角 A 爲原點(圖 19-11)，而以體之三邊爲 OX,OY 及 OZ 軸，則最大密度之點，其坐標爲 (a,a,a)。因密度與距原點遠度平方成正比，故

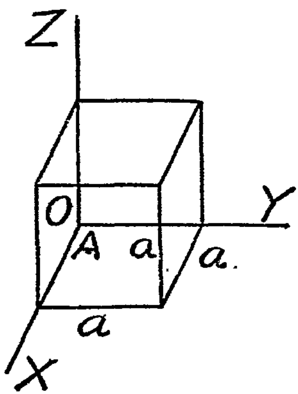


圖 19-11

$$q=k(x^2+y^2+z^2)。$$

比例係數爲 $k=\frac{c}{3a^2}$，或 $q=\frac{c}{3a^2}(x^2+y^2+z^2)$。茲於體內坐標爲 x,y,z 之點，依坐標面之方向割出一長方塊 $dx\,dy\,dz$。此小塊之質量約爲

$$q\,dx\,dy\,dz=\frac{c}{3a^2}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz。$$

茲維持 x 與 y 不變，令 z 自 $z=0$ 變至 a 以計截面爲 $dx\,dy$ 之一細桿之質量爲

$$dx\,dy\int_0^a q\,dz=dx\,dy\int_0^a\frac{c}{3a^2}(x^2+y^2+z^2)\,dz$$

$$=\frac{c}{3a}\left(x^2+y^2+\frac{a^2}{3}\right)dx\,dy;$$

次維持 x 不變，令 y 自 $y=0$ 變至 a，以計厚爲 dx 之一薄片之質量爲

$$dx\int_0^a dy\int_0^a\frac{c}{3a^2}(x^2+y^2+z^2)\,dz=dx\int_0^a\frac{c}{3a}\left(x^2+y^2+\frac{a^2}{3}\right)dy$$

$$=\frac{c}{3}\left(x^2+\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{3}\right)dx=\frac{c}{3}\left(x^2+\frac{2a^2}{3}\right)dx;$$

最後乃令 x 自 $x=0$ 變至 a 以求各薄片質量之和，即

$$m=\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a\frac{c}{3a^2}(x^2+y^2+z^2)\,dz=\int_0^a\frac{c}{3}\left(x^2+\frac{2a^2}{3}\right)dx$$

$$=\frac{c}{3}\left(\frac{a^3}{3}+\frac{2a^3}{3}\right)=\frac{c}{3}a^3。$$

19-10．三重積分　設 $h(x,y,z)$ 爲自變數 x,y,z 在 τ 空間內之連續函數。今將此空間分爲 n 個小區域，$(\Delta\tau)_k$，並於每小區域 $(\Delta\tau)_k$ 內任擇一點 P_k，坐標爲 x_k,y_k,z_k 而求下列之和

$$h(x_1,y_1,z_1)(\Delta\tau)_1+h(x_2,y_2,z_2)(\Delta\tau)_2+\cdots\cdots$$
$$+h(x_n,y_n,z_n)(\Delta\tau)_n \tag{27}$$

當 n 無限增大，各小區域 $(\Delta\tau)_k$ 內任意兩點之距離皆趨於 0 時，方程(27)之極限名爲展布於空間 τ 內之 $h(x,y,z)$ 之三重積分 (triple integral over τ)，其記號常簡寫爲

$$\iiint_\tau h(x,y,z)d\tau=\lim_{\substack{n\to\infty\\(\Delta\tau)_k\to 0}}\sum_{k=1}^{k=n}h(x_k,y_k,z_k)(\Delta\tau)_k \tag{28}$$

惟無論 $h(x,y,z)$ 函數之意義爲何，依上節所舉之例，吾人均可用一適當之質量代表方程(28)，是以求三重積分時，可由積分三次計得之。換言之，如用與直角坐標面互相正交之平面分空間 τ 爲甚多之元體積如 $dx\,dy\,dz$，則三重積分(28)之值可寫爲

$$\iiint_\tau h(x,y,z)d\tau=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2}dy\int_{z_1}^{z_2}h(x,y,z)dz \tag{29}$$

此中之 a,b 爲適當之常數，y_1 與 y_2 均爲 x 之函數，其關係須由空間 τ 在 XOY 平面上射影曲線之方程定之；至於 z_1 與 z_2 則均爲 x 與 y 二元之函數，其值乃由包圍空間 τ 曲面之方程定之。讀者當已注意，當對 z 積分時，x 與 y 均應暫視爲不變；第二次對 y 積分時，x 應暫視爲不變。此外，方程(28)係定義，而方程(29)乃實施此定義以作計算之定理，其證雖係藉質量一物理的觀念而構成，但亦可用純粹分析方法，參閱(7-2)，(7-3)及(18-5)各節，茲不陳。

19-11．柱面坐標　應用二重積分時，計算之繁簡常視所用之坐標爲何而定。同樣，除直角坐標外，三重積分之計算，有時亦以用他種坐

標爲簡。常用之坐標有柱坐標 (cylindrical co-ordinates) 與球坐標 (sphericalco-ordinates) 兩種。茲先論柱坐標。

空間一點 P 之位置,可以其距 XOY 平面之遠度 z, 及其在 XOY 平面上投影 P' 距原點 O 之遠度 $r=OP'$, 及 OP' 與 OX 所作之角 θ 確定之, (圖 19-12)。(r,θ,z) 之名爲 P 點之柱坐標, 其與直角坐標 x,

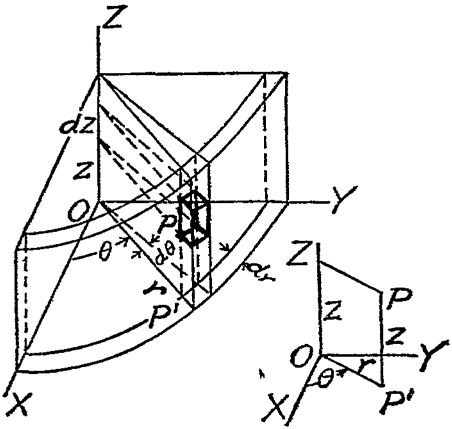


圖 19-12

y,z 之關係顯然爲

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=z \tag{30}$$

或

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\ \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x},z=z \tag{31}$$

