ELEMENS
DES
MATHEMATIQUES.

Par M. PIERRE POLYNIER,
Docteur en Medecine.

A PARIS,

Chez
- JEAN DE LAULNE, rue de la Harpe, proche le College d'Harcour, à l'Image S. Jean-Baptiste.

ET

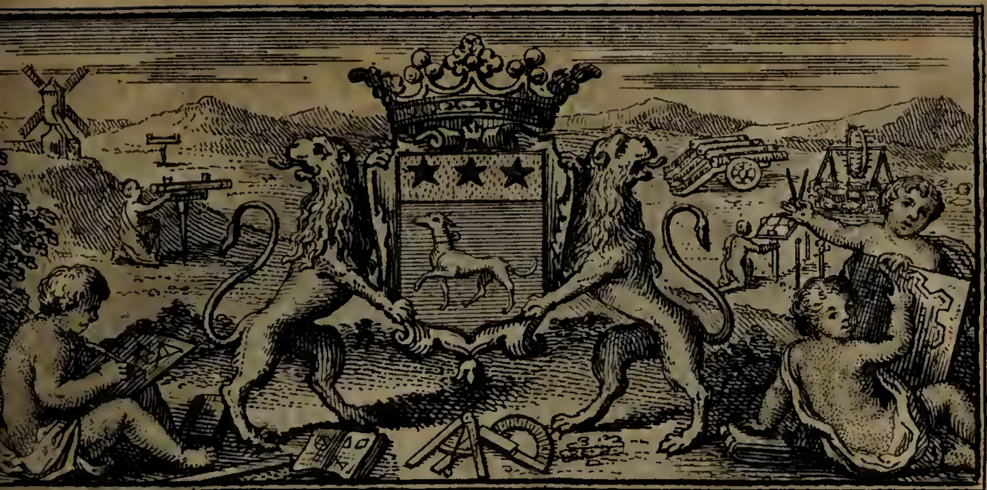
- JACQUE QUILLAU, Imprimeur-Juré-Libraire, rue Galande, proche la rue du Fouare, aux Armes de l'Université.

MDCCIV.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE.

1704

13
1686


APRILIS 1689
L Duflos
Sculp. 17



A MONSIEUR
LE MARQUIS
DE CHAMILLART,

MONSIEUR,

J'ai l'honneur de vous presenter le premier fruit de mon application aux Mathematiques. Rien ne peut mieux seconder les heureuses dispositions que vous avez pour les grandes choses ; rien ne peut contribuer davantage à fortifier *cette admirable justesse d'esprit dont la Providence vous a si liberalement partagé, que l'étude de ces Sciences; l'équivoque ni le doute n'y peuvent jamais trouver place. Elles presentent toujours à l'esprit des veritez incontestables & liées ensemble par un ordre merveilleux; elles l'accoutument à penser juste sur toutes sortes de matieres, à débrouiller les choses les plus confuses, & à éclaircir les plus obscures. C'est en effet cette exactitude scrupuleuse & parfaite qui fait le merite des Mathematiques; & je croirois avoir réussi heureusement dans cet Ouvrage, s'il étoit digne de votre estime par cet endroit; au moins aura-t-il sur tous les autres qui pourront vous être presentez, l'avantage d'être le premier qui paroisse sous les auspices de votre illustre Nom.*

S'il convenoit à un Geometre d'emprunter le secours de l'Eloquence pour exprimer les veritez qu'il connoît, qu'elle occasion n'aurois-je pas de pu-

pour guérir, s'il eſt poſſible, la prévention des autres, que j'ai cru devoir commencer par les reflexions ſuivantes.

DE L'UTILITE' des Mathematiques.

PRemierement je conſidererai la neceſſité où toutes ſortes de perſonnes ſe trouvent d'avoir l'eſprit exact, penetrant, ſitué dans toute la force, la vigueur & l'étenduë dont il eſt capable. Pour être perſuadé que les Mathematiques ſont des ſciences qui produiſent tous ces bons effets; il ſuffit de faire attention à la clarté de leurs principes, à la juſteſſe des raiſonnemens & à l'évidence des demonſtrations qui s'y rencontrent continuellement. Dans ces ſciences l'eſprit s'accoûtume à s'appliquer aux choſes qu'il ſe propoſe à examiner; il s'accoûtume à connoître la verité, à la mettre dans ſon jour, à en établir les principes d'une maniere ſuivie. Cette habitude eſt une choſe qu'on ne peut aſſez eſtimer, c'eſt un fruit d'un prix infini & le plus precieux de nos premieres études. Rien ne rend l'eſprit plus penetrant, plus vif, & plus en état de percer les nuages de l'erreur, que l'exercice où il ſe trouve dans les Mathematiques pour tirer d'un fort petit nombre de principes connus, mille choſes qu'il ne connoiſſoit pas; pour les déduire par ordre, & par un enchaînement admirable. Il eſt rare qu'un eſprit geometrique prenne la vrai-ſemblance pour la verité. Ceux qui ont vû pluſieurs excellens ouvrages de peinture, par exemple, de graveure, de ſculpture, ſçavent beaucoup mieux juger d'une eſtampe, d'une ſtatuë, &c. de même ceux qui ſont accoûtumez à des idées claires, à des demonſtrations exactes, jugent bien mieux du défaut ou de la perfection d'un raiſonnement. Ils ne ſont pas ſi ſujets à ſe laiſſer tromper par quantité de maximes obſcures & incertaines qui ſervent de fondemens aux faux raiſonnemens dont les diſcours des hommes ſont remplis. Ce qui met l'eſprit dans ſa force & dans ſon étenduë, c'eſt de l'accoûtumer à comprendre pluſieurs choſes à la fois, ce ſont ces demonſtrations qu'on ne peut entendre qu'en appercevant la verité de cent autres demonſtrations dont elles dépendent; parce qu'alors l'eſprit eſt obligé de voir en même tems & ce qui éclaire

& ce qui eſt éclairé. En embraſſant tant de choſes à la fois, il porte ſes vûës beaucoup plus loin que dans ſes actions ordinaires. De même qu'en s'accoûtumant à porter des fardeaux peſans, il arrive qu'on ne ſent preſque plus le poids de ceux qui ſont plus legers ; c'eſt ainſi qu'en exerçant nôtre eſprit à des veritez abſtraites & difficiles, nous lui rendons faciles toutes celles qui demandent moins d'application. Les exercices du corps font qu'il agît avec plus de ſoupleſſe & d'agilité, l'endurciſſent au travail, & le rendent enfin capable de ſupporter de grandes fatigues ; de même auſſi les travaux de l'eſprit tels qu'ils ſe rencontrent dans les Mathematiques, le fortifient & l'accoûtument à concevoir les choſes difficiles, à y donner toute l'attention neceſſaire, le preparent à ſuivre le fil d'un raiſonnement quelque long qu'il ſoit, & empêchent qu'il ne ſe rebute de la multitude des choſes qu'il eſt ſouvent obligé d'examiner pour appercevoir la verité ou la fauſſeté dans des choſes importantes. Ces ſciences ouvrent l'eſprit & l'habituent à bannir tous les doutes & toutes les probabilitez, & à ne donner ſon conſentement qu'à ce qui eſt évident & inconteſtable ; parcequ'on ne veut y admettre que des veritez certaines

& des demonſtrations. Le ſoin qu'on a de définir tous les termes obſcurs, afin d'éviter toutes les équivoques & les diſputes de mots; cette adreſſe dont on ſe ſert pour tirer de ce qui eſt connu des choſes ſi cachées & ſi difficiles, font admirer & eſtimer les Mathematiques. Ces ſciences ſurprennent l'eſprit & lui ſont agreables; parceque naturellement nous avons de l'inclination pour connoître la verité, & ici elle paroît toute pure, & ſans aucuns nuages; ici toutes choſes nous portent à l'aimer; on y apprend à la diſcerner; on y trouve ce qui fortifie la raiſon, ce qui étend la vûe de l'eſprit, & enfin ce qui donne lieu d'admirer la grandeur de l'ame de l'homme, & ce qui fait connoître qu'elle ne peut être que toute ſpirituelle & immortelle.

Conſiderons preſentement en particulier l'uſage des Mathematiques dans ce qui regarde la ſocieté des hommes, & faiſons attention à la neceſſité qu'il y a de ſe ſervir des lumieres de ces ſciences. Commençons par les Elemens.

L'Arithmetique eſt d'une utilité ſi univerſelle qu'il ſemble qu'il n'y a perſonne qui n'en puiſſe avoir beſoin; car ſans parler des autres parties des Mathematiques auſquelles elle eſt abſolument neceſſaire:

tout le monde sçait que les Marchands, les Trésoriers, Financiers, Banquiers, Caissiers; en un mot ceux qui sont chargez de recettes de deniers, qui ont des partages ou distributions à faire, soit en paix, soit en guerre, soit dans le Bareau, soit dans les familles, ne peuvent réussir sans des calculs précis, & sans des supputations exactes, c'est-à-dire, sans la science des nombres.

L'Algebre est la science generale des grandeurs. Si on considere son étendue & la fecondité de ses demonstrations, on trouvera qu'elle conduit l'esprit pas à pas, & enfin lui facilite le moyen de découvrir des veritez les plus cachées. Aprés avoir donné des noms à des grandeurs, on trouve par un art admirable qu'en faisant certaines additions, soustractions, multiplications, &c. on apperçoit les fondemens & les suites des raisonnemens les plus subtils, & on se trouve en état de resoudre facilement les questions les plus épineuses. Rien n'est plus propre que l'Algebre pour ménager la capacité & l'étendue de nôtre esprit pour le faire atteindre aux veritez qu'il cherche, quand même elles sembleroient être au dessus de ses forces. Il y a une infinité d'occasions où l'Arithmetique & la Geometrie ordinaires ne peuvent donner aucunes lumieres; c'eſt le ſeul calcul de l'Algebre qui repreſentant à nôtre eſprit pluſieurs idées en même tems ſous des expreſſions tres-courtes, lui facilite le moyen de penetrer incomparablement plus loin. Les expreſſions de l'Algebre occupent ſi peu nôtre eſprit par les ſens qu'elles le laiſſent comme tout entier à lui-même ſans le diſtraire à des choſes étrangeres, & l'aident merveilleuſement à parcourir avec beaucoup d'adreſſe, de promptitude & de facilité tous les rapports & toutes les proprietez des grandeurs qu'il examine. Je dirai même que dans les traitez des Mathematiques où ces ſciences ſe trouvent fort approfondies, on trouve un tres-grand nombre de propoſitions démontrées par la Geometrie, qu'on n'auroit jamais oſé tenter par cette voie, ſi on n'en avoit aperçû la verité par le moyen de l'Algebre qui pour cette raiſon a merité d'être appellée l'art d'inventer. Et en effet aprés que l'Algebre a ſondé le gué, s'il m'eſt permis de parler ainſi, & qu'elle a découvert & preſenté à l'eſprit une verité qu'elle cherchoit; il eſt ſouvent important, pour une entiere ſatisfaction, de la rendre ſenſible à l'imagination par les figures de la Geometrie, & d'éclairer ainſi l'eſprit autant qu'il le peut être.

Les belles découvertes de ces derniers tems ſur la reſolution des équations, ſur leur conſtruction, ſur les proprietez admirables des lignes courbes, ſur l'uſage de cette nouvelle Geometrie des Infiniment-Petits qui eſt tant à la mode parmi les ſçavans, ſont des preuves authentiques de l'excellence de l'Algebre.

La Geometrie eſt d'une utilité ſi connue, que les ouvriers même tâchent de ſe la rendre familiere pour meſurer & toiſer leurs ouvrages. S'il y a des partages à faire, ſoit à la ville, ſoit à la campagne ; s'il y a des terres à vendre ou à achepter, c'eſt une neceſſité indiſpenſable d'avoir recours à cette partie des Mathematiques pour en connoître exactement l'étendue, pour déterminer & limiter les poſſeſſions d'un chacun, & même ſouvent pour décider pluſieurs procez. A peine pouvons-nous ouvrir les yeux ſans appercevoir des cercles, des triangles, des polygones, des ſpheres, & une infinité d'autres figures geometriques qui ſemblent nous inviter à chercher leurs proprietez. Jamais on n'auroit porté la perfection des Arts juſqu'au point où nous la voyons, s'il n'y avoit eu dans ces derniers tems d'habiles Geometres qui ont fait leurs efforts pour les mettre en cet état. La Geometrie étant generalement approuvée de tout le monde, je n'en dirai pas davantage, j'ajouterai ſeulement qu'il eſt auſſi impoſſible de bien entendre le reſte des Mathematiques ſans ſon ſecours ; qu'il eſt impoſſible de faire la lecture d'un livre ſans connoître les lettres de l'alphabet.

L'Optique eſt la ſcience des proprietez de la lumiere, c'eſt cette partie des Mathematiques qui nous apprend à rendre raiſon des phenomenes de la vûe, qui nous fait voir en quoi conſiſte pluſieurs défauts de l'œil, la maniere de les corriger, même d'augmenter la force de la viſion. C'eſt dans l'Optique qu'on examine les proprietez des refractions & des reflexions de la lumiere. On y apprend la conſtruction des lunettes d'approche qui nous font découvrir & appercevoir diſtinctement dans le Ciel & ſur la terre des objets que leur grand éloignement nous rend inſenſibles, qui nous facilitent les obſervations des corps celeſtes, & peuvent ſervir dans les armées pour obſerver les marches & les campemens des troupes ennemies, ſur la mer pour reconnoître les vaiſſeaux des pyrates, des corſaires, &c. afin de ſe precautionner contre leurs inſultes. On y apprend la conſtruction des microſcopes qui ſervent à nous faire voir les Corps, que leur petiteſſe dérobe à nos yeux, & à nous faire reveler pluſieurs ſecrets de la nature. On établit dans l'Optique des principes qui font connoître la cauſe des differentes couleurs & des differentes apparences que nous voyons en mille rencontres, des effets de toutes ſortes de miroirs. Jamais on n'auroit bien connu la cauſe de l'Arc-en-ciel, de la multiplication apparente des objets par les lunettes à facettes, des effets des lanternes & des tableaux magiques, de l'impreſſion des objets dans le fond de l'œil, ſi on ne les avoit imitez par des chambres obſcures des priſmes triangulaires, &c. ſi on n'y avoit enfin découvert & démontré un grand nombre de veritez qui rendent l'Optique tres curieuſe & d'une grande utilité pour bien entendre la Phyſique. L'Optique nous donne les principes de la perſpective, en nous apprenant à repreſenter les Corps en peinture, & à tromper agreablement notre vûe.

Les Mechaniques ſont la ſcience du mouvement & des forces mouvantes. Cette ſcience des Machines eſt une des plus belles parties des Mathematiques. Y a-t-il rien plus admirable que de pouvoir par le moyen des leviers, des poulies, des roues,

&c. augmenter une force tant que la resistance de la matiere qu'on employe à ces machines le pourra supporter sans se briser ; de pouvoir élever des masses énormes aussi haut, ou les transporter aussi loin qu'on voudra ? Les moulins, les pressoirs, les horloges, les montres, les pompes foulantes & aspirantes, & les autres machines hydrauliques, une infinité d'instrumens & de machines dont les boutiques des ouvriers sont remplies, quoique fort ordinaires, sont tres ingenieuses dans leur invention & dans leurs usages. Mais sans sortir de nous mêmes, nous trouverons que notre corps est une machine dont les ossemens sont des leviers, il y a des points d'appui, des cordages, des forces qui y sont appliquées, des fibres paralleles, obliques, circulaires, spirales ; des muscles triangulaires, pyramidaux, orbiculaires, & rhomboidaux. Enfin nous trouverons que cette machine est un assemblage de ce qu'il y a de plus beau dans la Statique, l'Hydraulique & la Pneumatique. On ne peut sans une connoissance exacte des Mechaniques déterminer la force des muscles ni leur construction, raisonner avec justesse sur la maniere de marcher des animaux, de voler des oiseaux & de nager des poissons, ni même sur le mouvement circulaire du ſang, ſur la ſtructure du cœur, ſur les cauſes de ſa dilatation & de ſa contraction, ſur le mouvement & ſur l'uſage de la reſpiration, ſur la generation, la nutrition, l'accroiſſement des plantes & des animaux, &c.

L'Aſtronomie enſeigne à obſerver le cours des Aſtres. C'eſt par le moyen de cette partie des Mathematiques qu'on connoît la durée de l'année, la cauſe de la diverſité des climats, de la difference qui eſt entre les jours, de celle qui eſt entre les ſaiſons. Les obſervations Aſtronomiques nous font connoître le tems precis de la revolution des corps celeſtes, leurs directions, retrogradations, conjonctions, oppoſitions & aſpects. On a le moyen de predire certainement les Eclipſes du Soleil, de la Lune, celles des ſatellites de Jupiter & de Saturne, long tems même avant qu'elles arrivent; ce qui eſt d'une utilité merveilleuſe pour perfectionner la Geographie & l'Hydrographie par la connoiſſance des longitudes. Il eſt impoſſible d'être un Phyſicien parfait ſans être Aſtronome, parcequ'un grand nombre de phenomenes & d'effets particuliers dépendent du mouvement des Aſtres qui ſont des cauſes generales. On ſçait, par exemple, le rapport & la liaiſon conſtante& invariable qu'il y a entre le flux & reflux de l'Ocean & les mouvemens de la Lune ; perſonne auſſi n'ignore les influences du Soleil ſur la terre que nous habitons. Depuis qu'on a inventé les lunettes d'approche on a decouvert dans les corps celeſtes une infinité de choſes tres-curieuſes. On s'eſt apperçû qu'il y avoit des taches dans le Soleil ; qu'il y avoit des montagnes & des vallées dans la Lune ; que la planete de Venus avoit des phaſes comme la Lune ; que Jupiter étoit environné de ſatellites, & Saturne d'un anneau, &c. Cette découverte des ſatellites eſt fort utile, comme je le viens de dire, pour déterminer la poſition des differens lieux de la terre ſur un globe artificiel, pour déterminer les longitudes, afin de rendre la navigation plus parfaite & plus ſûre.

La Gnomonique eſt la ſcience des cadrans, elle enſeigne à meſurer le tems, à le diviſer en parties égales, à marquer ſur differentes ſurfaces la projection ou repreſentation des cercles horaires.

La Geographie nous enſeigne la connoiſſance de la terre que nous habitons ; elle nous en décrit les particularitez. Quoiqu'il ne ſoit pas neceſſaire d'être fort profond dans les Mathematiques pour bien ſçavoir la Geographie, on peut dire neanmoins qu'elle en dépend dans ſes points les plus eſſentiels.

On doit dire la même choſe de la Chronologie, cette ſcience ſi neceſſaire pour fixer les Epoques des années qui ſont en uſage chez les differentes Nations de la terre, pour verifier l'hiſtoire & y placer les evenemens les plus remarquables arrivez dans les Empires & dans les Etats du monde ; & enfin pour déterminer ces periodes de temps que la Religion a conſacrées pour la celebration de ſes Fêtes.

La navigation s'occupe principalement au trafic des marchandiſes ; à enrichir des Royaumes entiers; à faire naître l'abondance dans les lieux les plus ſteriles. C'eſt par ſon moyen que l'or, l'argent & la plûpart des autres métaux nous ſont apportez. C'eſt par elle que les Nations les plus éloignées ſe communiquent reciproquement ce qui leur eſt neceſſaire. C'eſt auſſi par cet art que les armées navales remportent des victoires ſur leurs ennemis. Or la navigation eſt fondée ſur la connoiſſance de pluſieurs parties des Mathematiques. Elle a beſoin de la Geographie & d'une deſcription exacte des mers qu'on appelle Hydrographie, pour tracer aux vaiſſeaux des routes aſſûrées, pour affermir le courage des Pilotes ſur un élement ſi inconſtant, pour leur faire traverſer l'Ocean tout entier, & les faire arriver juſques dans ces nouveaux Mondes que les Empereurs Romains & les plus grands Conquerans de l'antiquité n'ont jamais connus. Elle a beſoin de la Geometrie, de la connoiſſance des uſages de la bouſſole & de l'Aſtronomie pour reconnoître ſon chemin. Elle a beſoin des Mechaniques pour la conſtruction de ſes vaiſſeaux, pour la diſpoſition, la figure & les uſages du gouvernail qui ſert à faire voguer le navire de quel côté on veut, pour ſes voiles, ſes mâts, ſes poulies, &c.

L'Architecture civile eſt l'art de conſtruire des maiſons: on y trouve les principes neceſſaires pour donner la beauté, la ſolidité & la perfection aux édifices tant des particuliers, qu'à ceux qui ſont deſtinez à l'uſage du public, aux Egliſes, par exemple, à la conſtruction des ponts, aux écoles, aux Palais & lieux où s'aſſemblent les Cours de Juſtice, aux priſons, arſenaux, Hôpitaux, &c.

L'Architecture militaire, ou l'Art des fortifications, enſeigne le moyen de diſpoſer & de mettre à couvert un petit nombre de perſonnes pour faire reſiſtance à un nombre beaucoup plus grand. C'eſt cette partie des Mathematiques que les plus vaillans

Guerriers ſe font gloire de conſulter, lorſqu'il s'agit, par exemple, d'aſſûrer & de regler la marche & les campemens d'une armée, de choiſir des poſtes avantageux, d'attaquer ou de défendre des villes, de preſcrire l'ordre des batailles : on y trouve les moyens de renverſer & de réduire en cendre des villes entieres. Cette ſcience ſert auſſi aux divertiſſemens des peuples, lorſqu'on ſe propoſe de faire des feux d'artifices, & de celebrer des réjoüiſſances publiques.

Je ne finirois jamais ſi je voulois rapporter ici toute l'utilité qu'on peut retirer des Mathematiques, ainſi j'ajoûterai ſeulement que la Phyſique n'a jamais été plus parfaite que lorſque les plus grands Philoſophes ont été d'excellens Mathematiciens. Depuis que la Philoſophie naturelle a été jointe aux Mathematiques, & qu'elles ſe ſont prêtez des ſecours reciproques on a fait des découvertes agreables & dignes d'être ſçûes, que les Anciens avoient ignorées; & ſans doute plus on cultivera les ſciences, plus on ſe trouvera obligé de convenir que les Mathematiques ſont du nombre de celles qui meritent qu'on s'y applique tres-ſerieuſement.

AVERTISSEMENS pour se servir utilement de ce Livre.

1°. Il faut avoir la precaution de ne lire point l'Arithmetique ni ce qui regarde l'Algebre sans avoir la plume à la main & du papier pour s'exercer sur les exemples que je propose, & pour en inventer ensuite de semblables. Dans la Geometrie il faut regarder les figures à mesure qu'on lit, & ne point se rebuter lorsqu'on ne comprend quelquefois pas d'abord tout ce qui se rencontre. Parceque dans les Mathematiques il faut de l'attention & de la perseverance ; & il est rare que dans la premiere lecture qu'on fait de quelques élemens des Mathematiques que ce soit, on les possede parfaitement. Par cette premiere lecture on parcourt le tout autant exactement qu'on le peut, & ensuite on recommence à lire tout de nouveau, & quelquefois une troisiéme lecture n'est pas encore inutile.

2°. Tant dans l'Arithmetique, dans l'Algebre,

gebre, que dans la Geometrie, il faut toujours examiner & verifier les citations, parcequ'elles leveront une infinité de difficultez. C'est là une veritable maniere de faire cet étude avec fruit.

3°. La premiere fois que ceux qui seront moins studieux que les autres, liront ces Elemens, ils pourront éviter de lire ce qui est depuis la page 105, jusqu'à la premiere proposition des proportions, & dans une seconde lecture ils liront le tout exactement.

4°. Il est bon d'être aussi averti que les lignes ponctuées sont marquées de cette sorte, pour les differencier des autres, qui sont attachées à la question. Ces lignes ponctuées sont seulement utiles pour la demonstration qu'on se propose de faire. La courbure des lignes ponctuées des figures de la page 475, servent seulement pour signifier que la ligne entiere A B est appellée *e*. Dans les plans & dans les solides j'ai aussi representé par des lignes ponctuées celles qu'on considere comme si on les voyoit au travers d'une surface ou d'un corps.

5°. Il faut encore remarquer une chose qui pourroit embarrasser ceux qui commencent l'étude des Mathematiques; c'est que dans la repreſentation des plans & des ſolides on eſt ſouvent obligé d'y repreſenter des lignes perpendiculaires à d'autres lignes menées dans ces plans, par des lignes qui paroiſſent leur être obliques en les voyant marquées ſur le papier où on lit. Mais il faut prendre garde que cette obliquité eſt un effet de la repreſentation, de la perſpective, & de la maniere de deſſiner; parcequ'autrement on ne peut pas exprimer ces choſes diſtinctement. Dans la page 201 on conſidere la ligne CB comme perpendiculaire à la ligne GE, qui eſt l'interſection des plans DH & FE. On voit dans la page 222 des quarrez qu'on repreſente par des Rhombes; c'eſt la maniere dont on ſe ſert pour repreſenter le cube ſur le papier qui eſt une ſurface plane, c'eſt ce qu'on appelle projection en termes d'Optique. Ainſi dans la page 501 on conſidere la ligne AB comme perpendiculaire aux lignes EF & CD, quoique dans la repreſentation elles paroiſſent obliques: parcequ'on conſidere le point A comme élevé en l'air au deſſus de la ſurface plane GH. Dans les plans & dans les ſolides, cette maniere de repreſenter les lignes & les ſurfaces planes ſe rencontre tres ſouvent.

6°. Les Corollaires ſont fort neceſſaires. Il ne faut pas les negliger en aucune maniere. On connoîtra dans la suite que leur utilité n'est pas moindre que celle des Propositions generales d'où elles viennent.

Lorsque dans la Geometrie il y aura plusieurs figures au même endroit avec les mêmes lettres, il faudra lire la demonstration en regardant la premiere figure, relire encore cette même demonstration & regarder la seconde figure: & ainsi de suïte autant de fois qu'il y aura de ces figures; parcequ'alors la même demonstration doit être appliquée à chacune de ces figures. C'est une voie qui abrege le discours, & qui applique la proposition à toutes les circonstances necessaires. Il y en a des exemples dans les pages 241. 243. 260. 292. 298. &c. Cet article merite attention.

Aprés avoir exposé quelques demonstrations dans toute leur étendue, je les ai ensuite exprimées d'une maniere plus courte pour les presenter à l'esprit dans une forme tres simple. En les apercevant ainsi dans un fort petit espace, il y a beaucoup plus de facilité à les comprendre & à les retenir. On en trouvera avec cette reduction dans les pages 130. 159. 161. 468. 474. 479. &c.

Dans les pages 66. 131. & dans les propositions 49. 50. &c. de la Geometrie, il faudra se souvenir de l'expression de la multiplication expliquée dans la page 40. Et dans les pages 468. 472. 487. &c. il faudra aussi se souvenir de l'expression des quarrez expliquée dans la page 231.

Dans ces Elemens je n'ai mis de l'Arithmetique que ce que j'en ai cru être le plus necessaire ; & je me suis contenté de ne traiter que les premiers & les principaux fondemens de l'Algebre, afin de ne pas rebuter d'abord ceux qui commencent, & de ne pas fatiguer leur zèle par une plus longue suite de principes.

J'ai donné plus d'étendue à la Geometrie. Car cette partie elementaire, outre la theorie, contient la pratique qui suit en forme de Corollaires les propositions generales dont elle dépend.

Si quelquefois j'ai prouvé des veritez, que quelques-uns voudroient faire passer pour des axiomes, c'est que les demonstrations m'en ont paru tres faciles, & qu'en les proposant sans preuve, j'aurois cru pécher contre l'idée de perfection qu'on a dans les Mathematiques, & contre cette grande exactitude qui rend ces sciences si recommandables.

J'ai mis au commencement de chacune des 3 Parties de cet Ouvrage les définitions necessaires, afin qu'étant de suite on les puisse trouver plus promptement, & pour que les citations en soient plus faciles.

Euclide étant un Auteur Elementaire fort ancien & le plus connu, ses Elemens de Geometrie sont ordinairement citez ou supposez dans presque tous les Traitez particuliers des Mathematiques. Pour rendre la lecture de ces Traitez plus intelligible, lorsqu'on y trouve des veritez dont la demonstration est renvoiée aux Elemens d'Euclide, j'ai mis à la fin de ces nouveaux Elemens une Table qui contient par ordre les Propositions d'Euclide que j'y ai demontrées, c'est une circonstance où cet Ouvrage sera aussi utile que les Elemens d'Euclide même. Ceux qui voudront comparer ces Elemens avec ceux d'Euclide connoîtront facilement si la methode que j'ai observée est plus naturelle que celle de cet Auteur; si les démonstrations que j'ai employées sont plus faciles, souvent plus directes, plus évidentes, & plus courtes,

---

Fautes à corriger.

P*Age* 40. *lig.* 13. est plus grand, *ajoutez*, ou égal.
P. 70. *lig.* 24. $+ 5 - 5 = 50$, *lis.* $= 0$.
P. 101. *lig. antepenult.* de 27. *lis.* de 37.
P. 107. *l.* 9. $+ 216$. *l.* $- 216$.
P. 118. *lig. derniere*, 39. *lis.* 56.

P. 151. *lig*. 7. : : *h z*. *d*. lisez *hz*. *h*.
P. 166. *lig*. 17. numerateurs, *lis*. dénominateurs.
P. 170. *l*. 15. $\frac{a}{b} =$, *lis*. $\frac{a}{b} = y$.
P. 185. *lig*. 16. 4 onces, *lis*. 5.
P. 188. *lig*. 26. 700 liv. *lis*. 720.
P. 220. *l*. 17. est termi. *lis*. est un cercle; *& p*. 224. *l*. 13. sont terminées, *lis*. sont deux cercles, qui sont des surfaces d'une infinité de côtez.
P. 221. *l*. 25. aux, *lis*. à tous les. *& l*. 32. aux *lis*. à tous les.
P. 225. *lig*. 8. cette ligne : *ajoutez*, de sorte que le centre soit toujours dans la ligne fixe.
P. 252. *lig*. 4. *du Coroll*. 2. EG *lis*. FG.
P. 257. *lig*. 21. B C B D. *lis*. B C $<$ B D.
P. 286. *l*. 17. concourir, *ajoutez*, en un point.
P. 308. *lis*. 27. B F obliquement, *lis*. B E.
P. 309 *l*. 19. de part & d'autre, *lis*. de part ou d'autre.
P. 312. *lig*. 22. du, *lis*. au.
P. 386. *l*. *avant l'antepenultieme*, qui ont le même circuit, *ajoutez*, & qui sont quadrilaterales.
P. 396. *lig*. 16. ou points, *lis*. pointes.
P. 397. *lig*. 20. YA. *lis*. Y*a*.
P. 404. *l*. 3. laquelle fera, *lis*. de sorte qu'elle fasse.
P. 442 *lig*. 26. la lig. C H. *lis*. G H.
P. 445. *lig*. 23. huit toises, *lis*. six toises.
P. 446. *lig*. 6. huit toises, *lis*. six.
P. 482. *lig*. 19. F G H, *lis*. F H G.
P. 508. *l*. 2. on ne peut mener, *ajoutez*, dans le plan AB; *& lig*. 10. *ajoutez*, dans le plan CD.
P. 538. *l*. 5. l'une à l'autre, *aj*. & de même hauteur.
P. 539. *citat*. 4. Cor. prop. 74. *lis*. 75.
P. 5 0 *lig*. *derniere*, par, *lis*. pour.
P. 569. *l*. 3. *du Cor*. entre eux. En, *effacez le point*, *& lisez*, entre eux en.

ELEMENS DES MATHEMATIQUES.

PREMIERS PRINCIPES.

Nous appellons *Grandeur* tout ce qui peut être augmenté, ou diminué.

On a donné le nom de *Mathematiques* aux Sciences dans lesquelles on considere les proprietez des Grandeurs.

Ces Sciences sont fondées sur trois sortes de Principes, sur des Definitions, des Axiomes, & des Demandes.

DEFINITIONS GENERALES.

1. Les Definitions dans les Mathematiques sont des explications qui exposent la signification des mots dont on se sert. Par ces Definitions on explique, par exemple, ce qu'on doit entendre par les mots de *Triangle*, de *Poinct*, &c.

2. Les Demandes sont des suppositions si simples, que toute personne, pour peu de reflexion qu'il y fasse, les doit admettre, telle que seroit celle-ci : On demande, par exemple, pour parvenir à une Demonstration, *qu'il soit permis de*

mener une ligne d'un poinct à un autre poinct, ou d'imaginer qu'elle y soit menée.

3. Les Axiomes sont des veritez évidentes à toute personne qui y fait attention; par exemple, *un Tout est plus grand qu'une de ses parties, &c.*

4. La Proposition est une expression d'une verité qu'on veut découvrir, ou d'une chose qu'on veut faire.

5. La Demonstration est une application des Définitions, Demandes, & Axiomes, pour former une persuasion invincible.

6. Un Theorême est une Proposition dans laquelle il s'agit seulement de la démonstration d'une verité.

7. Un Problême est une Proposition dans laquelle il s'agit de faire quelque chose, & de démontrer que la maniere qu'on propose pour faire cette chose est infaillible, & un veritable chemin pour y parvenir.

8. Corollaires, ou Consequents sont des veritez qui deviennent necessairement connuës par les Propositions demontrées, ou par les Definitions exposées.

9. Cette marque $=$ signifie Egal, & cette autre marque $+$ signifie Plus, & cette troisiéme note ou marque $-$ signifie moins; par exemple $2 + 3 = 5$, c'est à dire deux plus 3, ou 2 avec trois sont égaux à 5, & $8 - 2 = 6$, c'est à dire 8 moins 2, ou 8 dont on a retranché 2, sont égaux à 6.

10. Cette note ou marque $>$ signifie plus Grand, & cet autre signe ou note $<$ signifie plus Petit; par exemple $7 - 2 > 4$, c'est à dire 7 moins deux sont plus grands que 4; & $4 < 3 + 3$, c'est à dire, 4 plus petits que 3 plus 3.

DEMANDES GENERALES.

1. Lorſque pluſieurs grandeurs ſont parfaitement égales, qu'il ſoit permis de prendre l'une au lieu de l'autre.

2. Qu'il ſoit permis de nommer une grandeur du nom d'une, ou de pluſieurs lettres de l'Alphabet

3. Que les grandeurs égales, ou de même nature ſoient exprimées par des lettres ſemblables, ſi cela eſt neceſſaire pour une demonſtration; par exemple d & d ſignifieront deux Nombres égaux, deux differences égales, &c.

4. Les Grandeurs inégales, ou de differente nature, ſeront exprimées par des lettres differentes; par exemple a & b, &c.

AXIOMES GENERAUX.

1. Une même choſe ne peut être, & ne pas être en même-temps.

2. Un Tout eſt plus grand qu'une de ſes Parties.

3. Un Tout eſt égal à toutes ſes Parties priſes enſemble; par exemple ſi les Grandeurs $b + d$ ſont toutes les parties de z, alors $z = b + d$.

4. Si à Grandeurs égales on ajoûte Grandeurs égales, les Touts qui en reſulteront ſeront égaux; par exemple ſi les grandeurs $b + d = z$, en ajoûtant f de part & d'autre, on aura $b + d + f = z + f$.

5. Reciproquement, ſi à des Grandeurs égales, d'autres Grandeurs étant ajoûtées, ou pluſieurs Grandeurs étant ajoûtées ſucceſſivement à la même, il reſulte des Touts égaux; ces Grandeurs ajoûtées ſeront égales; par exemple ſi une Gran-

deur nommée x étant jointe à 5, forme une troisiéme Grandeur égale à 14, & qu'une Grandeur nommée y étant pareillement jointe à 5, forme aussi une troisiéme Grandeur égale à 14, les Grandeurs x & y seront égales entre elles ; car si elles n'étoient pas égales entre elles, l'une jointe à 5 ne feroit pas la même somme, ou grandeur que l'autre jointe à ce même nombre 5.

6. Les Grandeurs qui sont doubles, triples, quadruples, &c. d'une même grandeur, ou de Grandeurs égales sont égales entr'elles; par exemple si a contient trois fois f, & si c contient pareilment trois fois f, a & c sont des Grandeurs égales.

7. Si à Grandeurs égales on ajoûte Grandeurs inégales, ou si à la même Grandeur on ajoûte successivement Grandeurs inégales, les Touts qui en resulteront seront inégaux, & le plus grand Tout sera celui dans lequel se trouvera la plus grande des Grandeurs ajoûtées ; par exemple, si à b & à c égales entr'elles, on ajoûte d'une part d, & de l'autre part f, & si $d > f$, les Touts $b + d$, & $c + f$ seront inégaux, & $b + d$ sera le plus grand.

8. Si de Grandeurs ajoûtées à Grandeurs égales il resulte des Touts inégaux, les Grandeurs ajoûtées seront inégales, & celle-là sera la plus grande qui se trouvera dans le plus grand Tout. Par exemple si $a = b$, & qu'ajoûtant f à la Grandeur a, & g à la Grandeur b, il arrive que $a + f > b + g$, les Grandeurs f & g seront inégales, & $f > g$.

9. Si de Grandeurs égales on ôte Grandeurs égales, les restes seront égaux ; par exemple si $b + d + f = z + f$ retranchant de part & d'autre les Grandeurs égales f, il restera $b + d = z$.

10. Et reciproquement aprés avoir ôté certai-

nes grandeurs de Grandeurs égales, ſi les reſtes ſont égaux, les Grandeurs retranchées ſeront égales entr'elles.

11. Une moitié d'une Grandeur plus grande, eſt plus grande qu'une moitié d'une plus petite; un tiers d'une Grandeur plus grande, eſt plus grand qu'un tiers d'une plus petite; pareillement un quart, &c. par exemple ſi $a > b$, & que f ſoit un tiers de a, & que g ſoit un tiers de b, on aura auſſi $f > g$.

12. Chaque moitié de Grandeurs égales ſont égales entr'elles, les tiers pareillement, &c.

13. Reciproquement lorſqu'une moitié de Grandeur eſt égale à une moitié d'une autre, les Grandeurs auſquelles ces moitiés appartiennent ſont égales entr'elles. La même verité ſera conſtante, ſi un tiers d'une Grandeur eſt égal au tiers d'une autre, ou ſi un quart eſt égal au quart d'une autre, &c.

14. Lorſqu'une moitié d'une grandeur eſt plus grande qu'une moitié d'une autre; la premiere Grandeur entiere eſt plus grande que cette autre pareillement entiere. La même choſe eſt évidente, ſi un tiers d'une grandeur eſt plus grand que le tiers d'une autre, &c.

15. *Si* de Grandeurs égales on ôte des Grandeurs inégales, les reſtes ſeront inégaux, & le plus grand reſte ſera celui qui ſera le reſte que laiſſera la plus petite Grandeur retranchée; par exemple ſoit $a + b = c + d$, ſi $b > c$, en retranchant d'une part b. & de l'autre c, il reſtera $a < d$.

16. Reciproquement ſi certaines Grandeurs retranchées de Grandeurs égales, laiſſent des reſtes inégaux, ces Grandeurs retranchées ſeront inégales, & celle là ſera la plus grande qui laiſ-

ſera le plus petit reſte ; par exemple ſi $h + m = n + o$, & qu'aprés avoir retranché d'une part h, & de l'autre n, il reſte $m < o$, il eſt évident que la Grandeur, retranchée h, ſera plus grande que l'autre Grandeur retranchée n.

17. Si de Grandeurs inégales on ôte des Grandeurs égales, les reſtes ſeront inégaux, & le plus grand reſte ſera celui qui ſera reſte de la Grandeur qui étoit la plus grande ; par exemple, ſi $a + b > c + b$, aprés avoir retranché d'une part b, & avoir auſſi retranché de l'autre pareille Grandeur b, il reſtera encore $a > c$.

18. Les Grandeurs égales à une troiſiéme, ſont égales entre elles ; par exemple ſi $a = d$, & ſi $b = d$, on aura $a = b$.

19. Les Grandeurs qui ſurpaſſent une troiſiéme d'un excés égal, ſont égales entre elles ; par exemple ſi $a - c = f$, & ſi $g - c = f$, c'eſt à dire, ſi a & g ſurpaſſent f de la même grandeur c, on aura $a = g$.

20. Les Grandeurs qui ſont moindres qu'une troiſiéme d'une Grandeur égale, ſont pareillement égales entre elles ; par exemple ſi $a + h = m$, & $b + h = m$, c'eſt à dire ſi a & b ſont moindres que m de la grandeur h, on aura $a = b$.

21. Reciproquement les Grandeurs qui ſont égales entre elles, ſont égales à une troiſiéme, ou ſurpaſſent une troiſiéme Grandeur d'un excés égal, ou enfin ſont moindres qu'une troiſiéme, d'une grandeur égale.

22. Si de trois Grandeurs a, b, c, la premiere a eſt plus grande que la deuxiéme b, & ſi la deuxiéme b eſt plus grande que la troiſiéme c, la premiere a ſera plus grande que la troiſiéme c.

AVERTISSEMENT.

Il faut observer que les Definitions, Demandes, & Axiomes qu'on vient d'exposer, conviennent generalement à toutes les Parties des Mathematiques ; cependant chaque Partie Elementaire des Mathematiques aura encore ses Definitions, ses Demandes, & ses Axiomes particuliers.

DES PARTIES DE MATHEMATIQUES.

LEs Parties élementaires des Mathematiques sont l'Arithmetique, l'Algebre, & la Geometrie.

Les autres Parties des Mathematiques ; par exemple l'Astronomie, les Mechaniques, l'Optique, les Fortifications, la Navigation, &c. ne sont qu'une application des Parties Elementaires des Mathematiques à la Physique.

Nous partagerons cet Ouvrage en trois Parties.

Dans la premiere, nous ne parlerons que des operations d'Arithmetique, dont l'usage est le plus frequent.

Dans la seconde, nous exposerons les principaux fondemens de l'Algebre, pour traiter enſuite la doctrine des Proportions avec toute la brieveté & l'exactitude qui nous ſeront poſſibles.

Dans la troiſiéme Partie, nous ferons un choix, & un arrangement des Propoſitions les plus neceſſaires de la Geometrie, qui y ſeront demontrées d'une maniere tres ſimple.

La clarté, la nouveauté, & l'ordre methodique qu'on a obſervé dans cet Ouvrage & dans les Demonſtrations des Propoſitions qui s'y rencontrent, ne contribueront pas peu à en faciliter l'intelligence. On oſe même dire qu'on y trouvera un grand ſecours pour entendre ce qu'il y a de plus beau, de plus utile, & de plus relevé dans la Phyſique. Enfin on y trouvera une ouverture conſiderable pour le reſte des Mathematiques.

ELEMENS DES MATHEMATIQUES.

PREMIERE PARTIE.

DE L'ARITHMETIQUE.

DEFINITIONS D'ARITHMETIQUE.

1. UNITE' est une chose considerée, sans faire attention aux Parties qui la composent, ou sans faire attention à une autre chose dont elle peut être partie ; par exemple, un sol, un écu, une toise, un pied, &c.

2. Nombre est une Collection d'unitez ; par exemple, six toises.

3. L'Arithmetique est une Partie Elementaire des Mathematiques, dans laquelle on traite seulement des Nombres.

Il y a de dix sortes de signes, ou caracteres dont on se sert pour exprimer toutes sortes de Nombres, & on les appelle *Chifres* ; sçavoir,

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	0.
un,	deux,	trois,	quatre,	cinq,	six,	sept,	huit,	neuf,	zero,

DEMANDES D'ARITHMETIQUE.

1. Le dernier chifre o, qu'on appelle *zero*, ne ſignifie rien ſeul ; mais ſeulement lorſqu'il eſt mis aprés les autres dont il augmente la valeur.

2. La valeur des chifres ne dépend pas ſeulement de leur figure, mais auſſi elle dépend de leur arrangement.

3. Lorſque pluſieurs chifres ſont rangez de ſuite, ceux qui ſont dans la premiere place, (commençant à compter de droit à gauche,) ne valent jamais plus qu'eux-mêmes ; ceux qui ſont dans la ſeconde place, valent dix fois ce qu'ils vaudroient s'ils étoient dans la premiere, &c. 1, par exemple, dans la premiere place ne vaut qu'une ſeule unité ; dans la ſeconde place il vaut dix : dans la troiſiéme il vaut dix fois ce qu'il auroit valu dans la ſeconde, ſçavoir, dix dixaines, ou une centaine ; dans la quatriéme place, il vaut dix fois ce qu'il auroit valu dans la troiſiéme ; ſçavoir, dix centaines ou un mille, &c.

de quintillions			de quadrillions			de trillions			de billions ou millards			de millions			de milles			d'unités.		
centaine	dixaine	nombre	centaine	dixaine	nombre	centaine	dixaine	nombre	centaine	dixaine	nombre	centaine	dixaine	nombre	centaine	dixaine	nombre	centaine	dixaine	nombre
1	1	1,	1	1	1,	1	1	1,	1	1	1,	1	1	1,	1	1	1,	1	1	1.
2	2	2,	2	2	2,	2	2	2,	2	2	2,	2	2	2,	2	2	2,	2	2	2.

3, &c.

4. Les zeros ſervent pour augmenter la valeur des chifres qui les precedent, en faiſant voir

que cés chifres ſont dans un rang plus reculé, comme ſi aprés 5 il y a deux zeros, ces deux zeros font voir que 5 eſt dans le troiſiéme rang, & qu'ainſi il vaut cinq cens, ou 500.

Lorſqu'il il y a pluſieurs chifres de ſuite, on les ſepare de trois en trois par tranches, avec de petites virgules pour éviter la confuſion; la premiere tranche eſt appellée Unitez; la ſeconde Milles, &c.

On traitera ſeulement dans cette premiere Partie, de l'Addition, Souſtraction, Multiplication, & Diviſion des nombres entiers, & on fera enſuite les mêmes operations ſur les Fractions ou nombres rompus.

AXIOMES D'ARITHMETIQUE.

1. Si deux nombres ſont parfaitement égaux, lorſqu'on retranchera d'un de ces nombres la valeur de l'autre, il ne reſtera rien.

2. Aprés avoir retranché un nombre d'un autre, s'il reſte quelque choſe, pour connoître ſi ce qui reſte eſt le veritable reſte qu'on cherche, il faut l'ajoûter avec ce qu'on a retranché, & il doit reſulter de cette addition un nombre égal à celui dont on a retranché, puiſqu'il n'eſt composé que de deux choſes; ſçavoir de ce qui reſte, & de ce qui a été retranché.

DE L'ADDITION DES NOMBRES.

DEFINITION.

L'ADDITION eſt un aſſemblage de deux, ou de pluſieurs nombres en un ſeul, qu'on appelle *Somme* ou *Total*.

Pour faire cette operation, il faut écrire les chifres qui expriment les nombres qu'on veut aſſembler : de ſorte que les unitez ſoient ſous les unitez, les dixaines ſous les dixaines, les centaines ſous les centaines, &c.

Aprés avoir mené une ligne ſous ces nombres ainſi diſpoſez, il faut aſſembler ceux qui ſont de même eſpece, c'eſt à dire, qui ſont les uns ſur les autres ; & lorſque leur ſomme eſt au deſſous de dix, on l'écrit ſous chaque rangée ; mais ſi elle excede neuf, alors parcequ'il faut pluſieurs chifres pour l'exprimer, on écrit ſeulement le dernier qui ſe trouve vers la main droite, & on reſerve ce qui ſe trouveroit vers la main gauche, pour ajoûter à la colomne de chifres ſuivante, & ainſi de ſuite juſqu'à la fin.

EXEMPLE.

	6 1 8
	9 0 7
	2 5
	8 8 4 0
tot.	1 0 3 9 0

Pour ajoûter ces quatre nombres 618, 907, 25, 8840, aprés les avoir diſpoſez l'un ſur l'autre, comme on vient d'enſeigner, on commence vers la main droite, diſant : 0 & 5 font 5, & 7 font 12 & 8 font 20 ; j'écris 0 ſous la premiere rangée, & je retiens deux dixaines, qui ſe trouvent en 20, leſquelles deux dixaines doivent être ajoutées dans la deuxiéme rangée en cette ſorte ; 2 que j'avois retenus, & 4 ſont 6 & 2 ſont 8, & (omettant le zero,) 1 font neuf ; j'écris 9 ſous la deuxiéme rangée. Enſuite dans le troiſiéme rang, je dis, 8 & 9 font 17 & 6 font 23 ; j'écris 3 & je retiens 2, que je joins dans le quatriéme rang avec 8, diſant : 8 & 2 que j'avois retenus, ſont 10 ; j'écris zero & j'avance un, parceque c'eſt c'eſt tout. On trouve que la ſomme totale, qui reſulte de tous ces nombres eſt 10390, c'eſt à dire, dix mille trois cens quatre-vingt dix.

Autre Exemple.

Pour ajouter ces nombres 9 livres 12 ſols; 13 l. 15 ſ. & 8 ſ. Il faut commencer par les ſols, diſant: 8 & 5 font 13 & 2 font 15; j'écris 5 & je retiens 1 qui vaut une dixaine que je joins avec les dixaines des ſols, diſant: 1 que j'ay retenu, & 1 font 2 & 1 font 3 dixaines de ſols; mais parcequ'il faut deux dixaines de ſols pour faire une livre, je trouve que les trois dixaines de ſols font 1 livre, reſte 10 ſols que j'écris à côté du 5, & je retiens 1 livre que je joins avec les livres, diſant: 1 livre provenuë des ſols, & 3 font 4, & 9 font 13; j'écris 3 & je retiens 1; enſuite dans le ſecond rang, je dis: 1 que j'ay retenu & 1 font 2; j'écris 2; & partant je trouve que le total ou la ſomme de ces trois nombres eſt 23 l. 15 ſ.

	9 l.	12 ſ.
	13	15
		8
Total	23 l.	15 ſ.

Autre Exemple.

Pour ajouter ces nombres 112 l. 12 ſ. 4 d; 2429 l. 17 ſ. 3 d; & 820 l. 10 ſ. 10 d. Il faut commencer par les deniers, diſant: 10 deniers & 3 font 13 deniers valant 1 ſol & 1 denier; j'écris la petite ligne A, pour marquer 1 ſol, & je retiens 1 denier que j'ajoute avec

112 l.	12 ſ.	4 d.	
2429	17	3	—— A
820	10	10	
3363 l.	0 ſ.	5 d.	

4, ce qui fait 5 que j'écris ſous les deniers. Enſuite je compte combien il y a de petites lignes marquées à côté des deniers; j'en trouve une, cela ſignifie que c'eſt un ſol qu'il faut joindre avec les ſols, diſant: 1 & 7, (negligeant le 0) ſont 8 & 2 ſont 10; j'écris 0 & je retiens 1 que je joins avec les dixaines des ſols, diſant: 1 retenu & 1 font 2 & 1 font 3 & 1 font 4 dixaines de ſols; & parce qu'il faut deux dixaines de ſols pour faire une livre, je prens la moitié de ces 4 dixaines de ſols, cela fait 2 l. que je joins avec les livres, diſant: 2 l. provenuës des ſols & 9 (negligeant le 0) font 11 & 2 font 13; j'écris 3 & je retiens 1 dixaine que je joins à la colomne ſuivante, diſant: 1 retenu & 2 font 3 & 2 font 5 & 1 ſont 6; j'écris 6. Enſuite paſſant à la troiſiéme colomne, je dis: 8 & 4 ſont 12 & 1 ſont 13; j'écris 3 & je rétiens 1. Enfin au quatriéme rang, je dis: 1 dixaine de cent que j'ay retenu avec 2 font 3, j'écris 3.

112 l.	12 ſ.	4 d.	
2429	17	3	—— A
820	10	10	
3363 l.	0 ſ.	5 d.	

Et partant je trouve que la ſomme ou le total des trois nombres propoſez eſt 3363 l. 0 ſ. 5 d.

DE LA SOUSTRACTION DES NOMBRES.

DEFINITIONS.

1. LA Souſtraction eſt une operation par laquelle on retranche ou ôte un petit nombre d'un plus grand.

2. Le nombre qui reste aprés ce retranchement est appellée *Difference* de ces deux nombres; par exemple ayant ôté 8 de 14, le reste qui est 6 est la *Difference* de 8 à 14.

Pour faire cette operation, il faut placer le nombre qu'on veut retrancher ou soustraire, sous le plus grand nombre, duquel on veut retrancher le plus petit; de sorte que les unitez soient sous les unitez, les dixaines sous les dixaines, &c.

Ensuite il faut mettre une ligne au dessous de ces chiffres, au dessous de laquelle on écrira le *reste*, ou *residu*, ou *difference*.

Enfin on soustrait les nombres inférieurs des supérieurs l'un aprés l'autre, & on écrit de suite les restes au dessous de la ligne.

Exemple.

de	4 5 8
ôtant	2 3 4
reste	2 2 4

Pour soustraire 234 de 458, après les avoir disposez, comme il a été enseigné, il faut commencer vers la main droite à la premiere colomne, disant : de 8 j'ôte 4 reste 4 que j'écris. Ensuite à la seconde colomne, je dis : de 5 ôtant 3, reste 2 que j'écris. Et à la troisiéme colomne ou rangée, je dis : de 4 ôtant 2, reste 2 que j'écris. Partant je trouve qu'aprés avoir retranché 234 de 458, il reste 224.

Autre Exemple.

de	4 2 6 0 3 l.	1 5 f.
ôtant	2 0 7 1	4
reste	4 0 5 3 2 l.	1 1 f.

Pour retrancher 2071 l. 4 f. de 42603 l. 15 f. aprés avoir rangé ces deux nombres l'un sur l'autre, il faut commencer par les sols vers la main droi-re, disant : de 5 ôtant 4, reste 1 que j'écris sous le 4. Ensuite aux dixaines de sols, je dis : de 1 ôtant rien, reste 1 que j'écris. Des sols il faut passer aux livres, disant : de 3 je retranche 1, reste 2, que j'écris. Ensuite au deuxiéme rang, je dis : de 0 retranchant 7, cela ne peut être ; sur le 6 qui precede j'emprunte une unité, laquelle étant transportée en la place du zero vaudra 10, & partant, je dirai : de 10 retranchant 7, il reste 3 que j'écris sous le 7. Ensuite au troisiéme rang, je dis : de 5 (parceque des 6 j'avois emprunté une unité, & pour m'en souvenir j'avois marqué un point dessus le 6) ôtant 0, reste 5 que j'écris. Au quatriéme rang, je dis : de 2 retranchant 2 reste rien, partant j'écris 0, parcequ'il ne faut point laisser de place vuide en pareille rencontre. Et au cinquiéme rang, je dis : de 4 retranchant rien, reste 4 que j'écris : partant je trouve qu'il reste 40532 l. 11 s.

de	4 2 6 0 3 l.	15 s.
ôtant	2 0 7 1	4
reste	4 0 5 3 2 l.	11 s.

AUTRE EXEMPLE.

Pour soustraire de 22046 l. 12 s. 6 d. le nombre de 16784 l. 18 s. 10 d. Il faut commencer par les deniers, disant : de 6 deniers je retranche 10, cela n'est pas possible, il faut emprunter sur les sols une unité valant douze deniers ; pour me souvenir de cet emprunt, je laisse un point sur le 2 qui est dans

de	2 2 0 4 6 l.	1 2 s.	6 d.
ôtez	1 6 7 8 4	1 8	1 0
reste.	5 2 6 1 l.	1 3 s.	8 d.

le rang des unitez de sols où j'ay emprunté, & je joins ces 12 deniers empruntez avec les 6 deniers, d'où on proposoit de retrancher 10, cela fait 18 deniers, dont retranchant 10, il reste 8 deniers, que j'écris sous le rang des deniers. Ensuite je passe aux unitez des sols, disant : de 1 je retranche 8, cela n'est pas possible, j'emprunte la dixaine qui le precede, sur laquelle je marque un point pour me souvenir de cet emprunt, & je dis : de 11 j'ôte 8 reste 3 que j'écris sous les unitez de sols. Ensuite aux dixaines de sols, je dis : de 0 j'ôte 1 (car la dixaine des 12 sols a été empruntée, au lieu de laquelle il n'y a plus rien) cela n'est pas possible, c'est pourquoy passant aux unitez de livres, j'emprunte sur le 6 une livre valant 20 sols, c'est à dire, deux dixaines de sols, & je dis: de deux dixaines de sols en ôtant une, reste 1, que j'écris à côté du 3 pour faire 13 sols.

Aprés cela je passe aux unitez de livres, & je dis : de 5 j'ôte 4 (car puisque des 6 on avoit emprunté 1 pour porter aux sols, il n'en reste plus que 5) reste 1 que j'écris. Ensuite au deuxiéme rang, je dis : de 4 j'ôte 8, cela n'est pas possible : partant je cherche si on peut emprunter des chifres precedens, je trouve que du zero precedent on ne peut rien emprunter ; qu'on ne peut pareillement rien emprunter du 2 qui precede le zero, parceque ce 2 lui-même n'est pas suffisant pour le 6 qui est au dessous, & je trouve qu'on peut emprunter du dernier 2 ; j'emprunte donc un, & pour m'en souvenir j'y marque un point. Cet 1 ainsi emprunté étant transporté sur le pénultiéme 2, vaut * 10 ; mais de ces 10 je reserve encore une unité ; partant au dessus

* *Demande 3e d'Arithmetique.*

du pénultiéme 2, je marque un point qui fait ſouvenir des 9 que j'y ay laiſſez. Or cette unité reſervée étant tranſportée au deſſus du zero, vaut dix en cette place ; mais de ces 10 je reſerve encore une unité : partant il ne reſtera que 9 au deſſus du zero, & cette unité ainſi reſervée étant miſe devant le 4, fera 10 : or en la joignant avec ce 4, cela fera 14 ; on dira donc de 14 ôtant 8, reſte 6 que j'écris ſous le deuxiéme rang.

Au troiſiéme rang, je dis : de 9, qu'on vient de tranſporter au deſſus du zero, ôtant 7, reſte 2 que j'écris ſous le troiſiéme rang.

Au quatriéme rang, je dis : neuf qu'on vient de tranſporter au deſſus du 2 étant joints avec ce 2, cela fait 11 ; or de 11 j'ôte 6 reſte 5 que j'écris ſous le quatriéme rang.

Enfin au cinquiéme rang, je dis : de 1 ôtant 1, reſte 0 (car on avoit emprunté une unité du 2, cela fait qu'il n'y a plus que 1) je n'écris rien, parceque les zeros ſont inutiles lorſqu'ils ne ſont point precedez d'aucun autre chifre : partant je trouve qu'il reſte 5261 l. 13 ſ. 8 d.

Obſervations ſur l'Addition & la Souſtraction.

Pour être certain ſi l'Addition eſt exacte, il faut retrancher du total ou de la ſomme de cette operation, chacune des ſommes qu'on a ajoutées ; s'il ne reſte rien, c'eſt une preuve manifeſte que l'operation eſt tres exacte : s'il reſte quelque choſe, il faut la recommencer.

On peut faire ce retranchement ou ſouſtraction, comme on le vient d'enſeigner, ou bien de cette maniere.

Soit par exemple l'addition de 62, 55, & 28 ; pour être aſſuré que 145 eſt veritablement le total qu'on cherche. Je retranche de 145 les dixaines de ces trois nombres pris ſeparément, & enſuite leurs unitez ; puiſqu'il n'y a dans ces trois nombres que des dixaines & & des unitez. Je commence par les dixaines, & je dis : 6 & 5 ſont 11 & 2 ſont 13 ; de 14 qui ſont au deſſous, j'ôte 13, reſte 1 que j'écris ſous le 4. Cet 1 avec le 5 ſuivant fera 15. Je paſſe aux unitez, & je dis : 2 & 5 ſont 7 & 8 ſont 15, de 15 que je trouve au deſſous, j'ôte 15, qui eſt la ſomme des unitez, reſte 0. Et partant on a bien réüſſi, parceque s'il reſtoit quelque choſe, on auroit mal compté, & il faudroit recommencer l'operation.

	6	2
	5	5
	2	8
ſomme	1 4	5
preuve	1	0

Soit par exemple une autre ſomme 521 l. 13 ſ. 6 d. on ſouhaite ſçavoir ſi c'eſt veritablement & ſans erreur la ſomme ou total des trois nombres 253 l. 12. ſ. 4 d. &c. on retranchera de ce total 521 l. 13 ſ. 6 d. ce qui ſe rencontre ſeparément dans ces trois nombres ; ſçavoir, des centaines, des dixaines, & des unitez de livres, & enſuite des dixaines & unitez de ſols, & enfin des unitez de deniers ; on feroit la même choſe s'il y avoit des milles, &c. On commencera par les centaines, diſant : 2 & 1 ſont 3 ; de 5 qui eſt au deſſous, ôtez 3, reſte 2 qu'on écrira au deſſous de

	2 5 3 l.	1 2 ſ.	4 d.
	1 9 2	1 3	6
	7 5	7	8
ſomme	5 2 1 l.	1 3 ſ.	6 d.
preuve	2 1 1	1 1	0

5, & ce 2 fera avec le 2 qui eſt enſuite du 5, 22; & on paſſera aux dixaines, diſant : 5 & 9 ſont 14 & 7 ſont 21; de 22 qui ſont au deſſous, j'ôte

	253 l.	12 ſ.	4 d.
	192	13	6
	75	7	8
ſomme	521 l.	13 ſ.	6 d.
preuve	111	11	0

21, reſte 1 qu'on écrira ſous le 2; ce qui avec le 1 ſuivant fera 11. On paſſera aux unitez, diſant : 3 & 2 ſont 5 & 5 ſont 10, de 11 qui ſont au deſſous, ôtez 10 reſte 1 qu'on écrira ſous le 1: or cette derniere unité qui reſte, eſt une livre qui vaut deux dixaines de ſols, & en y joignant la dixaine des 13 ſols du total, cela fait 3 dixaines, dont retranchant 2 dixaines qui ſe trouvent dans la colomne des ſols, reſte 1 qu'on écrit ſous la dixaine des 13 ſ. ce qui fera encore avec le 3, 13 ſ. On paſſera aux unitez de ſols, diſant : 2 & 3 ſont 5 & 7 ſont 12; de 13 qui ſont au deſſous, ôtez 12 reſte 1 ſ. Or ce ſol qui reſte, joint avec les 6 deniers qui ſont au deſſous des deniers, fait 1 ſ. 6 d. qui étant retranchez de 1 ſ. 6 d. qui ſe trouvent dans les deniers, il ne reſte rien : ce qui fait voir * qu'on a bien réüſſi; parce que s'il reſtoit quelque choſe, on ſeroit dans l'erreur, & il faudroit recommencer entierement la ſupputation. On fera de même à l'égard des autres exemples.

La preuve de la ſouſtraction ſera faite en ajoutant le reſte ou reſidu, avec le nombre qui a été retranché; & ſi l'operation eſt exacte, la

* Ax. 1. *d'Arithmetique.*

ſomme de ces deux nombres doit * être égale au nombre dont on a retranché ; ſi cela n'arrive pas, l'operation n'eſt pas exacte, partant il faut la recommencer. Car la ſomme de la grandeur retranchée & de la grandeur reſtante, doit neceſſairement être égale à la grandeur dont on a fait le retranchement, puiſque les parties priſes enſemble ſont égales au Tout dont elles ſont parties. Donc pour être aſſuré qu'en retranchant de 1600, ce nombre 620, le reſte eſt 980, c'eſt à dire, que 620 & 980 ſont les parties du Tout 1600, j'ajoute ces deux ſommes 620 & 980, & ſi elles font 1600, je conclus qu'elles ſont veritablement les parties de 1600, & par conſequent que mon operation eſt bien faite. On ſuivra la même methode dans les autres exemples.

de	1 6 0 0
ôtant	6 2 0
reſidu ou reſte	9 8 0
preuve	1 6 0 0

DE LA MULTIPLICATION DES NOMBRES.

DEFINITIONS.

1. LA Multiplication eſt une addition abregée, par laquelle on ajoute un nombre autant de fois à lui-même, qu'il y a d'unitez dans un autre nombre. Par exemple, multiplier 6 par 3,

* Ax. 2. d'Arithmetique.

c'eſt ajouter le nombre 6 à lui-même autant de fois qu'il y a d'unitez en 3, c'eſt à dire, 3 fois pour avoir 18, qui eſt le nombre qu'on cherche.

2. Le nombre cherché par la Multiplication, qui exprime le total ou la ſomme de l'addition d'un autre nombre ajouté à lui-même autant de fois qu'il y a d'unitez dans un troiſiéme, eſt appellé *Produit de la Multiplication* ; par exemple, 24 eſt le produit de 3 multiplié par 8.

3. Les deux nombres dont un eſt ajoûté à lui-même autant de fois qu'il y a d'unitez dans l'autre, ſont appellez *Racines du Produit de la Multiplication* ; par exemple 5 & 7 ſont les racines de 35, parceque 5 multiplié par 7, fait 35.

COROLLAIRE.

En multipliant un nombre par l'autre, indifferemment, c'eſt à dire, le premier par le ſecond, ou le ſecond par le premier ; il en reſulte toûjours le même produit. Cela eſt ſi évident, que ce ſeroit embroüiller & obſcurcir cette verité, que dela vouloir demontrer ; par exemple, 2 fois 3 eſt la même choſe que 3 fois 2, ſçavoir 6 : ſi on dit 8 fois 5, ou 5 fois 8, on trouvera toûjours 40 pour produit. Puiſque cela eſt ainſi, il ſuit des definitions qu'on vient d'expoſer, que le produit de la Multiplication contient autant de fois une de ſes racines, que l'autre racine contient de fois l'unité. Car, comme on vient de dire, ce produit n'eſt rien autre choſe qu'une des racines ajoûtée à elle-même autant de fois qu'il y a d'unitez dans l'autre racine. Par exemple le nombre 54, qui eſt le produit de 9 multiplié par 6, contient autant de fois 9, que 6 contient de fois 1 ; pareillement le même nombre 54 contient autant de fois 6, que 9 contient de fois 1. Ce Corollaire mérite qu'on y fasse attention, parce-qu'on en tirera plusieurs avantages.

Pour trouver le nombre qu'on cherche par la multiplication, il faut placer les deux nombres à multiplier l'un sur l'autre de la même maniere que dans les operations precedentes. Les exemples qu'on verra dans la suite, feront mieux connoître comment il faut faire la multiplication, que tous les preceptes qu'on en pourroit donner par avance.

EXEMPLE.

Pour multiplier 247 par 3, c'est à dire, pour trouver un nombre égal à 247 repeté 3 fois, ou à 247 fois 3, qui est la même chose; après les avoir disposez, comme il a été enseigné,	247 3 ——— 741

il faut commencer vers la main droite, disant 3 fois 7, ou 7 fois 3, qui est la même chose, sont 21 : j'écris 1 sous le premier chifre 3, & je retiens dans ma memoire 2 dixaines pour le rang suivant; je dis ensuite, 3 fois 4 sont 12, & 2 que j'avois retenus sont 14, j'écris 4 & je retiens 1; enfin je dis, 3 fois 2 sont 6 & 1 que j'avois retenu, sont 7 que j'écris : partant je trouve que le produit de cette multiplication est 741.

AUTRE EXEMPLE.

Pour multiplier 275 par 24, c'est à dire, pour trouver quelle somme produit 24 fois 275; il faut dire 4 fois 5 sont 20, & écrire 0 sous le 4 & retenir 2 dixaines. Ensuite 4 fois 7, ou 7 fois 4 sont 28, &	275 24 ——— 1100 550 ——— *produit* 6600

2 que j'avois retenus ſont 30, j'écris 0 & je retiens 3 dixaines. 4 fois 2 ſont 8, & 3 que j'avois retenus, ſont 11, j'écris 1 ſous le 2 multiplié, & j'avance 1 dixaine, parceque c'eſt tout.

Enſuite il faut multiplier 275 par les 2 dixaines de 24 en cette ſorte ; 2 fois 5 ſont 10, j'écris 0 ſous les dixaines de 24, & je retiens 1 ; enſuite 2 fois 7 ſont 14, & 1 que j'avois retenu, ſont 15, j'écris 5 & je retiens 1 ; 2 fois 2 ſont 4 & 1 que j'avois retenu ſont 5, j'écris 5. Ces deux produits partiaux ainſi arrangez étant par l'addition reduits en une ſomme, on trouve que le produit total eſt 6600, qu'on cherchoit.

OBSERVATION I.

Lorſqu'il faut multiplier un nombre par des livres, ſols ou deniers, on commence toûjours par les moindres eſpeces de monnoye. Or pour multiplier par les deniers & avoir dans la même operation un produit reduit en ſols, ſelon les deniers qui ſe rencontrent depuis 1 juſqu'à onze, il faut prendre de la ſomme qu'on veut multiplier, ces parties ; ſçavoir,

Lorſqu'il y a 1 denier, pour avoir en ſols la valeur du produit, on prendra une douziéme partie du nombre propoſé, parcequ'un denier eſt une 12e partie d'un ſol.

A 2 deniers, on prendra une ſixiéme partie, parceque 2 deniers ſont la ſixiéme partie d'un ſol.

A 3 deniers, on prendra un quart, parceque 3 deniers ſont le quart d'un ſol.

A 4 deniers, on prendra une tierce partie, parceque 4 deniers ſont le tiers d'un ſol.

A 5 deniers, on prendra un quart & une ſixiéme partie, parceque 5 deniers ſont compoſez de 3 deniers & de 2 deniers.

A 6 d. on prendra la moitié du nombre proposé, parceque 6 d. ſont la moitié d'un ſol.

A 7 d. on prendra le tiers, & enſuite le quart, parceque 7 d. ſont compoſez de 4 d. & de 3 d.

A 8 deniers, il faut prendre les deux tiers l'un aprés l'autre, parceque 8 deniers ſont compoſez de deux fois 4 deniers.

A 9 deniers, il faut prendre une moitié & enſuite le quart, parceque 9 deniers ſont compoſez de 6 deniers & de 3 d.

A 10 deniers, il faut prendre une moitié & un tiers, parceque 10 deniers ſont compoſez de 6 deniers & de 4 deniers.

A 11 deniers, il faut prendre 2 fois le tiers, & une fois le quart, pour avoir en ſols la valeur du produit des deniers, parceque 11 deniers ſont compoſez de deux fois 4 & de 1 fois 3.

Les exemples ſuivans rendront l'intelligence & l'application de ces choſes claires & faciles, pour peu d'attention qu'on y faſſe.

OBSERVATION II.

Lorſqu'on prend quelque moitié, tiers, ou quart, &c. d'un nombre, il faut toûjours commencer vers la main gauche, afin que s'il reſte quelques unitez à chaque chifre, elles ſoient jointes au ſuivant en qualité de dixaines.

OBSERVATION III.

Lorſqu'on veut reduire en livres un nombre de ſols, par exemple pour reduire en livres 428 ſols; il faut ſeparer le dernier chifre 8, & prendre la moitié des autres, diſant : la moitié de 4 eſt 2 qu'il faut écrire, la moitié de 2 eſt 1 qu'il faut auſſi écrire, & le chifre 8 qu'on avoit ſeparé ſignifie 8 ſols; partant 428 ſols font 21 livres 8 ſols.

4 2	8 ſ.
2 1 liv.	8 ſ.

Pour reduire en livres 12196 ſ. après avoir ſeparé le dernier chifre 6, on prend la moitié des autres : on ne dira pas la moitié de 1, mais on dira la moitié de 12 eſt 6 qu'il faut écrire. On ne dit point la moitié de 1 ; c'eſt pour cela qu'on écrit 0 au deſſous, parcequ'il ne faut pas laiſſer de place vuide en pareille rencontre ; mais cet 1 vaut 10 à l'égard du 9 ſuivant, & y joignant ce 9, cela fera 19 ; on dira la moitié de 19 eſt 9 reſte 1, il faut écrire 9 ſous le 9, & 1 qui reſte eſt une dixaine qu'il faut écrire devant le 6 pour ſignifier 16 ſ. partant 12196 ſols font 609 livres 16 ſols.

1219	6 ſ.
609 l.	16 ſ.

EXEMPLE.

Si on veut connoître quelle ſomme produiſent 48 Muids de vin à raiſon de 35 livres 12 ſols chaque Muid, c'eſt chercher quelle ſomme produiſent 48 fois 35 livres 12 ſols.

Il faut commencer par les ſols, diſant : 2 fois 8 ſont 16 ; partant j'écris 6 ſous le 5 & je retiens 1 : 2 fois 4 ſont 8, & un que j'avois retenu ſont 9 ; j'écris 9. Enſuite je multiplie par la dixaine des 12 ſols, diſant : 1 fois 8 ſont 8, j'écris 8 ſous le 9, au rang des dixaines ; 1 fois 4 ſont 4, j'écris 4. Aprés avoir additionné ou aſſemblé ces deux produits de ſols ainſi arrangez, je trouve que le produit total des 48 fois 12 ſols

	48	*muids*	
a . .	35	l.	12 ſ.
			96 ſ.
			48
			57 | 6 ſ.
	28	l.	16 ſ.
	240		
	144		
	1708	l.	16 ſ.

eſt 576 ſ. je reduits ces 576 ſ. en livres, comme il a été enſeigné; je trouve pour leur valeur 28 l. 16 ſ. que j'écris au deſſous.

Enſuite je multiplie par les livres, diſant : 8 fois 5, ou 5 fois 8 ſont 40, j'écris 0 ſous le 8 des livres provenuës des ſols, & je retiens 4 : 4 fois 5 ſont 20, & 4 que j'avois retenus ſont 24; j'écris 4 & j'avance 2. Je multiplie enſuite par les dixaines de 35, diſant : 3 fois 8 ſont 24; j'écris 4 au rang des dixaines ſous le produit precedent & je retiens 2 : trois fois 4 ſont 12, & 2 que j'avois retenus ſont 14; j'écris 4 & j'avance 1. Après avoir additionné ces trois produits, je trouve 1708 l. 16 ſ. pour la valeur totale des 48 Muids de vin.

AUTRE EXEMPLE.

	2008 *aunes.*	
	à ... 207 l. 10 ſ. 6 d.	
	1004 ſ.	
	20080	
	2108	4 ſ.
	1054 l.	4 ſ.
	14056	
	40160	
produit	416710 l.	4 ſ.

On demande quelle ſomme d'argent doivent coûter 2008 aunes de marchandiſe à raiſon de 207 l. 10 ſ. 6 d. je commence par les deniers, & à cauſe des 6 deniers, je prends la moitié de 2008, en cette ſorte commençant vers la main

	2008 *aunes.*	
	a... 207 l. 10 ſ. 6 d.	
	10.04 ſ.	
	20080	
	2108 | 4 ſ.	
	1054 l.	4 ſ.
	14056	
	40160	
produit	416710 l.	4 ſ.

gauche, diſant: la moitié de 2 eſt 1, que j'écris ſous le 2 ; la moitié de 0 eſt 0 que j'écris enſuite ; la moitié de 0 eſt 0, que j'écris pareillement ; enfin la moitié de 8 eſt 4, que j'écris ſous le 8. Partant je trouve que 2008 fois 6 deniers produiſent 1004 ſols.

Je multiplie enſuite par les ſols ; mais parceque les 0 ne multiplient point ou ne produiſent rien, pour le zero des 10 ſols, j'écris 0 ſous le 4 du produit des deniers. Enſuite je multiplie par la dixaine des 10 ſols, diſant : 1 fois 8 ſont 8, j'écris 8 au rang des dixaines : 1 fois 0 eſt 0, j'écris 0 : 1 fois 0 eſt 0 ; j'écris 0 : 1 fois 2 ſont 2, j'écris 2. J'aſſemble après cela ces deux produits, dont je trouve que la ſomme eſt 21084 ſols, que je reduis en livres, comme il a été enſeigné, & je trouve pour leur valeur 1054 l. 4 ſ.

Enſuite je multiplie par les unitez de livres, diſant: 7 fois 8 ſont 56; j'écris 6 & je retiens 5: 7 fois 0 n'eſt rien, mais 5 que j'avois retenus, ſont 5; j'écris 5 : 7 fois 0 eſt 0 ; j'écris 0 : 7 fois 2 ou 2 fois 7 ſont 14 ; j'écris 4 & j'avance 1. Enſuite parceque les zeros ne produiſent rien, pour le 0 qui precede le 7 des 207 ; j'écris 0 au rang des dixaines ſous le 5 du produit precedent, & je multiplie par les 2 centaines, diſant: 2 fois 8 ſont 16; j'écris 6 au rang des centaines, & je retiens 1: 2 fois 0 ſont 0, mais 1 que j'avois retenu eſt 1 ; j'écris 1 ſous le 4: 2 fois 0 ſont 0 ; j'écris 0 : enfin 2 fois 2 ſont 4; j'écris 4. Aprés avoir aſſemblé ces trois produits ainſi arrangez, je trouve que les 2008 aunes de marchandiſes couteront 416710 l. 4. ſ.

Autre Exemple.

147			
a.. 253	l.	14 ſ.	9 d.
73		ſ.	6 d.
36			9
588			
147			
216		8 ſ.	3 d.
108	l.	8 ſ.	3 d.
441			
735			
294			
37299	l.	8 ſ.	3 d.

On demande quelle ſomme il faut pour payer 147 arpens, ou acres de terre, à raiſon de 253 l. 14 ſ. 9 d. chacun. Je commence par les deniers ; je prens pour 9 d. une moitié, & enſuite un quart de 147, l'un après l'autre, comme il a été enſeigné. On ne prend pas la moitié de 1, parceque 2 n'eſt pas en 1, mais on joint cet 1 avec le 4 ſuivant, & on dit, la moitié de 14 eſt 7, qu'il faut écrire ſous le 4 : la moitié de 7 eſt 3, reſte 1 ; il faut écrire 3 ſous le 7, & cet 1 qui reſte eſt une moitié de ſol valant 6 d. j'écris 6 d. Enſuite je prens le quart, commençant toûjours vers la main gauche; je trouve qu'il ne faut point chercher en 1 combien de fois 4, mais je joins cet 1 avec le 4 ſuivant, & je dis : en 14 combien de fois 4, c'eſt à dire, le quart de 14 eſt 3, reſte 2, j'écris 3 ſous le 4, & les 2 qui reſtent étant comparez avec le 7 qui ſuit, valent 2 dixaines; partant je dis : le quart de 27 eſt 6, reſte 3, j'écris 6; mais ces 3 qui reſtent ſont 3 quarts de ſol valants 9 d. j'écris 9 d.

147			
a..253	l. 14	ſ. 9	d.
73		ſ. 6	d.
36		9	
588			
147			
216		8 ſ. 3	d.
108	l. 8	ſ. 3	d.
441			
735			
294			
37299	l. 8	ſ. 3	d.

Après cela je multiplie par les ſols, diſant : 4 fois 7 ſont 28; j'écris 8 & je retiens 2 : 4 fois 4 ſont 16 & 2 retenus ſont 18, j'écris 8 & je retiens 1; 4 fois 1 ſont 4, & 1 que j'ay retenu ſont 5, j'écris 5. Je multiplie par la dixaine des ſols, diſant: 1 fois 7 ſont 7; j'écris 7 au rang des dixaines : 1 fois 4 ſont 4; j'écris 4 : 1 fois 1 eſt 1; j'écris 1. Aprés avoir aſſemblé ces produits, tant des deniers que des ſols, je trouve que leur produit total eſt 2168 ſ. 3 d. dont la valeur en livres eſt 108 l. 8 ſ. 3 d. que j'écris au deſſous.

Enfin je multiplie par les livres, diſant : 3 fois 7 ſont 21 l. j'écris 1 l. ſous le 8 du produit des sols, & je retiens 2 : 3 fois 4 sont 12, & 2 que j'avois retenus sont 14 ; j'écris 4 & je retiens 1 : 3 fois 1, ou une fois 3 sont 3, & 1 que j'avois retenu, sont 4; j'écris 4. Ensuite je dis: 5 fois 7 sont 35; j'écris 5 sous le 4 au rang des dixaines, & je retiens 3 : 4 fois 5, ou 5 fois 4 sont 20, & trois que j'avois retenus, sont 23 ; j'écris 3 & je retiens 2 : 1 fois 5 sont 5, & 2 que j'avois retenu sont 7 ; j'écris 7. Enfin je multiplie par les centaines, disant : 2 fois 7 sont 14 ; j'écris 4 au rang des centaines, & je retiens 1 : 2 fois 4 sont 8, & 1 que j'avois retenu, sont 9; j'écris 9: 2 fois 1, ou une fois 2 sont 2; j'écris 2. Après avoir assemblé, comme il a été enseigné dans l'addition, ces 4 produits ainsi arrangez, on trouvera que pour payer les 147 arpents de terre, il faut la somme de 37299 livres 8 sols 3 deniers.

AVERTISSEMENT.

Pour reduire un nombre de livres en sols, il faut multiplier ce nombre par 20 sols, puisque chaque livre vaut 20 sols ; le produit de cette multiplication donnera en sols la valeur des livres : par exemple pour reduire 12 livres en sols, on multipliera 12 par 20, parceque 12 l. font 12 fois 20 sols.

Pour reduire un nombre de sols en deniers, il faut multiplier ce nombre par 12, puisque chaque sol vaut 12 deniers ; le produit de cette multiplication donnera la valeur des sols en deniers: par exemple pour reduire 15 sols en deniers, on multiplie 15 par 12, parceque 15 sols sont 15 fois 12 deniers.

DE LA DIVISION DES NOMBRES.

DEFINITIONS.

1. LA Division est une operation par laquelle on partage un nombre en autant de parties égales, qu'il y a d'unitez dans un autre.

2. Le nombre qui exprime une de ces parties égales, est appellé *Quotient.*

3. Le nombre qu'on veut partager, est appellé *Nombre à diviser.*

4. Le nombre qui exprime en combien de parties on veut diviser l'autre, est appellé *Diviseur.*

Pour diviser un nombre par un autre, on cherche combien de fois le Diviseur est contenu dans le nombre à diviser; le nombre qui exprimera combien de fois l'un sera contenu dans l'autre, sera le veritable Quotient de la division: ce qu'on fera voir évidemment dans le premier des Corollaires qui suivront après qu'on aura exposé la maniere de faire cette operation.

Il faut écrire le nombre à diviser, ensuite mener une ligne, écrire le diviseur dessous, commençant de gauche à droit, & au bout de la ligne qu'on vient de mener, on écrira le quotient, comme on verra dans la suite.

EXEMPLE.

Pour diviser 128 par 4, c'est à dire, pour trouver quel eſt le quart de 128, ou en 128 combien de fois 4: aprés avoir écrit le nombre 128 & avoir mené la ligne au deſſous, je ne peux pas écrire le diviſeur 4 au deſſous de 1, parceque 4 ne ſont pas contenus en 1, mais je l'écris ſous le 2, & je cherche en 12 combien de fois 4, il y eſt 3 fois, j'écris 3 en un lieu particulier où je veux placer le quotient. Enſuite je multiplie ce 3 du quotient par le diviſeur 4, ce qui fait 12 : or ces 12 étant retranchez de 12, qui ſont les deux premiers chifres du nombre à diviſer, il ne reſte rien. Partant j'écris o au deſſus du 2, & je retranche le diviſeur 4 & les deux premiers chifres 12 du nombre à diviſer. Enſuite j'avance le diviſeur 4 ſous 8, & je dis en 8 combien de fois 4? je trouve que 4 y ſont 2 fois; j'écris 2 au quotient. Enſuite je multiplie le diviſeur 4 par ce 2, ce qui produit 8. Or retranchant ce produit 8 du chifre 8 du nombre à diviſer, il ne reſte rien : partant j'écris o au deſſus de 8 avec une petite ſeparation, & je tranche le 4 & le 8. Cela fait, je trouve 32 pour quotient de cette diviſion; c'eſt à dire que 32 eſt une quatriéme partie de 128, ou que 32 eſt 4 fois en 128, ou enfin que 128 contient autant de fois 4 que 32 contient de fois l'unité.

	o (o	
nomb. à diviſer	~~1~~ ~~2~~ ~~8~~	32 *quot.*
diviſeur	~~4~~ ~~4~~	

AUTRE EXEMPLE.

Pour diviſer 804 en 5 parties égales; aprés avoir écrit le diviſeur 5 ſous le 8, premier chifre du nombre à diviſer, vers la main gauche; je dis en 8 combien y a t-il de fois 5? il y eſt une

$$\begin{array}{rccccl} & \cancel{3} & \cancel{0} & (4 & & \textit{reste} \\ \textit{nombre à diviser} & \cancel{8} & \cancel{0} & \cancel{4} & \multirow{2}{*}{$\Bigg\{$} & \\ \cline{2-4} & & & & & 1\ 6\ 0\ \textit{quotient.} \\ \textit{diviseur} & \cancel{5} & \cancel{5} & \cancel{5} & & \end{array}$$

fois, j'écris 1 au quotient. Ensuite (multipliant ce que je viens d'écrire au quotient par le diviseur) je dis 1 fois 5 font 5. Or 5 étant retranchez de 8, il reste 3 que j'écris sur 8 après avoir tranché le 8 & le 5 avec une petite ligne pour marquer que l'operation est finie à leur égard. Je r'écris le diviseur 5 sous le 0 du nombre à diviser, & considerant le 3 que je viens de trouver de reste sur le chifre 8, devant le 0 du nombre à diviser, cela fait 30; je cherche en 30 combien de fois le nombre 5? je l'y trouve 6 fois que j'écris au quotient, & je multiplie ce 6 du quotient par le diviseur 5, cela fait 30. Or ce nombre 30 étant retranché du premier nombre 30, il ne reste rien; partant (ayant tranché le diviseur 5 & le premier nombre 30) j'écris 0 au dessus de 0. Enfin considerant ce dernier 0 comme placé devant le 4 du nombre à diviser, cela ne fait que 4; je cherche en 4 combien de fois 5? ce nombre 5 n'y étant point contenu, j'écris au quotient 0, & je dis 5 fois 0 produisent 0, lequel 0 ou rien étant retranché de 4, il reste 4 que je separe avec une petite ligne d'avec les autres chifres tranchez. Ainsi je trouve pour quotient de cette division 160 & 4 qui restent, c'est à dire que 160 est une 5e partie de 804, excepté 4: ou bien que le nombre 5 est contenu 160 fois dans 804 moins 4. Ce nombre 4 reste encore à diviser.

Autre Exemple.

Lorsque le nombre diviseur est exprimé par plusieurs chifres, il est un peu plus difficile d'apprendre cette operation que les autres ; c'est pour cela qu'il faut s'y appliquer un peu davantage, & s'y exercer frequemment par plusieurs exemples ; après cela on y trouvera la même facilité que dans les autres.

(0
~~1~~ ~~8~~ (9
~~9~~ ~~3~~ ~~4~~
——— } 37
~~2~~ ~~5~~ ~~5~~
~~2~~

Pour diviser 934 par 25, après avoir écrit 25 sous 93, il faut chercher en son esprit combien de fois 2 se rencontrent en 9. On trouve veritablement 4 fois 2 en 9 ; mais il ne faut écrire au quotient que 3 fois (souvent on met au quotient moins qu'on ne trouve veritablement, à cause de quelques dixaines qui reparent cela dans l'operation, ce qu'on connoîtra facilement dans la suite, & par l'usage). Or multipliant ce 3 du quotient par 5 du diviseur, cela fait 15, j'imagine des dixaines préposées au 3 qui est sur le 5, autant qu'il est necessaire pour former un nombre dans lequel 15 soit contenu. Dans cette occasion ici, il faut imaginer que le 3 qui est sur le 5 soit precedé de 2 dixaines, cela fera 23 ; & dire, si de 23 on retranche le nombre 15, dont on vient de parler, il reste 8 que j'écris dessus le 3, & je retiens les 2 dixaines que j'avois imaginées, & je tranche le 3 & le 5 de dessous. Ensuite je multiplie le 2 de dessous le 9 par le 3 que j'ay écrit au quotient, cela fait 6 avec les 2 dixaines que je viens de retenir, cela fait 8. Or ces 8 étant retranchez de 9, il reste 1 que j'écris sur le 9, & je tranche le 9 & le 2 de dessous.

Ensuite je r'écris le diviseur 25 : de sorte que le 5 suive le 5 precedent & soit sous le 4, & le 2 sous le 5 precedent. Et je cherche en 18 combien de fois est contenu le 2 qui est en bas sous la colomne du 8. Je trouve qu'il y est contenu 9 fois ; mais (parceque j'aurai dans un moment occasion de retenir quelques dixaines qui contribueront à suppléer le reste) j'écrirai au quotient seulement 7. Or disant 5 fois 7 sont 35 (imaginant 4 preposez au 4 de dessus) ces 35 étant retranchez de 44, il reste 9 que j'écris sur le 4, & je retiens ces 4 dixaines. Ensuite je multiplie encore le 7 du quotient par le 2 qui est sous le 5, cela fait 14, auquel nombre joignant les 4 dixaines que je viens de retenir, cela fait 18. Or ces 18 étant retranchez des 18 qui sont au dessus de 93, il ne reste rien. Partant j'écris o sur le 8 ; & parcequ'il n'y a plus de chifre du nombre à diviser sous lequel je puisse avancer ou r'écrire le diviseur 25, je separe avec une petite ligne le o & le 9 que je viens d'écrire, pour marquer que c'est ce qui reste à diviser par 25. Enfin je trouve que le quotient de cette division est 37, reste 9.

(o
~~1~~ ~~8~~ (9
~~9~~ ~~3~~ ~~4~~ { 37
~~2~~ ~~5~~ ~~5~~
~~2~~

Autre Exemple.

Pour diviser 1580894 par 509, à cause que le diviseur 509 n'est point contenu dans 158 qui sont les 3 premiers chifres du nombre à diviser, j'écris le premier chifre 5 du diviseur sous le 5 deuxiéme chifre du nombre à diviser, & le reste de suite. Cela fait, je cherche en 15 combien 5 sont contenus de fois, j'y trouve ce nombre 5 trois fois, j'écris 3 au quotient, que je multiplie par le 9 dernier chifre

0 5 3
~~1~~ ~~5~~ ~~8~~ ~~0~~ 8 9 4 { 3
~~5~~ ~~0~~ ~~9~~

chifre du diviſeur ; cela fait 27 (en imaginant 3 dixaines apposées devant le o de deſſus le 9, cela ſera 30.) Or 27 produit du quotient & de ce 9 du diviſeur étant retranchez de ces 30 imaginez dans le nombre à diviſer, il reſte 3. Partant j'écris 3 au deſſus du o, & je retiens les 3 dixaines que j'avois imaginées, & je tranche le 9 & le o de deſſus. Enſuite je multiplie ce 3 du quotient par le o du diviſeur ; cela ne produit que o ou rien, auquel j'ajoûte ces 3 dixaines que je viens de retenir, cela fait 3 que je retranche du 8 du nombre à diviſer, il reſte 5 que j'écris au deſſus de ce 8, & je tranche le o & le 8, qui ſont l'un ſur l'autre. Enſuite je multiplie ce même 3 du quotient par le 5 du diviſeur, cela fait 15. Or ces 15 étant retranchez de 15 qui ſont le commencement du nombre à diviſer, il reſte o. Partant j'écris o ſur le 5.

Aprés cela je r'écris le diviſeur en plaçant ſon dernier chifre 9 ſous le 8 du nombre à diviſer après le 9 precedent, & le reſte des autres chifres de ſuite vers la main gauche. Le o qui eſt ſur le 5, & le 5 qui eſt ſur le 8 ne formant que le nombre de 5, je cherche en 5 combien il y a de fois 5, je trouve que ce nombre 5 eſt ſeulement contenu une fois en 5, j'écris 1 au quotient. Je multiplie cet 1 par 9 qui eſt le dernier chifre du diviſeur, cela ne produit que 9. Or ce 9 ne peut être retranché du 8 qui eſt deſſus ; mais en imaginant 1 dixaine prepoſée à ce 8, cela fera 18, dont 9 étant retranchez, il reſte 9 que j'écris ſur le 8, je tranche ce 9 & ce 8, & je retiens cette dixaine imaginée. En-

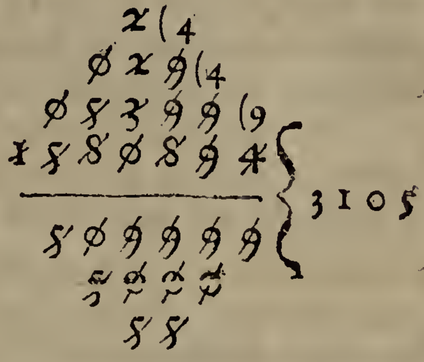
$$\begin{array}{lllllll} & & 0 & 2 & & & \\ & \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{3} & 9 & & \\ \cancel{1} & \cancel{5} & \cancel{8} & \cancel{0} & \cancel{8} & 9 & 4 \\ \hline & \cancel{5} & \cancel{0} & \cancel{9} & \cancel{9} & & \\ & & \cancel{5} & \cancel{0} & & & \end{array} \Bigg\} \, 3\,1$$

ſuite je multiplie cet 1 du quotient par o du diviſeur, cela produit o, y ajoutant cette dixaine que je viens de retenir, cela fait 1 qui étant retranché du 3 qui eſt ſur le o, reſte 2 que j'écris ſur ce 3. Je multiplie le 1 du quotient par 5 dernier chifre du diviſeur, cela ne fait que 5 (parceque l'unité ne multiplie jamais) qui étant retranché du 5 qui eſt deſſus le 8, il ne reſte rien; j'écris o ſur le 5 & je tranche le 5 du diviſeur, & le 5 & le o qui ſont ſur le 8 & le 5 du nombre à diviſer.

J'écris une troiſiéme fois le diviſeur ſous le nombre à diviſer : de ſorte que ſon dernier chifre 9 ſoit ſous le 9, & enſuite ſes autres chifres ſous les autres de droit à gauche; & je dis : le o qui eſt au deſſus du 5 & le 2 qui eſt enſuite au deſſus du 3 ne font que 2 : or en 2 combien de fois 5 ? il n'y eſt point, & partant j'écris o au quotient. Enſuite je multiplie le 9 du diviſeur par le o du quotient, & je dis : 9 fois o c'eſt o, de 9 qui eſt au deſſus ôtant o, reſte 9 que j'écris au deſſus du 9 & je tranche les deux 9 precedens. Après cela, o multiplié par o produit o, de 9 qui eſt au deſſus du 8, ôtant o, reſte 9, que j'écris au deſſus du dernier 8 precedent, que je tranche avec le o du diviſeur. Je dis encore : 5 fois o c'eſt o, de 2 qui eſt au deſſus du 3 ôtant o, reſte 2, que j'écris au deſſus du 2, & je tranche le 2 precedent & le 5 du diviſeur.

			2				
		$\cancel{0}$	$\cancel{2}$	9			
	$\cancel{0}$	$\cancel{5}$	$\cancel{3}$	$\cancel{9}$	9		
$\cancel{1}$	$\cancel{5}$	$\cancel{8}$	$\cancel{0}$	$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	4	31o
	$\cancel{5}$	$\cancel{0}$	$\cancel{9}$	$\cancel{9}$	$\cancel{9}$		
		$\cancel{5}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$			
			$\cancel{5}$				

Enfin je r'écris le diviſeur, de ſorte que ſon dernier chifre 9 soit sous le 4 du nombre à diviser, ensuite des autres derniers chifres du même diviseur, & que les autres chifres de ce même diviseur soient sous les autres immédiatement suivans vers la main gauche. Je cherche en 29 combien il y a de fois 5, je trouve que ce nombre y est 5 fois, j'écris 5 au quotient. Par



ce nombre 5 du quotient je multiplie 9, dernier chifre du diviseur, ce qui produit 45; j'imagine autant de dixaines préposées au 4 qui est sur ce 9, qu'il est necessaire pour que 45 y soient contenus; je dis: 45 étant retranchez de 54, il reste 9 que j'écris sur le 4, je retiens 5, je tranche le 9 & le 4 qui est au dessus. Ensuite je multiplie 5 par 0, cela produit 0 auquel ajoutant 5 que je viens de retenir, cela fait 5 qui étant retranchez du 9, qui est sur le 9, il reste 4 que j'écris sur le 9, & je tranche ce 9 & le 0 du diviseur. Je multiplie le nombre 5 du quotient par le nombre 5 du diviseur, cela fait 25, lequel nombre étant retranché de 29, il reste 4 que j'écris sur le 9 après avoir tranché les 29 & le 5 du diviseur; cela fait je separe avec une ligne ce reste 449. Partant je trouve que le quotient de cette division est 3105, & qu'il reste 449.

AVERTISSEMENT.

1. Lorsqu'il arrive que le produit du chifre du quotient & du dernier chifre du diviseur vers la

main gauche ſeul, ou joint avec quelques dixaines, ſi on en avoit retenu, forme un nombre plus grand que celui qui eſt au deſſus du diviſeur, dont on voudroit retrancher ce produit ; c'eſt une marque que le chifre écrit au quotient exprime un nombre de fois trop grand. Partant il convient le diminuer de quelque unité.

2. Au contraire, après avoir multiplié le chifre du quotient par le diviſeur, comme il a été enſeigné, s'il arrive que ce qui reſte au deſſus du diviſeur ou avant qu'on l'ait r'écrit, ou lorſqu'il eſt en ſa derniere place, eſt plus grand que le même diviſeur ; c'eſt une marque que le chifre écrit au quotient n'exprime pas un nombre aſſez grand : partant qu'il faut augmenter ce nombre de quelque unité.

3. A chaque poſition ou promotion du diviſeur, on ne doit jamais poſer au quotient aucun chifre qui exprime un nombre plus grand que 9.

4. Lorſqu'on ſe contente d'indiquer une multiplication de deux ou pluſieurs grandeurs, on interpoſe ce ſigne $\times$; par exemple $2 \times 3 = 6$. Cela ſignifie 2 multipliez par 3 produiſent une grandeur égale à 6.

5. Lorſqu'on veut ſeulement exprimer la diviſion d'une grandeur par un autre, on interpoſe ce ſigne —; par exemple $\frac{6}{2} = 3$: cela ſignifie que 6 diviſez par 2 donnent pour quotient une grandeur égale à 3. Si on écrit ſeulement $\frac{5}{4}$, cela ſignifie 5 unitez diviſées par 4 ; c'eſt ce qu'on appelle *Fraction*, comme on verra dans la ſuite.

6. Le terme ou mot qui eſt particulierement

en uſage dans l'Addition, c'eſt *&*; par exemple 3 *&* 5 ſont 8.

7. Le terme qui eſt particulierement en uſage dans la Souſtraction, c'eſt *de*; par exemple, ſi *de* 7 on retranche 4, reſte 3.

8. Le terme qui eſt particulierement en uſage dans la Multiplication, c'eſt *fois*; par exemple 6 *fois* 8 ſont 48.

9. Le terme qui eſt particulierement en uſage dans la Diviſion, c'eſt *en*; par exemple *en* 12 combien de fois 2? 6 fois.

Reflexions Fondamentales.

La pratique de la Diviſion fait naître les cinq Corollaires ſuivans qu'il eſt important de bien remarquer.

COROLLAIRE I.

Pour faire la Diviſion, il faut chercher combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le nombre à diviſer, & l'ayant trouvé, ce nombre de fois eſt le quotient qu'on cherche. Soit par exemple le nombre 15 à diviſer par 5, je cherche en 15 combien il y a de fois 5, je l'y trouve 3 fois; je dis que 3 eſt le quotient, c'eſt à dire, une 5[e] partie de 15; car nous venons de voir que 3 fois ce diviſeur 5 produit 15, parceque 5 eſt 3 fois en 15. Il eſt certain que 5 fois 3 ſont auſſi 15; puiſque 3 fois 5, ou 5 fois 3 ſont le même produit; & partant, puiſque 5 fois 3 ſont 15, il eſt évident que ce nombre 3 eſt une 5[e] partie de 15, car il faut l'ajouter 5 fois à lui-même pour faire le nombre 15. Donc le nombre qui exprime combien de fois un nombre eſt contenu dans un autre, est le quotient de ce dernier nombre divisé par l'autre.

COROLLAIRE II.

Il suit de ces choses que le nombre à diviser contient autant de fois le diviseur, que le quotient contient de fois l'unité; car le diviseur est contenu autant de fois dans le nombre à diviser, que l'unité se trouve exprimée de fois par le quotient.

COROLLAIRE III.

Le produit du quotient de la Division multiplié par le diviseur, est toûjours égal au nombre à diviser. Car puisque * le nombre à diviser contient autant de fois le diviseur, que le quotient contient de fois l'unité; si j'ajoute le diviseur à lui-même autant de fois qu'il y a d'unitez dans le quotient, c'est à dire, ** si je multiplie le diviseur par le quotient, le produit de cette multiplication sera égal au nombre à diviser.

COROLLAIRE IV.

La Multiplication & la Division se servent de preuves l'une à l'autre. Car on est certain que le nombre 8, par exemple, multiplié par 5 produit 40, si 8 étant ajouté à lui-même 5 fois, fait 40; c'est à dire, si 8 sont contenus 5 fois dans 40, ce qu'on peut sçavoir en divisant 40 par 8. Au contraire on est certain qu'ayant divisé 40 par 8, le

* *Cor. 2. preced.*
** *Déf. de la Multip.*

quotient eſt 5, ſi 5 eſt 8 fois dans 40; ce qu'on connoit en multipliant le quotient 5 par le diviſeur 8.

De même, ſi 3489 eſt le quotient de 136098 diviſez par 39, & 27 reſtans; pour être aſſuré que cette operation eſt bien faite, il faut multiplier ce quotient 3489 par 39, & au produit ajouter le reſte 27. Alors ſi la ſomme qui en reſultera eſt égale au nombre à diviſer, on doit être certain que l'operation eſt très exacte. S'il arrivoit autrement, l'operation ne ſeroit pas juſte, & il faudroit la recommencer.

```
    3 3 (2
  1 9 4 7 (7
1 3 6 0 9 8 ⎫
----------- ⎬ 3489
  3 9 9 9 9 ⎭
    3 3 3
```

Enfin pour connoître ſi 741000 eſt le veritable produit de 570 multipliez par 1300, il faut diviſer 741000 par 570, & on doit trouver 1300 au quotient ſans aucun reſte; ou bien il faut diviſer 741000 par 1300, & on trouvera auſſi ſans aucun reſte 570 pour le quotient. S'il arrivoit autrement, l'operation ſeroit vicieuſe & fauſſe, & il faudroit la recommencer plus exactement.

```
   570
  1300
------
171000
 570
------
741000
------
```

COROLLAIRE V.

La Diviſion eſt une Souſtraction abregée. Car afin qu'on puiſſe aſſurer que le diviſeur eſt contenu un certain nombre de fois dans le nombre à diviſer; il faut que du nombre à diviſer on puiſſe retrancher le diviſeur autant de fois qu'on a trouvé qu'il y étoit contenu. Par exemple, ſi on diviſe 24 par 6, on dira que le diviſeur 6 eſt 4 fois en 24; & pour en être certain, on retranchera 4 fois 6 du nombre 24, c'eſt à dire que de 24 on retranchera le produit de 6 multiplié par 4.

DES FRACTIONS.

DEFINITIONS.

1. UNE Fraction eſt la maniere d'exprimer une ou pluſieurs parties d'un ou de pluſieurs *tous*, *unitez*, *ou entiers*, diviſez chacun en un certain nombre de parties égales. Par exemple, la diſpoſition de ces deux chifres $\frac{3}{4}$ ſignifie trois des parties égales d'un *entier* partagé en 4, c'eſt à dire trois quarts. Cette autre expreſſion $\frac{7}{3}$ fait connoître que, pluſieurs entiers, par exemple, pluſieurs écus étant diviſez chacun en trois parties égales, on veut marquer 7 de ces parties égales, c'eſt à dire, 7 tiers.

Je peux encore dire qu'une Fraction eſt une diviſion indiquée ſeulement, c'eſt à dire, dont on exprime le quotient en écrivant la grandeur à diviſer au deſſus d'une petite ligne, enſuite en écrivant le diviſeur au deſſous. Par exemple, pour exprimer le quotient de 5 unitez diviſées par 8, on écrit $\frac{5}{8}$, ce qui ſignifie cinq huitiémes, c'eſt à dire, que, ſi on conſidere un Tout diviſé en huit parties égales, cette Fraction $\frac{5}{8}$ ſignifiera 5 des parties égales, qui ſont des huitiémes.

Pour bien entendre comment 5 unitez peuvent être diviſées en 8 parties égales, & comment le quotient de cette diviſion eſt 5 huitiémes du Tout ou de l'Entier 5; il faut conſiderer chacune de ces 5 unitez comme partagée en 8 parties égales, ce qui produira 40 huitiémes d'unité. Alors en diviſant ces 40 huitiémes parties égales

égales d'unité par ce nombre 8, c'eſt la même choſe que ſi on diviſoit ces 5 unitez par 8; puiſque ce nombre de 5 unitez & les 40 huitiémes parties de chacune de ces unitez ſont la même choſe, & que le quotient de la diviſion de 40 huitiémes parties d'unité par 8, ſont 5 huitiémes parties d'unité.

2. Le dénominateur d'une fraction eſt la grandeur inferieure à la petite ligne interpoſée, parceque cette grandeur dénomme ou exprime dans les nombres les cinquiémes, ſeptiémes, dixiémes, &c. parties de l'unité; comme dans cet exemple $\frac{2}{3}$, le nombre 3 fait connoître que ce ſont des tiers d'unité.

3. Le numerateur d'une fraction eſt la grandeur ſuperieure à la petite ligne interpoſée, parceque cette grandeur exprime combien de parties de l'unité, qui ſont dénommées par le chifre inferieur, vaut la fraction. Par exemple dans cette fraction $\frac{4}{7}$ on trouve pour numerateur 4, qui fait connoître que la valeur de cette fraction eſt 4 ſeptiémes parties d'unité.

On fait à l'égard des fractions les mêmes operations qu'on vient de faire pour les nombres entiers; mais avant que d'en venir à la pratique, il faut remarquer les 4 choſes ſuivantes.

Obſervations eſſentielles pour l'uſage des Fractions.

1. Pour reduire une ~~fraction~~ à de moindres termes, c'eſt à dire, pour exprimer une fraction par des termes plus ſimples; par exemple pour

trouver une fraction equivalente à $\frac{6}{18}$, & qui ſoit exprimée par des chifres moindres que 6 & que 18, il faut chercher un nombre par lequel on puiſſe diviſer également le numerateur & le dénominateur ſans aucun reſte. Comme dans cet exemple $\frac{6}{18}$, on trouve que 2 peut diviſer 6 & 18 ſans reſte, on mettra le quotient de 6 diviſé par 2 pour numerateur de la nouvelle Fraction, & le quotient du dénominateur diviſé par le même nombre 2, pour dénominateur, & on aura $\frac{3}{9}$ pour la nouvelle fraction, qui vaut autant que $\frac{6}{18}$. Mais on peut encore trouver un nombre qui diviſera également 3 & 9 ſans reſte, ſçavoir 3; & partant on aura $\frac{1}{3}$ au lieu de $\frac{3}{9}$, ou de $\frac{6}{18}$.

Pour trouver facilement le diviſeur commun, il faut diviſer le plus grand des deux nombres qui expriment la fraction par le plus petit; & s'il reſte quelque choſe, le nombre qui a ſervi de diviſeur à la diviſion precedente, ſera diviſé par ce reſte; & ſi après cette diviſion il reſte encore quelque nombre, ce ſera un nouveau diviſeur pour le nombre qui a ſervi de diviſeur à la diviſion precedente. On continuera de même juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à quelque diviſion où il ne reſte rien; le dernier de ces diviſeurs ſera le diviſeur commun au numerateur & au dénominateur de la fraction proposée.

Soit par exemple cette fraction $\frac{45}{72}$, & qu'au numerateur 45, & au dénominateur 72, il soit necessaire de trouver un diviseur commun sans reste. Il faut diviser 72 par 45, il restera 27; ensuite on divisera 45 par le reste 27, il restera 18; on divisera encore 27 par 18, il restera 9; & enfin on divisera 18 par 9, & il ne restera rien; ce qui fera connoître que 9 sera le plus grand & commun diviseur du numerateur, & du dénominateur de la fraction $\frac{45}{72}$ qui sera reduite par ce moyen à son équivalente $\frac{5}{8}$. Mais s'il arrivoit qu'après avoir fait toutes ces divisions, il y eut pour reste 1, ce seroit une marque que la fraction ne pourroit être reduite à de moindres termes.

S'il se rencontroit un ou plusieurs 0 à la fin du numerateur & du dénominateur d'une fraction; on reduira facilement cette fraction à moindres termes, en ôtant autant de zeros de la fin du numerateur, que de la fin du dénominateur; par exemple, cette fraction $\frac{400}{500}$ sera reduite à son équivalente ou égale $\frac{4}{5}$, en retranchant de part & d'autre 0 0: puisque dans cet exemple c'est la même chose que si on divisoit le numerateur 400 & le dénominateur 500, par le nombre 100. Si on ôtoit seulement un zero, ce seroit diviser par 10, &c.

2. Reduire deux fractions à même dénomi-

nation, c'eſt leur chercher un dénominateur commun ſans changer leur valeur ; par exemple, pour reduire $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ à une même dénomination, il faut multiplier les dénominateurs 3 & 4 l'un par l'autre, on aura 12 qui ſera le dénominateur commun. Enſuite on multipliera le numerateur 2 d'une de ces fractions par le dénominateur 4 de l'autre, & on aura 8 qu'on écrira au deſſus du 2. Enfin on multipliera le dénominateur 3 par le numerateur 3, on aura 9 qu'on écrira ſur le 3. Et partant on aura au lieu de $\frac{2}{3}$ ſon égale $\frac{8}{12}$; & au lieu de $\frac{3}{4}$ on aura ſon égale $\frac{9}{12}$. Or $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$ ſont en même dénomination, ce qu'il falloit chercher.

$$\underset{12}{\underline{\overset{8}{\frac{2}{3}} \;\; \times \;\; \overset{9}{\frac{3}{4}}}} \left\{ \frac{8}{12} \quad \frac{9}{12} \right.$$

Lorſqu'il y a plus de deux fractions ; par exemple $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, il faut multiplier tous les dénominateurs de ſuite l'un par l'autre, comme dans cet exemple ; 3 fois 4 ſont 12, & 5 fois 12 ſont 60 qui ſera le dénominateur commun ; & pour avoir les numerateurs, on prendra pour le numerateur de la premiere fraction les deux tiers de 60, ſçavoir 40 ; pour le numerateur de la ſeconde, on prendra les trois quarts de 60, ſçavoir,

voir 45 ; & pour le numerateur de la troisiéme, on prendra les quatre cinquiémes de 60 : on fera de même lorsqu'il y aura un plus grand nombre de fractions. On trouvera $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, au lieu de $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, & $\frac{4}{5}$; la raison de cela est facile à comprendre, parcequ'en cet exemple on considere le Tout ou l'Entier divisé en 60 parties égales. Ainsi lorsqu'on prendra les deux tiers de 60, on aura les deux tiers d'un Entier ; ce qui est la même chose que la premiere fraction : on dira la même chose des autres.

3. Pour connoître la valeur d'une fraction par rapport à l'Entier, dont elle exprime une ou plusieurs parties ; par exemple pour connoître la valeur des $\frac{3}{4}$ d'une livre, il faut multiplier 20 sols, valeur de la livre par le numerateur 3 de la fraction, & diviser le produit 60 par le dénominateur 4 de la fraction, le quotient de cette division sera 15 sols, qui est la valeur cherchée ; parceque les trois quarts d'une livre est la même chose que le quart de trois livres, comme on a observé dans la definition de fraction qui est la premiere des precedentes

4. Pour reduire des Entiers ou unitez en fraction, il faut multiplier le nombre de ces unitez par le dénominateur de la fraction, dans laquelle on les veut reduire ; par exemple pour reduire 4 en cinquiémes, il faut multiplier 4 par 5, on aura 20, auquel on mettra 5 pour dénominateur, & on aura $\frac{20}{5}$. Cela est évident, puisque chaque

unité vaut 5 cinquiémes, quatre quarts, dix dixiémes, &c.

Reciproquement enfin pour reduire des fractions en Entiers, lorsque cela est possible, il faut diviser le numerateur par le dénominateur, & le quotient de cette division exprimera combien la fraction vaut d'Entiers; par exemple, pour sçavoir combien cette fraction $\frac{15}{5}$ vaut d'Entiers, en divisant 15 par 5, on trouvera que cette fraction vaut 3 Entiers; puisqu'il faut 5 cinquiémes pour faire un entier, ou trois tiers, ou 13 treiziémes, &c.

DE L'ADDITION DES FRACTIONS.

Si les fractions qu'on veut assembler sont en même dénomination; par exemple $\frac{4}{5}$ & $\frac{3}{5}$, il faut assembler les numerateurs, & souscrire à leur somme le dénominateur commun, & on aura $\frac{7}{5}$.

Si les fractions ne sont pas en même dénomination, il faut les y reduire *, & ensuite assembler les numerateurs, comme on vient d'enseigner; par exemple pour assembler $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$;

* 2e *Observation precedente.*

on trouvera leurs équivalentes $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$ en même dénomination : on fera l'addition de 8 & de 9 & on aura $\frac{17}{12}$ pour la ſomme des deux fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$; ce qui eſt la même choſe que 1 entier & $\frac{5}{12}$.

DE LA SOUSTRACTION DES FRACTIONS.

On peut ſouſtraire ou retrancher une fraction d'une autre fraction, ou d'un ou de pluſieurs entiers.

Pour ſouſtraire une fraction, par exemple $\frac{3}{7}$, d'une autre fraction $\frac{5}{7}$ de même dénomination ; il faut ſouſtraire le numerateur 3 de l'autre numerateur 5, & on aura pour reſte $\frac{2}{7}$.

Si les Fractions ne ſont pas en même dénomination, il faut les y reduire, & ſouſtraire enſuite le numerateur de l'une, du numerateur de l'autre ; par exemple pour ôter la fraction $\frac{2}{7}$ de $\frac{5}{8}$, après les avoir reduites à même dénomination, on aura leurs équivalentes $\frac{16}{56}$ & $\frac{35}{56}$, & après avoir souſtrait 16 de 35, on trouvera pour reſte $\frac{19}{56}$.

Pour retrancher une fraction d'un ou pluſieurs entiers, il faut reduire ces entiers en fraction de même dénomination que la fraction qu'on veut retrancher. Enſuite on ſouſtrait le numerateur de l'une, du numerateur de l'autre, comme on vient d'enſeigner : par exemple pour ſouſtraire $\frac{4}{5}$ de 3 entiers, après avoir reduit les trois entiers en cinquiémes, on aura $\frac{15}{5}$, dont $\frac{4}{5}$ étant ôtez, reſte $\frac{11}{5}$, & ainſi des autres.

On peut voir facilement par ce moyen laquelle de deux fractions inégales eſt la plus grande, & de combien l'une excede l'autre. On trouvera, par exemple que $\frac{3}{4}$ excede $\frac{2}{3}$ de la valeur de $\frac{1}{12}$.

Si on veut faire la preuve de l'addition de fractions, il faut retrancher du total chaque fraction qui a été aſſemblée ; & après cela, s'il ne reſte rien, on a bien réüſſi, s'il arrive autrement, on s'eſt trompé.

Pour faire la preuve de la ſouſtraction des fractions, il faut ajouter ce qu'on trouve qui reſte avec ce qu'on a retranché, & le total doit être égal à la fraction dont on a retranché. Ces preuves ont le même fondement que dans les nombres entiers.

DE LA MULTIPLICATION DES FRACTIONS.

On peut multiplier des fractions par des fractions ; ou des entiers par des fractions ; ou enfin des entiers & fractions par des entiers & fractions.

Pour multiplier des fractions l'une par l'autre, il faut multiplier leurs numerateurs l'un par l'autre ; le produit qui en resultera sera le numerateur de la fraction qu'on cherche pour produit ; il faut ensuite multiplier les dénominateurs l'un par l'autre, & le produit sera le dénominateur de la fraction qu'on cherche. Par exemple, pour multiplier $\frac{4}{5}$ par $\frac{3}{8}$, on aura pour produit $\frac{12}{40}$, & après l'avoir reduit à moindres termes, on aura $\frac{3}{10}$.

Pour multiplier un nombre par une fraction, on reduira ce nombre en fraction, ce qu'on peut faire en deux manieres, ou en mettant à ce nombre pour dénominateur 1, ou en le multipliant par le dénominateur de la fraction, comme on a enseigné. Ensuite on fera la multiplication de ces deux fractions. Par exemple, pour multiplier 4 par $\frac{2}{3}$, il faudra multiplier $\frac{4}{1}$ par $\frac{2}{3}$, comme on vient d'enſeigner, & on aura pour produit $\frac{8}{3}$.

Pour multiplier des entiers & fractions par des entiers & fractions ; par exemple, pour multiplier $5\frac{1}{2}$ par $3\frac{2}{5}$, il faut reduire $5\frac{1}{2}$ dans une ſeule fraction, ſçavoir $\frac{11}{2}$. Il faut pareillement reduire $3\frac{2}{5}$ en une ſeule fraction $\frac{17}{5}$. Enſuite on multipliera $\frac{11}{2}$ par $\frac{17}{5}$, ce qui eſt la même choſe que de multiplier 5 & $\frac{1}{2}$ par 3 & $\frac{2}{5}$, on aura pour produit $\frac{187}{10}$.

DE LA DIVISION DES FRACTIONS.

ON peut diviſer une fraction par une autre fraction, ou des entiers par une fraction ; ou enfin des entiers & fractions par des entiers & fractions.

Pour diviſer une fraction par une autre, il faut multiplier le numerateur de la fraction à diviſer par le dénominateur de la fraction qui tient lieu de diviſeur, & ce produit ſera le numerateur de la fraction qui eſt le quotient cherché. Enſuite il faut multiplier le numerateur de la fraction qui tient lieu de diviſeur par le dénominateur de la fraction à diviſer, & ce produit ſera le dénominateur du quotient cherché; par exemple pour diviſer $\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{5}$, il faut multiplier le numerateur 2 de la fraction $\frac{2}{3}$ par le dénominateur 5 de la fraction $\frac{3}{5}$, on aura 10 pour le numerateur du quotient, & on multipliera le denominateur 3 de la fraction à diviſer $\frac{2}{3}$, par le numerateur 3 du diviſeur $\frac{3}{5}$, & on aura 9 pour dénominateur du quotient cherché, qui eſt $\frac{10}{9}$.

Pour diviſer un entier par une fraction, on reduira cet entier en fraction, en mettant 1 pour dénominateur: par exemple, pour diviſer 3 par $\frac{4}{5}$, c'eſt la même choſe que ſi on diviſe $\frac{3}{1}$ par $\frac{4}{5}$, ce qu'on fera, comme on vient d'enſeigner, & on aura pour quotient $\frac{15}{4}$.

Pour diviſer des entiers & des fractions par des entiers & des fractions, on reduira l'entier & la fraction à diviſer, en une ſeule fraction. On reduira pareillement l'entier & la fraction qui tient lieu de diviſeur, en une ſeule fraction,& on fera enſuite la diviſion, comme on vient d'enſeigner. Par exemple pour diviſer $6\frac{1}{2}$ par $5\frac{2}{3}$, c'eſt diviſer $\frac{13}{2}$ par $\frac{17}{3}$, & on aura $\frac{39}{34}$ pour quotient.

On fait la preuve de la multiplication des fractions comme dans les nombres entiers, en diviſant le produit par une des fractions qui a été multipliée; & on doit trouver pour quotient l'autre fraction qui a été multipliée, ſi on a bien réüſſi.

On fait auſſi la preuve de la diviſion des fractions comme dans les nombres entiers, en multipliant la fraction qui eſt le quotient cherché, par la fraction qui eſt le diviſeur; ſi on a bien réüſſi, le produit de cette multiplication eſt égal à la fraction à diviſer.

Le produit d'une multiplication de fractions eſt plus petit que chacune des deux fractions, qui ont été multipliées l'une par l'autre; & le quotient d'une diviſion de fractions eſt plus grand que la fraction à diviſer.Le contraire de ces deux choſes arrive dans la multiplication & dans la diviſion des nombres entiers. On rendra raiſon de cela dans la ſuite.

S'il ſe rencontre des fractions de fractions: par exemple, $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$, pour les reduire à une fraction ſimple; c'eſt à dire, pour connoître quelle eſt la fraction, qui vaut les deux tiers de quatre cinquiémes; il faut multiplier ſeparément le numerateur & le dénominateur de

$\frac{4}{5}$ par le dénominateur 3 de $\frac{2}{3}$, alors on aura $\frac{12}{15}$ qui eſt la même choſe que $\frac{4}{5}$, puiſqu'en reduiſant $\frac{12}{15}$ à moindres termes, on trouve $\frac{4}{5}$. Or prenant 2 fois le tiers de $\frac{12}{15}$, on trouve $\frac{8}{15}$ qui eſt la valeur cherchée des deux tiers de $\frac{4}{5}$.

Après avoir multiplié le dénominateur 5 de la fraction $\frac{4}{5}$ par 3 dénominateur de la fraction $\frac{2}{3}$, on pouvoit ſe contenter de multiplier le numerateur 4 de la fraction $\frac{4}{5}$ par le numerateur 2 de la fraction $\frac{2}{3}$, on auroit auſſi eû $\frac{8}{15}$, parceque ce numerateur 2 marque deux parties de ſon dénominateur 3. Au lieu que lorſqu'on multiplie 3 par 4, on a $\frac{12}{15}$, dont on ne demande que 2 de ſes trois parties égales, qu'on trouve en multipliant ſeulement 2 par 4.

On conſiderera donc comme une regle generale que pour reduire des fractions de fractions à des fractions ſimples, il faut multiplier les numerateurs de ſuite l'un par l'autre ; ce produit ſera le numerateur de la fraction ſimple cherchée. On multipliera auſſi de ſuite les dénominateurs l'un par l'autre, & ce produit ſera le dénominateur commun de la fraction ſimple qu'on cherche : par exemple, pour connoître la valeur ou la fraction ſimple des $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$. Je dirai : 2 fois 3 ſont 6 ; & 5 fois 6 ſont 30. Enſuite 3 fois 4 ſont 12 ; & 6 fois 12 ſont 72. Et partant la fraction ſimple cherchée eſt $\frac{30}{72} = \frac{5}{12}$. On agira de la même maniere à l'égard des autres fractions de fractions.

ELEMENS DES MATHEMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

DE L'ALGEBRE.

DEFINITIONS D'ALGEBRE.

1. L'ALGEBRE est une partie fondamentale des Mathematiques, dans laquelle on traite des grandeurs considerées generalement.

2. La difference de deux grandeurs inégales est ce qui reste aprés avoir retranché de la plus grande une grandeur égale à la plus petite.

COROLLAIRE.

Donc lorsqu'on dit qu'une grandeur, par

exemple *a* eſt contenuë dans une autre *b*, ou peut-être partie de cette grandeur *b*; c'eſt à dire, qu'on conſidere dans la grandeur *b* une partie $c = a$, & qu'au lieu de *a* on prend * *c* partie de *b*, ou qui eſt contenuë dans *b*. Enſuite ce qu'on dit de *c* doit être entendu de *a*, puiſqu'on peut prendre l'une pour l'autre.

3. Rapport ou raiſon eſt une comparaiſon d'une grandeur à une autre grandeur ; & dans cette comparaiſon on fait attention à la maniere d'être d'une de ces grandeurs au regard de l'autre.

AVERTISSEMENT.

On peut comparer deux grandeurs entre elles en deux manieres. 1°, En faiſant ſeulement attention à leurs differences ; c'eſt à dire, en examinant de combien l'une ſurpaſſe l'autre, ou l'excez de l'une & le défaut de l'autre. 2°, En conſiderant combien de fois, ou de quelle maniere une grandeur en contient une autre ; d'où il eſt évident qu'il y a deux ſortes de rapports.

4. Rapport Arithmetique eſt une comparaiſon faite entre des grandeurs, dans laquelle on n'a égard qu'aux differences.

COROLLAIRE.

Donc il n'y a aucun rapport Arithmetique entre deux grandeurs de diverſes eſpeces ; mais ſeulement entre deux grandeurs de même eſpéce, comme entre un nombre & un nombre, un temps & un temps, un ſon & un ſon, une diſtance de chemin & une diſtance de chemin ; & il n'y a

* *Demande premiere generale.*

point de rapport Arithmetique, par exemple, entre un mois & une lieuë, puiſqu'un mois n'eſt pas contenu dans une lieuë, une grandeur ne pouvant * être contenuë que dans une grandeur de même eſpéce.

5. Proportion Arithmetique eſt une égalité de la difference qui eſt entre deux grandeurs, & de la difference qui eſt entre deux autres grandeurs; c'eſt à dire, ſi l'excez d'une grandeur au deſſus d'une autre eſt égal à l'excez d'une troiſiéme grandeur au deſſus d'une quatriéme; ou bien ſi la premiere grandeur eſt ſurpaſſée par la ſeconde d'un excès égal à celui par lequel la 3e grandeur eſt ſurpaſſée par la 4e; on dit que ces quatre grandeurs ſont en proportion Arithmetique: par exemple, 5, 2, 14, 11, &c. on les écrit ainſi, 5. 2 : 14. 11. Ce qui ſignifie, 5 ſont à 2 comme 14 à 11. Ou bien la grandeur 5 ſurpaſſe 2, de la même maniere que 14 ſurpaſſe 11.

6. Extrêmes proportionnelles, ou termes extrêmes ſont la 1re & 4e grandeurs d'une proportion Arithmetique; & les moyennes proportionnelles ou termes moyens ſont la 2e & 3e des 4 grandeurs de cette proportion.

AVERTISSEMENT.

Lorſque deux grandeurs moyennes proportionnelles ſont égales, on reduit la proportion à trois termes, celui du milieu tenant la place de ces deux moyennes proportionnelles. Par exemple, ſi $a. b : b. c.$ on l'écrit ainſi $\div a. b. c.$ ce qui ſignifie comme dans l'expreſſion precedente, a eſt à b, comme b eſt à c.

* *Cor. déf. 2. Algeb.*

7. Proportion continue eſt celle, qui eſt reduite à trois termes, à cauſe de l'égalité des termes moyens, comme $\div$ *b. c. d.*

8. Progreſſion Arithmetique eſt une ſuite de plus de trois grandeurs rangées de telle maniere qu'elles ſoient toûjours en augmentant, ou toûjours en diminuant, de ſorte que toutes les differences ſoient égales entre elles : par exemple, $\div$ 5. 7. 9. 11. 13. &c. ou bien $\div$ 14. 10. 6. 2. &c.

COROLLAIRE.

Puiſqu'il y a une difference égale entre tous les termes d'une progreſſion, il eſt évident qu'en connoiſſant le premier terme avec la difference qui eſt entre les termes ſuivans de cette progreſſion, on connoîtra facilement chacun des termes de cette progreſſion: par exemple dans cette progreſſion, $\div$ *a. b. c. d. e. f. g. &c.*

1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. &c.

Si la difference qui eſt entre a & b eſt $m = 3$, celle qui eſt entre b & c eſt encore m, & ainſi de ſuite. Or puiſque le ſecond terme b n'eſt que le premier a augmenté de la difference qui regne dans cette progreſſion ; connoiſſant le premier terme a avec la difference de cette progreſſion, on connoîtra b ; parceque $a + m = b$. Or connoiſſant b, on connoîtra c ; parceque $a + m + m$, ou $a + 2m = c$. On connoîtra de cette maniere tous les autres termes.

Si la progreſſion étoit en diminuant, au lieu de prépoſer $+$ aux differences, on mettroit $-$; par exemple, ſi $g = 4$ eſt la difference, on aura

$b.\quad b - g.\quad b - 2g.\quad b - 3g.$ *&c.*

18. 14. 10. 6. &c.

Partant on peut facilement exprimer la premiere des deux progreſſions precedentes, d'une maniere qu'on verra dans tous ſes termes ce qu'ils ont de commun, & en quoi ils different

$\div a. a + m. a + 2m. a + 3m$

1. 4. 7. 10. &c.

9. Rapport Geometrique eſt une comparaiſon faite entre deux grandeurs;& dans cette comparaiſon on conſidere de quelle maniere une grandeur en contient une autre, ou de quelle maniere une grandeur eſt contenuë dans une autre. Par exemple, ſi on compare 15 à 5, & qu'on faſſe attention que le nombre 15 contient trois fois le nombre 5, ou que 5 eſt contenu trois fois dans 15; cette conſideration, ou maniere de contenir eſt ce qu'on appelle *rapport* ou *raiſon Geometrique.*

COROLLAIRE.

Donc il ne peut y avoir un rapport Geometrique qu'entre deux grandeurs de même eſpece; puiſque * une grandeur ne peut contenir qu'une grandeur de même eſpéce, ou être contenuë que dans une grandeur de même eſpéce. Par exemple, il n'y a aucun rapport entre la diſtance de Noël à Pâque, & la diſtance de Paris à Roüen.

10. L'antecedent d'un rapport eſt la grandeur qu'on compare à une autre; & le conſequent de ce rapport eſt la grandeur à laquelle une autre eſt comparée.

11. Les termes d'un rapport ſont l'antecedent & le conſequent.

AVERTISSEMENT.

C'eſt un uſage dans les Mathematiques, lorſqu'on parle du rapport d'une grandeur à une autre, ſans determiner s'il eſt Arithmetique ou

* *Cor. déf. 2. Algeb.*

Geometrique, qu'on doit toûjours entendre que c'eſt du rapport Geometrique dont on parle.

12. L'expoſant d'un rapport eſt le quotient de l'antecedent diviſé par le conſequent. Par exemple, l'expoſant du rapport de 30 à 10 eſt 3; parceque ce quotient 3 expoſe *quotiès*, c'eſt à dire, combien de fois le nombre 30 contient le diviſeur 10.

COROLLAIRE I.

Il ſuit de cette definition que les rapports ſont entre eux comme leurs expoſants; ou que tel eſt le quotient de la diviſion de l'antecedent par le conſequent, tel eſt le rapport de cet antecedent à ce conſequent. C'eſt à dire, que ſi ce quotient eſt grand, ce rapport ſera grand; ſi le quotient eſt petit, le rapport ſera petit; enfin ſi le quotient de l'antecedent diviſé par le conſequent eſt égal au quotient d'un autre antecedent diviſé par un autre conſequent: le rapport du premier antecedent au premier conſequent, ſera égal au rapport du ſecond antecedent au ſecond conſequent; ces rapports ſeront les mêmes; ces rapports ſeront ſemblables. Puiſque * rapport n'eſt autre choſe que la maniere de contenir ou d'être contenu; ce qui eſt exprimé par le quotient d'un terme de rapport diviſé par l'autre terme. Par exemple, le rapport de 16 à 2 eſt plus grand que le rapport de 10 à 5, parceque le quotient de 16 diviſez par 2 eſt plus grand que le quotient de 10 diviſé par 5: 16 contenant 8 fois 2, & 10 contenant ſeulement 2 fois 5. Soit pareillement $\frac{9}{6} = \frac{6}{4}$; cela exprime que le

*. *Déf. 9. Algeb.*

rapport de 9 à 6 eſt égal au rapport de 6 à 4; puiſque le quotient de 9 diviſé par 6 eſt égal au quotient de 6 diviſé par 4. Ce qui fait voir que l'antecedent de l'un de ces rapports contient autant de fois ou de la même maniere ſon conſequent, que l'antecedent de l'autre rapport contient ſon conſequent.

COROLLAIRE II.

Reciproquement tel eſt le rapport d'un antecedent à ſon conſequent; tel eſt auſſi le quotient de cet antecedent diviſé par ſon conſequent.

COROLLAIRE III.

Donc deux rapports égaux à un 3e ſont égaux entr'eux. Soit, par exemple, le rapport de b à c égal au rapport de d à f, & le rapport de g à h égal au même rapport de d à f: je dis que le rapport de b à c eſt égal au rapport de g à h. Car, [a] puiſque le rapport de b à c eſt égal au rapport de d à f, on aura [b] le quotient $\frac{b}{c} = \frac{d}{f}$; puiſque [a] le rapport de g à h eſt égal au rapport de d à f, on aura pareillement le quotient $\frac{g}{h} = \frac{d}{f}$. Donc [c] $\frac{b}{c} = \frac{g}{h}$; & partant [d] on aura le rapport de b à c égal au rapport de g à h.

13. Proportion ou analogie, c'eſt la ſimilitude ou égalité de deux rapports. On écrit une

[a] *Suppoſit.* [b] *Cor.* 2. *déf. preſ.*
[c] *Ax.* 18. *gener.* [d] *Cor.* 1. *déf. preſ.*

proportion de cette maniere, 24. 6 : : 16. 4. ou $\frac{24}{6} = \frac{16}{4}$, ce qui signifie, 24 sont à 6, comme 16 à 4.

16. Les termes extrêmes d'une proportion sont le premier antecedent & le dernier consequent ; les termes moyens d'une proportion sont le premier consequent & le second antecedent. Par exemple, si *a. b* :: *c. d.* les termes extrêmes de cette proportion sont *a* & *d*, & les termes moyens sont *b* & *c*.

15. Une grandeur moyenne proportionnelle est celle qui étant repetée deux fois, tient lieu de termes moyens dans une proportion. Par exemple, si 3. 6 :: 6. 12. le nombre 6 sera la moyenne proportionnelle. On abrege cette Analogie de cette sorte ∺ 3. 6. 12. ce qu'on appelle Proportion continuë.

16. Progression Geometrique est une suite de plus de trois grandeurs rangées de telle sorte que le rapport de la premiere à la seconde, est égal au rapport de la 2e à la 3e ; & que le rapport de la 2e à la 3e, est égal au rapport de la 3e à la 4e, & ainsi du reste, ce qu'on écrit de cette maniere ; ∺ 32. 16. 8. 4. 2. c'est à dire, 32 sont à 16, comme 16 à 8, &c. ou ∺ 5. 15. 45. 135, &c.

17. Rapport composé est celui dont l'exposant est égal au produit des exposants de plusieurs rapports. Par exemple, le rapport de 16 à 2 est composé du rapport du nombre 16 au nombre 8, de 8 à 4, & de 4 à 2. Car l'exposant du rapport du nombre 16 à 2, qui est 8, est égal au produit des exposants du rapport de 16 à 8, de 8 à 4, & de 4 à 2, qui sont $2 \times 2 \times 2 = 8$.

La composition du rapport de 16 à 2 peut encore être considerée en plusieurs autres manieres. On peut dire, par exemple, que ce rapport est composé du rapport de 16 à 12; de 12 à 8; de 8 à 6; & de 6 à 2: parcequ'on trouvera encore que le produit des exposants de ces rapports multipliez de suite l'un par l'autre est égal au nombre 8 exposant du rapport de 16 à 2. Car l'exposant du rapport de 16 à 12, qui est $1\frac{1}{3}$; étant multiplié par l'exposant du rapport de 12 à 8, qui est $1\frac{1}{2}$; & le produit 2 de ces deux exposants étant encore multiplié par l'exposant du rapport de 8 à 6, qui est $1\frac{1}{3}$ produira $2\frac{2}{3}$; enfin l'exposant 3 du rapport de 6 à 2 étant multiplié par ce dernier produit $2\frac{2}{3}$, il en resultera un dernier produit 8 égal à l'exposant du rapport de 16 à 2.

18. Rapport doublé ou raison doublée, c'est un rapport composé de deux rapports égaux; rapport triplé est un rapport composé de trois rapports égaux; quadruplé, de quatre rapports égaux, &c. Par exemple, le rapport de 27 à 3 est doublé, étant composé du rapport de 27 à 9, & de 9 à 3, qui sont* des rapports égaux.

19. Les grandeurs reciproquement proportionnelles, ou en raison ou rapport reciproque sont celles qui servent de termes à une analogie,

* *Cor.* 1. *déf.* 12. *Algeb.*

& qui ſont rangées de telle ſorte que le premier antecedent d'un rapport, & le conſequent de l'autre rapport ſe trouvent enſemble; c'eſt à dire, dans un même produit, ou dans une même fraction, ou qui appartiennent à une même grandeur; ou enfin, ce qui eſt la même choſe, quand l'analogie commence dans une grandeur, & finit dans la même. Par exemple, les racines de ces deux produits ab & cd ſont en raiſon reciproque, ou reciproquement proportionnelles, ſi $a.c :: d.b.$ ou ſi $a.d :: c.b.$ Pareillement les numerateurs & dénominateurs de ces deux fractions $\frac{f}{g}$ & $\frac{x}{z}$ ſont en raiſon reciproque, ſi $f.x :: z.g.$ Pour entendre encore mieux ceci, il faut ſeulement remarquer qu'on commence le raiſonnement dans une grandeur, qu'on le continuë dans la ſeconde, & que de la ſeconde on revient à la premiere dans laquelle on finit.

20. Propoſition converſe ou reciproque d'une autre propoſition, eſt celle dans laquelle on ſuppoſe comme conſtant & certain ce qui étoit en queſtion, ou ce qu'on cherchoit dans l'autre propoſition, & dans laquelle on prétend conclure & démontrer ce qui étoit ſuppoſé comme certain & conſtant dans cette autre propoſition. Par exemple, ſoit cette propoſition : *Si une grandeur eſt égale à une autre; la moitié de la premiere ſera égale à la moitié de la ſeconde.* Sa converſe ſera telle. *Si la moitié d'une grandeur eſt égale à la moitié de l'autre grandeur; la premiere grandeur ſera égale à la ſeconde.*

21. Nombre pair eſt celui qu'on peut diviſer en deux parties égales ſans fraction ou ſans reſte; & le nombre impair eſt celui qu'on ne peut par-

tager en deux parties égales sans reste, ou sans fraction ; par exemple, *6* est un nombre pair, *7* est impair.

22. Equation ou égalité est une double expression d'une grandeur, ou une grandeur exprimée en deux manieres, ou deux expressions de deux grandeurs égales. Par exemple $4x + 24 = 44$, c'est une équation, c'est à dire, une double expression ; car $4x + 24$ est une expression, & 44 en est un autre. Cependant $4x + 24$ est la même chose que 44, dans la supposition qu'on fait que $4x + 24 = 44$. On appelle membres ou parties d'une équation ce qui est de part & d'autre du signe d'égalité $=$; par exemple $4x + 24$ & 44 sont les membres de cette équation $4x + 24 = 44$.

DEMANDES D'ALGEBRE.

1. On a de coutume d'employer de petites lettres de l'alphabeth pour les expressions dont on se sert en Algebre. Les grandeurs connuës sont ordinairement exprimées par les premieres lettres de l'alphabeth ; & les grandeurs inconnuës, par les dernieres lettres de l'alphabeth.

2. Si on veut exprimer une grandeur prise un certain nombre de fois, on met devant la lettre qui exprime cette grandeur, un chifre qui exprime combien de fois cette grandeur doit être prise. Par exemple $2a$ signifie la grandeur a prise deux fois ; de même $4b$, ou $6b$ signifie le quadruple, ou le sextuple de b ; & ainsi du reste.

3. Une lettre qui ne paroît point être precedée d'aucun signe est toûjours supposée être precedée de ce signe $+$, parcequ'alors on ne conçoit pas qu'elle soit retranchée. Ainsi dans cette expression $b + d$ je peux mettre $+$ devant b, c'est à dire ;

$+ b + d$, ce qui ſera la même choſe que $b + d$.

4. Quand il y a un ſigne interpoſé entre des grandeurs ; par exemple $f + g$, ce ſigne eſt toûjours attribué à la grandeur qu'il precede. Dans cet exemple $+$ eſt attribué à g, & cela ſignifie f plus g ; de même s'il y avoit $-$.

5. Une grandeur exprimée par une lettre, qui n'eſt precedée d'aucun chifre, eſt cenſée être precedée par 1 ; par exemple a eſt la même choſe que $1\,a$.

6. Le changement de poſition dans les chifres écrits de ſuite, cauſe une diverſité dans les nombres ; par exemple 12 eſt different de 21, quoique ce ne ſoient que les mêmes chifres tranſpoſez. Les grandeurs peuvent être écrites l'une devant l'autre indifferemment, & ſans que la valeur de l'expreſſion change ; par exemple, $4c + b = b + 4c$. $ab = ba$, & ainſi des autres.

Axiomes d'Algebre.

1. Une grandeur precedée du ſigne $+$, & une pareille grandeur precedée du ſigne $-$ ſont enſemble égales à zero, ou rien ; par exemple $+ 5 - 5 = 5\,0$, c'eſt à dire, plus 5 & moins 5 ne font rien.

S'il ſe trouve dans une expreſſion deux grandeurs precedées des ſignes contraires, on reduira cette expreſſion à une plus ſimple, ou plus courte, ſuivant ce premier Axiome. Par exemple $aa + ab - ab - cc$ ſera reduite à celle-ci qui lui eſt équivalente $aa - cc$; puiſque $ab - ab = 0$.

2. La plus grande de deux grandeurs moins la difference eſt égale à la plus petite ; & la plus petite plus la difference eſt égale à la plus gran-

de. Par exemple, si $a > b$, & que la difference soit c, on aura $a - c = b$, ou bien $b + c = a$. Donc, s'il est necessaire pour une demonstration, par tout où on trouvera a, on pourra substituer * $b + c$; & par tout où on trouvera b, on pourra mettre $a - c$.

DE L'ADDITION
DES GRANDEURS
EXPRIME'ES GENERALEMENT.

Lorsqu'on veut ajouter ensemble des grandeurs, dont chacune est exprimée par une ou plusieurs lettres, il suffit de les écrire de suite sans rien changer à leurs signes : c'est une regle generale pour l'Addition. Par exemple, pour assembler a avec $2a$ & avec $4a$, on écrira $a + 2a + 4a$; pour assembler $a - b + c$ avec $2a + 2b + 4c$, on écrira seulement $a - b + c + 2a + 2b + 4c$; & pour abreger ces expressions lorsque cela est possible, il faut écrire ces grandeurs l'une au dessous de l'autre, & observer trois choses.

1°. Que les grandeurs exprimées par des lettres semblables, & qui ont les mêmes signes, doivent être ajoutées ensemble, & que leur somme soit precedée du signe qui precedoit chacune en particulier. Par exemple, si on veut

* *Premiere demande generale.*

ajouter ces grandeurs $3a - 2b - d$ avec $a - b$, on aura pour la somme $4a - 3b - d$.

EXEMPLE.

$$\begin{array}{l} 3a - 2b - d \\ a - b \\ \hline 4a - 3b - d \end{array}$$

AUTRES EXEMPLES.

$3b$	a	$4d$	$8c$	ab
b	b	x	$4d$	bx
$2b$	c	$8d$	m	cz
				cz
$6b$	$a+b+c$	$12d+x$	$8c+4d+m$	$ab+bx+2cz$

2°. Si les grandeurs égales ou exprimées par des lettres semblables sont precedées par des signes differents, c'est à dire, par $+$ ou $-$, au lieu d'assembler ces grandeurs, ces signes font connoître qu'elles doivent être retranchées l'une de l'autre. Or dans cette circonstance, après avoir retranché la valeur du plus petit chifre, qui precede une de ces grandeurs ainsi exprimées, de la valeur du chifre qui precede l'autre ; on conservé à ce qui reste le signe, qui appartenoit à la grandeur precedée du plus grand chifre. Par exemple pour assembler $8b$ avec $-5b$, ce signe $-$ marque qu'il ne faut point assembler $8b$ avec $-5b$, mais plûtôt retrancher $5b$ du nombre $8b$, & au lieu de la somme qu'on auroit euë, on aura $3b$ pour reste.

3°. Lorsque dans l'expression d'une grandeur on trouve une lettre precedée du signe $+$, & une autre semblable precedée du signe $-$; ces deux lettres

lettres doivent être effacées ; soit par exemple $a - b + c + b$; cette expression renferme $- b$ & $+ b$. Or * plus & moins la même grandeur n'est rien. Ainsi après avoir effacé $- b$ & $+ b$, on aura $a + c$, qui est la même chose que $a - b + c + b$.

COROLLAIRE.

Il suit de ces observations que, si on veut ajouter ensemble plusieurs grandeurs ; par exemple $f - g + h$ avec $2f + g - h$; suivant la regle generale après les avoir écrites de suite avec leurs signes, on aura $f - g + h + 2f + g - h$: & que s'il se trouve des grandeurs égales ou semblables precedées de chifres égaux, & de signes contraires, comme dans cet exemple où on trouve $- g$ & $+ g$, $+ h$ & $- h$, on effacera deux à deux ces grandeurs semblables, & on aura $3f$ pour la somme de ces mêmes grandeurs.

Lorsque les grandeurs exprimées par les mêmes lettres seront precedées de chifres inégaux avec des signes contraires, on retranchera, comme on a dit, la valeur du plus petit de ces chifres de la valeur de l'autre, & on mettra au reste le signe qui appartenoit au plus grand de ces chifres. Par exemple, si on veut ajouter $a + b - 3$ avec $2a - 3b + 8$, on aura $a + b - 3 + 2a - 3b + 8$; on effacera $+ b$, & * dans la grandeur $- 3b$ on retranchera & effacera $- b$; il restera encore $a - 3 + 2a - 2b + 8$; on effacera encore $- 3$; & dans le nombre $+ 8$, on effacera

* *Ax. 1. d'Algebre, page 70.*

aussi $+ 3$, & il restera $a + 2a - 2b + 5$. Enfin* on assemblera a avec $+ 2a$, & on aura $3a - 2b + 5$ pour la somme ou total des grandeurs $a + b - 3$ & $2a - 3b + 8$.

EXEMPLE.

$$\begin{array}{l} a + b - 3 \\ 2a - 3b + 8 \\ \hline a + b - 3 + 2a - 3b + 8 \\ a - 3 + 2a - 2b + 8 \\ a + 2a - 2b + 5 \\ \hline \text{somme } 3a - 2b + 5. \\ \hline \end{array}$$

AUTRE EXEMPLE.

$$\begin{array}{l} 3ab + bc - 3bb \\ 4ab - 2bc + 2bb \\ -2ab + 4bc - fg. \\ \hline \text{somme } \quad 5ab + 3bc - bb - fg. \\ \hline \end{array}$$

AUTRES EXEMPLES.

$$\begin{array}{r|l} a + 4d & aa - 5ab + 6 \\ a - d & aa + ab - 6 \\ \hline \text{somme } \; 2a + 3d & 2aa - 4ab. \\ \hline \end{array}$$

Pour abreger la regle generale qu'on a établie pour l'addition on écrira l'une sous l'autre les grandeurs qu'on veut assembler avec leurs signes de + ou de —. On mettra chaque grandeur litterale sous celle qui lui est semblable,

* *Suivant la premiere des observ. precedentes, p. 71.*

comme il a été enseigné dans l'addition des nombres. On ajoutera ensemble tous les nombres qui precedent les grandeurs semblables qui ont le même signe +, & qu'on a écrite l'une sur l'autre. On fera la même chose des nombres qui precedent les grandeurs semblables qui ont le même signe —, s'il y en a. Enfin s'il n'y a point de grandeurs semblables, qui ayent differents signes ; ensuite de la somme des chifres, qui ont precedé celles qui avoient les mêmes signes, on écrira la lettre qui étoit precedée de chaque chifre en particulier. Et s'il y a des grandeurs semblables qui ayent differents signes, on soustraira la plus petite somme de la plus grande, & on écrira le reste avec le signe qui precedoit la plus grande.

DE LA SOUSTRACTION DES GRANDEURS

EXPRIME'ES GENERALEMENT.

LORSQU'ON veut soustraire une grandeur d'une autre, il suffit de changer tous les signes de la grandeur qu'on veut soustraire, & d'ajouter ensuite cette grandeur à celle dont on vouloit faire cette soustraction, de la maniere qu'on le vient d'enseigner ; la somme qui en resulte est le reste qu'on cherche par cette soustraction. Par exemple pour soustraire $4a - 3b$ de $7a + 6b$, en changeant les signes de $4a - 3b$, je trouve $-4a + 3b$, & l'ajoutant à $7a + 6b$,

EXEMPLE.

de	$7a + 6b$
ôtez	$4a - 3b$
reste	$3a + 9b$.

je trouve $3a + 9b$, qui eſt le reſte que je cher-che par cette operation.

AUTRE EXEMPLE.

de	$2a - 4b + c - 3d$
ôter	$a + 7b - 4c + 2m$.
reſte	$a - 11b + 5c - 3d - 2m$.

Pour être perſuadé qu'en changeant les ſignes de la grandeur à retrancher, & faiſant enſuite une addition, il reſulte une ſouſtraction; il faut conſiderer que dans le premier exemple, au lieu de $+ 4a$ on met $- 4a$, ce qui marque clairement une ſouſtraction; au lieu de $- 3b$ on met $+ 3b$, cela fait encore voir une ſouſtraction ou negation de la negation $- 3b$, ce qui fait la grandeur affirmative ou poſitive $+ 3b$. La même choſe paroîtra évidemment à l'égard des autres exemples.

DE LA MULTIPLICATION DES GRANDEURS EXPRIME'ES GENERALEMENT.

IL y a deux ſuppoſitions ou demandes particulieres pour la Multiplication.

1. Pour exprimer le produit de grandeurs multipliées l'une par l'autre; par exemple de la grandeur *a* multipliée par la grandeur *b*, on écrit ces grandeurs l'une auprès de l'autre, c'eſt

à dire, ab ou ba, qui eſt l'expreſſion du produit de a multiplié par b. Si je veux multiplier ces grandeurs b, d, c, l'une par l'autre; je multiplie d'abord b par d, ce qui fait bd, & enſuite je multiplie bd par c, & je trouve bdc qui exprime le produit que je cherche. Je pourrois auſſi multiplier c par d, ou d par c, & multiplier le produit cd par b pour avoir cdb qui eſt le même produit que bdc, ou bcd. Quoiqu'il ſoit indifferent d'écrire ba, ou ab, pour exprimer le produit de a multiplié par b; cependant l'uſage eſt qu'on arrange ces lettres de telle maniere que les premieres de l'Alphabeth ſoient prononcées ou écrites les premieres: ainſi je mettrai plûtôt ab, & de même des autres produits.

2. Lorſqu'il ſe rencontre un produit de pluſieurs grandeurs égales ou exprimées par les mêmes lettres, par exemple aaa; on abrege cette expreſſion en cette maniere a^3, qui ſignifie la même choſe que aaa. De même au lieu de $bbbb$, on peut mettre b^4; & ainſi des autres, en écrivant un peu plus haut le chifre qui ſuit la lettre.

Il eſt donc évident que ces deux expreſſions $a+b$ & ab ne ſignifient pas la même choſe: puiſque $a+b$ ſignifie ſeulement que a eſt ajouté à b; & que ab ſignifie que a eſt multiplié par b. Si je veux que a vaille 6 & que b vaille 5; la premiere expreſſion $a+b$ vaudra $6+5=11$, & la ſeconde ab vaudra $6\times5=30$.

Il faut bien prendre garde auſſi à ne pas prendre cette expreſſion $3d$ pour celle-ci d^3. Car $3d$ n'eſt que la ſomme de 3 grandeurs égales dont chacune eſt appellée d, ou 3 fois la même grandeur d; & d^3 ſignifie que le produit de d multiplié par d, qui eſt dd, eſt encore multiplié par la même grandeur d. Si je veux que d vaille 5, $3d$ vaudront $5 + 5 + 5 = 15$, & d^3 vaudra 125.

AVERTISSEMENT.

1. Lorſqu'on multiplie l'une par l'autre, des grandeurs qui ont des ſignes ſemblables, c'eſt à dire $+$ & $+$, ou $-$ & $-$; leur produit doit toujours avoir le ſigne $+$, & ſi elles ont des ſignes differens, leur produit doit avoir le ſigne $-$.

Pour bien entendre cela, il faut premierement remarquer que multiplier une grandeur par une autre, c'eſt [1] repeter ou prendre cette grandeur autant de fois qu'il y a d'unitez dans l'autre. Or on peut prendre une grandeur pluſieurs fois en deux manieres, ſçavoir pour l'ajouter pluſieurs fois & en faire un total poſitif & affirmatif; ou pour la retrancher pluſieurs fois & en faire un total negatif.

Soient par exemple $+c = 4$ & $+d = 5$; ſi je multiplie $+c$ par $+d$, le produit de ces deux grandeurs ſera $cd = 20$, qui aura le ſigne $+$. Parceque les ſignes qui precedent c & d étant tous deux affirmatifs, par cette multiplication j'ajouterai c autant de fois à lui même qu'il y a d'unitez dans la grandeur d [1]; ou bien j'ajouterai d à lui même autant de fois qu'il y a d'unitez dans c, ce qui revient à la même choſe. Il ne doit donc paroître dans cette circonſtance aucun ſigne de négation. Donc $+$ multiplié par $+$ donne au produit $+$.

[1] *Définition de la multiplication, page 21.*

Soient

Soient presentement deux grandeurs qui ayent des signes négatifs ; par exemple, $-f$ & $-g$; si je multiplie $-f$ par $-g$, leur produit sera fg qui aura le signe $+$. Parceque les signes qui precedent f & g étant tous deux négatifs, l'un montre qu'au lieu d'ajouter l'autre grandeur plusieurs fois, il faut la retrancher plusieurs fois. Dans cet exemple $-g$ exprime qu'il faut retrancher $-f$ autant de fois que $-g$ exprime ou contient d'unitez : or retrancher ou nier $-f$ plusieurs fois, c'est affirmer ou mettre plusieurs fois $+f$; cette négation de négation est une affirmation. Ce qui est clair, puisque pour exprimer la soustraction d'une grandeur qui a déja le signe $-$, je dois lui donner le signe $+$. Car le signe $-$ exprime que cette grandeur doit être retranchée. Or ensuite si je ne veux pas la retrancher, je dois lui ôter le signe $-$, & la laisser dans son état réel, affirmatif & positif. Afin d'exprimer ce dernier état, il faut donc en donner une marque qui est le signe $+$. Quand je multiplie -3 par -7, je cherche combien de fois je dois retrancher la soustraction, ou négation que je m'étois proposé de faire de 7. Je trouve que je prens la resolution, ou que je me propose, de ne point ôter une fois 7, encore une fois 7, & encore une fois 7. C'est à dire que je veux laisser 7 trois fois, ce qui doit enfin produire $+21$. Donc $-$ multiplié par $-$ donne pour produit $+$.

2. Lorsque de deux grandeurs à multiplier il y en a une precedée du signe $+$ & l'autre du signe $-$; le produit doit toujours être precedé du signe $-$. Par exemple, soit $+e$ à multiplier par $-m$, ou $-m$ par $+e$, ce qui est la même

$+ 4bch$ qu'il faut écrire ensuite de abh. $-fg$ multiplié par $+h$ produit $-fgh$, il faut aussi écrire ce dernier produit, ensuite des autres.

$$\begin{array}{rl} & ab + 4bc - fg \\ & \quad h + 2m. \\ \hline & abh + 4bch - fgh \\ & \quad 2abm + 8bcm - 2fgm. \\ \hline \textit{produit} & abh + 4bch + 2abm - fgh + 8bcm - 2fgm. \\ \hline \end{array}$$

Après cela il faut multiplier $ab + 4bc - fg$ par $2m$, disant : ab multiplié par $2m$ produit $2abm$, qu'on écrira où on voudra, parceque dans le rang des autres produits il n'y en a point de semblables à ce dernier. On continuera, disant: $+ 4bc$ multiplié par $+ 2m$, produit $8bcm$, qu'on écrira ensuite du produit precedent. Enfin $- fg$ multiplié par $+ 2m$, produit $- 2fgm$, qu'il faut pareillement écrire. Après avoir fait l'addition de tous ces produits, on trouvera que le produit qu'on cherche est $abh + 4bch + 2abm - fgh + 8bcm - 2fgm$.

Autres Exemples,

$$\begin{array}{rl} & a + b + c \\ \textit{par} & a + b - c \\ \hline & aa + ab + ac \\ & \quad ab + bb + bc \\ & \quad\quad - ac - bc - cc \\ \hline & aa + 2ab + bb - cc \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} & ac & + gh & + fm & \\ \textit{par} & dd & - gn & + mm & \\ \hline & acdd & + ddgh & + ddfm & \\ & & - acgn & - gghn & - fgmn \\ & & & acmm & + ghmm + fm^3. \\ \hline \end{array}$$

$$acdd + ddgh + ddfm - acgn - gghn - fgmn + acmm + ghmm + fm^3.$$

DE LA DIVISION DES GRANDEURS

EXPRIMÉES GENERALEMENT.

AVERTISSEMENT.

1. DANS la Multiplication on eſt convenu que pour exprimer le produit de pluſieurs grandeurs multipliées entr'elles, on les écriroit l'une auprès de l'autre : la Diviſion étant entierement oppoſée à la Multiplication, on eſt pareillement convenu que pour diviſer une grandeur par une autre, on effaceroit dans la grandeur à diviſer les lettres qui s'y pourroient trouver ſemblables à celles du diviſeur, & qu'on prendroit pour quotient les lettres qui reſteroient. Par exemple, pour diviſer *cf* par *c*, on a pour

quotient f; pour diviser ade par d on a pour quotient ae.

EXEMPLES.

$$\left.\begin{array}{r} \textit{grandeur à diviser} \quad cf \\ \hline \textit{diviseur} \quad c \end{array}\right\} f \textit{ quotient}$$

$$\left.\begin{array}{r} \textit{grandeur à diviser} \quad ade \\ \hline \textit{diviseur} \quad d \end{array}\right\} ae \textit{ quotient}$$

2. Lorsque la grandeur à diviser & le diviseur sont precedés des mêmes signes, leur quotient doit toûjours être precedé du signe $+$.

Soit une grandeur $+bg$ à diviser par $+b$, le quotient sera $+g$; parceque, 1°. la grandeur bg est [1] precedée du signe $+$; 2°. le diviseur g est [1] aussi precedé du signe $+$; 3°. enfin le diviseur & le quotient sont [2] les deux racines qui ont produit la grandeur à diviser bg. Il suit donc necessairement que le quotient soit aussi precedé du signe $+$. Car si le quotient étoit precedé du signe $-$; puisque la grandeur à diviser n'est que le produit du diviseur par le quotient, ce produit bg seroit precedé du signe $-$, ce qui seroit contre la supposition, qui est que bg est precedé de $+$.

[1] *Par la supposition presente.*

[2] *Coroll.* 3. *de la Division des nombres en Arithmetique, page* 42. *& supp.* 1. *de la Multip. des grandeurs litterales, page* 76.

Soit encore la grandeur — *m n* à diviſer par — *n*, le quotient ſera + *m* par la même raiſon qu'on vient de dire. Car 1°. le diviſeur *n* eſt (1) precedé du ſigne —. 2°. La grandeur à diviſer *m n* eſt (1) precedée du ſigne —. 3°. Le diviſeur & le quotient ſont deux grandeurs qui étant multipliées l'une par l'autre produiſent — *m n*. C'eſt donc une neceſſité que le quotient *m* ſoit precedé du ſigne +; parceque s'il étoit precedé du ſigne —, le produit de ce quotient par ce diviſeur ſçavoir *m n* ſeroit (2) precedé du ſigne +, ce qui ſeroit contre la ſuppoſition.

3. Lorſque la grandeur à diviſer & le diviſeur ſont precedez des ſignes differens, leur quotient ſera precedé du ſigne —.

Soit par exemple *a d* à diviſer par — *a*, le quotient ſera — *d*. 1°. Le diviſeur eſt precedé du ſigne —; c'eſt donc une neceſſité que le quotient ſoit auſſi precedé du ſigne —, afin que le produit du diviſeur — *a* par le quotient ſoit la même choſe que la grandeur à diviſer *a d*. On feroit un pareil raiſonnement s'il falloit diviſer — *o p* par + *p*, & on auroit pour quotient — *o*.

EXEMPLE.

Soit la grandeur *dg* + *gf* + *d h* + *fh* à diviſer par *d* + *f*. Il faut écrire ce diviſeur *d* + *f* deſſous la grandeur à diviſer. On peut commencer de gauche à droit, & dire, le ſigne + qui precede *dg*, diviſé par le ſigne + qui precede *d* dans le diviſeur, donne au quotient +; enſuite *d g* diviſé par *d*, donne pour quo-

(1) *Par ſupp.*
(2) *Part. 1. de l'avertiſſ. de la multip. litt. page* 77.

tient g, on écrira g au quotient. Ensuite multipliant le quotient $+g$ par la grandeur $+f$

$$\begin{array}{l|l} \quad o \quad\; o & \\ -dg-gf & \\ dg+gf+dh+fh & g \\ \hline d+f & \end{array}$$

du diviseur, cela produit gf, qu'il convient retrancher, & partant on lui prépose le signe —, & on cherche s'il y a dans la grandeur à diviser quelque grandeur de même genre, & dans cet exemple on trouve $+gf$; au dessus de cette grandeur on écrit $-gf$, qui est le produit precedent retranché. Ensuite ces deux grandeurs semblables étant precedées de chifres égaux & de signes differens, selon ce qu'on a enseigné dans l'addition, elles se détruisent, on les tranche, & il ne reste rien, on écrit o au dessus. Ensuite le quotient $+g$ étant multiplié par l'autre partie $+d$ du diviseur, produit $+dg$ qu'il faut retrancher, & pour cela on prépose le signe —, & on écrit $-dg$ au dessus de la grandeur semblable $+dg$. Ces deux grandeurs se détruisant à cause de leurs signes differens, on les efface & au dessus on écrit o.

Il reste encore $+dh+fh$ à diviser, on dira $+$ qui precede dh, divisé par $+$, qui precede $d+f$, donne au quotient $+$. Ensuite dh divisé par d, donne pour quotient h, il faut écrire $+h$ au quotient. $+h$ qu'on vient d'écrire au quotient multiplié par $+f$ du diviseur, produit $+fh$ qu'il faut retrancher, & pour cela lui préposer le signe —. Et après cela il faut examiner dans la grandeur à diviser s'il se trouve quelque grandeur semblable à fh, on y trouve $+fh$, au dessus on écrit $-fh$, de sorte que ces deux grandeurs par l'addition se détruisent,

$$\left.\begin{array}{l}\quad\overset{o}{}\quad\ \overset{o}{}\quad\ \ \overset{o}{}\quad\ \overset{o}{}\\ -dg-gf-dh-fh\\ \ \ dg+gf+dh+fh\\ \hline \ \ d+f\end{array}\right\}g+h$$

ſent, on les efface, & au deſſus on écrit o. Enfin on multiplie $+h$ qui eſt au quotient par $+d$ qui eſt au diviſeur, cela produit $+dh$, qu'on retranche, & pour cela on prépoſe le ſigne —, & on l'écrit au deſſus de la grandeur ſemblable $+dh$: ces deux grandeurs ſe détruiſant, on les tranche, & on écrit o au deſſus. Partant la grandeur $dg+gf+dh+fh$ étant diviſée par $d+f$, donne pour quotient $g+h$.

Autre Exemple.

$$\left.\begin{array}{l}\ \ o\ +cf\\ -cc-cf\\ \ \ cc+2cf+ff\\ \hline \ \ c+f\end{array}\right\}c$$

Pour diviſer la grandeur $cc+2cf+ff$ par $c+f$, après avoir écrit le diviſeur $c+f$ au deſſous, il faut dire $+cc$ diviſé par $+c$, donne pour quotient $+c$. Enſuite $+c$ qui eſt au quotient multiplié par $+f$ qui eſt au diviſeur, produit $+cf$ qu'il faut retrancher; & pour cela il faut lui prépoſer le ſigne —, & écrire $-cf$ au deſſus de $+2cf$. Enſuite par l'addition de ces deux grandeurs il reſtera $+cf$ qu'on écrira au deſſus de $-cf$, & on tranchera $-cf$ & $+2cf$; enſuite on multipliera $+c$ qui eſt au quotient par $+c$ qui eſt au diviſeur, & on aura pour produit $+ cc$, qu'on retranchera en l'écrivant avec le ſigne $-$ au deſſus de cc, & par l'addition ces deux grandeurs ſe détruiſant, on les effacera, & au deſſus on écrira o.

Il reſtera encore à diviſer $+ cf + ff$; on dira $+ cf$ diviſé par $+ c$ donne au quotient $+ f$, or $+ f$ du quotient multiplié par $+ f$ du diviſeur produit $+ ff$ qu'on retranchera de la grandeur à diviſer en écrivant $- ff$ au deſſus de $+ ff$; ces deux grandeurs ſe détruiſant on les effacera, & on écrira o au deſſus. Enfin $+ f$ du quotient multiplié par $+ c$ du diviſeur, produit $+ cf$, qu'on retranchera de $+ cf$, en écrivant au deſſus $- cf$, ces deux grandeurs ſe détruiſant on les effacera, & on écrira o au deſſus. Et partant la grandeur $cc + 2cf + ff$ étant diviſée par $c + f$ donnera au quotient $c + f$.

$$\begin{array}{l} \quad\quad\quad\;\; 0 \\ \quad\quad\; - cf \\ \quad 0 + cf \quad\;\; 0 \\ -cc - cf - ff \\ \;\; cc + 2cf + ff \\ \hline \quad\; c + f \end{array} \Bigg\} c + f$$

Autre Exemple.

Pour diviſer la grandeur $dd - ee$ par $d + e$, il faut dire $+ dd$ diviſé par $+ d$ donne pour quotient $+ d$. Or $+ d$ qu'on vient d'écrire au quotient multiplié par $+ e$ qui eſt au diviſeur produit $+ de$ qu'il faut retrancher, & pour cet effet lui prepoſer le ſigne $-$; mais comme dans la grandeur $dd - ee$ on ne trouve

$$\begin{array}{l} \;\; 0 - de \\ - dd \\ \;\; dd - ee \\ \hline \quad d + e \end{array} \Bigg\} d$$

point de grandeur ſemblable à ce produit $-de$, on l'écrira cependant à l'écart au deſſus de $-ee$. Enſuite $+d$ qui eſt au quotient étant multiplié par $+d$ qui eſt au diviſeur, produit $+dd$ qu'on retranchera de la grandeur à diviſer, en écrivant $-dd$ au deſſus de la grandeur $+dd$ qui s'y rencontre. Ces deux dernieres grandeurs ſe détruiſant, on les effacera & on écrira o au deſſus.

Il reſte encore à diviſer $-de$ & $-ee$. On dira, $-de$ diviſé par $+d$ donne pour quotient $-e$. Or $-e$ étant multiplié par $+e$ produit $-ee$ qu'il faut retrancher; pour retrancher $-ee$ il faut écrire $+ee$, comme on a enſeigné dans la ſouſtraction. On écrira

$$\begin{array}{c}
o \\
+de \\
-de \\
o \quad\quad o \\
-dd+ee \\
dd-ee \\
\hline
d+e
\end{array}
\left\{ d-e \right.$$

donc $+ee$ au deſſus de la grandeur $-ee$ qui ſe rencontre dans la grandeur à diviſer; mais comme ces deux grandeurs $-ee$ & $+ee$ ſe détruiſent, on les effacera & on écrira o au deſſus. Enfin $-e$ qui eſt au quotient, multiplié par $+d$ qui eſt au diviſeur produit $-de$ qu'il faut retrancher en lui prépoſant le ſigne $+$, & comme il s'en rencontre une de même eſpece dans la grandeur à diviſer, ſçavoir $-de$, on écrira au deſſus ce produit $+de$; ces deux grandeurs ſe détruiſant on les effacera, & on mettra o au deſſus pour marquer qu'il ne reſte rien. Et partant la grandeur $dd-ee$, étant diviſée par $d+e$, le quotient eſt $d-e$, & il ne reſte rien.

AUTRE EXEMPLE.

$$-4aab$$

$$0$$

$$-8a^3$$

$$\left.\frac{8a^3 - abb + \frac{1}{2}b^3}{2a + b}\right\} 4aa$$

Soit la grandeur $8a^3 - abb + \frac{1}{2}b^3$ à diviser par $2a + b$. Il faut écrire le diviſeur $2a + b$ ſous la grandeur à diviſer. Après cela il faut diviſer le nombre 8 qui precede a^3 par le nombre 2 qui precede la grandeur a dans le diviſeur, comme on l'a enſeigné dans la diviſion des nombres, on aura 4 qu'on écrira pour quotient ; enſuite a^3 étant diviſé par a donne pour quotient aa qu'on écrira au quotient immédiatement après le 4. Or $+ 4aa$ qu'on vient d'écrire au quotient multiplié par $+ b$, produit $+ 4aab$ qu'il faut retrancher, & pour cela lui prépoſer le ſigne —; mais parceque dans la grandeur à diviſer on ne trouve point de aab, on écrira à l'écart fort au loin $- 4aab$ dont on vient de parler. Enſuite il faut multiplier $4aa$ du quotient par $2a$ du diviſeur, cela fait $8a^3$ qu'il faut retrancher ; c'eſt pour cela qu'on lui prépoſe le ſigne — en l'écrivant au deſſus de la grandeur de même genre. Ces deux grandeurs $- 8a^3$ & $+ 8a^3$ ſe détruiſant, on les tranche, & on écrit 0 au deſſus pour marquer qu'il ne reſte rien.

$$\begin{array}{l} \qquad\quad 0 \\ \quad +4aab \\ \quad -4aab \\ \\ \quad 0 \quad +abb \\ -8a^3 +2abb \\ \;\; 8a^3 -abb + \frac{1}{2}b^3 \\ \hline 2a \; + b \end{array} \left\{ \; 4aa - 2ab \right.$$

Il reste encore à diviser $-4aab - abb + \frac{1}{2}b^3$. On dira, $-$ qui precede $4aab$ divisé par $+$ qui precede $2a + b$, donne au quotient $-$ qu'on écrira ensuite de $4aa$. Après cela on dira, 4 qui precede aab divisé par 2 qui precede a dans le diviseur, donne pour quotient 2 qu'on écrira au quotient. aab divisé par a donne pour quotien ab qu'on écrira au quotient. Or $-2ab$ qu'on vient d'écrire au quotient multiplié par $+b$ qui est au diviseur, produit $-2abb$ qu'il faut retrancher, & pour cela on lui préposera le signe $+$, & comme on trouve dans la grandeur à diviser une grandeur semblable à ce dernier produit, on écrira au dessus $+2abb$, & après en avoir fait l'addition avec $-abb$, il resulte $+abb$ qu'on écrit au dessus, & on efface les deux precedentes grandeurs. Ensuite $-2ab$ du quotient multiplié par $+2a$ du diviseur, produit $-4aab$ qu'il faut retrancher, & pour cela on écrira $+4aab$ au dessus de $-4aab$ qui lui est semblable ; ces deux grandeurs se détruisant par l'addition à cause de leurs signes contraires, on les efface, & on écrit au dessus o pour marquer qu'il ne reste rien.

$$\begin{array}{l}
\qquad\qquad 0 \\
\quad +4aab \\
\quad -4aab \\
\qquad\quad 0 \\
\quad -abb \qquad\qquad\quad 0 \\
0 \quad +abb - \frac{1}{2}b^3 \\
-8a^3 + 2ab
\end{array}$$

$$\frac{8a^3 - abb + \frac{1}{2}b^3}{2a + b}\left\{ 4aa - 2ab + \frac{1}{2}bb \right.$$

Il reste encore à diviser $+abb + \frac{1}{2}b^3$; on dira, $+1abb$ divisé par $2a$, donne pour quotient $+\frac{1}{2}bb$, qu'on écrit au quotient; parceque, comme on a averti ci-devant, lorsqu'il ne paroît point qu'une grandeur soit precedée de chifres, on y sous-entend toûjours 1. Or 1 divisé par 2 donne pour quotient $\frac{1}{2}$ qu'on prépose à bb au quotient avec le signe $+$. Ensuite $+\frac{1}{2}bb$ qu'on vient d'écrire au quotient étant multiplié par b qui est au diviseur, produit $+\frac{1}{2}b^3$ qu'il faut retrancher, & pour cela on écrit $-\frac{1}{2}b^3$ au deſſus de la grandeur ſemblable qui ſe trouve dans $8a^3 - abb + \frac{1}{2}b^3$, ces deux grandeurs ſe détruiſant par l'addition à cauſe de leurs ſignes contraires, on les efface, & on écrit o au deſſus. Enfin $+\frac{1}{2}bb$ qui eſt au quotient multiplié par $2a$ du diviſeur, produit $+1abb$ qu'il faut retrancher, & on écrira $-abb$ au deſſus de la grandeur ſemblable qui reſtoit encore à diviſer; ces deux grandeurs ſe détruiſant, on les effacera & on écrira o au deſſus. Et partant $8a^3 - abb + \frac{1}{2}b^3$ diviſé par $2a + b$ donne pour quotient $4aa - 2ab + \frac{1}{2}bb$.

AUTRE EXEMPLE,

$$\begin{array}{lll} & & +9\frac{1}{3}abef \\ 0 & & -4\frac{2}{3}abef \\ -7aegh & & \\ \multicolumn{3}{l}{\underline{7aegh - 3bbgh + 14abef - 6b^3f + bm^3}} \\ 3gh + 2bf & & \end{array} \left\{ 2\frac{1}{3}ae \right.$$

Pour diviſer $7aegh - 3bbgh + 14abef - 6b^3f + bm^3$ par $3gh + 2bf$, après avoir écrit le diviſeur au deſſous de la grandeur à diviſer, on dira, + 7 divisé par $+3$ donne pour quotient $+2\frac{1}{3}$; & $aegh$ divisé par gh, donne pour quotient ae. On écrira au quotient $2\frac{1}{3}ae$. Or $+2\frac{1}{3}ae$ du quotient multiplié par $+2bf$ du diviseur produit $+4\frac{2}{3}aebf$ qu'on retranche en lui préposant le signe $-$, & on l'écrit au dessus de la grandeur qui lui est semblable $14aebf$ qui se trouvoit à diviser, par l'addition il resulte de ces deux grandeurs $+9\frac{1}{3}aebf$ qu'on écrit au dessus. Ensuite $+2\frac{1}{3}ae$ du quotient multiplié par $3gh$ du diviseur, produit $7aegh$ qu'on retranche de pareille grandeur à diviser, après l'avoir écrite au dessus avec le signe $-$, il ne reste rien, on les tranche & on écrit au dessus o.

Il reste encore à diviser $-3bbgh+9\frac{1}{3}aebf-6b^3f+bm^3$; on dit, $-3bbgh$ divisé par $+3gh$ donne pour quotient $-bb$ qu'on y écrit. Or $-bb$ du quotient multiplié par $+2bf$ du diviseur, produit $-2b^3f$ qu'il faut retrancher, & pour cela mettre $+2b^3f$ qu'on écrira au dessus de la grandeur $-6b^3f$ qui lui est semblable, & par l'addition de ces deux grandeurs il resultera $-4b^3f$ qu'on écrira au dessus, & on tranchera les deux precedentes. Ensuite $-bb$ multiplié par $3gh$ produit $-3ghbb$ qu'on retranchera en lui préposant le signe $+$,

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 9\frac{1}{3} abef - 4b^3f \\ \overset{0}{-7aegh} + \overset{0}{3bbgh} - 4\frac{2}{3} abef + 2b^3f \\ \hline 7aegh - 3bbgh + 14aebf - 6b^3f + bm^3 \\ \hline 3gh + 2bf \end{array}$$

$$\text{Quotient}\left\{ 2\frac{1}{3} ae - bb \quad \frac{9\frac{1}{3} abef - 4b^3f + bm^3}{3gh + 2bf} \right.$$

& l'écrivant au dessus de la grandeur de même espece $- 3bbgh$. Ces deux grandeurs se détruiront par l'addition à cause de leurs signes contraires, on les tranchera & on écrira o au dessus.

Il restera encore $+ 9\frac{1}{3} abef - 4b^3f + bm^3$ qu'on ne peut diviser par $3gh + 2bf$ à cause que dans cette grandeur restante il ne se trouve point de lettres semblables à gh du diviseur ; c'est pour cela qu'on écrira ce reste ensuite du quotient qu'on vient de trouver, & au dessous de ce reste on écrira le diviseur, & on mettra cette marque —— entre ces deux grandeurs, ce qui fera une fraction ; & partant le quotient de cette division

sera $2\frac{1}{3} ae - bb + \dfrac{9\frac{1}{3} abef + 4b^3f + bm^3}{3gh + 2bf}$

Multiplication.

$$\text{Preuve}\begin{cases}\text{quot. } 2\frac{1}{3}ae - bb\\ \text{divis. } 3gh + 2bf\end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 7aegh - 3bbgh + 4\frac{2}{3}abef - 2b^3f \\ 9\frac{1}{3}aebf - 4b^3f + bm^3 \\ \hline \text{produit} \quad 7aegh - 3bbgh + 14abef - 6b^3f + bm^3 \\ \hline \end{array}$$

La preuve de ces divisions se fait comme dans l'Arithmetique, en multipliant le quotient par le diviseur ; & s'il y a un reste, on l'ajoute au produit de cette multiplication, & on trouve enfin la grandeur qui étoit à diviser, si on a bien réüssi.

AVERTISSEMENT.

Les grandeurs qu'on ne peut diviser sans reste sont le plus souvent écrites au dessus de leur diviseur en forme de fraction. On fait toûjours la même chose à l'égard des grandeurs, qui ne contiennent point de lettres semblables à celles du diviseur. Par exemple pour diviser cd par $c + d$ on écrit $\frac{cd}{c+d}$, ce qui en exprime le quotient. Pour diviser $ab - cd$ par $b + d$ on écrit $\frac{ab - cd}{b + d}$. Pour diviser ab par f, on écrit $\frac{ab}{f}$; & alors ces divisions indiquées sont des fractions.

DE L'EXTRACTION DES RACINES.

DEFINITIONS.

1. RACINE est une grandeur qui étant multipliée par elle même ou par une autre, produit une autre grandeur ; par exemple a est racine du produit ab, ou du produit aa, ou a^3. La grandeur b est aussi racine du même produit ab ou du produit bb. f, g, h, sont les racines du produit fgh. 6 & 3 sont les racines de leur produit 18 ; &c.

2. Puissance ou degré d'une grandeur est le produit de cette même grandeur multipliée une ou plusieurs fois par elle-même ; par exemple bb, c^3, f^4, &c. sont les puissances de b, c, f, &c.

Il y a plusieurs sortes de puissances ou degrez.

3. La premiere puissance ou le premier degré d'une grandeur est le produit d'une grandeur multipliée par 1 ; par exemple $1a$, ou a est la premiere puissance de la grandeur a ; d est la premiere puissance de la grandeur d, &c.

4. La 2e puissance, ou le 2e degré, ou le quarré d'une grandeur est le produit de cette grandeur multipliée une fois par elle-même ; par exemple la 2e puissance de c est cc ou c^2, le quarré de $5a^3b^2$ est $25a^6b^4$. Le quarré ou 2e puissance de 6 est 36, de 8 est 64, &c.

5. La 3e puissance ou le 3e degré, ou le cube d'une grandeur est le produit de cette grandeur mul-

tipliée par son quarré, ou par sa 2e puissance. Par exemple le cube, ou 3e puissance de f est fff ou f^3 ; le cube de $2ddf$ est $8\,d^6f^3$; le cube de 4 est 64 ; de 5 est 125, &c.

6. La 4e puissance, ou le 4e degré, ou le quarré-quarré, ou le sursolide d'une grandeur est le produit de cette grandeur par son cube ou par sa 3e puissance : par exemple la 4e puissance de d est d^4 ; la 5e puissance de c est $ccccc$ ou c^5 ; & ainsi des autres grandeurs.

7. Lorsque pour abreger l'expression d'une puissance, on écrit un chifre supérieur à côté de la racine de cette puissance, ce chifre est appellé exposant de cette puissance ; par exemple au lieu d'écrire $eeee$, si on écrit e^4, on appelle ce 4 l'exposant de la puissance $eeee$.

AVERTISSEMENT.

Une grandeur est reconnuë pour quarrée, lorsqu'on peut partager en deux parties égales les lettres qui expriment cette grandeur, de telle maniere que les mêmes lettres se rencontrent de part & d'autre: par exemple $ffgghh$ est le quarré de fgh, parceque cette grandeur fgh multipliée par elle-même produit $ffgghh$. On dira aussi qu'une grandeur est cube lorsqu'on peut partager en trois parties égales les lettres qui l'expriment ; & ainsi des autres.

8. Extraction de racine, ou resolution d'une puissance, c'est trouver la grandeur qui étant multipliée par elle-même un certain nombre de fois produise cette puissance ; par exemple chercher un nombre qui étant multiplié par lui-même produise le nombre quarré 144, c'est extraire la racine de 144 qui est 12.

Lorsque

Lorſque la puiſſance, dont eſt queſtion, eſt un quarré, ſa racine qu'on cherche eſt appellée racine quarrée ; ſi cette puiſſance eſt un cube, ſa racine eſt appellée racine cubique ; ſi cette puiſſance eſt du 4^e degré, ſa racine eſt appellée racine quatriéme, de même des autres. Enfin la racine tire ſon nom de la puiſſance dont elle eſt racine.

Lorſque les grandeurs ſont ſimples, ou qu'elles s'expriment avec peu de lettres, comme aa ou ccc, il eſt tres-facile de voir leurs racines. On connoît par exemple évidemment que la racine quarrée de dd eſt d; que la racine cubique de f^3 eſt f; & ainſi des autres.

Pour extraire les racines des grands nombres, il eſt neceſſaire de ſçavoir les quarrez, les cubes, &c. de chaque caractere, depuis 1 juſqu'à 9 ; principalement les quarrez, parcequ'ils ſont plus d'uſage que les autres puiſſances.

Racines	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Quarrez	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.	100.
Cubes	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.	1000.

Lorſqu'on ſouhaite trouver la racine de quelque grand nombre ; par exemple, ſi on cherche la racine quarrée de 1369, il faut ſeparer ces chifres de deux en deux, & commencer de droit à gauche, enſuite faire une ligne au deſſous, & à ſon extremité on écrira les racines cherchées, dans la même forme qu'on écrit le quotient dans la diviſion, comme on verra dans la ſuite.

Pour rendre raiſon de ce partage de chifres, il faut obſerver que ſi un nombre eſt exprimé par plus de deux chifres, ſa racine eſt exprimée par plus d'un chifre ; parceque 100 eſt le plus petit nombre de ceux qui ſont exprimez par trois chifres, & ſa racine quarrée qui eſt 10 eſt le plus petit nombre de ceux qui ſont exprimez par deux chifres. Tous les nombres qui ſont au deſſus de 100, ont donc pour racine un nombre exprimé par plus d'un chifre ; & tous les nombres qui ſont au deſſous de 100, c'eſt à dire, qui ſont exprimez par moins que trois chifres, ont une racine quarrée moindre que 10, & ont donc une racine exprimée par un ſeul chifre. Or quand il faut extraire la racine d'un nombre, il faut partager ce nombre en certaines parties, ou tranches, telles qu'on y puiſſe trouver les plus grands quarrez dont les racines ſoient exprimées chacune par un ſeul chifre. Pour ſatisfaire à ce deſſein, on commence de droit à gauche, & on ſepare ces chifres de deux en deux ; parceque la racine d'un nombre quarré exprimé par deux chifres, eſt toujours exprimée par un ſeul chifre.

On cherche l'un aprés l'autre les chifres qui expriment cette racine. On commence par le premier chifre de cette même racine qui eſt vers la main gauche, & qui eſt de plus grande valeur que les autres ; on continue de gauche à droit. Ce premier chifre étant trouvé, on s'en ſert pour trouver le ſecond ; les deux premiers étant enſuite conſiderez comme un ſeul nombre ſervent à trouver le troiſiéme chifre de la racine qu'on cherche ; les trois premiers étant conſiderez comme un ſeul nombre ſervent à trouver le 4[e] chifre, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'il ne reſte plus de Chifre à trouver.

C'eſt pour cela qu'on ne conſidere jamais la racine qu'on cherche que comme une grandeur composée de deux parties $a + b$. a represente le chifre ou les chifres trouvez, & b represente le chifre qu'on cherche. Le quarré de cette grandeur $a + b$ qui est $aa + 2ab + bb$ sert de regle dans les extractions des racines quarrées.

EXEMPLE.

Soit ce nombre 1369, dont il faut extraire la racine quarrée, c'est à dire, trouver le nombre qui étant multiplié une fois par lui-même produise 1369.

On separera les chifres de deux en deux, comme il a été enseigné; ensuite il faut considerer qu'il y aura autant de chifres pour exprimer la racine qu'on cherche, qu'il y a de tranches dans le nombre 1369; & partant comme il s'y trouve deux tranches de chifres, sçavoir 13 & 69, cela marque qu'il n'y aura que deux chifres pour exprimer cette racine cherchée, dont le premier chifre est appellé a & le second b.

$$\begin{array}{rr|rr}
 & & & 0 \\
 & \cancel{4} & \cancel{4} & 0 \\
1 & \cancel{3} & \cancel{6} & \cancel{9} \\
\hline
 & & 6 &
\end{array} \Big\} 37$$

$a = 3.$
$b = 7.$

Mais parceque le quarré de $a + b$ qui represente le nombre 1369, contient le quarré de a, & deux fois le produit de a multiplié par b, ou, ce qui est la même chose, le produit du double de a multiplié par b & encore le quarré b; c'est pour cela que nous ferons l'extraction des racines de ces trois produits l'une après l'autre.

1°. C'est dans la premiere tranche vers la main gauche qu'on trouve toûjours le quarré du premier chifre de la racine cherchée, comme on le verra dans la suite ; à cause de cela, je cherche la racine du quarré, qui approche le plus près de 13, & je trouve que c'est 3 racine de 9 ; j'écris 3 au rang des racines. Ce chifre 3 est representé par a : je retranche ensuite de 13 le quarré aa, c'est à dire le quarré de la racine 3, qu'on vient de trouver, qui est 9, il reste 4, que j'écris sur le 3.

2°. Dans les produits $2ab + bb$ outre la racine $a = 3$ qui vient d'être connuë, il reste encore à trouver la valeur de l'autre racine b. Cette 2ᵉ racine se trouve dans ce qui peut rester dans la premiere tranche, après qu'on en a retranché le quarré de la premiere racine, & dans le premier chifre vers la main gauche de la deuxiéme tranche, ce qu'on fera voir par la suite ; mais lorsqu'on connoît un produit avec une de ses racines, il est facile de trouver l'autre racine de ce produit, en divisant ce même produit par la racine connuë ; le quotient de cette division donnera l'autre racine qu'on cherche. Dans cet exemple, le 4 qui reste écrit au dessus de 13, & le 6, premier chifre de la 2ᵉ tranche sont 46, dans lequel nombre est le produit dont le double de a, c'est à dire le double de 3 est une des racines qui vient d'être connuë ; & partant si on divise ce produit par 6 qui est le double de 3, on trouvera pour quotient 7, second chifre de la racine cherchée qui est representé par b ; & partant si on multiplie ce dernier chifre trouvé par ce double du premier chifre trouvé, on aura 42, c'est à dire $2ab$, on retranchera ces 42 des 46 dont on vient de parler, il reste 4 qu'on écrira sur le 6.

3°. Enfin des 49 qui restent, on retranchera le quarré de cette derniere racine 7, qui eſt 49, il ne reſtera rien; on écrira o au deſſus, & on concluëra que la racine 37 eſt exacte; c'eſt à dire que le nombre 1369 eſt un nombre quarré dont la racine eſt préciſément 37.

Il reſte preſentement à faire voir que le quarré du premier chifre de la racine cherchée ſe trouve toûjours dans la premiere tranche du nombre dont on veut extraire la racine; que le produit du double du premier chifre de la racine cherchée multiplié par le deuxiéme chifre de cette racine, eſt dans ce qui peut reſter de la premiere tranche, & dans le premier chifre de la deuxiéme tranche vers la main gauche; Enfin que le quarré du 2e chifre de la racine cherchée eſt dans ce qui reſte, & dans le dernier chifre de la deuxiéme tranche en commençant de gauche à droit.

Pour connoître ces choſes évidemment, il n'y a qu'à faire le quarré de la racine cherchée 37, c'eſt à dire, multiplier 37 par 37, & remarquer quand on dit 7 fois 7 ſont 49, que c'eſt le quarré du ſecond chifre de la racine qui ſe trouve indubitablement dans la ſeconde tranche en comptant de gauche à droit. Enſuite quand on dit 3 fois 7 dixaines ſont 21; on écrit 1 au rang des dixaines, & le 2 dans un rang plus avancé, ſous les centaines. Quand

$$\begin{array}{rr|l}
a+b = & & 37 \\
a+b & & 37 \\
\hline
& bb = & 49 \\
2ab & \left\{\begin{array}{l}2\\2\end{array}\right. & \begin{array}{l}1\\1\end{array} \\
& aa = 9 & \\
\hline
& 13 & 69
\end{array}$$

on multiplie par 3 qui ſont les dixaines de 27, en diſant encore: 3 fois 7, ou 7 fois 3 dixaines ſont 21 qu'on écrit au deſſous des 21 dixaines precedentes : on voit évidemment que ces deux 21 sont deux fois le produit du dernier chifre 3 de la racine cherchée multiplié par le second chifre 7 ; ce qui est la même chose que le produit du double du premier chifre par le second , parceque l'un & l'autre font 42. Enfin 3 étant multiplié par 3 , qui sont des centaines , on trouve 9 pour produit qu'on écrit dans son rang : on trouve que ce 9 est le quarré du premier chifre 3 de la racine cherchée. De sorte qu'en commençant de droit à gauche, si on partage maintenant de deux en deux ces produits écrits de cette maniere sans les changer de situation , on trouvera le quarré du premier chifre de la racine dans la premiere tranche , & les autres produits de suite , comme on vient de dire.

Autre Exemple.

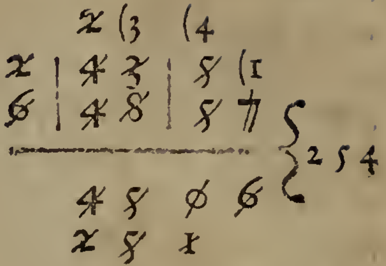
$$\begin{array}{c|c|l}
 & 2 & \\
\cancel{2} & \cancel{4}\ 3 & \\
\cancel{6} & \cancel{4}\ \cancel{8} & 5\ 7 \\
\hline
 & \cancel{4}\ \cancel{5} & \\
 & \cancel{2} &
\end{array} \Big\} 2\ \cancel{5}$$

Pour connoître la racine quarrée du nombre 64857 , ou du nombre quarré qui en approche le plus près , il faut separer de deux en deux les chifres qui expriment ce nombre en commençant de droit à gauche. Il se trouvera trois tranches ; ensuite il faut commencer de gauche à droit à la premiere tranche , disant : la racine du nombre quarré qui approche le plus près de 6 c'est 2 , qu'il faut écrire au rang des chifres de la racine qu'on cherche. Après cela on retranche du nombre 6 le quarré de ce chifre 2 qui est 4 , il reste 2 qu'on écrit sur le 6 , & on tranche ce 6.

Le premier chifre 2 de la racine cherchée vient d'être connu, il eſt repreſenté par a; mais parceque dans $aa+2ab+bb$ qui eſt le quarré de $a+b$ outre la racine du quarré aa, il faut encore connoître en chifre la valeur de l'autre racine qui eſt dans le produit $2ab$. Pour y réüſſir on conſiderera que le 2 qui eſt au deſſus du 6 & le 4 qui eſt dans la deuxiéme tranche fera 24, &, comme on a enſeigné dans l'exemple precedent, on diviſera 24 par le double de la racine qu'on vient de trouver, qui eſt le double de 2 égal à $4 = 2a$; & pour cela on écrira ce nombre 4 ſous le 4 de la deuxiéme tranche. Si le double de cette racine étoit exprimé par deux chifres, on écriroit toûjours le dernier ſous le premier de la deuxiéme tranche, & l'autre ſous les autres chifres vers la main gauche. On dira en 24 combien y a t-il de fois 4? on l'y trouve veritablement 6 fois; mais il faut obſerver que ſi je l'écrivois 6 fois, il ne me reſteroit que 8 dans la deuxiéme tranche, d'où je ne pourrois plus ſouſtraire le quarré de ce nombre 6, & partant j'écris au rang des racines ſeulement le chifre 5. Enſuite je multiplie ce ſecond chifre $5 = b$ de la racine cherchée par 4, ce qui fait $20 = 2ab$, que je retranche de 24, il reſte 4 que j'écris ſur le 4 de la deuxiéme tranche. Enſuite je tranche le 2 qui eſt ſur le 6, & ce 4 de la deuxiéme tranche comme inutiles; aprés cela il reſte encore le 4 qui eſt au deſſus du 4 de la deuxiéme tranche & le 8 ſuivant, ce qui fait 48 dont on retranchera le quarré du chifre 5 qui eſt $25 = bb$, il reſtera 23 qu'on écrira au deſſus de ces 48, & on tranchera enſuite ces 48.

Aprés cela, il faut conſiderer que les deux chifres 25 de la racine cherchée ſont exprimez par a. Or puiſque dans le quarré $aa+2ab$

$+ bb$, nous connoiſſons déja la racine du quarré aa qui eſt 25, il nous reſte encore à connoître en chifres la valeur de l'autre racine qui ſe trouve dans les



produits $2ab + bb$; mais ce produit $2ab$ ſe trouve dans les chifres qui viennent de reſter dans la deuxiéme tranche, & dans le 5 de la troiſiéme. Je doublerai donc la racine de $aa = 25$ que je viens de trouver, ce qui fera 50, dont j'écris le dernier chifre 0 ſous le premier de la troiſiéme tranche, & l'autre qui eſt 5 ſous le 5 qui precede vers la main gauche, & ſi dans ce double il ſe trouvoit plus de deux chifres j'écrirois le 3ᵉ ſous la 5ᵉ colomne qui precederoit, & ainſi des autres. Après cela je fais une diviſion, & je dis : en 23 combien y a-t-il de fois ce dernier 5 qui ſe trouve au deſſous du 3 ? je trouve qu'il peut y être 4 fois, j'écris 4 au rang des racines. Et partant ce 4 ſera le 3ᵉ chifre de la racine cherchée. Je multiplie enſuite ce 4 par les $50 = 2a$, & le produit eſt 200, je le retranche des 235 qui ſont au deſſus en cette ſorte : 4 fois 0 c'eſt 0, qui étant retranché de 5, il reſte 5 que j'écris au deſſus du 5. Enſuite 4 fois 5 ſont 20 qui étant retranchez des 23 qui ſont au deſſus, il reſte 3 que j'écris au deſſus du 3.

Enfin des 357, qui reſtent, je retranche le quarré de ce dernier chifre 4, qui eſt $16 = bb$, & pour cela j'écris 16 en poſant 6 ſous le dernier chifre 7, & la dixaine 1 ſous la colomne precedente. Je dis enſuite de 7 ôtez 6, reſte 1 que j'écris ſur le 7. De 5 ôtez 1 qu'on vient d'écrire au deſſous, reſte 4 que j'écris au deſſus du 5. Et partant il reſte encore 341, que je ſepare après avoir tranché le reſte; & je conclus que le nombre 64857 n'eſt pas un nombre quarré; mais que 254 eſt la racine du nombre quarré qui approche le plus près de ce nombre 64857, ce qu'on cherchoit, c'eſt à dire que ſi de 64857 on retranche 341, on aura un nombre quarré 64516, dont la racine eſt 254.

Il faut remarquer que s'il y avoit une 4ᵉ tranche, on doubleroit la racine trouvée, & on opereroit, comme on a fait en paſſant de la 2ᵉ à la 3ᵉ tranche; de même s'il y avoit une 5ᵉ tranche, &c.

Autre Exemple.

$$\begin{array}{llll} \bullet \quad\quad 0 & & 0 & \\ -aa+10ab & & -25bb & \\ aa-10ab+2ac & +25bb & -10bc+cc & \Big\{ \; a-5b \\ \hline 2a & 25bb & & \end{array}$$

Pour tirer la racine quarrée de $aa - 10ab + 2ac + 25bb - 10bc + cc$, je dis : la racine quarrée de aa eſt a que j'écris au rang des racines. Enſuite dans la grandeur propoſée je retranche ou j'efface le quarré aa de cette racine.

2°. Je double cette racine a, & j'écris $2a$ pour diviſeur, diſant : $-10ab$ diviſé par $+2a$ donne pour quotient $-5b$, je multiplie $-5b$ par $+2a$, ce qui produit $-10ab$ que je retranche de pareille grandeur en l'effaçant dans l'exemple propoſé, il ne reſte rien, j'écris o au deſſus. Enſuite je retranche le quarré de cette derniere racine trouvée $-5b$ qui eſt $+25bb$, de pareille grandeur qui ſe trouve dans l'exemple propoſé ; il ne reſte rien, je les efface l'une & l'autre, & j'écris o au deſſus.

$$\begin{array}{l} \quad 0 \quad\quad 0 \quad\quad 0 \quad\quad 0 \quad\quad 0 \quad\quad 0 \\ -aa+10ab-2ac-25bb+10bc-cc \\ \quad aa-10ab+2ac+25bb-10bc+cc \\ \hline \quad 2a \quad\quad 25bb \quad 2a-10b \quad cc \end{array} \Bigg\} a-5b+c$$

3°. Je conſidére la racine trouvée $a-5b$ comme dans les nombres, & je la double pour me ſervir de diviſeur, je trouve $2a-10b$ que j'écris au deſſous de la grandeur propoſée. Je dis: $+2ac$ diviſé par $+2a$, donne pour quotient $+c$, que j'écris pour racine cherchée. Enſuite je multiplie cette derniere racine par $-10b$ du dernier diviſeur, cela produit $-10bc$ que je retranche de $-10bc$ qui ſe trouve dans l'exemple propoſé, il ne reſte rien ; partant je les efface & j'écris o au deſſus. Après cela je multiplie cette derniere racine cherchée $+c$ par $+2a$ du dernier diviſeur, ce qui fait $+2ac$ qu'on retranche de pareille grandeur qui ſe rencontre dans l'exemple propoſé, il ne reſte rien, on les efface, & on écrit o au deſſus. Enfin on retranche cc quarré de $+c$, derniere racine trouvée, de pareille grandeur qui ſe rencontre dans l'exemple propoſé, & il ne reſte rien. Partant je conclus que la racine quarrée de $aa-10ab+2ac+25bb-10bc+cc$ eſt préciſément $a-5b+c$.

Il faut remarquer que dans cet exemple la racine cherchée peut auſſi être $-a+5b-c$ en changeant tous les ſignes de la racine precedente cherchée ; parceque ſi on multiplie cette grandeur par elle-même, on trouvera pour ſon quarré la grandeur qu'on vient de propoſer pour exemple. Pour faire l'extraction de cette racine avec ces derniers ſignes, on peut commencer en diſant : la racine quarrée de aa eſt $-a$; & ainſi du reſte.

Pour tirer la racine quarrée de $16aa + 72ab - 96ac + 81bb + 216bc + 144cc$, on commencera comme dans l'exemple precedent à écrire au rang des racines $4a$ qui eſt la racine de $16aa$, & on continuëra l'operation comme dans l'exemple precedent. Enfin on trouvera pour racine $4a + 9b - 12c$.

Afin de mieux s'exercer dans les commencemens qu'on étudie ces choſes, on peut prendre des racines à volonté & les quarrer; & enſuite du quarré en extraire la racine, comme on vient d'enſeigner.

Pour preuve que l'extraction qu'on a faite de la racine quarrée eſt telle qu'on la ſouhaite, il faut multiplier la racine trouvée par elle-même, & au produit de cette multiplication, on ajoutera le reſte s'il s'en eſt trouvé après l'extraction. Cette ſomme ſera un nombre égal à celui dont on a tiré la racine, ſi on a bien réüſſi. Si cela n'arrive pas, l'operation ſera mal faite, & il faudra la recommencer. Pour montrer qu'on a bien réüſſi dans l'extraction de la racine quarrée du nombre 64857 qu'on a propoſé dans un des exemples precedents, il faut multiplier la racine trouvée 254 par elle-même, & au produit de cette multiplication ajouter le reſte 341, on trouvera enfin le même nombre dont on a tiré la racine.

S'il ſe rencontroit une fraction dont on voulût tirer la racine quarrée, ſi cela étoit poſſible;

par exemple $\frac{36}{81}$, on prendra la racine quarrée 6 du numerateur 36, & enſuite on prendra la racine quarrée 9 du dénominateur 81, & on aura $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ pour la racine cherchée ; parceque cette fraction $\frac{6}{9}$ multipliée par elle-même produit $\frac{36}{81}$. Par la même raiſon on trouvera que la racine quarrée de cette fraction $\frac{ff}{gg}$ eſt $\frac{f}{g}$.

Après avoir fait les extractions des racines, comme on vient d'enſeigner ; s'il reſte quelque choſe, c'eſt une marque qu'on ne peut en trouver qu'une racine approchée, ou ſeulement la racine du nombre quarré qui approche le plus près du nombre propoſé. S'il reſte quelque choſe après avoir tenté l'extraction de la racine d'une grandeur litterale on évite cette extraction, qui à cauſe de ce reſte n'eſt point exacte. On verra dans la ſuite de quelle maniere on doit exprimer ces racines à l'égard des quarrez, des cubes, &c.

Autre Exemple.

Pour connoître la racine cubique du nombre 105154067, ou du nombre cube qui en approche le plus près, il faut ſeparer de trois en trois les chifres qui expriment ce nombre, en commençant comme dans l'extraction de la racine quarrée de droit à gauche. On rendra raiſon de cela, comme on a fait pour la racine quarrée ; parceque 1000 eſt le plus petit des nombres cubes exprimez

primez par plus de 3 chifres, dont la racine cubique qui eſt 10 eſt auſſi la plus petite de celles qui ſont exprimées par pluſieurs chifres. Donc tout nombre au deſſous de 1000, c'eſt à dire, qui eſt exprimé par moins que 4 chifres aura ſa racine cubique exprimée par un ſeul chifre. Lorſqu'on fait l'extraction de la racine cubique d'un nombre, on cherche les racines des plus grands cubes qui ſont dans ce nombre, exprimées chacune par un chifre ſeulement. On eſt aſſuré de trouver ces racines en ſeparant les chifres de ce nombre de 3 en 3. Si on vouloit extraire la racine de la 4^e^ puiſſance, on ſepareroit les chifres de 4 en 4; pour la 5^e^ puiſſance, de 5 en 5, &c. on feroit toûjours un raiſonnement ſemblable au precedent.

Il faut encore ſe reſſouvenir de la regle generale pour les extractions de toutes ſortes de racines, qui eſt qu'on repreſente toûjours la racine qu'on cherche comme une grandeur compoſée de deux parties $a + b$; a repreſente le chifre ou les chifres trouvez, & b repreſente le chifre qu'on cherche. Le cube de cette grandeur $a + b$ qui eſt $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ ſert de regle dans les extractions des racines cubiques.

Il faut commencer vers la main gauche à la prémiere tranche, diſant: la racine du nombre cube, qui approche le plus près de 105 c'eſt 4 qu'il faut écrire au rang des chifres de la racine qu'on cherche. Après cela on retranche du nombre 105 le cube 64 de ce nombre 4, il reſte 41 qu'on écrit au deſſus

```
    7
  4 1 | 5
1 0 5 | 1 5 4 | 0 6 7  } 4 7
------------------------
  6 4   8
    4
```

de 105, & on efface ces 105.

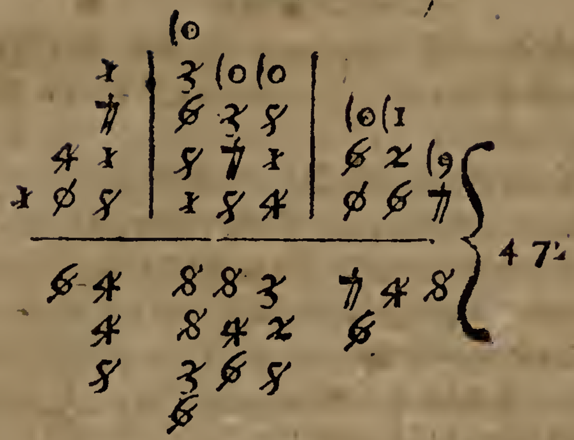
Le premier chifre $4 = a$ de la racine cherchée vient d'être connu; mais en ſuivant nôtre regle generale, il reſte encore à connoître en chifres la valeur de l'autre racine b qui eſt dans le produit $3aab$. La valeur de ce ſecond chifre ſe trouve dans les 41 reſtants de la premiere tranche, & dans le 1 de la 2^e^ tranche, c'eſt à dire dans 411. On triplera donc le quarré de la racine qu'on vient de trouver, & on aura $48 = 3aa$ qui ſervira de diviſeur. Il faudra l'écrire au deſſous, deſorte que ſon dernier chifre 8 ſe trouve ſous le premier 1 de la 2^e^ tranche. Enſuite on dira comme dans l'extraction de la racine quarrée, en 41 qui reſte ſur 05 combien y a t-il de fois 4 qu'on vient d'écrire au deſſous? on l'y trouve 10 fois; mais parcequ'on n'écrit jamais au quotient d'une diviſion plus de 9 à chaque poſition, & que même dans la circonſtance preſente, après avoir tenté, on ne peut ni écrire 9 fois, ni 8 fois; parceque les reſtes qui ſe trouveroient dans les premieres & ſecondes tranches ne ſeroient pas ſuffiſants pour qu'on en pût encore retrancher la valeur de $3abb + b^3$, c'eſt pour cela qu'on n'écrira que 7 au rang des racines. Il faut enſuite multiplier ce ſecond chifre $7 = b$ de la racine par 8, cela fait 56 qu'on retranche de 61, en imaginant 6 dixaines avec le 1 de la premiere tranche, comme dans la diviſion, il reſte 5 qu'on écrit ſur 1, & on retient 6. Après cela on dit 4 fois 7 ſont 28, & 6 qu'on vient de retenir font 34 qu'on retranche de 41, il reſte 7 qu'on écrit au deſſus de 1. Ce qu'on vient de faire eſt la même choſe que ſi de 411 on retranchoit $336 = 3aab$ produit de 48 multiplié par 7, & qu'on écrivit au deſſus le reſte 75. Enſuite pour ſatisfaire au troiſiéme produit $3abb$, on multipliera $49 = bb$, qui est le quarré de 7 par le triple de 4 qui est $12 = 3a$, on aura pour produit $588 = 3abb$ qu'on écrira, de sorte que son dernier chifre 8 se trouve sous le chifre 5 de la 2^e^ tranche. Ensuite on soustraira ce nombre 588 de ce qui reste au dessus, comme on a enseigné dans la soustraction, & on écrira encore le reste au dessus, aprés avoir tranché les chifres precedents comme

```
        1
        7   6
     4  1 | 5  7     |
  1  0  5 | 1  5  4  | 0 6 7 \
  ---------------------------  } 47
     6  4   8  8             /
        4   8
        5
```

```
        1   3
        7   6  3
     4  1 | 5  7  1  |
  1  0  5 | 1  5  4  | 0 6 7 \
  ---------------------------  } 47
     6  4   8  8  3          /
        4   8  4
        5   3
```

inutiles. Enfin on écrira encore au dessous $343 = b^3$ qui est le cube de 7, qu'on retranchera à la maniere ordinaire de ce qui reste au dessus. Cela étant fini dans ces deux premieres tranches, on passera à la troisiéme.

Il faut presentement remarquer que les deux chifres 47 de la racine qu'on cherche, sont exprimez par a; & que dans le cube $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, qui represente le nombre proposé dont on veut tirer la racine cube, nous venons de connoître la racine du cube a^3 qui



eſt 47, il reſte encore à connoître la valeur en chifres de l'autre racine qui ſe trouve dans le 2ᵉ produit $3aab$. La valeur de ce produit ſe trouve dans ce qui vient de reſter de la 2ᵉ tranche, & dans le premier chifre de la 3ᵉ. On triplera donc le quarré de 47 qui eſt $6627 = 3aa$, qu'on écrira pour diviſeur, de ſorte que ſon dernier chifre 7 ſe trouve ſous le premier chifre 0 de la 3ᵉ tranche. Au lieu qu'il faut paſſer de la 2ᵉ à la 3ᵉ tranche ; s'il falloit paſſer de la 3ᵉ à la 4ᵉ, on ſuivroit toûjours la même methode. Après cela on fait une diviſion, diſant : en 13 combien y a t-il de fois 6, on l'écrira 2 fois au rang des racines. Enſuite on multipliera $6627 = 3aa$ par ce nombre $2 = b$, comme on vient de faire lorſqu'on a trouvé le chifre 7, & on aura pour produit $13254 = 3aab$, qu'on retranchera de 13310 qui ſont les chifres reſtants de la 2ᵉ tranche & le premier de la 3ᵉ. On aura pour reſte 56 qu'on écrit au deſſus de 10 qui ſont les deux derniers chifres de ce nombre 13310, après avoir tranché les precedents. Enſuite on multipliera le triple de $47 = a$ par 4 quarré de $2 = b$ dernier chifre trouvé de la racine, on aura pour produit $564 = 3abb$. On écrira ce nombre au dessous des autres, de sorte que son dernier chifre 4 soit sous le 2^e de la 3^e tranche. Après cela on retranchera à la maniere ordinaire ce nombre 564 de 566 qui se trouvent au dessus, il restera 2 qu'on écrira sur le dernier 6 de ce nombre après avoir effacé les precedents. Enfin des 27 qui restent, on retranchera $8 = b^3$ cube du dernier chifre de la racine, & il restera encore 19 qu'on separera après avoir tranché les autres comme inutiles.

Et partant on concluëra que la racine cherchée 472 n'est pas précisément la racine cubique du nombre proposé; mais que si de ce nombre proposé on retranchoit les 19 qui restent, on auroit pour reste un nombre cube, dont la racine est précisément 472, qui est ce qu'on cherchoit par cette operation.

Pour tirer la racine cubique de $a^3 + 9aab + 6aac + 27abb + 36abc + 27b^3 + 12acc + 54bbc + 36bcc + 8c^3$, on suivra la même methode & le même raisonnement qu'on vient de mettre en usage pour les nombres, excepté seulement qu'il n'est point necessaire de partager par tranches de 3 en 3 les parties litterales de cette grandeur, comme on a fait dans les chifres; & on trouvera que la racine cherchée sera $a + 3b + 2c$,

L'exemple precedent de la grandeur litterale, dont on a fait l'extraction de la racine quarrée, & les autres exemples proposez en nombres, donnent une ouverture suffisante pour l'extraction des racines de toutes sortes de puissances. Par exemple pour tirer la racine d'une 4^e puissance d'une grandeur proposée en nombres, on partagera les chifres de 4 en 4, commençant de droit à gauche, & on prendra pour regle la

4[e] puiſſance de $a + b$ qui eſt $a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4$; & ainſi des autres puiſſances.

Pour faire la preuve de l'extraction de la racine cubique, il faut multiplier par elle-même la racine trouvée, ce qui produira le quarré de cette racine. Il faut enſuite multiplier ce quarré par cette même racine trouvée, le produit de cette derniere multiplication ſera le cube de cette racine, qui ſera préciſément égal au nombre propoſé; ſi après cette extraction il n'étoit rien reſté, & s'il étoit reſté quelque choſe, en l'ajoutant à ce cube on doit pareillement, ſi on a bien réüſſi, trouver une ſomme égale au nombre dont on a voulu faire l'extraction de la racine cubique; ſi cela arrive autrement, l'operation eſt vicieuſe & mal faite. Pour être certain ſi 472 eſt veritablement la racine du nombre 105154067 propoſé dans un des exemples precedents, ou du nombre qui en approche le plus près, il faut cuber cette racine trouvée 472, & à ſon cube ajoûter le reſte 19, ſi on a bien réüſſi, on trouvera enfin le nombre dont on s'étoit propoſé d'extraire la racine. On agira de même à l'égard des autres exemples.

Remarques pour l'approximation des racines des Nombres.

Un Nombre n'eſt point un nombre quarré, lorſqu'on ne peut trouver un autre nombre entier, lequel étant multiplié par lui-même, donne un produit égal à ce premier nombre. On en jugera de même du nombre qui n'eſt point cube, & ainſi des autres puiſſances : tels ſont les nombres 2, 3, 5, 6, 7, 10, 35, &c. Mais quoiqu'on ne puisse trouver précisément une racine quarrée d'un nombre qui n'est point quarré, on peut cependant trouver une racine, qui approchera si près de la racine cherchée de ce nombre qui n'est point quarré, que l'excés de cette racine cherchée par dessus la racine trouvée, sera moindre que la valeur de telle fraction qu'on voudra assigner. Ainsi on a un moyen d'approcher à l'infini de la racine quarrée du nombre qui n'est point quarré. Enfin quoique le nombre entier dont on ne peut trouver la racine, ne soit pas un nombre quarré ou un nombre cube, &c. d'une racine connuë & determinée par des nombres entiers, ou par des entiers & fractions; on le considere cependant comme un nombre quarré, cube, &c. de la racine inconnuë qu'on ne peut trouver; & c'est cette consideration qui conduit à l'extraction d'une racine qui approche si prés de la racine cherchée, qu'il ne s'en faudra pas telle fraction qu'on voudra déterminer, qu'on n'ait rencontré au juste la racine de ce nombre.

La regle generale pour parvenir à cette approximation est de multiplier le nombre proposé, qu'on considere comme la puissance dont on veut extraire la racine, par la puissance semblable du nombre qu'on veut être le denominateur de la fraction, qui sera jointe à la racine du quarré qui approchera le plus près du nombre proposé. Par exemple si on veut trouver la racine approchée de 39, on fait d'abord reflexion que la racine du nombre quarré, qui approche le plus prés de 39, c'est 6. Mais le quarré de 6 n'est que 36; il faut donc davantage que 6 pour faire la racine quarrée de 39; il faut moins que 7, parceque le quarré de 7 est 49, qui est plus grand que 39. Enfin il faut donc ajouter à 6 une fraction, de sorte que le quarré de 6, & cette fraction approche des 39 autant qu'on voudra. Je veux par exemple qu'à cette racine 6 on joigne des treiziémes, & qu'il ne s'en faille pas $\frac{1}{13}$ qu'on ne sçache précisément la racine de 39. Il faut considerer 39 comme un quarré, dont on cherche la racine, & à cause des treiziémes qu'on veut avoir, il faut multiplier ce nombre 39 par 169 qui est le quarré de 13, & on aura pour produit 6591, dont on aura pour racine quarrée 81 reste 30. On negligera ce reste 30, & on fera seulement attention à cette racine 81, qu'on divisera par 13, qui est la racine du quarré 169; & on aura pour quotient $6\frac{3}{13}$. Et partant on concluëra que $6\frac{3}{13}$ approche si près de la racine cherchée, que si on ajoutoit un treiziéme, on auroit une racine trop grande.; parceque le quarré de $6\frac{4}{13}$ est $\frac{6724}{169} = 39\frac{133}{169}$, au lieu que le quarré de $6\frac{3}{13}$ est $\frac{6561}{169} = 38\frac{139}{169}$.

On doit operer de la même maniere à l'égard des autres nombres dont on veut extraire les racines approchées, & ce qu'on dit à l'égard des treiziémes; on le peut dire de même de toute autre fraction qu'on se veut proposer.

Mais à cause que dans l'approximation des racines quarrées, cubes, ou toute autre que ce soit, il est beaucoup plus facile de se servir des dixiémes, qu'on appelle fractions decimales, ou centiémes, ou milliémes parties, &c. pour ajouter à la racine du nombre quarré qui approche le plus près de celui qu'on se propose. C'est pour cela que si on veut faire l'extraction de la racine quarrée d'un nombre qui n'est point quarré, on ajoute à ce nombre 0 0, parcequ'il se trouve par ce moyen multiplié par 100, quarré de 10. Si on écrit ensuite à ce nombre proposé quatre zeros, il se trouvera multiplié par 10000, qui est le quarré de 100, & alors on aura pour fraction des centiémes. Enfin quand on ajoute des zeros, il faut toûjours les ajoûter deux à deux à cause des quarrez de 10, 100, 1000, &c. On voit par ce moyen que plus on ajoûtera de zeros, plus la racine trouvée approchera de celle qu'on cherche. On est par exemple plus assuré qu'on est plus proche de la racine qu'on cherche, s'il s'en faut moins qu'une milliéme partie d'unité, que s'il s'en falloit moins qu'une dixiéme.

Par exemple pour avoir la racine approchée de 24, j'ajoute ensuite de 24 deux zeros, & par ce moyen 24 se trouvera multiplié par 100 qui est le quarré de 10, ce qui produira 2400 dont on aura pour racine 48, reste 96 qu'on negligera, & on divisera 48 par 10, on aura $4\frac{8}{10}$ $= 4\frac{4}{5}$, qui sera la racine quarrée approchée de 24.

Si on vouloit faire par approximation l'extraction de la racine cubique d'un nombre qui ne seroit pas cube, on lui ajouteroit 3 zeros, ou 6 zeros, ou 9, &c. parcequ'alors le nombre propoſé étant conſideré comme cube de la racine cherchée, ſe trouveroit multiplié par 1000, qui eſt le cube de 10; ou par 1000000, qui eſt le cube de 100. Enſuite on tireroit la racine cubique de ce produit, & on diviſeroit cette racine trouvée par 10, ſi on avoit ajouté 3 zeros, par 100, ſi on en avoit ajouté 6, &c. on auroit au quotient de cette diviſion la racine cubique approchée qu'on chercheroit.

Si on vouloit faire par approximation l'extraction de la racine 4ᵉ d'un nombre qui ne ſeroit pas préciſément une 4ᵉ puiſſance, on lui ajouteroit 4 zeros, ou 8 zeros, &c. enſuite on feroit l'extraction de la racine 4ᵉ, ſuivant les regles generales qu'on a pratiquées pour les extractions de racines quarrées, &c. enfin on opereroit, comme on vient d'enſeigner.

La certitude de cette pratique eſt facile à comprendre. Soit le nombre 39 qu'on vient de propoſer dans un des exemples precedents; puiſqu'il eſt conſideré comme un quarré dont on cherche la racine, on aura $39 = aa$. Soit l'autre nombre pris à volonté $13 = b$, dont le quarré $169 = bb$; ſi on multiplie aa par bb, on aura $aabb$, dont la racine quarrée eſt ab, puiſque ab multiplié par lui-même, produit $aabb$. Or cette racine ab étant diviſée par $b = 13$, donne pour quotient a qui eſt la racine de $aa = 39$. Soit par exemple 56 dont on cherche la racine cubique: puiſqu'on conſidere ce nombre comme cube, on aura $56 = a^3$. Soit un autre nombre, par exemple $1000 = b^3$, dont la racine cubique eſt $10 = b$; ſi on multiplie a^3 par b^3, on aura pour produit $a^3 b^3 = 56000$, dont la racine cubique eſt ab. Or cette racine étant diviſée par $10 = b$, on aura a pour la racine cubique de 39.

On fera un pareil raiſonnement à l'égard de l'extraction de la racine des autres puiſſances lorſqu'on veut avoir des racines approchées. On voit évidemment que la fraction jointe au nombre entier qui eſt la racine exacte de la puiſſance qui approche le plus prés du nombre propoſé ſeroit préciſément la racine cherchée, s'il ne reſtoit rien aprés ces dernieres extractions. Mais à cauſe de ce reſte qu'on eſt obligé de negliger, on ne peut avoir que des racines approchées.

DES RACINES

dont on ne peut faire l'extraction exactement.

1. Une puiſſance parfaite eſt celle dont on peut extraire la racine ſans reſte. Par exemple a^3 eſt une puiſſance parfaite; parce que ſa racine exacte eſt a. Le nombre 25 eſt une puiſſance parfaite: mais ab n'eſt pas une puiſſance parfaite, ni 12, &c.

2. Lorſqu'on ne peut faire l'extraction de la racine d'un nombre propoſé ſans qu'il reſte quelque choſe, ſouvent on ſe contente d'exprimer cette racine par ce ſigne $\sqrt{}$, appellé *Signe radical*. On écrit ce ſigne devant le nombre propoſé, & ſur ce même ſigne on écrit encore un chifre qui eſt l'expoſant de la racine dont il s'agît; on l'appelle auſſi *l'expoſant du ſigne radical*. Par exemple, pour exprimer la racine quar-

rée, on écrit $\sqrt[2]{}$; la racine cubique, on écrit $\sqrt[3]{}$; la racine de la 4^e puiſſance, on écrit $\sqrt[4]{}$, &c. Lorſqu'on écrit ſeulement ce ſigne $\sqrt{}$ devant quelque grandeur, cela ſignifie *racine quarrée.* Par exemple cette expreſſion $\sqrt{158}$, ou $\sqrt[2]{158}$, ſignifie la racine quarrée de 158; $\sqrt[3]{ab}$, c'eſt à dire, racine cubique de ab. Si la grandeur dont on veut exprimer la racine, à pluſieurs parties; on écrit le ſigne radical devant cette grandeur, & depuis le ſigne on mene une ligne au deſſus de la grandeur, pour marquer qu'elle eſt toute ſous ce même ſigne. Par exemple $\sqrt[4]{ab + bc}$, cela ſignifie la racine 4^e de $ab + bc$; & ainſi des autres. Pour exprimer la racine dont il s'agit, on ſe contente d'écrire le ſigne radical devant les grandeurs litterales dont on ne peut extraire cette racine ſans qu'il y ait un reſte.

3. Les racines ſourdes, ou irrationnelles, ſont celles qu'on ne peut exprimer que par le moyen de ce ſigne $\sqrt{}$, ſur lequel on écrit 2, 3, ou 4, &c. pour expoſant de ces racines.

4. Les racines imaginaires ou impoſſibles ſont celles des grandeurs entierement négatives, & lorſque les expoſans de ces racines ſont des nombres pairs. Par exemple $\sqrt{-38}$, ou $\sqrt{-12}$, ou $\sqrt{-a^4}$, ou $\sqrt{-dd}$, &c. ſont des racines imaginaires ou impoſſibles. Parcequ'on ne peut trouver aucune grandeur telle qu'elle puiſſe être, ſoit négative ou poſitive, dont le quarré ou la 4^e puiſſance, ou la 6^e, &c.

ſoient négatives ; puiſque, comme on a vû [1] dans la multiplication, + par +, ou — par —, produit toujours +.

Quand on veut aprofondir l'Algebre, les racines ſourdes ſont fort frequentes. Parceque l'extraction des racines, principalement de celles qui ſont quarrées, ou qui ſont cubiques, eſt une operation fort ordinaire. Outre cela il eſt certain qu'il y a plus de nombres qui ne ſont ni quarrez ni cubiques, que de nombres quarrez ou cubiques. Par exemple, depuis 1 juſqu'à 30 il n'y a que 4, 9, 16, & 25 qui ſoient quarrez exactement, & les autres nombres 2, 3, 5, 6, 7, &c. ne ſont point des puiſſances parfaites. Ainſi il eſt évident qu'on doit trouver ſouvent des racines ſourdes. Or on peut ajouter une racine ſourde avec une autre racine ſourde, ou l'en ſouſtraire, les multiplier, ou les diviſer l'une par l'autre, quoiqu'on ne connoiſſe pas preciſément la valeur de chacune, & ces operations, entr'autres la multiplication, ſont d'un grand uſage dans la pratique de l'Algebre ; c'eſt pourquoi il eſt fort neceſſaire de ſçavoir comment on les peut faire ſur ces ſortes de grandeurs. Pour faire ces operations, il faut premierement ſçavoir préparer les racines ſourdes, 1°. en les reduiſant à un même nom, ou à un même ſigne; 2°. En les reduiſant à leurs expreſſions les plus ſimples, quand cela eſt poſſible.

Reduction des grandeurs irrationelles à un même nom, ou même ſigne.