用直角坐標時, 一元體 $d\tau$ 之空間, 係等於 $x=x_1$ 與 $x=x_1+dx$, $y=y_1$ 與 $y=y_1+dy$ 及 $z=z_1$ 與 $z=z_1+dz$ 六平面所包圍之長立方體 $dx\,dy\,dz$。茲畫 $r=r_1$ 與 $r=r_1+dr$ 兩柱面, $\theta=\theta_1$ 與 $\theta=\theta_1+d\theta$ 通過 OZ 軸之兩平面,及 $z=z_1$ 與 $z=z_1+dz$ 兩平面與 XOY 面平行,則亦包

圍一元體 $d\tau$。此元體之高爲 dz，其底面面積，於略去較高級之微分後，係 $r\,d\theta\,dr$，故其體積爲

$$d\tau = r\,d\theta\,dr\,dz \tag{32}$$

19-12. 球坐標　令 P' 表空間 P 點在 XOY 平面上之投影。P 點係位在 OPP' 平面上，故欲定其位置，應知 OP' 與 OX 所作之角 θ。至於 OPP' 平面上 P 之位置，復可由 P 距 O 之遠度 R 及 OP 與 OZ 所作之角 ϕ 定之。R, θ, ϕ 三量名爲 P 之球坐標。由圖 (19-13) 觀之，

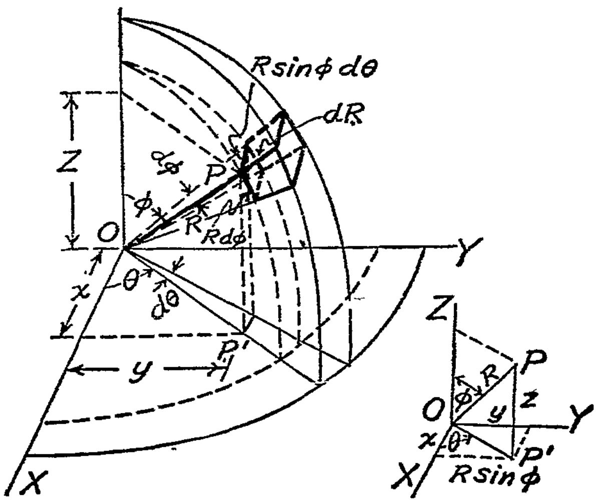


圖 19-13

球坐標與直角坐標顯有下列關係：

$$x = R\sin\phi\cos\theta,\ y = R\sin\phi\sin\theta,\ z = R\cos\phi \tag{33}$$

$$R = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x},\quad \phi = \cot^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{34}$$

茲仿前，作 $R=R_1$ 與 $R=R_1+dR$ 兩同心球面，$\theta=\theta_1$ 與 $\theta=\theta_1+d\theta$ 通過 OZ 軸之兩平面，及 $\phi=\phi_1$ 與 $\phi=\phi_1+d\phi$ 兩圓錐面，以包圍一立體，其各邊曲線均係正交。此元體會聚於 (R_1,θ_1,ϕ_1) 點之三線各爲 dR(直線)，$R\sin\phi\,d\theta$（圓弧），及 $Rd\phi$(圓弧)。故於略去較高級之微分後，元體之體積爲

$$d\tau=R^2\sin\phi\,dR\,d\theta\,d\phi \tag{35}$$

19-13．三重積分之應用　立體之質量，質量中心，轉動慣量等等問題均可用三重積分表之，因 $dm=qd\tau$，(q 表密度)，故按定義即有

$$\bar{x}=\frac{1}{m}\iiint_\tau xq\,d\tau;\qquad I_z=\iiint_\tau (x^2+y^2)q\,d\tau$$

等。至於計算之時，其先決問題仍有如(19-6)節所述之三點，即(1)元體爲何，(2)積分次序爲何及(3)上下限爲何。坐標之選擇頗非易事，須多算習題方能體驗得之。

例 1．　一均密的半圓殼，內外半徑分別爲 a 與 b，求其質量中心之位置。

自本題情形言之，可用球坐標。質量中心位置當然位於對稱軸上，命之爲 Z 軸。於是質量中心位置爲

$$\bar{z}=\frac{1}{m}\iiint_\tau z\,dm=\frac{1}{m}\iiint_\tau R\cos\phi\,R^2\sin\phi\,dR\,d\phi\,d\theta,$$

積分時可用任何次序，因無論依何次序 R,θ，及 ϕ 之上下限均爲常數也。茲依下法求之

$$\bar{z}=\frac{1}{m}\int_a^b dR\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^3\cos\phi\sin\phi\,d\phi$$

$$=\frac{1}{m}\int_a^b dR\int_0^{2\pi} d\theta\left(R^3\frac{\sin^2\phi}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{m}\int_a^b dR\int_0^{2\pi}\frac{R^3}{2}d\theta$$

$$=\frac{1}{m}\int_a^b \pi R^3\,dR=\frac{\pi R^4}{4m}\Big|_a^b=\frac{\pi(b^4-a^4)}{4m}。$$

因　$m=\frac{2\pi}{3}(b^3-a^3)$，故

$$\bar{z}=\frac{3(b^4-a^4)}{8(b^3-a^3)}=\frac{3(b^3+b^2a+ba^2+a^3)}{8(b^2+ab+b^2)}。$$