Cette preparation eſt fondée ſur un principe

[1] *Avertiſſ. pag.* 77.

dont tout le monde convient, qui est qu'une racine est toujours la même, c'est à dire *qu'elle ne devient ni plus grande ni plus petite, lorsque de racine quarrée qu'elle étoit, on fait qu'elle est racine cubique, ou racine* 4^e, *racine* 5^e, *&c.* Par exemple, f est la racine de toutes ces puissances f^2, f^3, f^4, f^5. Ce qui montre clairement que les racines de ces puissances ne sont pas plus grandes l'une que l'autre.

Pour reduire differentes grandeurs irrationnelles sous un même signe sans changer leur valeur, il faut chercher le plus petit nombre qui puisse être divisé sans reste par les exposans des signes radicaux sous lesquels sont ces grandeurs irrationnelles. Ensuite il faut élever chacune de ces deux grandeurs à une puissance qui ait pour exposant le nouveau nombre, lequel sera aussi l'exposant du nouveau signe radical.

Soient ces racines sourdes $\sqrt{bc}$ & $\sqrt[3]{fg}$ à réduire sous un même signe radical. L'exposant de $\sqrt{\ }$ est 2, & l'exposant de $\sqrt[3]{\ }$ est 3. Pour trouver un nombre qui puisse être divisé sans reste par 2, & ensuite par 3, je peux multiplier 2 par 3 pour avoir 6. Mais parceque cette voye est quelquefois trop longue, j'aime mieux chercher ce nombre en y reflechissant. Ce nombre 6 me fait donc connoître qu'il faut élever $\sqrt{bc}$ & $\sqrt[3]{fg}$ à la 6^e puissance, ce qui se fait en prenant le cube de bc devant lequel j'écrirai ce signe $\sqrt[6]{\ }$, & en prenant le quarré de fg devant lequel j'écrirai aussi $\sqrt[6]{\ }$, & j'aurai $\sqrt[6]{b^3c^3} = \sqrt{bc}$, & $\sqrt[6]{ffgg} =$

$\sqrt[3]{fg}$. Car cette grandeur bc est considerée comme un quarré, & $\sqrt{bc}$ en exprime la racine. Or le quarré de bc qui est $bbcc$ est la 4^e puissance de $\sqrt{bc}$, puisqu'en multipliant un quarré par lui-même, cela forme une 4^e puissance; si on multiplie encore cette 4^e puissance $bbcc$ par bc qui est le quarré de sa racine, cela formera la 6^e puissance cherchée. On fera le même raisonnement pour connoître que $\sqrt[6]{ffgg}$ $= \sqrt[3]{fg}$.

Soient les grandeurs irrationelles $\sqrt{cd}$ & $\sqrt[4]{fh}$ à reduire à un même nom, ou sous un même signe. Je fais reflexion que le nombre 4 peut être divisé exactement par le nombre 4 qui est l'exposant de $\sqrt[4]{fh}$, & que ce même nombre 4 peut aussi être divisé éxactement par 2 qui est l'exposant de $\sqrt{cd}$. Cela fait donc connoître que les puissances de ces deux racines doivent devenir des quatriémes puissances, & pour cela il faut prendre le quarré de $\sqrt{cd}$, & on aura $\sqrt[4]{ccdd} = \sqrt{cd}$, & $\sqrt[4]{fh}$ ne changera point.

Reduction des grandeurs irrationelles à leurs expressions les plus simples.

Si la grandeur enfermée sous un signe radical êtoit une puissance parfaite, c'est à dire, dont on pût tirer une racine exacte; & si l'exposant de cette puissance parfaite étoit égal à l'exposant du signe radical; pour rendre l'expression plus simple, il faudroit seulement extraire la racine exprimée. Soit, par exemple, cette expreſſion $\sqrt{cc}$; le ſigne radical exprime une racine quarrée, & cc eſt un quarré. Il faut reduire $\sqrt{cc}$ à c qui eſt la racine de cc. de même il faut reduire cette expreſſion

$\sqrt{bb - 2bc + cc}$ à celle-ci, $b - c$.

Mais ſi la grandeur contenue ſous le ſigne radical n'eſt pas une puiſſance parfaite, ou ſi ſon expoſant n'eſt pas auſſi l'expoſant du ſigne radical; il faudra reduire l'expreſſion à ſes plus ſimples termes, lorſque cela eſt poſſible, en cette ſorte.

Il faut diviſer la grandeur propoſée, par un diviſeur qui la puiſſe diviſer exactement, c'eſt à dire, ſans reſte, & de ſorte que ce quotient ſoit une puiſſance parfaite. Si cette grandeur eſt un nombre, il faut chercher ce diviſeur dans les nombres premiers 2, 3, 5, 7, &c. de ſorte que, s'il eſt poſſible, il ſoit tel que le quotient de la diviſion ſoit un nombre quarré, s'il s'agit d'une racine quarrée, ou cubique; s'il s'agit d'une racine cubique, &c. & s'il ſe rencontroit pluſieurs diviſeurs tels qu'on les ſouhaite, il faudroit toujours preferer le plus grand. Si entre ces quotients, on n'en peut trouver qui ſoient quarrez, cubes, &c; on ne peut faire la reduction. Il faut prendre la racine de cette puiſſance parfaite, c'eſt à dire, de ce nombre quarré, ou cubique, &c, l'écrire devant le ſigne radical, & écrire le diviſeur aprés le ſigne radical.

Soit propoſée $\sqrt{a^3 b}$ pour être reduite à l'expreſſion la plus ſimple. Entre tous les diviſeurs qui peuvent diviſer exactement $a^3 b$, je trouve ab qui le diviſe de telle maniere que le quotient aa eſt un quarré dont je prends la racine a que j'écris devant le ſigne radical, aprés ce même ſigne j'écris le diviſeur ab ; & je trouve $a\sqrt{ab}$ au lieu de $\sqrt{a^3 b}$. J'ai choiſi un diviſeur tel qu'il me donnoit un quarré pour quotient. Parceque $\sqrt{\ }$ ſignifie *racine quarrée*. S'il y avoit eu $\sqrt[3]{a^3 b}$, il auroit fallu prendre b pour diviſeur, afin d'avoir pour quotient un cube ſçavoir a^3, & j'aurois écris $a\sqrt[3]{b}$. On trouvera de même que $\sqrt{ddf} = d\sqrt{f}$; puiſque $d = \sqrt{d^2}$. Car multiplier $\sqrt{f}$ par d, dont le produit eſt $d\sqrt{f}$, ou multiplier $\sqrt{d^2}$ par $\sqrt{f}$, dont le produit eſt $\sqrt{ddf}$; c'eſt la même choſe.

Soit encore cette autre grandeur $\sqrt{bbc^3}$ à reduire à une expreſſion la plus ſimple. Entre tous les diviſeurs de bbc^3 il en faut choiſir un qui donne pour quotient un quarré. Je trouve que c'eſt c qui donne pour quotient le quarré $bbcc$ dont j'écris la racine bc devant le ſigne radical, j'écris le diviſeur c aprés ce ſigne radical, & je trouve $bc\sqrt{c}$. De même $\sqrt{a^4 b^3}$ ſera reduite à $aab\sqrt{b}$.

Soit enfin cette racine ſourde $\sqrt{80}$, je la reduirai à cette expreſſion plus ſimple & équivalente $4\sqrt{5}$, c'eſt à dire que la racine quarrée de 80 eſt la même choſe que le produit du nombre 4 multiplié par la racine quarrée de 5. Car j'ay diviſé 80 par 5, & j'ai trouvé pour quotient le nombre quarré 16. Si je multiplie preſentement 16 par 5, j'aurai [1]80. En multipliant 16 par 5, je multiplie[2]auſſi la racine de 16 par la racine de 5, & le produit de ces deux racines eſt égal à la racine de 80. La racine de 16 eſt 4,

[1] *Cor. 3. de la diviſion pag. 42.*
[2] *Demonſtrat. de la Multip. des rac. ſourdes pag. 129.*

c'eſt pour cela qu'on écrit $4\sqrt{5}$ au lieu de $\sqrt{80}$. Cela eſt facile à comprendre, puiſque $4 = \sqrt{16}$ & que multiplier $\sqrt{16}$ par $\sqrt{5}$, ou 4 par $\sqrt{5}$, c'eſt la même choſe. On reduira de même $\sqrt{12a^3b}$ à cette expreſſion équivalente $2a\sqrt{3ab}$. Car le plus grand diviſeur de $12a^3b$ qui puiſſe donner au quotient des quarrez, ſçavoir 4 & aa, c'eſt 3 & ab.

Si la grandeur propoſée ſous le ſigne radical, étoit une fraction ; & s'il étoit poſſible de la reduire à une expreſſion plus ſimple : il ſeroit autant facile d'y réuſſir qu'à l'égard des autres grandeurs. Car pour cela il n'y auroit qu'à reduire le Numerateur à ſon expreſſion la plus ſimple, & le dénominateur pareillement à ſon expreſſion la plus ſimple ; & alors ce numerateur & ce dénominateur ainſi réduits, ſeroient le numerateur & le dénominateur d'une nouvelle fraction égale à la propoſée.

Soit, par exemple, $\sqrt{\frac{b^3c}{ddf}}$ à reduire à ſon expreſſion le plus ſimple. Le numerateur ſera reduit à $b\sqrt{bc}$, & le dénominateur ſera réduit à $d\sqrt{f}$; dont on formera la fraction $\frac{b\sqrt{bc}}{d\sqrt{f}}$ qui ſera égale à $\sqrt{\frac{b^3c}{ddf}}$.

Si on propoſe $\sqrt{\frac{48}{27}a^3b}$, ou $\sqrt{\frac{48a^3b}{27}}$, à reduire à l'expreſſion la plus ſimple, on trouve $\frac{4a\sqrt{3ab}}{3\sqrt{3}}$. Mais le numerateur de cette fraction $\frac{4a\sqrt{3ab}}{3\sqrt{3}}$ ſe trouvant multiplié par $\sqrt{3}$,& étant en même temps diviſé par $\sqrt{3}$; puiſque la Diviſion détruit ce que fait la Multiplication : on aura donc encore cette fraction $\frac{4a\sqrt{3ab}}{3\sqrt{3}}$ réduite à ſon équivalente $\frac{4a\sqrt{ab}}{3}$.

REMARQUE.

Si on éleve ce qui eſt écrit devant le ſigne radical, à la puiſſance exprimée par l'expoſant de ce même ſigne, & ſi on multiplie ce qui eſt ſous le ſigne radical par cette nouvelle puiſſance; au lieu d'une expreſſion plus ſimple, ce produit en donnera une plus compoſée, & on pourra mettre le tout ſous le même ſigne radical, pour avoir la même expreſſion qui étoit auparavant la réduction.

Soit, par exemple, $3b\sqrt{2af}$. Si j'éleve $3b$ à la puiſſance exprimée par $\sqrt{}$, je trouverai $9bb$ pour le quarré de $3b$. Si je multiplie $9bb$ par $2af$, je trouverai $18bbaf$, & remettant le ſigne radical $\sqrt{}$ devant ce produit, j'aurai $\sqrt{18bbaf} = 3b\sqrt{2af}$. Ceci ſert pour s'aſſurer ſi on a bien fait la réduction de la grandeur irrationnelle, à ſa plus ſimple expreſſion.

Par ce même moyen il eſt tres-facile de mettre une grandeur propoſée ſous un tel ſigne radical qu'on voudra, en l'élevant à la puiſſance du ſigne radical ſous lequel on veut mettre cette grandeur. Par exemple, ſi on veut mettre bc ſous $\sqrt[3]{}$, il faut écrire $\sqrt[3]{b^3c^3}$.

Lorſqu'on veut reduire des grandeurs irrationnelles à un même nom, si elles avoient déja été réduites à leurs expressions les plus simples; il faut les remettre dans leur premier état, en mettant le tout sous leurs signes radicaux, comme je viens d'enseigner.

De l'Addition des grandeurs irrationnelles.

La methode generale pour assembler plusieurs racines sourdes est de les écrire de suite, en mettant devant chacune le signe radical avec l'exposant de la racine qu'on veut exprimer, & en interposant le signe $+$. Par exemple cette grandeur $\sqrt{bc}$ sera ajoutée à $\sqrt{fg}$ en cette maniere $\sqrt{bc} + \sqrt{fg}$. Pour ajouter la racine cubique de 7 avec la racine 5[e] de 14, il faut écrire

$\sqrt[3]{7} + \sqrt[5]{14}$.

Les grandeurs irrationnelles étant reduites à des expressions simples, & étant de même nom, ou reduites aux mêmes signes; si les grandeurs qui sont sous le signe radical sont égales, il faut ajouter ce qui est devant le signe radical, & laisser sous ce même signe ce qu'on y a trouvé.

Soit par exemple $4\sqrt{2}$ à ajouter avec $3\sqrt{2}$, il faut dire 4 & 3 font 7, & écrire $7\sqrt{2}$ pour la somme qu'on cherche; ce qui est évident. Car soit $\sqrt{2} = a$. On aura donc $4\sqrt{2} = 4a$; & $3\sqrt{2} = 3a$. Donc $7\sqrt{2} = 7a$.

REMARQUE.

La somme des racines de 19 & de 23 est plus grande que la racine de 42 qui est la somme de 19 & de 23: de même que la somme des racines de 4 & de 9 est plus grande que la racine de 13 qui est la somme de 4 & de 9. Car la somme des racines de 4 & de 9 est 5, & la racine de 13 n'est pas 4.

De la Soustraction des grandeurs irrationnelles.

Pour retrancher une racine sourde d'une autre, il faut écrire celle dont on veut retrancher, & ensuite écrire l'autre precedée du signe —.

Pour retrancher $\sqrt[3]{bc}$ de $\sqrt[6]{b^4}$ il faut écrire $\sqrt[6]{b^4} - \sqrt[3]{bc}$.

Les grandeurs irrationnelles étant reduites à des expressions simples, & étant de même nom; si les grandeurs qui sont sous le signe radical sont égales, il faut soustraire l'une de l'autre celles qui sont devant le signe radical. Par exemple pour retrancher $5\sqrt{7}$ de $8\sqrt{7}$, on écrira pour reste $3\sqrt{7}$.

De la Multiplication des grandeurs irrationnelles.

Il faut les reduire, au moins, à même nom, ou sous des signes semblables. Ensuite il faut multiplier les grandeurs dont les racines sont proposées, l'une par l'autre, & devant le produit écrire le signe radical avec son exposant, comme il étoit à chacune de ces grandeurs avant qu'elles fussent multipliées.

Soit $\sqrt{df}$ à multiplier par $\sqrt{gh}$; le produit sera $\sqrt{dfgh}$. Pour multiplier $\sqrt{9}$ par $\sqrt{6}$, il faut écrire $\sqrt{54}$ qui sera le produit.

Pour rendre raison de cette maniere de multiplier les racines sourdes, il faut remarquer que la racine du produit de deux puissances de même nom multipliées l'une par l'autre est égale au produit des racines de ces deux puissances. Car soit le quarré xx multiplié par yy, on aura $xxyy$ dont la racine quarrée est xy qui est le produit des racines x & y des deux quarrez xx & yy. De même, si on multiplie le cube f^3 par h^3, on aura le produit $fffhhh$ dont la racine cubique fh est égale au produit des racines cubiques f & h de ces deux puissances; ce qui est aussi évident pour les autres puissances. Or à l'égard de ces grandeurs, par exemple $\sqrt{9}$ & $\sqrt{6}$, j'ai consideré 9 & 6 comme des quarrez dont les racines sont inconnues. Soit $\sqrt{9} = x$, & $\sqrt{6} = z$; j'aurai $9 = xx$, & $6 = zz$. Au lieu de multiplier 9 par 6, on peut donc multiplier ce qui leur est égal, sçavoir xx par zz, & on aura $xxzz = 54$, dont la racine $xz = \sqrt{54}$.

Si les racines sourdes qu'on veut multiplier l'une par l'autre, étant de même nom, ont aussi été reduites à des expressions plus simples; il faudra multiplier les grandeurs qui precedent les signes radicaux, l'une par l'autre, & écrire le produit devant un de ces signes. Il faudra aussi multiplier les grandeurs qui sont sous les signes radicaux, & écrire le produit sous ce même signe; alors on aura le produit qu'on cherchoit.

Soit $b\sqrt{c}$ à multiplier par $f\sqrt{g}$, je multiplirai b par f, & j'écrirai le produit bf devant le signe radical. Je multiplierai aussi c par g, & j'écrirai le produit sous le signe radical $\sqrt{\ }$ pour avoir ce produit $bf\sqrt{cg}$.

De même $5\sqrt{2}$ étant multipliée par $3\sqrt{7}$ donne pour produit $15\sqrt{14}$.

Pour faciliter davantage la multiplication de ces sortes de grandeurs dans toutes les circon-

stances

stances, il faut remarquer qu'on peut écrire 1 devant ou aprés le signe radical, quand même il ne s'y seroit pas trouvé auparavant. Parceque $a = 1a = 1a^1 = \frac{1a^1}{1} = \frac{1a^1}{1}\sqrt{1}$, c'est à dire que devant a on [1] sous-entend 1; on considere a comme une premiere puissance [2] dont l'exposant est 1; on considere a comme une fraction [3] dont le diviseur est 1; enfin on considere a comme multiplié par $\sqrt{1}$, puisque $\sqrt{1} = 1$, ou que 1 est la racine de toutes les puissances de 1. Il faut dire la même chose de toute autre grandeur simple, par exemple ab, ggh, &c.

C'est sur ce principe que, pour multiplier cette grandeur $df\sqrt{g}$ par $\sqrt{hm}$, au lieu de $\sqrt{hm}$ j'écrirai $1\sqrt{hm}$. Et, comme je viens d'enseigner, je multiplierai df par 1, ce qui ne produira que df, ensuite je multiplierai g par hm, pour avoir ghm, & le produit que je cherchois sera $df\sqrt{ghm}$.

Le produit de $b\sqrt{af}$ par $c\sqrt{af}$ est $bc\sqrt{aaff}$. Or dans ce produit $bc\sqrt{aaff}$, on trouve $aaff$ qui est un quarré dont la racine est af qui multiplie bc. On trouvera donc que $bc\sqrt{aaff} = bcaf$, en multipliant bc par $\sqrt{aaff}$. Cela fait voir que, quand on multiplie des racines sourdes l'une par l'autre, si les mêmes grandeurs se trouvent sous les signes radicaux de la 2[e] puissance, le produit des grandeurs qui precedent les signes radicaux étant multiplié par la grandeur qui se trouve sous un de ces signes, donne le produit qu'on cherche.

Enfin si on multiplie $af\sqrt{bd}$ par $5\sqrt{bd}$, le

[1] *Demande 5. d'Algeb. pag.* 70.
[2] *Pag.* 95. & 96. *Def.* 3. & 7.
[3] *Pag.* 53.

produit sera $5afbd$. De même cette grandeur $\sqrt{fgh}$ multipliée par $\sqrt{fgh}$, ou, ce qui est la même chose, $1\sqrt{fgh}$ par $1\sqrt{fgh}$, fait $1fgh = fgh$.

S'il y a des fractions devant le signe radical, ou sous le signe radical, même devant & aprés ce même signe; la multiplication de ces racines sourdes n'en sera pas plus difficile. Soit la grandeur $\frac{b}{c}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{c}}$ à multiplier par $f\sqrt{\frac{gh}{c}}$, ou, ce qui est la même chose, $\frac{b}{c}\sqrt{\frac{g}{c}}$ par $\frac{f}{1}\sqrt{\frac{gh}{c}}$; le produit sera $\frac{bf}{c}\sqrt{\frac{ggh}{cc}}$, qu'on reduira à $\frac{bfg}{cc}\sqrt{h}$. Parcequ'en divisant $\frac{ggh}{cc}$ par h, on a pour quotient le quarré $\frac{gg}{cc}$, dont la racine $\frac{g}{c}$ multiplie $\frac{bf}{c}$.

Si on multiplie $\frac{b}{c}\sqrt{\frac{f}{h}}$ par $\sqrt{h}$, ou par $\frac{1}{1}\sqrt{\frac{h}{1}}$ qui est la même chose que $\sqrt{h}$, on aura $\frac{b}{c}\sqrt{\frac{fh}{h}}$ pour le produit qui est égal à $\frac{b}{c}\sqrt{f}$. Parceque $\frac{fh}{h} = f$. On dira la même chose des autres.

Aprés ce qu'on a vu jusqu'ici, on ne trouvera aucune difficulté dans la multiplication des grandeurs irrationnelles complexes, c'est à dire, dans la multiplication des grandeurs irrationnelles composées de plusieurs parties. Car il faut faire la multiplication de ces sortes de grandeurs à la maniere ordinaire, en multipliant chacune des parties de la grandeur à multiplier, par chacune des parties du multiplicateur, & la somme de tous leurs produits formera le produit total.

Soit $f + g\sqrt{m}$ à multiplier par $f + g\sqrt{m}$. Aprés les avoir écrites l'une sous l'autre ; je dis f multipliée par f fait ff, j'écris ff. Ensuite je dis $g\sqrt{m}$ multipliée par f, fait $fg\sqrt{m}$ que j'écris. Je dis encore, f multipliée par $g\sqrt{m}$ fait $fg\sqrt{m}$ que j'écris. Enfin $g\sqrt{m}$ multipliée par $g\sqrt{m}$, fait $gg\sqrt{mm} = ggm$ que j'écris aussi, & je trouve pour le produit total $ff + 2fg\sqrt{m} + ggm$.

$$\begin{array}{l} f + g\sqrt{m} \\ f + g\sqrt{m} \\ \hline ff + fg\sqrt{m} \\ \qquad fg\sqrt{m} + ggm \\ \hline ff + 2fg\sqrt{m} + ggm. \end{array}$$

Je trouverai par la même Methode que cette grandeur $5f + 3h\sqrt{d}$ multipliée par $2f - m\sqrt{u}$, fait $10ff + 6fh\sqrt{d} - 5mf\sqrt{u} - 3mh\sqrt{du}$.

Si on se propose $m\sqrt{nu + xy}$ à multiplier par $\sqrt{nu + xy}$; on trouvera $mnu + mxy$ pour produit. Car nu & xy sont considerées comme une seule grandeur qui est sous le même signe radical.

Or $nu + xy$ est le quarré de $\sqrt{nu + xy}$. Pour multiplier ces deux grandeurs l'une par l'autre il suffit donc d'ôter le signe radical, & de multiplier $nu + xy$ par m qui precede. De même, si on multiplie $b\sqrt{bf + cc}$ par $b\sqrt{bf + cc}$, le produit sera $b^3f + bbcc$. Mais $b\sqrt{bf+cc}$ multipliée par $b\sqrt{bf-cc}$, fait $bb\sqrt{bbff-c^4}$. Parceque $b\sqrt{bf+cc}$, & $b\sqrt{bf-cc}$ ne sont pas la même grandeur.

Si on avoit $m\sqrt{nu+xy}$ à multiplier par $fg-hm$, il faudroit mettre $fg-hm$ sous le signe radical comme j'ai enseigné [1]; & alors on auroit $m\sqrt{nu+xy}$ à multiplier par $\sqrt{ffgg-2fghm+hhmm}$.

Enfin si on multiplie $\sqrt{bc}+\sqrt{mm-ux}$ par $\sqrt{bc}-\sqrt{mm-ux}$, le produit sera $bc-mm-ux$. Pour entendre cela, il suffit présentement de faire attention à l'operation.

Mult. $\sqrt{bc}+\sqrt{mm-ux}$

Par $\sqrt{bc}-\sqrt{mm-ux}$

$$bc+\sqrt{bcmm-bcux}$$

$$-\sqrt{bcmm-bcux}-mm+ux$$

Produit $bc-mm+ux$.

On trouvera par la même methode que

[1] *Pages* 127. & 128.

$m+\sqrt{ux+yz}$ étant multipliée par $m-\sqrt{ux+yz}$ fait $mm-ux-yz$.

La multiplication des racines ſourdes étant aſſez importante pour qu'on tâche de prevenir toutes ſes difficultés autant qu'il ſera poſſible, je propoſerai encore un exemple. Soit $\sqrt{ab+\sqrt{aa-bb}}$ à multiplier par $\sqrt{ab-\sqrt{aa-bb}}$; afin de rendre cette operation plus ſimple, ſoit $ab=m$, & $aa-bb=n$. J'aurai donc à multiplier $\sqrt{m+\sqrt{n}}$ par $\sqrt{m-\sqrt{n}}$ dont le produit eſt $\sqrt{mm+m\sqrt{n}-m\sqrt{n}-n}=\sqrt{mm-n}=\sqrt{aabb-aa+bb}$, en remettant au lieu de m & de n ce qui leur eſt égal.

Pour exprimer le produit de deux racines ſourdes multipliées l'une par l'autre, on ſe contente quelquefois de les écrire l'une aprés l'autre, & on interpoſe le ſigne de multiplication $\times$. Par exemple pour multiplier $\sqrt[3]{ab+bc}$ par $\sqrt[5]{bd}$, on écrit $\sqrt[3]{ab+bc}\times\sqrt[5]{bd}$.

REMARQUE.

Le produit de deux racines ſourdes eſt connu lorſque le produit des grandeurs dont on a exprimé ces racines eſt un quarré. Par exemple, on connoît que le produit de $\sqrt{12}$ multipliée par $\sqrt{3}$ eſt $6=\sqrt{36}$.

De la division des grandeurs irrationnelles.

Il faut les reduire au moins à même nom, ou ſous des ſignes ſemblables, comme dans la Multiplication. Enſuite il faut écrire la grandeur dont on exprime la racine à diviſer, & au deſſous il faut écrire la grandeur dont la racine exprimée eſt le diviſeur. Enfin il faut interpoſer le ſigne de diviſion —, & devant le tout mettre le ſigne radical.

Soit $\sqrt[3]{ab}$ à diviſer par $\sqrt[3]{cd}$, il faut écrire $\sqrt{\frac{ab}{cd}}$. Pour diviſer f par $\sqrt{g}$, il faut écrire $\frac{f}{\sqrt{g}}$. Pour diviſer $\sqrt{6}$ par 10, il faut écrire $\frac{\sqrt{6}}{10}$.

Pour démontrer cette operation; ſoit $\sqrt{18}=y$, & $\sqrt{7}=x$: Je dis que $\sqrt{\frac{18}{7}}=\frac{y}{x}$. Car, puiſqu'on conſidere 18 comme un quarré dont la racine eſt y, on aura $18=yy$, de même $7=xx$. Donc $\sqrt{\frac{18}{7}}=\sqrt{\frac{yy}{xx}}=\frac{y}{x}$ [1], *ce qu'il falloit démontrer.*

Si les racines ſourdes qu'on veut diviſer l'une par l'autre étant de même nom, ont été reduites à des expreſſions plus ſimples; il faudra diviſer les grandeurs qui precedent les ſignes radicaux, l'une par l'autre, & écrire le quotient devant un de ces ſignes radicaux. Il faudra auſſi diviſer les grandeurs qui ſont ſous les ſignes radicaux, l'une par l'autre, & écrire le quotient

[1] *Pag.* 107. & 108.

ſous un de ces mêmes ſignes; & alors on aura le quotient qu'on cherchoit.

Soit $dh\sqrt{m}$ à diviſer par $fh\sqrt{n}$, j'écris $\frac{dh}{fh}\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{d}{f}\sqrt{\frac{m}{n}}$. Si je diviſe $8\sqrt{6}$ par $7\sqrt{6}$, je trouve $\frac{8}{7}\sqrt{\frac{6}{6}} = \frac{8}{7}\sqrt{1} = \frac{8}{7}$

S'il y a des fractions dans ces grandeurs irrationnelles, la diviſion de ces racines ſourdes n'en ſera pas plus difficile. Soit $\frac{b}{m}\sqrt{gn}$ à diviſer par $\frac{d}{f}\sqrt{hx}$; il faut diviſer la fraction $\frac{b}{m}$ par $\frac{d}{f}$, & le quotient ſera $\frac{bf}{dm}$ que j'écrirai devant le ſigne radical, & ſous ce même ſigne j'écrirai les grandeurs gn & hx en fraction, de cette maniere $\frac{bf}{dm}\sqrt{\frac{gn}{hx}}$ ce qui exprimera le quotient que je cherchois.

Pour diviſer $\frac{m}{n}\sqrt{\frac{mx}{n}}$ par $m\sqrt{nx}$, ou par $\frac{m}{1}\sqrt{\frac{nx}{1}}$, je trouverai $\frac{m}{mn}\sqrt{\frac{mx}{nnx}}$ pour quotient qui eſt égal à $\frac{1}{n}\sqrt{\frac{m}{nn}}$.

Pour exprimer le quotient d'une racine ſourde diviſée par une autre, ſouvent on ne fait qu'écrire la grandeur à diviſer avec ſon ſigne radical, & au deſſous on écrit l'autre grandeur aussi avec son signe radical, & on interpose le signe de division —. Par exemple, pour diviser $\sqrt{ab+bf}$ par $\sqrt[3]{cd}$, on écrit $\frac{\sqrt[4]{ab+bf}}{\sqrt[3]{cd}}$.

Pour diviser $\sqrt[5]{38}$ par $\sqrt[3]{12}$, on écrit $\frac{\sqrt[5]{38}}{\sqrt[3]{12}}$. De même des autres.

DES COMBINAISONS & des changemens d'ordre.

UN nombre de choses étant déterminé, si on les veut toutes prendre deux à deux, trois à trois, &c. & trouver toutes leurs dispositions ou conjonctions; l'artifice dont on se sert pour y réussir exactement est appellé *Combinaison*. Si je veux, par exemple, combiner ces quatre grandeurs, ou ces quatre lettres de l'Alphabeth, *a*, *e*, *i*, *o*, & trouver toutes leurs dispositions en les prenant trois à trois; j'observe un ordre, en commençant par *a*; & je combine *a* avec lui-même, & avec tous les autres *e*, *i*, &c. en cette sorte, *aa*. *ae*. *ai*. *ao*. Ensuite je combine *e* avec *a*, avec *e*, &c. en cette sorte

ea.

ea . ee . ei . eo . Je fais la même choſe à l'égard de *i*; de même enfin à l'égard de *o*. Et je trouve que ces quatre lettres *a*, *e*, *i*, *o*, peuvent être combinées en ſeize manieres differentes en les prenant 2 à 2. Pour les prendre 3 à 3, je commence à combiner *a* avec *a a*, *a e*, &c. & j'obſerve le même ordre que dans la premiere combinaiſon, en combinant enſuite *b* avec *a a*, *a e*, &c. Je trouve que ces 4 lettres peuvent être combinées en 64 manieres en les prenant 3 à 3. Ce qui me fait appercevoir que, ſi je multiplie 64 par 4 qui eſt le nombre de ces 4 lettres; je trouverai qu'on peut encore combiner ces 4 lettres en 256 manieres, en les prenant 4 à 4. Je peux ſuivre la même methode pour les nombres qui ſeront plus grands. Les Logiciens connoiſſent l'utilité de ceci pour trouver leurs 64 modes. Je me ſuis auſſi ſervi de cette methode pour trouver trois parties differentes dans la prop. 13. de la Geometrie, & pour en trouver 6 dans la prop. 14. Dans cette derniere occaſion je neglige les combinaiſons dans leſquelles la même grandeur ſe rencontre deux fois, & celles qui ne ſont differentes que par la tranſpoſition des grandeurs. Parcequ'entre quatre differentes choſes propoſées, j'ai intention d'en ſuppoſer deux & de prouver les deux autres. L'art des combinaiſons eſt ſouvent fort utile.

Les changemens d'ordre ont auſſi leur merite particulier. Ce n'eſt autre choſe que la methode de trouver en combien de manieres pluſieurs choſes propoſées peuvent être placées differemment. Je veux ſçavoir, par exemple, en combien de manieres differentes ces quatre grandeurs, ou ces quatre lettres *e*, *f*, *g*, *h*, peuvent être placées. La premiere *e* priſe ſeule ne plie l'une & l'autre par une autre grandeur f; je dis que $c \,.\, d :: cf \,.\, df$. Cela eſt évident puiſque * le produit des termes extrêmes cdf eſt égal au produit des termes moyens dcf; & partant $c \,.\, d :: cf \,.\, df$. *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

Donc les racines ſourdes de même nom, reduites aux expreſſions les plus ſimples, ſont entre elles comme les grandeurs qui precedent le ſigne radical, ſi dans l'une & dans l'autre des racines comparées il ſe trouve des grandeurs égales precedées du ſigne radical. Par exemple, on trouvera que $a\sqrt{b} \,.\, f\sqrt{b} :: a \,.\, f$. puiſque a & f ſont également multipliées par $\sqrt{b}$. de même $3\sqrt{7} \,.\, 9\sqrt{7} :: 3 \,.\, 9$.

COROLLAIRE II.

Il ſuit de cette propoſition qu'on ne change point la valeur des fractions qu'on reduit à même dénomination. Par exemple, ſi on reduit à même dénomination les fractions $\frac{b}{c}$ & $\frac{d}{f}$, on aura $\frac{b}{c} = \frac{bf}{cf}$, & $\frac{d}{f} = \frac{cd}{cf}$. car on voit clairement que dans cette reduction b & c ſont multipliées également par f; & partant [1] que le quotient de b diviſé par c, c'eſt à dire, $\frac{b}{c} = \frac{bf}{cf}$.

* *Prop.* 2. [1] *Prop. preſ. & Cor.* 2. *déf.* 12. *Algeb.*

Pareillement dans la fraction $\frac{cd}{cf}$ on voit que d & f sont multipliées également par c; & partant que $\frac{d}{f} = \frac{cd}{cf}$. Car $d \,.\, f :: cd \,.\, cf$; c'est à dire * que les quotients $\frac{d}{f}$ & $\frac{cd}{cf}$ sont égaux entr'eux. La même chose paroîtra évidemment en reduisant $\frac{4}{5}$ & $\frac{3}{7}$ à même dénomination.

COROLLAIRE III.

Donc lorsque les racines des quarrez sont égales, les quarrez qui en proviennent sont égaux. Par exemple si $a = b$, on aura $aa = bb$. Car [1] $a \,.\, b :: aa \,.\, bb$, puisque ce n'est rien autre chose que a & b multipliez également, la supposition étant que $a = b$. & partant de même que (2) $a = b$; ainsi $aa = bb$.

COROLLAIRE IV.

Reciproquement les quarrez étant égaux, leurs racines seront égales. Par exemple si $aa = bb$, je dis que $a = b$; car si a n'étoit pas égal à b, on pourroit ajouter à cette grandeur a ou en retrancher ce qui seroit necessaire pour former une grandeur égale à b. On pourroit par exemple ajouter m pour faire cette somme

* *Cor. 3. déf. 12. d'Algebre.*
[1] *Prop. presente.* (2) *Par supposit.*

$a+m=b$; or si $a+m=b$, on vient de démontrer que le quarré de $a+m$ seroit égal au quarré de b, c'est à dire que $aa+2am+mm=bb$; mais [1] on avoit aussi $aa=bb$. Et partant $aa+2am+mm$ seroit [2] égal au seul quarré aa, c'est à dire le tout à une de ses parties ; ce qui est [3] impossible.

Donc enfin si les racines sont inégales, les quarrez seront inégaux ; car si les quarrez étoient égaux, les racines seroient égales ; ce qui est contre la supposition.

Et au contraire si les quarrez sont inégaux ; les racines seront inégales par un raisonnement semblable au precedent.

PROPOSITION VI.

Les quotients des grandeurs également divisées sont entr'eux, comme ces mêmes grandeurs auparavant qu'elles soient divisées.

DEMONSTRATION.

Soient par exemple les deux grandeurs d & f, & que l'une & l'autre soit divisée par b; je dis que $d.f :: \frac{d}{b}.\frac{f}{b}$. Cela est évident: car, puisque le produit des termes extrêmes $\frac{df}{b}$ est égal au produit des termes moyens $\frac{fd}{b}$, c'est à dire ;

(1) *Par supposit.* (2) *Ax. 18. gener.*
(3) *Ax. 2. gener.*

que $\frac{df}{b} = \frac{fd}{b}$; on * aura $d \cdot f :: \frac{d}{b} \cdot \frac{f}{b}$, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Donc on peut reduire une fraction à une expression plus simple, ou à moindre dénomination, sans changer la valeur de cette fraction.

Par exemple pour reduire $\frac{12}{15}$ à une expression plus simple, je cherche un diviseur commun pour 12 & 15, je trouve que c'est 3, qui divise 12 & 15 également sans reste. Après avoir divisé 12 par 3, on a pour quotient 4, qui sera le numerateur de la nouvelle fraction ; & après avoir divisé 15 par la même grandeur 3, le quotient est 5, qui sera le denominateur. Or $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$; puisque [1] 12 sont à 15, comme le quotient de 12 divisé par 3, est au quotient de 15 divisé par 3, c'est à dire, que $12 \cdot 15 :: \frac{12}{3} = 4 \cdot \frac{15}{3} = 5$.

on trouvera par le même raisonnement que $\frac{cd}{fd} = \frac{c}{f}$, en divisant le numerateur cd, & le dénominateur fd par d.

* *Prop.* 3. [1] *Par la Prop. pres.*

COROLLAIRE II.

Donc lorſqu'il y a quatre grandeurs telles que la premiere ait plus grand rapport à la ſeconde, que la 3^e à la 4^e, le produit des termes extrêmes eſt plus grand que le produit des termes moyens. Soit par exemple $a . d > b . c$, je dis que $ac > db$; car l'expoſant du rapport de a à d ſoit nommé f, c'eſt à dire $\frac{a}{d} = f$; au lieu de la grandeur a, on aura ſon [1] égale df. Soit $\frac{b}{c} = g$, on aura auſſi $cg = b$. & [2] $f > g$. Enfin au lieu des quatre grandeurs precedentes $a . d . b . c$, on aura leurs équivalentes $df . d > cg . c$. Le produit des termes extrêmes, ſçavoir dfc eſt plus grand que dcg, qui eſt le produit des termes moyens; car en diviſant dfc & dcg par dc, on aura [3] $dfc . dcg :: f . g$. Or [2] $f > g$; donc pareillement $dfc > dcg$, c'eſt à dire le produit des termes extrêmes ac eſt plus grand que le produit des termes moyens db.

[1] *Cor. de la diviſ. pag.* 42. [2] *Suppoſit.*
[3] *Prop. preſente.*

PROPOSITION

PROPOSITION VII.

Si on divise des grandeurs égales, ou la même plusieurs fois, par d'autres grandeurs ; les quotients seront entr'eux reciproquement comme les diviseurs.

DEMONSTRATION.

Soit la grandeur d divisée par f. Soit encore la même grandeur d divisée par h : je dis que $\frac{d}{f} . \frac{d}{h} :: h . f$. Car le produit $\frac{df}{f}$ des termes extrêmes de ces quatre grandeurs, est égal au produit $\frac{dh}{h}$ des termes moyens, parceque [1] $\frac{df}{f} = d$, & $\frac{dh}{h} = d$. Donc [2] $\frac{df}{f} = \frac{dh}{h}$. On conclura donc enfin [3] que $\frac{d}{f} . \frac{d}{h} :: h . f$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

[1] *Part.* 1. *de l'Avertiss. pag.* 81.
[2] *Ax* 18. *Gen.*
[3] *Prop.* 3.

PROPOSITION VIII.

1°. *Les grandeurs égales ont même rapport à une 3e grandeur ou à des grandeurs égales,*

2°. *Reciproquement les grandeurs qui ont même rapport à une 3e grandeur, ou à des grandeurs égales, sont égales entr'elles.*

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit $a = b$, je dis que $a . c :: b . c$. car [1] $\frac{a}{c} . \frac{b}{c} :: a . b$, mais [2] $a = b$. Donc $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$. & partant [3] $a . c :: b . c$. *ce qu'il falloit démontrer.*

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Soit $b . d :: f . d$. je dis que $b = f$. Car

[1] *Prop. 6.*
[2] *Par supposit.*
[3] *Def. 13. & Cor. 1. def. 12. d'Algeb.*

[1] $\frac{b}{d} = \frac{f}{d}$. mais [2] $b \,.\, f :: \frac{b}{d} \,.\, \frac{f}{d}$. Donc $b = f$. *ce qu'il falloit demontrer.*

PROPOSITION IX.

1°. *Une même grandeur a même rapport à des grandeurs égales entr'elles.*

2°. *Reciproquement si une même grandeur a même rapport à d'autres grandeurs, ces dernieres grandeurs seront égales entr'elles.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit par exemple la grandeur c, & $d = f$; je dis que $c \,.\, d :: c \,.\, f$. cela sera [3] évident si $\frac{c}{d} = \frac{c}{f}$. Or c'est une chose constante; car [4] $\frac{c}{d} \,.\, \frac{c}{f} :: f \,.\, d$. or [1] $f = d$. donc $\frac{c}{d} = \frac{c}{f}$. & partant $c \,.\, d :: c \,.\, f$. *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit $g \,.\, h :: g \,.\, m$. je dis que $h = m$. car

[1] *Par suppos. & Cor. 2. déf.* 12. *Alg.* [2] *Prop.* 6.
[3] *Cor.* 1. *déf.* 12. *Algeb.* [4] *Prop.* 7.

[1] $\frac{g}{h} = \frac{g}{m}$. or [2] $\frac{g}{h} . \frac{g}{m} :: m . h$. donc de même que $\frac{g}{h} = \frac{g}{m}$. ainsi $m = h$, *ce qu'il falloit demontrer.*

PROPOSITION X.

1°. *La plus grande de deux grandeurs a plus grand rapport à une 3e grandeur ou à grandeurs égales, & la plus petite à plus petit rapport à cette 3e grandeur.*

2°. *Reciproquement si de deux grandeurs la premiere a plus grand rapport à une 3e, & si la seconde a un moindre rapport à cette 3e; la premiere grandeur sera plus grande que la seconde.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit la grandeur $a > b$, je dis que $a . c > b . c$. c'est à dire, que $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. car [3] les quotients de $\frac{a}{c}$ & de $\frac{b}{c}$ seront entr'eux comme a à b; mais [1] $a > b$; donc $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$, c'est à dire, [4] $a . c > b . c$. *ce qu'il falloit demontrer.*

[1] *Par supposit. & Cor.* 2. *déf.* 12. *d'Algeb.*
[2] *Prop.* 7. [3] *Prop.* 6.
[4] *Cor.* 1. *déf.* 12. *d'Algebre.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit $a \,.\, c > b \,.\, c$, c'eſt à dire, que $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. je dis que $a > b$. car [1] $\frac{a}{c} \,.\, \frac{b}{c} :: a \,.\, b$. mais [2] $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. donc pareillement on aura $a > b$. *ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XI.

1°. *Une 3^e grandeur a un plus petit rapport à la plus grande de deux grandeurs inégales, & a plus grand rapport à la plus petite grandeur.*

2°. *Reciproquement, ſi une 3^e grandeur a un plus petit rapport à une des deux grandeurs, & un plus grand rapport à l'autre; la premiere de ces grandeurs ſera plus grande que la ſeconde.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit $d > f$, & ſoit une 3^e grandeur par exemple h, je dis que $h \,.\, d < h \,.\, f$. c'eſt à dire que $\frac{h}{d} < \frac{h}{f}$. car [3] $\frac{h}{d} \,.\, \frac{h}{f} :: f \,.\, d$. or [2] $f < d$. Donc $\frac{h}{d} < \frac{h}{f}$. Donc [4] $h \,.\, d < h \,.\, f$. *ce qu'il falloit démontrer.*

[1] *Prop. 6.*
[2] *Par ſuppoſit.*
[3] *Prop. 7.*
[4] *Cor. 1. def. 12. Algeb.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit $d . g < d . h$, c'eſt à dire, ſi $\frac{d}{g} < \frac{d}{h}$, je dis que $g > h$. car [1] $\frac{d}{g} . \frac{d}{h} :: h . g$. Or [2] $\frac{d}{g} < \frac{d}{h}$. Donc pareillement $h < g$, ou, ce qui eſt la même choſe, $g > h$, *ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XII.

Si des grandeurs proportionnelles ſont multipliées par d'autres grandeurs proportionnelles de même ordre; leurs produits ſeront proportionnels entr'eux.

DEMONSTRATION.

Soient pluſieurs rangées de grandeurs proportionnelles, par exemple $a . b :: c . d$. & $e . f :: g . h$. écrites l'une ſous l'autre, de ſorte que les antecedens e & g d'une rangée ſoient ſous les antecedens a & c de l'autre, & les conſequens f & h de l'une ſous les conſequens b & d de l'autre, & toujours dans ce même ordre, quelque nombre qu'il y ait de ces rangées; ſi on multiplie par ordre les antecedens a & e, c & g l'un par l'autre, & ſi on multiplie auſſi par ordre les conſequens b & f, d & h l'un par l'autre: un produit ae des antecedens ſera au produit bf de leurs conſequens, comme un autre produit cg des autres antecedens ſera au produit dh de leurs conſequens; & ainſi de ſuite. Pour le démontrer,

[1] *Prop.* 7. [2] *Suppoſit.*

dans la premiere analogie ſoit l'expoſant du rapport de a à b nommé x, c'eſt à dire, $\frac{a}{b} = x$.

$$a \,.\, b :: c \,.\, d.$$
$$e \,.\, f :: g \,.\, h.$$

Donc $bx = a$; mais puiſque [1] le rapport de c à d eſt égal au rapport de a à b, on aura [2] auſſi $\frac{c}{d} = x$, & partant $dx = c$.

Les mêmes que les grandeurs precedentes. $\left\{ \begin{array}{l} bx \,.\, b :: dx \,.\, d. \\ fz \,.\, f :: hz \,.\, d. \end{array} \right.$

donc $bxfz \,.\, bf :: dxhz \,.\, dh.$

donc enfin $ae \,.\, bf :: cg \,.\, dh.$

Dans la ſeconde analogie ſoit $\frac{e}{f} = z$, on aura $fz = e$; par la même raiſon que dans l'analogie precedente, on trouvera auſſi $\frac{g}{h} = z$, & le produit $hz = g$. Dans la premiere proportion, au lieu de l'antecedent a on prendra ce qui lui eſt égal, ſçavoir bx; & au lieu de c on prendra dx. Dans la ſeconde proportion, au lieu de l'antecedent e on prendra ce qui lui eſt égal, ſçavoir fz; & au lieu de g on prendra hz. De ſorte qu'en la place des deux analogies propoſées, on aura leurs équivalentes, $bx \,.\, b :: dx \,.\, d$. & $fz \,.\, f :: hz \,.\, h$. Or il eſt conſtant que le produit $bxfz$ des premiers, antecedents eſt au produit bf des

[1] *Suppoſit.* [2] *Cor.* 2. *déf.* 12. *d'Algeb.*

premiers conſequents, comme le produit dx hz des ſeconds antecedents eſt au produit dh des ſeconds conſequents ; c'eſt à dire, que $bx\,fz \,.\, bf :: dx\,hz \,.\, dh$. Car le produit des termes extrêmes $bx\,fz\,dh = bf\,dx\,hz$ produit des termes moyens : ce qui paroît évidemment, puiſque de part & d'autre du ſigne d'égalité on aperçoit les mêmes grandeurs ; & partant ſi au lieu du produit des antecedents bx & fz, on prend le produit ae des antecedents a & e qui leur ſont égaux ; & au lieu du produit des antecedents dx & hz, ſi on prend le produit de leurs égaux, ſçavoir cg ; on aura $ae \,.\, bf :: cg \,.\, dh$. *ce qu'il falloit demontrer.*

S'il y avoit plus de deux rangées de proportionnelles ; par exemple, s'il y en avoit 3, 4, 5, &c. on ſe ſerviroit pour la demonſtration du même raiſonnement qu'on vient de mettre en uſage.

COROLLAIRE I.

La propoſition preſente & la 6^{e} ſont le fondement de deux autres manieres de comparer les grandeurs proportionnelles, qui ſont encore d'un grand uſage dans les Mathematiques. Et on peut dire que les cinq manieres énoncées par le Corollaire de la propoſit. 3. avec les deux ſuivantes, ſont ſi neceſſaires pour avancer dans les Mathematiques, qu'il faut avouër que ceux qui voudroient y prétendre ſans le ſecours de cette ſubtile dialectique, feroient des efforts inutiles. Cependant quoique d'abord il s'en trouve qui ont quelque peine à s'y accoûtumer, il ne faut pas pour cela y renoncer ; parceque la frequente application qu'on en fera dans la ſuite les rendra tres-familieres.

I.

Soient deux rangées de quatre grandeurs ; par exemple $a . b . c . d$. & $b . f . d . h$. telles que $a . b :: c . d$. & $b . f :: d . h$. je les arrange en écrivant le second antecedent c & le second consequent d de la premiere analogie sous le premier antecedent a, & sous le premier consequent b. Ensuite le premier & le second consequent de la premiere analogie, sçavoir b & d serviront d'antecedents à la seconde ; & j'écrirai seulement ensuite l'un sur l'autre les consequents f & h ; cela formera deux nouvelles rangées chacune de 3 grandeurs. Je dis que la premiere grandeur a de la premiere rangée est à la derniere f de la même rangée ; comme la premiere c de la deuxiéme rangée est à la derniere h de la même rangée , c'est à dire que $a . f :: c . h$.

$$\begin{array}{l} a . b . f . \\ c . d . h . \\ \hline \text{Donc } a . f :: c . h . \end{array}$$

Pour se convaincre de cette verité , il faut écrire les deux rangées de proportionnelles $a . b :: c . d$. & $b . f . d . h$. l'une sur l'autre, on trouvera [1] que ces produits seront proportionnels $ab . bf :: cd . dh$. Mais au lieu du rapport de ab à bf, on peut prendre le rapport de a à f qui

$$\begin{array}{l} a . b :: c . d . \\ b . f :: d . h . \\ \hline ab . bf :: cd . dh . \\ \hline \text{donc } a . f :: c . h . \end{array}$$

[1] *Prop. presente.*

lui eſt [1] égal ; & au lieu du rapport de *c d* à *d h*, on peut prendre ſon égal qui eſt celui de *c* à *h* ; mais puiſque le rapport de *a b* à *b f* eſt (2) égal au rapport de *c d* . *d h* : on aura *a* . *f* :: *c* . *h* .

Cette maniere de conclure eſt appellée *proportion bien ordonnée.*

S'il y avoit plus de deux rangées de grandeurs proportionnelles telles que les conſequents de la premiere analogie fuſſent égaux aux antecedents de la ſeconde, & que les conſequents de la ſeconde fuſſent égaux aux antecedents de la 3e ; & ainſi de ſuite, on les diſpoſeroit en deux rangées comme les proportionnelles precedentes, & on concluëroit que la premiere du premier rang ſeroit à la quantiéme du même rang : comme la premiere du ſecond rang eſt à une pareille quantiéme du même rang. Par exemple ſoient *l* . *m* :: *n* . *o*, & *m* . *p* :: *o* . *q* . & *p* . *r* :: *q* . *ſ*, & *r* . *t* :: *ſ* . *u* . &c, je dis que *l* . *r* :: *n* . *ſ* ; que *l* . *t* :: *n* . *u* . &c. la demonſtration en eſt entierement ſemblable à la precedente.

l . *m* . *p* . *r* . *t* .	&c.
n . *o* . *q* . *ſ* . *u* .	

donc *l* . *r* :: *n* . *ſ* .
donc *l* . *t* :: *n* . *u* .
donc *&c.*

2.

S'il y a deux rangées chacune de quatre grandeurs proportionnelles ; par exemple *a* . *d* :: *f* . *g* . & *d* . *m* :: *h* . *f*, de ſorte que le premier conſequent de la premiere analogie ſoit égal au premier antecedent de la 2e ; & que le 2e an-

[1] *Prop. 6.* (2) *Prop. preſ.*

tecedent de la premiere analogie ſoit égal au 2^e^ conſequent de la 2^e^ ; j'écris les antecedents & les conſequents de la premiere analogie l'un ſous l'autre, de ſorte que le ſecond antecedent f ſoit ſous le premier conſequent d ; enſuite j'écris le premier conſequent m de la ſeconde analogie dans le premier rang. Enfin j'écris le ſecond antecedent h de la 2^e^ analogie ſous le premier antecedent a de la premiere ; & le ſecond conſequent f devient le même que le 2^e^ antecedent de la premiere proportion ; cela forme encore deux nouvelles rangées, chacune de trois grandeurs. Je dis, comme dans le premier article de ce Corollaire : donc $a . m :: h . g$.

$$a . d . m .$$
$$h . f . g .$$
$$\text{donc } a . m :: h . g .$$

Pour connoître la verité de cette concluſion, il faut écrire les deux rangées de proportionnelles $a . d :: f . g .$ & $d . m :: h . f .$ l'une ſous l'autre, on trouvera qu'en multipliant par ordre, [1] on aura $ad . dm :: fh . gf$. mais [2] $ad . dm :: a . m$. & $fh . gf :: h . g$. donc $a . m :: h . g$.

$$a . d :: f . g .$$
$$d . m :: h . f .$$
$$ad . dm :: fh . gf .$$
$$\text{Donc } a . m :: h . g .$$

Cette maniere de conclure eſt appellée *proportion troublée.*

COROLLAIRE II.

1. Les quarrez de quatre grandeurs propor-

[1] *Prop. preſ.*
[2] *Prop. 6.*

tionnelles ſont auſſi proportionnels entr'eux ; de même les cubes, &c. Par exemple, ſi $a . b :: c . d$. on [1] aura $aa . bb :: cc . dd$. parceque c'eſt la même choſe que ſi on avoit multiplié l'une par l'autre ces deux rangées de proportionnelles $a . b :: c . d$. & $a . b :: c . d$. On aura pareillement $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$. parceque ce ſont les produits de ces deux rangées de proportionnelles $aa . bb :: cc . dd$. & $a . b :: c . d$. multipliées par ordre.

2. Reciproquement lorſque quatre quarrez ſont proportionnels, leurs racines ſont auſſi proportionnelles. Soit $ee . ff :: gg . hh$. Je dis que $e . f :: g . h$. Car, ſi e n'étoit pas à f comme g à h, on pourroit augmenter l'un ou l'autre de ces antecedens, juſqu'à ce que la proportion fût parfaite. S'il étoit neceſſaire d'augmenter le premier antecedent e, par exemple, juſqu'à ce qu'il devînt à $f :: g . h$. Suppoſons que e étant augmenté d'une grandeur que j'appellerai m, on ait $e + m . f :: g . h$; il eſt conſtant [2] qu'on auroit $ee + 2em + mm . ff :: gg . hh$. mais [3] $ee . ff :: gg . hh$. & partant [4] on auroit $ee + 2em + mm . ff :: ee . ff$. Le quarré $ee + 2em + mm$ ſeroit donc [5] égal à ee, ce qui eſt [6] impoſſible.

[1] *Prop. preſ.*
[2] *Part. 1. Cor. preſ.*
[3] *Suppoſit.*
[4] *Cor. 3. def. 12. d'Algeb.*
[5] *Prop. 8. 2e partie.*
[6] *Ax. 2. general.*

PROPOSITION

PROPOSITION XIII.

S'il y a deux rangées de grandeurs proportionnelles, & si on divise par ordre les grandenrs de la premiere rangée par les grandeurs correspondantes de la seconde rangée : les quotients de ces divisions seront proportionnels entr'eux.

DEMONSTRATION.

Soit la premiere rangée de grandeurs proportionnelles $a \,.\, b :: c \,.\, d$. Soit encore une seconde rangée $f \,.\, g :: h \,.\, m$. je dis que $\frac{a}{f} \,.\, \frac{b}{g} :: \frac{c}{h} \,.\, \frac{d}{m}$. Cela est constant * si le produit du quotient $\frac{a}{f}$ multiplié par $\frac{d}{m}$ est égal au produit de $\frac{b}{g}$ & de $\frac{c}{h}$ multipliez l'un par l'autre. Or cela est évident, puisque * $ad = bc$, & que $fm = gh$. Car le numerateur de la fraction $\frac{ad}{fm}$ étant égal au numerarateur de l'autre fraction $\frac{bc}{gh}$, & le dénominateur de l'une étant égal au dénominateur de l'autre ; $\frac{ad}{fm}$

$$a \,.\, b :: c \,.\, d$$
$$f \,.\, g :: h \,.\, m$$

Donc $\frac{a}{f} \,.\, \frac{b}{g} :: \frac{c}{h} \,.\, \frac{d}{m}$.

$$ad = bc$$
$$fm = gh$$

* *Prop.* 3.

ſera la même choſe que $\frac{bc}{gh}$. Le produit des termes extrêmes ſera donc égal au produit des termes moyens. Donc * $\frac{a}{f} \cdot \frac{b}{g} :: \frac{c}{h} \cdot \frac{d}{m}$. *ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XIV.

Lorſqu'il y a ſix grandeurs telles que la premiere ſoit à la 2e, comme la 3e à la 4e; & la 5e à la 2e, comme la 6e à la 4e: la ſomme de la premiere & de la 5e ſera à la 2e, comme la ſomme de la 3e & de la 6e à la 4e.

DEMONSTRATION.

Soient les ſix grandeurs $a . b . c . d . f . g .$ telles que a ſoit à b comme c à d, & que la 5e f ſoit à la 2e b, comme la 6e g eſt à la 4e d; je dis que $a + f . b :: c + g . d$. Pour le démontrer, ſoit appellé x l'expoſant du rapport de a à b, c'eſt à dire que $\frac{a}{b} = x$; l'expoſant du rapport de c à d ſera [2] auſſi x, puiſque [3] ces rapports ſont égaux. On aura donc [4] $bx = a$, & $dx = c$. ſoit appellé y l'expoſant

* *Prop.* 3.
[2] *Cor.* 2. *Def.* 12. *Algeb.*
[3] *Suppoſit.*
[4] *Cor.* 3. *de la diviſion*, *pag.* 42.

$$a \,.\, b :: c \,.\, d.$$
$$f \,.\, b :: g \,.\, d.$$

$$\frac{a}{b} = x. \quad \frac{c}{d} = x. \quad \frac{f}{b} = y. \quad \frac{g}{d} = y.$$

Donc $bx = a.\ dx = c.\ by = f.\ dy = g.$

$$bx \,.\, b :: dx \,.\, d.$$
$$by \,.\, b :: dy \,.\, d.$$

Donc $bx + by \,.\, b :: dx + dy \,.\, d.$

Car $bdx + bdy = bdx + bdy.$

Donc $a + f \,.\, b :: c + g \,.\, d.$

du rapport de f à b, c'eſt à dire que $\frac{f}{b} = y$; l'expoſant du rapport de g à d ſera [1] auſſi y, ces rapports étant [2] égaux. Dans ces deux analogies $a \,.\, b :: c \,.\, d$ & $f \,.\, b :: g \,.\, d$. en ſubſtituant au lieu de a, c, f, & g, les grandeurs égales bx, dx, by, & dy; au lieu des deux analogies precedentes, on aura [3] ces deux équivalentes $bx \,.\, b :: dx \,.\, d$, & $by \,.\, b :: dy \,.\, d$. Or [4] il eſt évident que $bx + by \,.\, b :: dx + dy \,.\, d$. Car le produit $bdx + bdy$ des termes extrêmes eſt égal au produit $bdx + bdy$ des moyens. Au lieu de $bx + dy$, & au lieu de $dx + dy$, remettant [3] les grandeurs qui leur ſont égales a, f; c, g, on trouvera que $a + f \,.\, b :: c + g \,.\, d$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

[1] *Cor. 2. Def. 12. Algeb.*
[2] *Suppoſit.*
[3] *Demand. 1. Gen.*
[4] *Prop. 3.*

Si on avoit ces 6 grandeurs $h.m.o.p.u.z$, telles que $h.m::o.p.$ & que $h.u::o.z$, on concluëroit, donc $h.m+u::o.p+z$. Car [1] en changeant la premiere analogie en celle-ci $m.h::p.o.$ & en changeant la seconde en celle-ci $u.h::z.o.$ on trouvera par la démonstration qu'on vient de faire, que $m+u.h::p+z.o.$ & enfin [1] que $h.m+u::o.p+z$.

$$\left.\begin{array}{l} h.m::o.p. \\ h.u::o.z. \end{array}\right\} \textit{Inver.} \begin{array}{l} m.h::p.o. \\ u.h::z.o. \end{array}$$

Donc	$m+u.h::p+z.o.$
Enfin	$h.m+u::o.p+z.$

PROPOSITION XV.

S'il y a une suite de rapports égaux entr'eux ; la somme des antecedents sera à la somme des consequents, comme un des antecedents est à son consequent.

DEMONSTRATION.

Soient ces rapports égaux entr'eux, $a.b::c.d::e.f.$ &c. je dis que la somme des antecedents $a+c+e$ est à la somme des consequents $b+d+f$ comme a est à b, ou c à d, ou e à f. Pour le démontrer, soit nommé x l'exposant du rapport de a à b, c'est à dire que $\frac{a}{b}=x$, on aura [2] aussi $\frac{c}{d}=x$, & $\frac{e}{f}=x$; puisque [3] ces rapports sont égaux.

[1] *Part.* 1. *Cor. Prop.* 3.
[2] *Cor.* 2. *Def.* 12. *Algeb.* [3] *Supposit.*

$a . b :: c . d :: e . f.$	$bx . b :: dx . d :: fx . f.$
$\frac{a}{b} = x . \frac{c}{d} = x . \frac{e}{f} = x$	$bx + dx + fx . b + d + f :: bx . b.$
Donc $bx = a$, $dx = c$, $fx = e$.	$bbx + bdx + bfx = bbx + bdx + bfx.$

Donc $a + c + e . b + d + f :: a . b.$

Donc $bx = a$, $dx = c$, $fx = e$. & au lieu des grandeurs a, c & e, en ſubſtituant leurs égales, on aura $bx . b :: dx . d :: fx . f$. Or il eſt évident [1] que $bx + dx + fx . b + d + f :: bx . b$. Car le produit $bbx + bdx + bfx$ des termes extrêmes eſt égal au produit $bbx + bdx + bfx$ des termes moyens. Au lieu de $bx + dx + fx$, reprenant ce qui y eſt égal $a + c + e$; on concluera que $a + c + e . b + d + f :: a . b$. Or [2] le rapport de c à d eſt égal à celui de a à b, qui eſt auſſi égal à celui de e à f. Donc la ſomme des antecedens $a + c + e$ eſt à la ſomme des conſequens $b + d + f$, comme un antecedent à ſon conſequent, *ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XVI.

1. *La plus grande de deux grandeurs inégales eſt égale à la moitié de la ſomme faite de ces deux grandeurs & de la moitié de leur difference.*
2. *La plus petite de ces deux grandeurs eſt égale à la moitié de la ſomme de ces mêmes grandeurs moins la moitié de la difference.*

[1] *Prop. 3.*
[2] *Suppoſit.*

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soient les deux grandeurs a & b, telles que $a > b$, & que leur difference ſoit c : Je dis que la grandeur a eſt égale à la moitié de $a + b$ & de c. Car alors [1] on aura $a - c = b$.

Mais on cherche la ſomme des grandeurs a & b; il faut donc ajouter a avec ce qu'on vient de trouver égal à b. On aura donc $a + a - c = a + b$, c'eſt à dire [2] $2a - c = a + b$. Si on diviſe le tout par 2, on trouvera [3] $a - \frac{c}{2} = \frac{a+b}{2}$. Si à ces deux dernieres grandeurs on ajoute de part & d'autre $\frac{c}{2}$, on aura [4] $a = \frac{a+b}{2} + \frac{c}{2}$. *ce qu'il falloit démontrer.*

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Puiſque [5] $a > b$, & que la difference eſt c: je dis que la grandeur b eſt égale à $\frac{a+b}{2} - \frac{c}{2}$.

[1] *Ax. 2. d'Algeb.*
[2] *Add. des grandeurs pag. 71. obſerv. 1.*
[3] *Prop. 6. ou ax. 12. gen.*
[4] *Ax. 4. gen. & ax. 1. d'Algeb.*
[5] *Suppoſit.*

Car on aura [1] $b+c=a$. Pour avoir une grandeur égale à la ſomme des grandeurs a & b, il faut donc ajouter la grandeur b à $b+c$, & on aura $b+c+b=a+b$, c'eſt à dire que $2b+c=a+b$. Si on diviſe par 2 ces grandeurs $2b+c$, & $a+b$; on trouvera [2] $b+\frac{c}{2}=\frac{a+b}{2}$. Si on retranche de part & d'autre $\frac{c}{2}$; on aura [3] $b=\frac{a+b}{2}-\frac{c}{2}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XVII.

Dans ces deux produits a b *&* c d *au lieu des racines* b *&* d, *ſi on ſubſtitue d'autres grandeurs* g *&* h, *& ſi* b . d :: g . h ; *on aura deux nouveaux produits* a g *&* c h *qui ſeront entr'eux, comme* a b *eſt à* c d, *c'eſt à dire que* a b *ſera à* c d : : a g . c h.

DEMONSTRATION.

Le produit des termes extrêmes $abch$ eſt égal au produit des termes moyens $cdag$. Car en diviſant ces deux produits $abch$ & $cdag$ par ac qui s'y trouve commun; on aura [2] $abch \,.\, cdag :: bh \,.\, dg$. Mais[4], puiſque $b \,.\, d :: g \,.\, h$, on aura [5] $bh=dg$. Donc pareillement $abch=cdag$. Donc [6] $ab \,.\, cd :: ag \,.\, ch$, *ce qu'il falloit démontrer.*

[1] *Ax. 2. d'Algeb.*
[2] *Prop. 6.*
[3] *Ax. 9. Gen.*
[4] *Par ſuppoſit.*
[5] *Prop. 2.*
[6] *Prop. 3.*

PROPOSITION XVIII.

Le rapport du produit de plusieurs antecedents au produit de plusieurs consequents, est composé du rapport du premier antecedent au premier consequent; du rapport du 2e antecedent au 2e consequent; du rapport du 3e antecedent au 3e consequent, & ainsi de suite.

DEMONSTRATION.

Soit l'antecedent a & le consequent b; soit encore l'antecedent c & le consequent d. Si on multiplie l'antecedent a par l'antecedent c, on aura pour produit ac. Si on multiplie le consequent b par le consequent d, on aura pour produit bd; je dis que le rapport de ac à bd est composé du rapport de a à b, & du rapport de c à d. Pour en faire la démonstration, * il suffit de faire voir que l'exposant du rapport du produit ac à bd est égal au produit des exposants des rapports de a à b & de c à d.

Soit l'exposant du rapport de a à b appellé f, c'est à dire que $\frac{a}{b} = f$; donc $bf = a$; Soit $\frac{c}{d} = g$; donc $dg = c$. Au lieu des antecedents a & c on aura donc leurs équivalents bf & dg; & au lieu du produit ac des antecedents a & c, on aura son équivalent $bfdg$. Or divisant le produit $bfdg$ des antecedents par bd.

* *Def.* 17. *Algeb.*

$$\begin{array}{l} a \,.\, b \\ c \,.\, d \\ \hline ac \,.\, bd \\ \hline bf \,.\, b \\ dg \,.\, d \\ \hline bfdg \,.\, bd \end{array} \qquad \frac{a}{b} = f \quad \text{Donc } bf = a \qquad \frac{c}{d} = g \quad \text{Donc } dg = c \qquad \frac{bfdg}{bd} = fg.$$

produit des conſequents, on aura pour quotient fg qui ſera l'expoſant du rapport de ac à bd; mais fg eſt le produit de l'expoſant du rapport de a à b & de celui de c à d. Donc [1] le rapport du produit des antecedents au produit des conſequents, eſt composé du rapport de chaque antecedent à chaque conſequent, *ce qu'il falloit démontrer.*

S'il y avoit un troiſiême antecedent e & un troiſiéme conſequent h, le rapport du produit ace au produit bdh ſeroit composé du rapport de a à b; du rapport de c à d; du rapport de e à h; & ainſi des autres, s'il y en avoit davantage. La démonſtration en eſt tres-facile, & entierement ſemblable à celle qu'on vient de faire pour ac & bd.

$$\begin{array}{l} a \,.\, b \\ c \,.\, d \\ e \,.\, h \\ \hline ace \,.\, bdh \end{array}$$

COROLLAIRE I.

Les quarrez ſont entr'eux en raiſon doublée de celle de leurs racines. Par exemple cc & dd

[1] *Déf.* 17. *Algeb.*

ſont deux quarrez qui ſont l'un à l'autre en raiſon composée de celle de c à d, & encore de celle de c à d. Or ces deux rapports ſont égaux. Donc le rapport de cc à dd eſt * doublé de celui de c à d. On peut auſſi démontrer facilement par un raiſonnement ſemblable à celui qu'on vient de faire, que les cubes ſont entr'eux en raiſon triplée de celle de leurs racines ; par exemple, que le rapport de d^3 à f^3 eſt triplé du rapport de d à f ; & ainſi des autres puiſſances.

COROLLAIRE II.

Le produit de deux fractions multipliées l'une par l'autre eſt une 3[e] fraction dont le numerateur eſt le produit des numerateurs de ces deux fractions, & dont le dénominateur eſt le produit des numerateurs de ces deux mêmes fractions. Soient les fractions $\frac{b}{c}$ & $\frac{f}{g}$ à multiplier l'une par l'autre : Je dis que leur produit eſt exprimé par $\frac{bf}{cg}$. Car [1] le rapport de bf à cg eſt composé du rapport de b à c, & du rapport de f à g. Le quotient du produit bf diviſé par cg eſt donc [2] égal au produit des quotients de b diviſé par c, & de f diviſée par g.

La methode dont on ſe ſert pour diviſer une fraction par une autre, peut être facilement démontrée. Soit $\frac{c}{d}$ à diviſer par $\frac{b}{f}$: Je dis que

* *Déf.* 18. *Algeb.*
[1] *Prop. pref.*
[2] *Def.* 17. *Geo.*

le quotient qu'on cherche, est exprimé par cette fraction $\frac{cf}{bd}$. Car si on reduit [1] ces deux fractions à même dénomination, [2] on aura $\frac{cf}{df} = \frac{c}{d}$, $\frac{db}{df} = \frac{b}{f}$. Mais [3] $\frac{cf}{df} . \frac{db}{df} :: cf . db$. au lieu des fractions $\frac{cf}{df}$ & $\frac{db}{df}$ en substituant leurs égales $\frac{c}{d}$ & $\frac{b}{f}$; on aura $\frac{c}{d} . \frac{b}{f} :: cf . db$. Le quotient de la fraction $\frac{c}{d}$ divisée par $\frac{b}{f}$ sera donc [4] égal à $\frac{cf}{db}$.

REMARQUE.

On peut tres-facilement démontrer l'addition, la soustraction, la multiplication & la division des fractions, en faisant attention à la methode dont on se sert dans ces operations.

Si on veut ajouter $\frac{g}{h}$ à $\frac{f}{m}$; je dis que $\frac{gm + hf}{hm} = \frac{g}{h} + \frac{f}{m}$. Car le quotient de $\frac{g}{h}$ soit appellé x, c'est à dire, $\frac{g}{h} = x$; & soit

[1] *Pag. 47. Observation 2.*
[2] *Cor. 2. prop. 5.*
[3] *Prop. 6.*
[4] *Def. 13. Algeb. & Cor. 2. def. 12.*

$\frac{f}{m}=y$, on [1] aura $g=hx$, & $f=my$, au lieu des fractions $\frac{g}{h}$ & $\frac{f}{m}$ je prendrai donc leurs égales $\frac{hx}{h}$ & $\frac{my}{m}$, & [2] en les réduisant à même dénomination je trouverai $\frac{hxm}{hm}$ & $\frac{hmy}{hm}$ qui seront égales à $\frac{g}{h}$ & $\frac{f}{m}$. Or en assemblant les numerateurs hxm & hmy & en appliquant à leur somme le dénominateur commun hm, il est évident [3] que $\frac{hxm+hmy}{hm}$ $=x+y$ qui est la somme des quotients de ces deux fractions.

Si on veut soustraire $\frac{f}{m}$ de $\frac{g}{h}$; il est encore évident qu'en soustrayant $\frac{hmy}{hm}=\frac{f}{m}$ de $\frac{hxm}{hm}=\frac{g}{h}$, c'est à dire, en soustrayant le numerateur hmy de hxm, & appliquant le dénominateur commun hm, on aura $\frac{hxm-hmy}{hm}$ $=x-y=\frac{g}{h}-\frac{f}{m}$ [3].

Si on veut multiplier $\frac{g}{h}$ par $\frac{f}{m}$; en multipliant

[1] *Cor. 3. Page 42. de la division.*
[2] *Page 47. Observ. 2.*
[3] *Page 81. part. 1. de l'avertiss.*

tipliant l'une par l'autre leurs équivalentes $\frac{hx}{h}$ & $\frac{my}{m}$, c'eſt à dire, en multipliant le numerateur hx par my, & le dénominateur h par m, on aura $\frac{hxmy}{hm} = xy$ qui eſt le produit de la fraction $\frac{g}{h}$ multipliée par $\frac{f}{m}$. Puiſque [1] $\frac{g}{h} = x$, & que $\frac{f}{m} = y$.

Si on veut diviſer $\frac{g}{h}$ par $\frac{f}{m}$; en faiſant attention à leurs égales $\frac{hx}{h}$ & $\frac{my}{m}$, on multipliera le numerateur hx par le dénominateur m, & le dénominateur h par my pour avoir $\frac{hxm}{hmy} = \frac{x}{y}$ qui ſera le quotient de la fraction $\frac{g}{h}$ diviſée par $\frac{f}{m}$.

[1] *Suppoſit.*

PROPOSITION XIX.

S'il y a une ſuite de grandeurs : le rapport de la premiere à la derniere ſera compoſé des rapports des grandeurs interpoſées.

DEMONSTRATION.

Soient les grandeurs $a \,.\, b \,.\, c \,.\, d$; je dis que le rapport de la grandeur a à d eſt compoſé du rapport de a à b, de celui de b à c, & du rapport de c à d; pour le démontrer, il ſuffit [1] de faire voir que l'expoſant du rapport de a à d eſt égal au produit des expoſans de ces autres rapports.

$$a. \quad b. \quad c. \quad d.$$

$$\frac{a}{b} = \quad . \quad \frac{b}{c} = x \,.\, \frac{c}{d} = p.$$

$$dpxy = a \,.\, dpx = b \,.\, dp = c.$$

$$\frac{dpxy}{d} = pxy.$$

L'expoſant du rapport de c à d ſoit appellé p, c'eſt à dire, [2] $\frac{c}{d} = p$. Donc [3] $dp = c$; ſoit

[1] *Def.* 17. *Algeb.*
[2] *Def.* 12. *Algeb.*
[3] *Cor.* 3. *de la diviſ. pag.* 42.

encore l'exposant du rapport de b à c appellé x, c'est à dire, $\frac{b}{c} = x$; donc $cx = b$; mais au lieu de c en lui substituant ce qui lui est égal, sçavoir dp, on aura $dpx = b$. Soit enfin l'exposant du rapport de a à b appellé y, c'est à dire, $\frac{a}{b} = y$. Donc $by = a$; mais au lieu de b en lui substituant ce qui lui est égal, sçavoir dpx, on aura $dpxy = a$. Or présentement pour connoître l'exposant du rapport de la grandeur a à la grandeur d; il faut diviser a ou son égale $dpxy$ par d, on aura pour quotient ou exposant pxy qui est égal au produit des exposants des rapports de a à b, de b à c, & de c à d multipliez l'un par l'autre. Le rapport de a à d est donc [1] composé des rapports des grandeurs interposées entre a & d, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE

Dans toute progression geometrique, les quarrez de deux termes qui sont immédiatement de suite, sont entr'eux comme le premier terme au troisiéme. Soit la progression $\div b . d . f . g$; je dis que $bb . dd :: b . f$. Car [2] le rapport de bb à dd est doublé du rapport de b à d. Or [3] le rapport de b à f est pareillement doublé du rapport de b à d, puisque le rapport de b à f est composé de celui de b à d & de celui de d à f qui sont [4] égaux. Il y a

[1] *Def.* 17. *Algeb.*
[2] *Cor.* 1. *Prop.* 18.
[3] *Prop. pres. & def.* 18. *d'Algeb.*
[4] *Supposit. ou def.* 16. *Algeb.*

donc même rapport entre *b b* & *d d* qu'entre *b* & *f*. Donc *b b* . *d d* : : *b* . *f*. On fera un pareil raisonnement pour démontrer que les cubes de deux termes qui sont immédiatement de suite dans une progression géometrique, sont entr'eux comme le premier terme au quatriéme, c'est à dire, en raison triplée; par exemple que b^3 est à d^3 comme *b* à *g*. On connoîtra aussi les rapports des autres puissances, en y faisant l'application du Corollaire present.

PROPOSITION XX.

Le produit de deux grandeurs est une grandeur moyenne proportionnelle entre les quarrez de ces grandeurs.

DEMONSTRATION.

Soient les grandeurs *a* & *b*, dont le produit est *a b*: Je dis que ÷ *a a* . *a b* . *b b*. Car le produit des termes extrêmes *a a b b* est égal au produit *a b a b* ou [1] *a a b b* des termes moyens. Donc [2] *a a* . *a b* : : *a b* . *b b*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

DE LA REGLE DE PROPORTION.

La regle de Proportion est une operation d'Arithmetique fondée sur la principale proprieté des proportions qui est que le produit des termes extrêmes de quatre grandeurs proportionnelles est égal au produit des termes moyens, comme on verra par la suite. Cette operation est aussi

[1] *Demand. 6. Algeb.*
[2] *Prop. 3.*

appellée

appellée *Regle de trois*, parceque trois grandeurs étant connuës, on se sert de cette pratique pour trouver une 4^e proportionnelle. Enfin on l'appelle *Regle d'or*, à cause de ses usages infinis & de son utilité tres-grande dans les Mathematiques.

En general il y a de deux sortes de regles de Proportion, la simple, & la composée ou complexe. La simple est celle qui ne contient que 3 termes connus, & la composée est celle qui en contient plus de 3. Il faut premierement examiner la regle de Proportion simple & la maniere de s'en servir; ensuite on passera à la composée.

La regle de Proportion simple est encore de deux sortes, sçavoir la directe, & l'indirecte.

La regle de Proportion directe est celle dans laquelle le premier terme est au second, comme le 3^e est au 4^e qu'on cherche; ou, ce qui est la même chose, lorsque le rapport du premier terme au 3^e est égal au rapport du second & du 4^e qu'on cherche, c'est à dire, si le 3^e terme est plus grand que le premier, le 4^e terme qu'on cherche doit être dans la même Proportion plus grand que le second; & si le 3^e terme est plus petit que le premier, le 4^e terme qu'on cherche doit être pareillement plus petit à proportion que le second: ou enfin, ce qui revient aux mêmes choses, c'est à dire, lorsque la Proportion va du plus au plus, ou du moins au moins. Par exemple, si 8 aunes de marchandise coûtent 32 liv. il est évident que 72 aunes de la même marchandise doivent coûter davantage, sçavoir 288 liv. qui est le 4^e terme qu'on cherche par cette operation. Si 15 hommes ont gagné par leur travail 48 liv. 5 des mêmes hommes ne

P

gagneront en même-temps que 16 liv. qui est encore le 4^e terme qu'on cherchoit, ce qui va du moins au moins ; c'est à dire, que moins il y a d'hommes, moins il y a de gain ; & partant ces exemples conviennent à la régle directe.

La regle de Proportion indirecte est celle dans laquelle le rapport du premier terme au 3^e est égal au rapport du 4^e qu'on cherche, au second ; c'est à dire, si le premier terme est plus grand que le 3^e ; le 4^e terme qu'on cherche sera à proportion plus grand que le 2^e : si le premier est plus petit que le 3^e, le 4^e sera aussi plus petit que le 2^e. Ce qui est la même chose que de dire ; la regle de proportion est indirecte, si le 3^e terme étant plus grand que le premier, le 4^e qu'on cherche doit être plus petit que le 2^e ; ou si le 3^e terme étant plus petit que le premier, le 4^e qu'on cherche est plus grand que le 2^e. Enfin on connoît la regle de Proportion indirecte, & on la distingue d'avec la regle directe, lorsque le sens de la question va du plus au moins ou du moins au plus, ce qu'il est important de bien remarquer pour ne s'y point tromper. Par exemple, si 15 personnes ont dépensé une certaine somme d'argent en 6 mois ; en combien de temps 40 personnes dépenseront-ils une pareille somme ? il est évident que plus le 3^e terme est grand, moins il faudra de temps pour dépenser la somme d'argent dont il s'agit, ce qui va du plus au moins. Si 6 ouvriers font un certain nombre de toises de massonnerie en 8 jours ; en combien de jours 4 ouvriers feront-ils le même ouvrage ? il est encore évident que moins il y aura d'ouvriers, il faudra plus de temps pour faire cet ouvrage ; & partant que le sens de la question est du moins au plus, ce qui fait connoître que ces exemples appartiennent à la regle indirécte.

Lorſqu'on rencontre une queſtion qui appartient à la regle de Proportion ſimple, ſoit qu'elle ſoit dirécte ou indirécte, afin de ſçavoir quel doit être le premier, le 2^e^ & le 3^e^ terme, il les faut diſpoſer de telle maniere que le premier & le 3^e^ ſoient de même nom, & que le ſecond ſoit mis au milieu auquel le 4^e^ qu'on cherche ſera ſemblable.

Exemples de la regle de Proportion dirécte.

Si 14 perſonnes dépenſent 98 liv. en un certain temps; combien dépenſent 20 perſonnes en autant de temps?

Pour reſoudre cette queſtion, il faut examiner ſi elle appartient à la regle de Proportion dirécte ou à l'indirécte. Le but de la queſtion fait connoître qu'il s'agit d'une regle de Proportion dirécte; on arrange les termes de cette maniere.

Si 14 *perſon. dépen.* 98 *liv. combien* 20 *perſonnes?*

Il faut obſerver que dans cet exemple & dans tous les autres ſemblables, il ne faut que trouver un 4^e^ terme ou nombre proportionnel aux trois autres qui ſont connus. J'appelle z ce 4^e^ terme qu'on cherche, ainſi l'analogie eſt telle $14 . 98 :: 20 . z$. Il eſt ſeulement queſtion de trouver la valeur de z; & pour y réüſſir on multiplie le 3^e^ qui eſt 20, par le 2^e^ qui eſt 98, on a pour produit $1960 = 14z$ *. Or en diviſant ces deux grandeurs égales par 14, qui eſt la racine qui nous eſt connuë dans le produit $14z$, on aura d'une part 140, & de l'autre z; & partant

* Prop. 2.

[1] on aura $140 = z$, c'eſt à dire que le 4^e terme qu'on cherchoit eſt 140 ; & partant que 14 . 98 :: 20 . 140, d'où on concluëra qui ſi 14 perſonnes dépenſent 98 liv. 20 perſonnes dépenſeront en autant de temps 140 liv. Cette pratique eſt entierement fondée ſur le Coroll. 2^e de la Prop. 2.

Autre Exemple.

Si 34 aunes de marchandiſe coûtent 80 liv. 14 ſ. 6 d. combien couteront à proportion 15 aunes de la même marchandiſe.

On reſoudra cette queſtion comme la precedente en multipliant le 3^e terme par le 2^e qui eſt 80 liv. 14 ſ. 6 d. & on aura pour produit 1210 liv. 17 ſ. 6 d. on diviſera 1210 l. par le premier terme 34, on aura pour quotient de la premiere diviſion 35 liv. reſte 20 liv. qu'on reduira en ſols en les multipliant par 20, on aura 400 ſols, auſquels on ajoutera 17 ſ. qui ſe ſont trouvez dans le produit 1210 liv. 17 ſ. 6 d. & on aura 417 ſ. qu'on diviſera encore par 34, on trouvera 12 ſ. pour quotient de cette 2^e diviſion, reſte 9 ſ. qu'on reduira en deniers en les multipliant par 12, on aura 108 d. auſquels on ajoutera 6 d. qui ſe trouvent ſeparément dans le produit du 3^e terme multiplié par le ſecond, & on aura 114 d. on diviſera enfin ce nombre 114 par 34, & on trouvera pour quotient 3 d. reſte 12 qu'on mettra avec le diviſeur 34 en cette forme de fraction $\frac{12}{34}$, & en la reduiſant à moindres termes, on aura

[1] *Prop. 6.*

$\frac{6}{17}$ qu'on écrira enſuite des 6 d. d'où on concluëra que ſi 34 aunes de marchandiſe coûtent 80 liv. 14 ſ. 6 d. 15 aunes de pareille marchandiſe couteront au même prix 35 liv. 12 ſ. 3 d. & $\frac{6}{17}$ de denier.

Si on veut ſçavoir combien coute chaque pinte de vin lorſque le muid coute 60 liv. & contient 230 pintes ; on diſpoſe les termes de la queſtion de cette ſorte.

Si 230 pintes coutent 60 liv. combien 1 pinte? & ſuivant la methode qu'on vient d'enſeigner, on trouvera que la valeur de chaque pinte eſt 5 ſ. 2 d. $\frac{14}{23}$.

De même ſi 128 aunes de marchandiſe coutoient 300 livres, on trouveroit la valeur de chaque aune.

Autre Exemple.

S'il ſe rencontroit une queſtion propoſée de cette maniere. Si 25 l. peſant ont couté 18 l. combien de l. peſant couteront 60 l. En faiſant reflexion ſur l'arrangement de 25, 18 & 60, il eſt évident que c'eſt un 3^e terme qu'on cherche, qu'il eſt facile de trouver en multipliant le premier 25 & le dernier 60 l'un par l'autre ; & diviſant leur produit 1500 par le 2^e terme qui eſt connu, on a au quotient de cette diviſion 83 livres peſant, & $\frac{1}{3}$ pour 3^e terme ; d'où on conclud que ſi 25 livres pesant coutent 18 livres, il faudra au même prix 83 livres pesant, & $\frac{1}{3}$ pour avoir de la marchandise suffisamment pour 60 liv. Cette pratique est encore fondée sur les Cor. 2 & 4 de la Prop. 2. On pourroit aussi [1] arranger les termes de cette question de cette sorte ; 18 *livres pesant*. 25 *livres* :: 60 *livres pesant*. *z*. Et alors on trouveroit le 4^e terme comme dans les exemples precedents.

S'il se rencontre une question pareille à celle-ci ; 3 liv. de canelle coutent 15 liv. 12 s. combien coûteront 8 livres 5 onces ? Il faut reduire le premier terme 3 livres en onces, & le 3^e 8 livres pareillement en onces, & y ajouter les 5 onces qui en dépendent, afin que ces termes soient de même espece ; & on change la question en celle-ci qui lui est équivalente : si 48 onces de canelle coutent 15 liv. 12 s. combien 133 onces ? & on achevera l'operation comme on a enseigné.

Exemples de la regle de Proportion indirecte.

Supposons qu'il y ait dans une Ville 1800 hommes en garnison, & que le Gouverneur ait entre les mains une certaine somme d'argent, dont il a ordre de donner 23 s. par jour à chacun jusqu'à un certain temps ; le nombre des soldats a été augmenté jusqu'à 2500, on demande combien le Gouverneur doit donner à chacun, afin que la somme qu'il a entre les mains suffise jusqu'au temps limité ? Il est évident que le nombre

[1] *Cor. Prop. 3. art. 1.*

des soldats étant augmenté, il doit donner moins à chacun. On dispose les termes de cette sorte.

Si 1800 hommes reçoivent chacun 23 sols, combien 2500 hommes recevront-ils chacun ?

Pour resoudre cette question & toutes les autres semblables ou de même genre, on multiplie le premier terme 1800 par le second, & on divise le produit 41400 s. par le 3e terme 2500, on trouve 16 s. 6 d. & $\frac{1800}{2500} = \frac{18}{25}$ pour le 4e terme cherché ; c'est à dire que le Gouverneur doit donner à chaque soldat 16 s. 6 d. $\frac{18}{25}$ pour satisfaire à la question.

Pour connoître la certitude de cette pratique tant pour la question proposée que pour les autres semblables, il faut considerer cette regle indirecte comme reduite à une directe ; c'est à dire, que puisque la question est telle que le premier terme est au 3e, comme le 4e qu'on cherche est au second ; j'appelle z ce 4e terme qu'on cherche, & j'arrange tous les termes de cette sorte en Proportion directe.

1800 *hommes* . 2500 *hommes* : : z . 23 s.

De sorte que dans la disposition precedente lorsqu'on a multiplié le premier terme par le second, & qu'on a divisé le produit de cette multiplication par le 3e, c'est la même chose que si dans cette derniere disposition des termes, on multiplioit le premier terme par le dernier, & qu'on divisât le produit par le 2e terme : ce qui montre que les Corollaires 2 & 4 de la Prop. 2 sont le fondement de cette pratique, & que dans le temps qu'on multiplie le premier terme par le ſecond, & qu'on diviſe le produit par le troiſiéme, cela ſuppoſe tacitement qu'on a fait dans la queſtion propoſée une reduction de la regle de Proportion indirecte à une directe. On peut donc facilement remarquer que ſi la regle eſt directe, on connoît le produit des deux termes moyens, & un des extrêmes; & ſi la regle eſt indirecte, on connoît le produit des extrêmes, & ſeulement un des termes moyens.

Autre Exemple.

Suppoſons qu'il y ait dans une Place aſſiegée 4000 ſoldats pour ſa défenſe, & qu'il n'y ait des vivres que pour 8 mois; que le Gouverneur ait été averti qu'on ne peut lui donner du ſecours pour faire lever le ſiege que dans 10 mois, on demande quel nombre de ſoldats il doit mettre hors de la place, afin de ſoûtenir le ſiege pendant ces 10 mois ſans rien diminuer de ce qu'on donnoit chaque jour à chaque ſoldat. Le but de la queſtion fait connoître que plus il y aura de temps, moins il faudra de ſoldats pour pouvoir continuer de la même maniere l'uſage des proviſions; c'eſt pour cela qu'on arrangera les termes de cette ſorte.

Si 8 *mois ſuffiſent à* 4000 *ſoldats, à combien ſuffiront* 10 *mois?*

On trouvera en operant comme dans l'exemple precedent, que le Gouverneur doit ſeulement conſerver 3200 ſoldats, & renvoyer les autres 800 ſoldats.

Autres Exemples.

Un homme n'ayant qu'une certaine ſomme

d'argent à dépenser pour donner du pain aux pauvres, veut sçavoir combien il aura de pain pour la même somme, lorsque le bled deviendra plus ou moins cher; par exemple, lorsque la mesure du bled valoit 18 liv. pour une certaine somme d'argent il avoit 8 onces de pain; combien d'onces en aura t-il pour la même somme, lorsque la même mesure de bled ne vaudra que 12 liv. On arrangera les termes de la question de cette sorte.

Si 18 *livres donnent* 8 *onces, combien* 12 *livres?*

On connoît facilement par la seule exposition de la question, que cette mesure de bled valant moins, on aura davantage de pain pour la même somme d'argent; & on trouvera après l'operation qu'on en aura 12 onces.

Dans une armée il faut chaque jour 36 muids de vin, dont chacun contient 330 pintes; on demande combien il faudra de muids lorsque chacun ne contiendra que 225 pintes? On fait reflexion que moins chaque muid contiendra de pintes, plus il faudra de muids. On arrange les termes de la question de cette sorte 330. 36 & 225, & on trouve par la supputation, comme on a enseigné, qu'il faudra par jour 52 muids & $\frac{4}{5}$ de muid.

Une personne se propose de faire faire un manteau de 5 aunes d'une étofe dont la largeur est de $\frac{3}{4}$ d'aune; on demande combien il faudra d'aunes pour le doubler avec une étofe d'une demie aune de largeur? On fait reflexion que moins cette étofe aura de largeur, plus il en faudra d'aunes en longueur pour la doublure; parcequ'il faut que la doublure ait autant d'étenduë que le reste de l'habit, on arrangera les termes de cette maniere, $\frac{3}{4}$ de largeur ; 5 aunes de longueur ; $\frac{1}{2}$ de largeur, & on trouve par la supputation qu'il faudra 7 aunes & $\frac{1}{2}$ de doublure.

La regle de Proportion composée est de deux sortes, la directe & l'indirecte.

La regle de Proportion composée directe est celle qu'on reduit à une regle de Proportion simple directe, & la composée indirecte est celle qu'on reduit à une regle simple indirecte.

Exemples de la regle de Proportion composée.

Si 6 hommes gagnent en 8 jours 76 livres ; combien gagneront 4 hommes en 15 jours.

Pour resoudre cette question, il faut la reduire à une regle de Proportion simple ; & afin d'y réüssir, il faut observer que dans ces sortes de questions il y a toûjours trois choses principales & connuës, les autres étant seulement accessoires & comme appartenantes à ces trois choses.

Ceux qui se souviennent des principes de la Grammaire, en peuvent faire ici usage pour distinguer facilement ces choses principales ou principaux termes ; parceque le premier est toûjours nominatif du verbe qui est en usage dans la question ; le second de ces principaux termes est regime de ce verbe ; & le 3e de ces principaux termes est encore un nominatif de ce même verbe.

Dans la question presente, les hommes & les

76 livres sont les principales choses. Pour faire une reduction de cette question à une question de regle de Proportion simple, il faut considerer que si 6 hommes gagnent en 8 jours 76 livres, c'est la même chose que si un homme gagnoit les mêmes 76 livres en 48 jours; puisque suivant cette question on suppose que chacun des 6 hommes travaille pendant 8 jours pour gagner les 76 liv. ce qui est équivalent au travail d'un seul homme pendant 6 fois 8 jours. De même l'autre partie de la question, où on demande combien gagneront 4 hommes en 15 jours, est la même chose que si on demandoit combien doit gagner un travail de 60 jours; parceque dans cette partie on suppose que chacun des 4 hommes travaille 15 jours; par ce moyen on reduira la question precedente à celle-ci;

Si 48 jours de travail donnent 76 livres, combien 60 jours de travail?

On peut encore regarder cette reduction d'une autre maniere sans en changer la valeur des termes; si 48 hommes gagnent 76 livres, combien 60 hommes? Car lorsque 6 hommes travaillent pendant 8 jours, c'est le travail de 6 hommes repeté 8 fois, ce qui est équivalent au travail de 48 hommes pendant un jour. De même dans la derniere partie de la question, on cherche à proportion le prix du travail de 4 hommes repeté 15 fois pendant les 15 jours, ce qui est équivalent au travail de 60 hommes pendant un jour; & en operant comme on a enseigné dans la regle de Proportion simple, on trouvera que 4 hommes pendant 15 jours gagneront 95 livres à proportion de ce que 6 hommes ont gagné 76 livres en 8 jours.

Il suffit d'avoir bien entendu ces choses pour pouvoir ensuite facilement reduire toutes les questions semblables ou de même espece que la precedente, à des regles de Proportion simples, suivant cette methode generale qui est de multiplier entr'eux tous les termes qui dépendent l'un de l'autre, c'est à dire, qui conviennent l'un à l'autre. Après cela le seul discernement fera connoître l'arrangement qu'il faudra donner à ces termes.

On multiplie plusieurs grandeurs entr'elles, lorsqu'on en multiplie deux l'une par l'autre, & qu'on multiplie encore leur produit par une 3^e ; *& ainsi de suite.*

AUTRE EXEMPLE.

Si 12 massons ont fait pendant 5 jours 20 toises d'ouvrage, combien 8 massons en feront-ils pendant 3 jours.

On reduira cette question à cette regle de Proportion simple.

Si 60 *massons font* 20 *toises, combien* 24 *massons?* Et on trouvera pour 4^e terme cherché 8 toises.

AUTRE EXEMPLE.

On pouvoit proposer la question de l'exemple precedent de cette maniere :

Si 12 massons pendant 5 jours ont fait 20 toises d'ouvrage: en combien de jours 8 massons feront-ils 8 toises, à proportion.

Il faut reduire cette question à une regle de Proportion simple, comme les precedentes. Pour cela je nomme z le nombre des jours que je cherche, & je trouverai.

60 *maßons* . 20 *toises* :: 8 z *massons* . 8 *toises.*

On sçait que c'est un des termes moyens de la Proportion,

Proportion, sçavoir le second antecedent $8z$ qui est inconnu. On le trouve * en multipliant le premier 60 par le dernier 8, & en divisant le produit 480 par le terme moyen connu 20, & on a au quotient de cette division 24 pour le 3^e terme de la Proportion; mais par la maniere de reduire ces questions à des regles simples, qu'on vient d'enseigner, on connoît que ce 3^e terme 24 est un produit dont le nombre 8 qui se trouve dans cette derniere question est une des racines; en divisant 24 par 8, le quotient de cette division fait connoître l'autre racine $3 = z$, ce qui fait qu'on rétablit la question de cette maniere.

Si 12 massons pendant 5 jours ont fait 20 toises: 8 massons *en* 3 *jours* feront les 8 toises proposées.

On pouvoit encore dire [1] que le produit des extrêmes $480 = 160z$ qui est le produit des termes moyens, & que divisant l'un & l'autre de ces termes par 160, on trouvera [2] $3 = z$ pour quotient, & partant 3 est le nombre des jours qu'on cherchoit.

Autre Exemple.

Si 38 ouvriers font un fossé de 72 toises en 8 jours, on demande en combien de jours 60 ouvriers en feront 50 toises? Auparavant que de reduire cette question à une question simple, on mettra les termes dans cet ordre,

38 *ouvriers* . 8 *jours* . 72 *toises* :: 60 *ouvriers*. *z jours* . 50 *toises*.

On reduira cette question à une regle de proportion simple qui sera telle.

* *Cor.* 2. & 4. *Prop.* 2. [1] *Prop.* 2.
[2] *Prop.* 6.

304 *ouvriers* . 72 *toises* : : 60 z *ouvriers* . 50 *toises*.

On voit clairement, comme dans l'exemple precedent, que c'est un des termes moyens, sçavoir la valeur du 2^e^ antecedent qu'on cherche. On a mis 304 ouvriers pour le premier terme, parceque le travail de ces 38 ouvriers est repeté successivement autant de fois qu'il y a de jours, ce qui est la même chose que s'il avoit fallu à chaque jour employer 38 ouvriers nouveaux, ce qui fait que cet ouvrage de 72 toises peut être consideré comme l'ouvrage de 304 ouvriers. De même on peut considerer le 3^e^ terme comme un ouvrage de 60 z ouvriers, en prenant z pour le nombre des jours. On resoudra cette question comme la precedente, & on trouvera pour la valeur de z qui est le nombre des jours, 3 jours & $\frac{14}{27}$.

Autre Exemple.

Si 2 ouvriers qui ont fait chacun 5 aunes d'étofe par jour, ont gagné 350 liv. en 18 jours; combien auront gagné 16 ouvriers qui auront fait chacun 4 aunes par jour pendant 30 jours?

L'état de cette question fait connoître que les 5 aunes d'étofe & les 18 jours appartiennent aux 2 ouvriers, & partant qu'on peut multiplier le nombre de ces deux ouvriers par 18, & le produit 36 par les 5 aunes pour avoir 180 qui sera le premier terme d'une regle de Proportion simple à laquelle sera reduite la question; parceque si 2 ouvriers ont travaillé pendant 18 jours, c'est la même chose que si 36 ouvriers avoient travaillé pendant un jour; puisque c'est le travail de deux ouvriers repeté 18 fois. Or puiſque par la ſuppoſition chacun faiſoit 5 aunes d'étofe, le travail de tous ces ouvriers ſeroit 180 aunes d'étofe qui avoient produit 350 liv. de gain. De la même maniere qu'on vient de trouver le premier terme, on trouvera le 3^e de la regle de Proportion ſimple qu'on vient de former ; car le travail de 16 ouvriers pendant 30 jours eſt le même que le travail de 480 ouvriers pendant un jour. Or puiſque par la ſuppoſition chacun fait 4 aunes d'étofe, le travail ſera 1920 aunes : de ſorte qu'on aura la queſtion propoſée reduite à cette regle de Proportion ſimple.

Si 180 *aunes donnent* 350 *liv. combien* 1920 *aunes?*

On trouvera pour 4^e terme 3733 liv. 6 ſ. 8 d.

AUTRE EXEMPLE.

Si 14 livres peſant apportées de 30 lieuës en 12 jours coutent pour le port 23 liv. combien coutera le port de 6 liv. pour 18 lieuës en 3 jours.

On reduira cette queſtion à une regle de Proportion ſimple, comme on a enſeigné dans l'exemple precedent.

Si 5040 *coutent* 23 *liv. combien* 324 ?

Pour bien entendre cela, il faut conſiderer que ſi on tranſporte 14 livres peſant pendant 12 jours, c'eſt repeter 14 livres peſant 12 fois, ce qui eſt équivalent à 168 livres peſant portées pendant un jour ; Chaque nombre de 14 livres peſant étant conſideré comme porté pendant un jour ; ainſi il eſt facile de connoître qu'on peut regarder le total qui eſt 168, comme tranſporté pendant un jour. Or [1] ces 168 liv. peſant ont

[1] *Par ſuppoſit.*

été portées pendant 30 lieuës, chacune de ces livres a donc été portée 30 lieuës; & partant c'est la même chose que si une livre pesant avoit été portée pendant 5040 lieuës; puisque c'est la même chose que si on consideroit une de ces 168 livres pesant repetée 168 fois à chacune des 30 lieuës. Or 30 fois 168 produit 5040 lieuës parcouruës par cette livre pesant. On fera le même raisonnement pour le 3e terme 324 de la regle simple; & on trouvera pour réponse à la question que le port des 6 livres pesant pour 18 lieuës en 3 jours, coutera 1 liv. 9 sols 6 d. & $\frac{4320}{5040}$ de deniers $= \frac{6}{7}$.

Autre Exemple.

Supposons qu'il y ait dans une Ville assiegée 2500 soldats, & que pendant 4 mois chacun reçoive par jour 16 onces de pain; s'il ne reste ensuite dans cette place que 1800 soldats pendant 3 mois, on demande combien chacun recevra par jour seulement, afin que ces provisions puissent suffire pendant ce temps.

Il faut reduire cette question à une regle de Proportion simple, en multipliant le nombre 2500 par 4 mois, & le produit qui est 10000 sera le premier terme de la regle simple, & 16 onces de pain sera le second, & en multipliant 1800 soldats par 3 mois, on aura 5400 pour produit, qui sera le 3e terme de cette regle de Proportion simple.

Pour rendre raison du premier terme 10000, il faut observer, comme dans les exemples precedents, que 2500 soldats pendant 4 mois est la même chose que 10000 soldats pendant 1 mois; puisque ce n'est autre chose que 2500 repeté une fois chaque mois, c'est à dire, 4 fois pendant les 4 mois. On dira la même chose pour le 3^{e} terme 5400 soldats; & on fera cet arrangement.

Si 10000 *soldats reçoivent* 16 *onces, combien* 5400?

Il est facile de remarquer que moins il y aura de soldats, plus ils recevront chaque jour, & partant que cette regle simple est indirecte. En faisant le calcul, par la regle simple indirecte, comme on a enseigné, on trouvera que chacun des 18000 recevra 29 onces & $\frac{17}{27}$ d'once; mais puisque la livre vaut 16 onces, cela est équivalent à 1 livre & $\frac{1}{2}$, 4 onces & $\frac{17}{27}$.

On fait la preuve d'une regle de Proportion par une autre regle de Proportion, dans laquelle on met pour un des termes connus celui qu'on a trouvé par la premiere regle, & on suppose pour inconnu un des termes connus de cette premiere regle; par exemple, si 15 livres de marchandise coûtent 18 francs, combien 10 livres de la même marchandise? On trouve pour 4^{e} terme 12 francs, qui est la somme qu'on vouloit connoître. Pour preuve que cette operation est exacte, on dit, si 10 livres de marchandise coutent 12 francs, comme on vient de trouver, combien 15 livres de la même marchandise? Si on a réüssi dans la premiere question, on trouvera dans cette seconde pour 4^{e} terme le second de la premiere question qui étoit connu. On fera de même pour les autres regles de Proportion simples ou composées;

par exemple, si une personne pendant 5 mois s'est servi de 800 livres appartenantes à un autre, on demande quelle somme ce premier doit prêter à cet autre pour 3 mois, afin d'égaler la recompense; comme il se propose de lui prêter pour moins de temps, il faut qu'il lui prête une plus grande somme, & partant c'est une regle inverse, on trouve par le calcul que ce second doit prêter au premier 1333 livres $\frac{1}{3}$. Pour preuve de cela on fait cette autre question: si 3 mois donnent 1333 livres $\frac{1}{3}$, combien 5 mois? Et on trouve par la regle inverse les 800 livres de la question precedente, ce qui fait voir qu'on a bien réüssi.

DE LA REGLE DE COMPAGNIE.

La regle de Compagnie ou de societé est une operation par laquelle on partage un nombre en parties proportionnelles à des nombres donnez.

Il y a deux sortes de regle de Compagnie, sçavoir la simple & la composée. La regle de Compagnie simple est celle où on n'a point égard au temps, & la composée est celle où on a égard à divers temps.

Exemples de la regle de Compagnie simple.

Trois personnes ont fait une bourse commune pour acheter ou faire faire des marchandises; le premier a mis 420 livres, le second 230 livres,

& le troiſiéme 70 livres ; & aprés leurs negotiations, ils ont gagné tous enſemble 300 livres. Ils demandent à partager ce profit entr'eux à proportion de l'argent que chacun a mis.

gain 300 livres. $\left\{\begin{array}{l} 420 \textit{ liv. miſe du premier;} \\ 230 \textit{ liv. miſe du ſecond.} \\ 70 \textit{ liv. miſe du troiſiéme.} \end{array}\right.$

total des miſes 720 *livres.*

Pour reſoudre cette queſtion & toutes les autres ſemblables, il faut faire autant de regles de Proportion qu'il y a de miſes; & mettre pour premier terme la ſomme de toutes les miſes, & pour 2^e terme on mettra le gain ou profit, & pour chaque 3^e terme, on mettra la ſomme que chaque perſonne a payée.

Dans la queſtion preſente, pour trouver le gain de la premiere perſonne qui a mis 420 liv. on dira :

Si 720 liv. qui ſont la miſe totale, ont donné 300 livres de gain; combien donneront 420 livres qui ſont la miſe du premier?

Par le moyen de cette regle de Proportion, on trouvera 175 livres pour 4^e terme, comme on a enſeigné.

Pour trouver ce qui appartient à la ſeconde perſonne qui a mis 230 liv. on dira :

Si 720 liv. donnent 300 livres, combien 230 livres?

On trouvera par cette regle de Proportion, qu'il appartient 95 liv. 16 ſ. 8 d. à celui qui a mis 230 livres.

Pour trouver ce qui appartient à la troiſiéme perſonne qui a mis 70 livres, on dira :

Si 720 *liv. donnent* 300 *livres, combien* 70 *livres?*

On trouvera que celui qui à contribué de la ſomme de 70 livres, doit recevoir 29 livres 3 ſ. 4 d. du profit. Au lieu de 3 perſonnes, s'il y en avoit 4, 5, 6, &c. on ſuivroit toûjours la même methode.

Pour preuve de la juſteſſe de cette operation, on ajoutera enſemble ce qui revient à chacun du gain, & ſi le total qui en reſultera eſt préciſément égal au gain, l'operation eſt tres-bien faite; s'il arrivoit autrement il y auroit erreur, & il faudroit la recommencer. Dans l'exemple qu'on vient de propoſer, on trouvera que 175 liv. 95 liv. 16 ſ. 8 d. & 29 liv. 3 ſ. 4 d. font 300 liv. ce qui montre qu'on a bien réüſſi.

On pouvoit encore reſoudre cette queſtion d'une autre maniere, en cherchant combien chacune des 700 livres qui ſont le total des miſes, doit emporter des 300 livres de profit, par cette regle de proportion :

Si 720 *liv. donnent* 300 *livres, combien* 1 *livre ?*

Lorſque par cette operation on a connu ce qu'une livre des 700 liv. emporte de profit, qui eſt 8 ſ. 4 d. on multiplie enſuite les 420 l. que le premier a payées par 8 ſ. 4 d, & on trouve au produit 175 livres, qui eſt le même nombre qu'on a trouvé par l'autre methode qu'on vient d'enſeigner ; on multiplie auſſi 230 livres par 8 ſ. 4 d. & 70 liv. par 8 ſ. 4 d, & on trouve au produit de ces multiplications ce qu'on cherche. Au lieu des 300 liv. de profit, ſi c'étoit 300 liv. de perte, on partageroit à ces 3 perſonnes cette perte de la même maniere à proportion de l'argent que chacun à mis, c'eſt à dire, que celui qui a mis davantage perdroit davantage ; & ainſi des autres.

Autre Exemple.

Un homme cede à ſes creanciers ſon bien qui eſt 2500 livres ; au premier de ces creanciers il doit 1260 livres , au ſecond 272 , au troiſiéme 848 , & au quatriéme 620 livres ; mais comme le bien de ce debiteur n'eſt point ſuffiſant pour ſatisfaire entierement ces creanciers , il eſt queſtion de leur en faire une repartition à proportion de ce qui leur eſt dû.

bien à partager 2500 *livres.*	1260 *livres.* 272 848 620
total des dettes	3000 *livres.*

On fera ces ſupputations comme on a enſeigné dans l'exemple precedent , & on trouvera que le premier à qui il eſt dû 1260 livres , doit recevoir 1050 livres des 2500 liv. le ſecond à qui il eſt dû 272 livres , recevra 226 livres 13 ſols 4 d. le troiſiéme à qui il eſt dû 848 livres , recevra 706 livres 13 ſ. 4 d. & le quatriéme à qui il eſt dû 620 liv. recevra 516 liv. 13 ſ. 4 d.

Il faut remarquer que s'il ſe rencontre outre les livres, des ſols & des deniers dans les miſes de chaque perſonne , ou dans le gain ou perte commune , avant que de mettre en uſage les regles de trois , il faut reduire toutes les ſommes aux moindres eſpeces de monnoye ; par exemple en deniers s'il s'y rencontre des deniers, ou en sols si outre les livres il ne s'y rencontre que des sols ; ou bien on ne reduira en sols ou en deniers que le premier & le 3e terme de chaque regle de trois ; & enfin on achevera comme on vient d'enseigner. Pour entendre cela plus facilement, il faut faire attention à l'exemple suivant.

Trois personnes ont 250 l. 15 s. à payer, de sorte que chacun contribuëra à ce payement à proportion de son bien. Le premier à 300 l. 12 s. de revenu ; le 2e à 230 l. 7 s. & le 3e à 50 l. 18 s. On demande combien chacun payera de la somme proposée.

$$250\ l.\ 15\ s. = 5015\ s. \begin{cases} 300\ liv.\ 12\ s. = 6012\ s. \\ 230\ liv.\ \ 7\ s. = 4607\ s. \\ 50\ liv.\ 18\ s. = 1018\ s. \end{cases}$$

$$\overline{581\ liv.\ 17\ s. = 11637\ s.}$$

Il faut reduire en sols le total du bien de ces trois personnes, & on trouvera 11637 s. Il faut aussi reduire en sols 300 l. qui sont le bien du premier, on y ajoutera les 12 s. & on trouvera 6012 s. Il faut faire la même chose à l'égard des deux autres ; Ensuite il faut faire une regle de Proportion, & au lieu de 581 l. 17 s. qu'on mettroit pour le premier terme, on y mettra sa valeur en sols, ce qui est équivalent. 250 l. 15 s. seront le 2e terme, & le 3e sera 6012 s. qui sont la valeur de 300 l. 12 s. & on dira :

Si 11637 *s. donnent* 250 *l.* 15 *s. combien* 6012 *sols ?*

Après avoir cherché combien produisent 6012 fois 250 l. 15 s. on trouve 1507509 l. & après les avoir divisées par 11637 on trouve pour quotient

129 l. 10 ſ. 10 d. $\frac{7830}{11637}$ que doit payer le premier de ces trois perſonnes qui a 300 l. 12 ſ. de revenu.

On auroit trouvé la même choſe ſi on avoit auſſi reduit en ſols les 250 l. 15 ſ. & ſi on avoit formé cette regle de Proportion.

Si 11637 *ſ. donnent* 5015 *ſ. combien* 6012 *ſols ?*

Et aprés avoir multiplié le 3^{e} terme par le 2^{e} on auroit trouvé 30150180 ſols ; & aprés les avoir diviſez par 11637, on auroit trouvé pour quotient

2590 ſ. 10 d. $\frac{7830}{11637}$ = 129 l. 10 ſ. 10 d. $\frac{7830}{11637}$;

comme on avoit déja trouvé.

En continuant l'operation, on trouvera que la 2^{e} perſonne qui a 230 l. 7 ſ. de revenu, payera 99 l. 5 ſ. 4 d. $\frac{9372}{11637}$, & que le 3^{e} payera 21 l. 18 ſ. 8 d. $\frac{6072}{11637}$

Exemple de la regle de Compagnie composée.

Trois perſonnes ſe ſont aſſociez & ont pris reſolution de negotier : le premier a employé 1200 livres, & aprés que 4 mois ont été finis il a retiré ſon argent ; le ſecond a employé 950 livres pour 6 mois ; & le troiſiéme a employé 600 livres pour 10 mois ; ils ont gagné 1400 liv. On demande combien il en doit appartenir à chacun à proportion de l'argent qu'il a employé, & du temps qu'il l'a laiſſé en commerce.

Pour reſoudre cette queſtion, il faut multiplier la miſe du premier par le temps qu'à ſervi ſon

$$\text{gain } 1400 \text{ liv.} \begin{cases} 1200 \text{ liv. pour 4 mois } 4800 \text{ l.} \\ 950 \text{ pour 6 mois } 5700 \\ 600 \text{ pour 10 mois } 6000 \end{cases}$$

16500 *l.*

argent, & on aura 4800 livres; il faut multiplier la miſe du 2[e] par ſon temps, le produit eſt 5700 livres; enfin la miſe du 3[e] par le ſien, cela fait 6000 livres : de ſorte qu'on conſiderera ces 3 ſommes 4800 liv. 5700 liv. & 6000 liv. comme fournies par ces trois perſonnes, & que leur ſomme totale qui eſt 16500 liv. a produit le gain des 1400 liv. ce qui ſe reduit à une regle de Compagnie ſimple, dans laquelle on operera, comme on a enſeigné dans le premier des exemples precedents.

AVERTISSEMENT.

Il y a pluſieurs autres queſtions qu'on trouve dans les traitez particuliers d'Arithmetique faits par differens Auteurs; mais parcequ'on peut reſoudre facilement ces queſtions par les principes qu'on vient d'établir, je n'ai pas cru qu'il fût neceſſaire de s'y arrêter plus long-temps. Les regles qu'ils appellent d'Alliage & de fauſſes poſitions, même pluſieurs queſtions où on employe ordinairement un calcul d'Arithmetique aſſez laborieux, ſont pratiquées & reſoluës beaucoup plus facilement & plus clairement par les équations qui meritent aſſez qu'on en faſſe un traité particulier. Ainſi de peur d'être ennuyeux à ceux qui commencent à s'appliquer à l'étude des Mathematiques, je finirai ici cette ſeconde Partie.

ELEMENS

ELEMENS DES MATHEMATIQUES.

TROISIÉME PARTIE.

DE LA GEOMETRIE.

DEFINITIONS DE GEOMETRIE.

1. LA Geometrie eſt une partie fondamentale des Mathematiques, dans laquelle on traite des lignes, des ſurfaces, & des ſolides.

Cette 3e partie ſera partagée en trois Chapitres. Dans le premier on traitera des lignes; dans le ſecond, des ſurfaces; & dans le 3e, des ſolides, après avoir expoſé les definitions qui leur conviennent, & qui ſont neceſſaires pour l'intelligence de leurs proprietez.

R

2. Un point Mathematique eſt ce qu'on conſidere comme n'ayant aucune partie ; c'eſt à dire, ſans y faire attention à aucune longueur, largeur, ni profondeur.

3. Une ligne eſt une grandeur conſiderée comme étenduë en longueur ſans largeur & ſans profondeur ; par exemple la diſtance de Paris à Caën.

COROLLAIRE I.

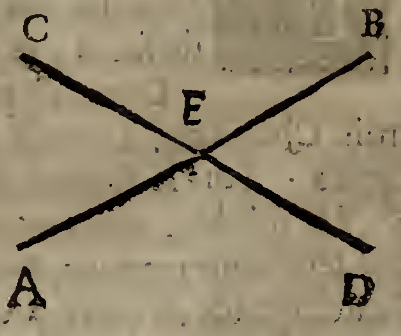
Si on conſidere qu'un point puiſſe être tranſporté d'une ſtation à une autre, la trace ou le veſtige par où ce point auroit paſſé ſera une ligne, puiſque ce ſera une longueur ſans largeur & ſans profondeur.

COROLLAIRE II.

Donc les deux extrêmitez, c'eſt à dire, le commencement & la fin d'une ligne ſont deux points ; puiſque c'eſt le point qui commence à être mû, qui en fait le commencement, & que c'eſt ce même point qui ceſſe d'être mû qui en fait la fin.

COROLLAIRE III.

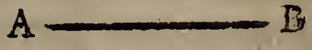
Donc lorſque deux lignes ſe coupent, leur commune ſection eſt un point. Soient les deux lignes AB & CD qui ſe coupent en E, je dis que leur commune ſection eſt un point : car ſi elle étoit deux, ou pluſieurs points, il faudroit que la ligne



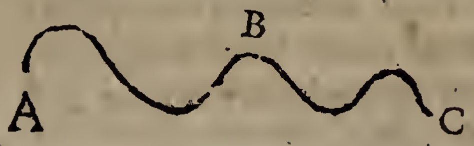
A B, ou C D eût de la largeur, ce qui est contre la definition presente.

Il y a des lignes de deux sortes, de droites, & de courbes.

4. Une ligne droite est celle qui est la plus courte de toutes les lignes qu'on peut mener d'un point à un autre point; par exemple A B.

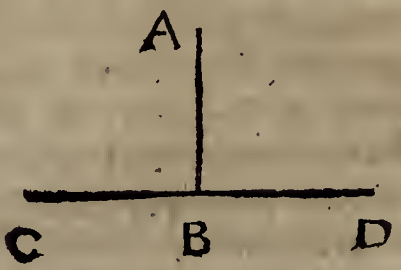


5. Une ligne courbe est celle qui étant menée d'un point à un autre point, n'est pas la plus courte de celles qui puissent être terminées par ces deux points, ou laquelle étant menée d'un point revient au même point; par exemple la ligne A B C ou E F G.



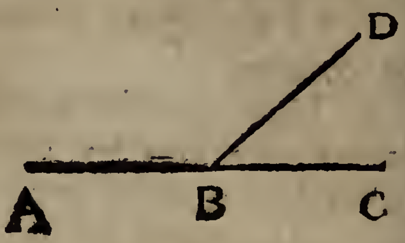
Les lignes droites considerées à l'égard l'une de l'autre sont de trois sortes, perpendiculaires, obliques, & paralleles.

6. Une ligne perpendiculaire à une autre ligne droite est celle qui rencontre cette autre ligne, & qui ne penche ou n'incline d'une part ni d'autre; par exemple la ligne A B est perpendiculaire à la ligne droite C D, si cette ligne A B ne penche ou n'incline de part ni d'autre.

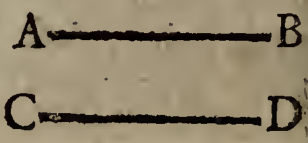


7. Une ligne droite oblique à une autre ligne

droite, est celle qui rencontrant cette autre ligne, penche ou incline plus d'un côté que d'un autre; par exemple la ligne BD, qui rencontre la ligne AC & qui incline plus vers le point C que vers A, est oblique à la ligne AC.



8. Les lignes paralleles sont celles qui sont également distantes entr'elles dans toute leur longueur; par exemple les lignes AB & CD.



9. Une surface est une grandeur considerée comme étenduë en long & en large sans profondeur; telle est la surface d'une Campagne qu'on mesure par arpents, ou par toises, &c.

COROLLAIRE I.

Si on considere qu'une ligne puisse être transportée de travers ou transversalement d'une station à une autre station, ou qu'une ligne courbe fasse une revolution au tour de ses deux extrêmitez, la trace ou le vestige par où cette ligne aura passé sera une surface; puisque ce sera une grandeur étenduë en longueur à cause de la longueur de la ligne, en largeur à cause du mouvement transversal de cette ligne, & sans profondeur parceque cette ligne mûë n'a [1] aucune profondeur.

[1] *Déf. 2. Geo.*

COROLLAIRE II.

Donc les deux extrêmitez, c'eſt à dire le commencement & la fin d'une ſurface ſont deux lignes, puiſque c'eſt la même ligne qui commence à être mûë, qui en fait le commencement; que c'eſt cette même ligne qui ceſſe d'être mûë en fait la fin, & que les points qui terminent cette ligne miſe en mouvement, d'écrivent [1] chacun une ligne.

Il y a de deux ſortes de ſurfaces, des planes & des courbes.

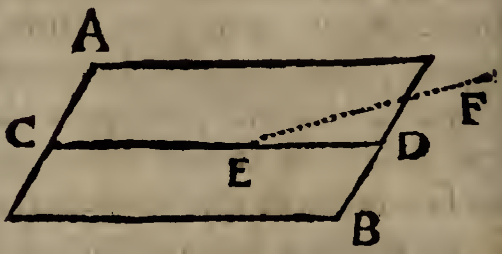
10. Une ſurface plane ou ſeulement plan, eſt celle dans laquelle on peut mener à volonté une, ou pluſieurs lignes droites; c'eſt à dire, qu'une ligne droite touche dans tous ſes points dans quelque ſituation tranſverſale ou de travers qu'on la puiſſe appliquer ſur cette ſurface. Telle peut être la ſurface A B.

COROLLAIRE.

Si une ligne droite, par exemple C E, eſt dans un plan A B, ou ſi cette ligne y a quelqu'une de ſes parties, cette ligne droite étant prolongée, par exemple en D, la partie E D ſera auſſi dans le même plan A B, & quelque loin qu'on la prolonge, elle ſera toûjours dans le même plan;

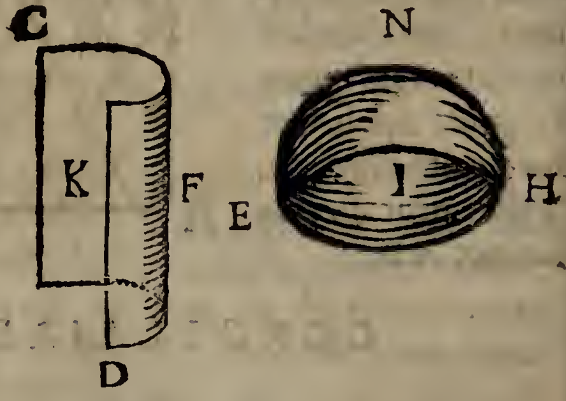
(1) *Cor. 1. déf. 2. Geom.*

car ſi cette ligne droite C E étant prolongée n'étoit pas toûjours dans le même plan A B prolongé auſſi s'il eſt neceſſaire, il s'enſuivroit que cette ligne droite ne ſe confondroit pas avec cette ſurface, ou ne la toucheroit pas dans toute ſa longueur ; &



partant * cette ſurface ne ſeroit pas plane, ce qui eſt contre la ſuppoſition. Donc une ligne droite menée dans un plan, ne peut être ſelon une de ſes parties C E dans un plan quelconque A B, & élevée au deſſus de ce plan ſelon une de ſes parties E F.

11. Une ſurface courbe eſt celle ſur laquelle on ne peut mener pluſieurs lignes droites à volonté; c'eſt à dire, dans toutes ſortes de poſitions tranſverſales, ou que ces lignes droites ne peuvent toucher dans toute leur



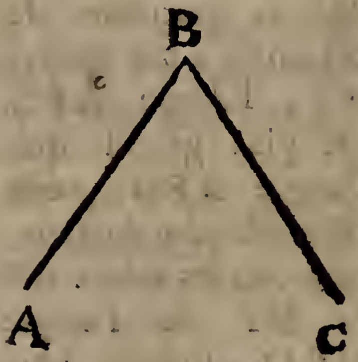
longueur; telle eſt la ſurface C D ou E H.

Si on conſidere l'interieur de la courbure de cette ſurface telle qu'elle eſt en K, ou en I, on l'appelle ſurface concave; & ſi on conſidére l'extérieur de cette courbure telle qu'elle eſt en F, ou en N, on l'appelle ſurface convexe.

* *Déf. preſente.*

Il faut preſentement faire attention aux définitions qui conviennent aux proprietez des lignes menées ſur les ſurfaces ; aux définitions qui conviennent aux ſurfaces conſiderées l'une à l'égard de l'autre, & enfin aux lignes qui ſervent de termes, de bornes, ou de limites à des ſurfaces.

12. Un angle eſt l'écartement ou ouverture compriſe entre deux differentes lignes, qui concourent ; par exemple ABC.



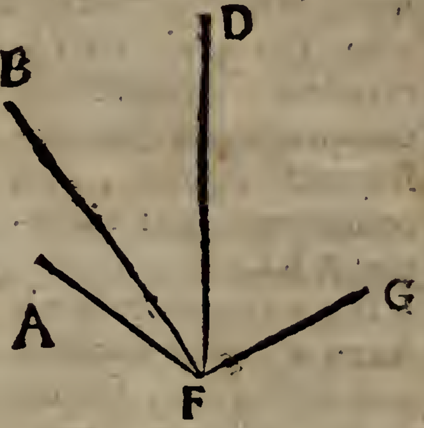
Il y a en general trois ſortes d'angles compris par des lignes, ſçavoir angle rectiligne, curviligne, & mixte.

13. Un angle rectiligne eſt un écartement ou ouverture formée par deux lignes droites ; par exemple l'angle ABC. Le curviligne eſt l'ouverture compriſe par deux lignes courbes ; & le mixte, par une courbe & une ligne droite. Dans la ſuite on traitera ſeulement des angles rectilignes.

Il faut obſerver qu'en ſe ſervant de lettres pour exprimer un angle formé par des lignes, la lettre du milieu de l'expreſſion marquera toûjours la pointe ou le ſommet de l'angle qui eſt le point de concours ; par exemple, dans l'expreſſion de l'angle ABC ou CBA qui eſt la même choſe, le ſommet ou pointe de cet angle eſt le point B.

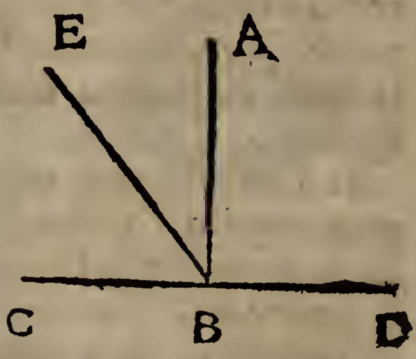
COROLLAIRE.

Il ſuit de cette définition que tel eſt l'écartement de deux lignes qui concourent, tel ſera l'angle qu'elles forment, c'est à dire, que plus cet écartement sera grand, plus aussi cet angle sera grand; & que plus cet écartement sera petit, l'angle sera petit: & qu'enfin on n'a point égard à la longueur des lignes qui forment un angle pour déterminer la grandeur de cet angle; par exemple, l'angle A F G est plus grand que l'angle B F D, qui n'en est qu'une partie, quoique les côtez B F & D F de l'angle B F D soient plus longs que les côtez A F & F G de l'angle A F G.



Les angles rectilignes sont de trois sortes, droits, obtus, & aigus.

14. Un angle droit est celui qui est compris ou formé par une ligne perpendiculaire à une autre ligne. Tel est l'angle A B D, si A B est perpendiculaire à B D.



15. Un angle obtus est celui qui est plus grand ou plus ouvert qu'un angle droit; par exemple, l'angle E B D, qui est plus grand que l'angle droit A B D.

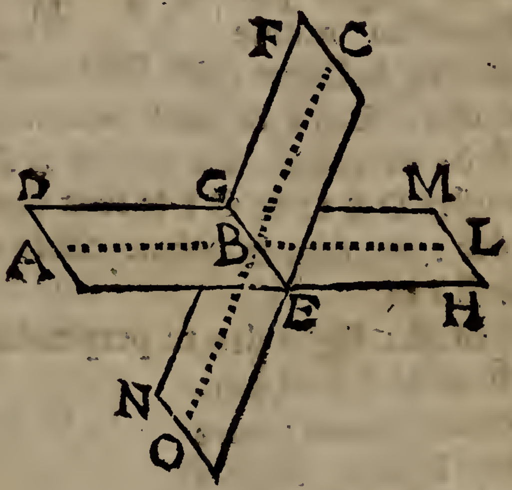
16. Un angle aigu est celui qui est plus petit qu'un angle droit; par exemple, l'angle E B C qui est plus petit que l'angle droit A B C.

En general les angles aigus ou obtus sont appellez *angles obliques.*

Les angles rectilignes, soit qu'ils soient droits, obtus, ou aigus, peuvent encore recevoir differens noms : on les peut appeller angles plans, angles de plans, & angles alternes.

17. Angle plan est celui qui est designé sur une surface plane, comme l'angle A B C de la definition 12.

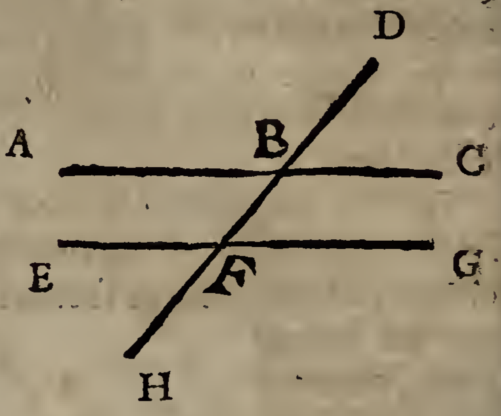
18. Un angle de plans ou de deux plans est l'écartement, qui est entre deux lignes perpendiculaires à la commune section de ces deux plans, par un même point, chacune de ces deux perpendiculaires étant menée dans chaque plan ; par exemple si la ligne A B menée dans le plan D E est perpendiculaire à la commune section



G E, & si la ligne C B menée dans le plan F E est aussi perpendiculaire à cette commune section G E par le même point B, l'écartement de ces deux lignes A B & C B est l'angle compris par les deux plans D E & F E ; l'angle des plans F E & G H doit être consideré comme le precedent ; & ainsi des autres.

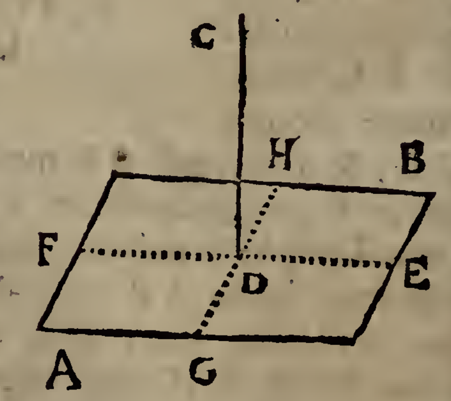
19. Angles alternes sont ceux qui ont le sommet dans differentes lignes, & qui sont posées de part & d'autre d'une ligne droite, qui coupe ces mêmes lignes ; on les appelle alternes internes lorsqu'ils sont entre ces lignes qu'une

autre ligne coupe ; & alternes externes lorsqu'ils ne sont pas entre ces mêmes lignes, dans lesquelles leur sommet est posé. A B F & B F G ; EFB & FBC sont des angles alternes internes ; DBC & EFH ; ABD & HFG sont des angles alternes externes.



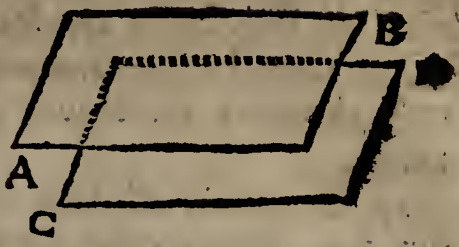
Les angles posez d'un même côté de la ligne DH sont aussi intérieurs & extérieurs. C B F & GFB sont intérieurs du même côté ; de même des angles A B F & E F B : les angles D B C & G F H sont extérieurs du même côté : on dira la même chose des angles A B D & E F H.

20. La ligne droite perpendiculaire à un plan est celle qui est perpendiculaire à toutes les lignes droites qu'on peut mener dans ce même plan par l'extrêmité de cette ligne ; par exemple C D est perpendiculaire au plan A B, si elle est perpendiculaire aux lignes F E, G H, &c. qui sont menées dans ce plan par l'extrêmité D de cette ligne droite C D.



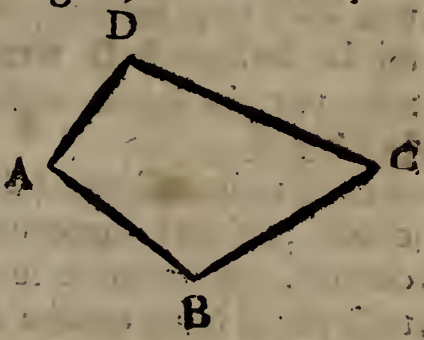
21. Les plans paralleles sont ceux qui sont

également distans l'un de l'autre dans toute leur étenduë ; par exemple AB & CD.

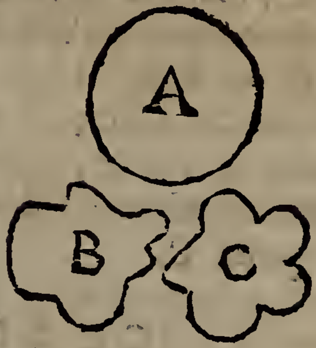


Une surface plane à cause de ses limites ou termes est de trois sortes ; la surface plane rectiligne, la curviligne, & la mixte.

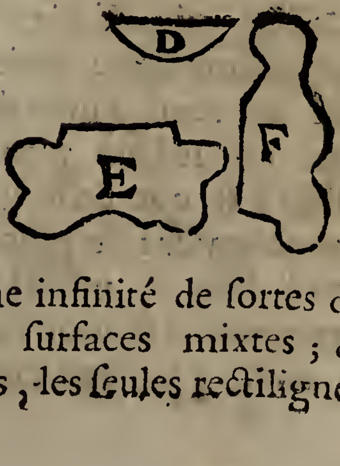
22. La surface plane rectiligne est celle qui est terminée par des lignes droites ; par exemple, ABCD.



23. La surface plane curviligne est celle qui est terminée par une, ou plusieurs lignes courbes, comme les surfaces A, B, C, &c.



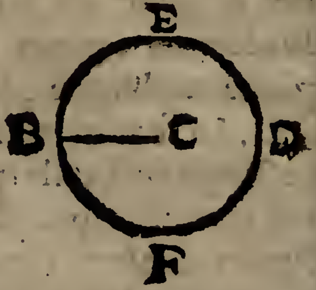
24. La surface plane mixte est celle qui est terminée par des lignes droites & des lignes courbes, comme D, E, F, &c.



Mais parcequ'il y a une infinité de sortes de surfaces curvilignes & de surfaces mixtes ; & qu'entre les surfaces planes, les seules rectilignes

& curvilignes circulaires sont les plus necessaires, & sont celles qui sont d'un plus frequent usage dans les Mathematiques ; c'est pour cela qu'on traitera seulement de ces deux dernieres sortes.

25. Un cercle est une surface plane terminée par une ligne courbe dont tous les points sont également distans d'un point pris dans cette surface ; telle est la surface B D terminée par la ligne courbe B E D F B.



26. La circonference d'un cercle, ou une ligne circulaire, est une ligne courbe, qui termine le cercle de toutes parts ; telle est la ligne courbe B E D F B.

27. Un arc de cercle est une partie de circonference telle qu'elle soit ; par exemple la partie B E ou E D.

28. Le centre d'un cercle est un point pris dans ce cercle, qui est également distant de tous les points de la circonference ; par exemple le point C.

COROLLAIRE.

Donc pour d'écrire un cercle, il faut concevoir qu'une ligne droite ; par exemple B C soit mûë au tour d'une de ses extrêmitez fixes C dans un même plan ; car la ligne courbe B E D F B que cette ligne B C aura d'écrite par le mouvement du point B, lorsqu'elle sera revenuë dans la même situation d'où elle avoit commencé à se mouvoir, sera une circonference de cercle ; puisque chacun des points de cette ligne

ligne courbe ſera également diſtant de l'autre extrêmité fixe C de cette ligne droite mobile.

L'eſpace ou ſurface plane qui ſera terminée par cette ligne courbe ſera le cercle, & l'extrêmité fixe de cette ligne mobile ſera le centre.

29. Un rayon de cercle eſt une ligne droite menée du centre à la circonference; par exemple C B.

COROLLAIRE I.

Donc les rayons d'un même cercle ſont égaux entr'eux; puiſqu'ils ſont tous menez du centre à quelque point de la circonference, & que [a] le centre d'un cercle eſt également diſtant de tous les points de la circonference.

COROLLAIRE II.

Donc les lignes droites menées du centre du cercle, plus courtes qu'un rayon ſe termineront dans le cercle ſans parvenir à la circonference; & les lignes menées du centre plus longues qu'un rayon outrepaſſeront la circonference, & ſe termineront hors le cercle : car elles ſe termineront plus loin du centre, que chaque point de la circonference, c'eſt à dire, qu'elles outrepaſſeront les bornes du cercle.

30. Une corde ou ſoûtendante d'un arc de cercle eſt une ligne droite menée d'une des extrêmitez de cet arc à ſon autre extrêmité; par exemple G H. Une corde appartient en même-temps à deux arcs, dont

[a] Déf. 28. Geo.

elle est soûtendante; par exemple G H appartient à G L H, elle appartient aussi à l'arc G M H.

31. Un diametre est une ligne menée d'un point à un autre point de la circonference, & qui passe par le centre, comme la ligne O P.

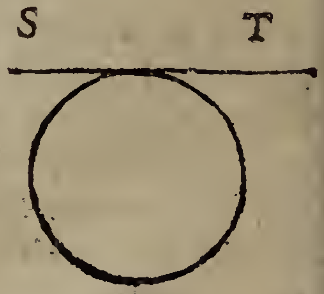
COROLLAIRE.

Chaque diamêtre est double d'un rayon. Donc tous les diamêtres sont égaux entr'eux; parceque [1] les grandeurs qui sont doubles d'une même grandeur, sont égales entr'elles.

32. Un segment de cercle est une partie du cercle, terminée par une corde ou ligne soûtendante, & par l'arc soûtenu par cette corde; par exemple la partie G L H G ou G M H G du cercle de la definition 30.

33. Un secteur de cercle est une partie du cercle terminée par deux rayons qui forment un angle, & par l'arc intercepté entre ces deux rayons; par exemple l'espace A M N A.

34. Une ligne touchante la circonference d'un cercle, est une ligne droite menée dans le plan du cercle, qui rencontre la circonference de ce cercle sans la couper aucunement, c'est a dire, qu'elle



(1) *Ax. 6. general.*

n'entre en aucune maniere dans le cercle ; par exemple la ligne S T.

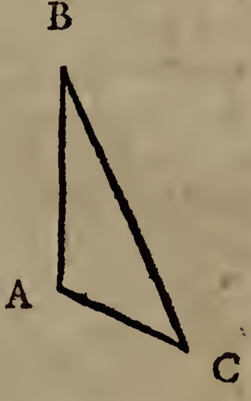
35. Un degré est la trois-cens soixantiéme partie d'une circonference de cercle ; c'est à dire, si on divise une circonference de cercle en 360 parties égales, chaque partie sera appellée un degré.

36. Une minute est une soixantiéme partie d'un degré, c'est à dire que, si on divise un degré en 60 parties égales, une de ces parties est une minute ou prime.

37. Une seconde est une soixantiéme partie d'une minute, c'est à dire que, si on divise une minute en 60 parties égales, une de ces parties est une seconde ; en subdivisant de cette maniere par 60, on trouvera des tierces, des quartes, &c. à l'infini.

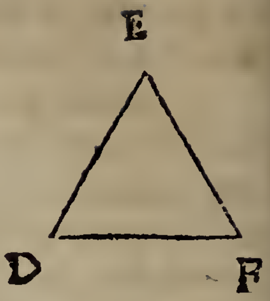
Nous commencerons les définitions qui conviennent aux surfaces planes rectilignes par celles du triangle rectiligne ; parcequ'on peut reduire toutes ces surfaces en triangles, en menant des lignes droites à tous les angles de ces surfaces, d'un point pris à volonté dans ces mêmes surfaces.

38. un triangle rectiligne est une surface plane terminée par trois lignes droites, comme A B C.

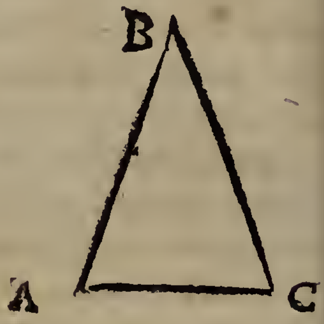


Il y a de trois sortes de triangles si on considére seulement leurs côtez ; sçavoir, Equilateral, Isoscele & Scalêne : & si on considére seulement leurs angles, on en trouvera encore de trois sortes ; sçavoir Oxigone ou Acutangle, Rectangle, & Ambligone ou Obtusangle.

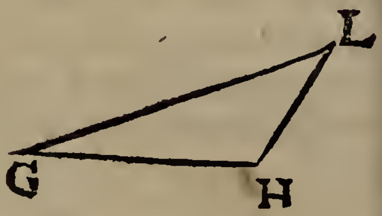
39. Un triangle équilateral eſt celui qui a ſes trois côtez égaux entr'eux ; par exemple D E F.



40. Un triangle Iſoſcele eſt celui qui a ſeulement deux côtez égaux ; par exemple le triangle ABC qui a deux côtez A B & B C égaux entr'eux.

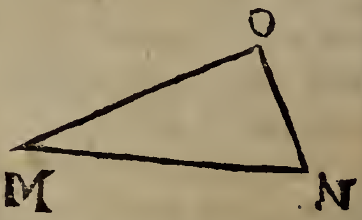


41. Un triangle ſcalene eſt celui qui a ſes trois côtez inégaux entr'eux ; par exemple le triangle G H L.



42. Un triangle acutangle ou oxigone eſt celui dont tous les angles ſont aigus ; par exemple le triangle A B C ou D E F.

43. Un triangle rectangle eſt celui dont un des angles eſt droit ; par exemple le triangle M N O, dont l'angle M O N eſt droit.



44. Un triangle ambligone ou obtuſangle eſt celui dont un des angles eſt obtus ; par exemple le triangle G L H dont l'angle G H L eſt obtus.

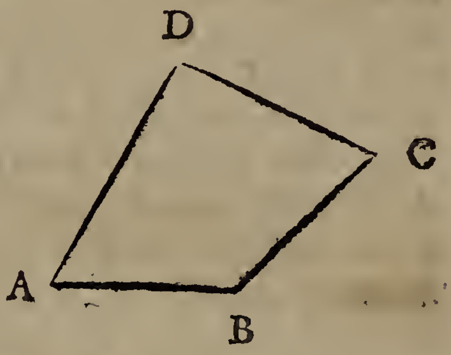
45. L'hypotenuſe d'un triangle rectangle eſt le côté oppoſé à l'angle droit ; par exemple

M N eſt l'hypotenuſe du triangle rectangle M N O de la definition 43.

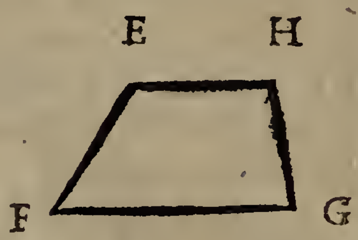
46. La baſe d'un triangle eſt le troiſiéme côté qui reſte lorſqu'on a parlé des deux autres ; par exemple ſi on a parlé des deux côtez A B & A C, du triangle A B C, le troiſiéme côté B C ſera appellé baſe. La baſe des autres ſurfaces, ou des ſolides, eſt ordinairement le côté inferieur.

Les ſurfaces rectilignes quadrilaterales ou quadrilatêres, ou terminées par quatre lignes droites, en general ſont de trois ſortes, trapeſes, trapeſoides, & parallelogrammes.

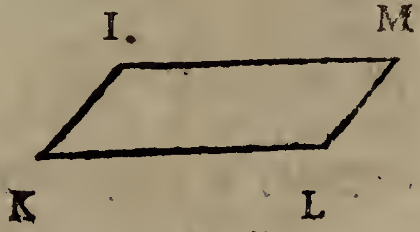
47. Un trapeſe eſt une ſurface terminée par quatre lignes droites, dont aucune n'eſt parallele à l'autre ; par exemple la ſurface A B C D.



48. Un trapeſoide eſt une ſurface terminée par quatre lignes droites dont deux ſont paralleles entr'elles ; par exemple, la ſurface EFGH, dont les deux côtez ou lignes E H & F G ſont paralleles entr'elles.



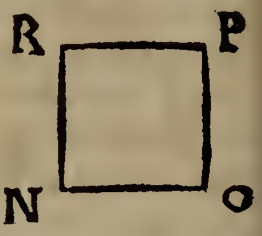
49. Un parallelogramme eſt une ſurface terminée par des lignes droites, dont les côtez ou lignes oppoſées ſont paralleles entr'elles ; par exem-



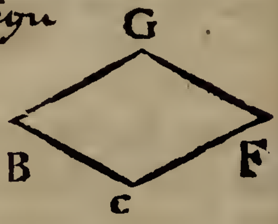
ple la ſurface K M, dont les côtez K L & I M oppoſez ſont paralleles l'un à l'autre, & dont les côtez I K & L M ſont auſſi paralleles l'un à l'autre.

Il y a quatre ſortes de parallelogrammes quadrilateraux, ſçavoir le Quarré, le Rhombe, le Parallelogramme Oblong ou Rectangle, & le Rhomboide.

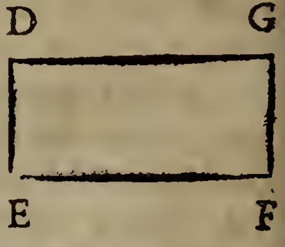
50. un quarré eſt un parallelogramme dont deux des côtez comprennent un angle droit, & ſont égaux entr'eux; par exemple le parallelogramme N P dont les côtez N O & N R comprennent l'angle droit O N R, & ſont égaux entr'eux.



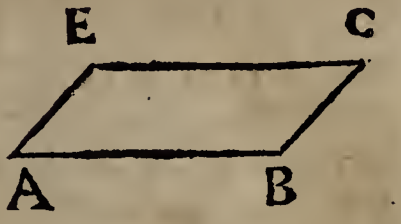
51. Un rhombe eſt un parallelogramme dont deux côtez comprennent un angle oblique, c'eſt à dire, aigu ~~droit~~ ou obtus, & ces deux côtez ſont égaux entr'eux; par exemple le parallelogramme B F, dont les côtez B C & B G ſont égaux entr'eux, & comprennent par leur écartement l'angle oblique C B G.



52. Un parallelogramme oblong, ou ſimplement rectangle, eſt un parallelogramme dont les deux côtez comprennent un angle droit, & ſont inégaux entr'eux; par exemple le parallelogramme E G, dont les côtez E F & E D ſont inégaux, & comprennent l'angle droit D E F.

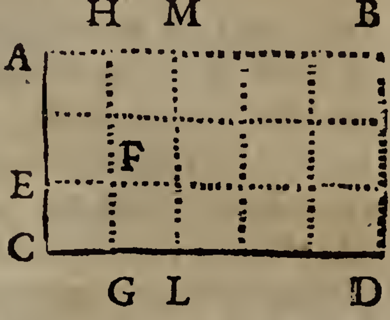


53. Un rhomboide eſt un parallelogramme, dont deux côtez comprennent un angle oblique, c'eſt à dire, aigu ou obtus, & ces deux côtez ſont inégaux entr'eux ; par exemple le parallelogramme A C dont les côtez AB & AE ſont inégaux, & comprennent l'angle oblique B A E.



COROLLAIRE I.

Donc en general, ſi deux lignes menées dans un même plan concourent en un point, & ſi on ſuppoſe qu'une de ces deux lignes ſoit mûë transverſalement ſelon la longueur de l'autre, & toûjours parallelement à elle-même lorſqu'elle étoit dans ſa premiere ſituation ; étant arrivée à l'extrêmité de l'autre, un parallelogramme ſera décrit : par exemple ſi la ligne A C eſt mûë transverſalement, ſelon la longueur de C D, ou C D ſelon la longueur de C A & toûjours parallelement à leur premiere ſituation ; lorſque A C ſera parvenuë à l'extrêmité de C D en B D, ou que C D ſera parvenuë à l'extrêmité de A C en A B, la ſurface C B qui ſera décrite ſera un parallelogramme ; puiſque les côtez A C & B D ſont paralleles, & que les côtez A B & C D ſeront auſſi paralleles par la ſuppoſition



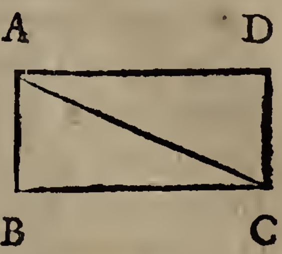
qu'on a faite que ces côtez étoient toûjours paralleles pendant leur mouvement.

COROLLAIRE II.

Donc la ſurface d'un quarré ou d'un parallelogramme rectangle eſt décrite par un des côtez perpendiculaires a l'autre, mû tranſverſalement ſelon la longueur de cet autre, c'eſt à dire, repeté autant de fois qu'il y a de points dans cet autre côté ; ce qui eſt la même choſe que de multiplier un côté par l'autre : & partant pour avoir la ſurface du rectangle C B, dont un des côtez A C eſt de 3 toiſes, & l'autre C D de 5 toiſes, il faut multiplier A C par C D, ou C D par A C, on trouvera pour cette ſurface 15 toiſes quarrées. Parceque chaque toiſe lineaire de la ligne A C, par exemple C E dans la promotion tranſverſale qui en ſera faite de la ſituation C E en F G décrira une toiſe quarrée C F : de ſorte que la ligne A C contenant 3 toiſes lineaires étant parvenuë en G H aura décrit 3 toiſes quarrées ; ſi on en fait encore une promotion juſqu'en L M, elle décrira encore 3 toiſes quarrées, & ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'elle ſoit parvenuë en B D. Et partant ſi le côté d'un quarré eſt multiplié par l'autre, on connoîtra au produit de cette multiplication la valeur de la ſurface de ce quarré. Pareillement ſi on multiplie le côté d'un rectangle par un autre, on aura pour produit la ſurface de ce rectangle. On ne doit pas conclure la même choſe du rhombe & du rhomboide, comme il ſera demontré dans la ſuite.

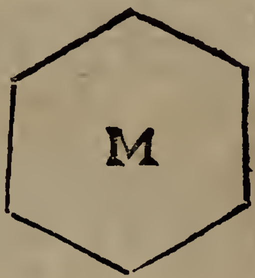
COROLLAIRE III.

Donc les côtez oppoſez des parallelogrammes ſont égaux entr'eux ; par exemple les côtez A B & D C ſont égaux entr'eux ; puiſque * le parallelogramme B D eſt décrit par la ligne A B tranſportée tranſverſalement en D C ; par le même raiſonnement A D = B C. On dira la même choſe des autres parallelogrammes.



54. Une ligne diagonale eſt une ligne menée du ſommet d'un des angles par le ſommet de l'angle oppoſé d'un parallelogramme ; par exemple la ligne A C qui eſt menée du ſommet de l'angle A, au ſommet de l'angle oppoſé C du parallelogramme B D.

55. Une ſurface reguliére eſt celle dont tous les côtez ſont égaux entr'eux, & dont pareillement tous les angles ſont égaux entr'eux, comme la ſurface M, & la ſurface N P de la définition 50.



56. Un polygone eſt une ſurface terminée par un nombre de côtez plus grand que 4 ; par exemple M.

COROLLAIRE.

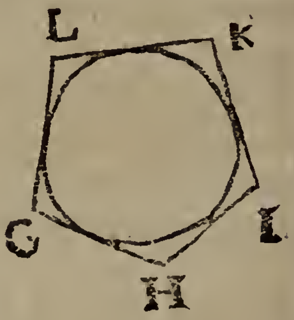
Puiſqu'on peut (1) conſiderer une ligne comme une trace ou veſtige d'un point mû d'une ſtation à une autre ſtation ; & que le plus court chemin qu'on puiſſe imaginer dans la courſe d'un point qui eſt en mouvement, c'eſt le chemin que ce point parcourt en paſſant d'une ſta-

* *Cor.* 1. *déf. preſente.* (1) *Cor.* 1. *déf.* 3. *Geo.*

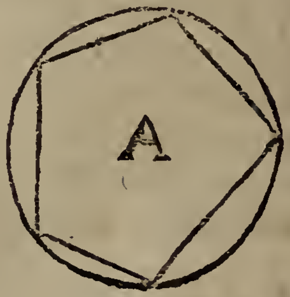
tion à une autre qui lui eſt infiniment proche ; & le chemin le plus court de tous ceux qu'on peut imaginer d'un point à un autre point étant (1) une ligne droite ; la ligne menée d'un point à un autre point qui eſt infiniment proche, eſt une ligne droite ; & partant toute ligne droite ou courbe peut être conſiderée comme une infinité de petites lignes droites infiniment petites. Donc enfin une ligne courbe, par exemple une circonference de cercle, eſt * un polygone d'une infinité de côtez infiniment petits.

Les polygones ſont diſtinguez entr'eux par le nombre de leurs angles ou de leurs côtez, c'eſt à dire, qu'une ſurface de 5 côtez eſt appellée pentagone ; une de 6 côtez ; Exagone ; une de 7 côtez, Eptagone ; une de 8 côtez, Octogone ; une de 9 côtez, Enneagone ; une de 10, Decagone, &c.

57. Une ſurface plane circonſcrite à un cercle, eſt celle dont tous les côtez touchent la circonference de ce cercle ; par exemple la ſurface GHIKL, dont chacun des côtez G H, H I, &c. touchent une même circonference de cercle.

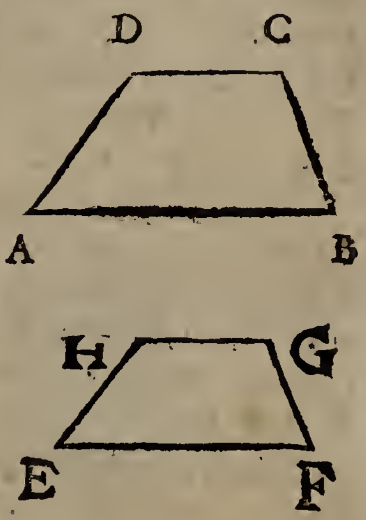


58. Une ſurface plane inſcrite dans un cercle, eſt celle par tous les ſommets des angles de laquelle une circonference de cercle paſſe ; par exemple la ſurface A.



(1) *Déf. 4. Geo.*
* *Déf. 56. preſente.*

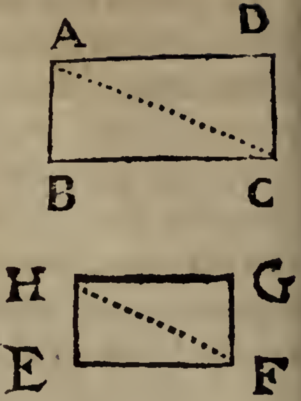
59. Dans les surfaces rectilignes & équiangles l'une à l'autre, un côté est homologue à un autre, lorsque le premier se termine aux sommets des angles d'une surface, qui sont égaux aux angles de l'autre surface, au sommet desquels se termine le second côté homologue. On dira la même chose des autres côtez homologues; par exemple si les surfaces A B C D & E F G H sont équiangles l'une à l'autre, c'est à dire, si l'angle A B C d'une de ces surfaces est égal à l'angle E F G de l'autre, & si l'angle B C D = F G H, & C D A = G H E, & D A B = H E F; le côté A B & le côté E F seront homologues; parceque, suivant ce qu'on vient de dire, A B se termine aux sommets des angles A & B qui sont * égaux aux angles E & F, chacun à chacun. Par la même raison B C & F G sont homologues, de même A D & E H, &c.



Dans les triangles équiangles l'un à l'autre, les côtez homologues sont ceux qui sont opposez à angles égaux.

60. Deux surfaces semblables sont celles dont chaque angle de l'une est égal à chaque angle de l'autre, & dont les côtez homologues qui comprennent des angles égaux dans une de ces surfaces, sont proportionnels aux côtez homologues qui comprennent pareils angles égaux dans

* *Par supposit.*



l'autre ſurface ; par exemple la ſurface B D eſt ſemblable à E G , ſi l'angle D A B = G H E ; ſi ABC = HEF; ſi B C D = E F G ; ſi C D A = F G H ; & ſi le côté D A . A B :: G H . H E ; & ſi A B . B C :: H E . E F ; ſi B C . C D :: E F . F G ; & enfin ſi C D . D A :: F G . G H.

On ſera libre auſſi de comparer chaque côté d'une de ces ſurfaces à chaque côté qui lui correſpond dans l'autre ; par exemple A D . H G :: A B . H E :: B C . E F . &c. la ſimilitude de ces ſurfaces ſubſiſtera toûjours. Car s'il ſe trouve une ſurface dont les côtez ſoient entr'eux ſelon la premiere maniere de comparer qu'on vient d'expoſer, ces mêmes côtez ſeront auſſi * entr'eux ſelon la ſeconde.

On ſe ſert indifferemment de ces deux manieres de comparer les côtez des ſurfaces ſemblables , parcequ'une de ces manieres ne peut être vraye ſans que l'autre le ſoit.

Il faut ſeulement remarquer que,lorſque ſelon la ſeconde de ces deux manieres on compare les côtez homologues d'un triangle ou autre ſurface aux côtez homologues d'un autre triangle ſemblable ou de quelqu'autre ſurface ſemblable, les antecedens d'une même analogie ſe doivent rencontrer dans le même triangle ou dans la même ſurface.

COROLLAIRE.

Donc les quarrez ſont deux ſurfaces ſemblables

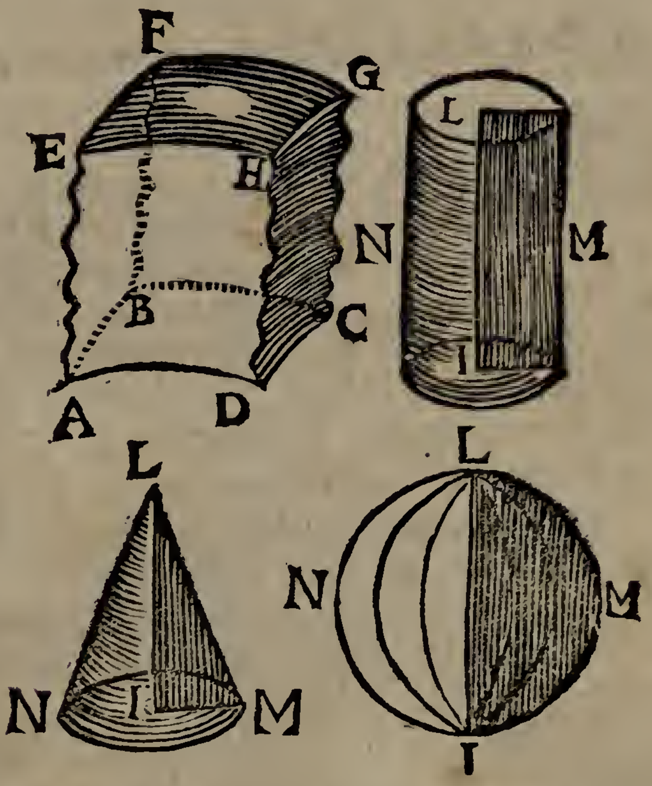
* *Cor. Prop. 3. Art. 2. Algeb.*

entr'elles ,

61. Les corps, ou les ſolides ſont des grandeurs étenduës en long, en large, & en profond; par exemple une pierre, une piece de bois, &c.

COROLLAIRE I.

Donc ſi on conſidere qu'une ſurface puiſſe être tranſportée de travers ou tranſverſalement d'une ſtation à une autre ſtation, ou qu'une ſurface faſſe



une revolution autour de deux points d'une des lignes qui la terminent; un corps ou ſolide ſera décrit par la trace ou le veſtige par où cette ſurface aura paſſé. Car ce ſera une grandeur étenduë en longueur & en largeur à cauſe de la longueur & largeur de la ſurface

* Cor. Prop. 3. art. 1.

T

mûë, & cette grandeur outre la longueur & largeur ſera auſſi étenduë en profondeur, à cauſe du mouvement tranſverſal. Par exemple ſi la ſurface A C eſt tranſportée de ſa ſituation A C en E G, l'eſpace A B C D E F G H qui ſera décrit par ce mouvement, ſera un ſolide. Pareillement ſi quelque ſurface, par exemple, I L M fait une revolution au tour des deux points I & L de la ligne I L, qui eſt un de ſes termes ou limites, I L M N ſera un ſolide.

COROLLAIRE II.

Donc les extrêmitez d'un corps ſont des ſurfaces; parceque ſi on conſidere que ce corps ſoit décrit par une ſurface tranſportée d'une ſtation à une autre ſtation, la ſurface qui commencera à ſe mouvoir, & cette même ſurface qui ceſſera de ſe mouvoir, ſervira à terminer ce corps; les autres extrêmitez ſont décrites par le mouvement tranſverſal de chaque ligne, qui terminera cette ſurface en mouvement. Si on conſidere que ce corps ſoit décrit par la revolution d'une ſurface au tour d'un ou pluſieurs points, le mouvement tranſverſal des lignes qui ſeront mûës avec la ſurface dont elles ſeront termes, décriront des ſurfaces.

Il y a pluſieurs ſortes de ſolides, mais dans ces Elemens on traitera ſeulement des Pyramides, des Cones, des Priſmes, des Cylindres & des Spheres; parceque ce ſont les eſpeces des ſolides, qui ſont le plus en uſage, & dont la connoiſſance eſt tres-neceſſaire.

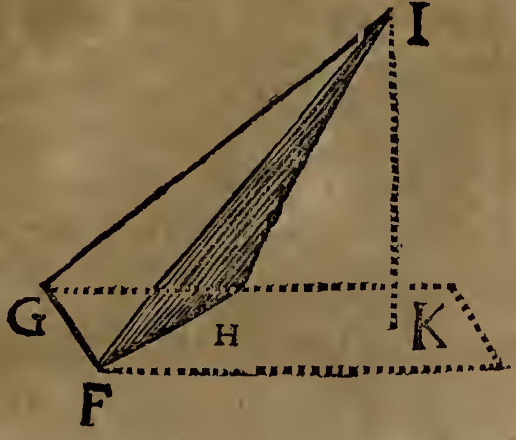
62. Une Pyramide eſt un ſolide, qui a pour terme une ſurface quelconque rectiligne, & qui a enſuite pour autres termes pluſieurs triangles;

de ſorte qu'un des angles de chacun ſe termine à un ſommet commun, & que chacun de ces mêmes triangles a pour baſe un côté de cette ſurface rectiligne ; tel eſt le corps *A B C D*.

63. Un angle ſolide eſt l'écartement ou ouverture de plus de deux plans qui ſe rencontrent l'un l'autre,& qui ſe finiſſent en pointe dans un ſommet commun, en terminant d'une part un eſpace concave. Dans la pyramide *ABCD*, les plans *ADC*, *CDB*, & *BDA* qui ſe rencontrent dans les lignes *AD*, *DC* & *DB*, forment un angle ſolide dont le ſommet eſt *D*. Dans une chambre, les deux murailles & le plancher qui ſe rencontrent forment un angle ſolide.

Il y a des pyramides droites & des pyramides obliques.

64. Une pyramide droite eſt celle du ſommet de laquelle on peut mener une ligne perpendiculaire ſur la baſe, ſans qu'il ſoit pour cela neceſſaire de prolonger cette baſe ; ou bien du ſommet de laquelle une ligne étant menée perpendiculairement à la baſe, ſe trouve au dedans de cette pyramide. Par exemple, la pyramide *A B C D* du ſommet *D* de laquelle une ligne *D E* eſt menée perpendiculairement ſur la baſe *AB C* ſans que cette baſe ſoit prolongée, eſt une pyramide droite.



65. Une pyramide oblique eſt celle du ſommet

de laquelle une ligne ne peut être menée perpendiculairement que sur la base prolongée. Par exemple, la pyramide *F G H I* du sommet *I* de laquelle la ligne *I K* est menée perpendiculairement sur la surface *G F H* prolongée, est une pyramide oblique.

66. Une pyramide polygone est celle dont la base a plus que quatre côtés. En particulier, ces pyramides sont distinguées entr'elles par la varieté de leurs bases; c'est à dire qu'une pyramide sera nommée triangulaire, si sa base est un triangle; Quadrangulaire, si sa base est un Quadrilatere; Pentagone, si sa base est un Pentagone, Exagone, &c.

67. Un cone est une pyramide dont la base est terminée par une infinité de côtés; c'est à dire, dont la base est un cercle, par exemple le solide *L M N O P.*

Il y a des Cones qui sont droits, & d'autres qui sont obliques.

68. Un Cone droit est celui du sommet duquel une ligne étant menée perpendiculairement à la base, passe par le centre du cercle qui en fait la base. Par exemple le Cone *L M N O P* du sommet *P* duquel la ligne *P R* étant menée perpendiculairement à la base *L M N O*, passe par le centre *R* de cette base.

69. Un Cone oblique est celui du sommet duquel une ligne menée perpendiculairement à la base, ne passe point par le centre du cercle qui en fait la base. Par exemple le Cone *R S T V X* du sommet *X*, duquel la ligne *X Y* menée perpen-

diculairement à la base, ne passe point par le centre Z de cette base, mais par un autre point de cette base prolongée s'il est necessaire.

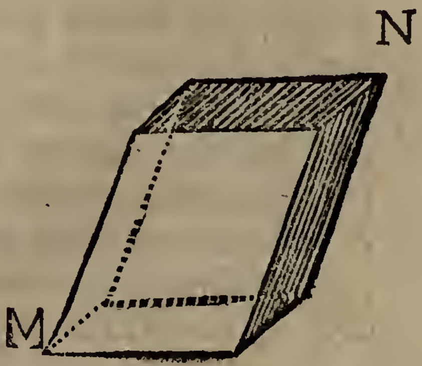
70. L'Axe d'un Cone est la ligne menée de son sommet au milieu ou centre de sa base. Par exemple la ligne P R est l'axe du cone LMNOP, & la ligne X Z est l'axe du cone R V T S X.

71. Un prisme est un solide terminé par des surfaces planes rectilignes ; dont deux sont paralleles entr'elles, égales, & desquelles deux surfaces chaque côté de l'une est égal à chaque côté de l'autre, & les autres surfaces sont des parallelogrammes. Par exemple A L M N O P, dont les deux surfaces A L M & N O P sont paralleles & égales, & les autres, sçavoir A P, A O, L P, sont des parallelogrammes, est un prisme.

Il y a des prismes droits & des prismes obliques.

72. Un prisme droit est celui dont les surfaces paralleles sont perpendiculaires aux parallelogrammes, qui le terminent ou qui en font le contours ; par exemple le prisme L A M N P O.

73. Un prisme oblique est celui dont les surfaces paralleles ne sont point perpendiculaires aux parallelogrammes qui le terminent ; par exemple, le prisme M N.

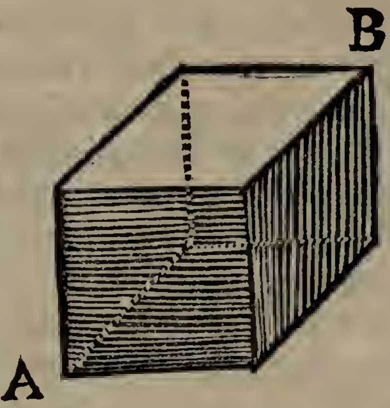


Il y a des prismes qu'on appelle particulierement Parallelepipedes,

74. Un parallelepipede eſt un priſme terminé par ſix parallelogrammes, dont ceux qui ſont oppoſez ſont égaux & paralleles entr'eux ; par exemple le ſolide M N, ou A B.

Il y a des parallelepipedes qu'on appelle cubes.

75. Un cube eſt un parallelepipede terminé par ſix quarrez égaux entr'eux ; par exemple le ſolide A B.

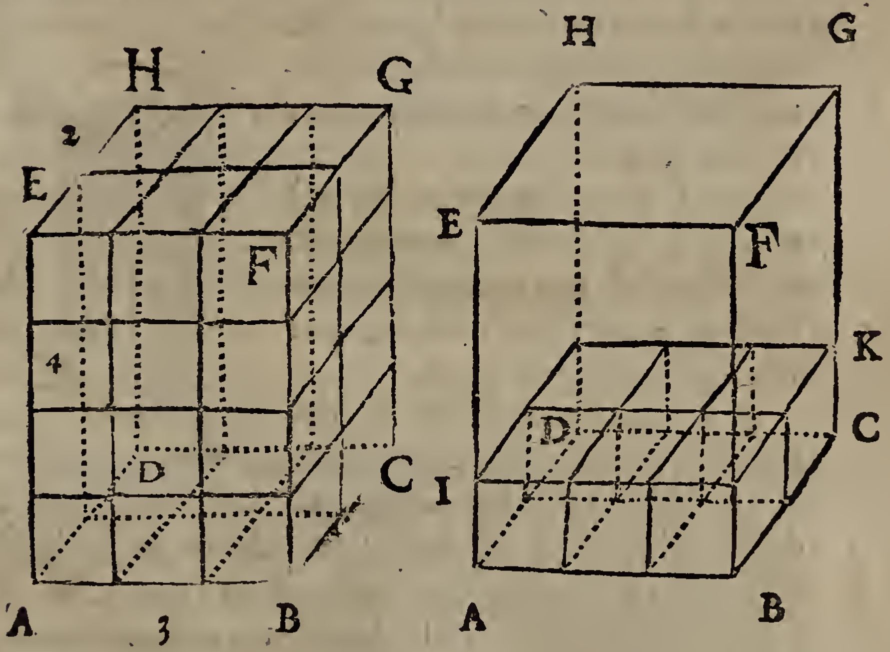


COROLLAIRE I.

Donc ſi on ſuppoſe qu'une ſurface plane rectiligne quelconque ſoit mûë tranſverſalement ſelon la longueur d'une ligne droite fixe, & que les côtez qui la terminent ſoient toûjours pendant ce mouvement paralleles à eux mêmes conſiderez dans la premiere poſition ; lorſque cette ſurface ceſſera de ſe mouvoir, l'eſpace qu'elle aura parcouru ſera un priſme. Car 1°. il y aura deux des ſurfaces qui termineront ce ſolide, qui ſeront paralleles entr'elles. 2°. Les autres ſurfaces ſeront des ſurfaces parallelogrammes ; puiſqu'elles ſeront décrites par le mouvement tranſverſal des lignes droites, qui termineront cette ſurface plane en mouvement, & puiſque ce mouvement tranſverſal ſera fait parallelement & ſelon la longueur d'une ligne droite, ſans varier de part ni d'autre.

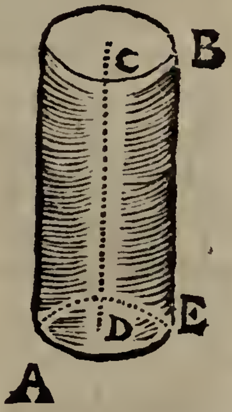
COROLLAIRE II.

Donc la ſolidité d'un priſme rectangle eſt décrite & exprimée par une des ſurfaces paralleles mûë transverſalement ſelon la longueur d'une ligne droite qui lui eſt perpendiculaire ; c'eſt à dire, par une des ſurfaces paralleles, repetée autant de fois qu'il y a de points dans la longueur de cette ligne; ce qui eſt la même choſe que de multiplier une des ſurfaces paralleles d'un priſme rectangle par ſa hauteur. Par exemple, pour connoître la ſolidité du priſme rectangle ABCDEFGH,



dont la largeur eſt de deux pieds lineaires, & la longueur de 3 pieds, & la hauteur de 4 ; il faut connoître la baſe A C : ſi cette baſe A C eſt un rectangle, on multipliera 2 par 3, & on aura 6 pieds quarrez pour la ſurface A C, laquelle étant multipliée par la hauteur, ſçavoir 6 pieds quarrez par 4 pieds lineaires ; on aura 24 pieds cubes pour la ſolidité de ce priſme entier. Parceque chaque pied quarré de la ſurface A C étant mû transversalement selon la hauteur d'un pied lineaire en I K, décrira un pied cube. Or dans la surface A C il y a 6 pieds quarrez ; donc lorsque cette surface A C sera mûë parallelement à elle-même de la hauteur d'un pied lineaire, qu'elle sera, par exemple, en I K, elle aura décrit 6 pieds cubes. Donc cette surface de 6 pieds quarrez étant mûë de la hauteur de 4 pieds lineaires, elle aura décrit 24 pieds cubes, solidité du prisme entier proposé.

76. Un cylindre est un prisme, dont deux surfaces qui sont paralleles, sont terminées chacune par une infinité de côtez, c'est à dire, dont deux surfaces paralleles sont deux cercles ; par exemple A B.

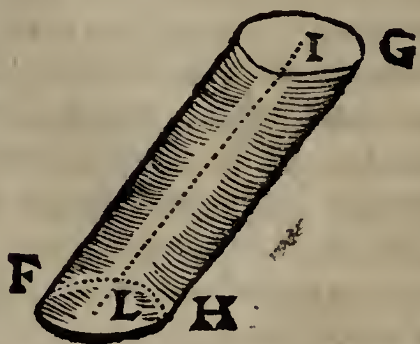


77. L'axe d'un cylindre est une ligne droite menée du centre d'un des cercles paralleles au centre de l'autre, par exemple la ligne C D.

Il y a de deux sortes de cylindres, de droits & d'obliques.

78. Un cylindre droit est celui dont l'axe est perpendiculaire à la base. Par exemple le cylindre A B, dont l'axe C D est perpendiculaire à la base AE, est un cylindre droit.

79. Un cylindre oblique est celui, dont l'axe n'est pas perpendiculaire à la base ; par exemple le cylindre F G, dont l'axe I L n'est point perpendiculaire à la base F H, est un cylindre oblique.



COROLLAIRE I.

Donc pour décrire un cylindre, il faut ſuppoſer une ligne droite fixe par une de ſes extrêmitez dans le centre d'un cercle, & immobile ſelon ſa longueur ; enſuite que ce cercle ſoit mû toûjours parallelement à lui-même juſqu'à l'autre extrêmité de cette ligne : ce cercle après avoir ceſſé de ſe mouvoir aura décrit un cylindre par ſon mouvement, & cette ligne ſelon la longueur de laquelle il aura été mû en ſera l'axe. Car le ſolide décrit par le mouvement tranſverſal de ce cercle, ſera terminé par deux cercles égaux, & les côtez infiniment petits de la circonference de ce cercle, auront décrit par leur mouvement tranſverſal une infinité de parallelogrammes d'une largeur infiniment petite, & de la longueur du cylindre, qui termineront tous ce même cylindre.

COROLLAIRE II.

Donc pour connoître la ſolidité d'un cylindre rectangle, il ſuffit de multiplier la ſurface qui eſt le cercle de la baſe, par la hauteur de ce cylindre; & le produit de cette multiplication exprimera la valeur du cylindre. Parceque ce cylindre n'eſt que ſa baſe circulaire, repetée autant de fois qu'il y a de points dans ſa hauteur.

80. Une ſphere, globe, ou boule eſt un corps ou ſolide terminé par une ſurface courbe, dont tous les points poſſibles ſont également diſtans d'un ſeul point pris dans

ce ſolide. Par exemple le corps A D B E C qui eſt terminé par la ſurface A B C D E, & dans lequel le point C eſt également diſtant de tous les points de cette ſurface, eſt une ſphere.

81. Le centre d'une ſphere eſt le point pris dans ce ſolide, qui eſt également diſtant de tous les points de la ſurface de ce même corps ; par exemple le point C.

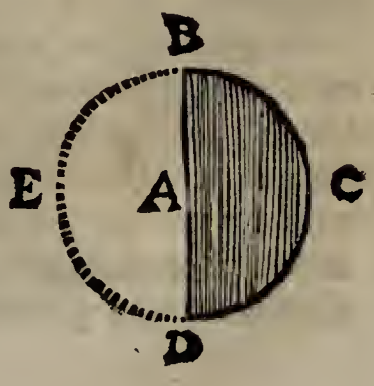
82. Un rayon de ſphere eſt une ligne droite menée du centre à ſa ſurface ; & un diamêtre de ſphere eſt la ligne droite qui eſt menée d'un point à un autre point de ſa ſurface, & qui paſſe par le centre. C B par exemple eſt un rayon, & A B eſt un diametre.

COROLLAIRE I.

Donc les rayons d'une ſphere ſont égaux entr'eux. Car puiſque le centre d'une ſphere eſt également diſtant de tous les points de ſa ſurface, & que les rayons ſont des lignes droites menées du centre à la ſurface ; il faut neceſſairement qu'ils ſoient tous égaux entr'eux. Pareillement tous les diametres de la même ſphere ſont égaux entr'eux, puiſqu'ils ſont chacun doubles de Rayons qui ſont égaux entr'eux.

COROLLAIRE II.

Donc ſi on ſuppoſe qu'un demi cercle, par exemple D B C D ſoit mû ou faſſe une revolution au tour de ſon axe ou diamêtre B D, lorſque ce demi cercle ſera revenu dans la



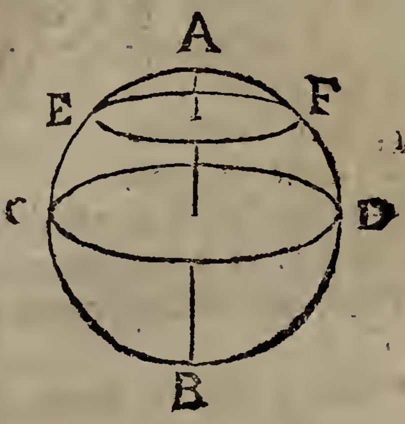
même ſituation, d'où il étoit parti ; par ce mouvement il aura décrit une ſphere, puiſque l'arc B C D de circonference qui termine d'une part ce demi cercle D B C D, décrira une ſurface courbe dont tous les points ſeront également diſtans du point A, qui en ſera le centre : enfin cet eſpace ainſi décrit & terminé par cette ſurface courbe ſera un ſolide ; puiſque outre la longueur & largeur qui ſont dans le demi cercle, il y aura profondeur à cauſe du mouvement tranſverſal qui ſe trouve dans la circonvolution de ce demi cercle.

83. L'axe d'une ſphere eſt un de ſes diamêtres, au tour duquel la ſphere tourne ou fait quelque revolution ; par exemple B D.

84. Les poles d'une ſphere ſont les deux points qui ſont les extrêmitez de l'axe ; par exemple le point B & le point D.

85. Un grand cercle d'une ſphere eſt celui, dont le plan paſſe par le centre de cette ſphere, & dont la circonference eſt décrite ſur la ſurface de cette même ſphere.

86. Un petit cercle d'une ſphere eſt celui, dont le plan ne paſſe point par le centre de cette ſphere ; & dont la circonference eſt décrite ſur la ſurface de cette même ſphere.



87. Les poles d'un arc de cercle ou d'un cercle de la ſphere ſont deux points pris ſur la ſurface de la même ſphere, chacun également éloignez de la circonference de ce cercle ; où (ce qui eſt la mê-

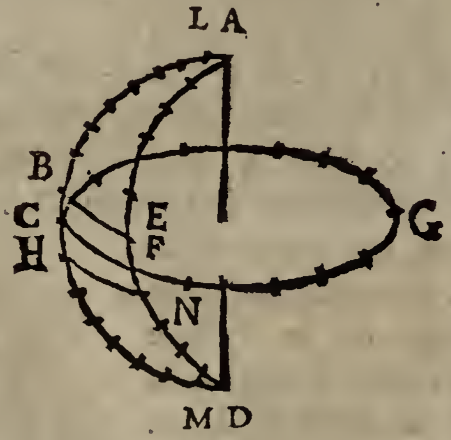
me chose) ce sont les extrêmitez du diamêtre de la sphere, qui est perpendiculaire au plan de ce cercle par le centre. Par exemple les poles du grand cercle C D, & du petit cercle E F qui lui est parallele, sont les deux points A & B.

88. Un polyêdre est un solide de plusieurs angles & de plusieurs surfaces planes.

En particulier on distingue les polyêdres par le nombre de leurs surfaces. Par exemple une pyramide triangulaire sera appellée un corps de quatre surfaces ou Tetraedre; un cube sera appellé un corps de six surfaces ou Exaedre, &c.

COROLLAIRE.

Donc une sphere doit être considerée comme un polyedre d'une infinité de surfaces, qui sont quadrilaterales & infiniment petites. Car puisque une sphere est * décrite par le mouvement de circonvolution d'un demi cercle par exemple A C D A au tour de son diamêtre A D; & qu'une circonference de cercle est ** considerée comme un polygone d'une infinité de côtez; si on considere un grand cercle, par exemple C G, dont le plan



soit perpendiculaire au diamêtre AD du demi cercle A C D A; qu'une petite ligne par exemple B C soit un infinitiéme côté de la demie circon-

* *Cor. 2. déf. 82. Geom.* ** *Cor. déf. 56. Geom.*

ference

ference du cercle A C D, & que C F ſoit un infinitiéme côté de la circonference du cercle C G. Lorſque le demi cercle A C D en faiſant ſa revolution aura avancé de la diſtance de la ligne C F infiniment petite qui eſt un côté de la circonference du cercle C G, la figure quadrilaterale C E infiniment petite, ſera une de celles qui ſeront décrites pendant ce mouvement. La ligne infiniment petite C H décrira auſſi par ſon mouvement des figures quadrilaterales C N, &c. & ainſi des autres infinitiémes. A l'égard de chacune des deux lignes infiniment petites A L & D M, qui ont une de leurs extrêmitez dans les extrêmitez du diamêtre A D, elles décriront pendant ce mouvement deux cercles infiniment petits; car chacune de ces deux infinitiémes eſt perpendiculaire à un diamêtre. Parcequ'on demontrera dans la ſuite qu'une ligne qui touche une circonference de cercle, eſt perpendiculaire au diamêtre qui ſe termine au point d'attouchement, & une de ces lignes infiniment petite étant prolongée eſt la touchante.

COROLLAIRE II.

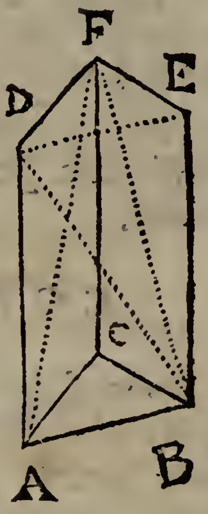
Donc ſi du centre de la ſphere on mene des lignes aux angles de ces quadrilateres infiniment petits, cela determinera une infinité de petites pyramides qui auront toutes leur ſommet dans le centre de la ſphere, & leur baſe infiniment petite dans la ſurface de cette ſphere. On aura auſſi deux cones, dont chacun aura pour axe la moitié du diamêtre du demi cercle, qui aura fait la revolution, & dont la baſe infiniment petite ſera auſſi dans la ſurface de la ſphere.

89. Deux ſolides ſemblables ſont ceux, dont le premier eſt terminé par des plans ſemblables à ceux qui terminent le ſecond, chacun à chacun, & en pareil nombre de part & d'autre.

90. Une figure eſt une grandeur étenduë en long & en large ſeulement, ou en long, en large, & en profond, terminée de toutes parts. Un triangle, par exemple, eſt une figure; une pyramide eſt un figure, &c.

AVERTISSEMENT.

1°. De même que les figures rectilignes peuvent être reduites en triangles, ainſi les corps ou ſolides peuvent être diviſez & reduits en pyramides triangulaires. Par exemple, le ſolide ABCDEFGHIK ſera reduit premierement en priſmes triangulaires ABC FGH, ACD FHI, ADE FIK, en ſuppoſant des plans menez d'un des angles des plans qui terminent ce ſolide, aux angles des autres plans qui le terminent.



2°. Chaque priſme triangulaire ABCDEF ſera reduit dans ces trois pyramides ABCF, DEFB & ABDF, en le ſuppoſant coupé par les deux plans ABF & BFD.

3. Afin de pouvoir facilement diſtinguer les

pyramides triangulaires dont il eſt queſtion dans le ſolide repreſenté par la ſeconde des deux dernieres figures, il faut premierement conſiderer un triangle comme baſe de la pyramide qu'on y cherche ; & obſerver enſuite (1) les trois triangles qui auront chacun pour baſe un des trois côtez de ce premier triangle, & qui auront en outre un ſommet commun. Cette remarque eſt fort utile lorſque dans des ſolides on eſt obligé d'examiner des pyramides, ou de les comparer l'une à l'autre.

4°. Une grandeur exprimée par une ſeule petite lettre de l'alphabeth eſt ordinairement appellée une ligne. Parceque dans l'Algebre on n'exprime une ligne droite que par une petite lettre de l'alphabeth.

Un produit de deux grandeurs differentes exprimées generalement comme ab eſt appellé un plan ou rectangle compris ſous a & b. Parcequ'un rectangle dont un côté ſeroit a & l'autre b, auroit * ab pour l'expreſſion de ſa ſurface; un rectangle n'étant rien autre choſe qu'un de ſes côtez multipliez par l'autre.

Un produit formé par deux grandeurs égales comme aa eſt appellé le quarré de a. Parcequ'en multipliant par lui-même le côté appellé a d'un quarré, on a la ſurface aa de ce quarré.

En Geometrie on exprime le quarré d'une ligne, par exemple, de AB en cette maniere AB^2, ou AB^{q}, ou $AB \times AB$.

Un produit de trois grandeurs exprimées generalement, comme abc, eſt appellé un ſolide ; parceque ces trois grandeurs expriment les

(1) *Déf. 62. Geo.*
* *Cor. 2. déf. 52.*

trois dimensions qui se rencontrent dans un corps ou solide.

Un produit de trois grandeurs égales, ou le produit d'une grandeur multipliée deux fois par elle-même, comme *b b b*, est un solide appellé cube, dont une racine est *b*.

DEMANDES DE GEOMETRIE.

On suppose dans la Geometrie que ce qui est énoncé dans ces trois articles est possible, & qu'on ne refusera point de l'accorder lorsque cela sera necessaire pour une demonstration.

1. Qu'il soit permis de mener une ligne d'un point à un autre point, ou du moins de supposer qu'elle soit menée.

2. Qu'il soit permis de prolonger ou continuer une ligne droite si loin qu'on voudra.

3. Qu'enfin on accorde qu'au tour d'un point on décrive une circonference de cercle, à telle ouverture de compas qu'on voudra.

AXIOMES DE GEOMETRIE.

1. Les lignes appliquées l'une sur l'autre, qui ne se surpassent point l'une l'autre, sont égales entr'elles & semblables, de même des

angles. Pareillement les ſurfaces appliquées l'une ſur l'autre, leſquelles ne ſe ſurpaſſent ou excedent aucunement l'une l'autre, c'eſt à dire, qui conviennent entre elles en toutes manieres, ſont auſſi égales entr'elles.

2. Il eſt impoſſible qu'entre pluſieurs grandeurs priſes à volonté *a*, *b*, *c*, *d*, &c. il y en ait deux, par exemple *a* & *b* qui ſoient telles que *a* ſoit plus grande ou plus petite que toutes les autres reſtantes *b*, *c*, *d*, & qu'en même-temps *b* ſoit auſſi plus grande ou plus petite que toutes les autres *a*, *c*, *d*, &c.

Pour rendre cet axiome encore plus évident, ſuppoſons entre pluſieurs grandeurs que *a* & *b* ſoient chacune plus petites que les autres; *a* eſt * plus petite que chacune des autres. Donc cette grandeur *a* ſera plus petite que *b*. Pareillement *b* eſt * plus petite que chacune des autres. Donc *b* ſera plus petite que *a*, c'eſt à dire que *a* ſera plus grande que *b*. Donc *a* ſeroit en même-temps plus petite que *b*, & en même-temps plus grande que la même grandeur *b*. Il faudroit donc que *a* fût plus grande & ne le fût pas en même-temps, ce qui eſt (1) évidemment impoſſible.

COROLLAIRE I.

Il eſt impoſſible qu'entre pluſieurs grandeurs il y en ait une plus petite que la plus petite.

COROLLAIRE II.

Donc pour aller d'un terme à un autre, il n'y a qu'un ſeul chemin, qui ſoit le plus court de tous.

* *Par ſuppoſit.* (1) *Ax. 1. general.*

COROLLAIRE III.

Donc d'un point à un autre point, on ne peut mener qu'une ſeule ligne droite ; puiſque [1] la ligne droite occupe le plus court chemin qu'il y a d'un point à un autre point, & que [2] ce chemin eſt unique.

COROLLAIRE IV.

Donc la meſure de la diſtance d'un point à un autre point eſt une ligne droite menée d'un de ces points à l'autre. Car cette ligne droite eſt une meſure conſtante, unique & immuable : puiſqu'on n'en peut mener qu'une ſeule d'un de ces points à l'autre.

(1) *Déf. 4. Geo.*
(2) *Cor. 2. Ax. preſent.*

CHAPITRE I.

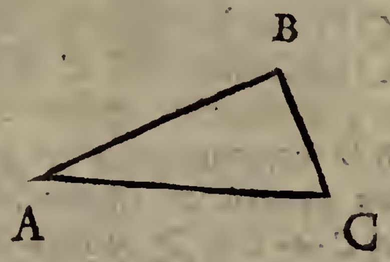
DES LIGNES.

PROPOSITION I.

Si des extrêmitez d'une ligne droite on mene deux autres lignes quelconques concourantes du même côté, la somme de ces lignes concourantes sera plus grande que la seule ligne droite des extrêmitez de laquelle elles sont menées.

DEMONSTRATION.

SOit la ligne droite *AC*, & que par ses extrêmitez *A* & *C*, on mene deux autres lignes *AB* & *CB* qui concourent du même côté : je dis que la somme de ces lignes concourantes *AB* + *BC* est plus grande que la seule ligne *AC*. Car la ligne droite *AC* occupe * le plus court chemin qui est du point *A* au point *C* : mais les lignes *AB* & *BC* n'occupent pas le chemin *AC* qui est le plus court. Donc elles

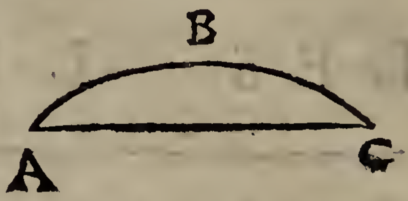


* *Déf.* 4. *Geo.*

occupent un chemin plus long que la ſeule ligne *A C*. Donc la ſomme des lignes *A B* + *B C* eſt plus grande que *A C*, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE.

Il ſuit de cette propoſition que la ligne courbe *A B C* eſt plus grande que la ſeule ligne droite *A C*, ſi l'une & l'autre ſont terminées par les mêmes points.



PROPOSITION II.

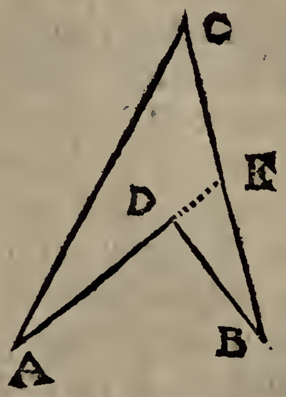
Si de deux points on mene deux lignes qui concourent dans un 3e point, & ſi de ces deux mêmes points on mene encore dans le même plan deux lignes droites qui concourent vers & entre les deux precedentes ; la ſomme des deux premieres ſera plus grande que la ſomme des deux dernieres.

DEMONSTRATION.

Soient les deux points *A* & *B* dont on mene les lignes *A C* & *B C* concourantes au point *C*, & dont on mene encore les lignes *A D* & *B D* concourantes au point *D* vers *C*, & entre les premieres lignes *A C* & *B C*. Je dis que *A C* + *C B* > *A D* + *D B*. Pour le demontrer il faut * prolonger *A D* juſqu'à la rencontre de la ligne *B C* en *E*. Or (1) *A C* + *C E* > *A E*,

* *Demand.* 2. *Geo.* (1) *Prop.* 1. *Geo.*

Donc en ajoûtant de part & d'autre EB, on aura * $AC + CE + EB > AE + EB$. Mais (1) $CE + EB = CB$. Donc $AC + CB > AE + EB$. Enfin $BE + ED > BD$. Donc en ajoûtant de part & d'autre DA, on aura * $BE + ED + DA > BD + DA$. Ce qui est la même chose que de dire $AE + EB > AD + DB$; puisque $AD + DE = AE$. Mais on vient de trouver que $AC + CB > AE + EB$. Donc $AC + CB > AE + EB > AD + DB$. Donc enfin (2) $AC + CB > AD + DB$. *ce qu'il falloit demontrer.*



PROPOSITION III.

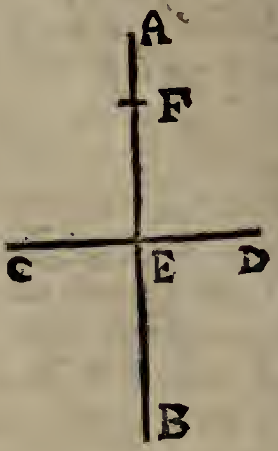
Chaque point d'une ligne droite perpendiculaire au milieu d'une autre ligne droite, est également distant des deux extrêmitez de la ligne, au milieu de laquelle cette premiere ligne est perpendiculaire.

DEMONSTRATION.

SOit la ligne AB perpendiculaire à la ligne CD par le point E qui en est le milieu : je dis que chaque point de la ligne AB, par

* *Ax. 7. gener.* (1) *Ax. 3. Geo.*
(2) *Ax. 22. gener.*

exemple *F*, eſt également diſtant des points *C* & *D* extrêmitez de la ligne *C D*. Car pour que les points *F* & *C* fuſſent plus proches l'un de l'autre, que le même point *F* l'eſt du point *D*, il faudroit que la ligne *A B* fût plus inclinée vers *C* que vers *D*, ou que la ligne *A B* ne fût pas perpendiculaire à la ligne *C D* par ſon point du milieu *E*. Mais l'un & l'autre eſt contre la ſuppoſition. Donc le point *F* ſera



également diſtant du point *C* & du point *D* extrêmitez de la ligne *C D* au milieu de laquelle *A B* eſt perpendiculaire, *ce qu'il falloit demontrer.*

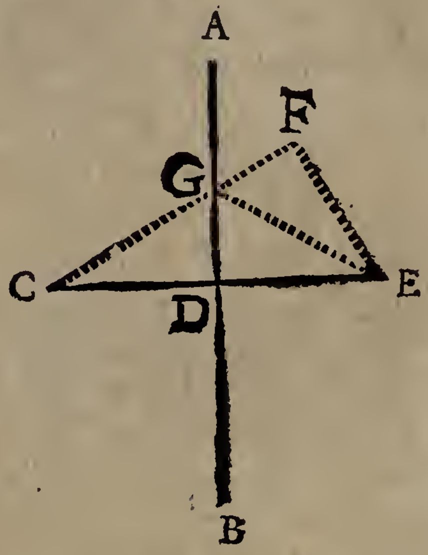
On dira la même choſe de tous les autres points de la ligne *A B*.

PROPOSITION IV.

Une ligne perpendiculaire à une autre ligne droite par le point du milieu de cette derniere, paſſe par tous les points qui ſont également diſtans des extrêmitez de la ligne au milieu de laquelle elle eſt perpendiculaire.

DEMONSTRATION.

SOit la ligne *A B* perpendiculaire à la ligne *C E* par le point *D*, milieu de cette ligne *C E* : je dis que la ligne *A B* paſſera par tous les points qui ſont également diſtans des extremitez C & E de la ligne CE. Car la ligne AB prolongée ſi loin qu'on voudra ayant [1] chacun de ſes points également diſtans des extrêmitez C & E de lá ligne CE, il ſuffit pour la propoſiſition preſente de demontrer qu'il n'y a aucun point pris hors de la ligne AB qui ſoit également diſtant des extrêmitez C & E. Soit par exemple le point F pris à volonté hors la ligne AB : je dis que ce point F n'eſt pas également diſtant des extrêmitez C & E, c'eſt à dire



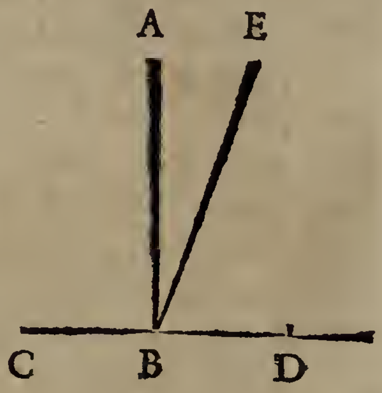
qu'ayant mené les lignes FC & FE, on aura $FC > FE$. Du point G ou paſſe FC, au point E, ſoit menée la ligne GE. On ſçait [1] que $CG = GE$. en ajoutant de part & d'autre GF, on aura [2] $CG + GF = EG + GF$. Mais [3] $EG + GF > EF$. Donc auſſi [4] $CG + GF > EF$, c'eſt à dire que $FC > FE$. Donc le point F n'eſt point également diſtant de C & de E. Donc enfin AB paſſe par tous les points également diſtans de C & de E, *ce qu'il falloit démontrer.*

On fera le même raiſonnement pour tous les autres points pris hors la ligne AB.

[1] *Prop.* 3. *Geo.*
[2] *Ax.* 4. *Gen.*
[3] *Prop.* 1. *Geo.*
[4] *Dem.* 1. *Gen.*

COROLLAIRE.

Par un même point, par exemple, par le point *B* de la ligne *C D*, on ne peut mener dans le même plan *C E A D* plusieurs lignes perpendiculaires à la même ligne. Soit la ligne *A B* perpendiculaire à la ligne *C D* par le point *B*; & soit menée par le même point *B* une autre ligne *B E* : je dis qu'il est impossible que cette ligne *B E* soit perpendiculaire à la même ligne *C D* par le même point *B*. Car ayant pris de part & d'autre du point *B* les lignes égales *B C* & *B D*, il faudroit [1] que cette ligne *B E* eût chacun de tous ses points également distans du point *C* & du point *D*. Or on vient de démontrer qu'il n'y a que les points de la perpendiculaire *A B* qui soient également distans des extrêmitez *C* & *D* de la ligne *C D*. Donc la ligne *E B* ne peut être perpendiculaire à *C D*.



[1] *Prop. 3. Geo.*

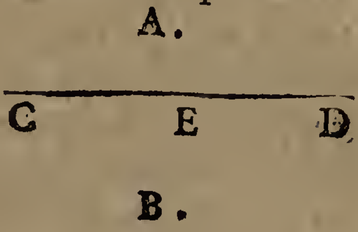
PROPOSITION

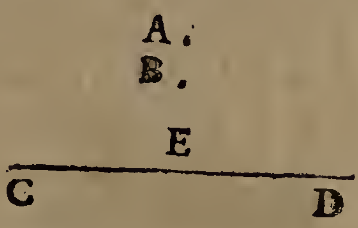
PROPOSITION V.

Une ligne droite qui passe par deux points, ou qui a deux de ses points, dont chacun est également distant des deux extrêmitez d'une autre ligne droite, est perpendiculaire à cette autre ligne droite par le point qui en est le milieu.

DEMONSTRATION.

Soient les deux points *A* & *B*, chacun également distant des extrêmitez *C* & *D* de la ligne *C D* : je dis que la ligne droite qui passera par ces deux points *A* & *B* sera perpendiculaire à la ligne *C D* par le point *E*, qui en est le milieu. Car la ligne droite qui passera par ces deux points *A* & *B*, passera par le même chemin par où passeroit la ligne qui seroit perpendiculaire à *C D* par son milieu *E*; puisque cette ligne qui seroit perpendiculaire à *CD* par le milieu *E*, passeroit ([1]) par les points *A* & *B*. Donc ([2]) elle se confondroit avec cette ligne droite menée par les points *A* & *B*. Et partant la ligne menée par les points *A* & *B*, seroit la même que la ligne perpendiculaire à *C D* par le milieu *E*, *ce qu'il falloit demontrer.*

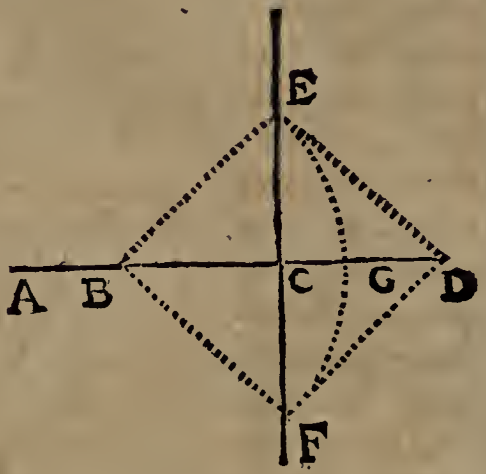




([1]) *Prop. 4. Geo.* ([2]) *Cor. 3. Ax. 2. Geo.*

COROLLAIRE I.

Si une ligne, par exemple, *EF* eſt perpendiculaire à une autre ligne *AD*; reciproquement cette autre *AD* ſera auſſi perpendiculaire à *EF*. Car ſur la ligne *AD* de part & d'autre de *EF* prenons les parties *CB* & *CD* égales entr'elles. Du point *B* comme



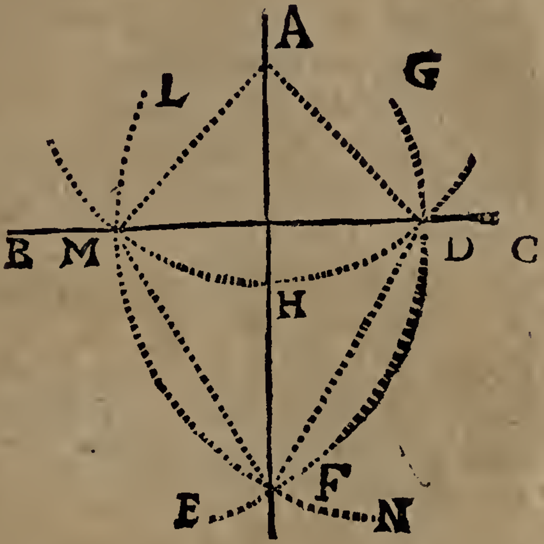
centre, & de l'intervalle *BF* priſe à volonté plus longue que *BC* ſoit décrit l'arc de cercle *FGE*, Puiſque ([1]) *EF* eſt perpendiculaire à *BD*, on a ([2]) *DE* = *EB* ([3]) = *BF* ([2]) = *FD*. Donc *BE* = *BF*, & *DE* = *FD*; & partant chacun des points *B* & *D* ſont également diſtans des points *E* & *F*. Donc ([4]) *BD* ou *AD* ſera perpendiculaire à *EF*.

COROLLAIRE II.

Cette propoſition ſert de fondement à des methodes qu'on pratique ſouvent pour mener une ligne perpendiculaire à une autre ligne par un point donné. Ce point peut être donné hors la ligne donnée, ou peut être donné dans la ligne donnée.

([1]) *Par ſuppoſit.* ([2]) *Prop. 3. Geo.*
([3]) *Cor. 1. déf. 29.* ([4]) *Prop. preſ.*

Soit par exemple le point *A* donné hors la ligne *B C*, & que par ce point *A* il faille mener une ligne perpendiculaire à cette ligne *B C*. Il faut poſer un pied du compas dans le point donné *A*, & ouvrir ce compas ſuffiſamment pour décrire un arc *MHD* qui ſoit coupé par la ligne donnée



B C en deux points *M* & *D*. Enſuite des points *M* & *D* comme centres, on décrira deux arcs *E F D G* & *N F M L* d'une ouverture de compas ſuffiſante pour qu'ils ſe coupent par exemple en *F*. Enfin par le point donné *A*, & par ce point d'interſection *F* on menera la ligne *A F*: je dis que cette ligne *A F* eſt la perpendiculaire qu'on cherche. Car 1°. le point *A* eſt également diſtant des points *M* & *D*. Parceque *A M* & *A D* ſont rayons du même arc de cercle *M H D*. 2°. Le point *F* eſt également diſtant des points *M* & *D*. Car les lignes *M F* & *D F* ſont des rayons d'arcs de cercles *E F D G* & *N F M L* décrits de la même ouverture de compas. Donc la la ligne *A F* paſſant par les deux points *A* & *F* également diſtans des extrêmitez *M* & *D* de la ligne *M D*, ſera [1] perpendiculaire à la ligne *MD*.

[1] *Prop. pref.*

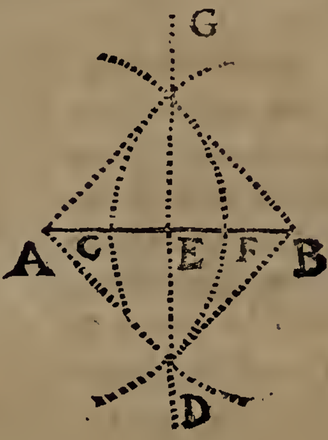
Soit par exemple le point *C* donné dans la ligne *AB*, & que par ce point il faille mener une ligne perpendiculaire à cette ligne *AB*; il faut mettre un pied du compas dans ce point donné *C*, & prendre sur la ligne *AB* de part & d'autre de ce point *C* les lignes égales *CF* & *CE*. Ensuite des points *E* & *F*, on décrira deux arcs d'une même ouverture de compas prise à volonté, & assez grande pour qu'ils se coupent, par exemple dans le point *D*. Ensuite il faut mener par ce point d'intersection *D*, & par ce point donné *C* la ligne *DG* : je dis que cette ligne *DG* sera la perpendiculaire qu'on cherche. Car 1°. le point *C* est (1) également distant de *E* & de *F*. 2°. Le point *D* est aussi également distant de *E* & de *F*, puisque les lignes *ED* & *FD* sont rayons égaux, étant (2) mesurez par la même ouverture de compas. Donc (3) la ligne *DC* passe par les points *D* & *C* également distans de *E* & *F*. Donc [4] *DG* est perpendiculaire à *AB*.

Si le point donné est à l'extrêmité d'une ligne droite, on trouvera dans la suite une autre methode pour mener par ce point une perpendiculaire à cette ligne donnée.

(1) *Par construction.* [2] *Par supposition.*
(3) *Prop. 4. Geo.* [4] *Prop. pres.*

COROLLAIRE III.

On tire encore de cette propoſition une methode pour couper geometriquement, c'eſt à dire, par regles infaillibles, une ligne en deux parties égales. Soit la ligne *A B* qu'il faille couper en deux parties égales. Il faut des extrêmitez *A* & *B* de cette ligne *A B* décrire les arcs *DFG* & *DCG* d'une même ouverture de compas priſe à volonté, & aſſez grande pour que ces deux arcs ſe coupent dans les points *G* & *D*. Je



mene enſuite par ces deux points d'interſection *G* & *D* la ligne droite *GD* : je dis que le point *E* par où cette ligne *GD* coupe la ligne *A B* eſt le milieu de *A B*. Parceque les points *G* & *D* ſont également diſtans de *A* & de *B*, à cauſe que les rayons *A D*, *D B*; *A G*, *B G* ſont [1] meſurez par la même ouverture de compas. Et partant [2] la ligne *G D* eſt perpendiculaire à *A B* par le milieu. Donc enfin *A E* = *E B*.

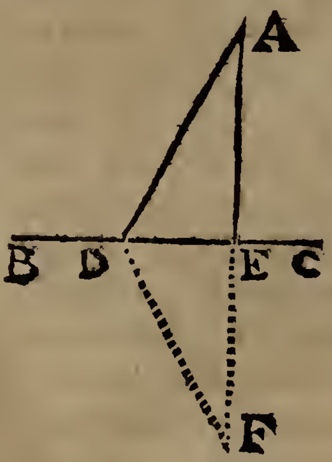
[1] *Par ſuppoſ.*
[2] *Prop. preſ.*

PROPOSITION VI.

1. *La ligne menée d'un point pris hors d'une ligne droite perpendiculairement à cette même ligne, est la plus courte de toutes les lignes qu'on peut mener de ce point à cette même ligne droite.*
2. *Reciproquement la ligne qui est la plus courte de toutes celles qu'on peut mener d'un point pris hors d'une ligne droite à cette même ligne, lui est perpendiculaire.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

SOit le point *A* pris à volonté hors la ligne *BC*, & que de ce point *A* on mene la ligne *AE* perpendiculairement à la ligne *BC*. Je dis que cette ligne *AE* est la plus courte de toutes les lignes qu'on peut mener du point *A* à cette ligne *BC*; qu'elle sera, par exemple, plus courte que la ligne *AD* menée à volonté du point *A* à cette ligne *BC*. Pour le demontrer soit [1] prolongée la perpendiculaire *AE* jusqu'en *F*, de sorte que *EF* devienne égale à *AE*; qu'on mene ensuite la ligne *DF*.

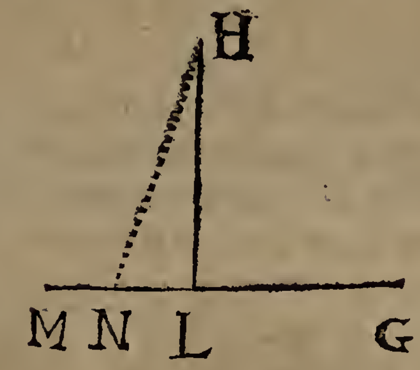


[1] *Demande 2. Geo.*

Puisque *AF* eſt perpendiculaire à *BC*, reciproquement [1] *BC* eſt perpendiculaire à *AF*; & à cauſe que [2] *AE* = *EF*, *BC* eſt perpendiculaire au milieu de *AF*. Donc [3] *DA* = *DF*. Or [4] *AF* < *AD* + *DF*. Donc [5] la moitié de *AF*; c'eſt à dire la perpendiculaire *AE* ſera plus petite que la moitié de *AD* + *DF* qui eſt *AD*, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Si du point *H* pris à volonté hors la ligne *MG*, on mene la ligne *HL* à cette ligne *MG*, de ſorte que la ligne *HL* ſoit la plus courte de toutes celles qu'on peut mener de ce point *H* à cette même ligne *MG*, je dis que cette ligne *HL* ſera perpendiculaire à *MG*. Car ſi *HL* n'étoit pas perpendiculaire à *MG*, & que ce fût, par exemple, la ligne *HN* qui fût perpendiculaire à *MG*, la ligne perpendiculaire *HN*



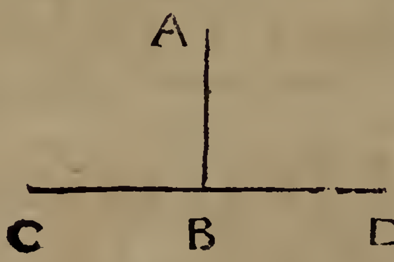
menée du point *H* à *MG* ne ſeroit pas la plus courte de toutes; car on en auroit une qui ſeroit encore plus courte, ſçavoir cette ligne *HL* qu'on ſuppoſe la plus courte de toutes; mais la ligne menée du point *H* perpendiculairement à la

[1] *Cor. 1. Prop. 5. Geo.* [2] *Par conſtruction.*
[3] *Prop. 3. Geo.* [4] *Prop. 1. Geo.*
[5] *Ax. 11. gen.*

ligne *M G* eſt [1] la plus courte de celles qu'on peut mener du point *H* à la ligne *M G* , & [2] il eſt évidemment impoſſible qu'il y ait une ligne plus courte que la plus courte. Donc la ligne *H L* étant la plus courte de toutes celles qu'on peut mener d'un point *H* à une autre ligne *M G* , eſt perpendiculaire à cette ligne *M G* , *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

Donc d'un même point , par exemple du point *A* pris hors d'une ligne droite *C D* dans un même plan , on ne peut mener à cette ligne *C D* que la ſeule ligne perpendiculaire *A B*. Parceque [3] la perpendiculaire *A B* eſt la plus courte de toutes celles qu'on peut mener du point *A* à la ligne *C D*. Donc [3] elle eſt unique.



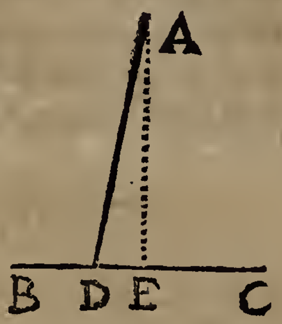
COROLLAIRE II.

Si par un point également diſtant des extrêmitez d'une ligne droite on lui mene une autre ligne droite perpendiculairement , cette derniere ſera perpendiculaire au milieu de la premiere.

Soit le point *A* également diſtant des ex-

[1] *Premiere partie de la Prop. preſ.*
[2] 2^e. *Partie de la Prop. preſ.*
[3] *Ax. 2. Geo.*

trêmitez *B* & *C* de la ligne *BC*; par ce point *A* ſoit menée une ligne, par exemple, *AD* perpendiculaire à *BC* : je dis que *AD* doit neceſſairement être perpendiculaire à *BC* par le point du milieu. Car ſi ce n'étoit pas par le point du milieu, ce ſeroit par un autre point; par le point *E* milieu de la ligne *BC* ſoit menée la ligne *EA* perpendiculaire à cette ligne *BC*, la ligne *EA* paſſera [1] par le point *A*; & partant du point *A* on pourroit mener deux lignes perpendiculaires à la même ligne *BC* dans le même plan, ce qui eſt [2] impoſſible.



COROLLAIRE III.

Donc la diſtance d'un point à une ligne droite doit être meſurée par une perpendiculaire menée de ce point à cette ligne. Puiſque [3] cette perpendiculaire eſt la plus courte diſtance, unique & immuable.

COROLLAIRE IV.

Donc ſi la ligne *AB* eſt parallele à la ligne *CD*, toutes les lignes menées perpendiculairement de l'une à l'autre, ſeront égales entr'elles. Car, puiſque

[1] *Prop. 4. Geo.* [2] *Cor. 1. Prop. pres.*
[3] *Premiere part. Prop. preſ.*

[1] la ligne *AB* est également distante dans toute sa longueur de la ligne *CD*, chaque point de cette ligne *AB* sera aussi également distant de la ligne *CD*. Or la distance de chaque point de la ligne *AB* à la ligne *CD* est [2] mesurée par la ligne qui en est menée perpendiculairement à la ligne *CD*. Donc toutes les perpendiculaires menées d'une parallele à l'autre sont égales entr'elles.

COROLLAIRE V.

Si les lignes *AB* & *AD* sont menées du point *A* pris dans la perpendiculaire *AC* à des points de la ligne *BD* également distans de la perpendiculaire *AC*, ces lignes obliques *AB* & *AD* seront égales entr'elles. Puisque [3] la ligne *AC* perpendiculaire au milieu de *BD* a le point *A* également distant des points *B* & *D*.

COROLLAIRE VI.

Reciproquement si les obliques *AB* & *AD* menées d'un point *A* de la perpendiculaire sur la ligne *BD* sont égales entr'elles, les distances *BC* & *CD* de la perpendiculaire seront [2] aussi égales entr'elles.

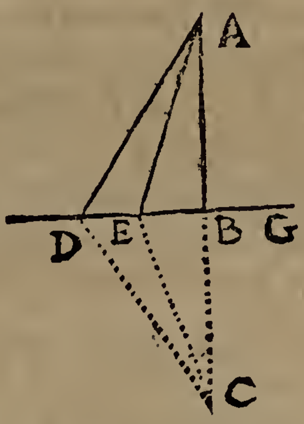
[1] *Déf. 8. Geo.* [2] *Cor. 2. Prop. pres.*
[3] *Prop. 3. Geo.*

PROPOSITION VII.

Entre les lignes droites menées d'un point pris hors d'une ligne droite à cette ligne, celles qui ſont plus éloignées de la perpendiculaire ſont plus longues, & celles qui en ſont plus proches ſont plus courtes.

DEMONSTRATION.

Soit donné le point *A* pris à volonté hors la ligne *D G*, de ce point *A* ſoit menée la ligne *AB* perpendiculairement à la ligne *D G*, & enſuite de ce point *A* à la ligne *D G* ſoient menées à volonté les lignes *A E*, *A D*, &c. Je dis que la ligne *A D* qui eſt plus éloignée de la perpendiculaire *A B*, eſt plus longue que la ligne *A E*, qui eſt plus proche de cette perpendiculaire. Pour le demontrer ſur la perpendiculaire *A B* prolongée ſuffiſamment ſoit priſe la partie $BC = AB$, & ſoient menées les lignes droites *C E* & *C D*. Puiſque *A C* eſt [1] perpendiculaire à *D G*, *D G* ſera [2] auſſi perpendiculaire à *A C*, même au milieu de *A C*. Donc [3] $AD = DC$ & $AE = EC$. Mais [4] $AD + DC > AE + EC$. Donc

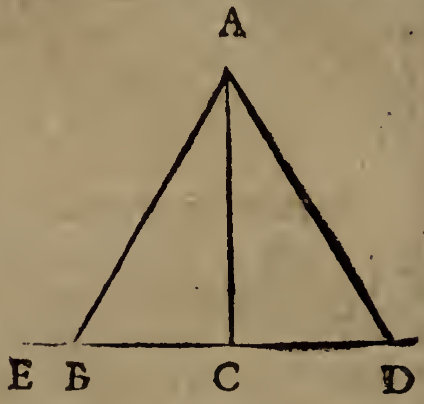


[1] *Suppoſit.* [2] *Cor. 1. Prop. 5. Geo.*
[3] *Prop. 3. Geo.* [4] *Prop. 2. Geo.*

[1] *AD* > *AE*, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

Donc d'un même point *A* pris à volonté hors d'une ligne droite *ED*, on ne peut mener à cette même ligne plus de deux lignes droites égales entr'elles. Soient par exemple les lignes *AB* & *AD* également distantes de la perpendiculaire *AC*, elles seront [2] égales entr'elles. Si on en menoit une 3e du même point *A* à la même ligne *ED*, il faudroit necessairement la mener plus proche de *AC* que *AB* ou *AD*, ou il faudroit la mener plus éloignée de cette même perpendiculaire *AC*. Donc cette 3e ligne oblique seroit plus petite ou plus grande que chacune de ces deux *AB* ou *AD*.



COROLLAIRE II.

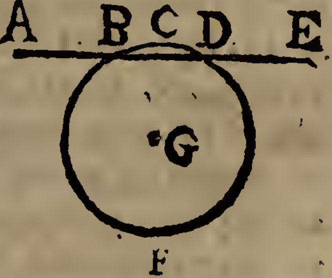
Si du point *F* on mene les lignes *FG* & *FE*, de sorte que *EG* se termine au point *G* plus éloigné de la ligne perpendiculaire *FL*, que le point *E* auquel se termine la ligne *FE* : je dis que

[1] *Ax. 11. gen.* [2] *Cor. 6. Prop. 5. prec. Geo.*

que la ligne *FG* eſt plus grande que *FE*. Car prenons le point *H* autant éloigné du point *L* que le point *E*, alors [1] nous aurons *FH* = *FE*. Or [2] *FG* > *FH*. Donc *FG* > *FE*.

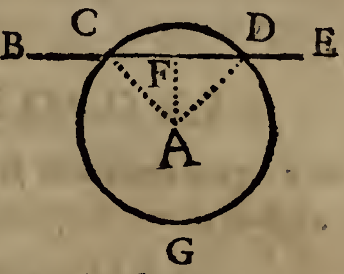
COROLLAIRE III.

Une ligne droite ne peut couper une circonference de cercle qu'en deux points. Car ſi la ligne *AE*, par exemple, pouvoit couper la circonference *BFDC* en trois points *B*, *C*, *D*; du centre *G* on pourroit mener trois lignes droites [3] égales entr'elles à ces 3 points *B*, *C*, *D*, qui ſeroient [4] communs & à la ligne droite *AE* & à la circonference; & il eſt [5] impoſſible que du centre *G* on puiſſe mener 3 lignes droites à *AE* qui ſoient égales entre elles. La ligne *AE* ne peut rencontrer cette circonference en 4 points, puiſque le nombre 4 ſuppoſe le nombre 3.



COROLLAIRE IV.

Une ligne droite qui rencontre une circonference de cercle en deux points, coupe cette circonference. Soit la ligne *BE* qui rencontre la circonference *CGD* dans les points *C* & *D* : je dis que cette ligne *BE* coupe la circonference *CGD*. Pour le démontrer, il faut mener du centre *A* aux points *C* & *D* les rayons *AC*, *AD*, & la perpendiculaire *AF*. Il eſt évident que, lorſqu'une ligne prolongée, s'il eſt neceſſaire, ſe trouve de part & d'autre d'une autre ligne, cette premiere ligne coupera la ſeconde. Or la ligne *BE* rencontrant [4] la circonference *CGD* dans les points *C* & *D*, ſe trouve de part & d'autre de la circonference *CGD*.



Premierement, *BE* ſe trouve d'un côté de la cir-

[1] *Cor.* 5. *Prop.* 6. *Geo.* [2] *Prop. preſ.*
[3] *Cor.* 1. *déf.* 29. *Geo.* [4] *Suppoſit.*
[5] *Cor.* 1. *Prop. preſ.*

conference *DCG* ; car cette circonference se trouve entre le centre *A* & les parties *BC* & *DE* de la ligne *BE* ; puisque toutes les lignes menées du centre *A* à ces parties *BC* & *DE* sont [1] chacune plus longues que les rayons *AC* & *AD*, étant plus éloignés de la perpendiculaire *AF* que les rayons *AC* & *AD*.

Secondement, *CD* qui est partie de *BE*, se trouve d'un autre côté de la circonference; car *CD* se trouve entre le centre & la circonference *CGD*, puisque [2] toutes les lignes qu'on pourra mener du centre *A* à la ligne *CD* seront chacune plus courtes que les rayons *AC* & *AD*, de sorte que la perpendiculaire *AF* sera [3] la plus courte. Toutes les lignes qu'on pourra mener du centre *A* à la ligne *CD*, se termineront donc [2] entre le centre & la circonference. Or toutes les extremitez de ces lignes seront dans la ligne même *CD*. Cette ligne *CD* sera donc entre le centre & la circonference. La ligne *BE* coupera donc le cercle.

COROLLAIRE V.

Si une ligne droite touche une circonference de cercle, elle la touchera donc en un seul point. Car si elle la touchoit en deux, elle la couperoit [4]. Elle ne seroit donc pas touchante ; ce qui est contraire à la supposition.

PROPOSITION VII.

Deux lignes droites ne peuvent avoir un segment commun, c'est-à-dire, ne peuvent avoir une partie commune.

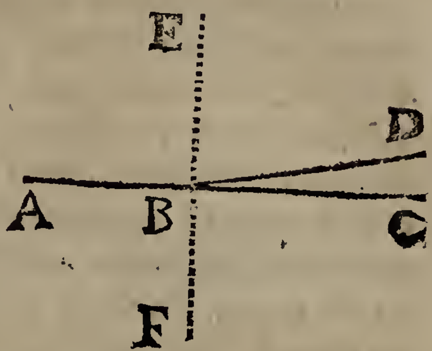
DEMONSTRATION.

Soient les lignes *BD* & *BC* : je dis que ces deux lignes *BD* & *BC* ne peuvent avoir une partie commune, par exemple *AB* ; c'est-à-dire, que si *ABC* est une ligne droite, *ABD* ne peut être aussi une ligne droite. Pour le démontrer, soit menée par le point *B* la ligne *EF* perpendiculaire à la ligne *ABC* qu'on suppose

[1] *Prop. presente.*
[2] *Cor. 2. déf. 29. Geo.*
[3] *Part. 1. Prop. 6. Geo.*
[4] *Cor. 4. Prop. pres.*

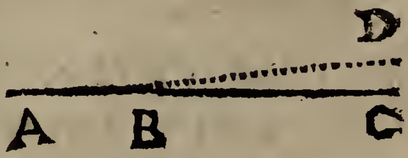
une ligne

une ligne droite. Reciproquement [1] toute cette ligne *A B C* ſera perpendiculaire à *E F.* Pareillement *A B* partie de *A C* ſera perpendiculaire à *E F.* Or ſi *A B* & *B D* étoient auſſi une même ligne droite, la ligne *A B* étant prolongée paſſeroit par *B D*; & après avoir pris *B F* égale à *B E*, cette ligne *A B D* paſſeroit [2] par tous les points également diſtans des points *E* & *F*, & partant [3] *B D* ſeroit auſſi perpendiculaire à *E F.* Donc les deux lignes *B C* & *B D* ſeroient perpendiculaires à la même ligne *E F* par le même point *B* dans un même plan, ce qui eſt [4] impoſſible. Et partant deux lignes droites, par exemple *B D*, *B C*, ne peuvent avoir une partie commune *A B*, *ce qu'il falloit demontrer.*



COROLLAIRE.