例 2. 求高爲 h 半徑爲 a 之圓柱旋轉於通過其中心一直徑之轉動慣量。

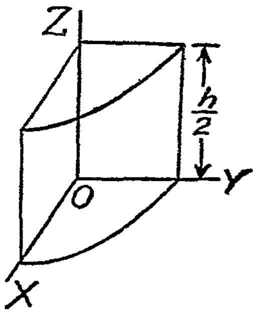


圖 19-14

以 Z 軸爲柱軸，通過中心之兩正交直徑爲 X 及 Y 軸。令 X 軸爲旋轉軸。於是，若用柱坐標，則元體 $r\,dr\,d\theta\,dz$ 至旋轉軸距離之平方爲 $y^2+z^2=r^2\sin^2\theta+z^2$。按定義言之，所求之 I 爲圖 (19-14) 所示立體之轉動慣量之八倍，是以

$$I=8\iiint_\tau(r^2\sin^2\theta+z^2)\,d\tau$$

$$=8\int_0^a r\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{h}{2}}(r^2\sin^2\theta+z^2)dz$$

$$=8\int_0^a r\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\left(z\,r^2\sin^2\theta+\frac{z^3}{3}\right)\Big|_0^{\frac{h}{2}}$$

$$=8\int_0^a r\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{hr^2\sin^2\theta}{2}+\frac{h^3}{24}\right)d\theta$$

$$=4\int_0^a hr\,dr\left\{r^2\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}\right)+\frac{h^2}{12}\theta\right\}_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\int_0^a \pi hr\left(r^2+\frac{h^2}{6}\right)dr=\pi\left(\frac{a^4h}{4}+\frac{h^3a^2}{12}\right)=m\left(\frac{a^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right)$$

因柱體之質量 $m=\pi a^2h$。於是對於通過中心一直徑之迴轉半徑 k，其平方爲

$$k^2=\frac{a^2}{4}+\frac{h^2}{12}。$$

19-14．吸力 根據萬有引力定律，兩質點間之吸力係與其質量相乘成正比而與二者間之距離 R 之平方成反比，即如 m 與 M 分表兩質量，則吸力爲

$$F=k\frac{mM}{R^2} \tag{36}$$

此力之方向則沿連兩點之直線。今若欲求頗大立體對於一質點 M 之吸力，則須將此立體 m 分爲甚多之元質量 dm 而求每個元質量對 M 之吸力 dF。再分解每力爲三個垂直分力而後求其諸分力之總和。換言之，若元質量 dm 之坐標爲 x,y,z，則其對位於原點 O 之質點 M 之吸力之大小將爲

$$dF=\frac{kM}{R^2}dm, \quad R^2=x^2+y^2+z^2 \tag{37}$$

而此力在 X,Y 及 Z 軸三方向之分力將爲

$$dF_x=kM\frac{x}{R^3}\,dm,\,dF_y=kM\frac{y}{R^3}\,dm,\,dF_z=kM\frac{z}{R^3}dm \tag{38}$$

因 $dm=qd\tau$，故方程 (38) 可排成三重積分

$$F_x=\iiint_T \frac{k\,Mqx}{R^3}d\tau,\quad F_y=\iiint_T \frac{k\,Mqy}{R^3}d\tau,$$

$$F_z=\iiint_T \frac{k\,Mqz}{R^3}d\tau \tag{39}$$

例　一均密圓球對球外一質點之吸力宛如球之質量全部係集中於其中心然者，試證之。

令球中心位於 $z=b$ 點，半徑爲 a，$b>a$，質點 M 位於原點。用柱坐標乃得球之方程爲

$$r^2+(z-b)^2=a^2,$$

自任何元體 $r\,d\theta\,dr\,dz$ 至原點之遠度 R 係

$$R=\sqrt{r^2+z^2},$$

且因對稱之故，$F_x=F_y=0$，$F=F_z$，故自方程(39)乃得

$$F=\iiint_T \frac{k\,Mqz}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}d\tau$$
$$=\int_{b-a}^{b+a}dz\int_0^{r_1}r\,dr\int_0^{2\pi}\frac{k\,M\,q\,z}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}d\theta,$$

其中
$$r_1=\sqrt{a^2-(z-b)^2};$$

是以
$$F=2\pi kMq\int_{b-a}^{b+a}z\,dz\int_0^{r_1}\frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=2\pi kMq\int_{b-a}^{b+a}\left\{-(r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^{\sqrt{a^2-(z-b)^2}}\right\}z\,dz$$

$$=2\pi kMq\int_{b-a}^{b+a}\left(1-\frac{z}{\sqrt{a^2+2bz-b^2}}\right)dz$$

令 $a^2+2bz-b^2=t^2$，則 $z=\dfrac{t^2-a^2+b^2}{2b}$；$dz=\dfrac{t}{b}dt$，而當 $z=b-a$ 時，

$t=b-a$, $z=b+a$ 時，$t=b+a$。由是得

$$F=2\pi kMq\left(2a-\int_{b-a}^{b+a}\frac{t^2-a^2+b^2}{2b^2}dt\right)$$

$$=\frac{\pi k\,Mq}{b^2}\left(4ab^2-\frac{1}{3}(b+a)^3+\frac{1}{3}(b-a)^3+(a^2-b^2)(2a)\right)$$

$$=\frac{\pi k\,Mq}{b^2}\left(-\frac{2}{3}a^3+2a^3\right)=\frac{4\pi k\,Mqa^3}{3b^2}=\frac{k\,M}{b^2}m$$

此中 $m=\dfrac{4\pi a^3q}{3}$ 表圓球之體積。是即所欲求之證。

第十九章習題

1. 設有 $z=f(x)$ 曲線，今將之旋轉於 X 軸以成一旋轉體。試將此立體體積(自 $x=a$ 至 $x=b$) 排成二重積分，並述應如何積分二次以求其值。

2. 設 $x^2+y^2=a^2$ 及 $x^2+z^2=a^2$ 表兩正交圓柱，求其公有體積。

3. 求下列各積分：

(a) $\displaystyle\int_1^3 dx\int_0^{\sqrt{x}} 2y\,dy$;　　(b) $\displaystyle\int_1^2 dx\int_{-x^2}^{x} dy$;