Donc la poſition ou ſituation d'une ligne droite eſt determinée par la poſition de deux de ſes points. Soient les points *A* & *B*, je dis que la poſition de la ligne qui paſſe par ces deux points eſt de-



[1] *Cor.* 1. *Prop.* 5. *Geo.* [2] *Prop.* 4. *Geo.*
[3] *Prop.* 5. *Geo.* [4] *Cor. Prop.* 4. *Geo.*

terminée. 1°. Du point *A* au point *B* on ne peut [1] mener qu'une seule ligne droite. 2°. Si on prolonge cette ligne *AB*, la position de toute la ligne *ABC* est determinée, c'est à dire qu'elle ne peut passer indifferemment par le point *C* ou par le point *D* dans differentes positions; mais qu'elle doit passer necessairement, par exemple, par le point *C* dans cette seule position *ABC*. Car supposons qu'elle passe par le point *C*; supposons pareillement qu'elle pût passer par le point *D*, il faudroit donc que *ABD* & *ABC* fussent deux lignes droites, ce qui est [2] impossible.

PROPOSITION IX.

1. *Si on prend un point hors le centre & la circonference d'un cercle; la ligne droite menée de ce point à cette circonference, laquelle étant prolongée passe par le centre, sera la plus courte de toutes celles qu'on peut mener de ce point à cette circonference.*
2. *Reciproquement si une ligne droite menée d'un point pris hors le centre, & la circonference d'un cercle à cette circonference, est la plus courte de toutes celles qu'on peut mener de ce point à cette cerconference; si on la prolonge, elle passera par le centre.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

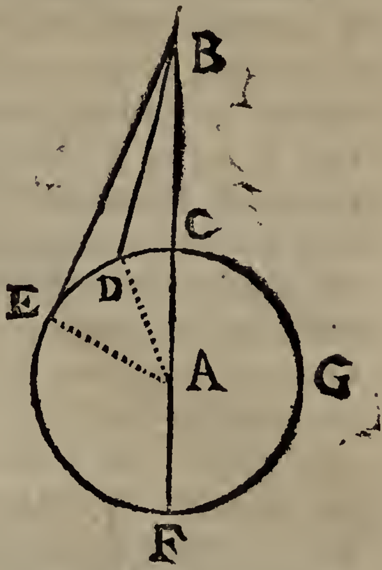
UN point peut être pris hors le centre & la circonference d'un cercle en deux manieres;

[1] *Cor. 3. Ax. 2. Geo.* [2] *Prop. pres.*

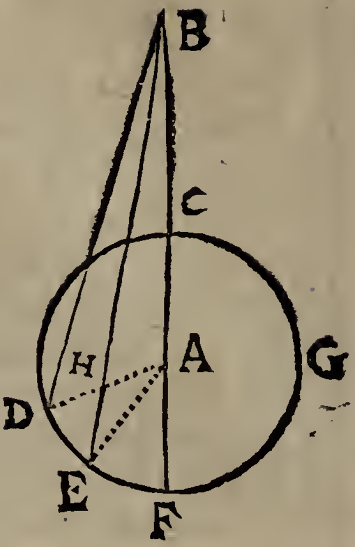
ſçavoir, ou entre le centre & la circonference, ou hors le cercle.

Soit le point *B* pris entre le centre *A* & la circonference *C D E F G* : je dis que *B C* menée de ce point *B* à cette circonference, laquelle ligne *B C* étant prolongée paſſe par le centre *A*, ſera plus courte que toute autre ligne poſſible menée de ce point à cette circonference ; qu'elle ſera, par exemple, plus courte que *B D*. Car * $DB + BA > DA$. Or [1] $DA = AC$. Donc $DB + BA > CA$, c'eſt à dire, que $DB + BA > CB + BA$. En retranchant *B A* de part & d'autre, on aura [2] $BC < BD$; on demontrera de même que $BC < BE$.

Soit le point *B* pris hors le cercle, je dis que *B C* menée de ce point *B* à cette circonference, laquelle ligne *B C* étant prolongée paſſe par le centre *A*, ſera plus courte que toute autre ligne, qu'elle ſera, par exemple, plus courte que *B E* menée de ce point *B* à cette



* *Prop.* 1. *Geo.* [1] *Cor.* 1. *déf.* 29. *Geo.*
[2] *Ax.* 17. *gener.*



circonference. Car * *B E* + *E A* > *B A*, c'eſt à dire, que *B E* + *E A* > *B C* + *C A*. Donc en retranchant de part & d'autre les rayons *E A* & *A C*, on aura (1) *B C* < *B E*, *ce qu'il falloit demontrer.*

On demontrera la même choſe à l'égard de la ligne *B D* & de toutes les autres.

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit la ligne *B C* menée du point *B* pris hors le centre & la circonference du cercle *C D E F G* à cette même circonference ; ſi cette ligne *B C* eſt la plus courte de toutes celles qu'on peut mener de ce point *B* à cette circonference : je dis que ſi on la prolonge, elle doit paſſer par le centre *A*. Parceque (2) la ligne menée d'un point pris hors le centre & la circonference d'un cercle à cette circonference, qui étant prolongée paſſe par le centre, eſt la plus courte de toutes. Or une ligne menée d'un point pris hors le centre & la circonference d'un cercle, étant la plus courte de celles qu'on peut mener de ce point à cette circonference, ſi elle ne paſſoit pas par le centre étant prolongée ; la ligne menée du point pris hors le centre & la circonference du cercle à cette circonference, qui étant pro-

* *Prop.* 1. *Geo.* (1) *Ax.* 17. *gener.*
(2) *Part.* 1. *Prop. preſ.*

longée passeroit par le centre ne seroit pas la plus courte de toutes celles qu'on peut mener de ce point à cette circonference. Car si cette ligne *BC* qui seroit [1] la plus courte de toutes ne passoit par le centre, elle passeroit par ailleurs & seroit plus courte que celle qui étant prolongée passeroit par le centre; puisqu'on la supposeroit la plus courte de toutes, ce qui est contraire à la premiere partie de la Proposition presente. Or [2] il ne peut y avoir une ligne *BC* plus courte que la plus courte. Donc la ligne qui est la plus courte de toutes celles qu'on peut mener d'un point pris hors le centre & la circonference, étant prolongée passera par le centre, *ce qu'il falloit demontrer.*

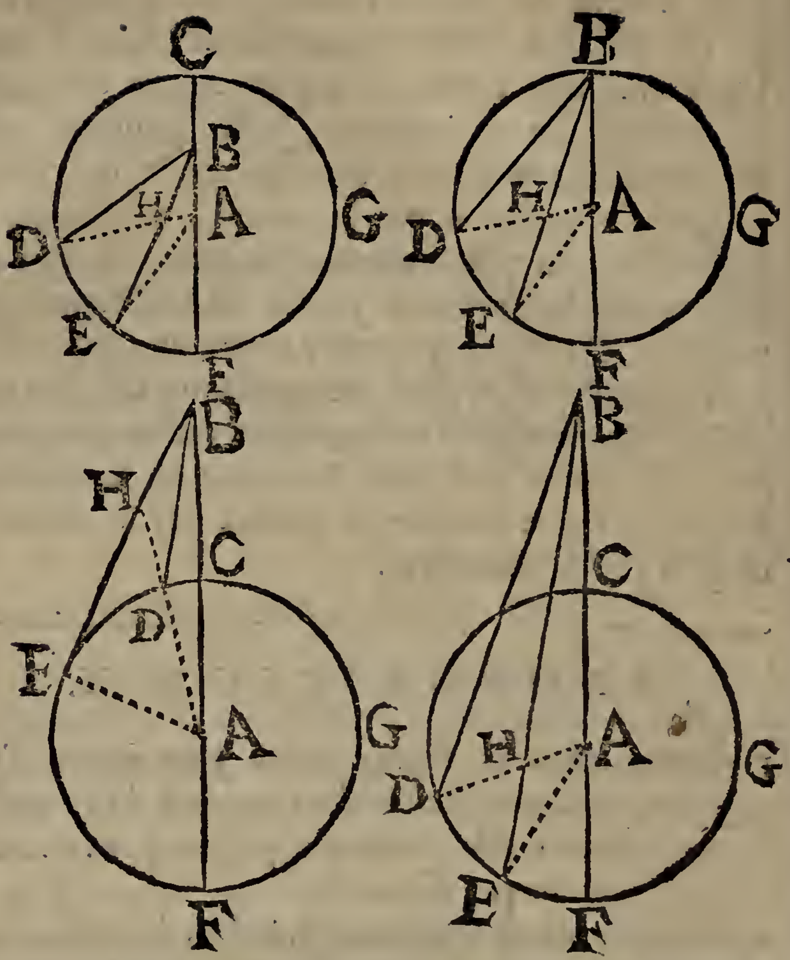
PROPOSITION X.

1. *Entre toutes les lignes qu'on peut mener d'un point pris hors le centre d'un cercle à la circonference de ce cercle, celle qui passera par le centre est la plus longue de toutes.*
2. *La ligne menée d'un point pris hors le centre d'un cercle à la circonference du même cercle, & qui se termine à un point de la circonference plus proche du point où se termine celle qui passe par le centre, est plus longue que celle qui se termine du même côté de celle qui passe par le centre, à un point plus éloigné.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit le point *B* pris hors le centre du cercle *DEFGC*, c'est à dire, ou entre le centre &

[1] *Supposit.* [2] *Cor.* 1. *Ax.* 2. *gener.*



la circonference, ou ſur la circonference, ou hors le cercle : je dis que la ligne *B F* qui paſſe par le centre *A* eſt la plus longue de toutes, par exemple, qu'elle eſt plus longue que *BE*, *BD*, &c. Soient menez les rayons *AE*, *AD*, &c. $AF = AE$ * . Donc en ajoûtant de part & d'autre *AB*, on aura (1) $BA + AF = BA + AE$. Mais (2) $BA + AE > BE$. Donc (3) $BA + AF$, c'eſt à dire, $BF > BE$, *ce qu'il falloit demontrer.*

* *Cor.* 1. *déf.* 29. *Geo.* (1) *Ax.* 4. *gen.*
(2) *Prop.* 1. *Geo.* (3) *Demande* 1. *gen.*

Par le même raisonnement on démontrera la même chose à l'égard de *B D* & de toutes les autres.

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

SOient les lignes *BE* & *BD* menées du point *B* pris hors le centre du cercle *C D E F G* à la circonference de ce cercle : je dis que la ligne *B E* qui se termine au point *E* plus proche du point *F* où se termine celle qui passe par le centre, est plus longue que la ligne *B D* qui se termine à un point *D* plus éloigné & du même côté de celle qui passe par le centre. Pour le démontrer, soient menés du centre *A* aux points *D* & *E*, les rayons *A D* & *A E*. Il est constant * que $HD < HE$, puisque le point *H* est pris hors le centre & la circonference du cercle *C D E F G*. Donc en ajoûtant de part & d'autre *B H*, on aura [1] $EH + HB > DH + HB$. Mais [2] $DH + HB > BD$. Donc [3] *B E* sera plus grande que *B D*, *ce qu'il falloit démontrer.*

* *Part.* 1. *de la Prop.* 9. *Geo.*
[1] *Ax.* 7. *general.*
[2] *Prop.* 1. *Geo.*
[3] *Ax* 22. *general.*

PROPOSITION XI.

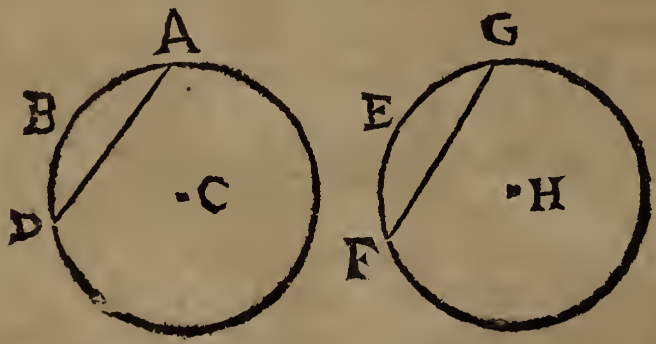
Entre les arcs du même cercle, ou des cercles égaux, qui n'excedent point une demie circonference ;

1. Ceux qui sont égaux sont soûtenus par des cordes égales ;

2. Les plus grands sont soûtenus par des cordes plus grandes, & les plus petits, par des cordes plus petites.

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soient les arcs égaux *ABD* & *GEF* de cercles égaux : je dis que les cordes *AD* & *GF* sont aussi égales entr'elles. Car supposons



que l'arc *GEF* soit appliqué sur l'arc *ABD*, de sorte que le point *G* soit posé sur le point *A*, & le point *F* sur le point *D* ; ces deux arcs *ABD*, & *GEF* se confondront en un seul arc *ABD* ; puisque l'un & l'autre sont * décrits à même distance des centres *C* & *H*. Les cordes *AD* & *GF* ayant donc par cette application les points *A* & *D* communs, cette ligne

* *Par supposit.*

GF se confondra avec la ligne *AD*. Car [1] dans cette situation l'une & l'autre ne peuvent être deux lignes droites differentes. Les arcs égaux sont donc soutenus par des cordes égales, *ce qu'il falloit démontrer.*

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Soit l'arc *AHC* plus grand que l'arc *DGE*; je dis que la corde *AC* est plus grande que la corde *DE*. Pour le démontrer; sur le plus grand arc *AHC*, je prens un arc *AHB* qui soit égal à l'arc proposé *DGE*, & je mene la corde *AB*. Alors cette corde *AB* sera [2] égale à la corde *DE*. Or la corde *AC* est [3] plus grande que la corde *AB*. Cette corde *AC* est [4] donc plus grande que la corde *DE*, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Reciproquement les plus grandes cordes soutiennent des arcs plus grands, & les plus petites cordes soutiennent des arcs plus petits. Soit la corde *AC* plus grande que la corde *ED*; je dis que l'arc *AHC* est plus grand que l'arc *EGD*. Car l'arc

[1] *Cor.* 3. *Ax.* 2. *Geo. page* 234.
[2] *Part.* 1. *Prop. pres.*
[3] *Part.* 2. *Prop.* 10. *Geo. page* 261.
[4] *Demande* 1. *Gen.*

AHC peut seulement être plus grand ou plus petit que *EGD*, ou égal à *EGD*. Or dans la supposition presente l'arc *AHC* ne peut être plus petit que l'arc *EGD*. Car [1] la corde *AC* seroit plus petite que la corde *ED*, ce qui est contre la supposition. L'arc *AHC* ne peut être égal à l'arc *EGD*. Car [2] la corde *AC* seroit égale à la corde *ED*; ce qui est encore contre la supposition. Il reste donc que l'arc *AHC* est plus grand que l'arc *EGD*.

COROLLAIRE II.

Les cordes égales soutiennent des arcs égaux. Car si ces arcs n'étoient égaux, celui qui seroit plus grand seroit [2] soutenu par une plus grande corde, & le plus petit par une plus petite corde. Ces cordes ne seroient donc pas égales, ce qui seroit contre la supposition.

PROPOSITION XII.

1. *Une ligne perpendiculaire à un rayon par le point qui est commun à ce rayon, & à la circonference, est touchante.*
2. *Si une ligne droite touche une circonference de cercle; une autre ligne droite étant menée par le centre au point d'attouchement, sera perpendiculaire à cette touchante.*
3. *Une ligne menée perpendiculairement à une touchante par le point d'attouchement, passe par le centre.*

[1] *Part. 2. Prop. pres.*
[2] *Part. 1. Prop. pres.*

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

SOit la ligne *CD* perpendiculaire au rayon *AB* par ſon extremité *B* : Je dis que cette ligne *CD* touche la circonference *BHLM*.

Car *CD* étant [1] perpendiculaire à *AB*, reciproquement [2] *AB* eſt perpendiculaire à *CD*. Toutes les lignes *AE*, *AF*, *AG*, &c. qui ſeront menées du point *A* à tous les points poſſibles de la ligne *CD* ſeront [3] chacune plus longues que le rayon *AB*, ou que ſes égaux *AH*, *AM*, &c. Les extremitez de ces lignes *AE*, *AF*, *AG*, &c. qui ſeront dans la ligne même *CD*, ſeront donc [4] hors de la circonference *BHLM*. La ligne *CD* perpendiculaire [1] au rayon *AB*, a donc tous ſes points hors de la circonference *BHLM*, excepté le point *B*; Cette ligne *CD* touche donc [5] la circonference *BHLM*, *ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

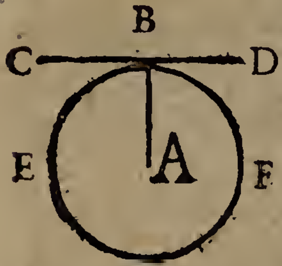
Une ligne droite peut toucher une circonference de cercle, & perſonne ne doit le nier ; cela eſt évident par cette premiere partie.

[1] *Par ſuppoſition.*
[2] *Cor.* 1. *Prop.* 5. *Geo. pag.* 242.
[3] *Part.* 1. *Prop.* 6. *Geo. pag.* 246.
[4] *Cor.* 2. *def.* 29. *Geo. pag.* 205.
[5] *Def.* 34. & *Cor.* 5. *Prop.* 7. *Geo. pag.* 254.

DEMONSTRATION.

DE LA SECONDE PARTIE.

SOit la touchante *CD*, & ſon point d'attouchement ſoit *B* : je dis que le rayon *AB* mené du centre *A* au point d'attouchement *B*, eſt perpendiculaire à la touchante *CD*. Car la touchante CD rencontrant [1] la circonference *BEF* par le point *B* qui eſt l'extremité du rayon *AB*, cette touchante *CD* ne rencontrera la circonference *BEF* [2] que dans ce ſeul point *B*. Tous les autres points de la ligne *CD* ſeront [3] donc plus éloignez du centre *A* que le point *B*. La ligne *AB* ſera donc la plus courte de celles qu'on peut mener du centre *A* à la touchante *CD*. Le rayon *AB* ſera donc [4] perpendiculaire à la touchante, *ce qu'il falloit démontrer*.



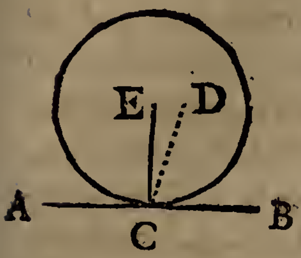
DEMONSTRATION

DE LA TROISIEME PARTIE.

SOit la ligne touchante *AB*, & par ſon point d'attouchement *C*; ſoit menée la ligne *CE* perpendiculaire à cette touchante *AB* : je dis que la perpendiculaire *CE* paſſera par le centre du cer-

[1] *Par Suppoſition.*
[2] *Cor. 5. Prop. 7. Geom. pag. 254.*
[3] *Cor. 2. def. 29. Geo. page 205.*
[4] *Part. 2. Prop. 6. Geo. pag. 246.*

cle. Pour le démontrer il ſuffit de faire voir qu'il eſt impoſſible que le centre du cercle puiſſe être ailleurs que dans cette ligne *CE* prolongée , s'il eſt neceſſaire. Car ſi le centre du cercle étoit ailleurs que dans la ligne perpendiculaire *CE*; s'il étoit, par exemple, en *D*, alors du point *D* au point d'attouchement *C*



ayant mené la ligne *DC*, cette ligne *DC* ſeroit [1] perpendiculaire à la touchante *AB*. Mais [2] *CE* étoit auſſi perpendiculaire à *AB*. Par ce même point *C* il y auroit donc deux lignes perpendiculaires à la même ligne *AB* dans le même plan , ce qui eſt [3] impoſſible. Il eſt donc pareillement impoſſible que la ligne perpendiculaire à la touchante *AB* par le point d'attouchement, ne paſſe par le centre du cercle , *ce qu'il falloit démontrer.*

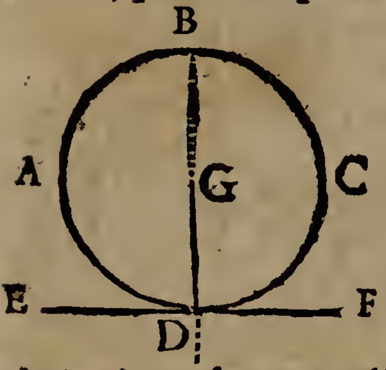
COROLLAIRE I.

La ligne touchante menée par l'extremité d'un rayon , eſt perpendiculaire à ce rayon. Car cette extremité de rayon eſt [4] le ſeul point qui ſoit commun à la circonference & à la touchante. Ce même rayon eſt donc [1]perpendiculaire à la touchante ; & reciproquement la touchante lui eſt [5] perpendiculaire. Ce Corollaire eſt la converſe de la premiere partie de la propoſition preſente.

[1] *Partie 2. Prop. preſ.*
[2] *Par la ſuppoſition.*
[3] *Cor. Prop. 4. Geom. pag. 240.*
[4] *Cor. 5. Prop. 7. pag. 254.*
[5] *Cor. 1. Prop. 5. Geom. pag. 242.*

COROLLAIRE II.

Soit le point *D* donné dans la circonference du cercle, par exemple *ADCB*; & que par ce point *D* il faille mener une touchante. Pour y réüssir il faut mener du centre *G* à ce point donné *D* le rayon *GD* & [1] ensuite mener la ligne *EF* perpendiculaire au rayon *GD* par ce point *D*; cette ligne *EF* sera [2] touchante de la circonference *ADCB* par le point donné *D*.



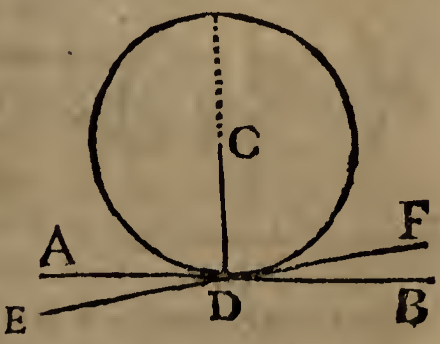
COROLLAIRE III.

Une ligne menée par le centre d'un cercle perpendiculairement à une touchante, passera par le point d'attouchement. Cette verité est évidente, puisqu'il est impossible que cette perpendiculaire ne passe par le point d'attouchement. Car si cette perpendiculaire passoit par un autre point de la touchante, que par celui d'attouchement, alors ayant mené du centre au point d'attouchement un rayon, il seroit [3] aussi perpendiculaire à la touchante. Il y auroit donc deux perpendiculaires menées du centre à la touchante, ce qui est [4] impossible. Ce Corollaire est l'inverse ou reciproque de la troisiéme partie de la proposition presente.

[1] *Cor. 2. Prop. 5. Page 243.*
[2] *Part. 1. Prop. pres.*
[3] *Part. 2. Prop. pres.*
[4] *Cor. Prop. 4. Geom. pag. 240.*

COROLLAIRE IV.

Par le même point d'une circonference de cercle on ne peut mener qu'une touchante à cette circonference. Soit par exemple le point *D* d'une circonference de cercle, ſi on pouvoit mener par ce point *D* les deux lignes *AB* & *EF*, de ſorte que l'une & l'autre fuſſent touchantes, l'une & l'autre ſeroient [1] perpendiculaires à la même ligne ou au même rayon *C D* par le même point, & dans le même plan, ce qui eſt [2] impoſſible. Toute ligne menée par l'extremité d'un rayon, & qui forme avec ce rayon quelque angle oblique ne peut donc toucher la circonference du cercle. Car autrement il pourroit y avoir deux touchantes par le même point, ſçavoir la perpendiculaire [1] & [3] cette oblique.



COROLLAIRE V.

Si on mene par quelque point d'une circonference de cercle une ligne droite touchante, & ſi par le même point on mene encore une autre ligne droite, cette derniere ligne droite coupera la circonference car ou elle coupera, ou elle touchera

[1] *Cor. 1. Prop. preſ.*
[2] *Cor. Prop. 4. Geo. pag. 240.*
[3] *Par ſuppoſition.*

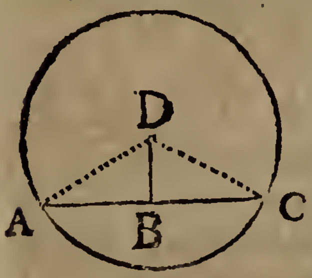
cette circonference. Or elle ne la peut toucher, car il y auroit par le même point deux lignes touchantes, ce qui est [1] impossible. Cette derniere lui coupera donc la circonference.

PROPOSITION XIII.

1. *La ligne menée du centre du cercle perpendiculairement à une corde, sera perpendiculaire par le milieu de cette corde.*
2. *Reciproquement, la ligne menée perdendiculairement à une corde de ce cercle par le point du milieu de cette corde, passera par le centre du cercle.*
3. *La ligne menée du centre du cercle par le milieu d'une corde, sera perpendiculaire à cette corde.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

SOit la ligne *DB* menée du centre *D* du cercle perpendiculairement à la corde *AC*: je dis que cette ligne *DB* est perpendiculaire au milieu de cette corde. Car [2] la ligne menée d'un point également distant des extremitez *A* & *C* de la corde *AC*, perpendiculairement à cette ligne, sera perpendiculaire au milieu de cette même ligne *AC*. Or la ligne *DB* menée perpendiculairement à la ligne *AC* par le centre *D*, est menée par un point également distant des extremitez *A* & *C* de la ligne *AC*, puisque [3] les



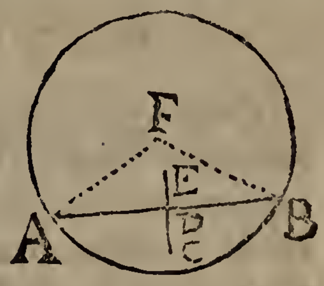
[1] *Cor. 4. Prop. pres.*
[2] *Cor. 2. Prop. 6. Geo. pag. 248.*
[3] *Cor. 1. Def. 29. Geo. Page 205.*

rayons

rayons *D A* & *D C* ſont égaux entr'eux. Donc la ligne *D B* menée perpendiculairement du centre *D* à la corde *A C* ſera perpendiculaire par le milieu de cette corde, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit la ligne *E C* perpendiculaire à la corde *A B* par le milieu de cette corde: je dis que la ligne *E C* étant prolongée paſſera par le point *F* centre du cercle. Car la ligne *E C* étant perpendiculaire au milieu d'une autre *A B* paſſera (¹) par tous les points qui ſont également diſtans des extrêmitez *A* & *B*. Or le centre *F* eſt également diſtant des extrêmitez *A* & *B*. Puiſque les rayons *F A*, *F B* ſont égaux entr'eux. Donc la ligne *E C* perpendiculaire à la corde *A B* par le milieu, paſſera par le centre *F* ſi elle eſt prolongée, *ce qu'il falloit demontrer.*

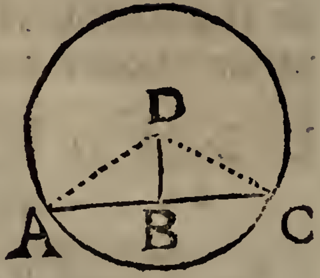


DEMONSTRATION
DE LA TROISIE'ME PARTIE.

Soit la ligne *D B* menée du centre *D* du cercle au milieu *B* de la corde *A C*: je dis que cette ligne *D B* ſera perpendiculaire à cette corde *A C*. Car cette ligne *D B* aura deux de ſes points également diſtans des ex-

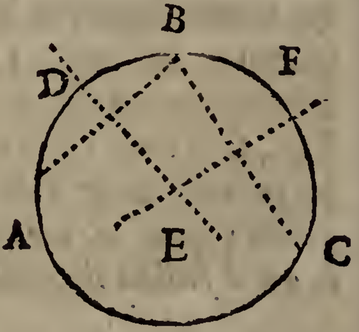
* *Cor, 1. déf. 29. Geo.*
(¹) *Prop. 4. Geo.*

trêmitez *A* & *C*, ſçavoir le point *D* à cauſe des rayons égaux *D A* & *D C*. Cette ligne *D B* aura encore le point *B* également diſtant des extrêmitez *A* & *C*; puiſque ce point *B* eſt (1) le milieu de la corde *A C*. Donc (2) *D B* ſera perpendiculaire à *AC*, *ce qu'il falloit demontrer.*



COROLLAIRE I.

Cette propoſition ſert de fondement à une methode dont on peut ſe ſervir pour trouver le centre d'un cercle lorſqu'on en connoît ſeulement la circonference. Soit, par exemple, la circonference *ACB* dont il faut trouver le centre. Du point *B* pris dans cette circonference il faut mener à volonté deux cordes de cercles *B A* & *B C*, & par le milieu de ces cordes on leur menera les perpendiculaires *D E* & *F E*; le centre du cercle propoſé ſera le point d'interſection *E*. Car la ligne *D E* perpendiculaire (1) à la corde *A B* par le milieu de cette corde paſſe [3] par le centre du cercle. Pareillement la ligne *F E* perpendiculaire au milieu de la corde *B C* paſſe par le centre du cercle. Donc le centre de ce cercle



(1) *Par ſuppoſit.* (2) *Prop. 5. Geo.*
(3) *Part. 2. Prop. preſ.*

ſera en même-temps dans l'une & dans l'autre de ces perpendiculaires *DE* & *FE*; mais il n'y a qu'un ſeul point qui ſoit commun à ces deux lignes *DE* & *FE*, ſçavoir le point *E*. Donc ce point d'interſection *E* eſt le centre cherché du cercle propoſé.

COROLLAIRE II.

Si on ſe propoſe de faire paſſer une circonference de cercle par trois points pris dans un plan, par exemple, *G*, *H*, *E*, pourvû qu'ils ne ſoient pas pris dans une ligne droite, ou qu'une ligne droite ne puiſſe pas paſſer par ces trois points. Il faut conſiderer ces points comme appartenans à la circonference qu'on cherche. Du point *H* aux points *G* & *E* on menera les lignes *HG* & *HE* qu'on conſiderera comme

cordes de la circonference qu'on cherche. Enfin par le milieu de ces cordes on leur menera des perpendiculaires *ML* & *NL*; ces perpendiculaires [1] paſſeront par le centre de la circonference cherchée. Donc le centre de cette circonference ſera dans l'une & dans l'autre; & partant ce centre ſera le point de concours *L*, & ſi on ouvre un compas de la diſtance *LH*, *LG* ou *LF*, de cette ouverture on décrira la circonference cherchée.

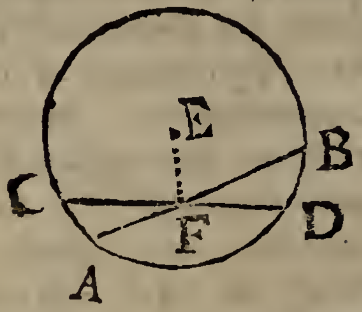
Puiſque [2] tous les points d'une circonference

[1] *Part. 2. Prop. preſ.* [2] *Déf. 26. Geo.*

doivent être également distans d'un même point qui est le centre, si ces trois points étoient en ligne droite, on n'y pourroit faire passer de * circonference de cercle, puisqu'on n'y pourroit trouver un quatriéme point dont on pût mener à ces trois points trois lignes droites égales entr'elles.

COROLLAIRE III.

Il suit de la troisiéme partie de cette proposition, que deux des cordes du même cercle qui se coupent dans un point qui n'est point le centre, ne se couperont jamais par le milieu l'une l'autre. Soient les deux cordes *A B* & *C D* prises à volonté qui se coupent dans un point *F* hors le centre : je dis que ce point *F* ne peut être le milieu de l'une & de l'autre de ces cordes *A B* & *C D*. Car si ce point *F* étoit le milieu de ces deux cordes, soit menée la ligne *E F* du centre *E* au point d'intersection *F*, cette ligne *E F* seroit [1] perpendiculaire aux cordes *A B* & *C D*, & reciproquement [2] ces cordes *A B* & *C D* seroient perpendiculaires à la même ligne *E F* par le même point, dans le même plan, ce qui est [3] impossible. Donc il est pareillement impossible que les cordes *A B* & *C D* se puissent couper l'une l'autre par le milieu.



* *Cor.* 1. *Prop.* 7. *Geo.* [1] 3^e *Part. Prop. pres.*
[2] *Cor.* 1. *Prop.* 5. *Geo.* [3] *Cor. Prop.* 4. *Geo.*

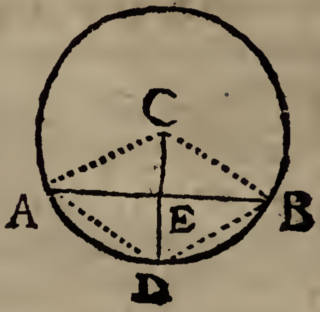
PROPOSITION XIV.

1. *La ligne droite menée par le milieu d'un arc de cercle ; & par le milieu de la corde ſoûtendante de cet arc, ſera perpendiculaire à cette corde, & paſſera par le centre du cercle.*
2. *La ligne droite menée perpendiculairement par le milieu de la corde de cercle, paſſera par le centre de ce cercle ; & par le milieu de l'arc ſoûtenu par cette corde.*
3. *La ligne menée par le centre du cercle, & par le milieu de ſa corde, ſera perpendiculaire à cette corde, & paſſera par le milieu de l'arc ſoûtenu par cette corde.*
4. *La ligne menée par le milieu de l'arc, & perpendiculairement à la corde qui en eſt ſoûtendante, coupera cette corde par le milieu, & paſſera par le centre du cercle.*
5. *La ligne menée par le milieu de l'arc d'une circonference de cercle & par le centre, ſera perpendiculaire à la corde ſoûtendante de cet arc, & coupera cette corde par le milieu.*
6. *Enfin la ligne menée par le centre du cercle perpendiculairement à une corde, coupera cette corde par le milieu, & coupera pareillement en deux parties égales l'arc ſoûtenu par cette corde.*

DEMONSTRATION

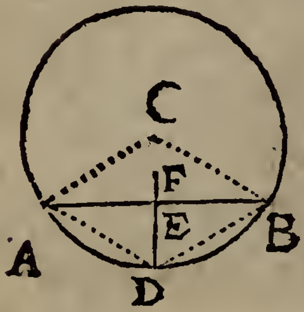
DE LA PREMIERE PARTIE.

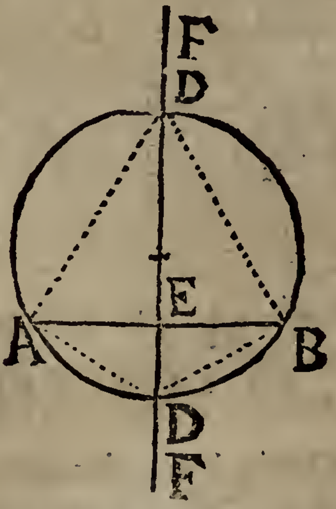
SOit la ligne droite *DE* menée par le milieu *D* de l'arc *ADB*, & par le milieu *E* de la corde *AB* ſoûtendante de cet arc *ADB* : je dis que cette ligne *DE* eſt perpendiculaire à la corde *AB*, & qu'elle paſſera par le centre *C* du cercle. Car 1°. la ligne *DE* aura [1] le point *E* également diſtant des extrêmitez *A* & *B* de la ligne *AB*. 2°. Puiſque l'arc *AD* eſt [1] égal à l'arc *DB*, les cordes *AD* & *DB* ſeront [2] égales entr'elles. Donc la même ligne *DE* aura auſſi le point *D* également diſtant des extrêmitez *A* & *B*. Donc la ligne *DE* ſera [3] perpendiculaire à la corde *AB*, & [4] paſſera par le centre *C*, *ce qu'il falloit demontrer.*



DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit la ligne *EF* menée perpendiculairement à la corde *AB* par ſon point du milieu : je dis que cette ligne paſſera par le centre du cercle,





[1] *Suppoſit.* [2] *Part.* I. *Prop.* XI. *Geo.*
[3] *Prop.* 5. *Geo.* [4] *Prop.* 4. *Geo.*

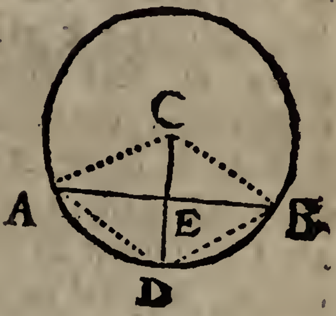
&

& par le milieu de l'arc ſoûtenu par cette corde. Car 1°. cette ligne *E F* paſſera [1] par le centre *C* du cercle. 2°. Cette même ligne aura [2] ſon point *D* également diſtant des extrêmitez *A* & *B*. Donc les cordes *A D* & *D B* ſeront [3] égales entr'elles ; & partant [4] les arcs *A D* & *D B* ſoûtenus par ces cordes ſeront auſſi égaux entr'eux. Donc le point *D* par où paſſe la ligne *F E* eſt le milieu de l'arc *A D B* ſoûtenu par la corde *A B*, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION

DE LA TROISIE'ME PARTIE.

Soit la ligne *C E* menée par le centre *C* du cercle, & par le milieu *E* de la corde *A B*. Je dis que cette ligne *C E* eſt perpendiculaire à la corde *A B*, & que ſi on la prolonge elle paſſera par le milieu de l'arc *A D B* ſoûtenu par cette corde. 1°. La ligne *C E* [5] ſera



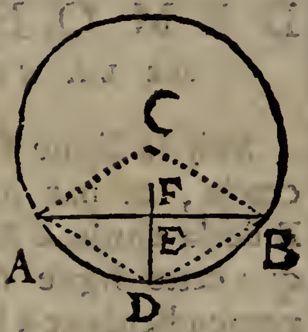
perpendiculaire à la corde *A B*. 2°. Cette ligne *C E* paſſera par le milieu de l'arc *A D B* ſoûtenu par cette corde *A B*. Car puiſque *C E* eſt [5] perpendiculaire au milieu de la corde *A B*, cette même ligne *C E* aura [2] le point *D* également diſtant des extrêmitez *A* & *B* de cette corde *A B*; & partant les cordes *A D* & *D B* ſeront égales entr'elles. Donc les arcs *A D* & *D B* ſeront

[1] *Prop.* 4. *Geo.* [2] *Prop.* 3. *Geo.*
[3] *Cor.* 4. *Ax.* 2. *Geo.* [4] *Cor.* 2. *Prop.* 11. *Geo.*
[5] 3e *Part. de la Prop.* 13. *Geo.*

[1] aussi égaux entr'eux. Donc la ligne *C E* étant prolongée partagera l'arc *A D B* en deux parties égales ; *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA QUATRIE'ME PARTIE.

Soit la ligne *D E* menée par le milieu *D* de l'arc *A D B* perpendiculairement à la corde *A B* : je dis que cette ligne *D E* coupera la corde *A B* en deux parties égales, & qu'elle passera par le centre *C* du cercle. Car 1°. puisque l'arc *A D* est égal à l'arc *D B*, les cordes *A D* & *D B* seront [2] égales entr'elles ; & partant le point *D* sera également distant des extrêmitez *A* & *B* de la ligne *A B*. Donc [3] la perpendiculaire *D E* passera par le milieu *E* de la ligne *A B*. 2°. Cette ligne *D E* [4] passera par le centre *C* du cercle, *ce qu'il falloit demontrer.*

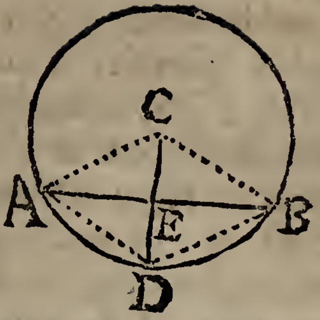


DEMONSTRATION
DE LA CINQUIE'ME PARTIE.

Soit la ligne *D C* menée par le milieu *D* de l'arc *ADB*, & par le centre *C* du cercle : je dis que cette ligne *D C* est perpendiculaire à la corde *A B*, & que le point *E* par où passe cette ligne *D C* est le milieu de la corde *A B*. Car 1°. le point *D* sera également distant des points *A* &

[1 *Cor. 2. Prop. 11. Geo.* [2] *Prop. 11. Geo.*
[3 *Cor. 2. Prop. 6. Geo.* [4] *Prop. 4. Geo.*

B, comme on l'a fait voir dans les demonſtrations precedentes. 2°. Le centre *C* eſt auſſi également diſtant des mêmes points *A* & *B*. Donc cette ligne *C D* ſera perpendiculaire au milieu de la corde *A B*, *ce qu'il falloit demontrer.*



DEMONSTRATION
DE LA SIXIE'ME PARTIE.

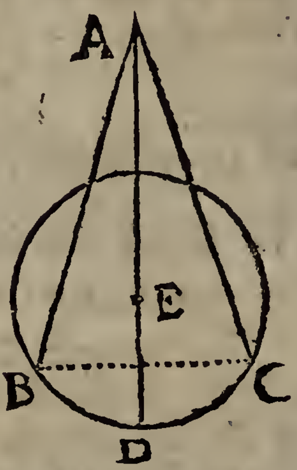
Soit la ligne *C E* menée par le centre *C* d'un cercle, perpendiculairement à une corde *A B* : je dis que la ligne *C E* coupera cette corde *A B* par le milieu *E*, & coupera pareillement l'arc *A D B* en deux parties égales au point *D*. Car 1°. la ligne *C E* ſera (1) perpendiculaire au milieu de la corde *A B*; donc elle la coupera en deux parties égales. 2°. Cette ligne *C E* étant perpendiculaire au milieu *E* de la corde *A B*, aura (2) chacun de ſes points également diſtans des extrêmitez *A* & *B*; & partant (3) les lignes *A D* & *D B* ſeront égales entr'elles. Donc (4) les arcs *A D* & *D B* ſeront égaux entr'eux, c'eſt à dire que l'arc *A D B* ſera partagé en deux parties égales par la ligne droite *C E* prolongée, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

D'un point pris hors le centre d'un cercle; c'eſt à dire, pris entre le centre & la circonference, ou ſur la circonference, ou

(1) *Part. 1. Prop. 13. Geo.* (2) *Prop. 3. Geo.*
(3) *Cor. 4. Ax. 2. Geo.* (4) *Cor. 2. Prop. 11.*

hors le cercle, par exemple du point *A* les lignes menées à des points de la circonference, par exemple *B* & *C*, également distans de part & d'autre du point *D* où se termine la ligne menée de ce point *A* qui passe par le centre, sont égales entr'elles. Car [1] la ligne qui passe par le centre & par ce point *D* est perpendiculaire à la soûtendante de l'arc *BDC* aux deux extrêmitez duquel ces lignes *AB* & *AC* sont menées. Donc le point *A* est [2] également distant de *B* & de *C*. Donc $AB = AC$.



COROLLAIRE II.

Donc reciproquement si les lignes *AB* & *AC* sont égales entr'elles, les points *B* & *C* sont également distans de part & d'autre de l'extrêmité *D* de la ligne menée du point *A*, & qui passe par le centre. Parcequ'alors les points *A* & *E* seront [3] également distans des points *B* & *C*; & partant [4] la ligne *AD* sera perpendiculaire au milieu de lacorde *BC*. Donc [3] son extrêmité ou point *D* sera également distante de *B* & de *C*.

COROLLAIRE III.

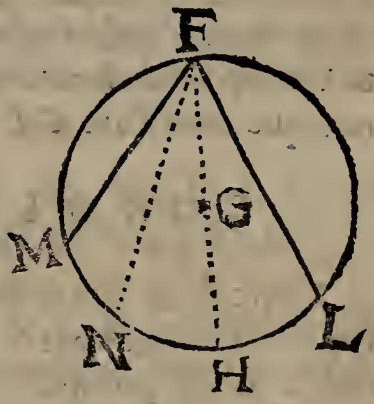
Donc d'un point *A* pris hors le centre d'un cercle, c'est à dire, ou entre le centre & la circonference, ou sur la circonference ou hors le

[1] *Prop. 5. Geo.* [2] *Prop. 3. Geo.*
[3] *Suppos. & Cor. 1. déf. 29. & Cor. 4. Ax. 2. Geo.*
[4] *Prop. 5. Geo.*

cercle, on ne peut mener à cette circonference que deux lignes égales entr'elles ; car si on en menoit une 3e, on la meneroit de part & d'autre des lignes *A B* ou *A C* : & partant cette 3e ligne seroit * plus longue ou plus courte. Donc on n'en peut pas mener trois égales.

COROLLAIRE IV.

Donc si on prend un point ; par exemple *F*, hors le centre d'un cercle *L F M N H*, la ligne *F L* qu'on menera de ce point *F* à la circonference, qui se terminera d'un côté de la ligne *F H* qui passe par le centre, à un point plus près du point *H* où se termine cette même ligne *F H*, sera plus longue que la ligne *F M* qui se terminera de l'autre côté à un point *M* plus éloigné. Car soit pris le point *N* autant éloigné du point *H* que le point *L*, on aura ** $FN = FL$; mais [1] $FM < FN$. Donc $FM < FL$.



COROLLAIRE V.

Donc le diamêtre d'un cercle partage la circonference en deux parties égales. Pour le demontrer soit menée à volonté la corde *D B*, & par son milieu soit menée la ligne *A C* perpendiculairement à cette même corde ; la ligne

* 2e *Part. de la Prop.* 10. *Geo.*
** *Cor.* 1. *Prop. pres.*
[1] 2e *Part. Prop.* 10.

A C passera * par le centre *E*, & étant terminée de part & d'autre par la circonference elle sera un diamêtre. Or ** les points *D* & *B* seront autant l'un que l'autre éloignez des points *A* & *C* ; & partant la corde *DA* = *BA*. Donc l'arc *DGA* = *AHB*. Pareillement puisque la corde *CD* = *CB*, on aura l'arc *CLD* = *CMB*. Donc [1] les arcs *CLD* + *DGA* = *CMB* + *BHA*, c'est à dire, que tout l'arc *CLDGA* = *CMBHA*.

COROLLAIRE VI.

Donc deux circonferences de cercles ne peuvent se couper qu'en deux points. Car si les deux circonferences *ABCD* & *ABCG* se pouvoient couper en trois points *A*, *B*, & *C*, il faudroit que du point *E*, centre du cercle *ABCD*, on pût mener trois lignes droites à ces trois points *A*, *B*, & *C*, qui

* 2[e] *Part. Prop.* 13. *Geo.*
** *Prop.* 3. *Geo.*
[1] *Part.* I. *Prop.* II. *Geo*, *&* *Ax.* 4. *gen.*

fussent * égales entr'elles, ce qui est [1] impossible; puisque de ce point *E* qui est pris hors le centre *F* du cercle *ABCG* on ne peut mener à la circonference *ABCG* plus de deux lignes droites égales entr'elles.

PROPOSITION XV.

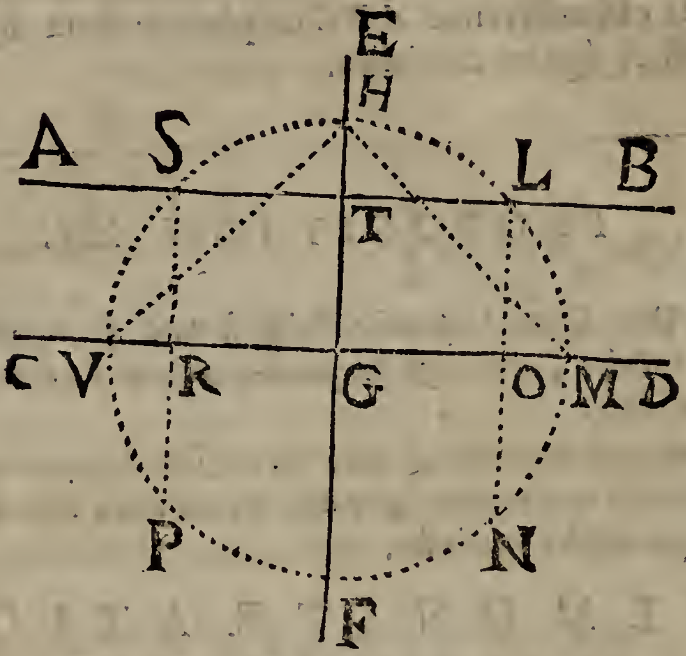
1. *Une ligne perpendiculaire à une de deux paralleles, est aussi perpendiculaire à l'autre parallele.*
2. *Reciproquement si deux lignes sont perpendiculaires à une même ligne droite, ces deux lignes sont paralleles entr'elles.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soient les lignes *AB* & *CD* paralleles entr'elles, & que la ligne *EF* soit perpendiculaire à la ligne *AB* : je dis que cette ligne *EF* est aussi perpendiculaire à l'autre parallele *CD*. Pour le demontrer du point *G* & d'une ouverture de compas *GH* prise à volonté plus grande que *GT* soit décrite la circonference de cercle *HSVFML*. Du point *L* soit menée la ligne *LO* perpendiculairement à *CD*, & prolongée jusqu'au point *N* rencontre de cette circonference. Pareillement du point *S* soit menée la ligne *SR* perpendiculairement à *CD*, & prolongée jusqu'à la rencontre *P* de la cir-

* *Cor. 1. déf. 29. Geo.*
[1] *Cor. 3. Prop. pres.*

conference ; ensuite du point *H* aux points *V* & *M* soient menées les cordes *H V* & *H M*.



Puisque *L N* est perpendiculaire à *G M*, reciproquement [1] *G M* est perpendiculaire à *L N* ; & partant [2] *L O* = *O N*. On aura par le même raisonnement *S R* = *R P*, puisque [3] *S P* est perpendiculaire à *G C*. Or à cause des paralleles *A B* & *C D*, la moitié *S R* de la ligne *S P* est [4] égale à la moitié *L O* de la ligne *L N*. Donc [5] toute la corde *S P* = *L N* ; & partant les arcs *S V P* & *L M N* sont [6] égaux entr'eux, & [7] la moitié *S V* de l'arc *S V P* sera aussi égale à la moitié *L M* de l'arc *L M N*. Or la ligne *E G* étant [8] perpendiculaire à la

[1] *Cor.* 1. *Prop.* 5. *Geo.* [2] *Part.* 1. *Prop.* 13. *Géo.*
[3] *Par construction.* [4] *Cor.* 4. *Prop.* 6. *Geo.*
[5] *Ax.* 13. *Geo.* [6] *Part.* 1. *Prop.* 11. *Geo.*
[7] *Ax.* 12. *general.* [8] *Supposit.*

corde SL, on aura [1] l'arc $HL = HS$. Donc en ajoûtant l'arc HL à l'arc LM, & l'arc HS à l'arc SV, on aura [2] $HLM = HSV$; & partant les cordes [3] HM & HV seront égales. Pareillement [4] $GV = GM$. Donc la ligne EF aura deux de ses points, sçavoir H & G également distans des points V & M. Donc enfin [5] EF sera aussi perpendiculaire à la seconde ligne parallele CD, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

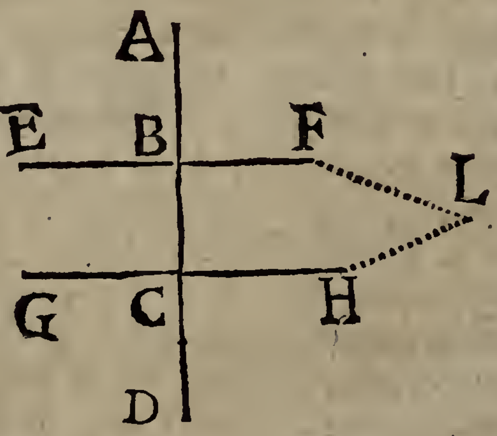
Soient les lignes AB & CD perpendiculaires à la même ligne EF : je dis que ces deux lignes sont paralleles entr'elles. Pour le demontrer soit décrite du point G la circonference $HSVPNMLH$, & soient menées les mêmes lignes ponctuées, & de la même maniere que dans la premiere partie de la proposition presente. Puisque [6] les lignes AB & CD sont perpendiculaires à EF, reciproquement EF sera perpendiculaire à SL & à VM; & partant on aura [7] l'arc $VSH = HLM$. On aura pareillement [1] l'arc $SH = HL$. Donc [8] l'arc SV sera égal à LM; mais puisque SP & LN sont [9] perpendiculaires à CD, l'arc $SV = VP$ [1] & $LM = MN$. Donc [3] la corde $SP = LN$. Donc [0] enfin la ligne perpendiculaire SR sera

[1] *Part. 6. Prop. 14. Geo.* [2] *Ax. 4. gener.*
[3] *Part. 1. Prop. 11. Geo.* [4] *Cor. 1. déf. 29. Geo.*
[5] *Prop. 5. Geo.* [6] *Supposit.*
[7] *Prop. 3. & Cor. 2. Prop. 11. Geo.*
[8] *Ax. 9. general.* [9] *Par construction.*
[0] *Ax. 12. general. & Part. 1. Prop. 13. Geo.*

égale à la perpendiculaire *L O* ; & partant, puisque * la position d'une ligne droite suit necessairement celle de deux de ses points, on trouvera que les deux points *S* & *L* de la ligne *A B* étant [1] également distans de la ligne *C D*, la ligne *AB* sera pareillement également distante de *C D*. Donc [2] ces deux lignes *A B* & *C D* seront paralleles entr'elles, *ce qu'il falloit demontrer*,

COROLLAIRE I.

Donc deux lignes perpendiculaires à une même ligne droite, ou deux lignes paralleles entr'elles étant prolongées ne peuvent jamais concourir nulle part. Soient les deux lignes *E F* & *G H* perpendiculaires à *A D*, ou paralleles entr'elles, &



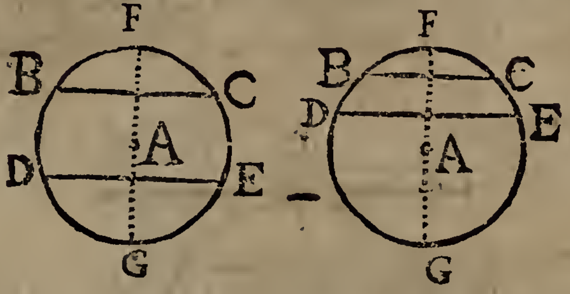
que *A D* leur soit perpendiculaire ; s'il étoit possible que ces lignes *E F* & *G H* étant prolongées pussent concourir en quelque lieu du monde, par exemple en *L*, il faudroit que de ce point *L* il y eût deux lignes *L B* & *L C* menées perpendiculairement à la même ligne *A D* dans un même plan, ce qui est [3] impossible. Donc

* *Cor. Prop. 8. Geo.* [1] *Cor. 5. Prop. 6. Geo.*
[2] *Déf. 8. Geo.* [3] *Cor. 1. Prop. 6. Geo.*

ces lignes *EF* & *GH* ne peuvent donc se rencontrer nulle-part.

COROLLAIRE II.

Les arcs *BD* & *CE* compris entre les cordes paralleles *BC* & *DE*, sont égaux entr'eux. Car soit mené

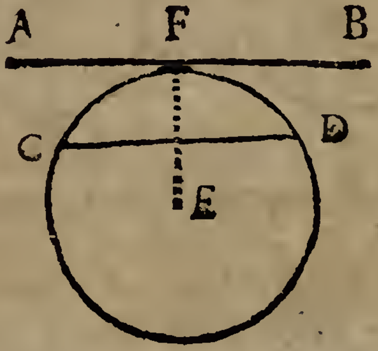


le diametre *FG* perpendiculairement à une des deux cordes *BC* ou *DE*. Alors [1] ce diametre *FG* sera aussi perpendiculaire à l'autre corde, & même [2] sera perpendiculaire à l'une & à l'autre par leur milieu. Outre cela [3] ce même diametre *FG* coupera les arcs *BFC* & *DGE* chacun en deux parties égales, c'est-à-dire que $BF = FC$, & que $DG = GE$. Si à l'arc *BF* on ajoute *DG* d'une part, & si à l'arc *CF* on ajoute *GE* d'une autre part; on aura $BF + DG = CF + EG$, & [4] l'arc entier $FDG = FEG$. Retranchons d'une part $BF + DG$, & de l'autre part $CF + EG$; les arcs *BD* & *CE* compris entre les cordes paralleles *BC* & *DE*, resteront [5] égaux entr'eux.

[1] *Prop. pres.*
[2] *Part.* 1. *Prop.* 13. *Geom.*
[3] *Part.* 6. *Prop.* 14. *Geom.*
[4] *Cor.* 5. *Prop.* 14. *Geom.*
[5] *Ax.* 9. *Geom.*

COROLLAIRE III.

Une ligne touchante parallele à une corde de cercle, divise en deux parties égales par le point d'attouchement l'arc soutenu par cette corde. Soit



la ligne touchante *AB* parallele à la corde *CD* : je dis que l'arc *CFD* soutenu par cette corde est divisé en deux parties égales par le point d'attouchement *F*. Car soit mené le rayon *EF* du centre E à ce point d'attouchement F. Alors le rayon *EF* sera [1] perpendiculaire à la touchante *AB*; ce même rayon *EF*, sera donc [2] aussi perpendiculaire à la corde *CD*, & partagera [3] en deux parties égales, l'arc *CFD* au point d'attouchement *F*, qui est aussi un point de la touchante *AB*.

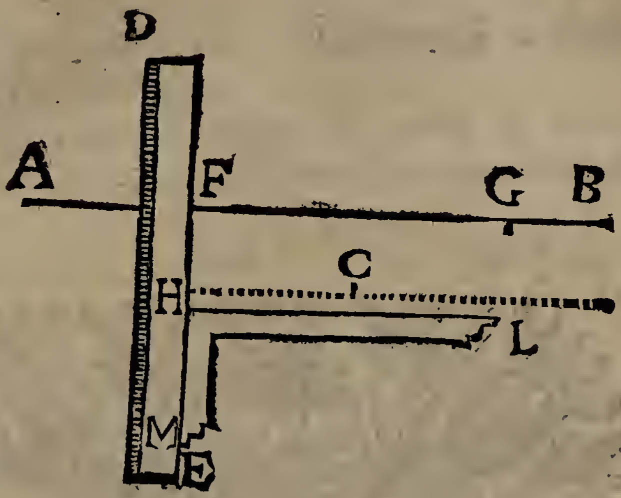
COROLLAIRE IV.

On peut tirer de cette proposition une me-

[1] *Part.* 2. *Prop.* 12. *Geo.*
[2] *Part.* 1. *Prop. pres.*
[3] *Prop.* 14. *Geo. Part.* 6.

thode

thode pour mener par un point donné hors d'une ligne donnée, une ligne parallele à cette ligne donnée. Et on peut s'en ſervir fort com-



modément, principalement dans les deſſeins d'Architecture civile, ou militaire, lorſqu'il s'agit de mener une ligne parallele à une autre ligne par un point donné. Soit par exemple le point *C* donné hors la ligne *A B*, par lequel point *C* on veut mener une ligne parallele à *A B*. Il faut prendre une regle de bois *D E* avec une équerre *L H M* d'une aſſez bonne épaiſſeur, parcequ'on s'en ſert avec plus de juſteſſe pour mener les lignes neceſſaires; on applique d'abord le côté *H L* de cette équerre ſur la ligne *A B*, par exemple de *F* en *G*, & on poſe la regle *D E* le long du côté *H M* de cette équerre. Enſuite retenant avec une main la regle *D E* toûjours dans la même ſituation, avec l'autre main on fait gliſſer l'équerre le long de cette regle *DE* juſqu'à ce que le point *C* paroiſſe ; enfin on mene la ligne *HC*, qui eſt * la ligne parallele qu'on cherchoit.

* *Part. 2. Prop. Pref.*

PROPOSITION XVI.

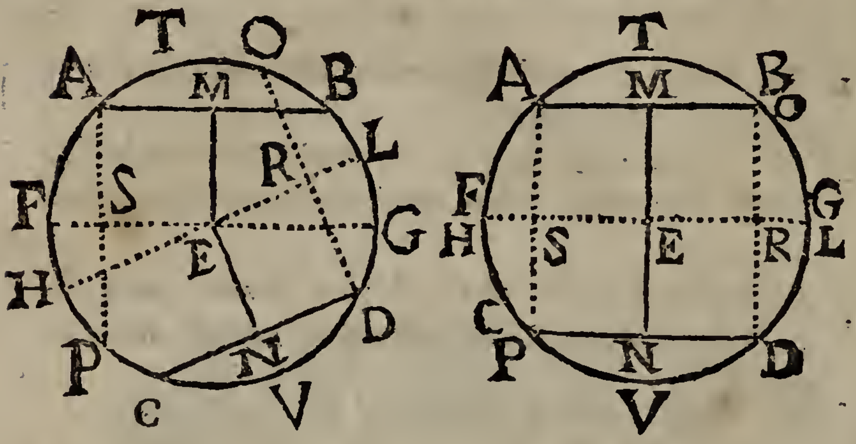
1. *Les cordes de cercle également éloignées du centre ſont égales entr'elles.*
2. *Reciproquement lorſque les cordes de cercle ſont égales entr'elles, elles ſont également éloignées du centre.*
3. *Le diamêtre d'un cercle eſt plus grand que chacune des autres cordes qu'on peut mener dans ce cercle.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

SOient les cordes *AB* & *CD* également éloignées du centre *E* du cercle *ACDB* : je dis que ces cordes ſont égales enrr'elles. Pour le demontrer ſoit mené par le centre *E* le diamêtre *FG* parallele à la corde *AB*; par le même centre *E* ſoit encore mené le diamêtre *HL* parallele à l'autre corde *CD*. Du centre *E* ſoient menées les lignes *EM* & *EN* perpendiculaires aux cordes *AB* & *CD*; ces perpendiculaires ſeront [1] les meſures des diſtances du centre à ces cordes. D'une des extrêmitez d'une des cordes *AB* ou *CD*, par exemple du point *A* ſoit menée la ligne *AS* perpendiculairement au diamêtre *FG*, & cette ligne *AS* ſoit prolongée juſqu'à la rencontre de la circonference en *P*. Enfin d'une extrêmité de l'autre corde ſoit

[1] *Cor. 3. Prop. 6. Geo.*

menée la ligne *DR* perpendiculaire sur le diamêtre *HL*, & cette ligne *DR* soit prolongée jusqu'au point O rencontre de la circonference.



Puisque[1] les distances *EM* & *EN* du centre à ces cordes sont égales, les perpendiculaires *AS* & *DR* seront [2] aussi égales, c'est à dire, [3] que les cordes entieres *AP* & *DO* seront égales. Donc [4] les arcs *AFP* & *DLO* seront égaux : & enfin [5] leurs moitiez *AF* & *DL* seront égales entr'elles. Or puisque *AP* est perpendiculaire au diamêtre *FG*, reciproquement *GF* sera [6] perpendiculaire à *AP*, & même [7] partagera l'arc *AFP* en deux parties égales au point *F*; par le même raisonnement le diamêtre *HL* partagera l'arc *DLO* en deux parties égales au point *L*. Puisque nous venons de trouver que les moitiez de ces arcs qui sont *AF* & *DL* sont égales entr'elles, il est constant

[1] *Supposit.* [2] *Cor. 4. Prop. 6. & Dem. 1. gen.*
[3] *Part. 1. Prop. 13. Geo. & Ax. 13. gen.*
[4] *Cor. 2. Prop. 11. Geo.* [5] *Ax. 12. gen.*
[6] *Cor. 1. Prop. 5. Geo.*
[7] *Part. 6. Prop. 14. Geo.*

qu'en ajoûtant à *AF* ſon égal [1] *BG*, & en ajoûtant à *DL* ſon égal *HC*, on aura [2] la ſomme des arcs $AF + BG = DL + HC$. Mais l'arc *FTG* eſt [3] une moitié de la circonference, qui eſt égale à l'autre moitié *HVL*. Donc en ôtant $AF + BG$ de l'arc *FTG*, & ôtant $DL + HC$ de l'arc *HVL*, il reſtera l'arc [4] $ATB = CVD$. Donc [5] les cordes *AB* & *CD* ſeront égales entr'elles, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soient les cordes *AB* & *CD* égales entr'elles : je dis qu'elles ſont également éloignées du centre *E*, c'eſt à dire [6] que les perpendiculaires *EM* & *EN* ſont égales entr'elles. Pour le demontrer, après avoir mené les perpendiculaires *EM* & *EN*, ſoient menées les autres lignes *FG*, *HL*; *AP*, *DO* comme dans la premiere partie de la propoſition preſente.

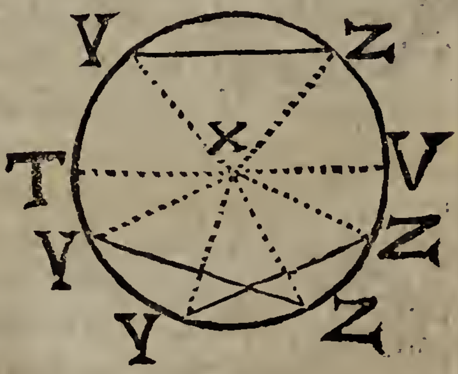
Puiſque [7] $AB = CD$, les arcs *ATB* & *CVD* ſeront [8] égaux entr'eux ; mais [3] l'arc $FTG = HVL$. Donc ôtant d'une part l'arc *ATB* & ôtant de l'autre part l'arc *CVD*, il reſtera [4] la ſomme des arcs $AF + BG = HC + LD$; mais [9] les moitiez de chacune de ces deux ſommes d'arcs, ſçavoir *AF* & *DL* ſeront égales entr'elles. Donc [°] deux fois *AF*, c'eſt à

[1] *Cor. 2. Prop. 15. Geo.* [2] *Ax. 4. gen.*
[3] *Cor. 5. Prop. 14. Geo.* [4] *Ax. 9. gen.*
[5] *Part. 1. Prop. 11. Geo.* [6] *Cor. 3. Prop. 6. Geo.*
[7] *Suppoſit.* [8] *Cor. 2. Prop. 11. Geo.*
[9] *Cor. 2. Prop. 15. & Ax. 12. gener.*
(°) *Ax. 13. gen. & Part. 6. Prop. 14. Geo.*

dire, l'arc *AFP* sera égal à deux fois *DL* qui est l'arc *DLO* : or puisque les arcs *AFP* & *DLO* sont égaux entr'eux, les cordes *AP* & *DO* seront (1) égales entr'elles. Donc les lignes *GF* & *HL* menées par le centre *E*, & par le milieu de ces arcs *AFP* & *DLO* (2) seront perpendiculaires par le milieu de ces cordes ; & partant (3) les perpendiculaires *AS* & *DR* seront égales entr'elles. Or (4) la perpendiculaire $AS = EM$, & la perpendiculaire $RD = EN$. Donc (5) la perpendiculaire $EM = EN$; donc les cordes égales *AB* & *CD* seront (6) également éloignées du centre *E*, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA TROISIE'ME PARTIE.

Soit le diamêtre *TV*, je dis que ce diamêtre est plus grand que toute autre ligne *YZ* menée dans le cercle, & terminée de part & d'autre à la circonference. Pour le demontrer soient menez les rayons *XY* & *XZ*. Il est constant [7] que $TX = YX$, & que $VX = ZX$. Donc [8] $TX + XV = YX$



(1) *Part.* 1. *Prop.* 11. *Geo.* (2) *Part.* 5. *Prop.* 14. *Geo.*
(3) *Part.* 1. *Prop.* 13. *&* *Ax.* 12. *gen.*
(4) *Cor.* 4. *Prop.* 6. *Geo.* (5) *Demande* 1. *gen.*
(6) *Cor.* 3. *Prop.* 6. *Geo.* [7] *Cor,* 1. *déf.* 29. *Geo.*
[8] *Ax.* 4. *gen.*

$+XZ$. Or [1] $YX + XZ > YZ$. Donc [2] le diametre $TXV > YZ$, *ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XVII.

1. *Les cordes de cercle les plus proches du centre sont plus grandes que celles qui en sont plus éloignées.*
2. *Reciproquement lorsqu'une corde de cercle est plus grande qu'une autre, celle qui est plus grande est plus proche du centre que celle qui est plus petite.*

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

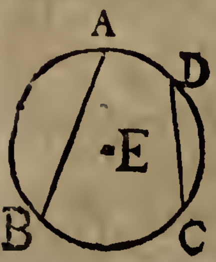
Soit la corde *BF* plus proche du centre *A*, que la corde *CE*: je dis que cette corde *BF* est plus grande que la corde *CE*.

Pour le démontrer, je mene du centre *A* la ligne *AG* perpendiculaire à la corde *BF*, & la ligne *AL* perpendiculaire à la corde *CE*; ces perpendiculaires *AG* & *AL* seront [3] les distances des cordes *BF* & *CE*. La distance *AL* étant [4] plus longue que *AG*, j'en retrancherai la partie *AH* égale à *AG*, & par le point *H* je menerai la corde *MN* perpendiculaire à *AL*. Alors les cordes *BF* & *MN* seront [5] égales entr'elles. Or la corde *MN* étant soutendante de l'arc *MDN*, sera [6] plus grande que la corde *CE* qui est soutendante de l'arc plus petit *CDE*. Au lieu de *MN* prenant son égale *BF*, je trouverai donc que la corde *BF* qui est plus proche du centre *A*, est plus grande que la corde *CE* qui en est plus éloignée, *ce qu'il falloit démontrer.*

[1] *Prop.* 1. *Geo.*
[2] *Demande* 1. *gen.*
[3] *Cor.* 3. *prop.* 6. *Geo.*
[4] *Supposition.*
[5] *Part.* 1. *prop.* 16. *Geo.*
[6] *Part.* 2. *prop.* 11. *Geo.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit la corde *AB* plus grande que *CD* : je dis que



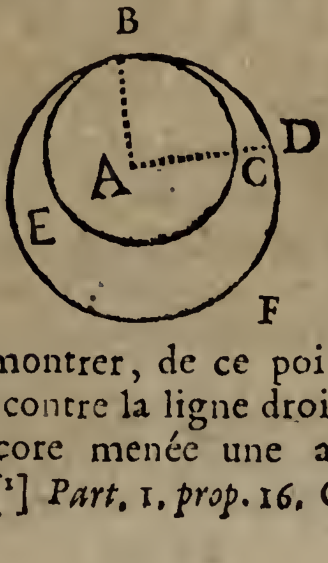
AB est plus proche du centre *E* que la corde *CD*. Car *AB* ne peut être qu'en ces trois situations, sçavoir, plus proche du centre *E* que la corde *CD*, ou autant éloignée que la corde *CD*, ou enfin plus éloignée que la corde *CD*. Or *AB* ne peut être autant éloignée du centre *E* que *CD*. Car *AB* seroit [1] égale à *CD*, ce qui est contre la supposition. *AB* ne peut être plus éloignée du centre *E* que *CD* ; car cette corde *AB* seroit [2] plus petite que *CD*, ce qui est encore contre la supposition. La corde *AB* qui est la plus grande, sera donc plus proche du centre *E*, que *CD*, *ce qu'il falloit démontrer.*

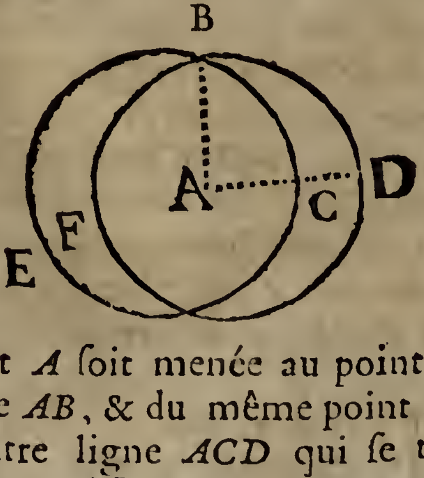
PROPOSITION XVIII.

Deux circonferences de cercles qui se coupent, ou qui se touchent interieurement, n'ont pas le même centre.

DEMONSTRATION.

SOient les circonferences des cercles *BEC* & *BFD* qui se coupent, ou qui se touchent au point *B*, je dis qu'aucun point, par exemple le point *A*, ne peut être un centre commun à ces deux cercles. Pour le





démontrer, de ce point *A* soit menée au point de rencontre la ligne droite *AB*, & du même point soit encore menée une autre ligne *ACD* qui se ter-

[1] *Part.* 1. *prop.* 16. *Geo.* [2] *Part.* 1. *prop. pres.*

mine à

mine à la derniere circonference. S'il étoit possible que ce point *A* fût un centre commun à ces deux cercles, les rayons du cercle *BFD* seroient égaux aux rayons du cercle *BEC*, & partant [1] on auroit *AD* = *AB*. Pareillement [1] *AC* seroit égal à *AB*. Donc [2] il faudroit que la ligne *AD* fût égale à *AC*; ce qui est [3] impossible. Donc les cercles dont les circonferences se coupent, ou se touchent intérieurement ne peuvent avoir un centre commun, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE.

Donc deux circonferences de cercles qui ont le même centre, ne peuvent se couper ni se toucher. Car si elles pouvoient se couper ou se toucher, ces cercles [4] n'auroient pas le même centre, ce qui est contre la supposition.

PROPOSITION XIX.

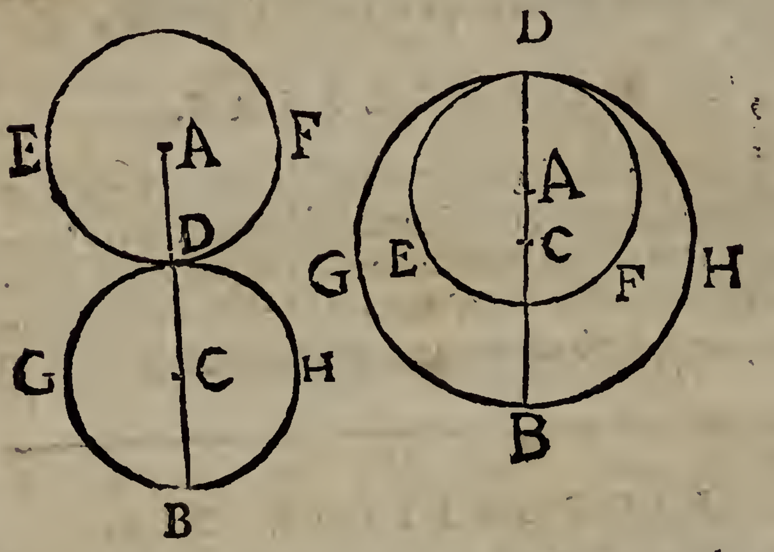
La ligne droite menée par les centres de deux cercles dont les circonferences se touchent, passe par l'attouchement ou rencontre de ces circonferences.

DEMONSTRATION.

SOit la ligne *AB* menée par les deux centres *A* & *C* des deux cercles *EDF* & *GBHD*: je dis que cette ligne *AB* prolongée, s'il est ne-

[1] *Cor. 1. déf. 29. Geo.*
[2] *Ax. 18. general.*
[3] *Ax. 2. gen.* [4] *Prop. pres.*

ceſſaire, paſſera par l'attouchement *D* des circonferences de ces cercles. Car ſi on conſidere le centre *A* comme un point pris hors le centre *C* du cercle *HDGB*, la ligne *AD* qui paſſe par le centre *C* eſt [1] la plus courte de toutes celles qu'on peut mener du point *A* à la circonference du cercle *HDGB*. Donc cette ligne ſe termine à l'endroit de cette circonference *GBHD*, qui eſt le plus proche de ce centre *A*.



Or l'endroit de cette circonference touchante *GBHD* qui eſt le plus proche du centre *A* eſt l'attouchement *D*. Puiſque les circonferences qui ſe touchent, ſe rencontrent de telle ſorte que l'une n'entre point dans le cercle de l'autre. Donc la ligne *AB* qui paſſe par les centres des circonferences *FDE* & *HBGD* qui ſe touchent paſſe par l'attouchement, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE.

Donc l'attouchement de deux circonferences

[1] *Part. 1. Prop. 9. Geo.*

de

de cercles n'eſt qu'un ſeul point. Car ſi l'attouchement *D*, par exemple, conſiſtoit en pluſieurs points qui fuſſent communs aux deux circonferences *FED* & *HDGB*, on pourroit mener de ce point *A* à la circonference *H D G B* pluſieurs lignes qui ſe termineroient à ces points communs. Donc [1] ces lignes ſeroient égales à la ligne *A D* qui eſt partie de *A B* laquelle paſſant par le centre, paſſe [2] par l'attouchement. Donc cette ligne *A D* ne ſeroit pas la plus courte de toutes, puiſque ces autres lignes menées du point *A* à ces points communs lui ſeroient égales. Or cette ligne *A D* eſt (3) la plus courte de toutes celles qu'on peut mener du centre *A* à la circonference *H D G B*. Donc l'attouchement *D* n'eſt qu'un ſeul point.

DES ANGLES RECTILIGNES.

PROPOSITION XX.

La meſure d'un angle rectiligne eſt l'arc decrit de ſon ſommet & compris entre ſes côtez.

DEMONSTRATION.

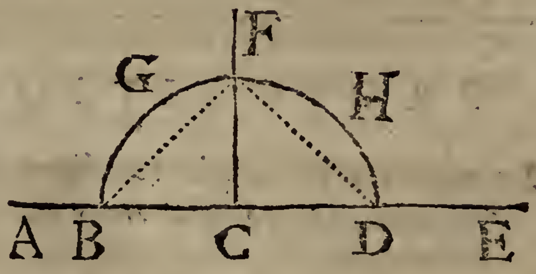
SOit l'angle rectiligne *G C D*: je dis que ſa meſure eſt l'arc *G D* compris entre ſes côtez

[1] *Cor. 1. déf. 29. Geo.* [2] *Prop. preſ.*
[3 *Part. 1. Prop. 9. Geo.*

C G & *C D*, & decrit de son sommet *C* pris pour centre. Car considerons la ligne *C G* appliquée sur *C D*, & qu'ensuite cette ligne *C G* soit mûë vers *E*, ou bien *C D* vers *F* autour de leur extrêmité fixe *C*, afin que cette ligne parvienne dans la situation *C G*, le point *G* en s'écartant du point *D*, ou le point *D* en s'écartant du point *G* décrira l'arc *D G* qui en [1] sera comme la trace ou le vestige. Donc l'arc *D G* sera la mesure de l'ouverture ou écartement de l'angle *G C D*, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

Donc chaque angle droit a pour mesure un quart de circonference de cercle. Soit la ligne *F C* perpendiculaire à la ligne *A E*; du point *C* soit décrit l'arc de cercle *B G F H D* qui est [2] une demie circonference. Il est [3] constant que le point *F* est également distant des points *B* & *D*; & partant les cordes *B F* & *F D* étant (4) égales, les arcs

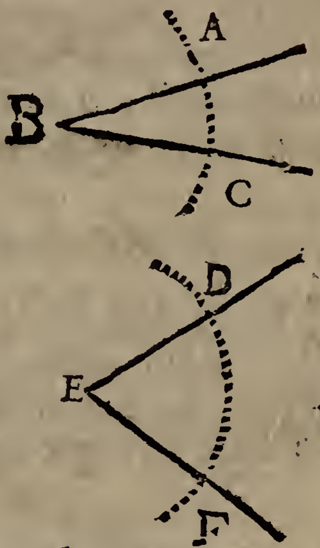


[1] *Cor.* 1. *déf.* 3. *Geo.* [2] *Cor.* 5. *Prop.* 14. *Geo.*
[3] *Prop.* 3. *Geo.* (4) *Cor.* 4. *Ax.* 2. *Geo.*

BGF & *FHD* seront (1) aussi égaux entr'eux. Or (2) *BGF* est la mesure de l'angle droit *BCF*. Pareillement l'arc *FHD* est la mesure de l'angle *FCD*, & les arcs *BGF* & *FHD* étant égaux, sont chacun la moitié de la moitié d'une circonference. Donc les angles droits *BCF* & *FCD* ont chacun pour mesure un quart de circonference de cercle.

COROLLAIRE II.

Donc on connoîtra l'égalité ou inégalité des angles rectilignes par l'égalité ou inégalité des arcs compris entre leurs côtez decrits de leurs pointes ou sommets à la même ouverture de compas prise à volonté. On connoîtra par exemple, que l'angle *ABC* est plus petit que *DEF*, si l'arc *AC* est plus petit que *DF*, l'un & l'autre arc étant décrits à même ouverture de compas ; & si l'arc *AC* étoit égal à l'arc *DF*, l'angle *ABC* seroit égal à *DEF*.



Reciproquement lorsqu'un angle est égal à un autre, l'arc qui en est la mesure est égal à l'arc qui est la mesure de l'autre, lorsque ces deux arcs sont décrits à même ouverture de compas ; & lorsque deux angles sont inégaux, les arcs qui en sont mesures sont inégaux ; enfin l'angle qui est le plus grand a le plus grand arc pour mesure.

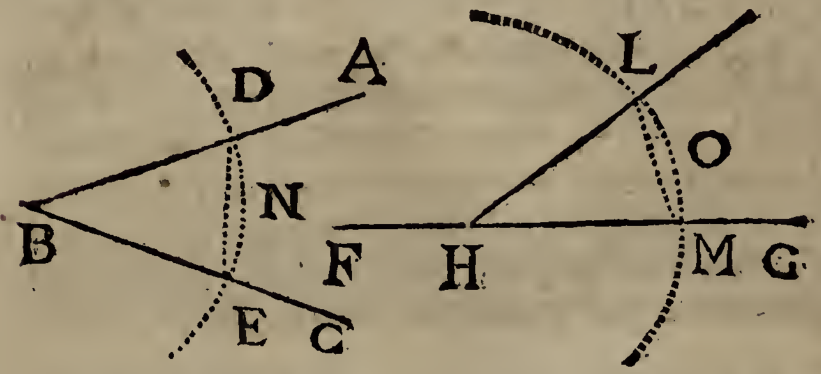
(1) *Cor. 2. Prop. 11. Geo.* (2) *Prop. pres.*

COROLLAIRE III.

Puisque les Mathematiciens sont convenus entr'eux que la division ordinaire de la circonference d'un cercle seroit de 360 parties égales qu'ils ont appellées degrez ; il suit du Corollaire premier de la Proposition presente qu'un angle droit a pour mesure un arc de 90 degrez. Donc tous les angles droits sont égaux entr'eux, parcequ'ils ont chacun la même mesure. Puisqu'un angle obtus est * plus grand qu'un angle droit, il aura pour mesure un arc de cercle plus grand qu'un quart de circonference, c'est à dire, plus grand qu'un arc de 90 degrez. Enfin puisqu'un angle aigu est plus petit qu'un angle droit, il aura pour mesure un arc plus petit qu'un arc de 90 degrez.

COROLLAIRE IV.

Donc il est facile de faire un angle rectiligne égal à un autre. Soit par exemple l'angle *ABC*, & que sur la ligne *FG*, on se propose de faire un angle égal à l'angle *ABC*, & dont

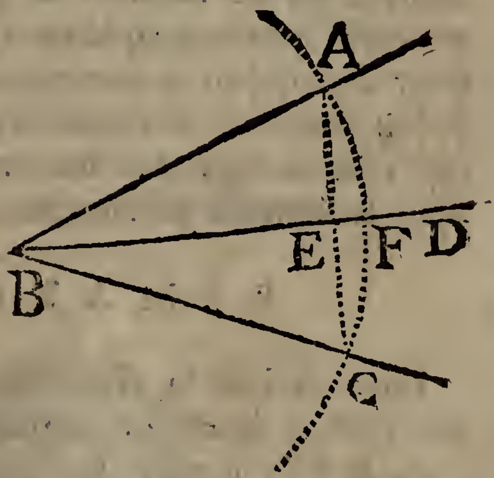


* *Déf.* 15. *Geo.*

le sommet soit au point *H*. On décrira des points *B* & *H* des arcs *D N E* & *L O M* à même ouverture de compas; ensuite on ouvrira le compas du point *E* au point *D*, & on transportera cette ouverture sur l'arc *MOL* de *M* en *L*, & enfin on menera par les points *H* & *L* la ligne *H L*: je dis que l'angle $LHG = ABC$. Car après avoir mené les cordes *E D* & *M L*, on trouve qu'elles sont égales entr'elles, l'une & l'autre étant mesurée par la même ouverture de compas. Donc * les arcs *D N E* & *L O M* sont aussi égaux entr'eux; & partant [1] $ABC = LHG$.

COROLLAIRE V.

On peut tirer de cette proposition une methode pour partager ou couper geometriquement un angle en deux parties égales. Soit l'angle *A B C*; pour le partager en deux parties égales on décrira du sommet *B*, d'une intervale ou ouverture de compas prise à volonté l'arc *A F C*. On menera la corde *A C*, ensuite on coupera [2] cette corde en deux parties égales au point *E*; & du point *B* par le point *E* milieu de cette corde,



* Cor. 2. Prop. 11. Geo. [1] Prop. pres.
[2] Cor. 3. Prop. 5. Geo.

on menera la ligne *BD* : je dis que l'angle *ABD* = *DBC* ; & partant que la question est resoluë. Car l'arc *AF* qui est [1] la mesure de cet angle *ABD* est [2] égal à l'arc *CF* mesure de l'angle *DBC*.

COROLLAIRE VI.

On trouve par le moyen du Corollaire 5e de la Proposition presente, une methode pour diviser un angle geometriquement en parties égales 4, 8, 16, &c. en continuant à diviser en deux parties égales chaque partie de cet angle.

AVERTISSEMENT.

Parcequ'on n'a pas encore trouvé une methode pour diviser un angle avec la regle & le compas en un nombre de parties égales pris à volonté, par exemple en 3, 5, 7, 9, &c. c'est pour cela qu'on se contentera d'indiquer la division suivante en forme d'observation ; car on n'y réüssira pas par des voyes geometriques, mais seulement en cherchant ou tâtonnant.

REMARQUE.

Pour diviser la circonference d'un cercle en 360 parties égales ou degrez ;

1°. Il faut diviser la circonference du cercle donné en deux parties égales entr'elles par le moyen d'un diamêtre ; chacune de ces moitiez vaudra 180 degrez, puisque le tout en vaut 360.

[1] *Prop. pres.*
[2] *Part. 3. Prop. 14. Geo.*

2°. Il faut diviſer chacune de ces moitiez en deux parties égales : chacune de ces parties égales vaudra ou contiendra 90 degrez, ce qui eſt la 4e partie de la circonference.

3°. Il faut diviſer ce quart de cercle en trois parties égales : chacune de ces parties vaudra ou contiendra 30 degrez, on tranſportera enſuite ces 3 parties ſur chacun des 3 autres quarts de cercle.

4°. Il faut diviſer une de ces dernieres parties en trois autres parties égales, dont chacune contiendra 10 degrez, & tranſporter ces mêmes parties ſur le reſte de la circonference avant que de changer l'ouverture du compas.

5°. Il faut diviſer chacune de ces dernieres parties en deux autres dont chacune comprendra 5 degrez.

6°. Enfin il faut diviſer chacune de ces dernieres parties en cinq autres parties, dont une étant tranſportée 360 fois ſur la circonference, determinera ces 360 degrez ou parties égales.

Un cercle ou une circonference de cercle diviſée de cette ſorte, ſervira d'inſtrument pour connoître non ſeulement chaque partie de toute autre circonference, mais auſſi pour connoître la grandeur des angles.

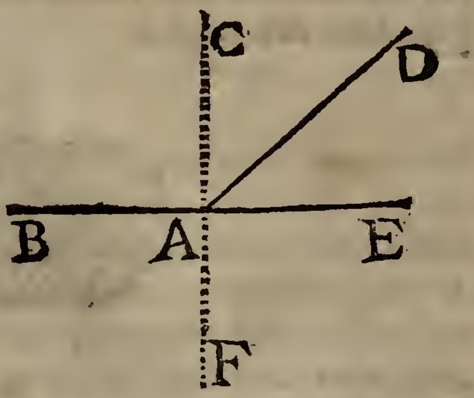
PROPOSITION XXI.

1. *Une ligne droite rencontrant une autre ligne droite, forme de part & d'autre deux angles qui sont, pris ensemble, égaux à deux droits.*
2. *Reciproquement si deux lignes droites rencontrent une autre ligne, & forment avec elle deux angles, qui, pris ensemble, soient égaux à deux droits, ces deux lignes droites qui seront particulieres à chaque angle ne formeront qu'une seule ligne droite.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

UNe ligne droite en peut rencontrer une autre en deux manieres, ou perpendiculairement ou obliquement.

Si une ligne droite en rencontre une autre perpendiculairement, il est constant qu'elle forme avec elle deux angles pris ensemble égaux à deux droits, puisque chacun est [1] droit.



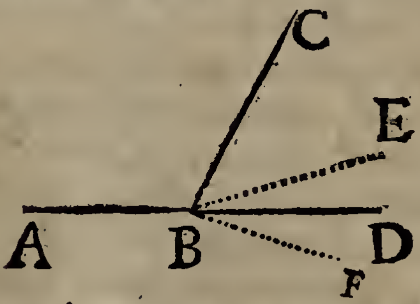
Mais si une ligne, par exemple *AD* en rencontre une autre *BF* obliquement dans le point *A*: je dis que la somme des angles *BAD* & *DAE* est égale à deux angles droits. Pour le demontrer soit me-

[1] *Déf. 14. Geo.*

née par le même point *A* la ligne *C F* perpendiculairement à *B E*; il est évident que la somme des angles *B A D* & *D A E* a la même ouverture que les deux angles droits *B A C* & *C A E* pris ensemble. Donc * les angles *BAD* & *D A E* pris ensemble sont égaux aux deux angles droits *B A C* & *C A E*, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soient les lignes droites *A B* & *D B* qui rencontrent la ligne *C B* au point *B*, de sorte que les angles *A B C* & *C B D* pris ensemble soient égaux à deux droits : je dis que ces lignes *A B* & *D B* ne seront qu'une seule ligne droite, c'est à dire que la ligne droite *A B* étant prolongée passera par *B D*, ne pouvant passer par ailleurs. Car si cette ligne droite pouvoit passer par ailleurs, ce seroit de part & d'autre de *B D*, par exemple par *B E* ou par *B F*. Si cette ligne *AB* étant prolongée passoit par *BE*, la ligne *ABE* seroit une ligne droite; & partant [1] l'angle *C B E* avec *C B A* feroit la valeur de deux angles droits. Mais [2] pareillement



l'angle *C B D* avec le même angle *C B A* fait aussi la même valeur de deux angles droits. Donc [3] l'angle *CBD* seroit égal à l'angle *C B E*, ce qui est [4] impossible. Donc la ligne *A B* étant prolongée ne peut passer par *B E*. On demon-

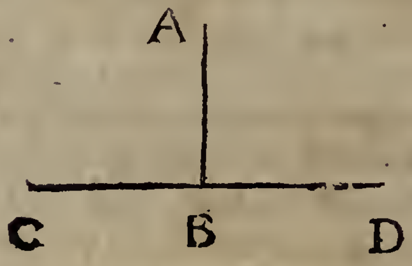
* *Cor. 2. Prop. 20. Geo.*
[1] *Part. 1. Prop. pres.* [2] *Supposit.*
[3] *Ax. 5. gener.* [4] *Ax. 2. gen.*

trera de la même maniere que *A B* étant prolongée ne peut passer par *B F*. Donc cette ligne *A B* passera par *B D*, *ce qu'il falloit demontrer.*

Il suit trois Corollaires de la premiere partie de la Proposition presente.

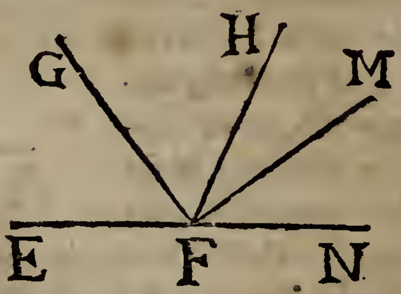
COROLLAIRE I.

Si une ligne droite, par exemple *A B*, rencontre une autre ligne droite *C D*, de sorte qu'elle forme d'une part un angle *A B C* qui soit droit; l'autre angle *A B D* sera aussi droit. Car les deux pris ensemble sont égaux à deux droits, & on en connoît déja un [1] qui est *A B C*.



COROLLAIRE II.

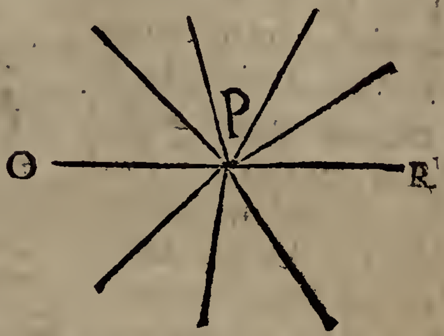
Tous les angles *E F G*, *G F H*, *H F M*, *M F N* posez du même côté d'une ligne droite, par exemple *E N*, dans un même plan, & qui ont tous le même sommet *F*, sont égaux à deux droits. Puisque [2] les angles *H F E* & *H F N* sont égaux à la somme des angles *E F G*, *G F H*, *H F M*, *M F N*; & que les angles *H F E* & *H F N* sont [3] ensemble égaux à deux droits.



[1] *Supposit.* [2] *Ax. 3. general.*
[3] *Part. 1. Prop. pres.*

COROLLAIRE III.

Donc enfin tous les angles possibles autour du même point *P* & dans un même plan sont, pris ensemble, égaux à quatre angles droits. Parceque la somme des angles posez d'un même côté de la ligne *OR* est égale à deux droits, & la somme des autres angles posez de l'autre côté de cette ligne droite est aussi égale à deux droits ; ce qui fait pour la somme totale, quatre angles droits.



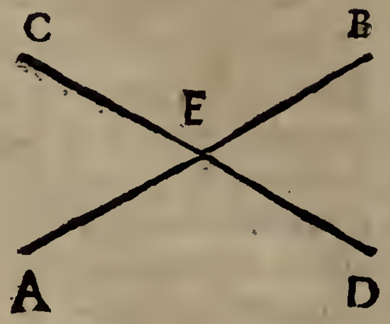
PROPOSITION XXII.

1°. *Deux lignes droites qui se coupent forment les angles opposez au sommet égaux entr'eux.*

2°. *Reciproquement si quatre lignes droites se rencontrent dans un point, de sorte que les angles opposez au sommet soient égaux entr'eux, ces quatre lignes ne seront que deux lignes droites.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soient les deux lignes droites *AB* & *CD* qui se coupent l'une l'autre dans le point *E* : je dis que les angles *AED* & *CEB* qui sont opposez au sommet sont égaux entr'eux ; & que pareillement les angles *AEC* & *DEB* aussi opposez par le sommet sont égaux entr'eux. Car l'angle *AED* & l'angle *AEC* sont [1] égaux à deux droits; pareillement l'angle *CEB* & le même angle *AEC* pris ensemble sont égaux à deux droits. Donc [2] l'angle *AED* est égal à l'angle *CEB*. Or ces deux angles sont opposez par le sommet, & on peut demontrer la même chose de la même maniere à l'égard des angles *AEC* & *DEB*. Donc les angles opposez au sommet sont égaux entr'eux, *ce qu'il falloit demontrer.*



DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soient les lignes *AE*, *DE*, *CE*, *BE* qui se rencontrent du point E, de sorte que l'angle *AEC* soit égal à l'angle *DEB* qui lui est opposé par le sommet, & que l'angle *AED* soit égal à l'angle *CEB*: je dis que les lignes *AE* & *EB*, *CE* & *ED* ne sont que deux lignes droites. Car puisque [3] l'angle $AEC = DEB$, si on ajoûte d'une part l'angle *AED* & de l'autre l'angle *CEB*, on aura [4] $AEC + AED = DEB + CEB$. Mais [5] la somme de ces quatre angles qui ont leur sommet dans le point E vaut

[1] *Part. 1. Prop. 21. Geo.* [2] *Ax. 5. gen.*
[3] *Supposit.* [4] *Ax. 4. gen.*
[5] *Cor. 3. Prop. 21. Geo.*

quatre

quatre angles droits. Donc $AEC + AED$ en vaudra la moitié, c'est à dire deux droits. Donc * les lignes CE & ED ne feront qu'une seule ligne droite. On trouvera par un raisonnement semblable au precedent que $AED + DEB = AEC + CEB$; & partant que $AED + DEB$ sont la moitié du total, c'est à dire que $AED + DEB$ sont égaux à deux droits: & que * les lignes AE & EB sont une seule ligne droite. Donc enfin ces quatre lignes ne sont que deux lignes droites, *ce qu'il falloit démontrer.*

* *Part. 2. Prop. 21. Geo.*

PROPOSITION XXIII.

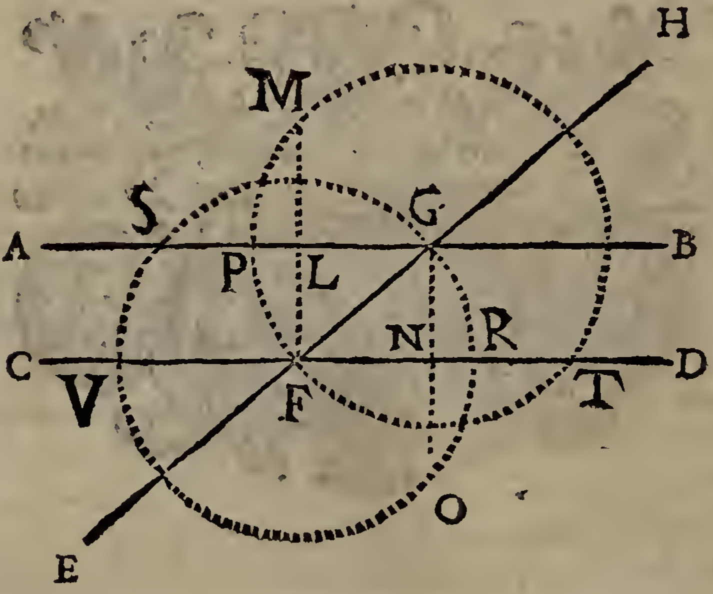
1°. *Si deux lignes paralleles ſont coupées par une troiſiéme ligne droite, les angles alternes internes ſont égaux entr'eux.*

2°. *Reciproquement ſi deux lignes droites ſont coupées par une troiſiéme, & ſi les angles alternes internes ſont égaux entr'eux; ces deux lignes droites ſeront paralleles entr'elles.*

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

DEux lignes paralleles peuvent être coupées par une troiſiéme ou perpendiculairement



ou obliquement. Si elles ſont coupées perpendiculairement, il eſt conſtant * non ſeulement

* *Part.* 1. *Prop.* 15. *Geo.*

que les angles alternes internes ſont égaux entr'eux, mais auſſi que les huit angles qui ſont formez par cette interſection ſont égaux entr'eux, chacun à chacun; Car tous les angles droits ſont [1] égaux entr'eux.

Mais ſi des lignes droites, par exemple les lignes *A B* & *C D* paralleles entr'elles, ſont coupées obliquement par la ligne *E H*; je dis que les angles *A G F* & *G F D* alternes internes ſont égaux entr'eux. Pour le démontrer, des points *F* & *G* pris pour centres & de l'intervale *F G* ſoient décrites les circonferences de cercles égales *G S V O R* & *M F T*. Enſuite du point *F* ſoit menée *F L* perpendiculaire à *A B*, & prolongée juſques en *M*; & du point *G* ſoit menée *G N* perpendiculaire à *C D*, & prolongée juſques en *O*.

Puiſque *F M* eſt [2] perpendiculaire à *G P*, reciproquement [3] *G P* eſt perpendiculaire à *F M*. Donc *G P* coupe *F M* en deux parties égales, & [4] coupe pareillement l'arc *M P F* ſoûtenu par cette corde *F M* en deux parties égales au point *P*. On dira la même choſe à l'égard de la ligne *F R*, de la corde *G O*, & de l'arc *G R O*. Mais à cauſe des paralleles *A B* & *C D*, les perpendiculaires *F L* égale à la moitié de *F M*, & *G N* égale à la moitié de *G O*, ſont [5] égales entr'elles; & [6] les cordes

[1] *Cor. 3. Prop. 20. Geo.*
[2] *Par conſtruction.*
[3] *Cor. 1. Prop. 5. Geo.*
[4] *Part. 6. Prop. 14. Geo.*
[5] *Cor. 4. Prop. 6. Geo.*
[6] *Ax. 12. general.*

entieres *GO* & *FM* sont aussi égales entre elles. Donc les arcs *FPM* & *ORG* de cercles égaux soûtenus par ces cordes égales

sont [1] égaux. Donc les moitiez *FP* & *GR* de ces arcs sont égales entr'elles, c'est à dire que les mesures des angles alternes internes *AGF* & *GFD* sont égales. Donc ces angles seront [2] égaux entr'eux. Pareillement puisque [3] l'arc *VSGR* = *PFTB* ; retranchant d'une part l'arc *GR* & de l'autre l'arc *PF*, il restera [4] l'arc *VSG* = *FTB*. L'angle obtus *VFG* sera donc [2] égal à son alterne *FGB*. Donc en general les angles alternes internes seront égaux entr'eux, *ce qu'il falloit demontrer.*

[1] *Cor.* 2. *Prop.* 11. *Geo.*
[2] *Cor.* 2. *Prop.* 20. *Geo.*
[3] *Cor.* 5. *Prop.* 14. *Geo.*
[4] *Ax.* 9. *gener.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Si une 3e ligne droite en coupe deux autres, de sorte que les angles alternes internes qu'on suppose égaux soient droits, * il est déja constant que ces lignes seront paralleles; mais si ces angles sont obliques, elles seront aussi paralleles : ce qu'on demontre de cette maniere. Soient les lignes *AB* & *CD* coupées par une 3e ligne droite *EH*, & que l'angle *AGF* soit égal à son alterne *GFD* : je dis que ces lignes *AB* & *CD* sont paralleles entr'elles. Des points G & F pris pour centres, & de l'intervale G F soient décrites des circonferences de cercles, & menées des lignes perpendiculaires de la même maniere que dans la premiere partie de la Proposition presente.

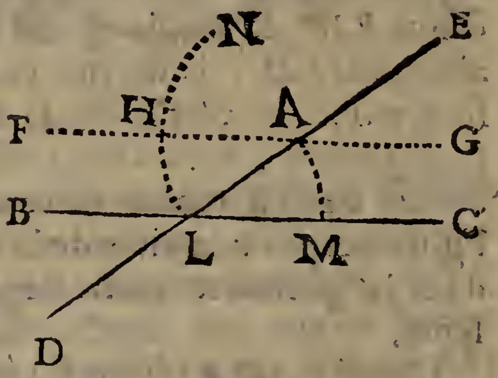
L'angle *AGF* étant [1] égal à *GFR*, l'arc *PF* mesure de l'angle *AGF*, sera égal à *GR* mesure de l'angle *GFT*. Donc [2] le double de l'arc *FP*, c'est à dire, l'arc *FPM* sera égal à *GRO* double de l'arc *GR*. Donc [3] la corde *FM* sera égale à *GO*; mais la ligne *FR* étant [4] menée perpendiculairement à *GO* partage également cette corde *GO*, & l'arc *GRO*; on dira la même chose à l'égard de la ligne *GP* de la corde *MF* & de l'arc *MPF*. Donc la perpendiculaire *GN* qui est une moitié de *GO*, sera [5] égale à la perpendiculaire *LF* qui est une moitié de *MF*. Donc

* *Part. 2. Prop. 15. Geo.* [1] *Supposit.*
[2] *Part. 6. Prop. 14. Geo. & Ax. 6. gener.*
[3] *Part. 1. Prop. 11. Geo.*
[4] *Par construction, & Cor. 1. Prop. 5. Geo.*
[5] *Ax. 12. gen.*

puisque les points *L* & *G* de la ligne *A B* sont également distans de la ligne *C D*, leur distance étant * mesurée par les perpendiculaires égales *L F* & *G N*, la position de la ligne *A B* suivra [1] celle de ses deux points *L* & *G*, c'est à dire, que *A B* sera [2] parallele à *C D*, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE.

On peut tirer de cette seconde partie une methode pour mener une ligne parallele à une autre par un point donné. Soit le point donné *A*, & que par ce point il faille mener une ligne parallele à une ligne donnée *BC*.



Il faut mener par ce point *A* la ligne droite *D E* qui coupe la ligne droite donnée *B C* au point *L*. Ensuite du point *L* pris pour centre, & de l'intervale *L A* on décrira l'arc *A M*. Du point *A* & du même intervale *A L* on décrira encore l'arc *L N* sur lequel on prendra avec un compas de *L* en *H* l'arc *L H* égal à *A M*; & par le point *H* & le point *A* on menera la ligne *F G* : je dis que cette ligne *F G* est la ligne parallele cherchée. Car les angles alternes internes *F A L* & *A L C* sont égaux entr'eux; puisque les arcs égaux *H L* &

* *Cor.* 3. *Prop.* 6. *Geo.*
[1] *Cor. Prop.* 8. *Geo.*
[2] *Déf.* 8. *Geo.*

AM en [1] sont la mesure. Donc [2] les lignes *FG* & *BC* sont paralleles.

PROPOSITION XXIV.

Si une ligne droite FE *coupe deux lignes paralleles, par exemple* AB *&* CD.

1°. *L'angle exterieur* FGB *& l'angle interieur* GHD *du même côté sont égaux entr'eux.*

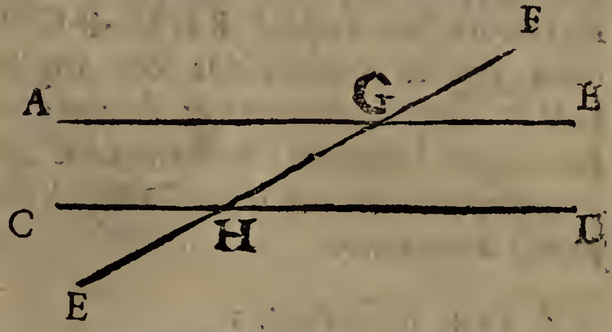
2°. *Les angles alternes externes* FGB *&* CHE *sont aussi égaux entr'eux.*

3°. *La somme des angles interieurs* BGH *&* GHD *du même côté est égale à deux angles droits.*

4°. *La somme des angles exterieurs* FGB *&* DHE *du même côté est égale à deux angles droits.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

L'Angle [3] *FGB*=*AGH*. Or [4] l'angle *GHD*=*AGH*. Donc [5] l'angle *FGB* =*GHD*.



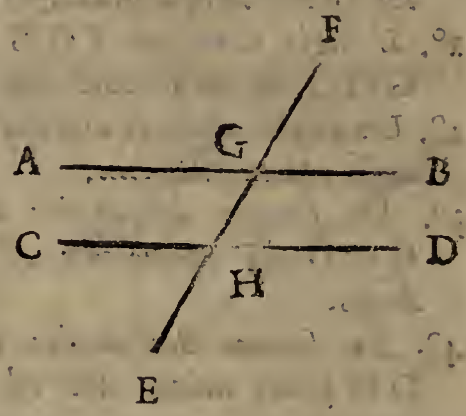
Or ces deux angles sont l'exterieur & l'interieur du même côté. Donc l'angle exterieur & l'interieur du mê-

[1] *Prop. 20. Geo.* [2] *Prop. pres. 2e Part.*
[3] *Part. 1. Prop. 22. Geo.* [4] *Part. 1. Prop. 23. Geo.*
[5] *Ax. 18. gen.*

même côté sont égaux entr'eux, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

L'angle * *FGB*=*GHD*. Or [1] l'angle *CHE*= *GHD*. Donc [2] l'angle *FGB* = *CHE*. Or ces deux angles sont alternes externes. Donc les angles alternes externes sont égaux entr'eux, *ce qu'il falloit demontrer.*



DEMONSTRATION
DE LA TROISIÉME PARTIE.

[3] La somme des angles *FGB* & *BGH* est égale à deux angles droits; au lieu de l'angle *FGB*, prenant [4] son égal * *GHD*, on aura encore les angles *BGH* + *GHD* égaux à deux angles droits. Or ces angles *BGH* & *GHD* sont interieurs & du même côté. Donc les angles interieurs & du même côté, pris ensemble, sont égaux à deux angles droits, *ce qu'il falloit demontrer.*

* *Prop. pres. Part.* 1.
[1] *Part.* 1. *Prop.* 22. *Geo.*
[2] *Ax.* 18. *general.*
[3] *Part.* 1. *Prop.* 21. *Geo.*
[4] *Demande* 1. *gen.*

DEMONSTRATION
DE LA QUATRIE'ME PARTIE.

L'angle *DHE* & l'angle *DHG*, pris ensemble, sont [1] égaux à deux angles droits; au lieu de l'angle *DHG*, prenant [2] son égal [3] *FGB*, on aura les angles *FGB* & *DHE*, pris ensemble, égaux à deux droits. Or ces angles *FGB* & *DHE* sont exterieurs & du même côté. Donc la somme des angles exterieurs & du même côté, est égale à deux angles droits, *ce qu'il falloit demontrer.*

AVERTISSEMENT.

Ce qu'on vient de demontrer dans la Proposition precedente, & ce qu'on demontrera dans la suivante, touchant les angles *AGH* & *GHD*; *FGB* & *CHE*; *BGH* & *GHD*; *FGB* & *CHE*; on le demontrera tres-facilement, & on concluëra la même chose par le même raisonnement à l'égard des angles *CHG*; *HGB*; *AGF*, *EHD*; *AGH*, *CHG*; *AGF*, *CHE*.

[1] *Part.* 1. *Prop.* 21. *Geo.*
[2] *Demande* 1. *gen.*
[3] *Prop. pres. Part.* 1.

PROPOSITION XXV.

Si deux lignes droites, par exemple AB *&* CD, *sont coupées par une troisiéme ligne droite* EF, *de sorte qu'il arrive,*

1°. Ou que les angles exterieur & interieur du même côté FGB *&* GHD *soient égaux entr'eux;*

2°. Ou que les angles alternes externes FGB *&* CHE *soient égaux entr'eux;*

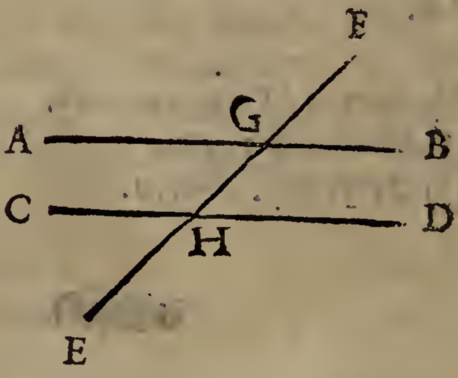
3°. Ou que la somme des angles interieurs du même côté BGH *&* GHD *soit égale à deux angles droits;*

4°. Ou enfin que la somme des angles exterieurs du même côté FGB *&* DHE *soit égale à deux angles droits:*

Les lignes AB *&* CD *seront paralleles l'une à l'autre.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

L'angle *GHD* est * égal à l'angle *FGB*; mais l'angle *AGH* est [1] aussi égal au même angle *FGB*. Donc [2] l'angle *AGH* sera égal à l'angle *GHD*. Donc



* *Supposit.* [1] *Part.* 1. *Prop.* 22. *Geo.*
[2] *Ax.* 18. *general.*

* les lignes *A B* & *C D* seront paralleles entr'elles, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

L'angle *F G B* & l'angle *C H E* sont [1] égaux entr'eux. Donc au lieu de l'angle *F G B* en prenant [2] son [3] égal *A G H*; & au lieu de l'angle *C H E* prenant son [3] égal *G H D*: on trouvera les angles alternes internes *AGH* & *GHD* égaux entr'eux. Donc * les lignes *A B* & *C D* seront paralleles entr'elles, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE.

L'angle *D H G* joint avec l'angle *B G H* fait [1] la valeur de deux angles droits. Or l'angle *A G H* joint avec le même angle *B G H* fait aussi la même valeur de deux angles droits. Donc [5] l'angle *A G H* sera égal à l'angle *D H G*. Donc * les lignes *A B* & *C D* sont paralleles, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION DE LA QUATRIE'ME PARTIE.

L'angle *F G B* joint avec l'angle *D H E* fait [1] la valeur de deux angles droits. Au lieu de l'angle *F G B*, si [2] on prend son [3] égal *AGH*, on trouvera aussi que l'angle *A G H* joint à l'angle *E H D* fera la valeur de deux angles droits. Mais [4] l'angle *G H D* joint avec l'angle *E H D*

* *Part. 2. Prop. 23. Geo.* [1] *Par supposit.* [2] *Deman. 1. gen.* [3] *Part. 1. Prop. 22. Geo.* [4] *Part. 1. Prop. 21. Geo.* [5] *Ax. 5. gen.*

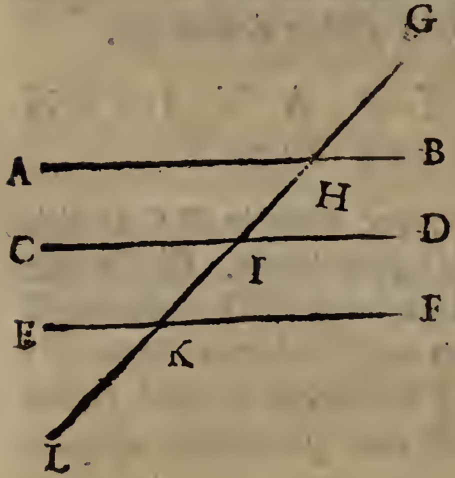
fait aussi la valeur de deux angles droits. Donc [1] l'angle *AGH* est égal à l'angle *GHD*; & partant [2] les lignes *AB* & *CD* sont paralleles entr'elles, *ce-qu'il falloit demontrer.*

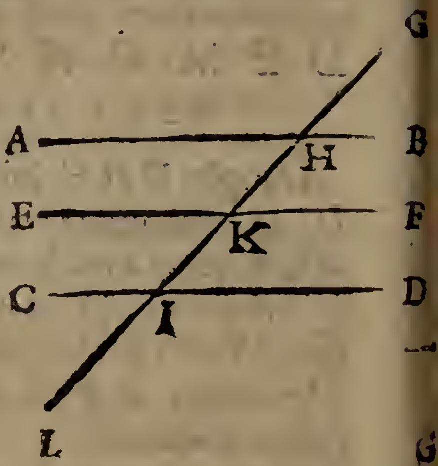
PROPOSITION XXVI.

Les lignes paralleles à une 3e sont paralleles entr'elles.

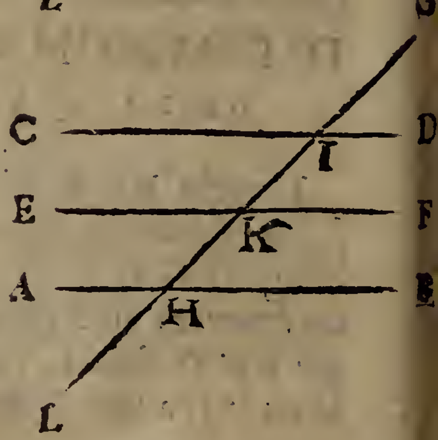
DEMONSTRATION.

Soient les lignes *AB* & *EF* paralleles à une une troisiéme ligne *CD*; je dis que *AB* &





EF sont paralleles entr'elles. Car puisque *AB* est [3] parallele à *CD*, on aura [4] l'angle *GHB* égal à l'angle *GID*. Pareillement puisque [4] la ligne *EF* est parallele à *CD*,



[1] *Ax. 5. gen.* [2] *Part. 2. Prop. 23. Geo.*
[3] *Supposit.* [4] *Part. 1. Prop. 24. Geo.*

l'angle

l'angle *G K F* eſt [1] égal au même angle *G I D*
Donc [2] l'angle *G H B* eſt égal à l'angle *G K F*.
Donc [3] la ligne *A B* eſt parallele à *E F*, *ce qu'il falloit demontrer.*

PROPOSITION XXVII.

Si un angle a le ſommet poſé dans la circonference d'un cercle, & s'il eſt compris par deux lignes qui coupent cette circonference, ou par une ligne qui la coupe & l'autre qui la touche ; il a pour ſa meſure la moitié de l'arc qui eſt compris entre ſes côtez.

DEMONSTRATION.

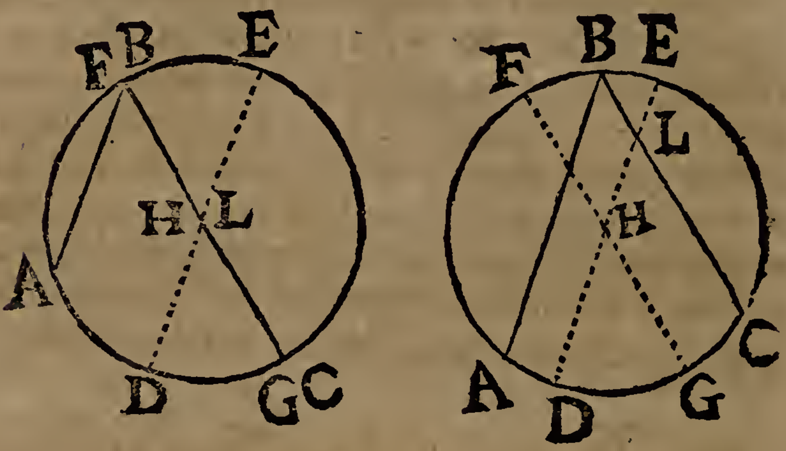
PREMIERE CIRCONSTANCE.

SI un angle, par exemple *A B C*, a ſon ſommet *B* poſé dans la circonference d'un cercle, & eſt formé par deux lignes *A B* & *B C* qui coupent cette circonference, de ſorte que le centre ſe trouve ſur une de ces lignes, ou entre ces mêmes lignes, la Demonſtration de la Propoſition preſente eſt telle. Soient menées les lignes *D E* & *F G* par le centre parallelement aux deux autres lignes *A B* & *B C* qui comprennent cet angle.

[4] L'angle *D H G* = *F H E*. Donc [5] l'arc *DG*

[1] *Part.* 1. *Prop.* 24. *Geo.* [2] *Ax.* 18. *gener.*
[3] *Part.* 1. *Prop.* 25. *Geo.*
[4] *Part.* 1. *Prop.* 22. *Geo.*
[5] *Part.* 2. *Cor.* 2. *Prop.* 20. *Geo.*

$= FE$; mais [1] l'arc $FB = GC$, & l'arc $BE = AD$. Donc au lieu de FE, c'est à dire de $FB + BE$, on peut prendre ce qui y est égal, sçavoir $AD + GC$. Donc l'arc $DG = AD + GC$.



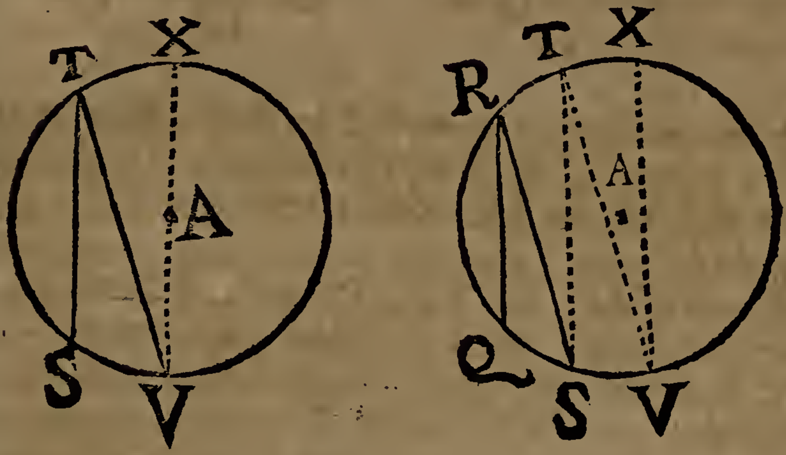
Donc puisque $AD + GC = DG$, l'arc DG sera la moitié de AC. Car lorsqu'une grandeur est partagée en deux parties telles que l'une est égale à l'autre, chacune de ces deux parties est la moitié du tout. Mais l'angle DHG a pour mesure cet arc DG : ce même angle $DHG = DLC = ABC$ [2]. Donc l'angle ABC qui a son sommet dans la circonference, aura la même mesure, sçavoir DG, c'est à dire la moitié de l'arc AC sur lequel il est appuyé, *ce qu'il falloit demontrer.*

SECONDE CIRCONSTANCE.

Un angle peut avoir son sommet dans la circonference, & être formé par deux lignes qui coupent cette circonference de telle ma-

[1] *Cor. 2. Prop. 15. Geo.*
[2] *Part. 1. Prop. 24. Geo.*

niere que le centre du cercle n'eſt ſur une des lignes qui comprennent l'angle, ni entre ces mêmes lignes : tel eſt l'angle *S R Q*. Alors il faut mener par le point *S* où le côté le plus proche du centre *A* coupe la circonference, une ligne parallele à l'autre côté *QR* de l'angle; & par l'autre point *T* où cette derniere parallele coupera la circonference, il faut (s'il eſt neceſſaire) mener encore une ligne *T V* parallele au côté *R S* de l'angle le plus proche du centre *A*. Il faut continuer ainſi alternativement juſqu'à ce que le centre ſe trouve entre deux de ces dernieres lignes paralleles ou ſur une de ces mêmes lignes.



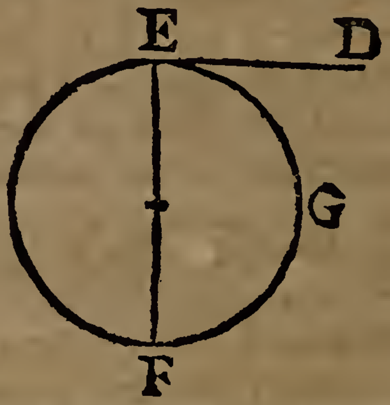
Il eſt évident [1] que l'angle *T V X*, par exemple, a pour ſa meſure $\frac{1}{2}$ *T X*. Mais les [2] arcs *T X*, *S V*, *R T*, *Q S*, &c. ſont égaux entr'eux, & [3] tous les angles *T V X*, *S T V*, *T S R*, *Q R S*, &c. ſont égaux entr'eux, parcequ'ils ſont alternes & entre paralleles. Or ces

[1] *On le vient de demontrer.*
[2] *Cor.* 2. *Prop.* 15. *Geo.*
[3] *Part.* 1. *Prop.* 23. *Geo,*

angles égaux ont des mesures égales. Puisque l'angle *TVX* a pour sa mesure $\frac{1}{2}$ *TX*, l'angle *QRS* qui lui est égal, aura aussi pour sa mesure $\frac{1}{2}$ *TX* $=$ $\frac{1}{2}$ *QS*. Donc l'angle *QRS* aura pour mesure $\frac{1}{2}$ *QS*, *ce qu'il falloit demontrer.*

TROISIE'ME CIRCONSTANCE.

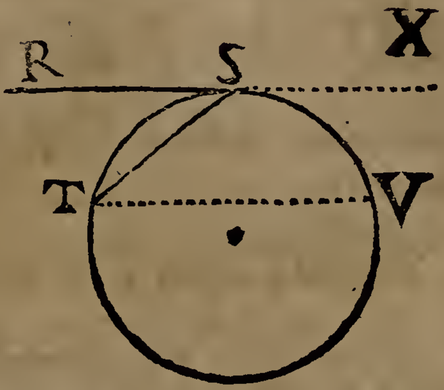
Si un angle, par exemple *DEF*, a son sommet posé dans la circonference, & est formé par une touchante *DE* & une autre ligne *EF* qui passe par le centre; il est évident que la mesure de cet angle *DEF* est [1] la moitié de l'arc ou de la demie circonference *EGF* comprise entre ses côtez, puisque l'angle [2] *DEF* est droit.



Mais si un angle, par exemple *RST*, est formé par une ligne *RS* qui touche, & par une autre *ST* qui coupe la circonference, de sorte que le centre du cercle ne soit pas entre les côtez de cet angle, ni sur un de ces côtez; il faut mener par le point *T* la ligne *TV* parallele-

[1] *Cor.* 1. *Prop.* 20. *Geo.*
[2] *Prop.* 12. *Geo.*

le à la touchante *RS*. On vient de demontrer que l'angle *STV* a pour mesure $\frac{1}{2} SV = * \frac{1}{2} ST$.



Or [1] l'angle *RST* $= STV$. Donc l'angle *RST* aura pour sa mesure la moitié de l'arc *ST* compris entre ses côtez, *ce qu'il falloit demontrer.*

Si le centre du cercle se rencontroit entre les côtes de l'angle, comme il arrive à l'égard de l'angle *TSX* dont le sommet *S* est posé sur la circonference, & qui est formé par une touchante & une ligne qui coupe la circonference, sa mesure sera $\frac{1}{2} TVS$. Car les angles *TSX* & *TSR*, pris ensemble, sont [2] égaux à deux droits. Donc ils ont [3] pour mesure la moitié de la circonference *STV*, c'est à dire [4] la moitié de $ST + TVS$; mais l'angle *RST* a déja pour sa mesure $\frac{1}{2} TS$. Donc l'angle *TSX* aura pour sa mesure la moitié du reste qui est l'arc *TVS* compris entre ses côtez, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

Donc tous les angles *ABC*, *ADC*, *AEC*,

* *Cor.* 3. *Prop.* 15. *Geo.* [1] *Part.* 1. *Prop.* 23. *Geo.*
[2] *Part.* 1. *Prop.* 21. *Geo.* [3] *Cor.* 1. *Prop.* 20. *Geo.*
[4] *Ax.* 3. *general.*

&c. (quelque nombre qu'il y en ait) qui ont leur pointe ou ſommet dans une même circonference de cercle, & qui ſont appuyez ſur un même arc *A C* ſont [1] tous égaux entr'eux ; parcequ'ils ont [2] tous la même meſure, ſçavoir la moitié du même arc *A C*.

COROLLAIRE II.

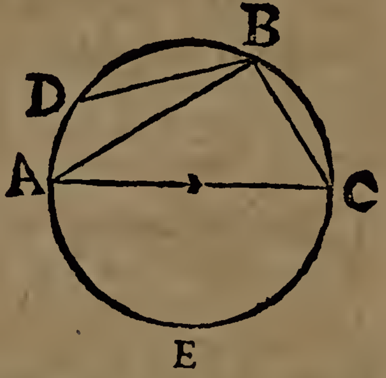
Non-ſeulement les angles qui ſont appuyez ſur le même arc, & qui ont leur ſommet dans la même circonference ſont égaux entr'eux ; mais auſſi les angles qui ſont appuyez ſur des arcs égaux, & qui ont leur ſommet dans la même circonference, ſont pareillement égaux entr'eux. Si l'arc *A C*, par exemple, eſt égal à l'arc *D F* ; l'angle *A B C* ayant [2] pour ſa meſure la moitié de cet arc *A C*, & l'angle *D E F* ayant pour meſure la moitié de l'arc *D F* ; & puiſque [3] $\frac{1}{2}$ *A C* = $\frac{1}{2}$ *D F*: ces deux angles *ABC* & *DEF* auront [2]

[1] *Cor. 2. Prop. 20. Geo.* [2] *Prop. preſ.*
[3] *Ax. 12. gen.*

pour mesure des arcs égaux. Donc ils seront pareillement égaux entr'eux.

COROLLAIRE III.

Un angle, par exemple *ABC*, dont le sommet *B* est dans la circonference d'un cercle, & qui est appuyé sur la moitié de la circonference de ce cercle, est un angle droit. Parceque cet angle a [1] pour sa mesure la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé, ou qui est compris entre ses côtez, c'est à dire la moitié de la demie circonference *AEC*. Or la moitié d'une demie circonference est un quart de circonference, mesure [2] d'un angle droit. Donc l'angle *ABC* sera droit.



COROLLAIRE IV.

L'angle *DBC* qui a son sommet dans la circonference; & qui est appuyé sur un arc plus grand qu'une demie circonference de cercle est obtus. Parceque cet angle comprenant entre ses côtez un arc *DAEC* plus grand qu'une demie circonference de cercle, aura pour sa mesure la moitié de cet arc *DAEC*. Or [3] $\frac{1}{2} DAEC > \frac{1}{2} AEC$, c'est à dire que cet angle

[1] *Prop. pres.* [2] *Cor. 1. Prop. 20. Geo.*
[3] *Ax. 11. gen.*

DBC aura pour ſa meſure un arc plus grand qu'un quart de cercle. Donc ce même angle *DBC* ſera [1] un angle obtus.

COROLLAIRE V.

Donc l'angle *BAC* qui a auſſi ſon ſommet poſé dans la circonference du cercle, & qui comprend entre ſes côtez l'arc *BC* plus petit qu'une demie circonference de cercle, ſera un angle aigu. Parceque cet angle *BAC* aura pour ſa meſure un arc plus petit qu'un quart de circonference de cercle.

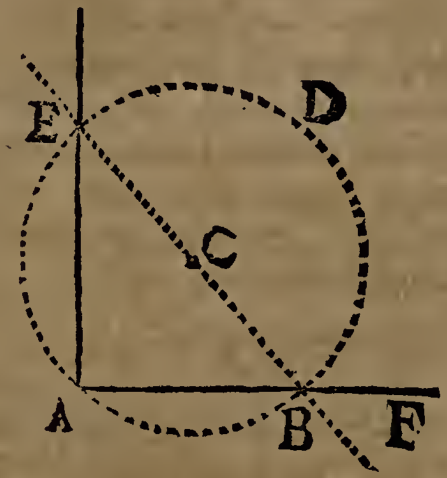
COROLLAIRE VI.

Enfin ſi deux angles, par exemple *ABC* & *ADC*, ſont appuyez ſur le même arc, par exemple *AC*, & ſi le ſommet B d'un, ſçavoir de l'angle *ABC*, eſt dans le centre d'un cercle, & le ſommet *D* ou pointe de l'autre *ADC* eſt dans la circonference du même cercle; il ſuit neceſſairement que celui qui ſera poſé dans le centre du cercle, ſera double de celui dont le ſommet ſera dans la circonference. Parceque l'angle du centre aura [2] pour ſa meſure tout l'arc ſur lequel il eſt appuyé, & l'angle dont le ſommet eſt dans la circonference, a * pour ſa meſure ſeulement la moitié de ce même arc ſur lequel il eſt appuyé.

[1] *Cor. 3. Prop. 20. Geo.* [2] *Prop. 20. Geo.*
* *Prop. pref.*

COROLLAIRE VII.

On peut tirer de la propoſition preſente une methode pour mener une ligne perpendiculairement à une autre ligne par un point pris dans cette autre ligne.



Soit par exemple le point *A*, extrêmité de la ligne *AF*, par lequel il faille mener une ligne perpendiculaire à cette ligne *AF*. Il faut mettre un pied du compas dans ce point donné *A*, & l'autre pied du compas dans un autre point pris à volonté hors la ligne donnée *AF*, par exemple en *C*. Enſuite de l'intervale *CA* on décrira une circonference de cercle *A*B*DE*, de ſorte qu'elle coupe la ligne donnée *AF* dans les points *A* & B. Par ce point B & par le centre *C* on menera la ligne droite B*C* qui coupera la circonference au point *E*. Par ce point *E* & par le point donné *A* on menera la ligne *AE* : je dis que cette *AE* eſt la perpendiculaire qu'on cherchoit.

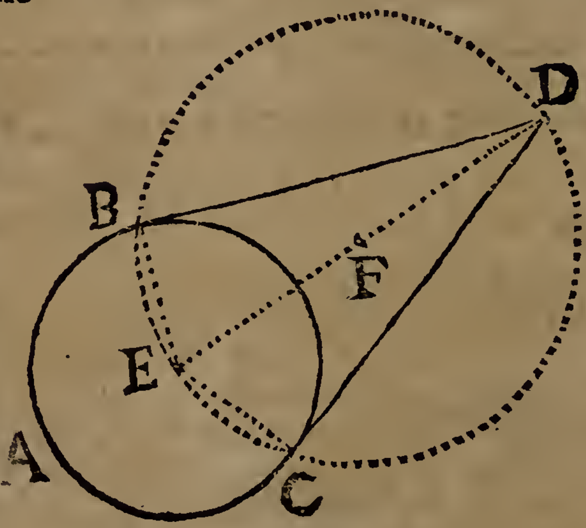
Car la ligne B*E* paſſant par le centre *C* eſt un diametre du cercle, & partant l'angle B*AE* ſera * appuyé ſur une demie circonference, dont [1] il aura la moitié pour meſure. Donc cet angle B*AE* ſera (2) droit. Donc 3] la ligne

* *Cor.* 5. *Prop.* 14. *Geo.* [1] *Cor.* 3. *Prop. preſ.*
[2] *Cor.* 1. *Prop.* 20. *Geo.* [3] *Déf.* 14. *Geo.*

A E sera perpendiculaire à *AF*. C'est du Corollaire present dont j'ai fait mention à la fin du Corollaire 2 de la Proposition 5^e de cette Geometrie.

COROLLAIRE VIII.

On a enseigné [1] une methode pour mener une touchante à une circonference de cercle par un point donné dans cette circonference. Mais si le point donné est hors du cercle, on tirera de la Proposition presente, une



methode pour mener une touchante à la circonference de ce cercle. Soit par exemple le point donné *D* hors la circonference *A* B *C*, & que par ce point il faille mener une touchante à la circonference *A*BC. Du point donné *D* on menera au centre E du cercle donné la ligne droite *D E*. Ensuite on prendra cette ligne *D E* pour un diamêtre, en décrivant de son milieu *F*, & de l'intervale *F E* ou *F D* la circonference B *E C D*. Enfin du point *D* au point B ou *C* où cette derniere circonference coupe la premiere, on menera la ligne *D B* ou *D C* : je dis qu'au lieu

[1] *Cor. 4. Prop. 12. Geo.*

d'une touchante menée du point donné *D* à la circonference donnée *ACB*, on en a deux, sçavoir *DB* & *DC*. Car aprés avoir mené aux points *B* & *C* les rayons *EB* & *EC*, on connoîtra [1] que les angles *DBE* & *DCE* sont des angles droits; puisque chacun de ces angles est appuyé sur une demie circonference *ECD* ou *EBD*. Ces lignes *DB* ou *DC* sont donc [2] les touchantes cherchées.

PROPOSITION XXVIII.

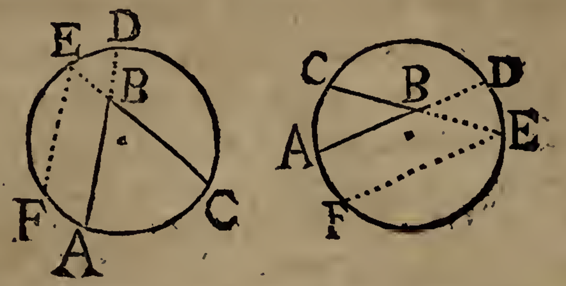
Un angle dont le sommet est posé entre le centre & la circonference d'un cercle, a pour sa mesure la moitié de la somme faite de l'arc sur lequel il est appuyé, & de l'arc sur lequel est appuyé l'angle opposé par le sommet.

DEMONSTRATION.

Soit l'angle *ABC* dont le sommet *B* soit posé entre le centre & la circonference du cercle *ACDE*: je dis que cet angle *ABC* a pour sa mesure la moitié de la somme faite des arcs *AC* sur lequel il est appuyé, & *ED* sur lequel est appuyé celui qui lui est opposé au sommet. Pour le demontrer soient prolongées les lignes *AB* & *CB* qui comprennent cet angle, jusqu'à la rencontre de la circonference en *D* & en *E*. Ensuite d'un de ces points *D* ou *E* soit menée une ligne *EF* qui coupe la circonference, & qui soit parallele à un des côtez *BA*, ou *BC* de l'angle. Alors

[1] *Cor. 3. Prop. pres. page 331.*
[2] *Part. 1. de la prop. 12. Geo. page 264.*

l'angle *FEC* a [1] pour sa mesure la moitié de l'arc *FAC* = *FA* + *AC*. Or [2] l'arc *FA* = *ED*.



Au lieu de *FA*, si je prens *ED*, je trouverai que l'angle *FEC* aura pour sa mesure la moitié de *AC* + *ED*. L'angle *FEC* = *ABC* [3]. L'angle *ABC* aura donc aussi pour sa mesure la moitié de *AC* + *ED*.

L'angle *ABE* ou [4] son égal *CBD*, aura aussi pour sa mesure la moitié de la somme des arcs *AFE*+*CD*. Car [5] les angles *ABC* & *ABE* sont égaux à deux angles droits. La mesure de ces deux angles pris ensemble, est donc la moitié de la circonference de cercle *ACDEF*. Or [6] la moitié de cette circonference est la moitié des arcs *AC*, *CD*, *DE*, & *EFA* qui la composent. Je viens de trouver que l'angle *ABC* a déja pour sa mesure la moitié de la somme des arcs *AC* + *ED*. L'angle *CBD* a donc pour sa mesure la moitié du reste, c'est à dire la moitié de *CD* sur lequel il est appuyé, & de l'arc *EFA* sur lequel est appuyé l'angle qui est opposé par le sommet.

En general tout angle, par exemple *ABC* dont le sommet *B* est posé entre le centre & la

[1] *Prop.* 27 *Geo. p.* 325.
[2] *Cor.* 2. *Prop.* 15. *Geo. p.* 287.
[3] *Part.* 1. *Prop.* 24. *Geo. p.* 319.
[4] *Part.* 1. *Prop.* 22. *Geo. p.* 311.
[5] *Part.* 1. *Prop.* 21. *Geo. p.* 30[illegible].
[6] *Ax.* 3. *Gen. p.* 3.

circonference d'un cercle, soit que ce centre soit entre les côtez ou non, a donc pour sa mesure la moitié de la somme faite de l'arc *AC* sur lequel il est appuyé & de l'arc *ED* sur lequel est appuyé l'angle *EBD* opposé au precedent par le sommet, *Ce qu'il falloit demontrer.*

REMARQUE.

Quand les côtez d'un angle rectiligne rencontrent une circonference de cercle, le sommet de cet angle peut être en 4 principales positions. Nous venons de voir quel arc de cet circonference on doit prendre, premierement pour être la mesure de l'angle qui a son sommet posé dans le centre du cercle [1]; secondement, pour être la mesure de celui qui a son sommet posé dans la circonference [2]; troisiémement, pour être la mesure de celui qui a son sommet posé entre le centre & la circonference [3]. Il reste encore à demontrer quelle est la mesure de cet angle lorsqu'il a son sommet posé hors d'un cercle, ce qui sera determiné évidemment dans la proposition suivante.

PROPOSITION XXIX.

1. *Si le sommet d'un angle est posé hors d'un cercle, & si ses deux côtez rencontrent la circonference de ce cercle; sa mesure sera la moitié de l'excès dont l'arc compris entre ses côtez & plus éloigné de son sommet, surpasse l'arc compris entre ces mêmes côtez & plus près de son sommet.*
2. *Lorsqu'il y a plusieurs angles appuyez sur le même arc; celui qui a son sommet posé entre le centre*

[1] *Prop.* 20. *Geo. page* 301.
[2] *Prop.* 27. *Geo. page* 325. [3] *Prop. pres.*

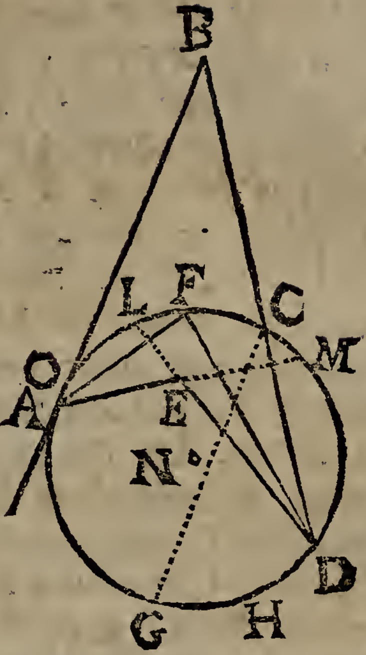
& la circonference est plus grand que celui qui a son sommet posé sur la circonference ; & celui qui a son sommet posé sur la circonference, est plus grand que celui qui a son sommet posé hors le cercle.

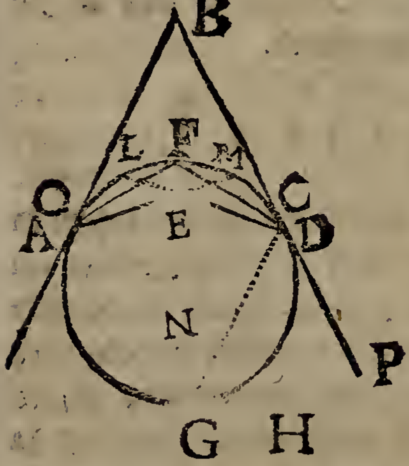
DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit l'angle *ABD* dont le sommet *B* est posé hors le cercle *AGDCO*, & dont les deux côtez touchent, ou coupent la circonference de ce cercle; ou enfin dont un côté la touche & l'autre la coupe : je dis que la mesure de l'angle *ABD* est la moitié de l'excès dont l'arc *AGHD* compris entre les côtez *BA* & *BD* surpasse l'arc *OC* compris entre ces mêmes côtez, & qui est le plus proche du sommet *B*. Pour le demontrer, il faut mener par un des points où les côtez de l'angle *ABD* rencontrent cette circonference, par exemple par le point *C*, la ligne *CG* parallele à l'autre côté *BA*. Si de l'arc *AGHD* je retranche l'arc $AG = OC$ [1], je trouverai [2] que l'arc *GHD* est l'excès dont cet arc *AGHD* surpasse l'arc *OC*. Mais la moitié de cet arc *GHD* est [3] la mesure de l'angle *GCD*, ou de *GCP* si *BD* est touchante, & [4] l'angle $GCD = ABD$. L'angle *ABD* a donc aussi pour sa mesure la moitié de l'arc *GHD*, c'est à dire la moitié de l'excès dont l'arc *AGD* surpasse l'arc *OC*, *ce qu'il falloit demontrer.*

[1] *Cor. 2. ou 3, Prop. 15. Geo. p. 287.*
[2] *Déf. 2. d'Alg. p. 59.*
[3] *Prop. 27. Geo. p. 325.*
[4] *Part. 1. Prop. 24. Geo. p. 319.*

DEMONSTRATION





DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

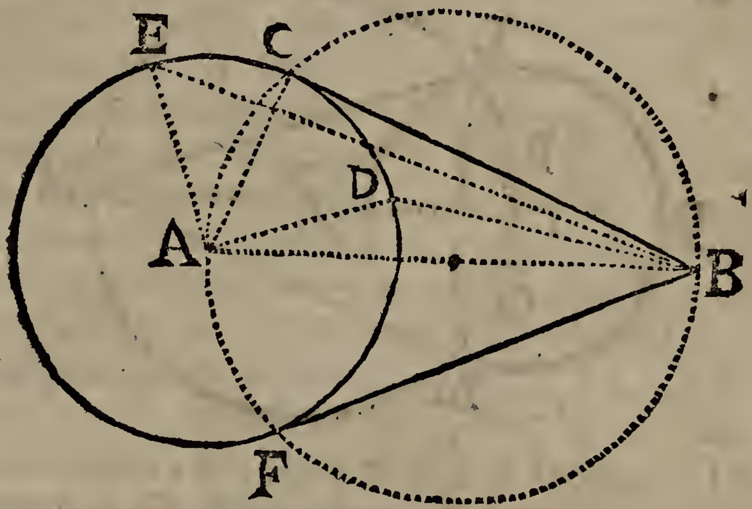
Soient les angles *ABD*, *AFD* & *AED* appuyez ſur le même arc *AGD*; le ſommet *E* de l'angle *AED* ſoit poſé entre le centre *N* & la circonference *AGDF*; le ſommet *F* de l'angle *AFD* poſé ſur la circonference même, & le ſommet *B* de l'angle *ABD* poſé hors le cercle : je dis 1° que l'angle *AED* est plus grand que *AFD* ; 2° que cet angle *AFD* est plus grand que *ABD*. Pour le demontrer soient prolongez les côtez *AE* & *DE* de l'angle *AED* jusqu'aux points *L* & *M* où ils rencontrent la circonference. L'angle *AED* a * pour sa mesure la moitié de l'arc *AGHD* & encore la moitié de l'arc *LM*. L'angle *AFD* a [1] pour sa mesure seulement la moitié de l'arc *AGHD*. Donc [2] l'angle *AED* est plus grand que l'angle *AFD*. Or l'angle *AFD* qui a pour sa mesure la moitié de l'arc *AGHD* est plus grand que l'angle *ABD*, qui a seulement pour sa mesure [3] la moitié de l'arc *GHD* partie de l'arc *AGHD* ; & partant l'angle $AFD > ABD$. Donc [4] enfin l'angle $AED > AFD > ABD$, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

D'un point pris hors d'un cercle on ne peut mener que deux touchantes à ce cercle. Car du point *B*, par exemple, pris hors le cercle *FDCE* après avoir mené les deux touchantes *BC* & *BF*, si on en pouvoit mener une 3e, il faudroit la mener d'une part ou d'autre de la ligne *AB*, ou vers *F* ou vers *C* : si on la pouvoit mener vers *C*, il faudroit encore necessairement la mener de part ou d'autre, par exemple en *E* ou en *D*. Or la ligne *BE* ne peut être touchante, ni la ligne *BD*. Car après avoir mené les rayons *AE* & *AD*, cette ligne *BE* fait

* *Prop. 28. Geo.* [1] *Prop. 27. Geo.*
[2] *Cor. 2. Prop. 20. Geo.* [3] *Part. 1. Prop. pres.*
[4] *Ax. 22. gen.*

* avec le rayon *AE* l'angle aigu *BEA*, qui eſt appuyé ſur l'arc *AFB*, & la ligne *BD* fait avec le rayon *AD* l'angle *BDA* obtus, étant plus grand que l'angle droit *BCA*. Or ſi ces lignes étoient touchantes, elles feroient [1] avec le rayon mené du centre à leurs points d'attouchement, des angles droits. Donc ces



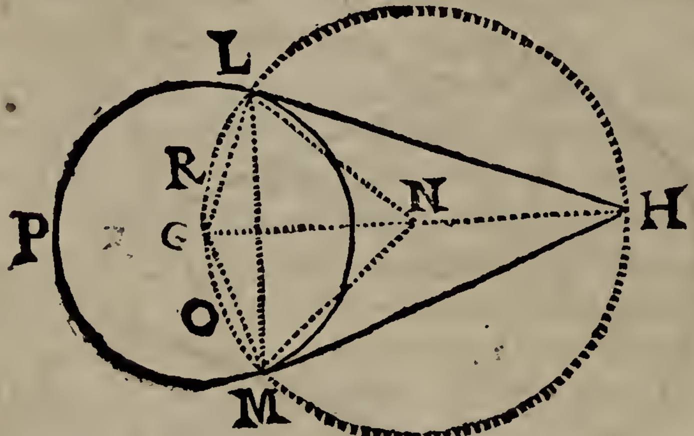
lignes ne ſont point touchantes. On fera le même raiſonnement à l'égard de toutes les autres lignes droites menées du point *B* à la circonference *FDCE*. Ne pouvant donc mener de ce point *B* trois touchantes à cette circonference, à plus forte raiſon on n'en pourra pas mener 4 ou 5, puiſque ces nombres renferment le nombre 3.

COROLLAIRE II.

D'un même point pris hors d'un cercle, les deux touchantes qu'on peut [2] mener de ce

* *Prop. preſ. & déf.* 16. *Geo.*
[1] *Prop.* 12. *Geo.*
[2] *Cor.* 1. *Prop. preſ.*

point à ce cercle seront égales entr'elles. Soient les deux touchantes *H L* & *H M* menées du point *H* à la circonference *P M L* : je dis qu'elles sont égales entr'elles. La ligne menée de ce point *H* au centre *G* de la circonference *P M L* est perpendiculaire au milieu de la ligne *L M*.

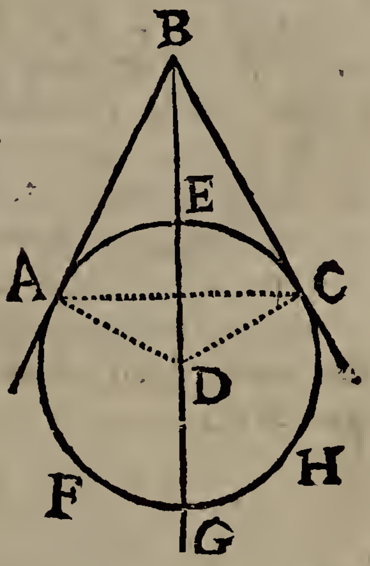


Car les rayons *N L* & *N M*, égaux entr'eux, sont menez du point *N* centre de la circonference *M H L* aux extrêmitez *L* & *M* de la ligne *L M*, qui sont aussi extrêmitez des touchantes *H L* & *H M*. Pareillement les rayons *G L* & *G M* sont égaux entr'eux, étant menez du centre G de la circonference *M L P* aux mêmes extrêmitez *L* & *M* de la ligne *L M*. La ligne *H* G aura donc le point *N* & le point G également distans des extrêmitez *L* & *M* de la ligne *L M*. Donc *H* G sera * perpendiculaire au milieu de *L M*. Donc le point *H* sera (1) aussi également distant des mêmes points *L* & *M*. Donc les touchantes *H L* & *H M* seront égales entr'elles.

* *Prop. 5. Geo.*
(1) *Prop. 3. Geo.*

COROLLAIRE III.

Une ligne menée par le ſommet d'un angle compris entre deux lignes qui touchent la circonference d'un cercle, & par le centre de ce cercle, partage cet angle en deux parties égales. Soit l'angle compris entre les deux touchantes *BA* & *BC* : je dis que la ligne *B*G menée par le ſommet *B* de cet angle, & par le centre *D* du cercle *A*G*C E* partagera l'angle *ABC* en deux parties égales, c'eſt à dire que l'angle *AB*G = G*B C*. Car les touchantes *BA* & *BC* ſont * égales entr'elles. Les lignes *D A* & *D C* ſont [1] auſſi égales entr'elles. Donc la ligne *B*G a deux de ſes points *B* & *D* qui ſont également diſtans des points extrêmes *A* & *C* de la ligne *A C*. Donc [2] cette ligne *B* G eſt perpendiculaire à *AC*. Donc [3] cette ligne *B* G partage l'arc *A E C* en deux parties égales, & partage auſſi l'arc *A* G *C* en deux parties égales. Mais l'angle *A B* G a [4] pour ſa meſure la moitié de l'excès dont l'arc *A F* G ſurpaſſe l'arc *A E* ; & l'angle G *B C* a pour ſa meſure la moitié de



* *Cor. 2. Prop. preſ.* [1] *Cor. 1. déf. 29. Geo.*
[2] *Prop. 5. Geo.* [3] *Part. 2. Prop. 14. Geo.*
[4] *Part. 1. Prop. preſ.*

l'excès dont l'arc *GHC* ſurpaſſe l'arc *EC*. Puiſque $AE = EC$, & que $AFG = GHC$, ces deux excès ſont * égaux entr'eux. Donc les meſures des angles *ABG* & *GBC* ſont égales entr'elles. Donc (1) l'angle *ABC* eſt partagé en deux parties égales par la ligne *BG* qui paſſe par le ſommet *B* & par le centre *D*.

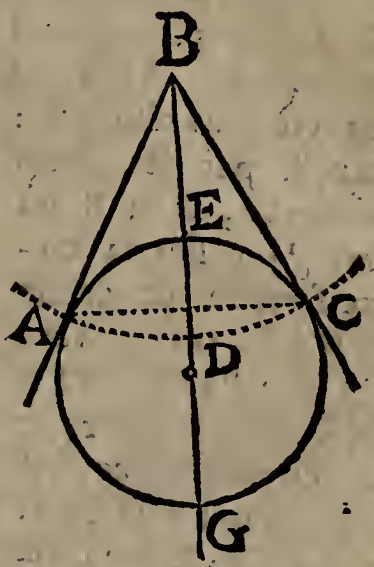
On pourroit encore demontrer la même choſe d'une autre maniere. Car après avoir mené les rayons *GL* & *GM* aux points d'attouchement (2), on trouve que les arcs *GRL* & *GOM* de la circonference *MHLG* ſont ſoûtenus par des cordes égales *GL* & *GM*. Donc les angles *LHG* & *GHM* ayant leur ſommet *H* dans la circonference, & étant appuyez ſur des arcs égaux de la même circonference, ſont (3) égaux entr'eux. Donc enfin l'angle *LHM* eſt partagé en deux parties égales par la ligne *HG*.

COROLLAIRE IV.

Reciproquement ſi une ligne menée par le ſommet d'un angle compris entre deux touchantes de circonference de cercle partage cet angle en deux parties égales, elle paſſera par le centre de ce cercle. Soit l'angle *ABC* compris entre les deux touchantes *BA* & *BC* : je dis que ſi la ligne *BG* partage en deux parties égales cet angle *ABC*, elle paſſera par le centre du cercle *AGCE*. Car puiſque (4) l'angle $ABG = GBC$, les meſures de ces deux angles ſeront

* *Ax. 21. general.* (1) *Cor. 2. Prop. 20. Geo.*
(2) *Fig. du Coroll. 2. de la Prop. preſ.*
(3) *Cor. 2. Prop. 27. Geo.* (4) *Suppoſit.*

égales entr'elles. Et alors si, d'une ouverture de compas égale à *B A* & du sommet *B* pris pour centre, on décrit un arc de cercle ; puisque [1] les touchantes *B A* & *B C* sont égales entr'elles, cet arc de cercle passera [2] par le point *C* extremité de la touchante *B C*. L'arc *A D* sera donc [3] égal à *D C*. La ligne *B D*, ou *B G*, sera donc [4] perpendiculaire à la corde *A C* soûtendante de l'arc *A D C*, & de l'arc *A E C*. Donc [5] cette ligne *B G* passera par le centre du cercle *A G C E*.

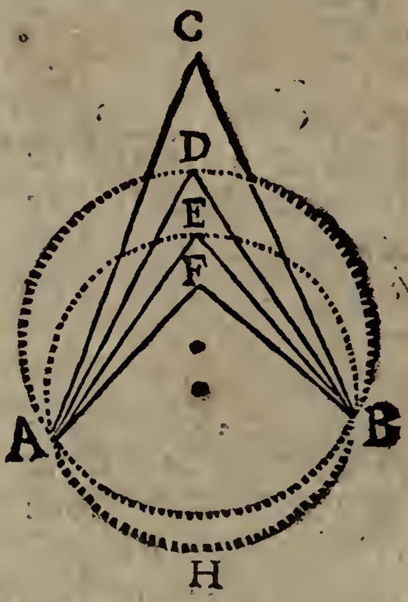


COROLLAIRE V.

Si de deux points, par exemple *A* & *B*, on mene deux lignes qui concourent en un point *C*, & si de ces deux mêmes points *A* & *B* on mene encore dans le même plan plusieurs lignes droites *A D*, *B D* ; *A E*, *B E* ; *A F*, *B F*, &c. qui concourent en differens points *D*, *E*, *F*, vers

[1] *Cor.* 2. *Prop. Pref.*
[2] *Cor.* 1. *Def.* 29. *Geo.*
[3] *Part.* 2. *du Cor.* 2. *Prop.* 20. *Geo.*
[4] *Part.* 5. *Prop.* 14. *Geo.*
[5] *Part.* 2. *Prop.* 13. *Geo.*

& entre les deux precedentes *A C* & *B C*; l'angle, par exemple *A F B*, dont le sommet sera plus prés de la ligne droite qu'on peut mener du point *A* au point *B*, sera plus grand que l'angle *A E B* qui en est plus éloigné : car si par les trois points *A*, E & *B* on fait [1] passer la circonference de cercle *A H B E*, on trouvera [2] que l'angle *A F B* posé entre le centre & la circonference est plus grand que l'angle *A E B*; & que l'angle *A E B* est plus grand que l'angle *A D B*. On trouvera de la même maniere que l'angle *A D B* est plus grand que l'angle *A C B*, en faisant passer par les trois points *A*, *D*, *B* une autre circonference; & ainsi des autres angles quelque nombre qu'il y en ait.



[1] *Cor. 2. Prop.* 13. *Geo.*
[2] *Part. 2. Prop. pres.*

CHAPITRE II.

DES SURFACES.

ENTRE les proprietez des ſurfaces, je conſidererai d'abord celles des ſurfaces planes, & je ne ferai attention qu'à ce qui s'y rencontre de plus neceſſaire pour s'inſtruire des principales propoſitions des premiers élemens de Geometrie. Enſuite dans le chapitre troiſiéme j'enſeignerai la maniere dont on peut connoître la grandeur des ſurfaces cylindriques & ſpheriques.

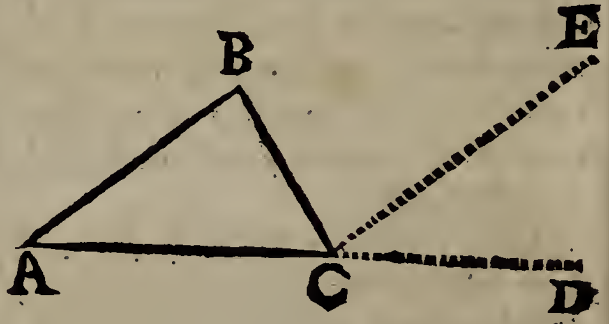
Mais puiſqu'on reduit en triangles une ſurface plane terminée par plus de trois lignes droites, en y prenant un point à volonté, & de ce point menant des lignes droites à tous les angles de cette ſurface; il eſt évident que le triangle eſt la ſurface plane rectiligne la plus ſimple de toutes. C'eſt pour cela que dans la recherche de ce qu'il y a de plus élementaire dans l'étude des proprietez qui conviennent aux ſurfaces planes, nous commencerons par les triangles.

PROPOSITION XXX.

Si on prolonge un côté d'un triangle rectiligne, l'angle exterieur sera égal aux deux interieurs opposez pris ensemble.

DEMONSTRATION.

Soit le triangle rectiligne *ABC* dont on prolongera un côté, par exemple *AC* : je dis que l'angle exterieur *BCD* est égal aux deux interieurs opposez *A* & *B*, pris ensemble. Pour le



demontrer, par le point C soit * menée la ligne *CE* parallele à *AB*. Il est évident ** que l'angle $ABC = BCE$, & [1] que l'angle $ECD = BAC$. Or l'angle $BCD = BCE + ECD$; au lieu de $BCE + ECD$, on peut prendre ce qui y est égal, sçavoir $ABC + BAC$. Donc l'angle exterieur $BCD = ABC + BAC$, *ce qu'il falloit demontrer.*

* *Cor.* 4. *Prop.* 15. *ou Cor. Prop.* 23. *Geo.*
** *Part.* 1. *Prop.* 23. *Geo.*
[1] *Part.* 1. *Prop.* 24. *Geo.*

COROLLAIRE.

COROLLAIRE.

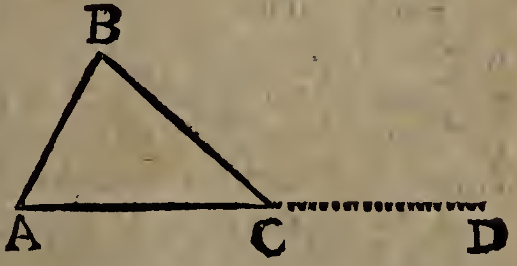
Ayant prolongé un côté pris à volonté d'un triangle, l'angle exterieur, par exemple *BCD*, formé par ce moyen, ſera * plus grand qu'aucun des interieurs *A* & *B* oppoſez, puiſqu'il ſera [1] égal à la ſomme des angles *A* & *B* qui en ſeront les parties.

PROPOSITION XXXI.

Les trois angles de chaque triangle rectiligne, pris enſemble, ſont égaux à deux angles droits.

DEMONSTRATION.

SOit un triangle rectiligne pris à volonté, par exemple *ACB* : je dis que ſes trois angles pris enſemble $ABC + BAC + BCA$ ſont égaux à deux angles droits. Pour le demontrer ſoit prolongé un côté pris à volonté, par exemple *AC*.



L'angle exterieur $BCD = ABC + BAC$ [2]. Donc en ajoûtant de part & d'autre l'angle *ACB*, on aura [3] $BCD + ACB = ABC + BAC + ACB$. Or [4] les angles *BCD* &

* *Ax. 2. gen.* [1] *Prop. preſ.*
[2] *Prop. 30. Geo.* [3] *Ax. 4. gen.*
[4] *Part. 1. Prop. 21. Geo.*

A C B pris ensemble sont égaux à deux droits. Donc * la somme des trois angles *A B C*, *B A C*, & *A C B* du triangle *A B C* est égale à deux angles droits, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

Si un des angles d'un triangle est droit, les deux autres angles pris ensemble seront égaux à un droit. Car tous ces trois angles pris ensemble ne sont [1] égaux précisément qu'à deux droits.

Et reciproquement si un des angles d'un triangle est égal aux deux autres, cet angle est droit ; parcequ'alors il sera égal à la moitié du total de ces trois angles, lequel total ou somme est [1] la valeur de deux angles droits.

COROLLAIRE II.

Chacun des trois angles *A*, *B*, *C* du triangle *A B C* peut être aigu ; mais il ne peut y en avoir qu'un droit ou un obtus. Parcequ'il ne peut y en avoir deux droits ou deux obtus, ou un droit & un obtus. Car si deux angles droits ou deux obtus, ou un droit & un obtus pouvoient être dans un même triangle, ils feroient avec le 3e angle une grandeur plus grande que deux angles droits, ce qui est contre la verité de la Proposition presente. Et partant lorsque dans un triangle rectiligne il se rencontre un angle droit, ou un angle obtus, chacun des deux autres doit être aigu.

* *Demande* 1. *gen.*

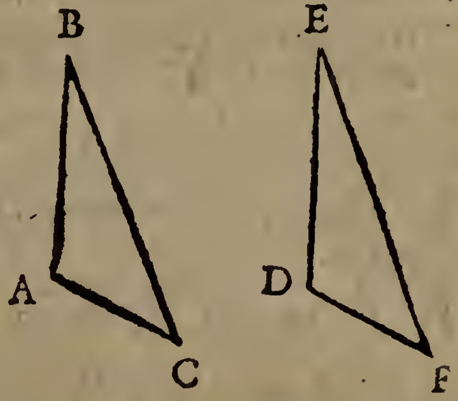
[1] *Prop. pres.*

COROLLAIRE III.

La ſomme des trois angles d'un triangle rectiligne pris à volonté, eſt égale à la ſomme des trois angles d'un autre triangle rectiligne. Puiſque la ſomme des trois angles d'un de ces triangles eſt * égale à deux angles droits, & que la ſomme des trois angles de l'autre triangle eſt auſſi égale à la même grandeur qui eſt deux angles droits,

COROLLAIRE IV.

Si deux angles, par exemple *A* & *C* d'un triangle *A B C* (pris enſemble ou ſeparément) ſont égaux aux deux angles *D* & *F* d'un autre triangle *DEF*, pris enſemble ou ſeparément; le 3e angle reſtant *B* d'un de ces triangles *A B C* ſera égal au 3e angle reſtant *E* de l'autre triangle *D E F*. Parceque [1] la ſom̃me des trois angles *A*, *B*, *C* d'un triangle *ABC* étant égale à la ſomme des trois angles *D*, *E*, & *F* de l'autre; ſi on ôt d'une part la ſomme $A + C$ faite des angle *A* & *C*, & ſi on ôte de l'autre part la ſomm $D + F$ faite des autres angles *D* & *F*; o.



* *Prop. pref.* [1] *Cor. 3. Prop. pref.*

aura * le 3e angle B reſtant d'un triangle *A B C* égal au 3e angle *E* reſtant de l'autre triangle *D E F*.

COROLLAIRE V.

Reciproquement ſi un angle, par exemple B, d'un triangle *A B C* eſt égal à un angle *E* d'un autre triangle *D F E*; la ſomme des autres angles *A* + *C* d'un de ces triangles ſera égale à la ſomme des deux autres angles *D* + *F* de l'autre triangle. On en connoîtra l'évidence par un raiſonnement ſemblable à celui du Coroll. precedent.

PROPOSITION XXXII.

1°. *La ſomme des angles interieurs d'une ſurface rectiligne eſt égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtez à cette ſurface, moins 4 de ces angles droits.*

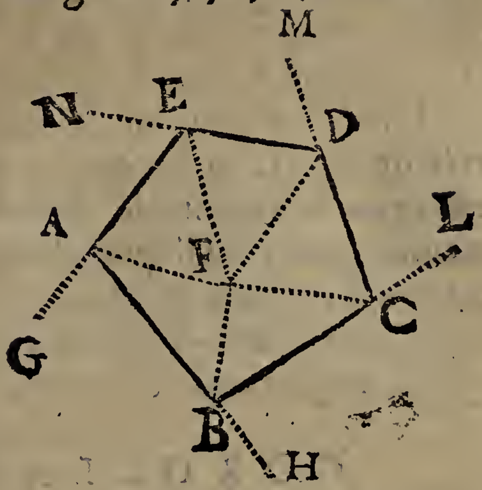
2°. *La ſomme des angles exterieurs d'une ſurface rectiligne eſt ſeulement égale à quatre angles droits.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

SOit la ſurface rectiligne *A B C D E*: je dis que la ſomme des angles interieurs *A B C* + B *C D* + *C D E* + *D E A* + *E A* B eſt égale à dix angles droits moins quatre, c'eſt à dire à ſix angles droits. Pour le demontrer d'un point par exemple *F*, pris dans cette ſurface ſoient menées les lignes droites *FA*, *FE*, *FD*, *FC*, *F*B aux

* *Ax. 9. gen.*

ſommets de tous les angles *A*, *E*, *D*, *C*, B. La ſomme des angles de chaque triangle qui ſera formé par ce moyen ſera * égale à la ſomme de deux angles droits ; mais il y aura autant de triangles *AF*B, B*FC*, *CFD*, &c. qu'il y aura de côtez à cette ſurface, puiſque chaque côté ſert de baſe à un triangle. Donc il y aura autant de fois deux angles droits que de côtez à cette ſurface. Or dans la ſurface propoſée il y a 5 côtez. Donc la ſomme des angles de tous les 5 triangles qui ont pour baſes ces 5 côtez eſt 10 angles droits, dont en ôtant quatre, qui ſont la valeur de la ſomme des angles qui ſont leur ſommet dans le point *F* d'où on aura mené ces lignes, la ſomme du reſte de ces angles droits qui eſt *6*, ſera la valeur de tous les angles interieurs *A*B*C*, B*CD*, *CDE*, &c. de cette ſurface rectiligne, *ce qu'il falloit demontrer.*



DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit prolongé chaque côté de la ſurface *A*B*CDE*, par exemple *EA* vers *G*, *A*B vers *H*, &c. je dis que la ſomme des angles exterieurs *GA*B + *H*B*C* + *LCD* + *MDE* +

* *Prop. 31. geo.*

NEA eſt égale à quatre angles droits ; parceque les angles interieurs avec les angles exterieurs valent * autant de fois deux angles droits qu'il y a d'angles ou de côtez à cette ſurface rectiligne. Or ** la ſomme des angles interieurs eſt égale à autant de fois deux angles droits moins quatre qu'il y a d'angles ou de côtez à cette même ſurface. Donc la ſomme des angles exterieurs *GAB* + *HBC*, &c. eſt égale à ces quatre angles droits.

COROLLAIRE I.

Il ſuit de la premiere partie de la Propoſition preſente que toutes les ſurfaces planes rectilignes qui auront un pareil nombre de côtez, auront le même nombre d'angles droits pour la valeur de la ſomme de leurs angles interieurs.

COROLLAIRE II.

Il ſuit de la ſeconde partie de la Propoſition preſente que toutes les ſurfaces rectilignes de quelque eſpéce qu'elles ſoient, c'eſt à dire, quel nombre de côtez qu'elles ayent chacune, auront les ſommes des angles exterieurs égales entr'elles ; puiſque la ſomme des angles exterieurs de chacune eſt égale à quatre angles droits.

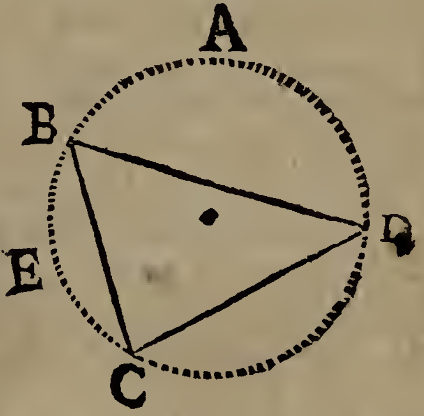
* *Part. 1. Prop. 21. Geo.*
** *Part.1. Prop. pref.*

PROPOSITION XXXIII.

1. *De deux côtez, ou de trois côtez inégaux entr'eux d'un triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle.*
2. *Reciproquement de deux, ou de trois angles inégaux entr'eux d'un triangle, le plus grand angle est opposé au plus grand côté.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit le triangle B *C D* dont le côté B *D* est plus grand que le côté B *C* : je dis que l'angle B *C D* > B *D C*. Car supposant * une circonference de cercle décrite par les sommets des trois angles B, *C*, *D*; l'arc B *A D* sera [1] plus grand que l'arc B *E C*. Donc [2] la moitié de cet arc *B A D* qui est [3] la mesure de l'angle *C* est plus grande que la moitié de l'arc B *E C*, qui est la mesure de l'angle *D*. Donc l'angle *C* opposé au plus grand côté B *D* sera plus grand que l'angle *D* opposé au plus petit côté B *C*, *ce qu'il falloit demontrer.*



* *Cor.* 2. *Prop.* 13. *Geo.* [1] *Cor.* 1. *Prop.* 11. *Geo.*
[2] *Ax.* 11, *gen.* [3] *Prop.* 27. *Geo.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Si l'angle *C* du même triangle B *C D* eſt plus grand que l'angle *D* : je dis que le côté B *D* ſera plus grand que le côté B *C*. Car * l'angle *C* étant plus grand que l'angle *D*, la moitié de l'arc B *A D* qui eſt la meſure de cet angle *C*, ſera [1] plus grande que la moitié de l'arc BE*C* qui eſt la meſure de l'angle *D*. Donc l'arc B *A D* double de ſa moitié ſera [2] plus grand que l'arc B E *C* pareillement double de ſa moitié. Donc [3] le côté B *D* ſera plus grand que le côté *BC*, *ce qu'il falloit demontrer.*

PROPOSITION XXXIV.

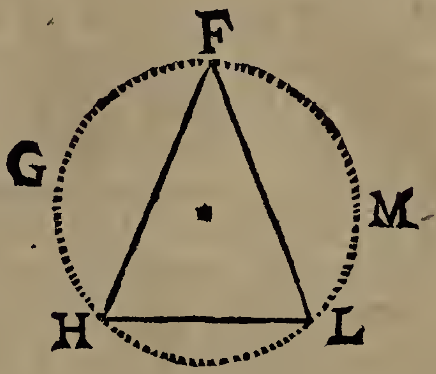
1. *Les côtez d'un triangle qui ſont égaux entr'eux, ſont oppoſez à des angles pareillement égaux entr'eux.*
2. *Reciproquement les angles d'un triangle qui ſont égaux entr'eux, ſont oppoſez à des côtez égaux entr'eux.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

SOit le triangle *F H L*, dont les côtez *F H* & *F L* ſoient égaux entr'eux : je dis que les angles *H* & *L* oppoſez à ces côtez égaux, ſont

* *Suppoſit.* [1] *Ax.* 11. *gener.*
[2] *Ax.* 14. *gener.* [3] *Part.* 2. *Prop.* 11. *Geo.*

aussi égaux entr'eux. Pour le demontrer supposons une circonference de cercle *HLMFG* décrite * par le sommet des trois angles *H*, *L*, *F*. Il est constant [1] que les arcs *FGH* & *FML* seront aussi égaux entr'eux ; & que les angles *H* & *L* sont [2] mesurez par la moitié de ces arcs *FML* & *FGH*.



Donc les angles *H* & *L* seront égaux entr'eux, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit le triangle *HLF* dont les angles *H* & *L* soient égaux entr'eux : je dis que les côtez *FL* & *FH* opposez à ces angles égaux, sont aussi égaux entr'eux. Après avoir mené la circonference *HLMFG* par les sommets des 3 angles de ce triangle ; on trouve que puisque les angles *H* & *L* sont [3] égaux entr'eux, les moitiez des arcs *FML* & *FGH*, qui en sont [2] la mesure, sont aussi [4] égales entr'elles ; & partant les arcs *FML* & *FGH* qui sont doubles de ces moitiez, sont [5] aussi égaux entr'eux. Donc [6] les côtez *FL* & *FH*, qui sont des cordes ou soûtendantes de ces arcs, sont égaux entr'eux.

* *Cor. 2. Prop. 13. Geo.* [1] *Cor. 2. Prop. 11. Geo.*
[2] *Prop. 27. Geo.* [3] *Supposit.*
[4] *Cor. 2. Prop. 20. Geo.* [5] *Ax. 6. gen.*
[6] *Part. 1. Prop. 11. Geo.*

Or ces côtez *FL* & *FH* ſont oppoſez aux angles égaux *H* & *L*. Donc les angles d'un triangle égaux entr'eux ſont oppoſez à côtez égaux, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

Il ſuit de la Demonſtration de la premiere partie de la Propoſition preſente, qu'un triangle équilateral a tous ſes angles égaux entr'eux, c'eſt à dire qu'il eſt équiangle. Car ſi on ſuppoſe une circonference de cercle menée par les ſommets des trois angles d'un triangle équilateral, les côtez de ce triangle ſeront ſoûtendantes d'arcs égaux entr'eux, dont les moitiez ſeront * meſures des angles oppoſez.

COROLLAIRE II.

Il ſuit encore de la Demonſtration de cette premiere partie, qu'un triangle Iſoſcele, c'eſt à dire **, qui a deux côtez égaux entr'eux, a les angles oppoſez à ces côtez égaux entr'eux.

COROLLAIRE III.

Il ſuit pareillement de la Demonſtration de la 2[e] partie de la Propoſition preſente, que lorſque les 3 angles d'un triangle ſont égaux entr'eux, c'eſt à dire, que lorſqu'un triangle eſt équiangle, il eſt équilateral, ou que ce triangle a tous ces côtez égaux entr'eux. Puiſqu'ayant [1] décrit une circonference de cercle par les ſommets de ces trois angles, les côtez de ce triangle ſeront cordes ou ſoûtendantes d'arcs égaux.

* *Prop.* 27. *Geo.* ** *Déf.* 40. *Geo.*
[1] *Cor.* 2. *Prop.* 13. *Geo.*

COROLLAIRE IV.

Il ſuit enfin de la Demonſtration de la 2e partie de la Propoſition preſente, que lorſque ſeulement deux angles d'un triangle ſont égaux entr'eux, ce triangle eſt Iſoſcele, c'eſt à dire, * qu'il a les deux côtez oppoſez à ces deux angles, égaux entr'eux.

COROLLAIRE V.

Entre les uſages de la propoſition preſente, j'en propoſerai un pour meſurer une diſtance acceſſible ſeulement par une de ſes extremités. Mais auparavant, il eſt neceſſaire de faire attention à la maniere de determiner une ligne droite ſur le terrain.

Pour tracer dans la Campagne une ligne droite du point *B* au point *C*, à chacune des deux extremités *B* & *C*, il faut ficher dans la terre un picquet ou bâton ; enſuite il faut ſe mettre un peu éloigné d'une des extremités de cette ligne, par exemple en *A*, & regarder le bâton planté en *B*, de telle ſorte que ce même bâton couvre à la vûë & empêche d'appercevoir le bâton *CD*. Alors on fera planter ou ficher en terre, d'eſpace en eſpace, d'autres bâtons *E*, *F* &c. de ſorte que regardant le bâton *B* en ſe tournant vers *CD*, il arrive que ce même bâton *B* couvre à la vûë les autres bâtons *E*, *F* &c. La ligne *BEFC* ſera une ligne droite ; parceque nous jugeons à la vûë qu'une ligne eſt droite, lorſqu'en la regardant par un bout ſelon ſa longueur, on n'apperçoit aucun de ſes points s'écarter à

* *Déf.* 40. *Geo.*

droit ou à gauche. On peut par ce moyen planter une rangée d'arbres ou d'autres choses en ligne droite. Si le bâton *C D* étoit difficile à appercevoir, à cause de son éloignement, on peut mettre du papier ou du linge blanc au point *D*, pour le rendre plus visible, ou bien on se sert de lunettes d'approches.

Soit la largeur d'une riviere, par exemple *G I*, qu'on souhaite connoître exactement, sans pour cela être obligé de la traverser.

Je suppose que cette largeur est accessible par le point *G*, & que rien n'empêche les operations suivantes. Il faut construire un triangle Isoscele rectangle *G K L*. Aprés en avoir ajusté le plan sur un bâton fiché en terre, on dirigera le côté *G L*, selon la ligne donnée *G I*; le triangle demeurant en cette situation, on prolongera la longueur du côté *G K* en ligne droite *G M*, comme on vient d'enseigner. Au sommet de l'angle droit *G*, on fichera en terre un bâton *GH*. Ensuite on transportera le triangle *GKL* vers *M*, jusqu'à ce qu'on soit parvenu en *P N O*; de sorte que ce triangle étant soutenu fixement par le bâton *Q*,

&

& son côté *NO* étant dirigé selon la longueur de la ligne droite *GM*, en regardant le long du côté *OP*, on puisse appercevoir le point *I*. Alors on connoîtra la distance G O qui sera la même que *G I*; & lorsqu'on mesurera *G O*, c'est la même chose que si on mesuroit *GI*. Parceque dans le triangle Isoscele *P O N* l'angle *P N O* étant * droit, l'angle *N O P* sera [1] un demi angle droit. Et dans le triangle *G O I* l'angle *I G O* est droit, & l'angle *G O I* étant égal à la moitié d'un droit, on aura [2] *G I O* aussi égal à un demi droit. Donc [3] $GO = GI$.

On peut sur le même principe connoître la mesure de la hauteur d'une tour *RS*, ou d'un arbre sans y monter. Pour cela il faut construire un triangle rectangle Isoscele *TVX*, & attacher son côté *T V* sur un bâton pour le supporter. Au point *X* il faut attacher un filet, & à son extrêmité un plomb. On éloignera ce triangle, ou on l'approchera de la tour *RS*, jusqu'à ce qu'ayant fiché en terre le bâton qui le supporte, & regardant le long du côté *T X*, on puisse appercevoir l'extremité *S*. Alors sans remuer le triangle *TVX*, on regardera par le point *X* le long de ce côté *X T*, & on marquera le point *Y* où se termine le rayon visuel *X T Y*: Je dis que la longueur *Y R* est égale à la hauteur *R S* qu'on cherche. Car la ligne à plomb *X Z* est perpendiculaire à la ligne horizontale *YR* qui est sur la surface de la terre. Reciproquement cette ligne *YR* est [4] perpendiculaire à *XZ*; mais la ligne *TV* est * aussi per-

* *Par construction.*
[1] *Cor. 2. Prop. pres. & Prop. 31. Geo.*
[2] *Prop. 31. Geo.* [3] *Part. 2. Prop. pres.*
[4] *Cor. 1. Prop. 5. Geo.*

pendiculaire à XZ. Donc TV & YZ sont * paralleles. Or l'angle XTV est [1] égal à la moitié d'un droit & [2] l'angle $XTV = SYR$. Dans le triangle YRS, l'angle SYR sera donc égal à la moitié d'un droit. Donc aussi l'angle YSR sera [1] aussi égal à la moitié d'un droit ; car on suppose que l'angle SRY est droit. Donc [3] la hauteur RS est égale à la distance YR qu'on peut mesurer facilement.

PROPOSITION XXXV.

1°. *Deux côtez pris separément d'un triangle étant égaux aux deux côtez aussi pris separément d'un autre triangle, si l'angle compris par deux de ces côtez d'un de ces triangles est égal à l'angle compris par deux de ces mêmes côtez de l'autre triangle ; la base de l'un sera égale à la base de l'autre.*

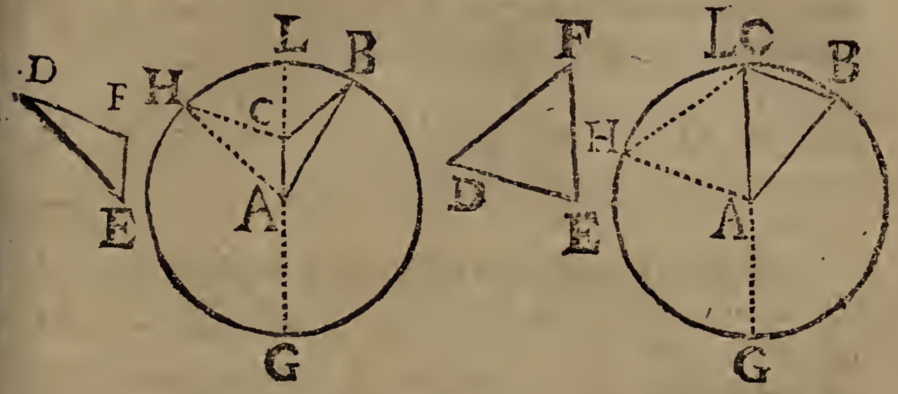
2°. *Deux côtez pris separément d'un triangle étant égaux aux deux côtez aussi pris separément d'un autre triangle, si l'angle compris par deux de ces côtez d'un de ces triangles est plus grand que l'angle compris par deux de ces mêmes côtez de l'autre ; le triangle qui aura ce plus grand angle aura une base plus grande que celle de l'autre triangle.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soient les deux triangles ABC & DEF tels que le côté EF du triangle DEF soit égal

* *Part. 2. Prop. 15. Geo.*
[1] *Prop. 31. Geo. & Cor. 2. Prop. pres.*
[2] *Part. 1. Prop. 24. Geo.* [3] *Part. 2. Prop. pres.*

au côté *A C* du triangle *A B C*, & que le côté *E D* ſoit égal au côté *A B*, enfin que l'angle *D E F* ſoit égal à l'angle *C A B* : Je dis que le



côté *F D* oppoſé à cet angle *D E F* eſt égal au côté *C B* oppoſé à l'angle *C A B*. Pour le demontrer, conſiderons le triangle *D E F* appliqué en *H A C*, de ſorte que le côté *E F* ſoit poſé ſur le côté *A C*; en appliquant le point *E* ſur le point *A*, le point *F* tombera ſur le point *C* à cauſe de l'égalité ſuppoſée. Le côté *A H* ſera le même que le côté *E D*. Du point *A* comme centre, & de la diſtance de *A H*, on décrira une circonference de cercle *H G B*, qui paſſera par l'extrêmité *B* du côté de *A B*; car [1] *A H* = *A B*.

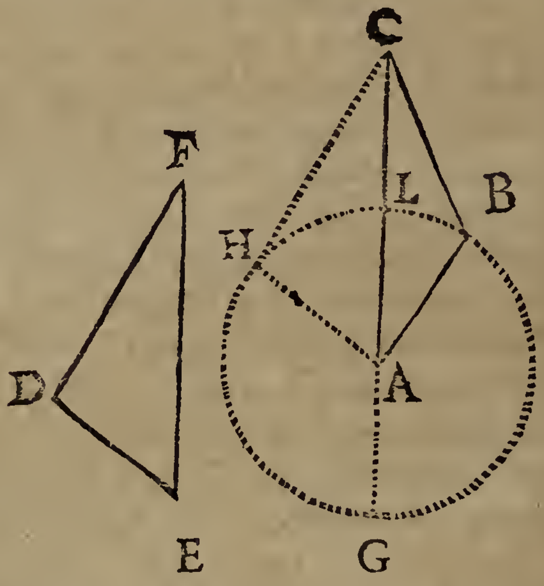
Puiſque [1] l'angle *D E F*, ou ſon égal *H A C*, eſt égal à l'angle *C A B*, leurs meſures qui ſont [2] les arcs *H L* & *B L*, ſeront égales entr'elles. Or [3] l'arc *L H G* = *L B G*. Donc ôtant d'une part l'arc *L H*, & de l'autre l'arc *L B*, il reſtera [4] l'arc *H G* = *B G*; & partant les lignes *C H* & *C B* étant menées du point *C* pris hors le centre *A* du cercle, à la circonference, ſe ter-

[1] *Suppoſit.* [2] *Prop.* 20. *Geo.*
[3] *Cor.* 5. *Prop.* 14. *Geo.* [4] *Ax.* 9. *gen.*

mineront aux points *H* & *B* également diſtans du point *G* où ſe termine la ligne *C G*, qui paſſe par le centre *A*. Donc [1] *C H* = *C B*. Dans les triangles *D E F* & *C A B*, les côtez *H C* ou *DF* & *C B* oppoſez à angles égaux ſeront donc égaux entr'eux, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit le triangle *D E F* dont le côté *E F* eſt égal au côté *A C* d'un autre triangle *C A B*: & le côté *E D* = *A B*, & l'angle *D E F* eſt plus grand que l'angle *C A B* : je dis que le côté *FD* oppoſé à ce plus grand angle *D E F* eſt plus grand que le côté *C B*



oppoſé au plus petit angle. Pour le demontrer ſoient appliquez ces deux triangles, comme dans la premiere partie de la Propoſition preſente, & ſoit décrite la circonference *H G B L*.

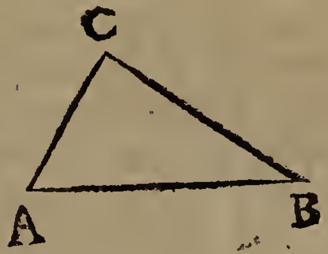
Puiſque [2] l'angle *D E F* ou *H A C* > *C A B*, ſa meſure [3] *L H* eſt plus grande que l'arc *L B*,

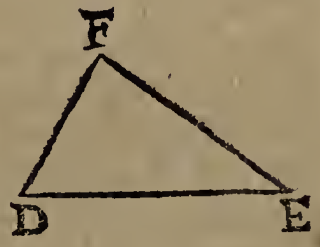
[1] *Cor.* 1. *Prop.* 14. *Geo.* [2] *Suppoſit.*
[3] *Cor.* 2. *Prop.* 20. *Geo.*

mesure de l'angle *CAB*. Or [1] l'arc $LHG = LBG$. Donc en ôtant d'une part l'arc LH, & ôtant de l'autre l'arc LB, il restera [2] l'arc $HG < GB$; & partant le point *C* étant pris hors le cercle, on aura [3] la ligne CH plus grande que CB; c'est à dire, que dans un de ces triangles le côté DF qui est opposé au plus grand angle DEF, est plus grand que le côté CB, opposé au plus petit angle dans l'autre triangle, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

Reciproquement lorsque deux triangles ont deux côtez égaux l'un à l'autre, chacun à chacun, & la base de l'un étant égale à la base de l'autre; l'angle opposé à la base de l'un, est égal à à l'angle opposé à la base de l'autre. Soient par exemple les deux triangles ABC & DEF, tels que le côté AB soit égal au côté DE, & le côté $BC = EF$, & enfin la base $AC = DF$: je dis que l'angle $ABC = DEF$. Car si l'angle ABC étoit plus grand, ou plus petit que l'angle DEF, on auroit [4] la base AC plus grande ou plus petite que DF, ce qui est contre la supposition presente. Donc l'angle $ABC = DEF$.

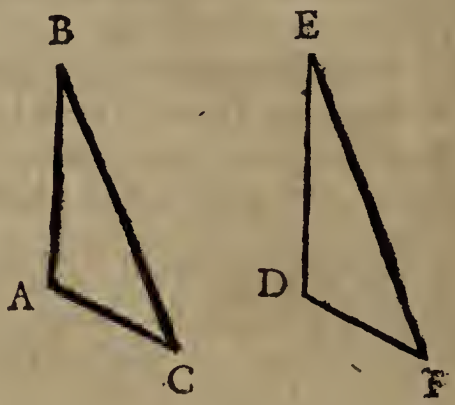




(1) *Cor. 5. Prop. 14. Geo.* [2] *Ax. 15. general.*
(3) *Cor. 4. Prop. 14. Geo.*
[4] *Prop. pres. Part. 2.*

COROLLAIRE II.

Donc en general deux triangles équilateraux l'un à l'autre, ſont équiangles l'un à l'autre de telle ſorte que les angles oppoſez à côtez égaux, ſont égaux entre eux. Soient les deux triangles *ABC* & *DEF* équilateraux l'un à l'autre, c'eſt à dire que le côté $AB = DE$, que $BC = EF$, que $AC = DF$: je dis que les angles *A* & *D*, par exemple, qui ſont oppoſez aux côtez égaux *BC* & *EF*, ſont égaux entr'eux. Car [1] les côtez *AB* & *AC* étant égaux aux côtés *DE* & *DF*, chacun à chacun, ſi les angles *A* & *B* n'étoient pas égaux, le plus grand de ces angles ſeroit [2] oppoſé au plus grand côté. Le coté *BC* ne ſeroit donc pas égal au coté *EF*, ce qui eſt contre la ſuppoſition. On trouvera par le même raiſonnement que l'angle $B = E$, & que l'angle $C = F$. Parcequ'on trouve toûjours que ces deux triangles ont deux cotez égaux, chacun à chacun, & des baſes égales entr'elles. Enfin deux triangles équilateraux l'un à l'autre ſont [3] égaux. Car en les appliquant l'un ſur l'autre, de ſorte qu'on poſe les cotez égaux ſur les cotez égaux; ces triangles conviendront en toute

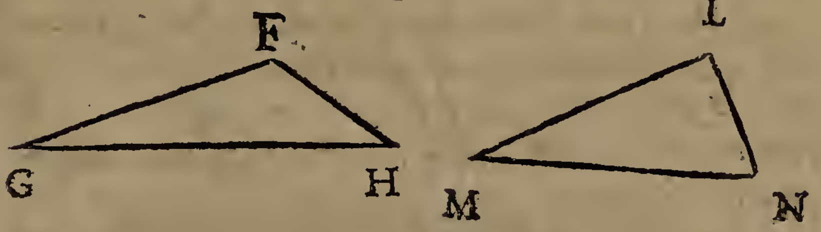


[1] *Suppoſit.* [2] *Prop. preſ. part.* 2.
[3] *Ax.* 1. *Geo.*

maniere, c'eſt à dire, qu'ils ne s'excederont point l'un l'autre. Parceque autrement les cotez de l'un ne ſeroient pas égaux aux cotés de l'autre, chacun à chacun, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

COROLLAIRE III.

Reciproquement de deux triangles qui ont deux cotez égaux l'un à l'autre, celui qui aura la plus grande baſe, aura l'angle compris par ces deux cotez plus grand que celui qui aura la plus petite baſe. Soient par exemple les triangles FGH & LMN tels que le coté $FG=LM$, & le coté $FH=LN$, & que la baſe GH ſoit plus grande que la baſe MN : je dis que l'angle



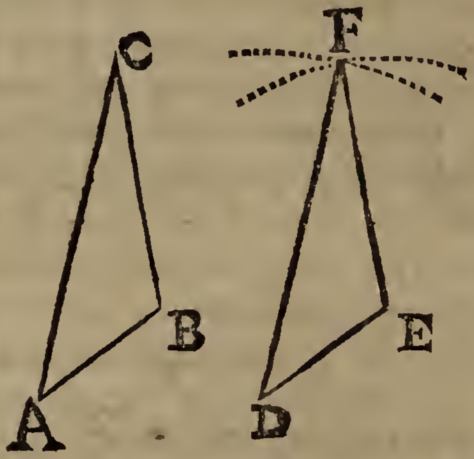
$GFH>MLN$. Car cet angle GFH ne peut être que plus grand que l'angle MLN, ou égal à cet angle MLN, ou plus petit que ce même angle MLN. Or l'angle GFH ne peut être égal à MLN ; car il faudroit * que la baſe GH fût égale à la baſe MN, ce qui eſt contre la ſuppoſition. Parcillement l'angle GFH ne peut être plus petit que l'angle MLN ; car [1] la baſe GH ſeroit plus petite que la baſe MN, ce qui

* *Part.* 1. *Prop. preſ.*
[1] *Part.* 2. *Prop. preſ.*

eſt encore contre la ſuppoſition. Donc l'angle *G F H* qui eſt oppoſé à la plus grande baſe, ſera plus grand que l'angle *M L N*, qui eſt oppoſé à la plus petite baſe.

COROLLAIRE IV.

Pour décrire un triangle qui ſoit équilateral, équiangle & égal à un autre triangle donné *A B C*. Avec un compas on prendra la ligne *D E* égale à *A B*. Du point *D* comme centre, & de l'intervalle *D F* égale à *A C*, on décrira un arc de cercle. Du point *E*, & de l'intervalle *E F* égale à *B C* on décrira encore un arc de cercle, qui coupera le premier au point *F*. Enſuite du point *D* au point *F* on menera *D F*, & du point *E* au même point *F* on menera *E F* : je dis que le triangle *D E F* ſera équilateral au triangle *A B C*, comme il eſt évident [1]; ce triangle *D E F* ſera [2] auſſi équiangle au triangle *A B C*; enfin [3] ces deux triangles ſeront égaux entre eux.



On ſe ſerviroit de cette methode ſi on vouloit décrire un triangle qui eût ſes cotez égaux à trois lignes données, chacun à chacune; pourvû que

[1] *Par conſtruction.*
[2] *Cor.* 2. *Prop. preſ.*
[3] *Ax.* 1. *Geo.*

deux de ces lignes priſes enſemble à volonté fuſſent * plus grandes que la troiſiéme. Car autrement les arcs décrits des deux extrêmitez d'une de ces lignes, & d'ouvertures de compas égales à chacune des deux autres, ne pourroient pas ſe couper, par exemple, au point *F*.

C'eſt ainſi qu'on peut décrire un triangle équilateral ſur une ligne, en décrivant des deux extrêmitez de la ligne propoſée deux arcs d'une ouverture de compas égale à cette ligne; ces deux extrêmitez ſeroient les ſommets de deux angles, & le point d'interſection de ces deux arcs ſeroit le ſommet du troiſiéme.

On ſe peut ſervir de ce Corollaire, pour décrire une figure égale, équilaterale, & équiangle à une autre figure propoſée, en diviſant en triangles cette figure propoſée, & en faiſant d'autres triangles dont les côtez ſeroient égaux aux côtez des triangles de la figure propoſée.

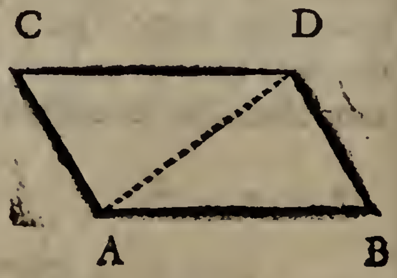
* *Prop.* 1. *Geo.*

PROPOSITION XXXVI

Les lignes paralleles & égales comprennent par leurs extrêmitez de même côté, des lignes paralleles & égales.

DEMONSTRATION.

Soient les lignes *AB* & *CD* paralleles, & égales entr'elles : Je dis que les lignes *AC* & *BD* seront aussi paralleles & égales : pour le démontrer, soit menée la diagonale *AD*. Les angles alternes internes *BAD* & *ADC* sont * égaux entr'eux. Puisque [1] *AB*=*CD* & que le côté *AD* est commun aux deux triangles *BAD* & *ADC*, le triangle *BAD* aura les deux côtez *BA* & *AD* égaux aux côtez *CD* & *DA* du triangle *ADC*, chacun à chacun, & les angles *BAD* & *ADC* seront aussi égaux entr'eux. Et partant [2] 1° les bases *AC* & *BD* seront égales entr'elles. 2° Les angles *BDA* & *DAC* opposez aux côtez égaux *AB* & *CD*, seront [3] aussi égaux entr'eux. Ces lignes *AC* & *BD* seront donc [4] paral-



* *Part.* 1. *Prop.* 23. *Geo.*
[1] *Supposit.*
[2] *Part.* 1. *Prop.* 35. *Geo.*
[3] *Cor.* 2. *Prop.* 35. *Geo.*
[4] *Part.* 2. *Prop.* 23. *Geo.*

leles entr'elles. Donc les lignes paralleles & égales *A B* & *C D* comprennent, par leurs extremitez, des lignes *A C* & *B D* égales & paralleles, *ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

LA démonstration qu'on vient de faire est seulement pour les lignes menées aux extremités *A* & *C*, *B* & *D* du même côté. Car les lignes menées par les extremités *A* & *D*, *C* & *B* de ces paralleles, de differens côtés, ne seroient jamais paralleles, parcequ'elles se couperoient toujours, & ne seroient égales que fort rarement.

COROLLAIRE.

Si on veut construire un quarré sur la ligne *A B*; par les deux extremités *A* & *B*, il faut mener deux lignes *A D* & *B C* perpendiculaires & égales à cette ligne *A B*, & par leurs extremités *D* & *C*. Il faut mener la ligne *D C*. Alors la figure *A C* sera le quarré qu'on souhaittoit.

Car 1° la ligne *A D* sera [1] parallele à *B C*.

2°. La ligne *D C* sera [2] parallele & égale à *A B*.

[1] *Part. 2. Prop. 15. Geo.*
[2] *Prop. pres.*

La figure *A C* ſera donc [1] un parallelogramme.

3°. Les angles *D A B* & *A D C* étant [2] égaux à deux droits, & l'angle *A* étant [3] droit ; l'angle D ſera droit. On trouvera par le même raiſonnement que l'angle *C* eſt droit ; enfin l'angle *B* eſt auſſi [3] droit. Donc *A C* eſt [4] un quarré.

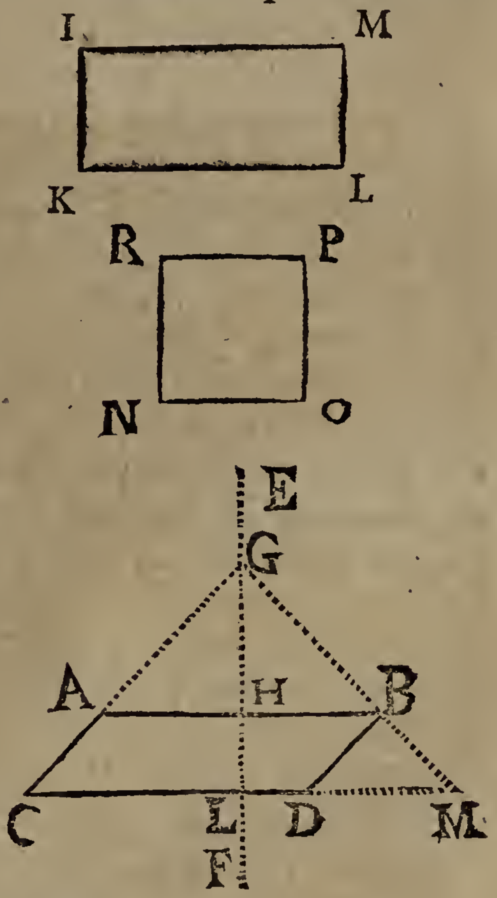
[1] *Def. 49. Geo.*
[2] *Part. 3. Prop. 24. Geo.*
[3] *Def. 14. Geo.*
[4] *Def. 50. Geo.*

PROPOSITION XXXVII.

1. *Les côtez opposez d'un parallelogramme sont égaux entr'eux.*
2. *Reciproquement un quadrilatere, ou surface quadrilaterale, dont les côtez opposez sont égaux entr'eux, est un parallelogramme.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

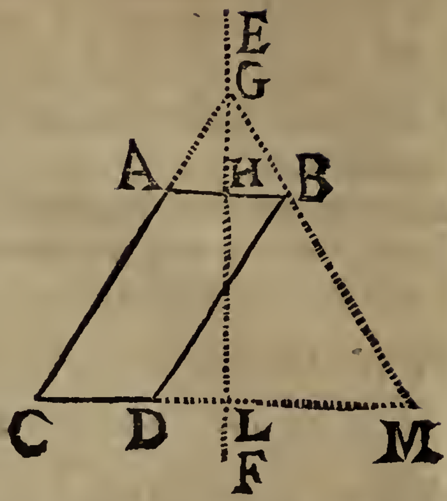
SI un parallelogramme est rectangle, par exemple *KM*, il est constant que les cotez opposez *IK* & *LM* sont égaux entr'eux. Parceque ce sont perpendiculaires entre paralleles, qui * sont égales entr'elles. Par le même raisonnement *KL*=*IM*. On dira la même chose du quarré *NP*.



Si le parallelogramme est obliquangle, par exemple *CB* : je dis que *CA* =*DB*, & que *AB*=*CD*. Pour

* *Cor. 4. Prop. 6. Geo.*

le démontrer : par le milieu d'un des cotez, par exemple, par le milieu *H* de *AB* soit menée *FE* perpendiculairement à ce coté *AB*. Ensuite soit prolongé le coté *CA*, jusqu'à la rencontre *G* de la perpendiculaire *EF*, & de ce point *G* soit menée par le point *B* la ligne *GM* qui rencontrera en *M* le coté *CD* prolongé.



Puisque * *EF* est perpendiculaire au milieu de *AB*, on aura [1] $GA = GB$. Et partant le triangle *AGB* est [2] Isoscele. Donc [3] l'angle $GAB = GBA$. Mais puisque * les lignes *AB* & *CM* sont paralleles entr'elles, l'angle [4] $GAB = GCM$, & $GBA = GMC$. Donc [5] le triangle *CGM* est aussi Isoscele : & partant $CG = MG$. Donc retranchant d'une part *GA*, & de l'autre *BG*, il restera [6] $AC = BM$. Or [4] l'angle $BDM = GCM$, on vient aussi de dire que l'angle $GMC = GCM$. Donc [7] l'angle $BDM = BMD$, & partant [5] $DB = BM$. Mais on vient aussi de faire voir que $AC = BM$. Donc [7] le coté $AC = BD$; donc les lignes *AC* & *BD* étant paralleles & égales, compren-

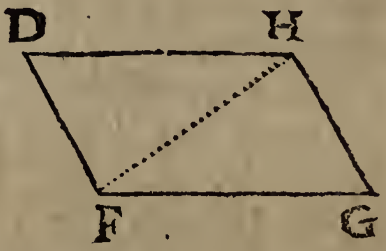
* *Supposit.* [1] *Prop. 3. Geo.*
[2] *Déf. 40. Geo.* [3] *Cor 2. Prop. 34. Geo.*
[4] *Part. 1. Prop. 24. Geo.* [5] *Cor. 4. Prop. 34. Geo.*
[6] *Ax. 9. gen.* [7] *Ax. 18. gen.*

dront

dront par leurs extrêmitez les lignes égales *AB* & *C D* ; & partant en general les côtez opposez d'un parallelogramme, par exemple de *CB*, sont égaux entr'eux, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit le quadrilatere *D G* dont les cotez *DH* & *F G* ; *D F* & *H G* sont égaux entr'eux : je dis que ce quadrilatere est un parallelogramme. Pour le demontrer soit menée la diagonale *F H*. Les triangles *D F H* & *G F H* sont équilateraux l'un à l'autre. Car le côté *F H* est commun à tous les deux, & * *D H* = *F G*, *D F* = *H G*. Donc [1] les angles opposez à cotez égaux sont égaux entr'eux, c'est à dire que *D F H* = *F H G* ; & *D H F* = *H F G*. Donc [2] *D F* & *H G* sont paralleles entr'elles ; pareillement *D H* & *F G* sont aussi paralleles entr'elles. Donc enfin la surface *D F G H* est [3] un parallelogramme, *ce qu'il falloit demontrer.*



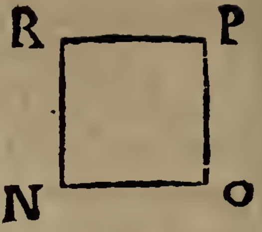
COROLLAIRE I.

Un quarré est un parallelogramme dont les

* *Suppos.*
[1] *Cor. 2. Prop. 35. Geo.*
[2] *Part. 2. Prop. 23. Geo.*
[3] *Déf. 49. Geo.*

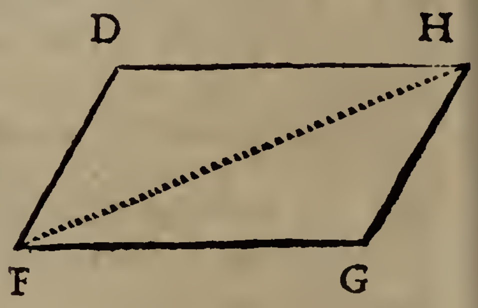
Ii

quatre cotez sont égaux entr'eux. Soit le quarré NP : je dis que $NO = OP = PR = RN$. Car * $NO = OP$; & [1] $NR = OP$, enfin $PR = NO$.



COROLLAIRE II.

Il suit de la Proposition presente qu'une diagonale d'un parallelogramme, par exemple la diagonale FH du parallelogramme DG, divise ce parallelogramme en deux parties égales, c'est à dire que le triangle DHF est égal au triangle FHG. Car [1] le coté $DH = FG$; $DF = HG$, & FH est un coté commun aux deux triangles DHF & FHG. Donc ces deux triangles seront équilateraux l'un à l'autre. Donc [2] ils seront égaux entr'eux.



COROLLAIRE III.

La seconde partie de la Proposition presente est le fondement d'une methode dont on se sert pour mener par un point donné une ligne parallele à une ligne donnée. Soit par exemple la ligne donnée AB, & le point C par

* *Déf. 50. Geo.* [1] *Part. 1. Prop. pres.*
[2] *Ax. 1. Geo.*

lequel il faille mener une ligne parallele à cette ligne *A B*. Il faut mener à volonté par ce point *C* une ligne *C D* qui coupe la ligne donnée *A B* au point *D*. Ensuite on ouvre un compas du point *D*, de part ou d'autre, par exemple en *E*, & de cette

ouverture *D E* on décrit du point *C* l'arc *L F M*. De l'ouverture *D C* on décrit du point *E* l'arc *N F O* qui coupe le precedent au point F ; par ce point F & par le point *C* on mene la ligne *G H* : je dis que cette ligne *G H* est la ligne parallele cherchée. Car dans le quadrilatere *E C* les cotez opposez sont * égaux entr'eux. Donc [1] ce quadrilatere est un parallelogramme ; & partant [2] les cotez opposez sont paralleles. Donc *F C* ou *G H* est parallele à *A B*.

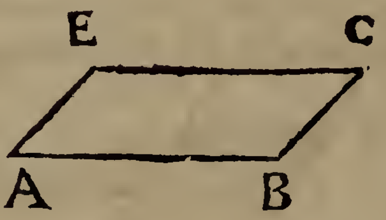
* *Par construction.*
[1] *Part. 2. Prop. pres.*
[2] *Déf.* ‹ › *Geo.*

PROPOSITION XXXVIII.

1. *Les angles opposez d'un parallelogramme sont égaux entr'eux.*
2. *Les 4 angles d'un quadrilatere, pris ensemble, sont égaux à 4 droits.*
3. *Enfin la somme des angles opposez d'un quadrilatere inscrit dans un cercle valent deux angles droits.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

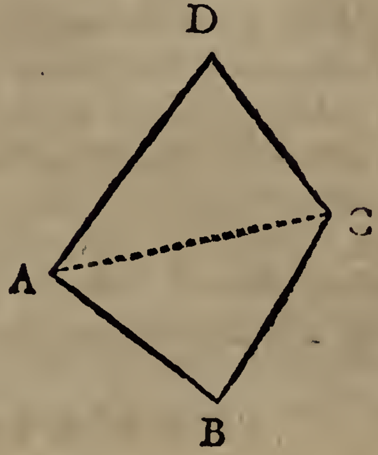
SOit le parallelogramme *BE* : je dis que l'angle $A = C$, que $B = E$. Car les angles *B* & *C* pris ensemble sont [1] égaux à deux droits ; pareillement les angles *E* & *C* pris ensemble sont égaux à la même grandeur, qui est deux angles droits. Donc [2] la somme des angles $B + C = E + C$. Donc en otant de part & d'autre l'angle *C*, il restera [3] l'angle $B = E$. Par un raisonnement semblable on trouvera que $A + B = C + B$; & partant que $A = C$. Or *A* & *C* ; *B* & *E* sont des angles opposez de parallelogramme. Donc les angles opposez d'un parallelogramme sont égaux entr'eux, *ce qu'il falloit demontrer.*



[1] *Part.* 3. *Prop.* 24. *Geo.* [2] *Ax.* 18. *gener.*
[3] *Ax.* 9. *general.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit par exemple le quadrilatere *ABCD*; il faut mener aux ſommets de deux angles oppoſez *A* & *C* la ligne *AC*. Il eſt conſtant [1] que la ſomme des 3 angles du triangle *ADC* eſt égale à deux droits; pareillement que la ſomme des angles du triangle *ABC* eſt auſſi égale à deux angles droits. Or la ſomme des angles du quadrilatere *ABCD* eſt la même que la ſomme de ceux des deux triangles *ADC* & *ABC*. Donc la ſomme des angles du quadrilatere *ABCD* eſt égale à 4 angles droits, *ce qu'il falloit demontrer.*

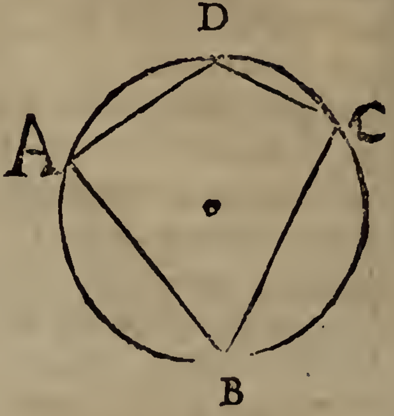


DEMONSTRATION
DE LA TROISIE'ME PARTIE.

La ſomme de deux angles oppoſez, par exemple *A* & *C*; *B* & *D* d'un quadrilatere *ABCD* inſcrit dans un cercle eſt égale à deux angles droits. Car ces deux angles *A* & *C*, pris enſemble, ont [2] pour meſure la moitié d'une circonference de cercle, c'eſt à dire [3], la moitié de ſes deux parties *BCD* & *BAD*. Les deux

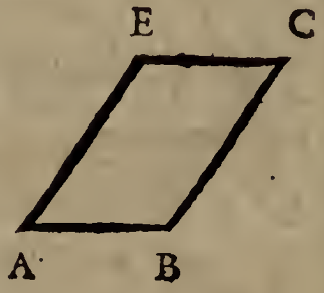
[1] *Prop.* 31. *Geo.* [2] *Prop.* 27. *Geo.*
[3] *Ax.* 3. *gener.*

angles *B* & *D* ont * pareillement pour meſure la moitié des arcs *ADC* & *ABC* ſur leſquels ils ſont appuyez, ce qui eſt [1] la même choſe que la moitié de toute la circonference *ABCD*, laquelle moitié eſt [2] la meſure de deux angles droits. Donc la ſomme des angles oppoſez du quadrilatere *ABCD* inſcrit dans le cercle eſt égale à deux droits, *ce qu'il falloit demontrer.*



COROLLAIRE I.

La converſe de la premiere partie de la Propoſition preſente eſt telle : un quadrilatere dont les angles oppoſez ſont égaux entr'eux, eſt un parallelogramme. Soit le quadrilatere *AC* dont les angles oppoſez *A* & *C* ſont égaux entr'eux, & dont les angles *E* & *B* ſont auſſi égaux entr'eux : je dis que les cotez *EC* & *AB* ſont paralleles entr'eux ; de même des cotez *AE* & *BC*. Car ſi à l'angle *A* on ajoûte l'angle *E*, & ſi à l'angle *C* d'une autre part on ajoûte l'angle *B*, on aura [3] $A + E = C + B$. Or ces angles

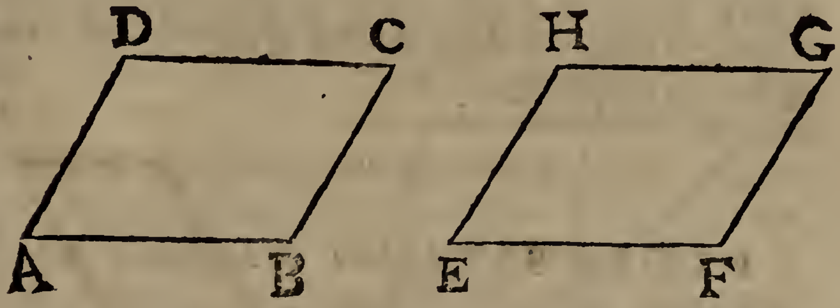


* *Prop.* 27. *Geo.* [1] *Ax.* 3. *Geo.*
[2] *Cor.* 1. *Prop.* 20. *Geo.*
[3] *Ax.* 4. *gen.*

$A+E+C+B$ sont [1] égaux à quatre droits. Donc les angles $A+E$ seront égaux à deux droits. Donc [2] les lignes *EC* & *AB* sont paralleles entr'elles. De même si on ajoute l'angle *B* à l'angle *A*, & l'angle *E* à l'angle *C*, on aura $A+B=C+E$. Et enfin on trouvera que les angles $A+B$ seront égaux à deux droits. Donc les lignes *AE* & *BC* seront aussi paralleles.

COROLLAIRE II.

Si un parallelogramme, par exemple *AC*, à deux de ses côtez *AD* & *AB* qui comprennent un angle, égaux aux deux côtez *HE* & *EF* d'un autre parallelogramme *EG*; & si l'angle *DAB* compris par les deux côtez de l'un



est égal à l'angle *HEF* compris par les deux côtez de l'autre : un de ces parallelogrammes *AC* sera égal à l'autre *EG*, en toutes manieres. Car 1° les côtez *DC* & *CB* étant [3] égaux aux côtez *AB* & *AD*, ces mêmes côtez *DC* & *CB* seront aussi égaux aux côtez *EF* & *EH*, & enfin [3] aux côtez *GH* & *GF*, chacun à chacun. 2° Les angles *A* & *B* sont égaux [4] à deux droits. Pareillement *E* & *F* sont [4] égaux à la même

[1] 2e *Part. de la Prop. pres.* [2] *Part. 3. Prop. 25. Geo.* [3] *Part. 1. Prop. 37. Geo.* [4] *Part. 3. Prop. 24. Geo.*

grandeur qui eſt deux droits. Donc* $A+B=E+F$. Mais [1] $A=E$. Donc retranchant d'une part A, & de l'autre E, il reſtera [2] l'angle $B=F$. Or [3] l'angle $C=A$, & $G=E$. Donc * l'angle $C=G$. Pareillement [3] $D=B$, & $H=F$. Donc * l'angle $D=H$. 3° Enfin les côtez d'une de ces ſurfaces étant égaux aux côtez de l'autre, chacun à chacun, de même des angles; une de ces ſurfaces ſera [4] égale à l'autre.

COROLLAIRE III.

Lorſque la ſomme des angles oppoſez d'un quadrilatere n'eſt point égale à deux angles droits, ce quadrilatere ne peut être inſcrit dans un cercle. Car ſi ce quadrilatere pouvoit être inſcrit dans un cercle, ces angles oppoſez ſeroient [5] égaux à deux angles droits, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

PROPOSITION XXXIX.

Les parallelogrammes poſez ſur la même baſe & entre les mêmes lignes paralleles ſont égaux entr'eux.

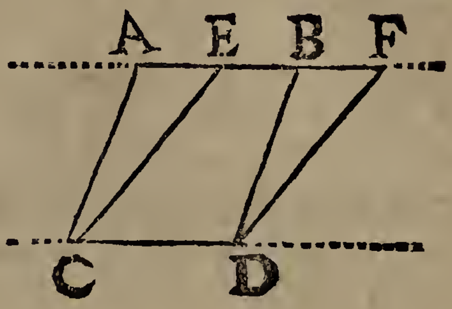
DEMONSTRATION.

SOient les parallelogrammes AD & ED poſez ſur la même baſe CD, & entre les

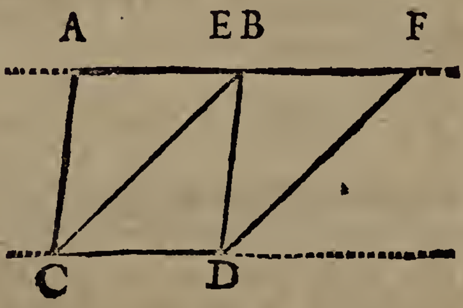
* *Ax.* 18. *gen.* [1] *Suppoſit.*
[2] *Ax.* 9. *gen.* [3] *Part.* 1. *Prop. preſ.*
[4] *Ax.* 1. *Geo.* [5] *Part.* 3. *Prop. preſ.*

mêmes paralleles *A F* & *C D* : je dis que la ſurface du parallelogramme *A C D B* eſt égale à la ſurface du parallelogramme *E C D F*.

Car les triangles *ACE* & *B D F* ont * les angles *C A E* & *D B F* égaux entr'eux, & ont pareillement les angles *AEC* & *B F D* auſſi égaux entr'eux. Donc l'angle *A C E* ſera [1] égal à l'angle *B D F*. Or [2] le côté $AC = BD$, parceque ce ſont côtez oppoſez de parallelogrammes, de même le côté $CE = DF$. Dans le triangle *A E C* on a donc les côtez



A C & *C E* égaux aux côtez *D B* & *D F*, & l'angle *A C E* égal à l'angle *B D F*. Donc les baſes *A E* & *B F* ſeront [3] égales entr'elles, & les triangles *A C E* & *BDF* ſeront [4] auſſi égaux entr'eux.



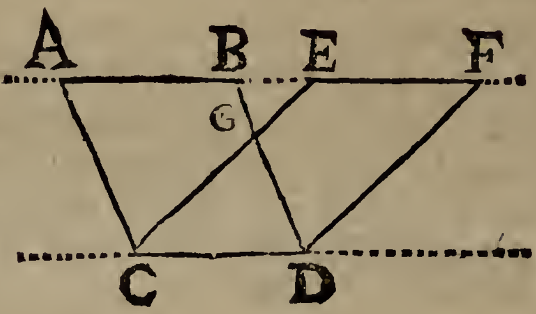
Mais les parallelogrammes *A D* & *C F* peuvent être poſez ſur la même baſe *C D* en 3 manieres.

1° Le point *E* ou *F* ſe peut rencontrer entre les points *A* & *B* : alors on ajoûtera au trian-

* *Part.* 1. *Prop.* 24. *Geo.* [1] *Cor.* 4. *Prop.* 31. *Geo.* [2] *Part.* 1. *Prop.* 37. *Geo.* [3] *Part.* 1. *Prop.* 35. *Geo.* [4] *Ax.* 1. *Geo.*

gle *ACE* la ſurface *CDBE*; & au triangle *BDF* on ajoûtera la même ſurface *CDBE*; on * aura $CAE + CDBE = BDF + CDBE$, c'eſt à dire, le parallelogramme *AD* ſera égal à *ED*.

2° Le point *E* ſe peut rencontrer ſur le point *B*, ou *F* ſur *A*: alors au triangle *ACE* on ajoûtera le triangle *CBD*; & au triangle *BDF* on ajoûtera le même triangle *CBD*, & * on aura $ACB + CBD = BDF + CBD$, c'eſt à dire, le parallelogramme $AD = CF$.



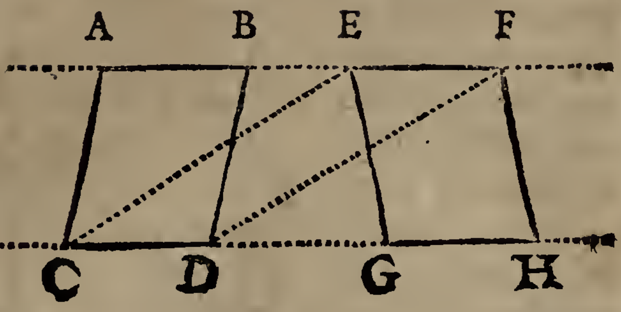
3° Enfin les points *E* & *F* ſe peuvent rencontrer entierement hors la ligne *AB*, de ſorte que *CE* coupera *BD* en *G*. Alors du triangle *ACE* & du triangle *BDF* on retranchera le triangle *BGE* qui leur eſt commun, & il reſtera [1] la ſurface $ACGB = EGDF$. Et en ajoûtant de part & d'autre le triangle *CGD*, on aura * $ACGB + CGD = EGDF + CGD$, c'eſt à dire, le parallelogramme $AD = CF$, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

Les parallelogrammes poſez ſur des baſes égales & entre les mêmes lignes paralleles ou

* *Ax.* 4. *general.*
[1] *Ax.* 9. *general.*

* de même hauteur sont aussi égaux entr'eux. Soient les bases *CD* & *G H* des parallelogrammes *C B* & *G F* de même hauteur, égales entr'elles : je dis que le parallelogramme *C B* = *G F*. Pour le demontrer soient menées les lignes *C E* & *D F*, la surface *C F* sera un parallelogramme. Car, puisque [1] *E F* = *G H*, & que [2] *C D* = *G H*, on aura *C D* = *E F*; ces deux lignes *C D* & *E F*, étant égales & paralleles, comprendront [3] par leurs extrêmitez les lignes *C E* & *D F* paralleles & égales. Or [4] le parallelogramme *C B* = *C F*, & *G F* = *C F*. Donc [5] *C B* = G F.

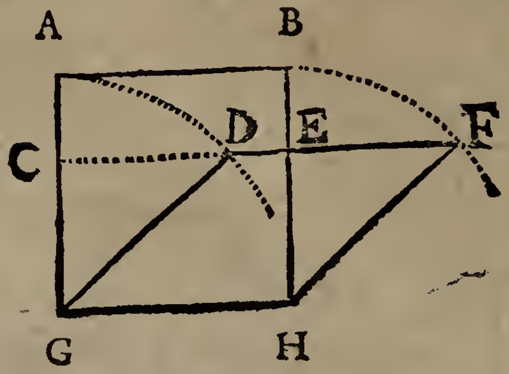


COROLLAIRE II.

Les surfaces des parallelogrammes de même circuit, dont les angles sont droits, ou approchent le plus des angles droits, sont plus grandes que les surfaces des autres parallelogrammes dont les angles approchent moins des angles droits. Soit le parallelogramme *A H*

* *Cor.* 4. *Prop.* 6. *Geo.*
[1] *Part.* 1. *Prop.* 37. *Geo.*
[2] *Supposit.*
[3] *Prop.* 36. *Geo.*
[4] *Prop. pres.*
[5] *Ax.* 18. *general.*

rectangle, & *DH* obliquangle, & soient ces deux parallelogrammes équilateraux entre eux, c'est à dire, * que $GA = GD$; $HB = HF$, on a [1] $AB = GH$, & $DF = GH$, & [2] enfin $AB = DF$; le côté GH est commun : je dis que le parallelogramme $AH > GF$. Car [3] le parallelogramme $DH = CH$; mais $CH < AH$, & *AH* est rectangle, & *DH* obliquangle; l'un & l'autre d'égal circuit. Donc les parallelogrammes rectangles sont plus grands que les obliquangles quoique équilateraux entr'eux. On dira la même chose des triangles.