(c) $\displaystyle\int_{-1}^2 dx\int_2^3 (2x+3y+b)\,dy$　　(d) $\displaystyle\int_2^3 dx\int_{\sqrt{2}}^{x} xy\,dx$;

(e) $\displaystyle\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y)\,dy$;　　(f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2-r^2}\,dr$。

4. 求 $z=0$, $z=x+y$ 兩平面自圓柱 $x^2+y^2=a^2$ 所截之體積。

5. 求 $y=x, y=2x$ 及 $x=1, z=0$ 各平面與 $z=xy$ 曲面間之體積。

6. 求 $x^2+3y^2=z, x^2+y^2=2x$ 及 $z=0$ 間之體積。

7. 試示 $z=0, z=x+2y+8$ 兩平面自柱面 $r=1-\cos\theta$ 所截之體積爲 $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{1-\cos\theta}[r(\cos\theta+2\sin\theta)+8]r\,dr$。

8. 試用極坐標求 $\iint_s e^{x^2+y^2}\,dS$ 展布於圓 $x^2+y^2=1$ 上之二重積分。

9. 試用直角坐標求 $\iint_s(x^2-3ay)\,dS$ 展布於一正方形 $ABCD$ 之二重積分，A,B,C,D 四點分別位於 X 及 Y 軸上，$ABCD$ 對角線長 $2a$。

10. 一薄片（正方形）之密度係與其距一角成正比，求其質量，質量中心及旋轉於一邊之轉動慣量。

11. 求一鉤環旋轉於其軸之轉動慣量。

12. 求 $z=x+y^2$ 曲面位在三角形 $x=0, y=x, y=a$ 上部之面積。

13. 求 $x=0,\ x=a,\ y=0,\ y=a$ 自 $z=1+2x+3y+x^2$ 曲面所截之面積。

14. 求 $z=xy$ 爲圓柱 $x^2+y^2=a^2$ 所截之面積。

15. 計下列各積分：

(a) $\int_0^4 dx\int_0^{4-x}dy\int_0^{4-x-y}x\,dz$;　　(b) $\int_0^a dx\int_0^b dy\int_0^c(x^2+y^2+z^2)\,dz$;

(c) $\int_2^3 dx\int_1^x dy\int_0^x x\,dz$;　　(d) $\int_{-a}^a dx\int_0^x dy\int_0^{x+y}x\,yz\,dz$;

(e) $\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dy\int_{(x+y)}^{(1+4x+5y)}dz$;

(f) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^A dr\int_0^\pi\dfrac{r^2\sin\phi\,d\phi}{\sqrt{r^2+h^2-2hr\cos\phi}}$。

16. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 與拋物面 $x^2+y^2=8z$ 間公有之體積。

17．求球面 $x^2+y^2+z^2=2az$ 與圓錐體 $x^2+y^2=z^2$ 間公有之體積。

18．求下列曲面積：

(a)球面 $x^2+y^2+z^2=2az$ 爲拋物面 $x^2+y^2=z$ 所截之部分；

(b)柱面 $x^2+y^2=a^2$ 爲平面 $z=0$ 及 $z=mx$ 所截之部分；

(c)柱面 $x^2+y^2=a^2$ 於第一象限內爲平面 $x+y+z=2a$ 所截之部分；

(d)球面 $x^2+y^2+z^2=2ay$ 爲錐面 $x^2+z^2=y^2$ 所截之部分；

(e)柱面 $y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 爲柱面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 所截之部分；

(f)拋物面 $y^2+z^2=4ax$ 爲柱面 $y^2=ax$ 及 $x=3a$ 所截之部分；

(g)球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 爲柱面 $r=a\cos 2\theta$ 所截之部分。

19．求平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 與三坐標面間之體積。

20．求曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ 與三坐標面間之體積。

21．今將一直角三角形旋轉於互相正交之一邊，試根據 Pappus 定理，求所得體積與曲面面積。

22．一正圓錐體內各點之密度與其至錐軸遠度成正比，求其質量，質量中心與對軸之轉動慣量。

23．設在曲面 $x^2z^2+a^2y^2=b^2x^2$ 與平面 $x=0$ 及 $x=a$ 間之物體，其各點之密度與其至 YOZ 面之距離成正比，求其質量及質量中心。

24．求橢圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 與圓 $x^2+y^2=2y$ 間面積對 X 及 Y 軸之轉動慣量 I_x 及 I_y。

25．一柱體 $x^2+y^2=2ax$ 內各點之密度與其距底面之遠度 z 成正比，柱

高 h，求對 Z 軸之轉動慣量及迴轉半徑。

26．曲線 $r=a\sin 2\theta$ 之一葉，其內各點之密度與至原點之距離成正比，求對 X 軸之轉動慣量。

27．心形曲線 $r=a(1+\cos\theta)$ 之上半部，其內各點之密度與其至原點距離成正比，求對 X 軸之轉動慣量。

28．設有一點位於一均密圓盤之垂直中線上，其距盤中心之遠度爲 b，盤半徑爲 a，求盤對此點之吸力。

29．根據前題結果，若有均密之正圓錐體，求其對頂點之吸力。

30．一均密之半圓殼，內外半徑分別爲 a 與 b，求其對球中心之吸力。

31．一均密之圓柱高 h，半徑 a，求其對底面中心之吸力。

32．若一曲面之方程爲：$F(x,y,z)=0$，試示其曲面面積可寫爲

$$A=\iint_s \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|}dS。$$

第二十章　近似的及機械的積分法

20-1. 定積分之近似值　積分方法已詳於第十二章。在實用方面所遇及之定積分，大致均可應用此等方法以先求不定積分，然後再將上下限之值依(7-3)節所述之理代入而計得之。惟有時被積函數不能表爲簡單之方程，或積分手續甚繁而答案僅須準確至適當之程度即可，或答案無法表爲初等函數，則常須計算其近似值。此等近似值之算法甚多，茲舉較常見而便於應用者於下。

20-2. 梯形規律　定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 可視爲位在曲線 $y=f(x)$ 下、X 軸上，$x=a$ 縱線右與 $x=b$ 縱線左之面積(圖 20-1)。欲求此面積，可將之分成甚多之細條，而後計各條面積之總和。但各條面積之值可以種種不同之近似曲線代替 $f(x)$ 而計之。最簡單之近似曲線係以折線連兩相鄰縱線，使各條均作梯形.