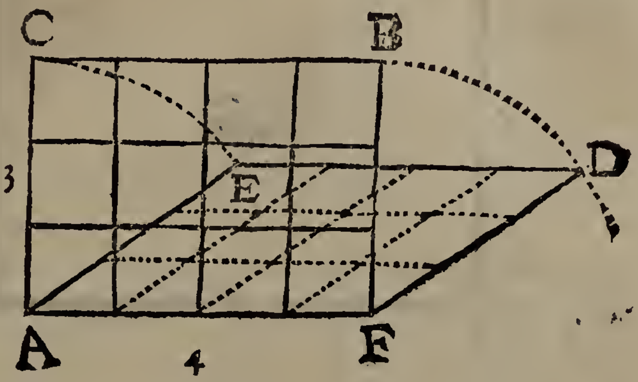


C'est pour cela que j'ay déja remarqué ailleurs [4] que pour avoir en pieds quarrez, ou en toises quarrées, &c. la surface d'un parallelogramme dont les angles sont obliques, il ne falloit pas multiplier l'un par l'autre les côtez qui comprennent un de ces angles. Parcequ'en faisant cette multiplication on trouve seulement pour produit le nombre des parallelogrammes obliques qui composent le parallelogramme total & qui lui sont équiangles; mais on ne trouve pas le nombre des parallelogrammes d'une toise quarrée ou d'un pied quarré, &c. que le parallelogramme contient. Et quand on veut connoî-

* *Supposit.* [1] *Part.* 1. *Prop.* 37. *Geo.*
[2] *Ax.* 18. *gener.* [3] *Prop. pres.*
[4] *fin du Cor.* 2. *déf.* 53. *page* 212. *Geo.*

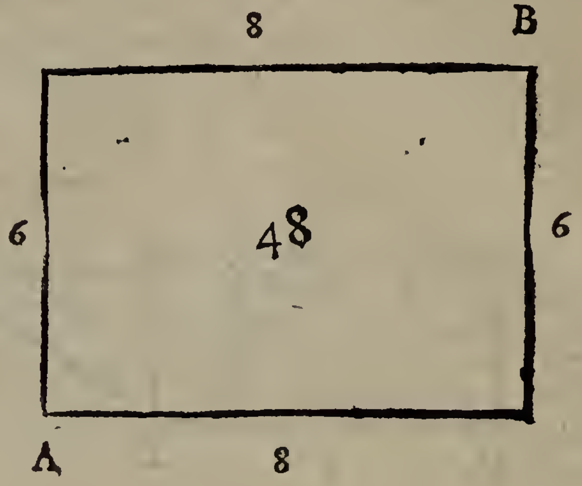
tre

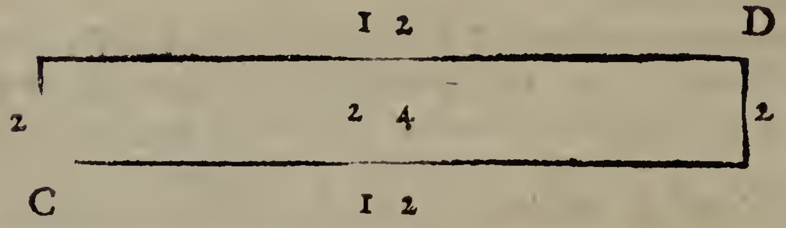
tre une ſurface ſur le terrain ou ailleurs, l'uſage eſt de chercher des toiſes quarrées, perches quarrées, &c. Par exemple ſi on multiplie l'un par l'autre les côtez *AC* & *AF* du parallelogramme rectangle *AB*, & ſi le côté *AC* eſt de 3 toiſes, & le côté *AF* de 4 toiſes, on aura 12 toiſes quarrées pour la ſurface du parallelogramme *AB*.



Si le côté *AE* du parallelogramme obliquangle *AD* eſt auſſi de 3 toiſes, en multipliant ce côté *AE* par *AF* de 4 toiſes, on aura 12 toiſes obliquangles, c'eſt à dire 12 petits parallelogrammes obliques qui ſont la valeur du parallelogramme total *AD*, mais qui n'expriment point la valeur des toiſes quarrées qu'on cherche. Car on vient de faire voir qu'un rhombe dont chaque côté eſt d'une toiſe de longueur, eſt plus petit qu'une toiſe quarrée.

Au lieu qu'on vient d'examiner les ſurfaces de deux parallelogrammes de même circuit, lorſque les côtez de l'un ſont égaux aux côtez de l'autre, & que chaque angle de l'un differe de chaque angle de l'autre; ſi on examine preſentement les ſurfaces de deux de ces parallelogrammes, lorſque les angles de l'un ſont égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun, & que chaque côté de l'un differe de chaque côté de l'autre: On trouvera encore que les parallelogrammes de même circuit qui approchent le plus du quarré, seront plus grands que les autres qui en approchent moins.





Soit par exemple le parallelogramme rectangle *A* B, dont un côté est de 8 toises, & l'autre de 6; soit un autre parallelogramme rectangle *C D* dont un côté soit de 2 toises & l'autre de 12: on trouve * que la surface du parallelogramme *A* B est de 48 toises quarrées, & que la surface du parallelogramme *C D* est seulement de 24 toises, quoique chacun soit de 28 toises linéaires de circuit.

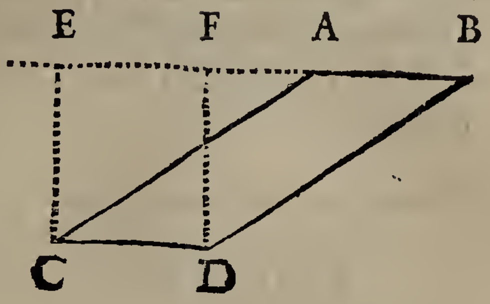
Enfin de ce Corollaire on concluera que les quarrez sont les surfaces planes les plus grandes de toutes celles qui ont le même circuit.

COROLLAIRE III.

La surface d'un parallelogramme obliquangle

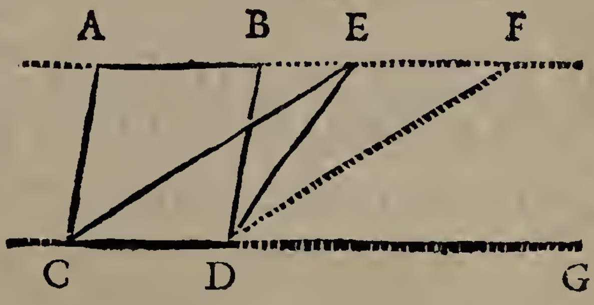
* *Cor. 2. déf. 53. Geo.*

eſt égale au produit de ſa baſe multipliée par ſa hauteur. Soit par exemple le parallelogramme obliquangle *CB*, lorſqu'on multiplie la baſe *C D* par la hauteur *C E* ou *D F*, on a * pour produit le parallelogramme *C F*. Or [1] le parallelogramme *C F* eſt égal au parallelogramme *C B*. Donc en multipliant la baſe *C D* par la hauteur du parallelogramme *C B*, on aura pour produit la valeur de ce même parallelogramme *C B*.



COROLLAIRE IV.

Les parallelogrammes ſont doubles des triangles de même baſe & de même hauteur. Soient le parallelogramme *CB*, par exemple, & le triangle *C D E*, poſez ſur la même baſe *C D* & entre les mêmes lignes paralleles *A F* & *C G* : je dis que ce parallelogramme *C B* eſt double du triangle *C D E*. Pour le demontrer, ſoit menée par le point *D* la ligne *D F* parallele à la ligne *C E*, on aura [1] le parallelogramme *CF*=*CB*.



* *Cor. 2. déf. 53. Geo.*
[1] *Prop. preſ.*

Or * le triangle *CDE* eſt la moitié du parallelogramme *CF*, ou de ſon égal *CB*. Donc ce parallelogramme *CB* ſera double de *CDE*, puiſqu'un tout eſt double d'une de ſes moitiez.

PROPOSITION XL.

1°. *Les triangles poſez ſur la même baſe ou ſur des baſes égales, & entre les mêmes lignes paralleles, ſont égaux entr'eux.*

2°. *Reciproquement les triangles qui ſont ſur la même baſe, ou ſur des baſes égales, en ligne droite, du même côté, & qui ſont égaux entre eux, ſont entre les mêmes lignes paralleles.*

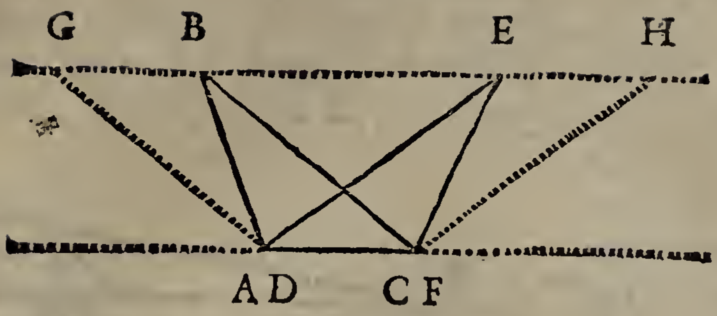
3°. *Reciproquement enfin les triangles qui ſont entre les mêmes paralleles & égaux entr'eux, ſont ſur la même baſe, ou ſur des baſes égales.*

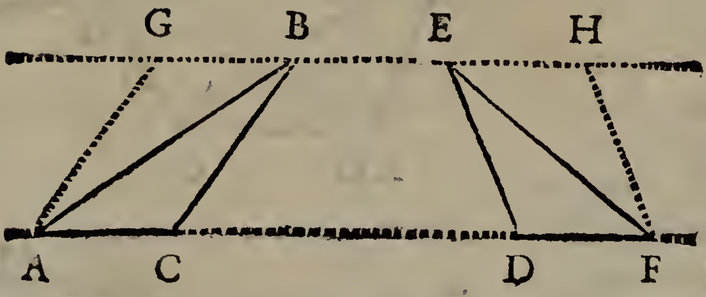
DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soient les triangles *ABC* & *DEF* ſur la même baſe *AC*, ou ſur les baſes égales *AC* & *DF*, & entre les mêmes paralleles *AF* & *GH* : je dis que le triangle *ABC* eſt égal au triangle *DFE*. Pour le demontrer, ſoit menée par le point *A* du triangle *ABC* une ligne parallele à *CB*; puiſque *GB* eſt [1] parallele à *AC*, on aura le parallelogramme *CG* : la même choſe ſeroit arrivée, ſi par le point *C* on avoit mené une

* *Cor. 2. Prop. 37. Geo.*

[1] *Suppoſit.*





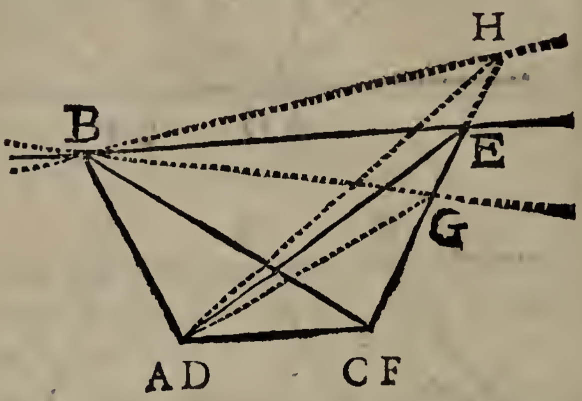
ligne parallele à *AB*. Soit encore menée par le point *F* la ligne *FH* parallelement au côté *DE*. Le parallelogramme *D H* ſera * égal au parallelogramme *G C*, puiſque la baſe *A C* = *D F*, & que ces deux parallelogrammes ſont entre les mêmes lignes paralleles. Or puiſque *C G* = *D H*, on aura [1] le triangle *A B C* = *D E F*, *ce qu'il falloit demontrer.*

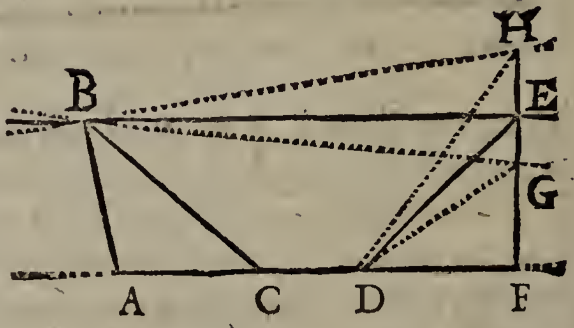
DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soient les deux triangles *ABC* & *DEF* égaux entr'eux, poſez ſur la même baſe *A C*, ou ſur des baſes égales *A C* & *D F*, en ligne droite & du même côté : je dis que ces deux triangles

* *Prop.* 39. *& Cor.* 1. *Prop.* 39. *Geo.*
[1] *Ax.* 12. *general.*

ſont entre les mêmes lignes paralleles, c'eſt à dire, que la ligne *BE* menée par les ſommets *B* & *E* ſera parallele à la ligne *AF*. Car dans la ſuppoſition preſente, il eſt impoſſible qu'on mêne par le ſommet *B* une autre ligne que *BE* qui ſoit parallele à *AF*. Si *BE* n'étoit pas parallele à *AF*, on en pourroit mener* une par ce point *B*, qui paſſeroit de part ou d'autre du point *E*, ſçavoir *BH* ou *BG*. Si c'étoit par exemple *BH* qui fût parallele à *AF*, on auroit [1] le triangle *DHF* = *ABC*; mais [2] *DEF* = *ABC*. Donc le triangle *DHF* ſeroit [3] égal à *DEF*, c'eſt à dire, la partie ſeroit égale au tout, ce qui eſt [4] impoſſible. Par la même raiſon *BG* ne peut être parallele à *AF*. C'eſt donc la ſeule ligne *BE* qui eſt parallele à *AF*, *ce qu'il falloit demontrer.*

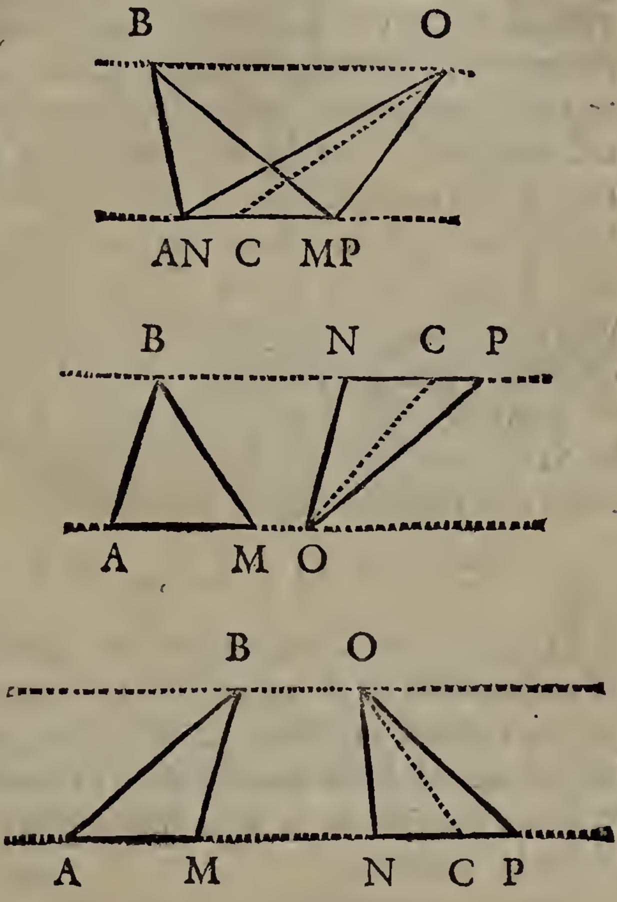




* *Cor. Prop. 23. Geo.*
[1] *Part. 1. Prop. preſ.*
[2] *Suppoſit.*
[3] *Ax. 18. gen.*
[4] *Ax. 2. gen.*

DEMONSTRATION
DE LA TROISIE'ME PARTIE.

Soit le triangle *ABM* = *NOP*, & que l'un & l'autre soit entre les mêmes lignes paralleles: je dis que les bases *AM* & *NP* sont la même, ou sont égales entre elles. Car si l'une de ces deux bases n'étoit pas égale à l'autre, & que *NP*, par exemple, fût



plus grande que *AM*, retranchant son excès *CP*, on auroit la base *NC* du triangle *NOC* égale à *AM* base du triangle *ABM*. Le * triangle *NOC* seroit donc égal à *ABM*; mais [1] *NOP* = *ABM*. Donc le tout *NOP* seroit [2] égal à sa partie *NOC*, ce qui est [3] impossible. Donc

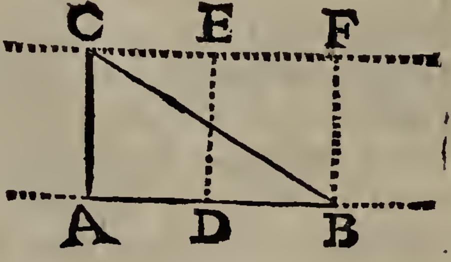
* *Part. 1. Prop. pres.*
[1] *Supposit.*
[2] *Ax. 18. gen.*
[3] *Ax. 2. gen.*

la base *A M* sera égale à *N P*, *ce qu'il falloit demontrer.*

Ce qui a été demontré dans la 2^e^ & 3^e^ partie de la Proposition presente à l'égard des triangles, peut être demontré de la même maniere à l'égard des parallelogrammes. J'ai crû qu'il suffiroit de faire ces differentes demonstrations seulement à l'égard des triangles. Car, lorsque des parallelogrammes posez sur la même base, du même côté, sont égaux entr'eux; après avoir mené des diagonales, on y trouve aussi des triangles qui en sont les moitiez, qui sont égaux entr'eux, posez sur la même base; & partant entre les mêmes lignes paralleles. Il est évident * que les moitiez des parallelogrammes ne peuvent être entre les mêmes lignes paralleles sans que ces parallelogrammes soient aussi entre ces mêmes lignes paralleles.

COROLLAIRE I.

La surface d'un triangle est égale à la moitié du produit de sa base multipliée par sa hauteur, ou (ce qui est la même chose) au produit de la moitié de la base multipliée par sa hauteur; ou enfin au produit de la base multipliée par la moitié de la hauteur.

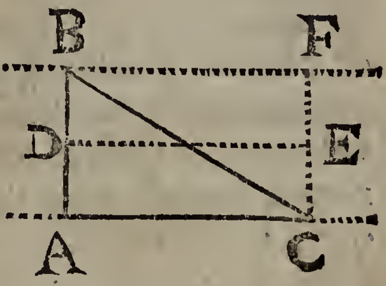


Soit le triangle rectangle *A B C*. Si on multiplie l'un par l'autre les côtez qui comprennent l'angle droit, c'est à dire, si on multiplie la base *A B* par la hauteur *A C*, on a pour pro-

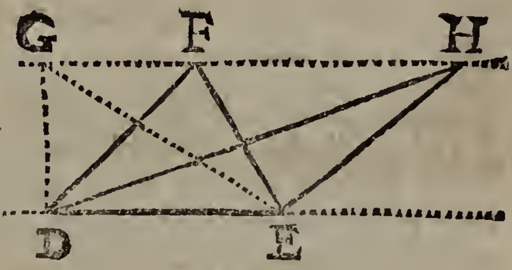
* *Cor.* 1. *Prop.* 15. *Geo.*

duit le parallelogramme rectangle *AF* ; & en prenant la moitié de ce produit, on aura la surface du triangle *ACB*, qui est * la moitié de *AF*.

Si on multiplie le côté *AC* par *AD* moitié du côté *AB*, on a le parallelogramme rectangle *AE* qui est la moitié du parallelogramme *AF* ; puisque [1] $AE = DF$. Mais le triangle *ABC* est [2] égal à la moitié du parallelogramme *AF*. Donc le triangle *ABC* est égal au produit de sa hauteur multipliée par la moitié de sa base, ou au produit de sa base multipliée par la moitié de sa hauteur.



On dira la même chose des triangles obliquangles, c'est à dire, oxigones ou obtusangles. Par exemple le triangle *DEF* ou *DEH* est égal à un triangle rectangle *DEG* de même base & de même hauteur ; & partant ce qu'on vient de dire du triangle rectangle *DEG* convient aussi aux triangles obliquangles *DEF*, *DEH*, &c.



COROLLAIRE II.

Il est donc facile de connoître combien de

* *Cor.* 2. *Prop.* 37. *Geo.* [1] *Cor.* 1. *Prop.* 39. *Geo.*
[2] *Cor.* 4. *Prop.* 39. *Geo.*

toises quarrées, ou combien de perches, &c. contiendra une surface plane rectiligne proposée, pourvû qu'on la puisse parcourir a volonté. Car il suffira de reduire cette surface en triangles rectangles, ou en parallelogrammes rectangles, & de connoître la surface de chaque triangle, ou de chaque parallelogramme rectangle. La somme de toutes ces surfaces particulieres sera * la valeur de la surface totale proposée. Mais auparavant que de voir un exemple de cette pratique, il est necessaire de faire attention 1° aux espéces de mesures les plus en usage; 2° aux manieres de mesurer une longueur ou distance sur le terrain; 3° par un point donné dans une ligne droite, ou hors de cette ligne comment on lui mêne une autre ligne perpendiculaire dans une plaine ou campagne.

1° Il faut remarquer qu'il y a des toises lineaires, toises quarrées, & toises cubes; de même des pieds, des pouces, & des autres mesures.

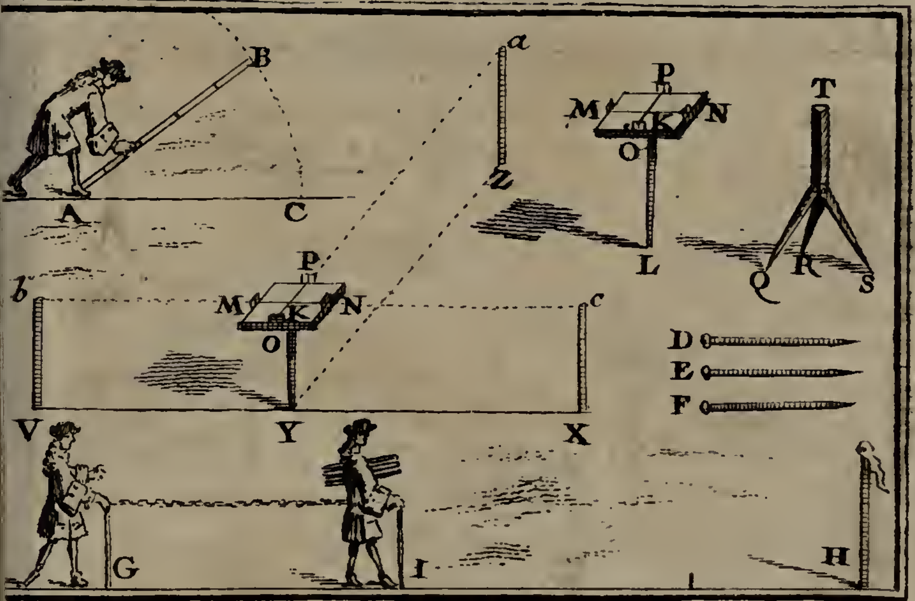
Une perche lineaire contient 18 pieds, 20 pieds, ou 22, même 24 pieds de longueur, selon le païs où on veut mesurer ou arpenter; une toise lineaire contient 6 pieds; un pied lineaire contient 12 pouces; un pouce contient 12 lignes.

Une toise quarrée contient 36 pieds; un pied quarré contient 144 pouces. On connoîtra de la même maniere les autres mesures, en quarrant leur longueur. La toise cube contient 216 pieds cubes, &c. Il est encore facile de connoître le cube des autres mesures.

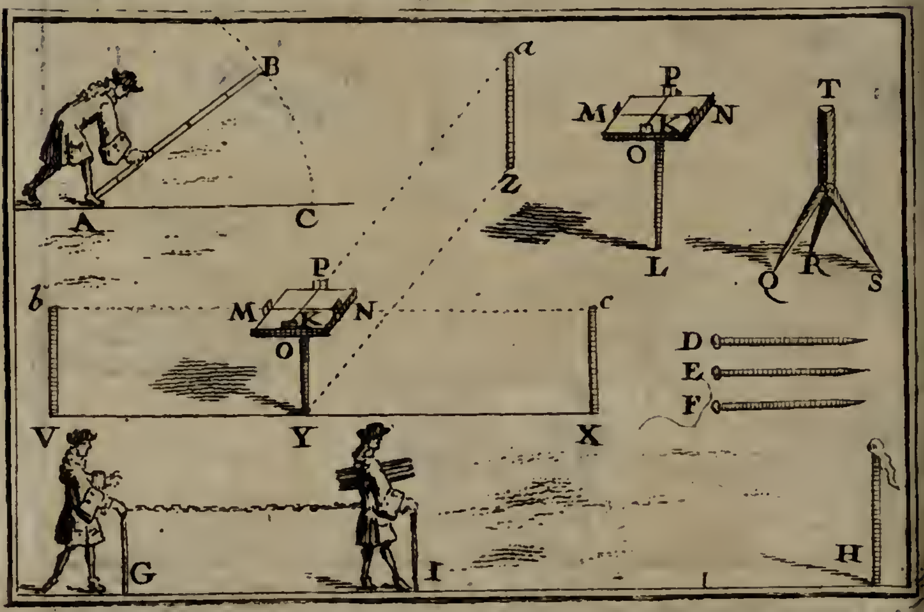
2° On mesure la longueur d'une ligne droite sur la terre avec une perche, ou une toise de bois. Et alors un homme seul peut appliquer cette per-

* *Ax.* 3. *gen.*

che en partie, ou entierement; une ou plusieurs fois successivement sur la ligne qu'il veut mesurer. Cet homme commence à appliquer un bout *A* de sa perche au bout de la ligne, en mettant un de ses pieds au point *A* pour empêcher cette perche de glisser; enfin il l'a couche successivement en abaissant le point *B* en *C*, & élevant ensuite le point *A*, il compte combien il l'a couchée de fois.



On mesure aussi une distance sur la terre avec une perche, une chaîne, ou une corde qui ne s'alonge ou ne racourcit aucunement; on se sert de picquets *D*, *E*, *F*, &c. Alors il faut deux personnes, qui s'aideront l'un l'autre. Soit la distance du point *G* au point *H*; si on se propose de la mesurer, le premier mesureur se mettra à l'extrêmité *G*, & l'autre mesureur en *I*, qui sera averti par la personne qui est en *G* de se détourner de part ou d'autre jusqu'à ce qu'il fiche son picquet en ligne droite de *G* en *H*. Après que le mesureur *I* a fiché son picquet en *I*, il marche vers *H* jusqu'à ce que le mesureur *G* ſoit parvenu en *I* ; & alors le meſureur *G* prend le picquet qui étoit en *I*, & ils continuent ainſi juſqu'en *H*. Etant parvenus en *H*, le meſureur *G* compte combien il y a de picquets. Enfin ſi la derniere perche ne ſe termine pas en *H* exactement, le meſureur *G* compte encore combien il y a de pieds & de pouces depuis le dernier picquet juſqu'au point *H*, & écrit le tout ſur un papier pour s'en ſouvenir.



3° Par un point donné dans une ligne droite ou hors d'une ligne droite donnée dans la campagne pour mener une ligne perpendiculaire à cette ligne donnée, on ſe ſert d'un bâton *K L*, ou d'un ſupport à 3 pieds *Q R S T*, & à l'extrêmité *K* ou *T* il y a 4 pinnules, ou points *M*, *N*, *O*, *P* immobiles, placées chacune à chaque extrêmité des lignes *MN* & *O P* menées perpendiculairement l'une à l'autre ſur une planche. Lorſqu'on ne peut ficher en terre l'extrêmité du bâton *K L*, on ſe ſert du ſupport à 3 pieds *Q R S T*.

1° Soit le point *Y* donné dans la ligne *V X*, ayant placé le bâton *K L* ſur la ligne donnée *V X* au

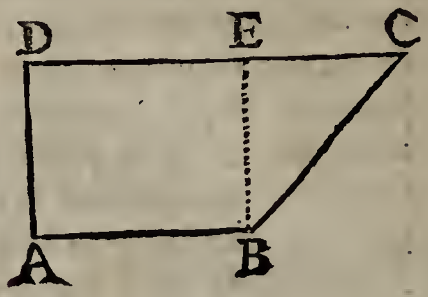
point

point *Y*, & ayant dirigé les pinnules *MN* vers les picquets *cX* & *bV*; en regardant ensuite par les deux autres pinnules *O*, *P*; si on ordonne de ficher un picquet en *aZ*, de sorte qu'il se trouve exactement en ligne droite avec ces pinnules *O*, *P*, on aura la perpendiculaire *YZ* cherchée. 2° Si le point *Z* est pris hors la ligne *VX*, on transportera le bâton *KL*, ou le support *QRST* sur la ligne *VX* de *V* vers *X*, ou de *X* vers *V*, de sorte que les pinnules *M* & *N* soient l'une & l'autre dirigées vers *c* & vers *b*, & on continuera de transporter ce bâton jusqu'à ce qu'en regardant par les pinnules traversantes *O* & *P*, on apperçoive le signe ou picquet fiché au point donné *Z*. Le bâton se trouvant alors placé dans le point *Y*, ce sera par où passera la perpendiculaire menée du point donné *Z* à la ligne donnée *VX*. Parceque le parallelogramme *YA* est perpendiculaire au plan *Vc*; car l'angle droit *cKa* est * le même que celui de ces plans. Donc la ligne *YZ* qui est [1] parallele à *OA*, est aussi perpendiculaire au plan *VC*. Donc [2] la ligne *YZ* est perpendiculaire à *VX*.

Soit une surface plane sur le terrain qu'on souhaite mesurer ou arpenter; on examinera si cette surface, lorsqu'il n'y a que quatre angles est un parallelogramme rectangle, ce qui est facile à connoître, en appliquant à chacun des angles de cette surface le bâton *KL* avec ses pinnules *M*, *N*, *O*, *P*. Si cette surface est un parallelogramme rectangle, il est facile [3] de connoître le nombre des perches, ou toises, &c.

* *Déf.* 18. *Geo.* [1] *Prop.* 36. *Geo.*
[2] *Déf.* 20. *Geo.* [3] *Cor.* 2. *Déf.* 53. *Geo.*

qu'on cherche. S'il n'y a que deux angles droits, comme il arrive dans la surface *ABCD*, dont les angles *A* & *D* sont droits, on menera du point *B* la perpendiculaire *BE*, & on aura le parallelogramme rectangle *AE*, & le triangle rectangle *BEC*. Après avoir



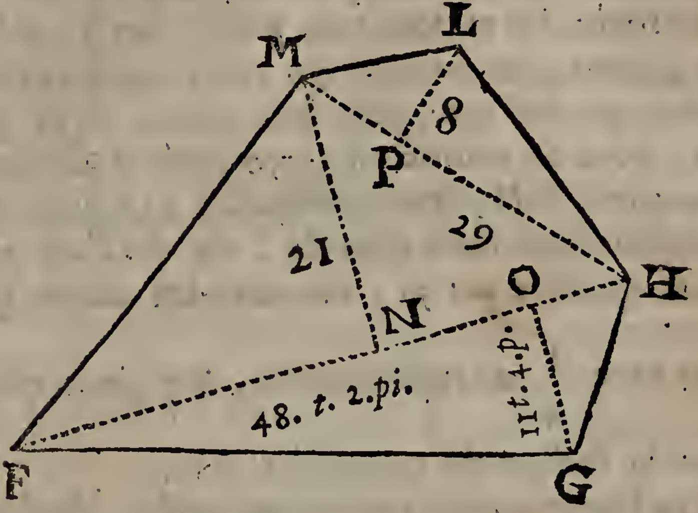
mesuré les côtez du rectangle *AE*, on mesurera ensuite les côtez *BE* & *EC* du triangle rectangle *BEC*. On connoîtra * ensuite la surface du rectangle, [1] celle du triangle rectangle *BEC*, & [2] enfin on connoîtra la surface entiere *ABCD*.

Soit une autre surface, par exemple *FGHLM*, dont aucun des angles n'est droit. On divisera cette surface en triangles, en menant du sommet d'un de ses angles, par exemple du point *H*, des lignes aux sommets de chacun des autres angles. Ensuite du point *G* on menera la ligne *GO* perpendiculaire à *FH*. Du point *M* on menera la ligne *MN* perpendiculaire à la même ligne *FH*. Enfin du point *L* on menera la ligne *LP* perpendiculaire à *MH*; si quelqu'un de ces angles, par exemple *MLH*, avoit été droit, on n'auroit pas eu besoin d'autre perpendiculaire que *LH*.

On mesurera chacune de ces perpendiculaires, sçavoir *LP* que je suppose par exemple de 8 toises, & la base *MH* que je suppose de 29 toises.

* *Cor. 2. déf. 53. Geo.* [1] *Cor. 1. Prop. 40. Geo.*
[2] *Ax. 3. gen.*

On mesurera la base FH que je suppose être de 48 toises 2 pieds, & la perpendiculaire MN de 21 toises; enfin la perpendiculaire GO, que je suppose de 11 toises 4 pieds.



Pour connoître combien le triangle MLH contient de toises, il faut multiplier la base $MH = 29$ toises par 4 toises qui sont la moitié de la perpendiculaire LP, le produit qui est 116 toises est * la surface du triangle MLH.

Pour connoître la surface du triangle FMH, on multipliera la base $FH = 48$ toises 2 pieds par la perpendiculaire MN qui est de 21 toises; le produit de 21 fois 2 pieds sera 42 pieds $= 7$ toises, & le produit de 21 multiplié par 48 sera 1008 toises: de sorte que le produit total de 21 toises multipliées par 48 toises 2 pieds, sera 1015 toises quarrées, dont la moitié 507 toises & demie est la surface du triangle FMH.

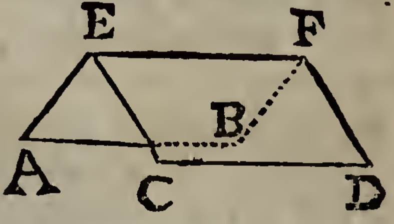
Enfin pour connoître la surface du triangle FGH, on prendra la moitié du produit de la base $FH = 48$ toises 2 pieds multipliées par la

* Cor. 1. Prop. 40. Geo.

perpendiculaire *GO* = 11 toises 4 pieds. Pour faire cette multiplication, on reduira les 48 toises en pieds, & on ajoûtera les 2 pieds, cela sera 290 pieds (s'il y avoit eu des pouces, on auroit reduit le tout en pouces.) On reduira pareillement les 11 toises en pieds, on y ajoûtera les 4 pieds, & on aura 70 pieds qui étant multipliez par les 290, cela sera 20300 pieds quarrez, dont la moitié est 10150 pour la surface du triangle *FGH*; mais puisqu'il y a 36 pieds quarrez dans une toise quarrée, en divisant 10150 pieds quarrez par 36, on aura 281 toises quarrées avec $\frac{3}{4}$ de toise quarrée, & 7 pieds quarrez pour la surface du triangle *FGH*.

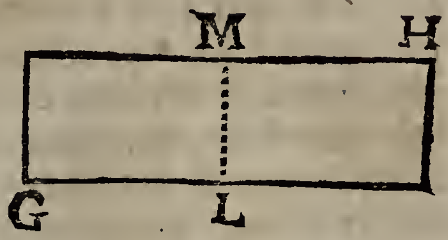
On fera une addition de 116 toises, surface du triangle *MLH* avec 507 toises & demie, surface du triangle *FMH*, & avec 281 toises $\frac{3}{4}$ & 7 pieds, surface du triangle *FGH*. On aura pour total 905 toises $\frac{1}{4}$ & 7 pieds quarrez pour * la surface entiere *FGHLM*.

Pour toiser une couverture de maison, telle que seroit, par exemple *ABCD*, dont le fête est *EF*, il faudroit mesurer le côté *CD* & la somme des côtez *CE* & *EA*. On considereroit le tout comme si c'étoit un parallelogram-



* *Ax. 3. gener.*

me rectangle *G H*, les surfaces *G M* & *L H* qu'on suppose être les mêmes que *A F* & *C F*, étant considerées comme une seule. Alors * il sera facile de connoître cette surface.



On peut par cette methode mesurer la surface d'une chambre, d'un jardin, d'un enclos, &c.

PROPOSITION XLI.

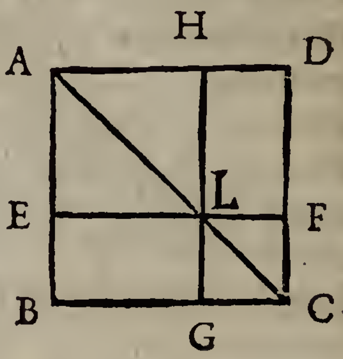
Dans un parallelogramme si on mene une diagonale, & si on mene ensuite dans ce parallelogramme une ligne parallele à un de ses côtez ; & par le point où cette derniere ligne coupe la diagonale si on mene encore une autre ligne parallele à un autre côté : 1° les parallelogrammes par où la diagonale ne passera point, seront égaux entre eux. 2° Si le parallelogramme proposé est un quarré, les parallelogrammes par où passera la diagonale seront aussi des quarrez.

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit le parallelogramme *B D* dont une diagonale est *A C* ; soit menée la ligne *E F* parallele au côté *B C* ; & par le point *L* où cette

* *Cor. 2. déf. 53. Geo.*

ligne *EF* coupe la diagonale *AC* soit menée la ligne *GH* parallele au côté *CD* : je dis que *BL*=*LD*. Car 1° *BL* est * un parallelogramme, puisque *EL* est * parallele à *BG* : & *BA* étant parallele à *CD*, de même que *GH*, on aura *BE* parallele à *GL*. *LD* est aussi un parallelogramme, puisque *LH* est * parallele à *FD*, *EF* étant * parallele à *BC*, & *AD* étant [1] parallele à *BC*, on aura [2] *AD* parallele à *EF*.



Donc *HD* sera parallele à *LF*. Par le même raisonnement *EH* & *GF* sont des parallelogrammes. 2° [3] Le triangle *ABC*=*ADC*. Mais à cause des parallelogrammes *EH* & *GF*, le triangle *AEL*=*AHL*, & *LGC*=*LFC*. Donc [4] *AEL*+*LGC*=*AHL*+*LFC*. Donc si du triangle *ABC* on retranche *AEL*+*LGC* d'une part, & si du triangle *ADC* on retranche *AHL*+*LFC* d'une autre part ; les parallelogrammes *BL* & *LD* par où la diagonale ne passe point, resteront [5] égaux entr'eux, *ce qu'il falloit demontrer.*

* *Par construction.*
[1] *Déf.* 49. *Geo.*
[2] *Prop.* 26. *Geo.*
[3] *Cor.* 2. *Prop.* 37. *Geo.*
[4] *Ax.* 4. *gen.*
[5] *Ax.* 9. *gener.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

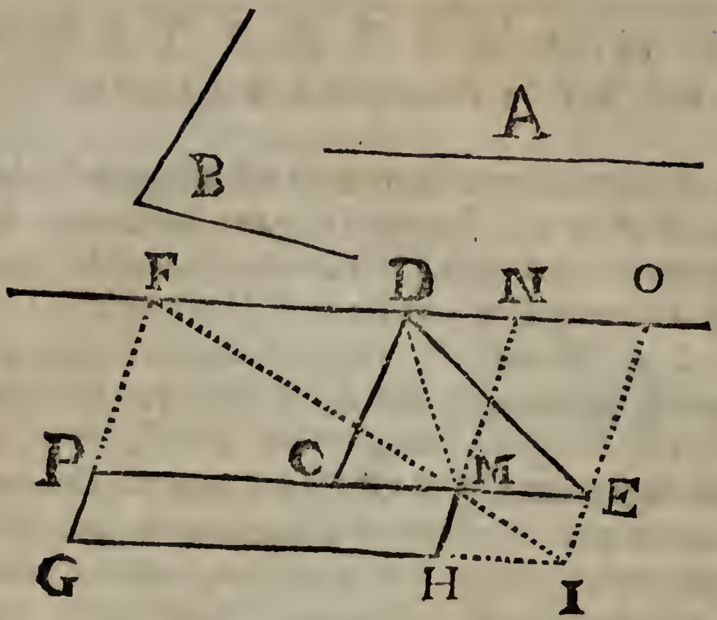
Si le parallelogramme *BD* eſt un quarré, les côtez *BA* & *BC* ſeront [1] égaux entr'eux, & le triangle *ABC* ſera [2] Iſoſcele. Donc [3] l'angle *BAC* = *BCA*; mais auſſi [4] l'angle *ELA* = *BCA*. Donc [5] l'angle *EAL* = *ELA*. Donc [6] le triangle *AEL* eſt Iſoſcele. L'angle *AEL* eſt [4] égal à l'angle droit *ABC*. Donc le parallelogramme *EH* eſt [7] un quarré. On demontrera par le même raiſonnement que *GF* eſt un quarré. Donc ſi le parallelogramme total *BD* eſt un quarré, les parallelogrammes par où paſſera la diagonale, ſeront des quarrez, *ce qu'il falloit demontrer*.

COROLLAIRE.

Entre les uſages de la premiere partie de la Propoſition preſente, elle contribue à la demonſtration de la maniere dont on peut ſe ſervir pour faire un parallelogramme égal à un triangle, par exemple, au triangle *CDE*; & même, ſi on veut, ce parallelogramme aura un de ſes côtez égal à la ligne *A*, & un de ſes angles égal à un angle donné *B*.

1° Ayant mené par le ſommet *D* du triangle *CDE* la ligne *FO* parallele à la baſe *CE*, & ayant pris la moitié de cette baſe pour celle d'un

[1] *Déf.* 50. *Geo.* [2] *Déf.* 40. *Geo.*
[3] *Cor.* 2. *Prop.* 34. *Geo.*
[4] *Part.* 1. *Prop.* 24. *Geo.* [5] *Ax.* 18. *gen.*
[6] *Cor.* 4. *Prop.* 34. *Geo.* [7] *Déf.* 50. *Geo.*



parallelogramme. Du milieu *M* de cette même base *C E* on menera la ligne *M N*, laquelle fera avec *M E* l'angle *N M E* = *B*. Ensuite on achevera le parallelogramme *M O* qui est * double du triangle *M D E*, dont le triangle *C D E* est [1] aussi double. Donc [2] le parallelogramme *M O* est égal au triangle *C D E*.

2° Sur la ligne *F O* on prendra *N F* = *A*. Ensuite du point *F* on menera par le point *M* la ligne indefinie *F I*, & on prolongera le côté *O E* jusques en *I*, rencontre de *F I*. On achevera le parallelogramme *G O*, & on prolongera *E C* en *P*, & *N M* en *H*, pour avoir le parallelogramme qu'on cherchoit qui est *G M* égal [3] à *M O*, & enfin égal au triangle donné *C D E*. Ce parallelogramme *G M* a [4] le côté *G H* = *F N* = *A* [5]. L'angle *P M H* = *N M E* = *B*.

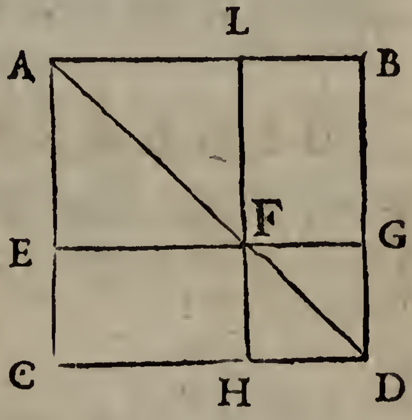
* *Cor. 4. Prop. 39. Geo.*
[1] *Part. 1. Prop. 40. Geo & Ax. 3. gen.*
[2] *Ax. 6. general.* [3] *Part. 1. Prop. pref.*
[4] *Part. 1. Prop. 37. Geo.* [5] *Par construction.*

PROPOSITION XLII.

Le quarré d'une ligne divisée en deux parties à volonté, est égal aux quarrez de chacune de ses deux parties & à deux rectangles compris sous ces mêmes parties.

DEMONSTRATION.

SOit la ligne *C D* coupée en deux parties au point *H* : je dis que le quarré de cette ligne est égal aux quarrez de chacune des parties *C H* & *H D*, & à deux rectangles compris sous ces mêmes parties *C H* & *H D*. Pour le demontrer, soit *C B* quarré de la ligne *C D*. Par le point de division *H* soit menée *H L* parallele au côté *D B*. Soit menée la ligne diagonale *A D*.



Enfin par le point *F* où la diagonale coupe la ligne *L H* soit menée *E G* parallele au côté *C D*.

1° Le parallelogramme *E L* est * le quarré de *C H*, puisqu'il est le quarré de *E F* = *C H*. Le parallelogramme *H G* est le quarré de la ligne *H D*. 2° Le parallelogramme *C F* est compris sous *CH* & *HD*, puisque [1] *F H* = *H D* ; & le parallelogramme *F B* est aussi compris sous *C H* & *HD*; car *L F* = *E F* = *C H*, de même *F G*

* *Part.* 2. *Prop.* 41. *Geo.* & *Part.* 1. *Prop.* 37. *Geo.*
[1] *Déf.* 50. *Geo.*

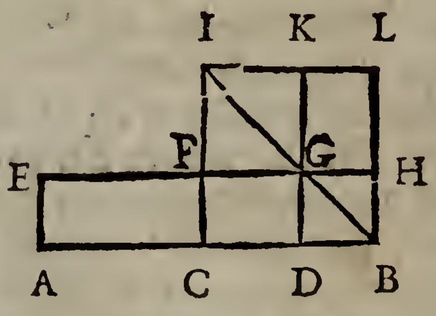
=*HD*. Donc le quarré *CB* eſt * égal aux deux quarrez *EL* & *HG* des deux parties *CH* & *HD*, & encore à deux rectangles *CF* & *FB* compris ſous ces mêmes parties *CH* & *HD*, *ce qu'il falloit demontrer.*

PROPOSITION XLIII.

Si une ligne droite eſt coupée en deux parties égales, & enſuite en deux parties inégales ; le rectangle compris ſous les parties inégales avec le quarré de la partie interceptée entre les deux points de ſection, eſt égal au quarré de la moitié de toute la ligne.

DEMONSTRATION.

SOit la ligne droite *AB* diviſée en deux parties égales au point *C*, & en deux inégales au point *D* : je dis que le rectangle compris ſous les parties inégales *AD* & *DB* avec le quarré de la partie *CD* eſt égal au quarré de *CB* moitié de *AB*. Pour le demontrer, il faut faire le quarré de *CB*, & mener la diagonale *IB*, &



* *Ax. 3. gen.*

par le point D mener DK parallele au côté BL. Enfin par le point de ſection G on menera EH parallele au côté AB, & on fera AE parallele à BH.

Puiſque * DG eſt parallele à BH, & que AE eſt auſſi parallele à BH, on aura [1] AE parallele à DG; mais [2] $DG = DB$. Donc le parallelogramme AG eſt compris ſous les parties inégales AD & DB. Le parallelogramme $AF = CH$ [3]; mais [4] $CG = GL$. Donc en ajoûtant de part & d'autre DH, on aura $CG + DH = GL + DH$, c'eſt à dire, $DL = CH$. Donc [5] $AF = DL$. Donc en ajoûtant de part & d'autre $CG + FK$, on aura $AF + CG + FK = DL + CG + FK$, ce qui eſt [6] la même choſe que $AG + FK = CL$, c'eſt à dire que la ſomme du rectangle AG compris ſous les parties inégales AD & DB, & du quarré FK de la partie CD, eſt égale au quarré CL de la moitié CB de la ligne AB, *ce qu'il falloit demontrer.*

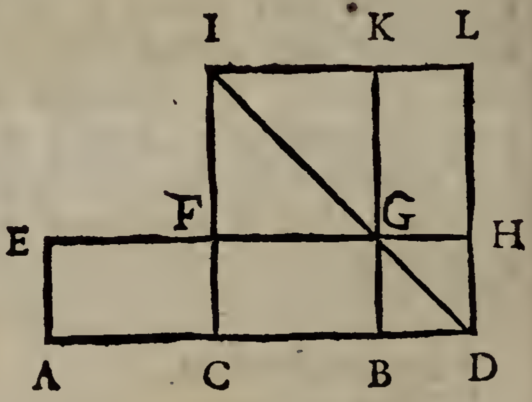
* *Par conſtruction.*
[1] *Prop.* 26. *Geo.*
[2] *Part.* 2. *Prop.* 41. *Geo. & déf.* 50. *Geo.*
[3] *Prop.* 39. *Geo.*
[4] *Part.* 1. *Prop.* 41. *Geo.*
[5] *Ax.* 18. *general.*
[6] *Ax.* 3. *general.*

PROPOSITION XLIV.

Si on ajoûte une ligne droite à une autre divisée en deux également ; le rectangle compris sous toute la ligne composée de la divisée, & de l'ajoûtée & sous l'ajoûtée, avec le quarré de la moitié de la divisée, est égal au quarré de la ligne composée de la moitié de la divisée & de l'ajoûtée.

DEMONSTRATION.

SOit la ligne droite *A B* divisée en deux également au point *C* ; à laquelle soit ajoûtée la ligne *B D* : je dis que le rectangle compris sous la ligne entiere *A D*, & sous la ligne *B D* avec le quarré de la partie *C B* moitié de la ligne *A B*, est égal au quarré de la ligne *CD* composée de la moitié *B C* & de l'ajoûtée *B D*. Pour le demontrer, il faut faire le quarré de *C D*, & mener la diagonale *I D* ; par le point *B*, mener *BK* parallele au côté *D L* ; par le point de section *G*, il faut mener *E H* parallele au côté *A D*, & *A E* parallele à *D H*.



Le parallelogramme *A H* est compris sous *A D* & *D H* ; mais * *D H* = *D B*. Donc le parallelogramme *AH* est compris sous *A D* & *B D*.

* *Part.* 2. *Prop.* 41. *Geo.* & *déf.* 50. *Geo.*

F K est

FK eſt * le quarré de $FG = CB$. Donc FK eſt le quarré de CB moitié de AB. Le parallelogramme $AF = CG$ [1], & [2] $LG = CG$. Donc [3] $AF = GL$. Donc en ajoûtant CH de part & d'autre, on aura [4] $AF + CH = GL + CH$, c'eſt à dire $AH = GL + CH$. Donc ajoûtant encore de part & d'autre le quarré FK, on aura $AH + FK = GL + CH + FK$, ce qui eſt la même choſe [5] que $AH + FK = CL$; c'eſt à dire que le rectangle compris ſous la ligne AD composée de la diviſée AB & de l'ajoûtée BD & ſous l'ajoûtée BD, avec le quarré FK de la ligne CB moitié de la diviſée, ſont, pris enſemble, égaux au quarré CL de la ligne CD composée de la moitié CB de la diviſée, & de l'ajoûtée BD, *ce qu'il falloit demontrer.*

PROPOSITION XLV.

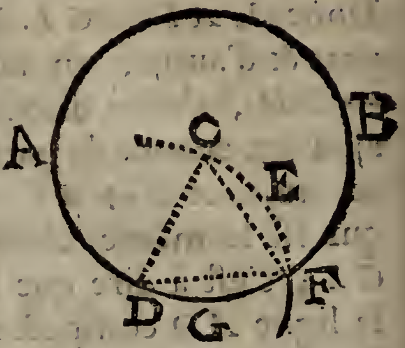
Un rayon de cercle eſt égal à la corde d'un arc de 60 degrez de la circonference du même cercle.

DEMONSTRATION.

Soit le cercle AB; du centre C ſoit mené le rayon CD : je dis que ce rayon CD eſt égal à une corde de 60 degrez pris dans la circon-

* *Part.* 1. *Prop.* 37. *Geo.*
[1] *Cor.* 1. *Prop.* 39. *Geo.*
[2] *Part.* 1. *Prop.* 41. *Geo.*
[3] *Ax.* 18. *general.*
[4] *Ax.* 4. *general.*
[5] *Ax.* 3. *general.*

ference du même cercle *AB*. Pour le demontrer, du point *D* & d'une ouverture de compas égale au rayon *CD* on décrira l'arc *CEF*. On menera de ce point *D* au point de section *F* la ligne *DF*. Enfin du point *C* on menera le rayon *CF*.



Le triangle *DFC* sera * équilateral. Donc chacun des angles *DCF*, *CDF*, *CFD* sera [1] égal à la troisiéme partie de deux angles droits, c'est à dire [2], à la troisiéme partie de 180 degrez. Donc chacun de ces angles aura pour sa mesure 60 degrez. Mais la ligne *DF* est [3] égale au rayon *DC*; & est soûtendante de l'arc *DGF* qui est de 60 degrez, puisqu'il est la mesure de l'angle *DCF* qui a pour sa mesure la troisiéme partie de 180 degrez. Donc le rayon du cercle *AB* est égal à une corde de ce même cercle soûtendante d'un arc de 60 degrez, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

De la même maniere qu'on a mené du point *D* au point *F* la ligne *DF* égale au rayon *DC*, on pourra continuer à mener jusqu'à six cordes égales à cette ligne *DF* ou au rayon *DC*; & alors on aura un exagone inscrit dans le cer-

* *Déf.* 39. & *Cor.* 1. *déf.* 29. *Geo.*
[1] *Cor.* 1. *Prop.* 34. & *Prop.* 31. *Geo.*
[2] *Cor.* 3. *Prop.* 20. *Geo.*
[3] *Suppoſit.*

cle. Car dans une circonference qui est de 360 degrez, on trouve précisément six arcs de chacun 60 degrez, dont les 6 cordes ou soûtendantes sont * égales.

COROLLAIRE II.

Si on prend la somme des arcs dont deux des côtez de l'exagone sont cordes ou soûtendantes, c'est à dire, si on prend un arc de 120 degrez; sa corde sera le côté d'un triangle équilateral qu'il sera facile d'inscrire dans un cercle. Car la circonference entiere contient précisément 3 fois 120 degrez qui composent 3 arcs égaux, dont les trois cordes étant * égales entr'elles, forment [1] un triangle équilateral.

COROLLAIRE III.

Puisque chaque côté de l'exagone est égal au rayon, son circuit qui vaut 6 rayons pris ensemble, sera égal à trois diamêtres. Le circuit de l'exagone regulier est donc au diamêtre du cercle auquel il est inscrit, comme 3 à 1. Or la circonference de ce cercle est plus grande que le circuit de l'exagone. Car chaque arc est [2] plus grand que chaque corde qui en est soûtendante. Donc [3] la circonference du cercle est au diamêtre du même cercle en plus grand rapport que 3 à 1, c'est à dire que cette circonference contient 3 fois le diamêtre, & quelque chose de plus. C'est pour cela que

* *Part.* 1. *Prop.* 11. *Geo.*
[1] *Déf.* 39. *Geo.*
[2] *Cor.* 1. *Prop.* 1. *Geo.*
[3] *Part.* 1. *Prop.* 10. *Algeb.*

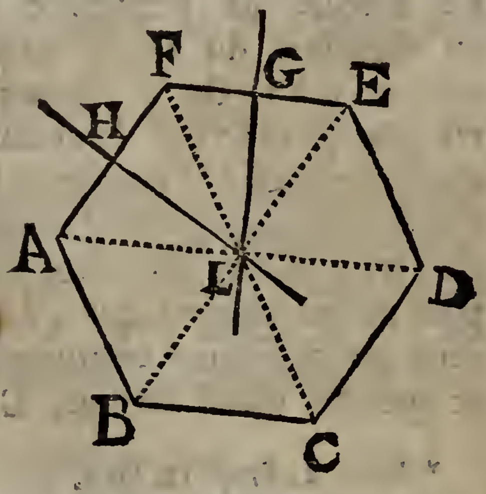
les ouvriers, par exemple quelques Horlogeurs, sont dans l'erreur, lorsqu'ils croyent que la circonference des roües d'une horloge est précisément triple du diamêtre de ces mêmes roües.

PROPOSITION XLVI.

Si par le milieu d'un côté d'un polygone regulier on mene une ligne perpendiculaire à ce côté; & si par le milieu d'un autre côté qui forme un angle avec le precedent, on lui mene encore une autre ligne perpendiculaire : le concours de ces deux perpendiculaires sera le centre d'une circonference de cercle qui passera par tous les sommets des autres angles de ce polygone.

DEMONSTRATION.

Soit le polygone regulier *ABCDEF*; par le milieu *H* du côté *AF* soit menée la ligne perpendiculaire *HL*; par le milieu *G* du côté prochain *FE* soit encore menée la ligne perpendiculaire *GL* : je dis que le point *L* qui est le concours de ces deux perpendiculaires, est le centre de la



circonference qu'on cherche; c'est à dire, que si du point *L* & d'une ouverture de compas égale à *LA* on décrit une circonference de cercle, elle passera par les points *B*, *C*, *D*, &c. Pour le demontrer, il suffit de demontrer que les lignes *LA*, *LB*, *LC*, *LD*, &c. sont égales entr'elles. Puisque le point *L* appartient à la ligne *HL* & à la ligne *GL*, il est * également distant des points *E*, *F* & *A*. Donc [1] la ligne *LE* = *LF* = *LA*. Donc les triangles *ELF* & *FLA* sont équilateraux l'un à l'autre; les côtez *EF* & *FA* étant [2] égaux entr'eux. Ils sont donc équiangles. L'angle *LFE* sera donc [3] égal à *LAF*; mais puisque [2] l'angle *EFA* = *FAB*, on aura [4] l'angle *LFA* = *LAB*. Donc [5] la ligne *LA* = *LB*. Les deux triangles *LFA* & *LAB* étant équilateraux, on aura [3] l'angle *FAL* = *ABL*. Donc [6] l'angle *LAB* restera égal à *LBC*, & outre cela on aura encore [7] *LA* & *AB* égaux aux côtez *LB* & *BC*. Donc [5] la base *LB* = *LC*. On demontrera de la même maniere que *LC* = *LD*, &c. Donc toutes les lignes droites menées du point *L* aux sommets des angles *A*, *B*, *C*, &c. sont égales entr'elles, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE.

Quand on dit [8] qu'un polygone est inscrit dans un cercle, en même-temps ce cercle est appellé circonscrit à ce polygone; & lorsque [9] le polygone est circonscrit, en même-temps le cercle est appellé inscrit au même polygone. Il est donc évident que la Proposition presente enseigne la maniere de circonscrire un cercle à

* *Prop.* 3. *Geo.* [1] *Cor.* 4. *Ax.* 2. *Geo.*
[2] *Déf.* 55. *Geo.* [3] *Cor.* 2. *Prop.* 35. *Geo.*
[4] *Ax.* 9. *gen.* [5] *Part.* 1. *Prop.* 35. *Geo.*
[6] *Déf.* 55. *Geo.* & *Ax.* 9. *gen.*
[7] *Part.* 1. *Prop.* 35. & *déf.* 55. *Geo.*
[8] *Déf.* 58. *Geo.* [9] *Déf.* 57. *Geo.*

un polygone regulier donné, en faisant passer une circonference par les sommets de tous les angles. On a encore une maniere facile pour inscrire un cercle à un polygone donné. Car aprés avoir trouvé * le point *L* centre de la circonference qui passe par tous les sommets des angles *A*, *B*, *C*, &c. Si de ce point *L* & d'une ouverture de compas égale à la perpendiculaire *L G*, on décrit une circonference de cercle, elle touchera les autres côtez F*A*, *AB*, *BC*, &c. pour cela il suffit [1] que toutes les perpendiculaires menées de ce point *L* à ces côtez *FA*, *AB*, &c. soient égales entr'elles. Or cela est évident, parceque les côtez de ce polygone étant [2] égaux entr'eux, seront cordes égales de la circonference circonscrite. Donc elles seront [3] également distantes du centre *L*; mais ces distances sont [4] mesurées par des perpendiculaires menées du point *L* à ces côtez F*A*, *AB*, *BC*, &c. Donc toutes ces perpendiculaires seront égales entr'elles.

PROPOSITION XLVII.

Les quarrez, & generalement tous les polygones reguliers d'un pareil nombre de côtez, sont des figures semblables.

DEMONSTRATION.

Soient les deux quarrez *AC* & *EG*. 1° chaque angle de l'un est [5] égal à chaque angle de l'au-

* *Par la Prop. pres.*

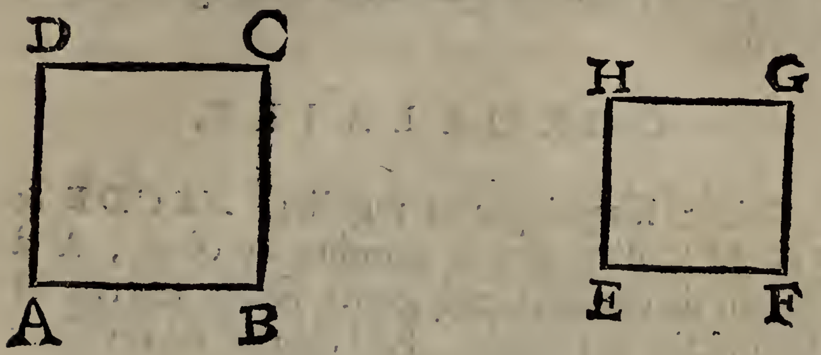
[1] *Déf. 34. Geo. & Cor. 3. Prop. 12. Geo.*

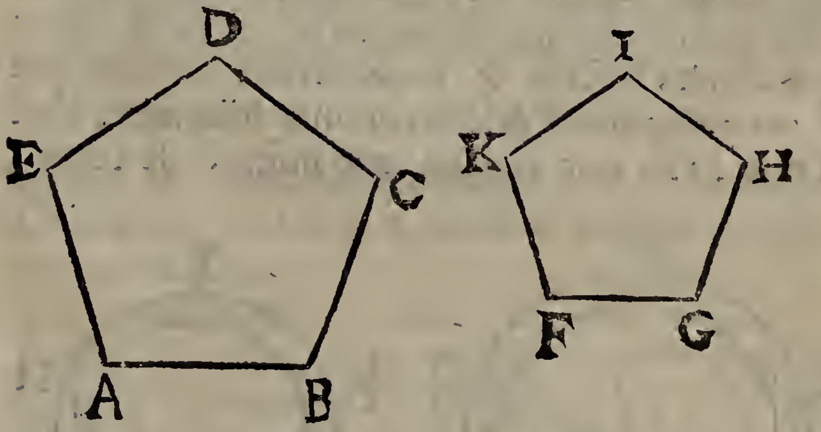
[2] *Déf. 55. Geo.* [3] *Part. 2. Prop. 16. Geo.*

[4] *Cor. 3. Prop. 6. Geo.*

[5] *Cor. 3. Prop. 20. Geo.*

tre. 2° * *AB* . *BC* :: *EF* . *FG* . & *BC* . *CD* :: *FG* . *GH* &c. Donc [1] les quarrez *AC* & *EG* ſont des figures ſemblables.





Soient, par exemple, deux pentagones reguliers *ABCDE* & *FGHIK*. 1° [2] *AB* . *BC* :: *FG* . *GH* . & *BC* . *CD* :: *GH* . *HI* . &c. 2° La ſomme des angles interieurs du pentagone *ABCDE* eſt [3] égale à la ſomme des angles interieurs du pentagone *FGHIK*. Donc [4] un angle de l'un ſera égal à un angle de l'autre. Donc [4] chaque angle de l'un ſera égal à chaque angle de l'autre. Donc deux pentagones reguliers

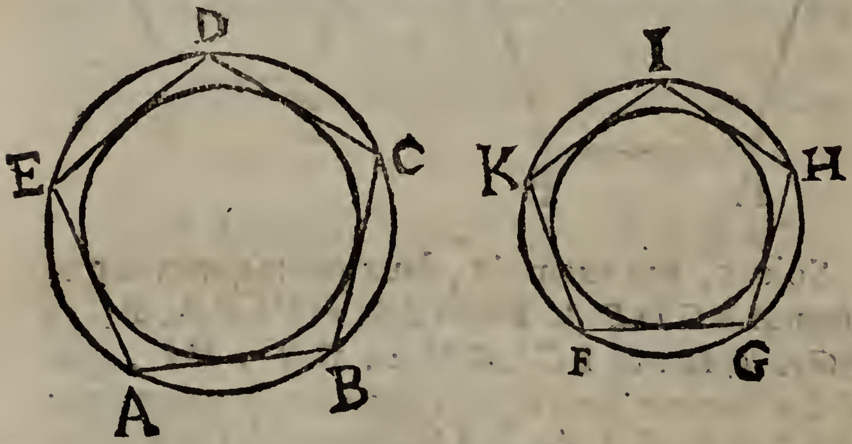
* *Déf.* 50. *Geo.* & *Cor.* 1. *Prop.* 37 *Geo.*
[1] *Déf.* 60. *Geo.* [2] *Déf.* 55. *Geo.*
[3] *Cor.* 1. *Prop.* 32. *Geo.* [4] *Ax.* 12. *gen.*

ſont deux figures ſemblables, *ce qu'il falloit demontrer.*

On fera le même raiſonnement pour les autres polygones reguliers qui ſeront d'un égal nombre de côtez.

COROLLAIRE.

Soient les polygones reguliers *ABCDE* & F G *HIK* d'un pareil nombre de côtez ; & à chacun de ces deux polygones ſoient inſcrits & circonſcrits des cercles. Plus chacun de ces deux polygones aura de côtez, il rencontrera en un plus grand nombre de points les circonferences des cercles inſcrits & circonſcrits : de ſorte que ſi ces polygones deviennent infinitilateres, c'eſt à dire, s'ils ont chacun une infinité de côtez ;



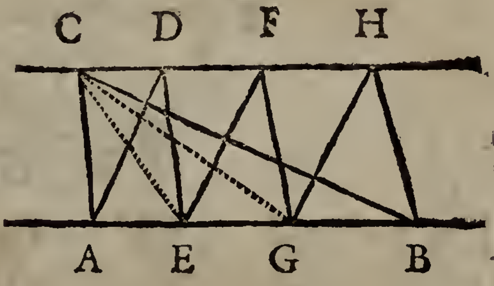
le cercle circonſcrit & l'inſcrit au même polygon e ſe confondront en un ſeul cercle. Parceque le p olygone qui ſe trouve comme comprimé entre c es deux cercles eſt toûjours plus grand que le cercl e inſcrit, & plus petit que le cercle circonſcrit, juſqu'à ce qu'enfin ces polygones ayant une infi nité de côtez, & le cercle inſcrit & le circo nſcrit au même polygone ſe confondant en un ſeul cercle, le même circuit & la même ſurface deviennent communes à ces cercles inſcrits & circonſcrits. Donc ces cercles étant devenus la même choſe que des polygones reguliers d'une infinité de côtez, il faut conclure * que les cercles ſont des figures ſemblables.

PROPOSITION XLVIII.

Si un triangle eſt de même hauteur que pluſieurs autres triangles, & ſi la baſe de ce triangle eſt égale à la ſomme des baſes de ces triangles, la ſurface de ce même triangle ſera égale à la ſomme des ſurfaces de tous ces triangles.

DEMONSTRATION.

Soit par exemple le triangle *ABC* de même hauteur, c'eſt à dire, entre les mêmes paralleles, que les triangles *ADE*, *EFG*, *GHB*; & ſoit la baſe *AB* du triangle *ABC* égale à la ſomme des baſes *AE*, *EG* & *GB* des triangles



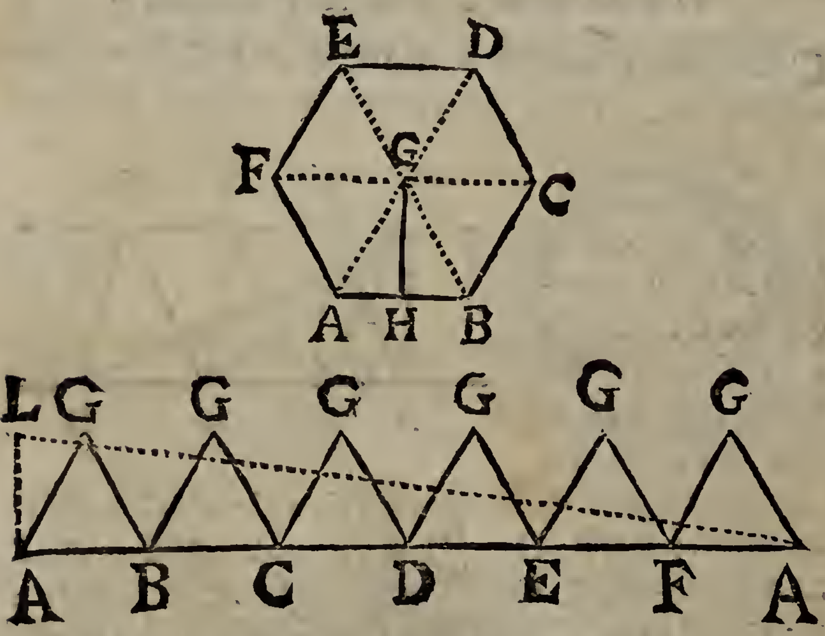
ADE, *EFG*, &c. je dis que le triangle $ABC = AED + EGF + GHB$. Car [1] le triangle $ABC = ACE + ECG + GCB$. Or [2] le triangle $ACE = ADE$; $ECG = EFG$; $GCB = GHB$. Donc au lieu des triangles $ACE + ECG + GCB$, ſi [3] on prend ce qui leur eſt égal, ſçavoir $ADE + EFG + GHB$; on trou-

* *Prop. preſ.* [1] *Ax.* 3. *gen.*
[2] *Prop.* 40. *Geo.* [3] *Deman.* 1. *gen.*

vera que le triangle *ABC* eſt égal à la ſomme des triangles *ADE*, *EFG*, *GHB*, dont les baſes priſes enſemble ſont égales à *AB*, & dont les hauteurs ſont égales à celle du triangle *ABC*; étant tous entre les mêmes lignes paralleles, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

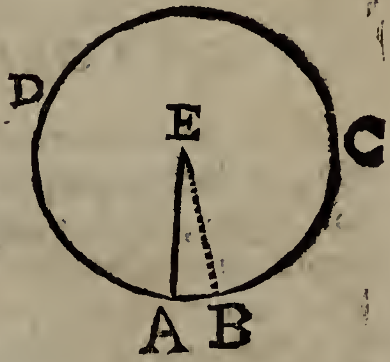
Si on multiplie le circuit d'un polygone regulier par la moitié de la perpendiculaire menée du centre du cercle qui lui eſt inſcrit ou circonſcrit, à un des côtez de ce polygone; le produit de cette multiplication ſera la ſurface de ce polygone regulier. Soit par exemple le polygone



regulier *ABCDEF*: je dis que le produit du contours ou circuit *ABCDEF* multiplié par la moitié de la perpendiculaire *GH* eſt la ſurface même de ce polygone. Car aprés avoir mené du point G qui est * également distant des points *A*, *B*, *C*, &c. les lignes G*A*, G*B*, G*C*, G*D*, G*E*, &c. on divisera ce polygone en triangles qui sont tous de même hauteur, puisque [1] toutes les perpendiculaires menées du point G à ces côtez *AB*, *BC*, *CD*, sont égales entr'elles. Supposons que la somme des bases de tous ces triangles, qui est le circuit du polygone, soit la ligne *AA*, & que la ligne *AL* perpendiculaire à *AA* soit égale à la hauteur commune de tous ces mêmes triangles. Il est évident [2] que le produit de la base *AA* multipliée par la moitié de la hauteur *AL* du triangle *ALA* est égal au triangle *ALA* = [3] *A*G*B* + *B*G*C* + *C*G*D* + *D*G*E* + *E F* G + *F* G *A* = [4] *ABCDEF*.

COROLLAIRE II.

La surface d'un cercle est donc égale au produit de la circonference de ce cercle multipliée par la moitié de son rayon. Soit le cercle *ABCD* : je dis que sa surface est égale au produit de la circonference *ABCDA* multipliée par la moitié du rayon *AE*. Car ce cercle est [5] un polygone regulier d'une infinité de côtez infiniment petits. Supposons qu'un de ces côtez infiniment petits soit *AB*, les lignes *EA* & *EB*



* *Supposit. ou Prop.* 46. *Geo.* [1] *Cor. Prop.* 46. *Geo.*
[2] *Cor.* 1. *Prop.* 40. *Geo.* [3] *Prop. pref.*
[4] *Ax.* 3. *gen.* [5] *Cor. déf.* 56. *Geo.*

qui sont côtez du triangle *AEB* seront infiniment proches l'une de l'autre ; & partant la hauteur de ce triangle *EAB* sera considerée comme un rayon de ce cercle *ABCD*. Si on multiplie la somme de toutes les bases infiniment petites de ces petits triangles dont le sommet est dans le centre *E*, par la moitié de leur hauteur commune, c'est à dire, si on multiplie la circonference du cercle par la moitié du rayon, on aura [1] donc pour produit la surface de ce cercle.

Dans la pratique il est facile de connoître la longueur de la circonference d'un cercle, il suffit pour cela d'appliquer le bout d'un cordeau dans le point *A*, par exemple, & de coucher ensuite le reste de ce cordeau sur la circonference *ABCDA*. Après cela on étendra ce cordeau en ligne droite, & on mesurera combien il contient de pieds, de pouces, &c. ce qui fera connoître la grandeur de la circonference dont il s'agit.

COROLLAIRE III.

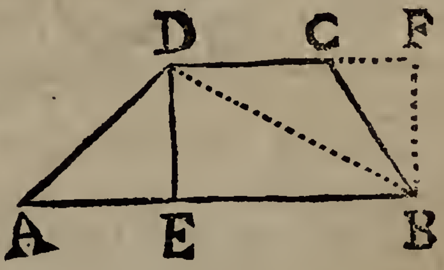
Pour connoître la surface d'un secteur de cercle, il faut multiplier son arc par la moitié de son rayon, & le produit de cette multiplication exprimera la surface de ce secteur. Car le secteur d'un cercle est la somme d'une infinité de triangles infiniment petits, dont la somme des bases est l'arc de ce secteur, & dont la hauteur commune est un des rayons qui terminent ce même secteur.

[1] *Prop. pres.*

COROLLAIRE

COROLLAIRE IV.

Si on ſe propoſe de meſurer la ſurface du trapeſoide *ABCD*, il faut multiplier la moitié de la ſomme des côtez *AB* & *DC* par la hauteur de cette figure qui eſt la perpendiculaire *DE*, & le produit exprimera la valeur de la ſurface qu'on cherche. Car, ſi on mene la diagonale *DB*, il eſt évident que les triangles *ABD* & *DBC*



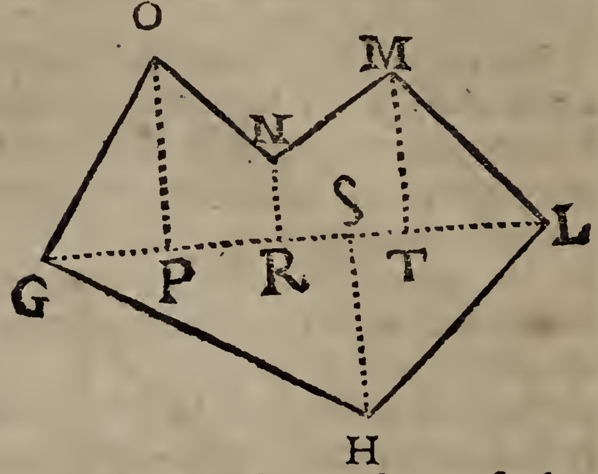
* ſont de même hauteur étant entre les mêmes paralleles *AB* & *DC*. Or [1] la moitié de la ſomme des baſes *AB* & *DC* multipliée par la hauteur commune *DE* exprime la valeur des deux triangles *ABD* & *DBC*. Donc le produit de la moitié de la ſomme des côtez *AB* & *DC* multipliée par la perpendiculaire eſt la ſurface de la figure *ABCD*.

Si on ne pouvoit parcourir cette ſurface pour meſurer la perpendiculaire *DE*; il ſuffiroit de prolonger le côté *DC*, enſuite du point *B*, par exemple, on meneroit la perpendiculaire *BF* qui feroit connoître ſon * égale *ED*.

S'il ſe rencontre un polygone irrégulier, par exemple, G*HLMNO* dont on ſe propoſe de meſurer la ſurface; il faut mener une ligne du ſommet G de l'angle *OGH* au ſommet *L* de l'angle *MLH* qui paroît le plus éloi-

* *Cor. 4. Prop. 6. Geo.*
[1] *Prop. preſ. & Cor. 1. Prop. 40. Geo.*

gné. Enſuite du ſommet de chacun des autres angles de la figure on menera ſur cette ligne *G L* les perpendiculaires *OP*, *NR*, *HS*, *MT*. On [1] meſurera le triangle *G P O*, le trapeſoïde *O P R N*, & les autres trepeſoïdes & triangles, pour [2] connoître enfin la ſurface entiere *G H L M N O*.



Si on veut meſurer une ſurface irréguliere qu'on ne peut parcourir librement en ligne droite, par exemple celle d'un étang *A B C D E F*, du terrain où eſt conſtruite une maiſon, d'un bois taillis, &c. lorſqu'il n'y a aucun obſtacle, on prolongera le côté *A* B, ou *AF*, &c. Sur le côté *AB* prolongé on menera la perpendiculaire *D G* que l'on prolongera vers *H*. A cette ligne *G H* on menera perpendiculairement la ligne *H L* par le point E, qui ſera * parallele à *MG*. Par le point *F*

[1] *Cor.* 1. *Prop.* 40. *Geo.* & *Cor. preſ.*

[2] *Ax.* 3. *gen.*

* *Part.* 2. *Prop.* 15. *Geo.*

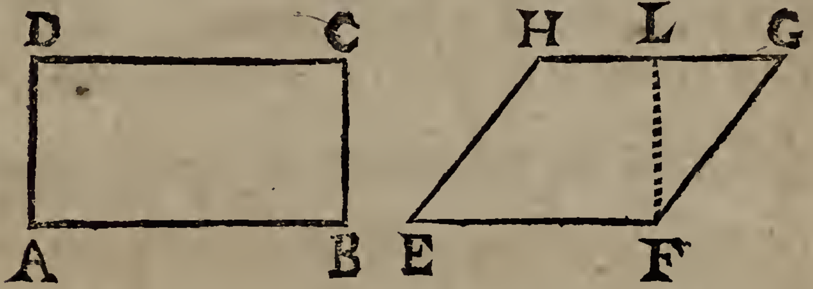
on menera la ligne *LM* perpendiculaire à *HL*, cette ligne *ML* sera * aussi parallele à *HG*. On mesurera le parallelogramme *MH*. Ensuite on mesurera les surfaces des triangles *CND*, *DHE*, *ELF*, *FMA*, & du trapese *BGNC*. Enfin de la valeur du parallelogramme *MH* on retranchera la somme de ces triangles & trapese, le reste fera connoître combien de toises ou de perches contient la surface *ABCDEF*.

PROPOSITION XLIX.

Les parallelogrammes dont les hauteurs sont égales, sont entre eux comme leurs bases; & si les bases sont égales, ils sont entr'eux comme leurs hauteurs.

DEMONSTRATION.

Soient les parallelogrammes *AC* & *EG* dont les hauteurs B*C* & *FL* soient égales entr'elles:



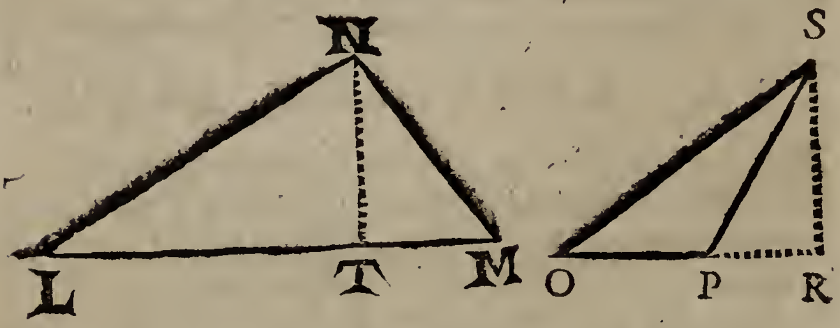
je dis que *AC* . *EG* :: *A*B . *EF*. Car [1] le parallelogramme *AC* $=$ *AB* $\times$ B*C*, & [2] le parallelogramme *E*G $=$ *EF* $\times$ *FL*. Or en divisant ces deux produits par les hauteurs égales B*C* & *FL*, on aura [3] *A*B $\times$ B*C* . *EF* $\times$ *FL* :: *AB* . *EF* . c'est à dire [4] que le parallelogramme *AC* . *E*G :: *A*B . *EF*, *ce qu'il falloit demontrer.*

* *Part.* 2. *Prop.* 15. *Geo.* [1] *Cor.* 2. *déf.* 53. *Geo.*
[2] *Cor.* 3. *Prop.* 39. *Geo.* [3] *Prop.* 6. *Algeb.*
[4] *Dem.* 1. *gen.*

Si les bases avoient été supposées égales, on auroit divisé ces deux produits par AB & par EF; & on auroit eu $AB \times BC$. $EF \times FL$ :: BC . FL.

COROLLAIRE.

Les triangles dont les hauteurs sont égales sont aussi entr'eux comme leurs bases. Soient



les triangles LMN & OPS, dont les hauteurs TN & RS sont égales : je dis que le triangle LMN est au triangle OPS, comme la base LM est à la base OP. Car * le triangle $LMN = \frac{1}{2} TN \times LM$, & le triangle $OPS = \frac{1}{2} RS \times OP$. Donc [1] en divisant ces deux produits par les grandeurs [2] égales $\frac{1}{2} TN$, & $\frac{1}{2} RS$, on aura $\frac{1}{2} TN \times LM$. $\frac{1}{2} RS \times OP$ :: LM . OP; c'est à dire le triangle LMN . OPS :: LM . OP.

* *Cor.* 1. *Prop.* 40. *Geo.* [1] *Prop.* 6. *Algeb.*
[2] *Supposit.* & *Ax.* 12. *gen.*

Si les bases *LM* & *OP* avoient été supposées égales, on auroit divisé les deux premiers termes de l'analogie par *LM* & par *OP*, & on auroit * trouvé $\frac{1}{2} TN \times LM \,.\, \frac{1}{2} RS \times OP :: \frac{1}{2} TN \,.\, \frac{1}{2} RS :: TN \,.\, RS$ [1].

PROPOSITION L.

1° *Si un parallelogramme a un de ses angles égal à un angle d'un autre parallelogramme; ces parallelogrammes seront entre eux comme les produits des côtez qui comprennent ces angles égaux.*

2° *Si un triangle a un de ses angles égal à un angle d'un autre; ces triangles sont aussi entr'eux comme les produits des côtez qui comprennent ces angles égaux.*

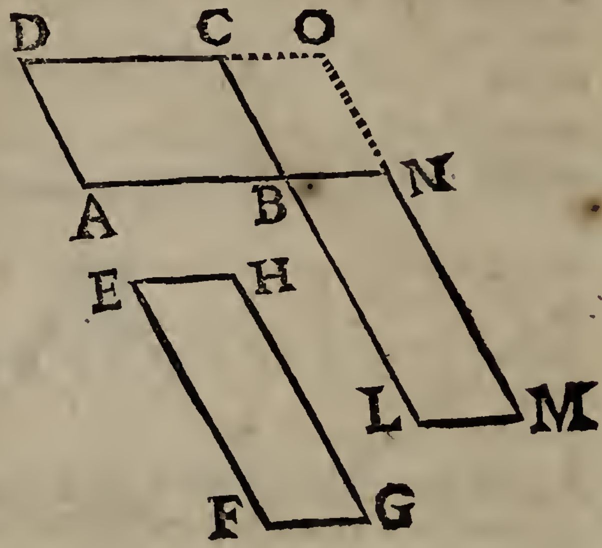
DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit le parallelogramme *AC* dont l'angle *ABC* soit égal à l'angle *HEF* du parallelogramme *EG*: je dis que $AC \,.\, EG :: AB \times BC \,.\, EF \times EH$ Pour le demontrer, il

* *Prop. 6. Algeb.*
[1] *Prop. 5. Algeb.*

faut prolonger les côtez AB & CB jusques aux points N & L, de sorte que $BN = EH$, & que $BL = EF$. Ensuite par le point N on menera NM parallele à BL, & par le point L on menera LM parallele à BN : & on aura [1] le parallelogramme $LN = EG$. Enfin on prolongera le côté DC, & on prolongera le côté MN pour avoir le parallelogramme BO.



[2] Le parallelogramme $AC . BO :: AB . BN$.

[2] Le parallelogramme $BO : LN :: CB . BL$.

Donc [3] $AC \times BO . BO \times LN :: AB \times CB . BN \times BL$. Or si on divise les deux premiers termes de cette derniere analogie par BO, on aura [4] $AC . LN = EG :: AB \times CB . BN \times BL = EH \times EF$ [5], *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit le triangle OPR dont l'angle RPO soit égal à l'angle VST du triangle STV : je dis que le triangle $OPR . STV :: OP \times PR . SV \times ST$. Pour le demontrer, il faut prolonger le côté OP

[1] *Cor. 2. Prop. 38. Geo.* [2] *Prop. 49. Geo.*
[3] *Prop. 12. Algeb.* [4] *Prop. 6. Alg.*
[5] *Par constuction.*

jusques en Y, de sorte que $PY = SV$, & prolonger RP jusques en X, de sorte que $PX = ST$, & mener la ligne XY. Alors * le triangle PXY sera égal au triangle SVT, ** ayant l'angle XPY égal à l'angle VST du triangle STV. Ensuite on menera la ligne RY.

[1] Le triangle $OPR \,.\, RPY :: OP \,.\, PY$.

[1] Le triangle $RPY \,.\, PXY :: RP \,.\, PX$.

Donc [2] $OPR \times RPY \,.\, RPY \times PXY :: OP \times RP \,.\, PY \times PX$; & en divisant les deux premiers termes de cette derniere analogie par la grandeur RPY qui se trouve multipliée dans l'un & dans l'autre, on aura [3] le triangle $OPR \,.\, PXY = STV :: OP \times PR \,.\, PY \times PX = SV \times ST$, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

Les parallelogrammes rectangles sont [4] entr'eux comme les produits de leurs côtez qui comprennent un angle droit, puisque [5] tous les angles droits sont égaux : ce qui est la même chose que de conclure en general que les paralle-

* *Part. 1. Prop. 35. Geo.*

** *Supposit. & Part. 1. Prop. 22. Geo.*

[1] *Cor. Prop. 49. Geo.* [2] *Prop. 12. Alg.*

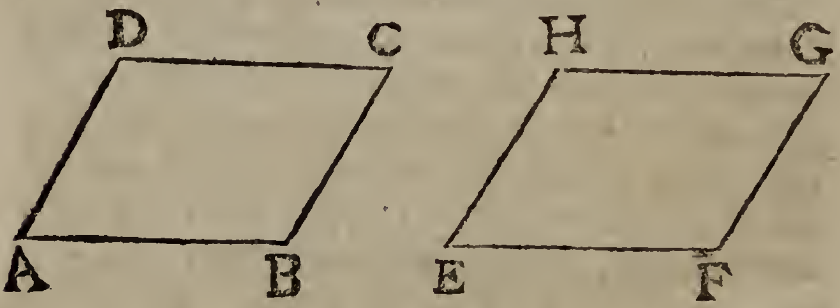
[3] *Prop. 6. Alg.* [4] *Part. 1. Prop. pres.*

[5] *Cor. 3. Prop. 20. Geo.*

logrammes, ſoit rectangles, ſoit obliquangles, ſont entr'eux comme les produits de leurs baſes par leurs hauteurs. Car les parallelogrammes obliques ſont [1] égaux aux parallelogrammes rectangles de même baſe & de même hauteur. On dira la même choſe des triangles rectangles.

COROLLAIRE II.

Si deux parallelogrammes ſont égaux, & ſi un de ces parallelogrammes a un de ſes angles égal à un angle de l'autre; les côtez de ces parallelogrammes qui comprendront ces angles égaux, ſeront entre eux reciproquement proportionels. Soit le parallelogramme $AC = EG$, & l'angle $DAB = HEF$:



je dis que $AB \,.\, EF :: EH \,.\, AD$. Car [2] $AC \,.\, EG :: AD \times AB \,.\, EH \times EF$. Or [3] $AC = EG$. Donc $AD \times AB = EH \times EF$. Donc [4] $AB \,.\, EF :: EH \,.\, AD$.

COROLLAIRE III.

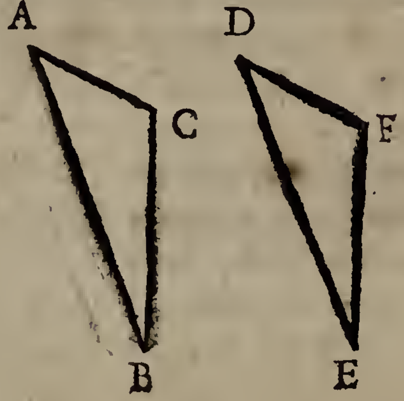
Si un parallelogramme, par exemple, AC a l'angle DAB égal à l'angle HEF d'un autre

[1] *Prop. 39. Geo.* [2] *Part. 1. Prop. pres.*
[3] *Suppoſit.* [4] *Prop. 3. Alg.*

parallelogramme *EG*, & si les côtez qui comprennent ces angles égaux, sont reciproquement proportionels; ces parallelogrammes *AC* & *EG* seront égaux entr'eux. Car puisque * $AB . EF :: EH . AD$; on aura ** $AB \times AD = EF \times EH$. Or [1] $AC . EG :: AB \times AD . EF \times EH$. Donc $AC = EG$.

COROLLAIRE IV.

Si deux triangles sont égaux entr'eux, & si un angle d'un de ces triangles est égal à un angle d'un autre; les côtez qui comprendront ces angles seront reciproquement proportionels. Soit le triangle $ABC = DEF$; soit l'angle *CAB* égal à l'angle *FDE*; je dis que



$AB . DE :: DF . AC$. Car [2] le triangle $ABC . DEF :: AB \times AC . DE \times DF$. Or * le triangle $ABC = DEF$. Donc $AB \times AC = DE \times DF$. Donc [3] $AB . DE :: DF . AC$.

COROLLAIRE V.

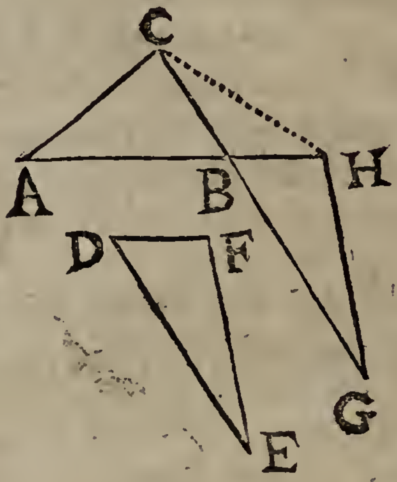
Si un triangle, par exemple *ABC*, a l'angle *CAB* égal à l'angle *FDE* d'un autre triangle *DEF*, & si les côtez qui comprennent ces angles égaux sont reciproquement proportionels; ces triangles *ABC* & *DEF* seront égaux entr'eux. Car si $AB . DE :: DF . AC$. On aura ** $AB \times AC = DE \times DF$; mais [2] le triangle *ABC*,

* *Supposit.* ** *Prop. 2. Algeb.*
[1] *Part. 1. Prop. pref.* [2] *Part. 2. Prop. pref.*
[3] *Prop. 3. Algeb.*

DEF :: *AB*×*AC* . *DE*×*DF*. Donc *ABC* = *DEF*.

REMARQUE.

Les Corollaires 4 & 5 de la Propoſition preſente pouvoient encore être demontrez d'une autre maniere fort ſimple.



1° Soit le triangle *ACB* = *DEF*, & l'angle *ABC* = *EDF*; je prolonge les lignes *AB* & *CB*, & je fais * le triangle *BGH* égal & équilateral à *EDF*; enfin je mene la ligne *CH*. Le triangle *ABC* . *CBH* :: *BGH* . *CBH* **. Or [1] *ABC* . *CBH* :: *AB* . *BH* . & *BGH* . *CBH* . *GB* . *BC*. Au lieu des rapports égaux qui ſont entre *ABC* & & *CBH*, & entre *BGH* & *CBH*, ſubſtituant leurs égaux, on aura *AB* . *BH* :: *GB* . *BC*.

2° Si *AB* . *BH* :: *GB* . *BC*, on aura le triangle *ABC* = *BGH*. Car *ABC* . *CBH* :: *AB* . *BH*, & *GBH* . *CBH* :: *GB* . *BC*. Donc *ABC* . *CBH* :: *BGH* . *CBH*. Donc [2] *ABC* = *BGH* = *DEF* [3]. Les Corollaires 2^e^ & 3^e^ de la Propoſition preſente peuvent encore être demontrez par le même raiſonnement.

* *Part.1.Prop.35. Geo.* ** *Part.1.Prop.8. Alg.*
[1] *Prop. 49. Geo.* [2] *Part. 2. Prop. 8. Geo.*
[3] *Par conſtruction.*

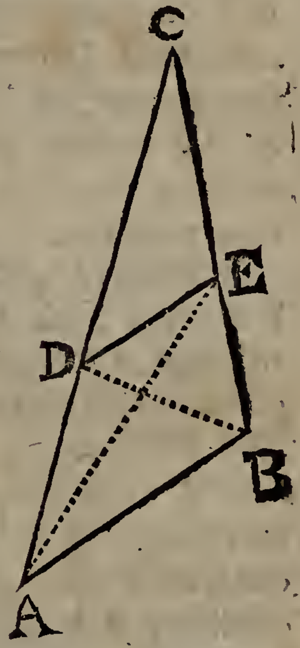
PROPOSITION LI.

1° *Si une ligne droite menée parallelement à la base d'un triangle, coupe les deux autres côtez de ce triangle; elle les coupera en quatre parties proportionelles entr'elles.*

2° *Reciproquement si une ligne droite coupe deux côtez d'un triangle en quatre parties proportionelles entr'elles; elle sera parallele à la base de ce triangle.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit le triangle *ABC* dont les côtez *AC* & *BC* soient coupez par la ligne *DE* parallele à la base *AB*: je dis que *AD* . *DC* :: *BE* . *EC*. Pour le demontrer, par les points *D* & *E* soient menées aux angles B & *A* les lignes *DB* & *EA*.



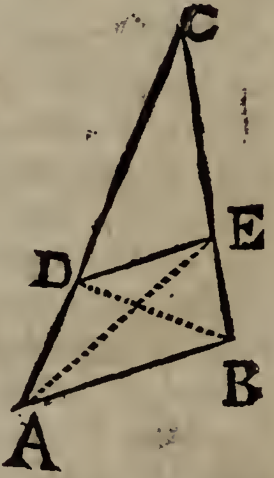
Puisque * *DE* est parallele à *AB*, le triangle *ADE* sera [1] égal au triangle *BDE*. Donc [2] le triangle *AED* . *DEC* :: *BDE* . *DEC*. Or le triangle *AED* est [3] au triangle *DEC*, comme sa base *AD* à la base *DC* du triangle *DEC*, puisqu'ils ont même hauteur;

* *Supposit.* [1] *Part.* 1. *Prop.* 40. *Geo.*
[2] *Part.* 1. *Prop.* 8. *Alg.* [3] *Prop.* 49. *Geo.*

ayant le ſommet *E* commun. De même B*DE*. *EDC* :: BE . *EC*, au lieu du rapport du triangle *AED* au triangle *DEC*, ſi on ſubſtitue dans la premiere analogie le rapport qui lui eſt égal, ſçavoir celui de la baſe *AD* à *DC*, & au lieu du rapport du triangle B*DE* au triangle *EDC* ſi on prend le rapport qui lui eſt égal, qui eſt celui de la baſe BE à la baſe *EC*. On aura * *AD* . *DC* :: BE . *EC*, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit la ligne *DE* qui coupe les côtez *AC* & B*C* du triangle *A*B*C*, de telle maniere que *AD* ſoit à *DC* comme B*E* eſt à *EC* : je dis que cette ligne *DE* eſt parallele à la baſe *A*B. Pour le demontrer, il faut mener les lignes *D*B & *AE* comme dans la premiere partie de la Propoſition preſente.



[1] Puiſque *AD* . *DC* :: BE . *EC*, & que [2] le triangle *AED* eſt au triangle *DEC* comme la baſe *AD* eſt à *DC*, l'un & l'autre ayant le ſommet *E* commun. Le triangle B*DE* eſt auſſi au triangle *EDC* comme la baſe B*E* à *EC*; car ſi on menoit par le point *D* une ligne perpendiculaire à la baſe B*C*, cette perpendiculaire ſeroit la hauteur de chacun de ces deux triangles.

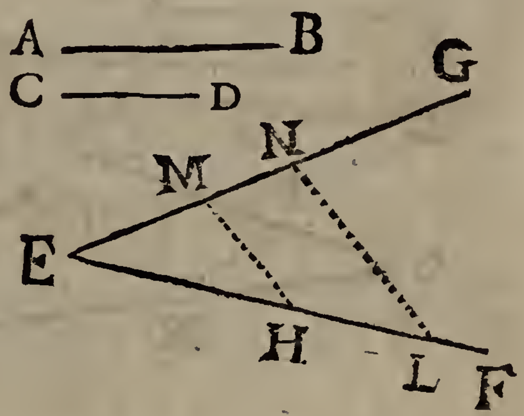
* *Demande* 1. *gen.* [1] *Suppoſit.*
[2] *Cor. Prop.* 49. *Geo.*

Dans

Dans la premiere analogie, au lieu du rapport de la base *AD* à *DC* si on substitue le rapport qui lui est égal, sçavoir celui du triangle *AED* au triangle *DEC*; & au lieu du rapport de la base *BE* à *EC*, si on substitue son égal qui est le rapport du triangle *BDE* au triangle *EDC* : on aura *AED*. *DEC* : : *BDE*. *EDC*. donc * le triangle *ADE* = *BDE*. [1] Donc la ligne *DE* est parallele à la ligne *AB*, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

La premiere partie de la proposition presente est le principe d'une métode dont on se peut servir pour trouver une 3e ligne proportionnelle à deux lignes donées. Soient les lignes *AB* & *CD* ausquelles on se propose de trouver une troisiéme ligne proportionnelle, c'est à dire, de trouver une ligne qui soit telle que le raport de *AB* & *CD* soit égal au raport de *CD* à cette ligne cherchée. Il faut mener les lignes indéfinies *EF* & *EG* qui forment l'angle *GEF* à volonté. Sur la ligne *EF* il faut prendre *EH* = *AB*, & *HL* = *CD*; & sur la ligne *EG* il faut prendre *EM* encore égale à *CD*. Enfin par les points *H* & *M*, il faut mener la ligne *HM*, & mener par le point *L* la ligne *LN* parallele à *HM* : je dis que *MN* est la troisié-

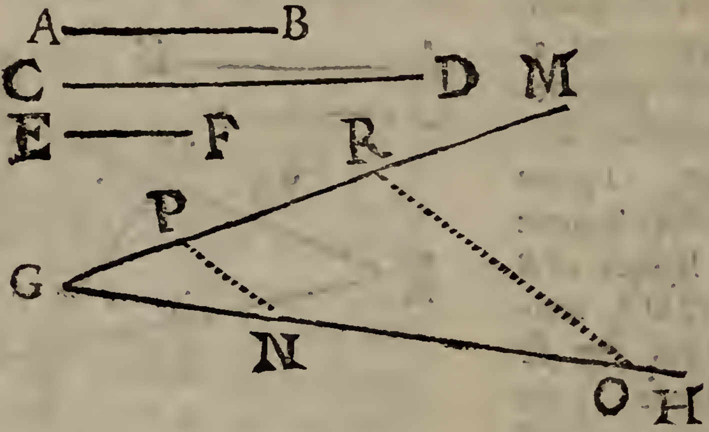


* *Part. 2. Prop. 8. Algeb.* [1] *Part. 2. Prop. 40. Geo.*

me proportionnelle cherchée. Car dans le triangle *ELN* la ligne *HM* est * parallele à la base *LN*. Donc *EH . HL :: EM . MN*. Mais * $AB = EH$, & $CD = HL = EM$. donc[1] *AB*. *CD :: CD . MN*.

COROLLAIRE II.

On trouvera facilement à trois lignes données une quatriéme proportionnelle. Soient les lignes *AB*, *CD*, *EF* ausquelles il faille trou-



ver une quatriéme proportionnelle. Par le point *G* pris à volonté, on menera les lignes indéfinies *GH* & *GM*. Sur la ligne *GH*, on prendra $GN = AB$; & $NO = CD$; sur la ligne *GM* on prendra $GP = EF$. Enfin par les points *N* & *P*, on menera *NP*; & par le point *O* on menera *OR* parallele à *NP* : je dis que la ligne *PR* est la quatriéme proportionnelle cherchée. Car dans le triangle *GOR* la ligne *NP*

* *Par construction.*
[1] *Part. 1. Prop. pres. & Demande 1. Gen.*

est * parallele à *OR*. Donc [1] *GN . NO* :: *GP . PR*. Mais * *AB* = *GN*; *CD* = *NO*; & *GP* = *EF*. Donc [2] *AB . CD* :: *EF . PR*.

REMARQUE.

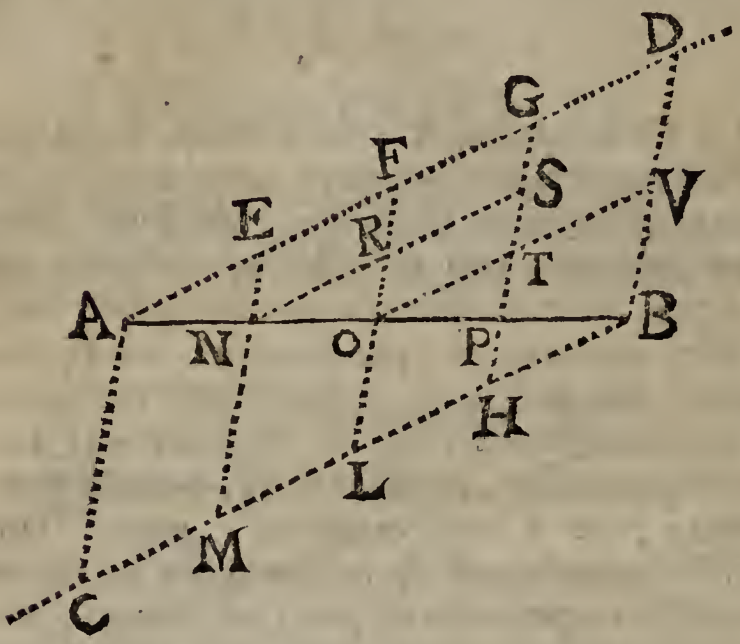
☞ Les Corollaires 2 & 4 de la Prop. 2 d'Algebre enseignent une maniere generale pour satisfaire à ce qu'on cherche par ces deux Corollaires, & pour cela il suffit de considerer que les lignes données sont d'une certaine longueur, qu'elles contiennent, par exemple, un certain nombre de pieds, de pouces, &c : cependant les métodes qu'on vient de proposer ont leur merite particulier, étant sensibles, faciles à comprendre, & à être executées, même sans qu'il soit necessaire de sçavoir combien les lignes proposées contiennent de pieds, de pouces, &c. Parcequ'il est seulement necessaire de prendre leur longueur avec un compas sur le papier, ou avec un cordeau sur le terrain.

COROLLAIRE III.

Soit une ligne droite *AB*, qu'on se propose de diviser géometriquement en un certain nombre de parties égales, par exemple, en quatre; ou qui ayent entre elles tel raport qu'on voudra.

* *Par construction.*
[1] *Part.* 1. *Prop. pres.*
[2] *Deman.* 1. *gen.*

Par le point *A*, on menera la ligne indéfinie *AD*, qui fera avec la ligne donnée *AB* un angle *DAB* à volonté. Par l'autre extré-



mité *B*, on menera * la ligne *BC*, parallele à la ligne *AD*. Sur cette ligne *AD* on prendra, d'une ouverture de compas à volonté, les parties *AE*, *EF*, *FG*, *GD* &c. égales entre elles, ou telles qu'elles soient entre elles dans un raport donné. Ensuite sur la ligne *BC* on prendra *BH*, égale à la quatriéme partie *GD*, on prendra $HL = GF$, $LM = FE$, & $MC = AE$. Enfin par les points correspondants *D* & *B*, *G* & *H*, *F* & *L*, *E* & *M*, &c, on menera les lignes *DB*, *GH*, *FL* &c : je dis que la ligne *AB* est divisée dans les quatre parties égales proposées, c'est à dire, que $AN = NO = OP = PB$. Car [1] les lignes *AC*, *EM*,

* *Cor. 4. Prop. 15. ou Cor. Prop. 23. Geo.*
[1] *Supposit.*

FL, *GH*, *DB*, étant menées par des extrémitez de lignes paralleles & égales qui sont parties des lignes droites *AD* & *BC*; ces mêmes lignes *AC*, *EM*, &c. seront * paralleles entre elles. Donc [1] *AN* . *NO* : : *AE* . *EF*. Or [2] *AE* = *EF*. Donc aussi *AN* = *NO*. Pareillement ayant mené *NS* parallele à *EG*; on aura [3] *NR* = *EF*, *RS* = *FG* : & partant [4] *NR* = *RS*. Mais [1] *NO* . *OP* : : *NR* . *RS*. Donc aussi *NO* = *OP*. Ayant encore fait *OV* parallele à *FD*; on aura par le même raisonnement *OT* = *TV* : & partant [1] *OP* = *PB*. Donc la ligne droite *AB* est divisée dans le nombre des parties égales cherchées.

PROPOSITION LII.

1°. *Les triangles qui sont équiangles l'un à l'autre, ont leurs côtez homologues proportionnels.*

2°. *Reciproquement les triangles dont les côtez sont proportionnels, sont équiangles l'un à l'autre.*

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit le triangle *ABC* dont l'angle *CAB* est égal à l'angle *FDE* d'un autre triangle *DEF*, & l'angle *ABC* = *DEF*, enfin l'angle *BCA*

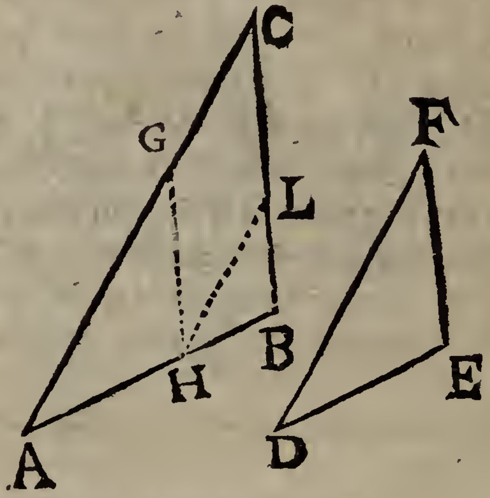
* *Prop.* 36. *Geo.*

[1] *Part.* 1. *Prop. pres.* [2] *Par Construction.*

[3] *Part.* 1. *Prop.* 37. *Geo.*

[4] *Demande* 1. *Geo.*

$= EFD$: je dis que ces deux triangles sont semblables; c'est à dire * qu'outre que ces deux triangles sont équiangles l'un à l'autre, leurs côtez homologues sont proportionnels, que $CA . AB :: FD . DE$, que $AB . BC :: DE . EF$, enfin que $BC . CA :: EF . FD$. Pour le demontrer; sur le plus grand des deux côtez homologues, par exemple sur AC, soit prise la partie AG égale au côté DF qui lui correspond, & sur AB soit prise AH égale à DE, & soit menée la ligne GH. Le triangle AGH ayant les côtez AG & AH, égaux ** aux côtez FD & DE, & l'angle GAH étant [1] égal à l'angle FDE; la base GH sera [2] égale à la base FE. Ces deux triangles GAH & FDE étant équilateraux, & par consequent égaux entre eux, ce qu'on dira des côtez de l'un, sera la même chose que si on le disoit des côtez de l'autre.



Puisque [1] l'angle $ACB = DFE$, & [3] que l'angle $AGH = DFE$; l'angle AGH sera [4] égal

* *Déf. 60. Geo.*
** *Par construction.*
[1] *Par Supposit.*
[2] *Part. 1. Prop. 35. Geo.*
[3] *Cor. 2. Prop. 35. Geo.*
[4] *Ax. 18. gen.*

à ACB. La ligne GH ſera donc * parallele à CB. Donc ** $CG . GA :: BH . HA$. & [°] $CG + GA . GA :: BH + HA . HA$; c'eſt à dire, $CA . GA = FD :: BA . HA = DE$ [1] & [2] enfin $CA . AB :: FD . DE$.

Pour demontrer que $AB . BC :: DE . EF$; par le point H, il faut mener la ligne HL parallele au côté AC. Alors il eſt évident [3] que $AH . HB :: CL . LB$, [4] que $BH . HA :: BL . CL$, & [5] que $BH + HA . HA :: BL + LC . LC$; enfin [2] que $BH + HA . BL + LC :: HA = DE . LC =$ [6] $GH = EF$. C'eſt à dire [7] que $BA . BC :: DE . EF$.

Si par le point G on mene une ligne parallele au côté AB, on trouvera que $BC . CA :: EF . FD$, ce qui ſera facilement demontré, de la même maniere qu'on a demontré que $AB . BC :: DE . EF$.

Les triangles équiangles ABC & DEF ont donc leurs côtez homologues proportionnels, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Si les triangles ABC & DEF, par exem-

* *Part.* 1. *Prop.* 25. *Geo.* ** *Prop.* 51. *Geo.*

[°] *Part.* 3. *Cor. Prop.* 3. *Algeb.*

[1] *Suppoſit.* [2] *Part.* 2. *Cor. Prop.* 3. *Algeb.*

[3] *Part.* 1. *Prop.* 51. *Geo.*

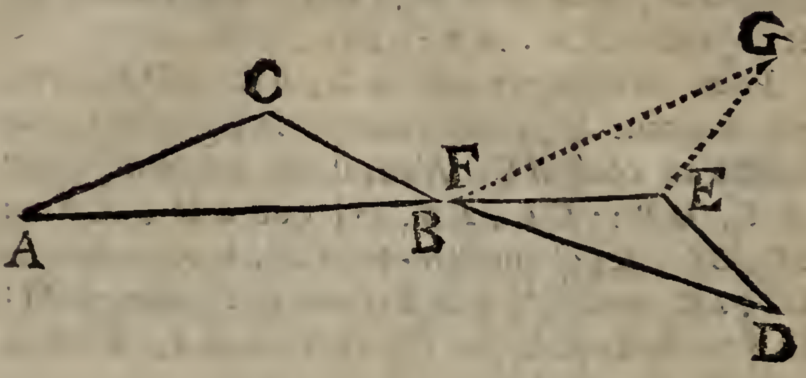
[4] *Part.* 1. *Cor. Prop.* 3. *Algeb.*

[5] *Part.* 3. *Cor. Prop.* 3. *Algeb.*

[6] *Part.* 1. *Prop.* 37. *Geo.*

[7] *Demande* 1. *gen.*

ple, ſont tels que *BC . CA* : : *DE . EF*, & *AB . AC* : : *FD . FE* ; on aura [1] encore *BC .*



DE : : *CA . EF*, & *AB . FD* : : *AC . FE*. Donc [2] *BC . DE* : : *AB . FD* ; & enfin [1] *BC . AB* : : *DE . FD*. Cela étant : je dis que ces deux triangles ſont équiangles ; c'eſt à dire que les angles *BAC* & *EFD* qui ſont oppoſez aux antecedens *BC* & *ED* de la premiere analogie, ſont égaux entr'eux ; que les angles *ABC* & *FDE* qui ſont oppoſez aux conſequens *CA* & *EF*, ſont auſſi égaux entr'eux ; enfin que l'angle *BAC* = *EFD*. Pour le demontrer, il faut ſur un des côtez du triangle *FED*, par exemple ſur le côté *FE*, conſtruire un triangle équiangle au triangle *ABC*, & pour cela on fera [3] l'angle *GFE* = *BAC*, on fera encore l'angle *GEF* = *ACB*; le troiſiéme angle *FGE* ſe trouvera [4] égal au troiſiéme *ABC*.