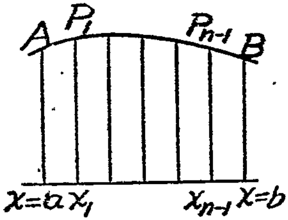


圖 20-1

具體的言之，將 a 至 b 間隔以 $(n+1)$ 個縱線 $y_0, y_1, \cdots\cdots, y_n$ 等分之爲 n 個寬度相等之細條。今若將各縱線與曲線 $f(x)$ 相交之 A, P_1, P_2, $\cdots\cdots$, B 等點依次連以直線，即得 n 個寬度相等之梯形，每個梯形之寬爲 $h=\frac{b-a}{n}$，其長短兩底之平均值等於兩鄰近縱線之平均，故各梯形面積之總和爲

$$A=h\left(\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{y_{n-2}+y_{n-1}}{2}+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right)$$

$$=h\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\cdots\cdots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right) \tag{1}$$

若條數夠多，則此面積即可視爲所求定積分之一近似值。公式(1)常名爲梯形規律(trapezoidal rule)。若在所規定之間隔內 $f(x)$ 之二級紀數之最大絕對值爲 M_2，則用此規律之結果，其最大誤差爲 $\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$，（參較習題 12）。

20-3．截錐公式　設在前節中，吾人不用折線將 $AP_1P_2\cdots\cdots P_{n-1}B$ 各點聯接而改用一適當之 x 之二次方程將相鄰之三點聯接，則所得之近似值有時較公式(1)更優。在未推得此規律之前，應先求所號爲截錐(prismoid)公式者。令 $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ 表通過 $x=-h$, $y=y_1$; $x=0$, $y=y_2$; 及 $x=h$, $y=y_3$; 三點之拋物線之方程(圖 20-2)。茲用定積分求拋物線下，X 軸上與 y_1 至 y_3 間之面積，即得

$$A=\int_{-h}^{h}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\,dx=\left(\frac{\alpha x^3}{3}+\frac{\beta x^2}{2}+\gamma x\right)_{-h}^{h}=\frac{2\alpha h^3}{3}+2\gamma h,$$

此結果中不含 β 而 α 與 γ 則可表爲 y_1, y_2, y_3 之函數。因 $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ 曲線通過 $x=-h$, $y=y_1$, $x=0$, $y=y_2$; 及 $x=h$, $y=y_3$ 三點，故知

$$y_2=0+0+\gamma, y_1=\alpha h^2-\beta h+\gamma,$$

$$y_3=\alpha h^2+\beta h+\gamma$$

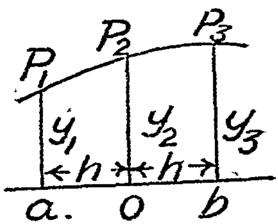


圖 20-2

由是得 $y_3+y_1=2\alpha h^2+2y_2$，或 $2\alpha h^2=y_3+y_1-2y_2$。是以將 α 與 γ 之

值代入卽有

$$A=\frac{h}{3}\left\{(y_3+y_1-2y_2)+6y_2\right\}=\frac{h}{3}(y_1+4y_2+y_3) \tag{2}$$

此公式所以命名爲截錐公式之故，乃因若 B_1 及 B_3 分別表一截錐之上下兩底面積，B_2 表其居中之截面積，$2h$ 表上下兩底之垂直距離，則截錐之體積 V 亦可由一類似公式求之，卽

$$V=\frac{h}{3}(B_1+4B_2+B_3) \tag{3}$$

不但如是，舉凡 $x=f(x)$ 代數函數之次數較四次爲少之時，吾人均可證

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{(b-a)}{6}\left\{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\} \tag{4}$$

方程(4)應由讀者自證之。

例　將橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 旋於 X 軸，所成之橢圓球與轉軸垂直之截面積爲 $\pi y^2=\pi b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$，故可用公式(3)以求其體積。但 $h=a$，$B_1=B_3=0$，$B_2=\pi b^2$，故 $V=\frac{4}{3}\pi ab^2$。

20-4. Simpson 規律　公式(2)與橫坐標起訖點無關，只視兩端及居中之縱坐標 y_1, y_3 與 y_2 三者之值以及兩端縱線之距離 $2h$ 爲何而定。是以若在圖(20-1)中，吾人將 $A\,P_1P_2$ 三點，聯以一拋物線如 $y=a_1x^2+b_1x+c_1$，如上述者，則首兩細條之面積將約爲 $\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_1)$。仿此，第三與第四兩細條之面積將約爲 $\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)$。餘類推。故若自 a 至 b 間隔內細條總數爲雙數，則所求之總面積之值將約爲

$$A=\frac{h}{3}\Big[(y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+\cdots+(y_{2m-2}+4y_{2m-1}+y_{2m})\Big]$$

$$=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\cdots\cdots+4y_{2m-1}+y_{2m}) \tag{5}$$

此公式名爲 Simpson 規律。

若在 a 至 b 間隔内，$f(x)$ 之四級紀數之最大絕對值爲 M_4，則用 Simpson 規律之結果，其最大誤差爲 $\frac{M_4(b-a)^5}{180\,n^4}$，參較習題(13)。

例 1． 試將自 1 至 13 間隔分爲 12 個相等部分，用梯形及 Simpson 規律求定積分 $\int_1^{13} x^{\frac{1}{3}}dx$ 之近似值。

用梯形規律得：

$$A_1=\frac{13-1}{12}\Big(\frac{1}{2}+2^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}+4^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{1}{3}}+6^{\frac{1}{3}}+7^{\frac{1}{3}}+8^{\frac{1}{3}}+9^{\frac{1}{3}}$$

$$+10^{\frac{1}{3}}+11^{\frac{1}{3}}+12^{\frac{1}{3}}+\frac{13^{\frac{1}{3}}}{2}\Big)=\frac{1}{2}+20.477+\frac{2.351}{2}=22.153。$$

若用 Simpson 規律則因 $h=1$，故有

$$A_2=\frac{1}{3}\Big\{1+13^{\frac{1}{3}}+4\Big(2^{\frac{1}{3}}+4^{\frac{1}{3}}+6^{\frac{1}{3}}+8^{\frac{1}{3}}+10^{\frac{1}{3}}+12^{\frac{1}{3}}\Big)$$

$$+2\Big(3^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{1}{3}}+7^{\frac{1}{3}}+9^{\frac{1}{3}}+11^{\frac{1}{3}}\Big)\Big\}$$

$$=\frac{1}{3}\Big(1+2.351+4(11.108)+2(9.369)\Big)=22.174。$$

至於準確值由積分求得者則爲

$$A=\int_1^{13} x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_1^{13}=\frac{3}{4}\Big(13^{\frac{4}{3}}-1\Big)=22.175$$

於是可見 A_1 之誤差約爲 0.1%，A_2 之誤差則不及 0.01%。

例 2.　試由 $\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ 公式推求 π 之值。

將 $x=0$ 至 $x=1$ 間隔分作10等分，則

$$y_0=1,\qquad y_1=\frac{1}{1+0.1^2}=0.9900990$$

$$y_2=\frac{1}{1+0.2^2}=0.9615385,\qquad y_3=\frac{1}{1+0.3^2}=0.9174312,$$

$$y_4=\frac{1}{1+0.4^2}=0.8620690,\qquad y_5=\frac{1}{1+0.5^2}=0.8000000,$$

$$y^6=\frac{1}{1+0.6^2}=0.7352941,\qquad y_7=\frac{1}{1+0.7^2}=0.6711409,$$

$$y_8=\frac{1}{1+0.8^2}=0.6097561,\qquad y_9=\frac{1}{1+0.9^2}=0.5524862,$$

$$y_{10}=\frac{1}{1+1}=0.5000000。$$

故據 Simpson 規律有

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{30}\Big(1+0.5000000+4(3.9311573)+2(3.1686577)\Big)$$

$$\pi=\frac{4}{30}\times 23.561945=3.141593$$

所求得之 π 之數値係準確至小數點後第五位。

20-5. 級數積分法　吾人於(16-12)節曾言，羃級數在其收斂範圍內可按項積分之；故若能將被積函數展爲一羃級數，則積分之結果可以一級數表之。取此級數前若干項之和，卽可作爲此級數之近似値，例如下。

例　求橢圓 $x^2+2y^2=2$ 之周長。

此橢圓之參變方程爲

$$x=\sqrt{2}\cos\theta,\ y=\sin\theta;$$

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{2\sin^2\theta+\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\sqrt{2-\cos^2\theta}\,d\theta=\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\cos^2\theta}\,d\theta。$$

故其周長等於

$$s=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\cos^2\theta}\,d\theta。$$

惟此乃一橢圓積分（elliptic integral)，其結果不能以初等函數表之；然吾人不難利用級數積分之方法求得其近似值。因$\frac{1}{2}\cos^2\theta$ 之值恆小於1，故依二項定理有

$$\sqrt{1-\frac{1}{2}\cos^2\theta}=1-\frac{1}{4}\cos^2\theta-\frac{1}{32}\cos^4\theta-\frac{1}{128}\cos^6\theta-\cdots\cdots$$

按項積分之，乃得

$$4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\cos^2\theta}\,d\theta=4\sqrt{2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta\right.$$

$$\left.-\frac{1}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta-\frac{1}{128}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\,d\theta-\cdots\cdots\right\}$$

$$=4\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}-\frac{1}{32}\,\frac{3}{8}\,\frac{\pi}{2}-\frac{1}{128}\,\frac{5}{16}\,\frac{\pi}{2}-\cdots\cdots\right)$$

$$=2\sqrt{2}\pi\left(1-\frac{1}{8}-\frac{3}{256}-\frac{5}{2048}-\cdots\cdots\right)=7.65,$$

故欲求之橢圓周長約爲 7.65 單位。

20-6. 面積計　面積計係用以量測平面上任意完閉曲線所包圍之面積，其種類甚多，較常見者爲 Amsler 氏之極式面積計 (polar plani-

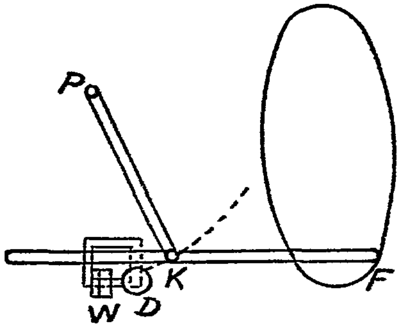


圖 20-3

meter)。此儀器(圖 20-3)之主要部分兩桿 PK 與 KF 及一記錄輪 W,(recording wheel)。PK 與 FK 兩桿交連於 K 點,而可自由轉動。輪 W 裝於 KF 桿旁,其軸係與 KF 桿平行,但其位置則不拘,或在 K 與 F 之間或在 K 點之後。今若將 P 端固定於一點而令 F 端沿一完閉曲線描畫,則 PK 桿將以 P 爲中心而轉動,K 點將作一圓弧。當 F 端沿曲線繞行一周時,W 輪將滾轉若干次,其轉動之次數及多寡可由其旁之盤 D 及其上刻度與附屬之小數尺定之。通常 KF 桿之長可以調節,且根據以下所述之原理,所求面積 A 等於輪滾轉之距離 R 乘以 KF 桿長 L,卽 $A=RL$,故令 L 爲適當之長,卽可由輪之起終示數直接讀得面積爲若干單位。

使用此儀器之時,應先備一光平之木板將所欲求面積之周線描於紙上,而釘紙於板上;然後在板上擇一適當之點爲極而釘 PK 桿 P 端下之小針於是點。此端上多附載一重錘以免其移動。P 點選擇妥當後,應試令 F 端沿曲線行一周,以視各部之行動有無阻礙。若面積不太大,極 P 可位在面積之外,否則常須將 P 放於面積之內。在後述情況下,所得之面積應由一所號爲"零圓"(zero circle)面積加以或減去 W 輪所示之數而得之。

欲明此儀器動作之理,玆先述一直線 KF 在平面上運動時所掃過

之面積。此面積之正負當然視運動方向而定。設 KF 由 K_1F_1 經過 2,3,4,5 而達到 K_6F_6（圖 20-4）位置，其所掃過之面積爲正，則由 K_6F_6 經

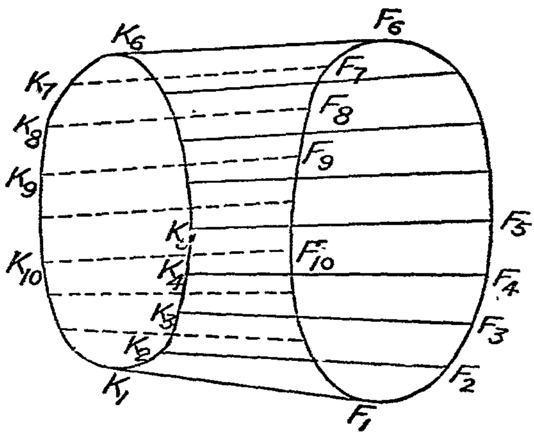


圖 20-4

7,8,9,10 而回至 K_1F_1 位置時，其所掃過面積應視爲負。故如是往返一次，KF 桿所掃過之面積應視爲等於 $K_1F_1F_3F_6K_6K_5K_1$（圖 20-4）面積減去 $K_1F_1F_9F_6K_6K_9K_1$ 面積。換言之，所得者爲各 F 點所包圍之面積減去各 K 點所包圍之面積。但若各 K 點未曾包圍一面積，則所得者即爲 F 曲線所包圍之面積。因此，當 Amsler 面積計之 K 點往返的徘徊於一圓弧上時，FK 桿所掃過之面積即爲所求之面積。至於如何方能將此桿所掃過面積記下，須分析 KF 桿一位置 K_1F_1（圖20-5）

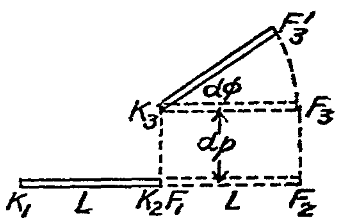


圖 20-5

轉移至鄰近一位置 K_3F_3 之運動情況。此運動可分爲三部分:

(1)將 KF 沿其長自 K_1F_1 移至 K_2F_2 其所掃過面積爲 0;

(2)將 KF 沿與之垂直方向自 K_2F_2 移至 K_3F_3，其所掃過面積爲 Ldp,dp 表所行之垂直距離,L 表桿長;

(3)將 K_3F_3 桿旋轉 $d\phi$ 角以達到 $K_3F'_3$ 位置，所掃過之面積爲 $\frac{L^2}{2}d\phi$。

由是知當 KF 桿自一位置轉移至鄰近另一位置時，其所掃過之面積爲

$$dA=Ldp+\frac{1}{2}L^2\,d\phi;$$

積分之乃得

$$A=L\int dp+\frac{1}{2}L^2\int d\phi。$$

今若於 KF 桿旁裝置一輪,其軸與 KF 軸平行，在第一節移動時,輪不轉,而於第二節及第三節運動時,輪將隨之滾轉。最簡單之情形乃桿端 F 沿一完閉曲線繞一周後，K 點未曾繞 P，或 KP 桿未曾繞 K 旋轉一周。如是$\int d\phi=0$，而輪所滾轉之遠度爲 $R=\int dp$,故所求面積爲

$$A=L\int dp=LR=L(R_2-R_1),$$

R_1 與 R_2 分表輪周起終之示數。

若面積太大,以致極 P 須位在面積之內,而 K 點復須繞極行一周,則亦可證所求面積須由零圓面積加以或減去輪所示之面積。零圓面積爲儀器之常數，均附刻於儀器之桿上。其命名之故，乃因若 F 點沿零

圓行動，則輪將完全不滾。根據此事，零圓位置不難用實驗方法或作圖以示之，茲不述。

第二十章習題

1. 試將$\frac{1}{x}$曲線下自 $x=2$ 至 $x=10$ 之面積分爲八個相等部分而用梯形及 Simpson 規律求$\int_2^{10}\frac{dx}{x}$並以之與 $\ln 5=1.6094$ 相較。

2. 設蒸汽膨脹時，其容積 v 與壓力 p 之關係如下：

v (立方英尺)	2	4	6	8	10
p (磅/方英寸)	68.7	31.3	19.8	14.3	11.3

用梯形及 Simpson 規律求所作之功 $W=\int_2^{10} p\,dv$。

3. 有一旋轉體浮於水中其各橫截面之直徑 D 之平方與深度 h 之關係如下：

h (米)	0	0.03	0.06	0.09	0.12	0.15	0.18
D(米)	6.00	5.90	5.80	5.55	5.25	4.70	4.20
D^2(方米)	36.00	34.81	33.64	30.80	27.56	22.70	17.64

用 Simpson 規律求其所排去水之重量。

4. 一蒸汽機之示功圖（indicator diagram）之長爲 3.6 寸，相距每 0.3 寸之寬度如下：

0,0.40,0.52,0.63,0.72,0.93,0.99,1.00,1.00,1.00,0.97,0.

若寬度每寸所代表者爲每方寸 100 磅之壓力，用 Simpson 規律求其平均有效壓力。

5. 某車在各時刻 t (以秒計)之速度 v (以每小時若干英里計)如下:

t	0	5	10	15	20	25	30
v	0	3.7	7.5	10.9	13.0	13.7	14

求其在 30 秒內所行之距離。

6. 設一物體之比熱 S 與溫度 T 之關係如下:

T(°C)	0	2	4	6	8	10	12
S	1.00664	1.00543	1.00435	1.00331	1.00233	1.00149	1.00078

今將其溫度自 0°C 升至 12°C，問所需之全熱量 $H=\int_0^{12} SdT$ 爲何?

7. 一空心柱體之截面之四分之一如下表所示，X 與 Y 軸爲其最長及最短之半徑:

x 寸	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75
y_1 (外徑,寸)	6.00	5.95	5.90	5.83	5.76	5.64	5.48	5.22
y_2 (內徑,寸)	5.00	4.90	4.78	4.65	4.45	4.22	3.80	3.40

x 寸	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50
y_1 (外徑,寸)	4.99	4.68	4.35	3.88	3.25	2.34	0
y_2 (內徑,寸)	2.77	2.08	0.00				

求其對 X 軸及 Y 軸之轉動慣量之大約值。

8. 設有寬度爲 h 之細條分一面積爲 n 個，若細條中心之長爲 $y_{1/2}$, $y_{3/2}$, ……, $y_{(2n-1)/2}$，則所求面積約爲

$$A=h(y_{1/2}+y_{3/2}+\cdots\cdots+y_{(2n-1)/2})。$$

9. 設將一面積分爲 n 個(雙數)寬度 h 相等之細條,先用 Simpson 規律以求自 x_1 至 x_{n-1} 內之面積而用梯形規律以求左右端末一條之面積，如是所得者爲 A_1; 若用 Simpson 規律以求自 x_0 至 x_n 內之面積則所得者將爲 A_2。茲將 A_1 與 A_2 平均之則得下列近似公式

$$A=h[0.4(y_0+y_n)+1.1(y_1+y_{n-1})+y_2+y_3+\cdots\cdots+y_{n-2}]$$

試證此公式（本公式常名爲 Durand 規律）

10. 用級數積分法以求 $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx=0.7467$。

11. 求雙曲線 $x^2-y^2=9$ 自 $(3,0)$ 至 $(5,4)$ 弧長之近似值。

12. 令 h 表梯形之寬，則自 $x=a$ 至 $x=a+h$ 之面積爲

$$\frac{h}{2}[f(a)+f(a+h)]=T(h)\text{，又令}\int_a^{a+h} f(x)dx=I(h)\text{。}$$

如是若 $\phi(h)=T(h)-I(h)$ 表 $T(h)$ 與 $I(h)$ 相差之值,試示 $\phi(0)=0$; $\phi'(0)=0$, $\phi''(h)=\frac{h}{2}f''(a+h)$。若 M_2 表 $f(x)$ 之二級紀數之最大絕對值，則 $\phi''(h)\leqq\frac{M_2h}{2}$。由是得 $\phi'(h)=\frac{M_2h^2}{4}$，而 $\phi(h)=\frac{M_2h^3}{12}$。

13. 用三縱線分 $y=f(x)$ 下 X 軸上之面積爲兩條，每條寬 h 令

$P(h)=\frac{h}{3}\{f(-h)+4f(0)+f(h)\}$表用截錐公式所得之結果，$I(h)=\int_{-h}^{h}f(x)dx$ 表積分結果；試以 $\phi(h)=P(h)-I(h)$ 而示 $\phi(0)=\phi'(0)=\phi''(0)=0, \phi'''(h)=\frac{h}{3}\left(f'''(h)-f'''(-h)\right)\leqq\frac{2h^2M_4}{3}$，$M_4$ 表 $f(x)$ 四級紀數之最大絕對值。由是示 $\phi(h)\leqq\frac{h^5M_4}{90}$。

英漢名詞對照表及索引

(數字指頁數)

實用微積分勘誤表

頁	行	誤	正
目次	2	記數	紀數
39	4	$\frac{xP-1}{x\frac{P}{9}(9-1)}$	$\frac{xP-1}{{}_{x}\frac{P}{9}(9-1)}$
41	4	法一求得	法一所求得
108	1	$C=\frac{2U^{\frac{8}{2}}}{36}=+C$	$C=\frac{2U^{\frac{3}{2}}}{36}+C=$
109	1	與縱坐標	與橫坐標
109	倒 4	$\frac{Y_2}{2}=-\frac{X_2}{2}+C_1;$	$\frac{Y^2}{2}=-\frac{X^2}{2}+C_1;$
109	倒 3	移 x_2 項	移 x^2 項
169	8	$4\cos 3\theta$	$4\cos^3\theta$
192	11	e 0.05	e 0.06
195	倒 4	$d\sec^{-2}u$	$d\sec^{-1}u$
206	5	$r\sin\Delta\theta, r$	$r\sin\Delta\theta$
214	倒 2	圖 (10−9), 通	圖 (10−9) 中通
223	4	極限 1	極限爲 1
232	5	一點 C	尋得一點 C
232	6	尋得率半徑	率半徑
298	倒 3	加速度 a_t	加速度 A_T
321	末	負號用以	負號乃以
339	4	特定	待定
365	7	$+e^{\frac{1}{x^2}}$	$+e^{-\frac{1}{x^2}}$
464	2	部分兩桿	部分爲兩桿

中華民國三十七年九月初版

部定大學用書
實用微積分 一冊
⊕(53724 4)

定價金圓貳元肆角
印刷地點外另加運費

編著者 鄭曾同 薩本棟 楊龍生

發行人 朱經農
上海河南中路

印刷所 商務印書館印刷廠

發行所 商務印書館
各地