[1] *Part.* 2. *Cor. Prop.* 3. *Algeb.*
[2] *Cor.* 3. *def.* 12. *Algeb.*
[3] *Cor.* 4. *Prop.* 20. *Geo.*
[4] *Cor.* 4. *Prop.* 31. *Geo.*

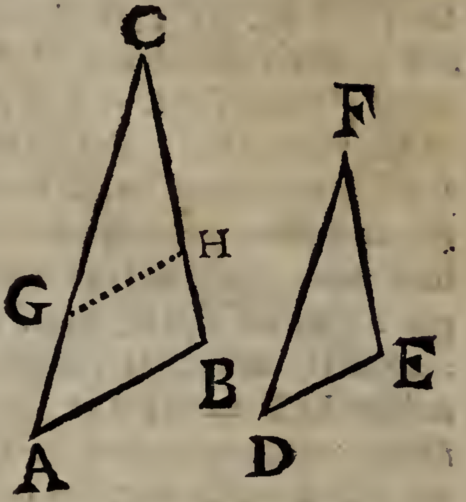
Il est [1] constant que $GE . EF :: CB . CA$. Or [2] $DE . EF :: CB . CA$. Donc [3] $GE . EF :: DE . EF$. Donc [4] $GE = DE$. Pareillement [1] $GF . FE :: BA . CA$. Mais [2] aussi $DF . FE :: BA . AC$. Donc [3] $GF . FE :: DF . FE$. Donc [4] $GF = DF$. Le côté FE est commun ; ces deux triangles FEG & EFD sont donc équilateraux entr'eux. Donc [5] l'angle $FED = FEG$. Mais aussi [6] l'angle $ACB = FEG$. Donc [7] l'angle $ACB = FED$. De même $EFD = EFG$ [6]; & $BAC = EFG$ [6]. Donc [7] l'angle $BAC = EFD$. Donc [8] l'angle $FDE = ABC$. Les triangles ACB & FDE sont donc équiangles l'un à l'autre, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

Si un triangle, par exemple ABC, a un de ses angles ACB égal à un angle DFE d'un autre triangle DEF ; & si les côtez CA & CB qui comprennent cet angle ACB, sont proportionnels aux deux côtez FD & FE qui compren-

[1] *Part.* 1. *Prop. pres.*
[2] *Supposit.*
[3] *Cor.* 3. *déf.* 12. *Algeb.*
[4] *Part.* 2. *Prop.* 8. *Algeb.*
[5] *Cor.* 2. *Prop.* 35. *Geo.*
[6] *Par construction.*
[7] *Ax.* 18. *gener.*
[8] *Cor.* 4. *Prop.* 31. *Geo.*

nent un pareil angle dans l'autre triangle ; c'est à dire, si $AC . CB :: DF . FE$: je dis que ces deux triangles seront équiangles entre eux, de telle maniere que les angles opposez aux antecedens de cette analogie seront égaux entre eux, de même que ceux qui seront opposez aux consequens. Pour le



demontrer, sur le plus grand des antecedens de cette analogie, par exemple sur le côté CA, on prendra $CG = FD$, & sur CB on prendra $CH = FE$. Ce qui est possible ; car si l'antecedent $AC > FD$, on aura aussi le consequent $CB > FE$; puisque * $AC . DF :: CB . FE$. Enfin on menera la ligne GH, & on aura [1] le triangle CGH, équilateral, & équiangle au triangle FDE.

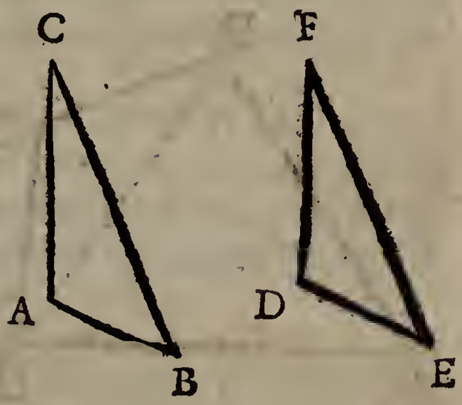
Puisque * $AC . CB :: DF = GC . FE = CH$; on aura [2] $AC . GC :: CB . HC$; & [3] $AC - GC . GC :: CB - HC . HC$, c'est à dire ; $AG . GC :: BH . HC$. La ligne CH sera [4] donc parallele à AB. L'angle CAB sera [5] donc égal à CGH. Mais aussi [6] l'angle $FDE = CGH$. Donc [7] l'angle $CAB = FDE$. Pareillement [5] l'angle $CBA = CHG$, & [6] $FED = CHG$. Donc [7] $CBA = FED$. Ces

* *Supposit. & Part. 2. Cor. Prop. 3. Algeb.*
[1] *Part.1.Prop.35.Geo.* [2] *Part.2.Cor.Prop.3.Alg.*
[3] *Part. 4. Cor. Prop. 3. Algeb.*
[4] *Part. 2.Prop.51. Geo.* [5] *Part.1.Prop.24. Geo.*
[6] *Cor. 2. Prop. 35. Geo.* [7] *Ax. 18. gen.*

deux triangles *ABC* & *DEF* seront donc [°] semblables.

COROLLAIRE II.

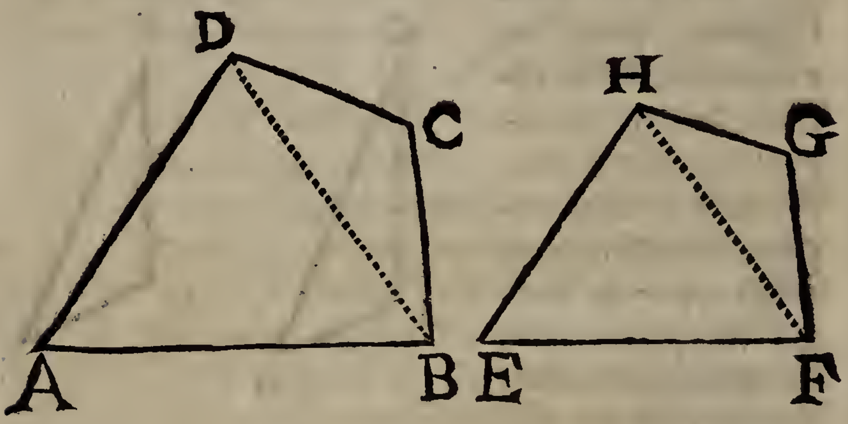
Si un triangle a un de ses côtez égal au côté d'un autre triangle ; & si deux des angles qui ont leurs sommets dans les extremités de ce côté du premier triangle, sont égaux à deux angles qui ont aussi leurs sommets dans les extremitez de ce côté de l'autre triangle, chacun à chacun : ces deux triangles seront égaux entre eux en toutes manieres. Soit le triangle *ABC* dont le côté *AC* soit égal au côté *DF* du triangle *DEF* ; dont l'angle *ACB* soit égal à l'angle *DFE*, & dont l'angle *CAB* soit égal à l'angle *FDE* : il est * évident que le troisiéme angle *ABC* = *DEF*. Donc [1] *AC* . *DF* : : *AB* . *DE*. Mais [2] *AC* = *DF*. Donc aussi *AB* = *DE*. Enfin [1] comme *AB* est à *DE*, ainsi *BC* est à *EF*. Or on vient de voir que *AB* = *DE*. Donc aussi *BC* = *EF*. Ces deux triangles *ABC* & *DEF* sont donc équilateraux, ils sont donc égaux l'un à l'autre, en toutes manieres.



[°] *Déf. 60. Geo.*
* *Cor. 4. Prop. 31. Geo.*
[1] *Prop. presente, & Part. 2. Cor. Prop. 3. Algeb.*
[2] *Supposition.* [3] *Cor. 1. Prop. 35. Geo.*

COROLLAIRE III.

On peut tirer de la Proposition presente une maniere de décrire une figure rectiligne qui ait pour côté une ligne donnée, & qui soit semblable à une autre terminée par plus de trois côtez. Soit une figure donnée *ABCD*, à laquelle on se propose de décrire une figure semblable qui



ait pour un de ses côtez la ligne donnée *EF*. Du sommet d'un des angles de cette figure on menera des lignes aux autres angles qui la diviseront en triangles. On menera donc du point *D*, par exemple, la ligne *DB*, qui partagera cette figure en deux triangles. Ensuite ayant fait * l'angle $E=A$, il faut encore faire l'angle $EFH = ABD$, & mener les lignes *FH* & *EH* jusques au point de leur concours *H*. On fera enfin $FHG = BDC$ & $HFG = DBC$: je dis que la figure *EFGH* sera semblable à *ABCD*. Car 1°. il est constant [1] que les angles d'une de ces figures sont égaux aux angles de l'autre, chacun

* *Cor. 4. Prop. 20. Geo.* [1] *Par construction.*

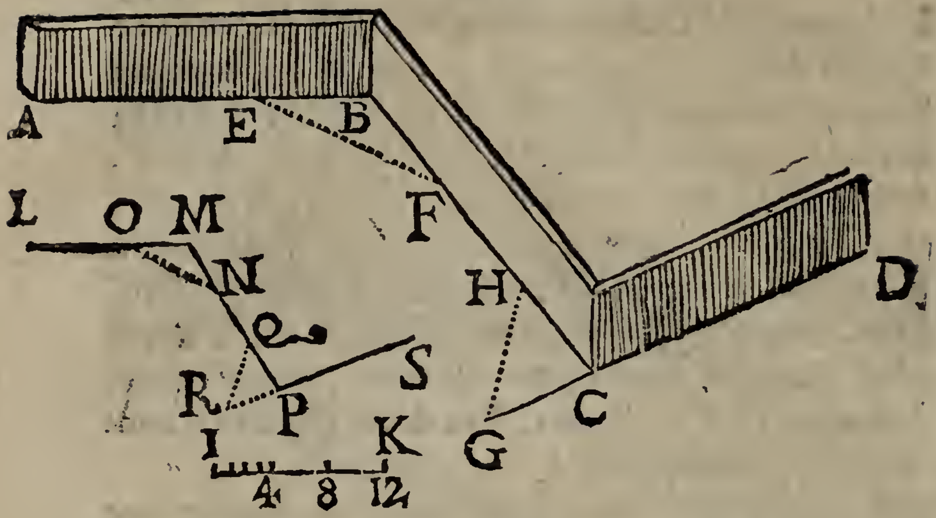
à

à chacun. 2°. Chaque triangle d'une de ces deux figures étant [1] équiangle a chaque triangle de l'autre, on aura [2] *EH . EF :: AD . AB*. On aura [2] ensuite *EF . FH :: AB . BD* . & *HF . FG :: DB . BC*. Donc [3] *EF . FG :: AB . BC*. On aura [2] encore *FG . GH :: BC . CD*. Enfin [2] *GH . HF :: CD . DB* .& *HF. HE :: DB . DA*. Donc [3] *GH . HE :: CD . DA* . Chaque côté d'une de ces Figures est donc proportionnel à chaque côté de l'autre. Ces deux Figures seront donc [4] semblables.

Il y a encore d'autres manieres de décrire une figure semblable à une autre. Je prendrai pour exemple la figure triangulaire dont on peut se servir pour décrire sur le papier un angle égal à un autre angle proposé sur le terrain.

Pour décrire sur le papier un angle égal à l'angle r'entrant *ABC* , & un égal à l'angle saillant *BCD* ; sur les lignes *BA* & *BC* il faut prendre les parties *B E* & *B F* , chacune de quatre toises, par exemple, & mesurer la distance du point E au point F, que je suppose de huit toises. Ensuite sur la ligne droite *DC* prolongée on prendra aussi *CG* de quatre toises, & *CH* de quatre toises, on mesurera la distance du picquet *G* au picquet *H*; & on écrira ces mesures sur un papier pour s'en souvenir. Sur un autre papier il faut mener à volonté, une ligne *I K* qu'on divisera, par exemple, en douze parties égales, qui servira d'une

[1] *Par construction.*
[2] *Prop. pres.*
[3] *Part. 1. Cor. Prop. 12. Algeb.*
[4] *Def. 60. Geo.*

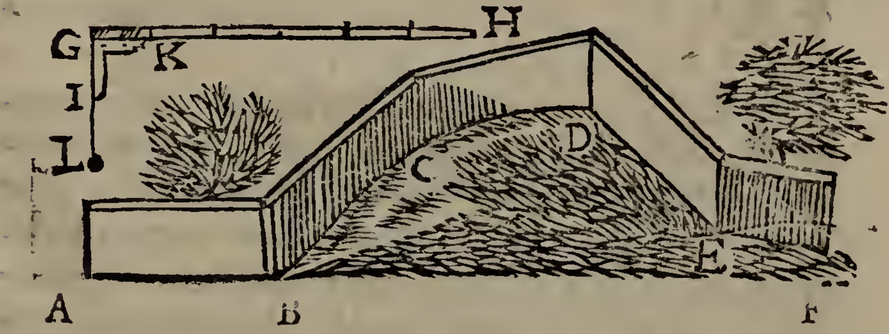


échelle de douze toises. On menera la ligne *LM* & sur l'échelle *I K*, on prendra quatre parties égales qui representent quatre toises, & on les transportera du point *M* en *O*. On prendra huit toises sur la même échelle *I K* & encore quatre toises dont avec la ligne *M O* on fera [1] le triangle *O N M*. Je dis que l'angle *L M P* = *A B C*. Car le triangle *O N M* a [2] ses côtés proportionnels aux côtés du triangle *E F B*; puisque le côté *O N* contient autant des parties égales du côté *N M*, que le côté *E F* contient de celles du côté *F B*; & que le côté *N M* contient autant de celles du côté *M O*, que le côté *F B* en contient du côté *B E*: on dira la même chose à l'égard des côtés *M O*, *O N*; & *B E*, *E F*. Le triangle *O N M* est donc [3] équiangle au triangle *E F B*. L'angle *E B F* est donc égal à *OMN*, l'un & l'autre étant opposés aux côtés correspondants *E F* & *O N*. On trouvera par le même raisonnement que le triangle *P Q R* est équian-

[1] *Cor. 4. Prop. 15.* [2] *Def. 13. Algeb.*
[3] *Part. 2. Prop. Pies.*

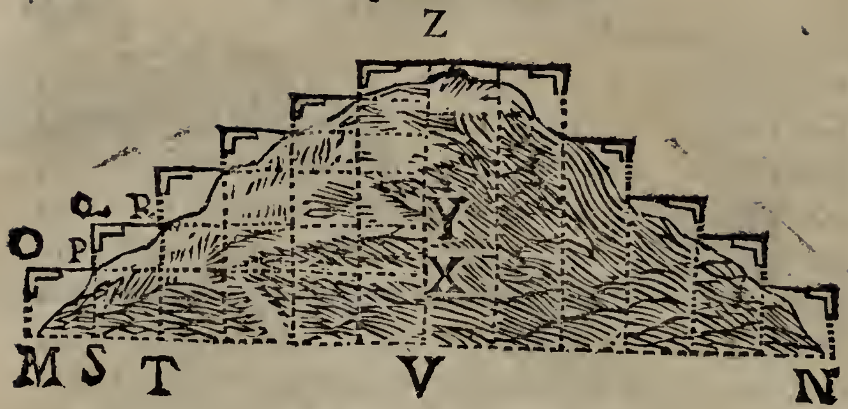
gle au triangle *CGH* ; & [1] l'angle *RPQ* estant égal a *GCH*, on aura [2] *MPS* = *BCD*. On peut donc décrire, ou dessiner éxactement le plan d'une maison, d'un jardin, d'un enclos, &c. en se servant d'une échelle, comme on vient de voir, afin de transferer leurs angles sur le papier ; de mener ensuite des lignes qui serviront à representer les côtés de cette Maison, Jardin, &c. dans la même proportion qu'on les a trouvés sur le terrain,

S'il est necessaire de representer un mur *ABCDEF* construit en partie sur un plan horizontal, & le reste sur une petite montagne *BCDE*, tel qu'est quelquefois l'enceinte d'un



Parc ; outre la longueur du mur considerée suivant la pante de la Montagne, il faut encore avoir égard à la longueur de la base de cette Montagne, & pour la connoître en toise, le mur toujours à niveau, c'est à dire parallelement à la ligne horizontale *A*F. Dans cette circonstance il faut se servir d'une toise *GH* à laquelle on a ajusté une equerre ou triangle rectangle *GIK*, de sorte qu'au point *G* il y ait un filet attaché, & à son autre extremité un plomb *L*, & que ce filet touche librement le côté *GI* de ce triangle. Supposons pour exemple, qu'il faille

[1] *Part. 2. Prop. Pres.*
[2] *Prop. 21. Geo. & ax. 9. gen.*



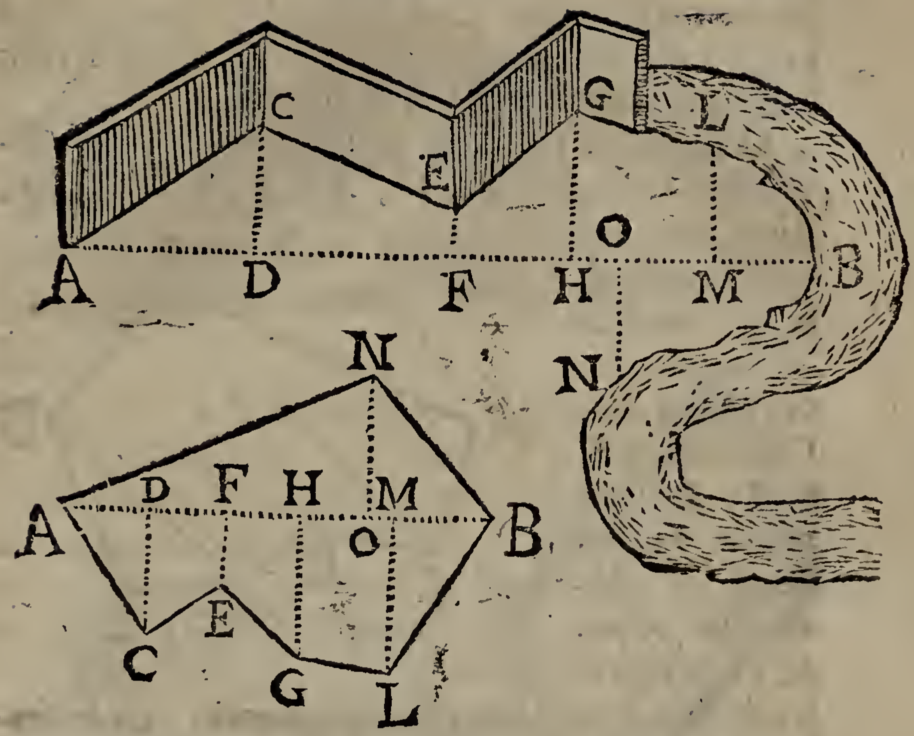
connoître la longueur de la base *M N* de la Montagne *M Z N*; il faut poser à Niveau la toise *O P* , & alors on connoît [1] la longueur *M S*, les lignes *O M* & *P S* étant perpendiculaires à la ligne horizontale *M N*. On dira la même chose de *Q R* , *S T* , &c. d'où on connoîtra la ligne entiere ou base *M N*.

Si *Q R* étoit la largeur superieure d'une muraille, & si *M T* en êtoit la base; on connoîtroit l'excés dont la base *M T* surpasse la largeur superieure *Q R* , en appliquant horizontalement la toise *O P*, & en ajustant à quelque point de cette toise le filet *O M*, de sorte que le plomb attaché à son extremité inferieure touche legerement le point *M* , alors la distance *O P* feroit [1] connoître l'excés *M S*.

On peut encore connoître la hauteur *V Z* de la Montagne, en mesurant toutes les hauteurs pertiales *M O* = *V X* [1], *P Q* = *X Y*, &c. dont la somme est [2] égale à *V Z*.

Pour représenter proportionnellement la situation d'une muraille *A C E G* qui forme plusieurs angles, ou le cours d'une Riviere *G L B N*, ou enfin une prairie, ou autre terrain semblable *A C G B N* : on peut [3] mener sur le terrain

[1] *Part.* 1. *Prop.* 37. *Geo.* [2] *Ax.* 3. *gener.*
[3] *Part.* 1. *Cor.* 5. *Prop.* 34. *Geo.*

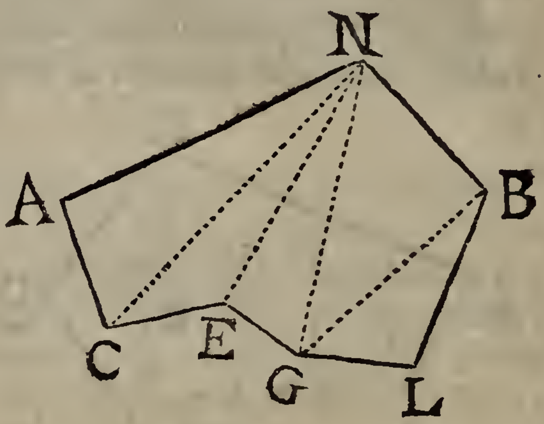


une ligne droite *A B* du ſommet *A* d'un angle, à un autre *B*, & mener [1] de chaque angle à cette ligne *A B* des perpendiculaires *C D*, *E F*, *G H*, &c. Aprés avoir meſuré les parties *AD*, *DF*, &c. de la ligne *A B*, & chacune des autres perpendiculaires, *D C*, *F E*, &c. il eſt facile de les décrire ſur le papier, proportionnellement à celles qui ſont ſur le terrain, en ſe ſervant d'une ligne diviſée en parties égales, que les Deſſinateurs appellent *échelle*. Enſuite on menera dans le deſſein les lignes *A C*, *C E*, *E G*, &c. Les triangles *A D C*, *L M B*, *B N O* du deſſein ſeront [2] ſemblables à ceux qui leur correſpondront ſur le terrain. Et ſi on mene des Diagonales dans les Trapeſoides, on trouvera encore [3]

[1] *Part. 3. Cor. 2. Prop. 40. Geo.*
[2] *Cor. 3. Prop. 20. Geo. & Cor. 1. Prop. Preſ.*
[3] *Cor. 3. Prop. 20. Geo. ax. 9. gen. & Cor. 1. Prop. preſ.*

d'autres triangles ſemblables. On décrira donc par ce moyen des figures entieres, qui ſeront ſemblables à celles qui ſont propoſées.

La Figure *A C G B N* pouvoit encore eſtre diviſée en triangles *A C N*, *N C E*, *N E G*, &c. Alors, aprés avoir meſuré ſur le terrain la longueur des lignes *AC*, *CN*, *NA*; *CE*, *E N*; &c. on auroit facilement * décrit ſur le papier une figure



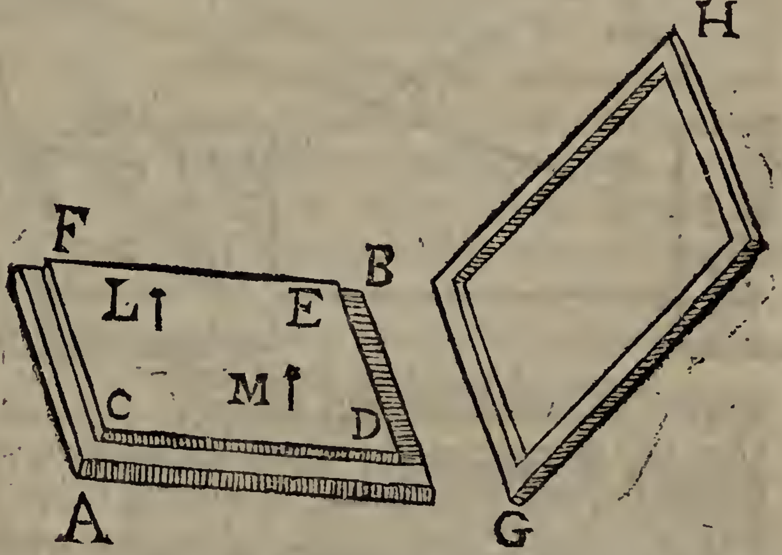
ſemblable à celle qui eſt ſur le terrain, en ſe ſervant d'une échelle comme on a vû dans les operations precedentes. Cette maniere eſt fort exacte.

La deſcription des figures ſemblables eſt tres-utile pour bien réuſſir dans le deſſein, & pour faire enſuite des ouvrages conſiderables. Les Architectes, Maſſons, Charpentiers, Menuiſiers, Serruriers, Sculpteurs, Fondeurs, &c. ne peuvent éviter de s'en ſervir, pour perfectionner des bâtimens, ou pour en conſtruire de nouveaux ſur le terrain dont on fait la repreſentation; & généralement pour executer des ouvrages conformement aux deſſeins qu'on leur propoſe. Enfin cette pratique eſt fort neceſſaire aux Geographes, aux Ingenieurs mêmes, qui ſont ſouvent obligés de repreſenter une Ville avec ſes avenuës, les Mareſts, Rivieres, ou au-

* *Cor.* 4. *Prop.* 35. *Geo.Def.* 13. *Algeb.* & *Part.* 2. *Prop. preſ.*

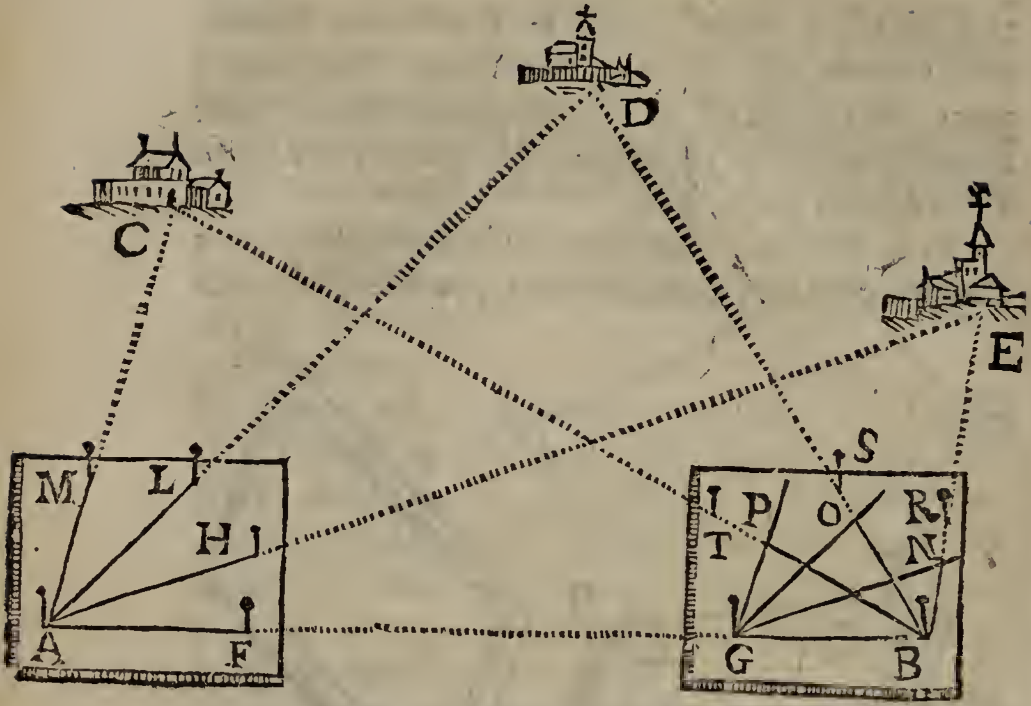
tres lieux qui en ſont voiſins. Il eſt donc encore avantageux de voir les methodes ſuivantes, pour décrire des Cartes Geographiques, pour repreſenter ſur le papier un lieu particulier, une contrée, un païs, &c.

On ſe ſervira d'une planche de bois *A B*, dont chaque côté ſera environ de 18 pouces. On appli-



quera un papier blanc ſur cette planche en *A B*, qui y ſera retenu par un quadre ou chaſſis *G H*, qu'on emboëtera au tour de l'eſpace *C D E F*. Enſuite on ajuſtera cette planche horizontalement ou à niveau, ſur un ſupport à trois pieds, ſemblable à celui qui eſt repreſenté dans la page 396. Les épingles *L*, *M* &c. ſerviront de pinnules & de petits piquets; il faut que ces épingles ſoient fort menues, afin qu'elles ne faſſent que de petits trous. Cet inſtrument eſt connu ſous le nom de Planchette.

Pour repreſenter ſur le papier pluſieurs Villages, par exemple *C*, *D*, *E*, il faut prendre une diſtance *A B* connue, de 400 toiſes, d'une demie lieue, &c. en ſorte que de ſes extremités *A* & *B* on découvre ces Villages *C*, *D*, *E*. Il faut ap-



pliquer la planchette vers l'extremité *A*, & ficher une épingle en *A* perpendiculairement à la surface de cette planchette. Il faut en ficher encore une en F, de sorte qu'en la regardant par le bas elle soit en même ligne droite [1] que les extremités *A* & *B*. Cette ligne *A* F servira d'échelle, qu'on divisera en autant de parties qu'on sçait que la ligne *A B* contient de toises ou de lieues, &c. Il faut ensuite ficher les épingles *H*, *L*, *M*, de sorte qu'en regardant l'épingle du point *A*, ces autres épingles *H*, *L*, &c. & les Clochers, ou autres lieux remarquables de ces Villages E, *D*, *C*, soient aussi en ligne droite : & on menera les lignes droites *A H*, *A L*, *A M*, sur lesquelles il faut écrire le nom des Villages où elles sont dirigées, afin de s'en souvenir.

Enfin il faut transporter la planchette vers l'autre extremité *B* de la distance *A B*; de sorte que

[1] *Part. 1. Cor. 5. Prop. 34. Geo.*

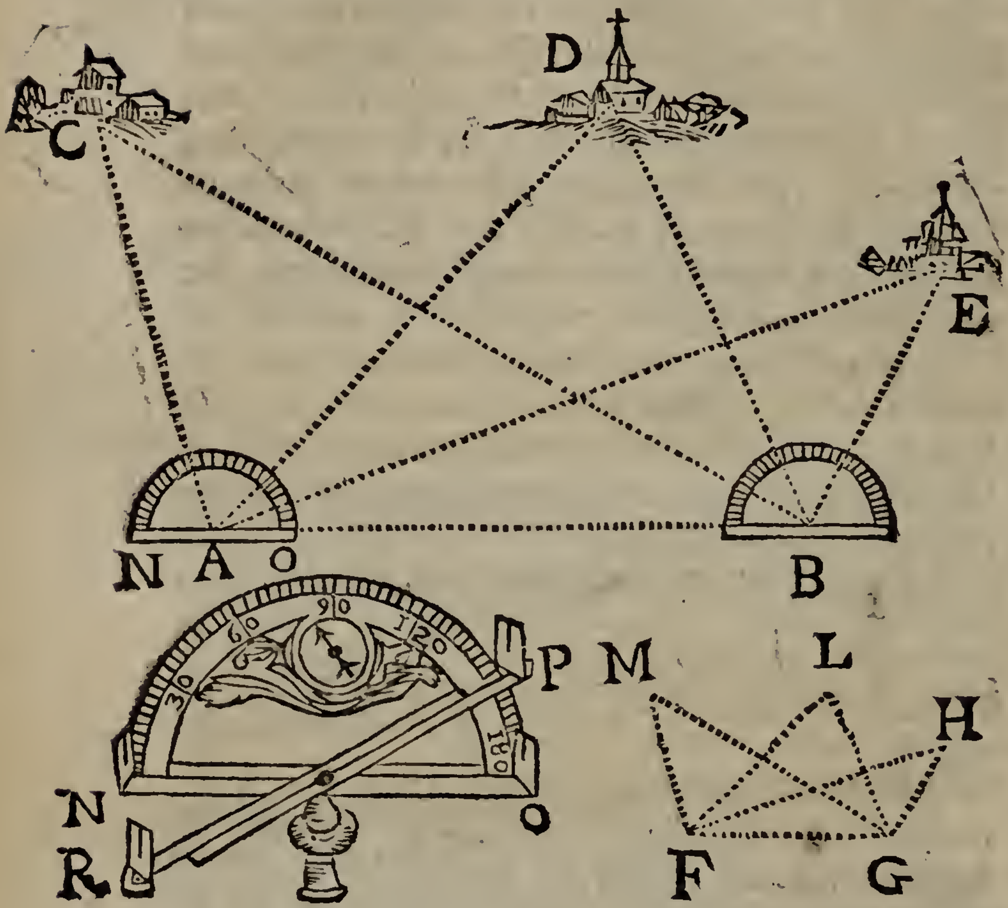
le point F ſe trouve en *B*, & que les épingles fichées en *B* & en *G*, & le point *A* ſe trouvent en ligne droite. Alors par le point *B*, on menera vers ces mêmes Villages *E*, *D*, *C* les lignes droites *BE*, *BD*, & *BC*, en fichant les épingles *R*, *S*, *T*. Les points *N*, *O*, *P*, où ces dernieres lignes couperont les premieres, ſeront ceux où il faut repreſenter ces Villages *E*, *D*, *C*. Il eſt évident [1] que ces triangles *GBP*, & *ABC* ſont ſemblables ; puiſque l'operation même les rend équiangles. Donc *AB* . *BC* : : *GB* . *BP*. & en connoiſſant le nombre des toiſes, des lieues, &c. de l'échelle *GB*, on connoîtra le nombre de celles du côté *BP*, en cherchant avec un compas combien *BP* contient des parties égales de *GB*. Ces parties feront auſſi connoître celles de *BC*. On dira la même choſe à l'égard des autres triangles *GBO*, *GBN*, &c.

Il peut arriver que la planchette eſt quelquefois trop petite, & que les points de concours *N*, *O*, *P*, &c. ne peuvent ſe rencontrer ſur ſa ſurface ; alors on ſe ſervira de la métode ſuivante.

Aprés avoir pris une diſtance connue *AB*, comme dans la pratique precedente ; au lieu de la planchette, il faut poſer horizontalement au point *A* un demi cercle *NOP* diviſé en degrés, de ſorte que par les pinnules *N*, & *O* ajuſtées aux extremités de ſon diametre, on puiſſe appercevoir quelque marque au point *B*. Ce demi cercle demeurant fixe en cette ſituation, il faut diriger les pinnules *R* & *P* de la regle mobile *RP* attachée au centre du demi cercle, vers chacun de ces Villages dont eſt queſtion ; obſerver de

[1] *Part. 3. Prop. preſ.*

combien de degrés eſt l'angle *C A B*, par exemple, de combien eſt l'angle *D A B*, &c. & écrire le nombre des degrés, qui ſont [1] la meſure de chacun de ces angles, pour s'en ſouvenir. On tranſportera cet inſtrument à l'autre ſtation *B*,



& on obſervera auſſi le nombre des degrés qui conviennent aux angles *C B A*, *D B A*, &c. Enfin on menera ſur le papier la ligne *F G* ſur laquelle on fera [2] les triangles *M G F*, *F L G* & *F G H* équiangles aux triangles *A B C*, *ABD*, *A B E* qui ſont ſur le terrain, & qui leur ſeront

[1] *Prop.* 20. *Geo.*
[2] *Cor.* 4. *Prop.* 20. & *Cor.* 4. *Prop.* 31. *Geo.*

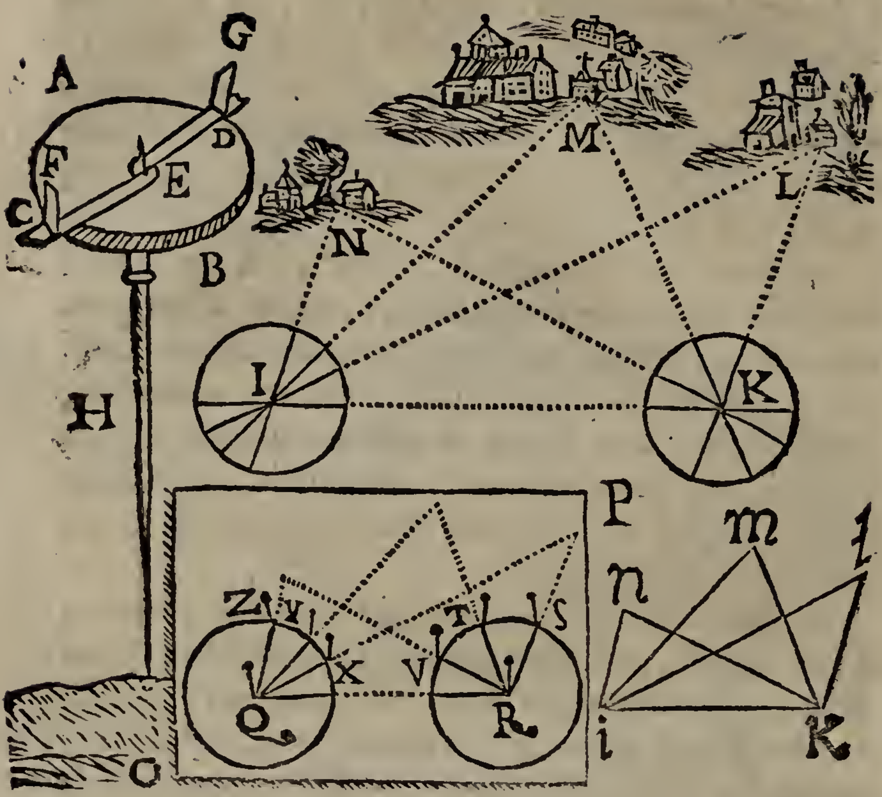
[1] semblables. Les Villages *C*, *D*, & *E* seront representés dans les points *H*, *L* & *M*. On divisera la ligne *F G* dans un nombre de parties égal à celui qui est connu dans la ligne *A B* pour servir d'Echelle. On trouvera [1] enfin que *F G*. *G H* : : *A B* . *B E*. &c.

Au lieu des Villages *E*, *D*, *C*, si on avoit fait attention aux sommets des angles d'un parc ou enclos, d'une prairie, &c. on auroit aussi pû se servir de ces deux dernieres métodes, pour décrire une figure semblable à celle de ce terrain; & pour en avoir les côtés, on auroit mené des lignes du point *E* au point *D*, & du point *D* au point *C*.

La Boussole qu'on a ajustée dans le plan du demi cercle, est utile à faire connoître le Nord & le Midi du terrain dont est question, par le moyen d'une aiguille aymantée posée en équilibre sur un pivot, & dont une des extremités se tourne vers le Nord, & l'autre vers le Midi.

On peut encore se servir de l'instrument *A B*, qui n'est qu'une planche de bois, taillée en forme de cercle, de douze ou quinze pouces de diametre, & de trois quarts de pouce d'épaisseur, ou environ. Il faut placer dans le centre *E* un pivot ou aiguille fine & déliée, & ajuster à ce pivot une regle mobile fabriquée de sorte que la ligne droite *C D* passe par le centre *E*. Il faut encore ajuster à cette regle deux pinnules de telle maniere que leurs côtés *C F* & *D G* ayent leurs extremités dans la ligne droite *C D*, & soient

[1] *Part. 1. Prop. pres.*



perpendiculaires au plan de la regle. Le trou du pivot doit être petit, afin que ſon centre ſe trouve exactement dans la ligne *C D*. On applique cet inſtrument à l'extremité d'un bâton ou ſupport *H*. Il faut mettre ſous cette regle *C D* un papier blanc, auquel on aura collé par le deſſous du milieu un autre petit papier, pour empêcher que le trou du pivot ne ſoit augmenté, & que rien n'y ſoit déchiré pendant l'operation. Il faut enſuite avoir la précaution de coller ce papier blanc à la planche de bois en trois ou quatre petits endroits, par l'extremité ſeulement.

Pour ſe ſervir de cet inſtrument, il faut le poſer, par exemple, en *I*, dirigeant les côtés *C F* & *D G* des pinnules en ligne droite vers un autre point *K*, d'une diſtance connue & un peu grande à proportion que les lieux qu'on veut

repreſenter

representer ſur le papier, ſont éloignés. La regle mobile demeurant ſituée de maniere que ſa ligne droite *C D* ſoit ſur la ligne *I K*, il faut ſur le papier blanc de deſſous décrire une ligne avec du crayon ou de l'encre, ſur laquelle on écrit, *Ligne de ſtations.* On fait la même choſe à l'égard des Villages *N*, *M*, *L*, Moulins, Hameaux, &c. en écrivant les noms ſur les lignes qui leur appartiennent. Aprés cela il faut ôter le papier ſur lequel on vient de mener ces lignes, & tranſporter l'inſtrument en *K*. Aprés y avoir appliqué un nouveau papier blanc, on dirigera la regle mobile vers le premier point de ſtation *I*, & enſuite vers les Villages *N*, *M* & *L*, comme dans l'operation precedente, & on menera des lignes ſur le nouveau papier, qui exprimeront les angles *IKN*, *IKM*, &c ; & ſur ces lignes on écrira encore le nom des lieux où elles ſeront dirigées. Il faut enſuite prendre ces deux papiers, & poſer leurs centres ſur un autre papier O *P* en *Q*, & en *R*, obſervant que deux de leurs lignes qui avoient été dirigées vers *I* & *K* faſſent la ligne droite *QR*, ce qui ſera facilité par une ligne droite menée ſur le papier O *P*. Enſuite avec la pointe d'une épingle il faut marquer ſur le papier O *P* les points *Q*, *R*, *S*, *T*, *V*, *X*, *Y*, *Z*, pour y mener des lignes juſqu'à leurs autres points de rencontre, & décrire la figure *i k l m n*, dont chaque triangle eſt [1] ſemblable à chacun de ceux de la figure *I K L M N*. Enfin on décrira les Villages aux points *l*, *m*, & *n*, avec leurs noms à côté.

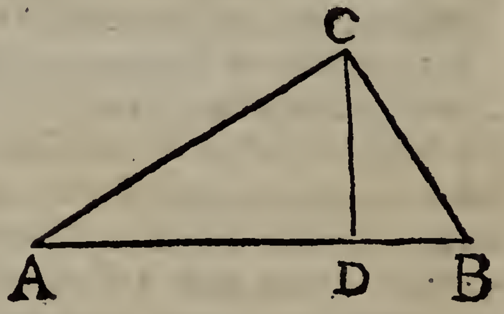
[1] *Cor. 4. Prop. 31. & Part. 1. Prop. 52. Geo.*

PROPOSITION LIII.

Dans un triangle rectangle, la ligne menée du sommet de l'angle droit perpendiculairement au côté qui lui est opposé, divise ce triangle en deux autres qui lui sont semblables.

DEMONSTRATION

Soit le triangle *ABC* dont l'angle *ACB* est droit; du sommet *C* de cet angle soit menée la ligne *CD* perpendiculairement au côté *AB*: Je dis que les triangles *ADC* & *CDB* sont semblables au triangle *ABC*. Car l'angle droit *ADC* du triangle *ACD* est [1] égal à l'angle droit *BCA*; & l'angle *DAC* est commun aux deux triangles *ABC* & *ADC*; le troisiéme angle *ACD* est [2] donc égal au troisiéme *ABC* du triangle *ACB*. Le triangle *CAD* est [3] donc semblable au triangle *ABC*.



Pareillement l'angle *CDB* = *ACB*, & l'angle *CBA* est commun aux deux triangles *CDB*, & *ACB*; le troisiéme angle *BCD* est donc [2] égal au troisiéme *CAB* du triangle *ABC*. Le

[1] *Cor. 3. Prop. 20. Geo.*
[2] *Cor. 4. Prop. 31. Geo.*
[3] *Part. 1. Prop. 52. Geo.*

triangle *B C D* eſt donc ſemblable auſſi au triangle *A B C*; *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

On vient de voir dans la demonſtration de la propoſition preſente, que l'angle *A C D* = *DBC*, que l'angle *C A D* = *D C B*, on ſçait auſſi [1] que l'angle droit *A D C* = *C D B*. Les triangles *A D C* & *C D B* ſont donc [2] ſemblables l'un à l'autre, & découvrent évidemment les verités ſuivantes.

1°. La ligne perpendiculaire *C D* eſt une moyenne proportionnelle entre les parties *A D* & *D B* du côté oppoſé à l'angle droit *A C B*. Car [2] le côté *A D* du triangle *A D C* eſt au côté *D C* du triangle *D B C*, comme le côté *D C* du triangle *A D C* eſt au côté *D B* du triangle *D B C*; c'eſt à dire [3] que ∺ *A D . D C . D B*.

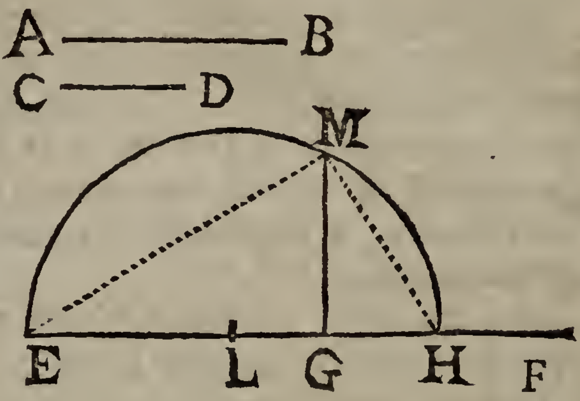
2°. Le côté *A C* eſt une ligne moyenne proportionnelle entre le côté entier *A B* & ſa partie *A D*. Car [2] le côté entier *A B* du triangle *A B C* eſt au côté *A C* du triangle *A D C*; comme le côté *A C* du triangle *A B C* eſt au côté *A D* du triangle *A D C*; c'eſt à dire que ∺ *A B . A C . A D*;

3°. Le côté *B C* eſt une ligne moyenne proportionnelle entre le côté *A B* & la partie *D B*. Car [2] le côté *A B* du triangle *A B C* eſt au côté *C B* du triangle *C D B*, comme le côté *C B* du triangle *C A B* eſt au côté *D B* du triangle *C D B*.

[1] *Cor. 3. Prop. 20. Geo.*
[2] *Part. 1. Prop. 52. & Part. 2. def. 60. Geo.*
[3] *Déf. 15. Algeb.*

COROLLAIRE II.

Le Corollaire precedent eſt le fondement d'une métode dont on peut ſe ſervir, pour trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données. Soient les lignes *A B* & *C D*; ſi on ſe propoſe d'en chercher encore une, qui ſoit telle que *A B* ſoit à cette ligne cherchée, comme cette ligne cherchée eſt à *C D*; il faut mener une ligne indéfinie *E F*, & ſur cette ligne prendre les parties *E G* & *G H* égales aux lignes données *A B* & *C D*. Enſuite, prenant la ligne totale *E H* pour un diametre, ou ſa moitié *E L* pour un rayon, il faut décrire la demie circonference *E M H*, & par l'extremité *G* de la ligne *E G* = *A B* il faut [1] mener une perpendiculaire à *E H*, & la prolonger juſqu'à ce qu'elle ſe termine dans la demie circonference au point *M*: Je dis que cette perpendiculaire *G M* eſt une moyenne proportionnelle entre *E G* & *G H*. Car l'angle *E M H* eſt [2] droit; *G M* eſt [3] perpendiculaire à *EH*. Donc [4] *G M* eſt une moyenne proportionnelle entre *A B* & *CD*, c'eſt à dire que ∺ *E G* = *A B* . *G M* . *G H* = *CD*.



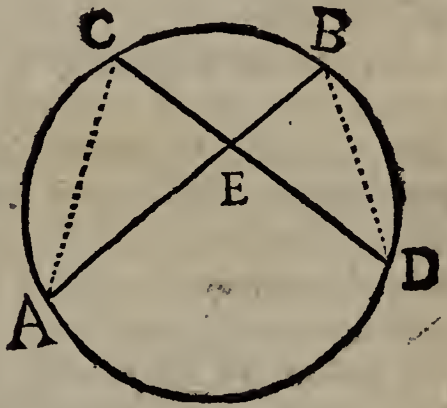
[1] *Part. 2. Cor. 2. Prop. 5. Geo.*
[2] *Cor. 7. Prop. 27. Geo.*
[3] *par conſtruction.*
[4] *Part. 1. Cor. 1. Prop. preſ.*

PROPOSITION LIV.

Si deux cordes se coupent dans un cercle, les parties de l'une sont reciproquement proportionnelles aux parties de l'autre.

DEMONSTRATION

SOient les cordes *AB* & *CD* qui se coupent mutuellement au point E pris dans le cercle *ADBC* : Je dis que les parties de ces cordes sont entr'elles en rapport reciproque; c'est à dire, par exemple, que *CE.EB :: AE. ED*. Pour le démontrer ; d'une extremité *C* d'une de ces cordes, je mene une ligne à l'extremité *A* d'une autre corde ; & par les autres extremités *B* & *D*, je mene encore une autre ligne *BD*.



Les triangles *ACE* & *EBD* sont équiangles. Car [1] l'angle *CEA* = *BED*, & [2] l'angle *ACE* = *EBD*; enfin [3] l'angle *CAE* = *EDB*. Ces triangles ont [4] donc leurs côtés homolo-

[1] *Part. 1. Prop. 22. Geo.*
[2] *Prop. 27. Geo. premiere circonstance.*
[3] *Prop. 27. ou Cor. 4. Prop. 31. Geo.*
[4] *Part. 1. Prop. 52. Geo.*

gues proportionnels. Donc $CE . EB :: AE . ED$, ou $AE . EC :: ED . EB$, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Le rectangle compris ſous les parties CE & ED d'une de ces cordes eſt donc égal au rectangle compris ſous les parties AE & EB de l'autre. Car, puiſque [1] $CE . EB :: AE . ED$, on [2] aura $CE \times ED = EB \times AE$, c'eſt à dire, [3] le rectangle compris ſous CE & ED, égal au rectangle compris ſous EB & AE.

PROPOSITION LV.

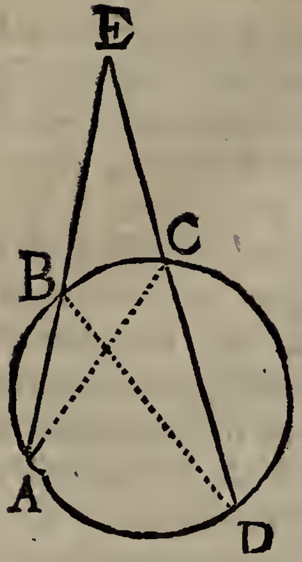
Si d'un point pris hors d'un cercle on mene deux lignes droites, qui, étant terminées à ſa circonference, la coupent; ces lignes entieres & leurs parties qui ſeront hors du cercle, ſeront entr'elles reciproquement proportionnelles.

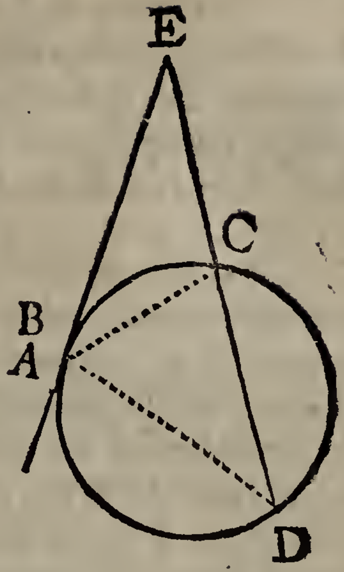
Si une de ces lignes coupe la circonference, & ſi l'autre la touche; la touchante menée de ce point pris hors le cercle au point d'attouchement, ſera une moyenne proportionnelle entre l'autre ligne entiere, & ſa partie qui ſe trouvera hors le cercle.

DEMONSTRATION

SOit le point E pris hors le cercle $ADCB$; de ce point E ſoient menées les lignes EA,

[1] *Prop. Preſ.*
[2] *Prop. 2. Algeb.*
[3] *Cor. 2. Def. 53. Geo.*





& *E D* qui ſont terminées à la circonference, & qui la coupent, ou dont une touche cette circonference, & l'autre la coupe : Je dis que *E D. E A* : : *E B . E C* . car [1] l'angle *B D E* = *EAC*, l'un & l'autre ayant pour meſure la moitié du même arc *B C*. L'angle *A E D* eſt commun aux deux triangles *A E C* & *B E D*. Le troiſiéme angle *E B D* eſt [2] donc égal au troiſiéme *A C E*. Les côtés homologues des triangles *E B D* & *E A C* ſont [3] donc proportionnels entr'eux. Donc le côté *E D* du triangle *E B D* eſt au côté *E A* du triangle *E C A*, comme le côté *E B* du triangle *E D B* eſt au côté *E C* du triangle *EAC*, *ce qu'il falloit démontrer.*

Il eſt évident que, ſi la ligne *E A*, par exemple, eſt touchante, cette ligne *E A* devient égale à *E B*. donc ∺ *E D . E A . E C*.

[1] *Prop.* 27. *Geo.*
[2] *Cor.* 4. *Prop.* 31. *Geo.*
[3] *Part.* 1. *Prop.* 52. *Geo.*

COROLLAIRE

Le rectangle compris sous la ligne entiere *ED* & sa partie *EC* qui est hors le cercle est égal au rectangle compris sous l'autre ligne entiere *EA*, & sous sa partie *EB* aussi exterieure au cercle. Car [1] $ED . EA :: EB . EC$. Donc $ED \times EC = EA \times EB$. Il est encore évident que le rectangle compris sous la ligne entiere *ED*, terminée à la circonference en coupant le cercle, & sous la partie *EC*, est égal au quarré de la touchante *EA* menée du même point *E*. Car, puisque $\div ED . EA . EC$, on aura $ED \times EC = EA \times EA$. Enfin si du même point *E* on mene plusieurs lignes qui se terminent à la circonference en coupant le cercle ; les rectangles compris sous ces lignes entieres & sous leurs parties exterieures au cercle seront égaux entr'eux : puisque chacun est égal au quarré de la touchante.

PROPOSITION LVI.

Les parallelogrammes semblables sont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues.

Les triangles semblables sont aussi entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues.

DEMONSTRATION

SOient les parallelogrammes semblables *EG* & *LN*, & soit nommé *a* le côté *EH*, & *b* le côté *EF* du parallelogramme *EG*. Soit enfin

[1] *Prop. Pres.*
[2] *Prop. 2. Algeb.*

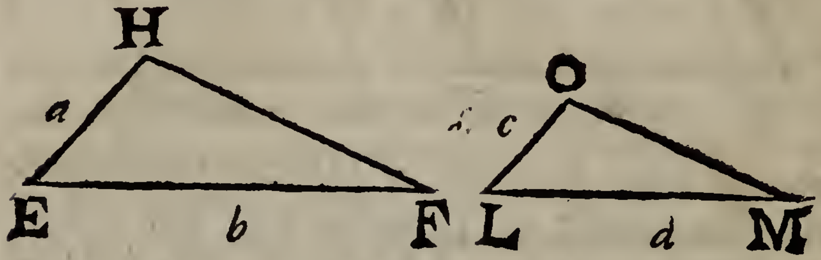
nommé c le côté LO, & d le côté LM du parallelogramme LN : Je dis que $EG \,.\, LN :: aa \,.\, cc$; que $EG \,.\, LN :: bb \,.\, dd$. &c. Car les parallelogrammes EG & LN étant [1] semblables, on a [2] $a \,.\, c :: b \,.\, d$. Donc [3] $ad = cb$. Mais [4] le parallelogramme EG est à $LN :: ab \,.\, cd$. En multipliant les deux derniers termes de cette derniere analogie par ad & cb, on aura [5] $ab \,.\, cd :: aabd \,.\, ccbd$. & en divisant ces deux derniers termes par ce qu'ils ont de commun qui est bd, on aura [6] $aabd \,.\, ccbd :: aa \,.\, cc$. ces quatre raports seront donc égaux entr'eux, $EG \,.\, LN :: ab \,.\, cd :: aabd \,.\, ccbd :: aa \,.\, cc$, Donc $EG \,.\, LN :: aa \,.\, cc$.

Au lieu de multiplier ab par ad, & cd par cb, si on avoit multiplié ab par cb, & cd par ad, & continué le reste comme on vient de voir ; on auroit aussi trouvé que $EG \,.\, LN :: bb \,.\, dd :: FG \times FG \,.\, MN \times MN$*$:: GH \times GH \,.\, NO \times NO$.

Pour démontrer que le triangle EFH est au

[1] *Supposit.*
[2] *Part. 2. Def. 60. Geo.*
[3] *Prop. 2. Algeb.*
[4] *Part. 1. Prop. 50. Geo.*
[5] *Prop. 5. Algeb.*
[6] *Prop. 6. Algeb.*
* *Part. 1. Prop. 37. Geo.*

triangle $LMO :: aa.cc :: bb.dd :: FH \times FH . MO \times MO$; dans le raisonnement qu'on vient de faire pour les parallelogrammes, au lieu de *E G* on ſubſtituera [1] le triangle *EFH*,



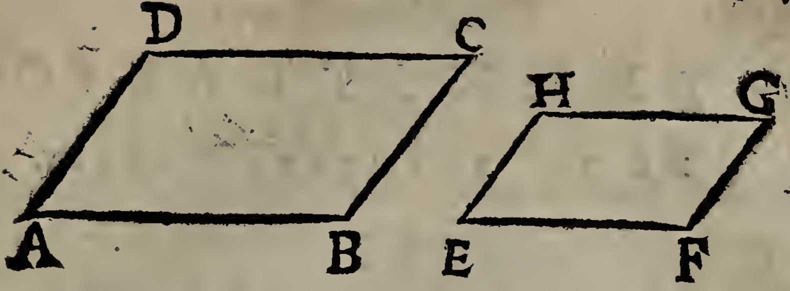
& au lieu de *L N* on ſubſtituera *L M O*. Alors la verité de la propoſition preſente ſera évidente dans toutes ſes circonſtances.

Les parallelogrammes ſemblables *E G* & *L N*, ou les triangles ſemblables *E F H* & *L M O*, ſont donc entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Si un parallelogramme, par exemple *AC*, a l'angle *D A B* égal à l'angle *H E F* d'un autre parallelogramme *E G* : Je dis que le raport de ce parallelogramme *A C* au parallelogramme *E G* ſera compoſé des raports des côtés qui comprennent ces angles égaux. Car [2] le parallelogramme $AC . EG :: AB \times AD . EF \times EH$. Or [3] le raport de $AB \times AD$ au produit $EF \times EH$ eſt compoſé du raport de *A B* à *E F*, & de *AD* à *E H*; ou de *A B* à *E H* & de *AD* à *E F*. Et

[1] *Part.* 2. *Prop.* 50. *Geo.*
[2] *Part.* 1. *Prop.* 50. *Geo.*
[3] *Prop.* 18. *Algeb.*



ſi ces deux parallelogrammes ſont ſemblables, ils ſeront [1] entr'eux en raiſon doublée de celle d'un côté du premier, au côté homologue du ſecond. Car ils ſont [2] entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues; & ces quarrés ſont [3] entr'eux en raiſon doublée d'un de ces côtés à un autre côté homologue.

On démontrera de la même maniere que ſi un angle d'un triangle eſt égal à un angle d'un autre, le raport d'un de ces triangles à l'autre, eſt [4] composé des raports des côtés qui comprennent ces angles égaux. Et ſi ces triangles ſont ſemblables, le raport de l'un à l'autre [3] eſt doublé de celui du côté d'un de ces triangles au côté homologue de l'autre.

PROPOSITION LVII.

1°. *Le quarré du côté oppoſé à l'angle droit d'un triangle rectiligne eſt égal à la ſomme des quarrés des côtés qui comprennent cet angle droit.*

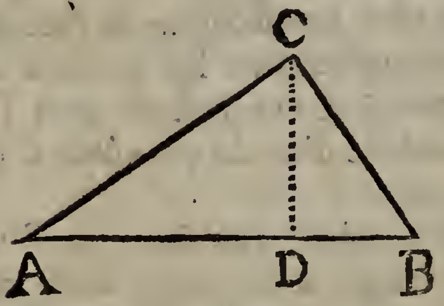
2°. *Reciproquement ſi le quarré d'un des côtés d'un triangle eſt égal à la ſomme des quarrés des deux autres côtés; l'angle oppoſé à ce côté eſt droit.*

[1] *Def.* 18. *Algeb. & Cor. Prop.* 18. *Algeb.*
[2] *Prop. Preſ.*
[3] *Cor. Prop.* 18. *Algeb.*
[4] *Part.* 2. *Prop.* 50. *Geo. & Prop.* 18. *Algeb.*

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit le triangle ABC rectangle en C: Je dis que le quarré de l'hypotenuse AB est égal au quarré de AC & au quarré de BC, pris ensemble. Car du sommet C de l'angle droit ACB, ayant [1] mené la ligne CD perpendiculairement sur la base AB, le triangle ABC sera divisé en deux autres triangles ADC & DBC, qui lui seront [2] semblables. Or [3] le triangle ABC est au triangle ADC comme le quarré de AB au quarré de AC; & le même triangle ABC est au triangle $CDB :: ABq . BCq$. Donc [4] $ABC . ADC + CDB :: ABq . ACq + CBq$. Mais [5] le triangle ABC est égal à la somme des triangles $ADC + CDB$; le quarré de AB est donc pareillement égal à la somme des quarrés des côtés AC & BC, *ce qu'il falloit démontrer.*



$$\left\{ \begin{array}{l} ABC . ADC :: AB^2 . AC^2 . \\ ABC . CDB :: AB^2 . CB^2 . \end{array} \right\}$$

Donc $ABC . ADC + CDB :: AB^2 . AC^2 + CB^2;$

Mais $ABC = ADC + CDB.$

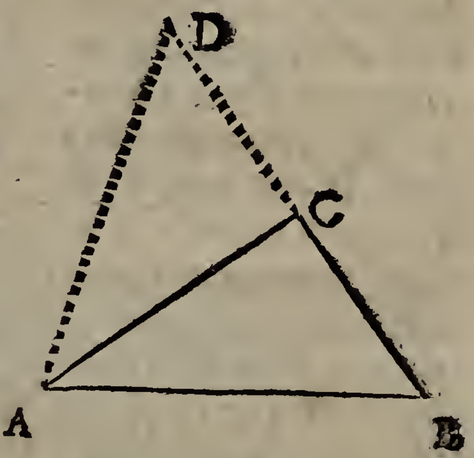
Donc $AB^2 = AC^2 + CB^2.$

[1] *Part.* 1. *Cor.* 2. *Prop.* 5. *Geo.*
[2] *Prop.* 53. *Geo.* [3] *Prop.* 56. *Geo.*
[4] *Prop.* 14. *Algeb.* [5] *Ax* 3. *gen.*

DEMONSTRATION

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

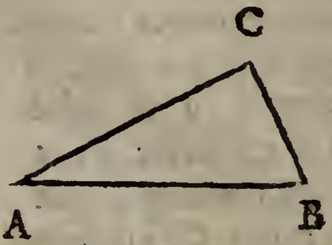
Soit le triangle ABC dont le côté AB est tel que son quarré est égal à la somme des deux quarrés du côté AC & du côté BC : je dis que l'angle ACB opposé à ce côté AB est droit. Pour le demontrer ; par le point C sommet de l'angle ACB soit menée la ligne CD perpendiculairement à la ligne AC, & soit faite $CD = CB$. On aura [1] $ADq = ACq + CDq$. Mais [2] $CDq = BCq$; puisque [3] $CD = BC$. Dans cette égalité $ADq = ACq + CDq$, au lieu de CDq, substituant CBq [4] ; on aura $ADq = ACq + CBq$. Mais [5] $ABq = ACq + CBq$. Donc [6] $ABq = ADq$. Donc [7] $AB = AD$. Ces deux triangles ACD & ABC seront donc équilateraux l'un à l'autre, & [8] les angles opposés à côtés égaux dans l'un & dans l'autre triangle, seront égaux. Donc l'angle $ACB = ACD$. Donc l'angle ACB sera droit, *ce qu'il falloit démontrer.*



[1] *Part. 1. Prop. Pres.*
[2] *Cor. 3. Prop. 5. Algeb.*
[3] *Par construction.*
[4] *Dem. 1. Geo.*
[5] *Supposit.*
[6] *Ax. 18. Geo.*
[7] *Cor. 4. Prop. 5. Algeb.*
[8] *Cor. 2. Prop. 35. Geo.*

COROLLAIRE I.

1°. Si on connoît la longueur des côtés *A C* & *B C* qui comprennent l'angle droit *A C B*, on connoîtra [1] celle de la base *A B*. Car la base $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$.



2°. Si on connoît la longueur de l'hypotenuse *A B*, & un des autres côtés, par exemple *A C*, on connoîtra aussi l'autre côté *B C*. Car [1] $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$.

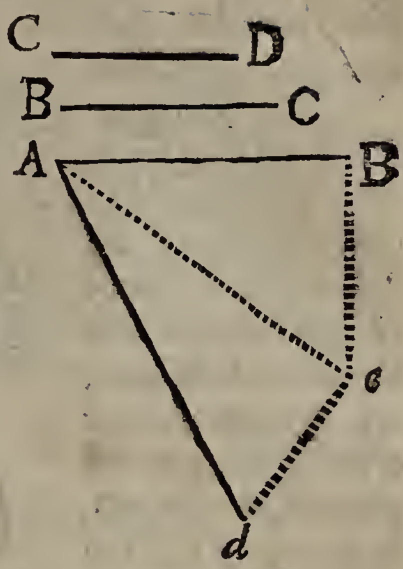
3°. Si un triangle rectangle a son hypotenuse égale à l'hypotenuse d'un autre triangle rectangle ; & si un des côtés qui comprennent l'angle droit d'un de ces triangles, est égal à un des côtés qui comprennent l'angle droit dans l'autre triangle ; le troisiéme côté d'un de ces triangles sera égal au troisiéme côté de l'autre. Parceque le quarré d'une de ces hypotenuses est [2] égal au quarré de l'autre. Or retranchant de part & d'autre les quarrés des autres côtés égaux, les restes seront [3] égaux. Les restes sont le quarré du troisiéme côté d'un de ces triangles, & le quarré du troisiéme côté de l'autre, dont les racines sont [4] égales.

COROLLAIRE II.

Pour décrire un quarré égal à un nombre d'autres quarrés proposés à volonté, par exemple, à trois quarrés dont les côtés soient *A B*, *B C*, & *C D* ; il faut mener par l'extremité *B* de

[1] *Part.* 1. *Prop. Pres.*
[2] *Cor.* 3. *Prop.* 5. *Algeb.* [3] *Ax.* 9. *Gen.*
[4] *Cor.* 4. *Prop.* 5. *Algeb.*

la ligne AB la ligne Bc perpendiculairement à cette ligne AB, & égale au costé BC du second quarré proposé. Menez la ligne Ac. Alors [1] le quarré de $Ac = AB^2 + Bc^2$. Ensuite par le point A, ou par le point c extremitez de la ligne Ac, menez la ligne cd perpendiculairement à cette ligne Ac, & égale au costé CD du troisiéme quarré proposé; enfin menez la ligne Ad. Le quarré de cette ligne $Ad = Ac^2 + CD^2$. [2] Mais le quarré de Ac est déja égal aux quarrés de AB & de BC. Donc [2] le quarré de Ad est égal à la somme des trois quarrés dont les costez sont AB, BC, CD.



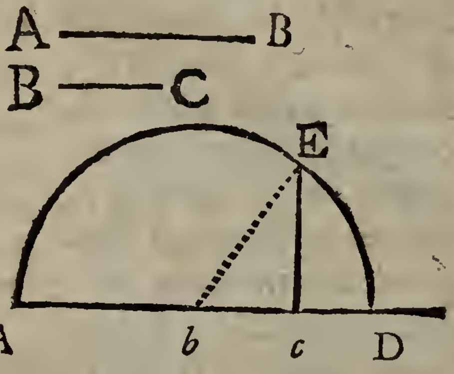
Si on avoit cherché un quarré triple du quarré dont le costé est AB; il auroit fallu faire les perpendiculaires Bc & cd, égales chacune à la ligne AB. Alors le quarré de Ac valant deux fois le quarré de AB, & le quarré de cd valant [3] une fois le quarré de AB; on auroit trouvé que le quarré de Ad qui vaut [4] les quarrez de Ac & de cd, auroit esté triple du quarré de AB. On continueroit de même, pour trouver un quarré quadruple.

C'est ainsi qu'on peut faire l'addition & la multiplication des quarrez. A l'égard de la sou-

[1] *Part. 1. Prop. Pres.* [3] *Cor. 3. Prop. 5. Algeb.*
[2] *Demande 1. Gen.* [4] *Part. 1. Prop. pres.*

ſtraction des quarrez, on la peut faire par la methode ſuivante.

Soient les lignes inégales *A B* & *B C*. Si on ſe propoſe de connoître le quarré dont le quarré de la plus grande *A B* ſurpaſſe le quarré de la plus petite B C; aprés avoir mené la ligne *A D* d'une longueur ſuffiſante, on prendra ſur cette ligne *A D* les parties $A\,b = AB$, & $b\,c = BC$. Du point *b* comme



centre, & d'une ouverture égale à *A b* on décrira la demie circonference *A E D*, & par le point *c* on menera une perpendiculaire *c E* qui ſe terminera à cette demie circonference en E. Enfin on menera le rayon *b E*. Alors [1] $bEq = b\,c^2 + cE^2$. Or [2] $bEq = ABq$. Donc $ABq = BCq + cEq$, c'eſt à dire que le quarré de *A* B ſurpaſſe le quarré de B C de la valeur du quarré de *c E*.

PROPOSITION LVIII.

1°. *Le quarré du côté oppoſé à l'angle obtus d'un triangle rectiligne ſurpaſſe la ſomme faite des quarrez des deux autres côtez, d'un excés égal à deux rectangles dont chacun eſt compris ſous un des côtez, & ſous la partie de ce côté prolongé, terminée par le ſommet de l'angle obtus, & par une*

[1] *Part.* 1. *Prop. Preſ.*
[2] *Cor.* 1. *Def.* 29. *Geo. Cor.* 3. *Prop.* 5. *Algeb.* & *demande* 1. *Gen.*

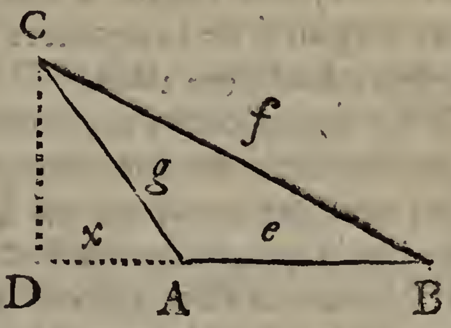
perpendiculaire menée du sommet de l'angle opposé, à ce côté prolongé.

2°. Le quarré du côté opposé à l'angle aigu est moindre que la somme faite des quarrez des deux autres côtez, de la valeur de deux rectangles dont chacun est compris sous un de ces côtez & sous la partie de ce côté, terminée par le sommet de l'angle aigu, & par une perpendiculaire menée de l'angle opposé, à ce même côté.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit le triangle obtusangle *A* B *C*; soit prolongé un des côtez qui comprennent l'angle obtus *C A* B, par exemple B *A*; & du point *C* sommet de l'angle *A C* B soit menée la perpendiculaire *CD* à ce costé B*A* prolongé : je dis que le quarré du côté *C* B opposé



à l'angle obtus, excede la somme des quarrez des costez *A C* & *A* B, de la valeur de deux rectangles compris sous *A* B & *A D*. Pour le demontrer, soit nommé e le costé *A* B ; f, le costé B *C* ; g, le costé *A C* ; & x, la ligne *A D*.

Si du quarré du costé *C A* qui est gg, on retranche le quarré du costé *D A* qui est xx ; on aura [1] $gg - xx = CD^2$. Et si du quarré de

[1] *Part. 2. Cor. 1. Prop. 57. Geo.*

CB qui eſt ff on retranche le quarré de $DB = e + x$, qui eſt $ee + 2ex + xx$; on aura [1] $ff - ee - 2ex - xx = CD^2$.

$$\left\{\begin{array}{l} gg - xx = CD^2 \\ ff - ee - 2ex - xx = CD^2 \\ \textit{Donc } gg - xx = ff - ee - 2ex - xx. \\ gg = ff - ee - 2ex. \\ gg + ee = ff - 2ex \\ gg + ee + 2ex = ff. \end{array}\right\}$$

Donc [2] $gg - xx = ff - ee - 2ex - xx$.

Si on ajoûte xx de part & d'autre du ſigne d'egalité de cette derniere équation, [3] on aura $gg = ff - ee - 2ex$.

Si on ajoûte enſuite ee de part & d'autre du ſigne d'egalité de la derniere équation, on aura $gg + ee = ff - 2ex$.

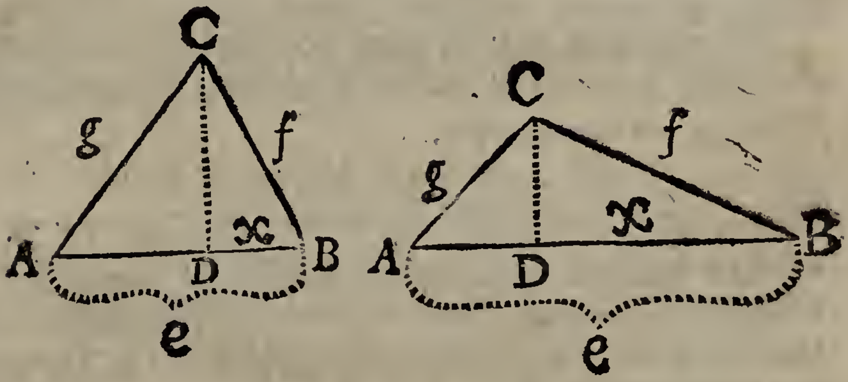
Enfin ſi on ajoûte $2ex$ encore de part & d'autre de la derniere équation $gg + ee = ff - 2ex$; on aura $gg + ee + 2ex = ff$. C'eſt à dire que le quarré du côté CB, qui eſt ff, eſt égal à la ſomme des quarrez $gg + ee$ des deux autres côtez, & à deux rectangles ex, compris ſous $AB = e$ & ſous $AD = x$. Donc le quarré ff du côté CB ſurpaſſe la ſomme des quarrez $gg + ee$ des deux autres côtez AC & AB de la valeur de deux rectangles compris ſous AB & AD, *ce qu'il falloit démontrer.*

[1] *Part. 2. Cor. 1. Prop. 57. Geo.*
[2] *Ax. 18. Gen.*
[3] *Ax. 4. Gen.*

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Soit le triangle *A C B* dont le côté *A C* est opposé à l'angle aigu *A B C*; & du sommet *C*



d'un autre angle *A C B* soit menée la ligne *C D* perpendiculairement au côté opposé *A B*; je dis que le quarré du côté *A C* est moindre que la somme des quarrez des deux autres costez *A B* & *C B*, de la valeur de deux rectangles dont chacun est compris sous le côté *A B* & sous la ligne *D B* terminée par le sommet *B* de l'angle aigu & par la perpendiculaire *C D*.

Si du quarré de *B C*, qui est *ff*, on retranche le quarré de *D B* qui est *x x*, on aura [1] $ff - xx = CD^2$. & si du quarré de *A C*, qui est *g g*, on retranche $ee - 2ex + xx$ qui est le quarré de $e - x = AD$ partie du côté *A B*; on aura [1] encore $gg - ee + 2ex - xx = CD^2$.

[1] *Part. 2. Cor. 1. Prop. 57. Geo.*

$$\left\{\begin{array}{l} ff - xx = CD^2 \\ gg - ee + 2ex - xx = CD^2 \\ \text{Donc } ff - xx = gg - ee + 2ex - xx. \\ ff = gg - ee + 2ex \\ ff + ee = gg + 2ex \end{array}\right\}$$

Donc [1] $ff - xx = gg - ee + 2ex - xx$.

Si on ajoûte xx de part & d'autre du signe d'égalité de cette derniere équation; [2] on aura $ff = gg - ee + 2ex$.

Si on ajoûte encore ee de part & d'autre du signe d'egalité de cette équation $ff = gg - ee + 2ex$; on aura $ff + ee = gg + 2ex$, c'est à dire que le quarré du côté AC, qui est gg, est moindre que la somme des quarrez $ff + ee$ des deux autres cêtez AB & CB, de la valeur des deux rectangles ex, dont chacun est compris sous le côté $AB = e$ & sous la ligne $DB = x$, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

Si de la derniere équation $gg + ee + 2ex = ff$ de la demonstration de la premiere Partie de la proposition presente on retranche $gg + ee$ de part & d'autre du signe d'egalité, il restera $2ex = ff - gg - ee$. Enfin si on divise chacune des deux parties de cette derniere equation par $2e$, on aura pour quotiens [3] egaux $x = \frac{ff - gg - ee}{2e}$. Ce qui donne une methode pour connoître la longueur de la ligne, ou par-

[1] *Ax. 18. gen.*
[2] *Ax. 4. Gen.*
[3] *Prop. 6. Algeb.*

tie AD, lorſqu'on connoît la longueur de chacun des côtez d'un triangle obtuſangle ; & connoiſſant la ligne AD & le côté AC, on connoîtra [1] la perpendiculaire CD, & enfin [2] on connoîtra la ſurface du triangle obtuſangle ABC ; ce qui eſt fort commode lorſque cette ſurface triangulaire eſt, par exemple, un Mareſt, un Etang, un Bois, un Village, &c. qu'on ne peut parcourir en ligne droite pour le diviſer en triangles rectangles comme on a enſeigné [3].

COROLLAIRE II.

Dans la demonſtration de la ſeconde Partie de la propoſition preſente, ſi à chacune des deux parties de la penultiéme équation $ff = gg - ee + 2ex$ on ajoûte ee, & ſi de chacune de ces deux mêmes parties on retranche gg ; on aura $ff + ee - gg = 2ex$. Enfin ſi on diviſe l'une & l'autre des deux parties de cette derniere équation par $2e$, on aura [4] les quotients egaux $x = \frac{ff + ee - gg}{2e}$. Lorſqu'on connoît la longueur de chacun des trois coſtez d'un triangle rectiligne ABC, cette derniere équation enſeigne la maniere de connoître la longueur de la partie $DB = x$; & enſuite il eſt [1] facile de connoître la hauteur de ce triangle qui eſt la perpendi-

[1] *Part. 2. Cor. 1. Prop. 57. Geo.*
[2] *Cor. 1. Prop. 40. Geo.*
[3] *Cor. 2. Prop. 40. Geo.*
[4] *Prop. 6. Algeb.*

culaire *C D*. Et enfin [1] on connoîtra la valeur de la surface.

La metode qu'on vient d'enseigner dans les Corollaires precedens pour trouver la mesure de la surface, ou de l'aire d'un triangle rectiligne dont on connoît seulement chacun des trois côtez, satisfait à un problême fort utile dans la Geometrie pratique. Car quand on peut mesurer les costez d'un triangle, on peut toujours connoître sa surface plus facilement, plus exactement & avec plus de briéveté par cette metode tres-simple, que par toute autre; puisque pour cela il n'est pas necessaire de se servir d'instrument divisé en degrez, ni de connoître aucune mesure d'angle, ni de l'usage des tables de Sinus; une seule toise ou chaine étant suffisante pour toute l'operation.

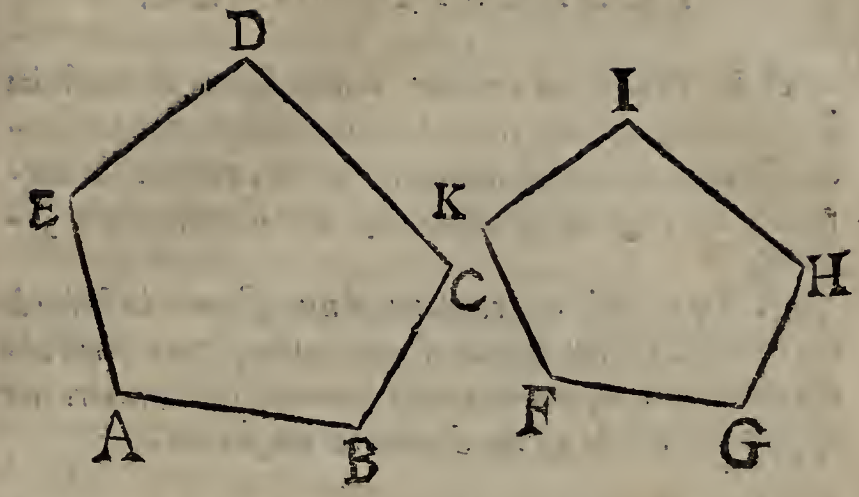
PROPOSITION LIX.

Les circuits de deux figures semblables sont entr'eux comme un côte de l'une est à un côté homologue de l'autre.

DEMONSTRATION.

Soient les figures semblables *A B C D E*, & *F G H I K*: je dis que le circuit de la premiere est au circuit de la seconde, comme un côté de cette premiere, par exemple *A B*, est à un côté homologue *F G* de la seconde. Car,

[1] *Cor.* 1. *Prop.* 40. *Geo.*



puisque [1] ces figures sont semblables, [2] on aura $AB . FG :: BC . GH$, & $BC . GH :: CD . HI$. & $CD . HI :: DE . IK$, enfin $DE . IK :: EA . KF$. la somme de tous les antece-

$$\left\{\begin{array}{c} AB . FG :: BC . GH :: CD . HI :: \\ DE . IK :: EA . KF. \\ \textit{Donc } AB+BC+CD+DE+EA . FG+ \\ GH+HI+IK+KF :: AB . FG. \\ \textit{ou } ABCDE . FGHIK :: AB . FG. \end{array}\right\}$$

cedens $AB+BC+CD+DE+EA$ est donc [3] à la somme de tous les consequents $FG+GH+HI+IK+KF$, comme un antecedent AB est à un consequent FG. C'est à dire, le contours ou circuit $ABCDEA$ est au circuit $FGHIK$ comme le côté AB est au côté FG qui lui est homologue, *ce qu'il falloit démontrer.*

[1] *Supposit.* [2] *Part. 2. Def. 60. Geo.*
[3] *Prop. 15. Algeb.*

PROPOSITION LX.

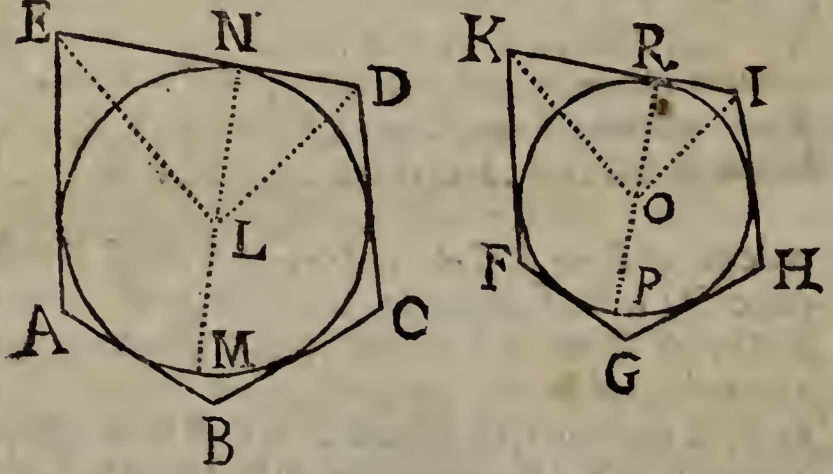
1° Le circuit ou contour d'une figure circonscrite à un cercle, est au circuit d'une autre figure semblable circonscrite à un autre cercle, comme le diametre de ce premier cercle est au diametre du second.

2°. Le circuit ou contour d'une figure inscrite à un cercle, est au circuit d'une autre figure semblable inscrite à un autre cercle, comme le diametre de ce premier cercle est au diametre du second.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soient les figures semblables *A B C D E* & *F G H I K* circonscrites à des cercles : je dis



que les circuits *A B C D E* & *F G H I K* sont entr'eux comme les diametres *M N* & *P R* des cercles ausquels ces figures sont circonscrites. Pour le demontrer, aux poins d'attouchemens *N* & *R* de deux côtés homologues soient menés les diametres

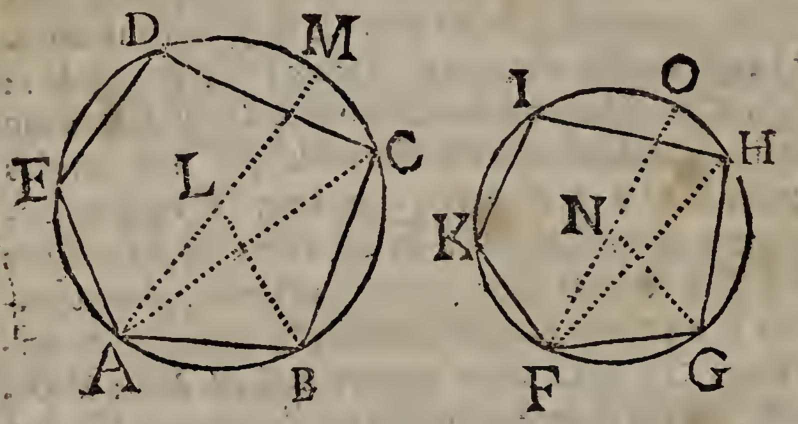
metres $M N$ & $P R$; & des centres L & O par les points E & D, K & I extremités de ces côtés homologues, ſoient menées les lignes $L E$ & $L D$, $O K$ & $O I$.

Les angles $E D L$ & $K I O$ ſont [1] les moitiez des angles $E D C$ & $K I H$ egaux [2] entr'eux. Donc [3] l'angle $E D L = K I O$. On demontrera de la même maniere que l'angle $D E L = I K O$. Les triangles $D E L$ & $I K O$ ſont donc [4] equiangles entr'eux. Donc [5] $E D . E L :: K I . K O$. Mais les touchantes $E D$ & $K I$ avec les rayons $L N$ & $O R$ forment [6] des angles droits $E N L$ & $K R O$, qui ſont [7] egaux entr'eux; & puiſqu'on vient de voir que les angles $N E L$ & $R K O$ ſont egaux entr'eux, les triangles $E L N$ & $K O R$ ſeront [4] équiangles entr'eux. On aura donc encore $E L . L N :: K O . O R$, de ces deux analogies on concluera [8] que $E D . L N :: K I . O R$. Donc [9] $E D . K I :: L N . O R$. Or [10] le contours $A B C D E . F G H I K :: E D . K I$. Dans l'analogie precedente au lieu du raport qui eſt entre $E D$ & $K I$, ſubſtituant ſon égal, on aura $A B C D E . F G H I K :: L N . O R :: 2 L N = M N$ [11]. $2 O R = P R$. Donc enfin $ABCDE . FGHIK :: M N . P R$ [12], *ce qu'il falloit demontrer.*

[1] *Cor. 3. Prop. 29. Geo.* [2] *Def. 60. Geo.*
[3] *Ax. 12. Gen.* [4] *Cor. 4. Prop. 31. Geo.*
[5] *Part. 1. Prop. 52. Geo.* [6] *Prop. 12. Geo.*
[7] *Cor. 3. Prop. 20. Geo.*
[8] *Part. 1. Cor. Prop. 12. Algeb.*
[9] *Part. 2. Cor. Prop. 3. Algeb.*
[10] *Prop. 59. Geo.*
[11] *Cor. Def. 31. Geo.*
[12] *Prop. 5. Algeb.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soient les figures semblables *A B C D E* & *F G H I K* inscrites à des cercles : je dis que les circuits *A B C D E* & *F G H I K* sont en-



tr'eux comme les diametres *A M* & *F O* des cercles ausquels ces figures sont inscrites. Pour le demontrer, par les extremitez *A* & *F* de deux côtez homologues soient menez les diametres *A M* & *F O*, & par les autres extremitez de ces mêmes côtez soient menez les rayons *BL* & *GN*. Enfin par une des extremitez *B* ou *A* d'un de ces côtez homologues soit menée une ligne *A C* terminée au sommet d'un des autres angles prochains ; & par le point *F* extremité d'un autre côté homologue on menera une pareille ligne *F H*.

Les triangles *A B C* & *F G H* sont [1] semblables, de sorte que les angles *A C B* & *F G H* qui ont leurs sommets dans les circonferences de cercles, sont égaux entr'eux. Les angles *A L B* & *F N G* dont les sommets sont dans les centres des

[1] *Cor. 1. Prop. 52. Geo.*

mêmes cercles, sont donc [1] aussi égaux entr'eux, chacun étant [2] double des autres angles égaux *A C B* & *F H G*. Or à cause de l'égalité des rayons *A L* & *B L* d'un même cercle, & des rayons *F N* & *N G*; on aura *A L . L B : : F N . N G*; & [3] les triangles *A B L* & *F G N* seront semblables. Donc [4] *A B . F G : : A L . F N*. Mais [5] *A B C D E . F G H I K : : A B . F G*. Donc [6] *A B C D E . F G H I K : : A L . F N : : 2 A L = A M . 2 F N = F O* [7]. Enfin *ABCDE. F G H I K : : A M . F O*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Puisque [8] les cercles sont des figures semblables, infinitilateres, circonscrites ou inscrites à eux-mêmes, il est [9] évident que les circonferences des cercles sont entr'elles comme leurs diametres.

PROPOSITION LXI.

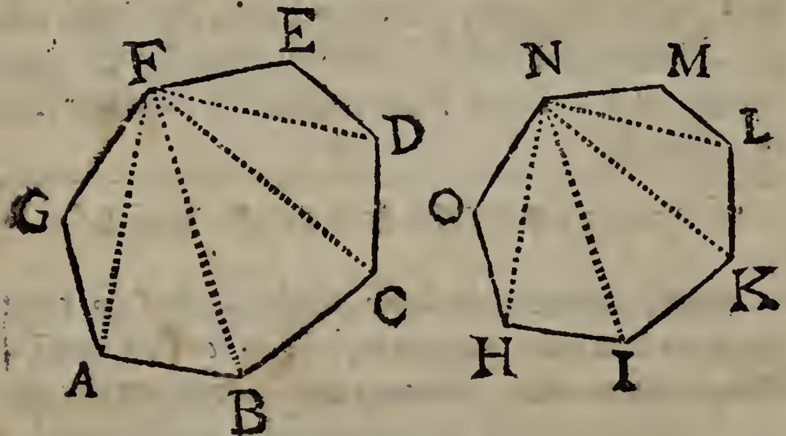
Si des sommets de deux angles égaux & correspondans dans les polygones semblables, on mene des lignes droites aux sommets des autres angles opposez; chacun de ces polygones sera divisé dans un nombre égal de triangles semblables.

[1] *Ax. 6. Gen.*
[2] *Cor. 6. Prop. 27. Geo.*
[3] *Cor. 1. Prop. 52. Geo.* ou *Cor. 5. Prop. 33. Cor. 2. Prop. 34. & Ax. 12. Gen.*
[4] *Part. 2. def. 60. Algeb.*
[5] *Prop. 59. Geo.*
[6] *Cor. 3. def. 12. Algeb.*
[7] *Prop. 5. Algeb.*
[8] *Cor. Prop. 47. Geo.*
[9] *Prop. pres.*

DEMONSTRATION.

Soient les polygones ſemblables *A C E G* & *H K M O* ; ſi des ſommets *F* & *N* des angles égaux *E F G* & *M N O* on mene des lignes droites *F A*, *F B* &c. *N H*, *N I* &c. aux ſommets des autres angles oppoſés : Je dis 1°. qu'un de ces polygones contiendra autant de triangles, que l'autre ; 2°. que les triangles d'un de ces polygones ſeront ſemblables aux triangles de l'autre, chacun à chacun.

Lorſque du ſommet *F* on mene des lignes droites aux ſommets des angles oppoſés, les



deux prochains *E* & *G* en étant exceptés; on partage le polygone en autant de triangles qu'il y a de côtés moins deux de ces côtés, quelque nombre qu'il y en ait. C'eſt à dire que s'il y a cinq côtés on le partage en trois triangles ; s'il y en a huit, on le partage en ſix, &c. Le nombre des côtés ſurpaſſe de deux celui des triangles qui en font partie : parcequ'il eſt neceſſaire que les deux côtés *F G* & *F E* qui comprennent cet angle *F*, ſoient joints avec les côtés ſuivans *D E* & *A G* pour former des triangles avec les lignes

$F\,A$ & $F\,D$ qu'on a menées : parceque $F\,D$ & $D\,E$, ou $F\,A$ & $A\,G$, ne peuvent ſeules terminer un eſpace. Et ces deux côtés $F\,G$ & $F\,E$ étant retranchés du nombre des côtés du polygone, le reſte eſt égal au nombre des triangles. Car alors chacun de ces triangles a pour baſe un côté du polygone. Dans les polygones ſemblables il y a un pareil nombre de côtés ; puiſque [1] chaque côté de l'un eſt proportionnel à chaque côté de l'autre. Retranchant 2 du nombre de ces côtés, de part & d'autre; les reſtes égaux [2], exprimeront le nombre des triangles, égal dans chaque polygone.

Puiſque les figures ſont [3] ſemblables, [1] on a $F\,G\,.\,G\,A :: N\,O\,.\,O\,H$; & outre cela l'angle $F\,G\,A = N\,O\,H$. Les triangles $G\,F\,A$ & $O\,H\,N$ ſont donc [4] ſemblables entr'eux ; partant $F\,A\,.\,G\,A :: N\,H\,.\,O\,H$, & l'angle $G\,A\,F = O\,H\,N$. Mais [1] $G\,A\,.\,A\,B :: O\,H\,.\,H\,I$, & l'angle $G\,A\,B = O\,H\,I$. On concluera donc de ces deux

$$\left\{\begin{array}{l} F\,A\,.\,G\,A\,.\,A\,B \\ N\,H\,.\,O\,H\,.\,H\,I. \\ \textit{Donc}\ F\,A\,.\,A\,B :: N\,H\,.\,H\,I\,.\ \&c. \end{array}\right\}$$

dernieres analogies [5] que $FA\,.\,AB :: NH\,.\,HI$, or [6] l'angle $F\,A\,B = N\,H\,I$. Les triangles AFB & $H\,N\,I$ ſont [4] donc ſemblables. On démontrera de la même maniere que les triangles $B\,C\,F$ & $I\,K\,N$, $F\,C\,D$ & $N\,K\,L$, &c. ſont ſemblables. Les polygones ſemblables $A\,C\,D\,F$

[1] *Déf.* 60. *Geo.* [2] *Ax.* 9. *Gen.*
[3] *Suppoſit.* [4] *Cor.* 1. *Prop.* 52. *Geo.*
[5] *Part.* 1. *Cor. Prop.* 12. *Algeb.*
[6] *Ax.* 9. *Gen.*

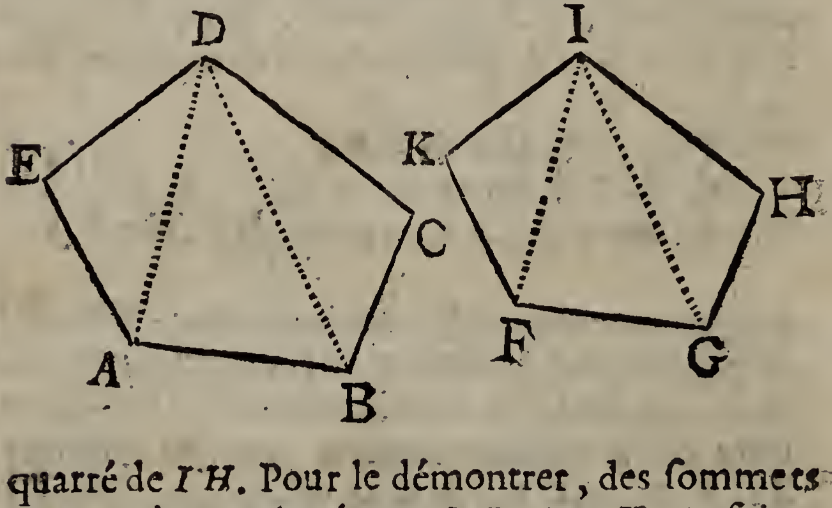
& *H K M O* seront donc divisés chacun en un pareil nombre de triangles, & chaque triangle d'un de ces polygones, sera semblable à chaque triangle correspondant de l'autre polygone, *ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION LXII.

Les polygones semblables sont entr'eux, comme les quarrés de leurs côtés homologues.

DEMONSTRATION

SOient les polygones semblables *A B C D E* & *F G H I K* : je dis que *ABCDE* est à *FGHIK*, comme le quarré de *D C*, par exemple, est au



quarré de *I H*. Pour le démontrer, des sommets *D* & *I* des angles égaux *E D C* & *K I H* soient menées aux sommets des autres angles les lignes *D A*, *D B*; *I F*, *I G*.

Les triangles *D E A* & *I K F*, *A B D* & *F G I*, *D B C* & *I G H*, seront [1] semblables.

[1] *Prop. 61. Geo.*

Or [1] *DEA . IKF :: DAq . IFq* ; pareillement *ABD . FGI :: DAq . IFq*. Donc *DEA . IKF :: ABD . FGI*.

Enfin *ABD . FGI :: DBq . IGq*. & *DBC . IGH :: DBq . IGq*. Donc [2] *ABD . FGI :: DBC . IGH*.

On trouve donc cette suite de raports égaux *DEA . IKF :: ABD . FGI :: DBC . IGH*. La somme des triangles antecedens, dont est composée la surface *ABCDE*, est [3] donc à la somme des consequens, dont est composée la surface *FGHIK*, comme le triangle *DBC* est au triangle *IGH*. Mais [1] le triangle *DBC* est à son semblable *IGH*, comme le quarré de *DC* est au quarré de *IH*. Les surfaces des polygones semblables *ABCDE* & *FGHIK* sont donc aussi entr'elles comme les quarrés des côtés homologues *DC* & *IH*, *ce qu'il falloit démontrer*.

DEA . IKF :: ADq . IFq.
ABD . FGI :: ADq . IFq.
Donc DEA . IKF :: ABD . FGI.
ABD . FGI :: DBq . IGq.
DBC . IGH :: DBq . IGq.
Donc ABD . FGI :: DBC . IGH.
Donc DEA . IKF :: ABD . FGI :: DBC . IGH.
Donc. DEA + ABD + DBC . IKF + FGI + IGH :: DBC IGH :: DCq . IHq.
Donc ABCDE . FGHIK :: DCq . IHq.

On trouvera aussi par un raisonnement pa-

[1] *Part. 2. Prop. 56. Geo.*
[2] *Cor. 3. Def. 12. Algeb.*
[3] *Prop. 15. Algeb.*

reil au precedent, que les trapesoïdes & trapeses semblables, sont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues; & ce qui est dit dans les Corollaires suivans leur convient comme aux polygones.

COROLLAIRE I.

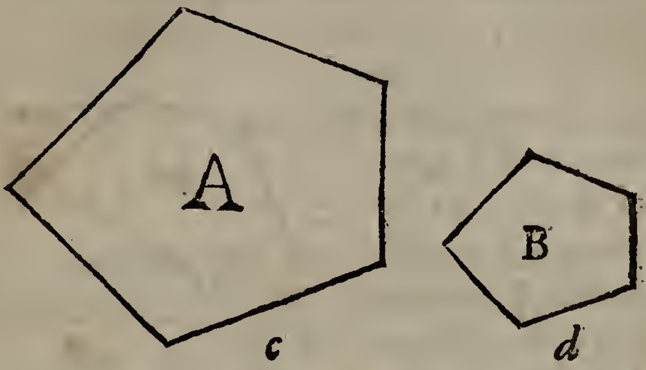
Le rapport d'un polygone à un autre polygone semblable, est doublé du rapport d'un côté de ce premier à un côté homologue du second. Car [1] les polygones semblables sont entr'eux, comme les quarrés de leurs côtés homologues; & [2] les quarrés de ces côtés homologues sont entr'eux, en raison doublée de celle qui est entre ces mêmes côtés.

COROLLAIRE II.

Si de deux figures semblables, la premiere a chacun de ses côtés double de chacun de ceux de la seconde, la surface de cette premiere figure sera quadruple de la surface de la seconde. Parceque la premiere sera [1] à la seconde, comme le quarré d'un des côtés de cette premiere est au quarré d'un côté homologue de la seconde; & le quarré du côté de cette premiere sera quadruple du quarré homologue de la seconde. Soient pour exemple deux figures semblables *A* & B; j'appellerai *c* un côté de la premiere figure *A*, & *d* un côté homologue de la seconde figure *B*. Donc [1] $A . B :: cc . dd$. Or

[1] *Prop. Pref.*
[2] *Cor. Prop.* 18. *Algeb.*

[1] le quarré de c eſt au quarré de d, comme la premiere de trois lignes continuement proportionnelles $\div\!\!\cdot\; c \,.\, d \,.\, f$. eſt à une troiſiéme f; le



côté c eſtant la premiere, & la ſeconde eſtant le côté d. C'eſt à dire que $cc \,.\, dd :: c \,.\, f$. Mais puiſque [2] c eſt double de d, on aura pareillement d double de f. Donc c ſera double du double de f, c'eſt à dire quadruple de f. Donc cc ſera quadruple de dd. Donc enfin la figure A ſera [3] auſſi quadruple de B.

Si chaque côté d'une de ces deux figures ſemblables eſt triple de chacun de la ſeconde; la premiere ſera noncuple de la ſeconde, &c. De ce qu'on vient de démontrer on peut encore conclure que les figures ſemblables ne ſont pas entr'elles comme leurs côtés; puiſque chaque côté de l'une eſtant double de chaque coté de l'autre; l'une eſt quadruple de l'autre, &c.

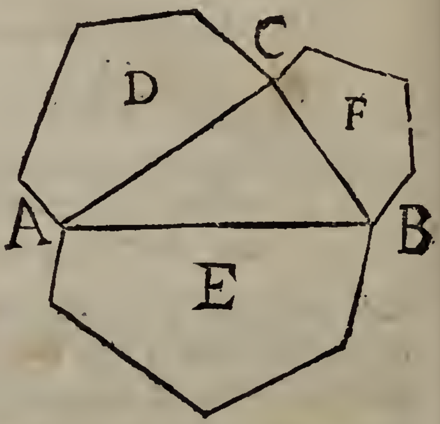
COROLLAIRE III.

Une figure qui aura pour côté l'hypotenuſe d'un triangle rectangle, eſt égale aux deux figures qui lui ſeront ſemblables, & qui auront les

[1] *Cor. Prop.* 19. *Algeb.*
[2] *Suppoſit.*
[3] *Prop. Preſ.*

deux autres côtés de ce triangle pour côtés homologues à ce côté de la premiere.

Soit le triangle rectangle *A B C*, & les figures semblables *E*, *F*, *D*, décrites sur les côtés de ce triangle, de maniere que *E* soit sur l'hypotenuse : Je dis que la figure *E* est égale à la somme des figures *F* & *D*. Car [1] *E . F :: AB × AB . BC × BC*, & *E . D :: AB × AB . AC × AC*. Donc [2] *E . F + D :: AB × AB . CB × CB + AC × AC*. Or [3] *AB × AB = CB × CB + AC × AC*. Donc *E = F + D*.

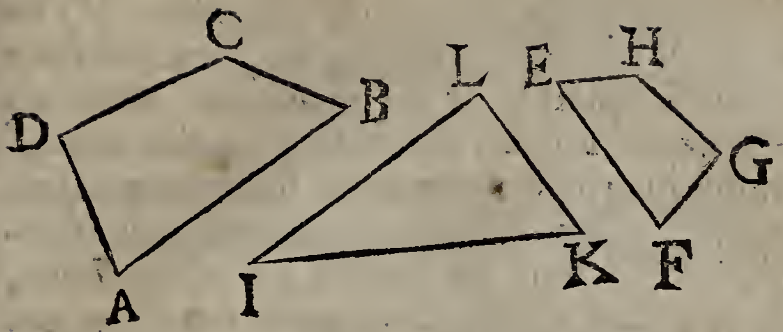


E . F : : A Bq. B Cq.
E . D : : A Bq . A Cq.
Donc E . D + F : : A Bq . B Cq + A Cq.
Mais A Bq = B Cq + A Cq.
Donc E = D + F.

COROLLAIRE IV.

Pour décrire une figure égale & semblable aux deux figures *A B C D*, & *E F G H* qui sont semblables aussi entr'elles : il faut [4] faire un angle droit *I L K*, & en faire les côtés *I L* & *L K* égaux

[1] *Prop. Pres.*
[2] *Prop. 14. Algeb.*
[3] *Part. 1. Prop. 57. Geo.*
[4] *Cor. 7. Prop. 27. Geo.*



aux côtés homologues *AB* & *EF* ; enſuite mener la ligne *IK*. Si [1] on décrit une figure ſemblable aux deux figures precedentes, qui ait pour côté *IK* homologue aux autres côtés *AB* & *EF* des autres figures, cette derniere figure ſera [2] égale aux deux precedentes. On peut faire par ce moyen l'addition des figures ſemblables.

PROPOSITION LXIII.

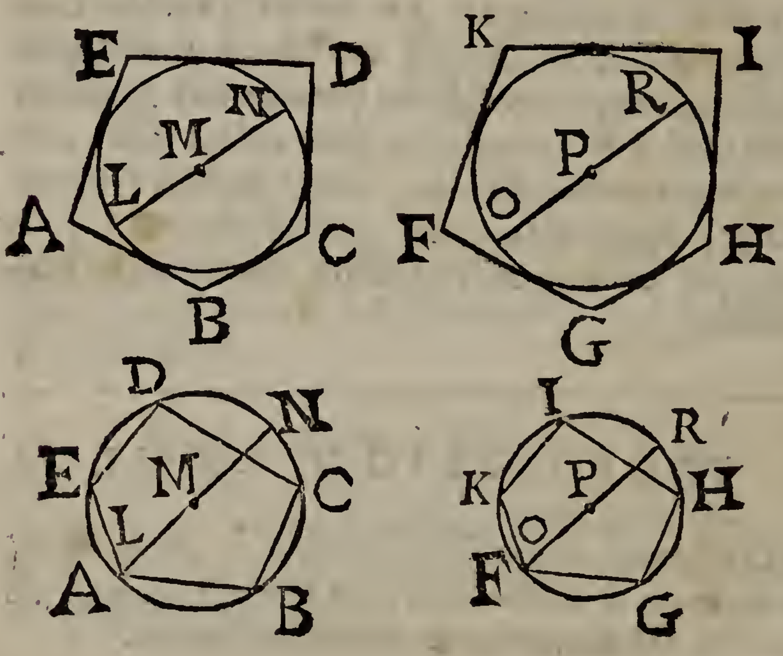
Les figures ou ſurfaces ſemblables circonſcrites, ou inſcrites à des cercles, ſont entr'elles comme les quarrés des diametres de ces mêmes cercles.

DEMONSTRATION

Les figures ſemblables ſont [3] entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues. Et les quarrés des côtés homologues des figures circonſcrites ou inſcrites à des cercles, ſont entr'eux comme les quarrés des diametres. Car les

[1] *Cor. 3. Prop. 52. Geo.*
[2] *Cor. 3. Prop. Preſ.*
[3] *Prop. 62. Geo.*

côtés homologues ſont [1] entr'eux comme les diametres de ces mêmes cercles ; donc [2] les quarrés de ces côtés homologues, ſont entr'eux comme les quarrés de ces diametres. Enfin en ſubſtituant le rapport des ſurfaces au lieu du rapport des quarrés de leurs côtés homologues, on trouvera que les ſurfaces ou polygones ſemblables, inſcrits dans les cercles ou circonſcrits, ſont entr'elles comme les quarrés des diametres



de ces mêmes cercles. Soient les figures ſemblables $ABCDE$ & $FGHIK$ circonſcrites, ou inſcrites à des cercles dont les diametres ſont LN & OR: Je dis que $ABCDE \,.\, FGHIK :: LN^2 \,.\, OR^2$. Car $ABCDE, FGHIK :: ED^2 \,.\, KI^2$. Mais puiſque $ED \,.\, KI :: LN \,.\, OR$, je trouve que $ED^2 \,.\, KI^2 :: LN^2 \,.\, OR^2$. Dans la

[1] *Demonſt. de la prop. 60. Geo. & Prop. 5. Algeb.*
[2] *Part. 1. Cor. 2. Prop. 12. Algeb.*

premiere

premiere analogie, au lieu du raport qui eſt entre ED^2 & KI^2, en ſubſtituant le rapport de LN^2 à OR^2, qui lui eſt égal; il eſt évident que $ABCDE . FGHIK :: LN^2 . OR^2$. *ce qu'il falloit démontrer.*

On peut faire un raiſonnement pareil au precedent, pour démontrer que les figures ſemblables inſcrites, ou circonſcrites à des cercles, ſont entr'elles en même rapport que les quarrés des rayons de ces mêmes cercles; puiſque leurs côtés homologues ſont entr'eux comme les rayons des cercles auſquels elles ſont inſcrites ou circonſcrites.

COROLLAIRE I.

Les figures ſemblables inſcrites ou circonſcrites à des cercles, ſont entr'elles en raiſon doublée de celle de leurs diametres. Car ces figures ſemblables ſont [1] entr'elles comme les quarrés des diametres des cercles auſquels elles ſont inſcrites ou circonſcrites, & ces quarrés ſont [2] entr'eux en raiſon doublée de celle de ces mêmes diametres qui en ſont racines.

COROLLAIRE II.

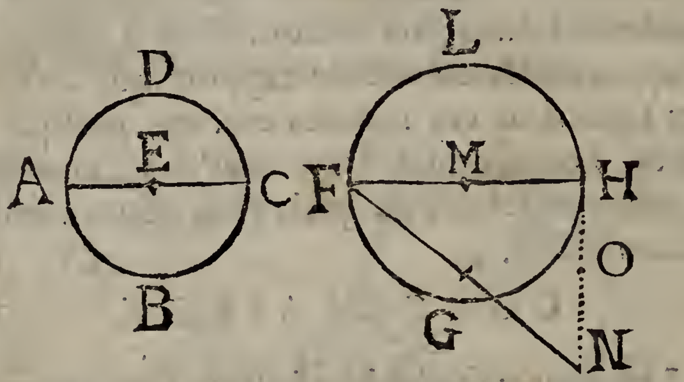
Les ſurfaces des cercles ſont entr'elles comme les quarrés des diametres de ces mêmes cercles. Car les cercles ſont [3] des figures ſemblables d'une infinité de côtés, inſcrites & circonſcrites à eux-mêmes; & ces figures ſemblables ſont [1] entr'elles comme les quarrés de leurs diametres.

[1] *Prop. Preſ.*
[2] *Cor. Prop.* 18. *Algeb.*
[3] *Cor. Prop.* 47. *Geo.*

On concluera donc aussi [1] que les cercles sont entr'eux en raison doublée de celle de leurs diametres.

COROLLAIRE III.

Pour décrire un cercle égal à deux autres cercles ; par exemple, à *A B C D* & *F G H L* ; par



l'extremité *H* d'un des diametres de ces cercles il faut mener la perpendiculaire *H N* égale au diametre *A C* de l'autre cercle, & ensuite mener la ligne *F N* : Je dis que le cercle qui aura pour diametre la ligne *F N*, sera égal aux cercles *A B C D* & *F G H L*, pris ensemble. Car [2] le cercle dont le diametre est *F N*, sera aux cercles *A B C D* & *F G H L* comme le quarré de ce diametre *F N* aux quarrés des diametres *F H* & *H N* ; & [3] le quarré du diametre $FN = FH^2 + HN^2$.

Au lieu de faire $HN = AC$, on pouvoit faire $HO = EC$, & alors la ligne menée du point *M* au point *O* auroit été le rayon du cercle égal [4] aux deux cercles *A B C D* & *F G H L*.

[1] *Cor.* 1. *Prop. Pres.*
[2] *Cor.* 2. *Prop. Pres.*
[3] *Part.* 1. *Prop.* 57. *Geo.*
[4] *Prop. Pres.* & *Part.* 1. *Prop.* 57. *Geo.*

PROPOSITION LXIV.

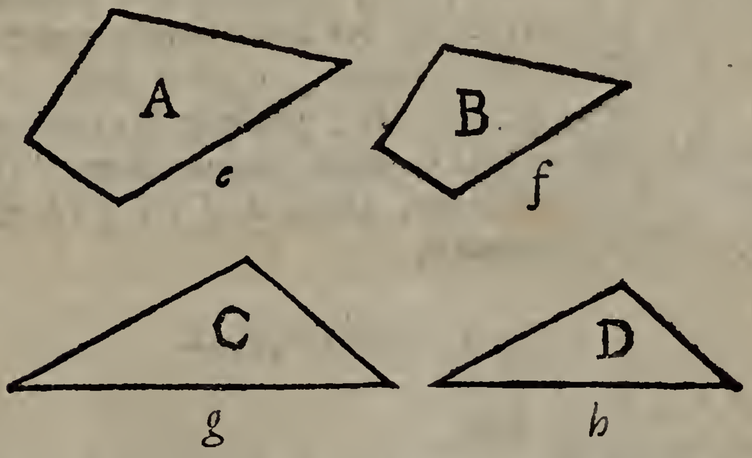
1°. *Si quatre figures semblables ont pour côtés homologues chacune de quatre lignes proportionnelles ; ces quatre figures seront aussi proportionnelles entr'elles.*

2°. *Reciproquement si quatre figures sont semblables & proportionnelles entr'elles ; les quatre lignes qui en sont côtés homologues, sont aussi proportionnelles entr'elles.*

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soient les quatre lignes proportionnelles $e . f :: g . h$, dont la premiere e est côté de la figure A, & la deuxiéme f est côté homologue de la figure B semblable à la premiere ; la troisiéme g est côté de la figure C, & enfin la quatriéme h est côté homologue de la figure D qui est semblable à la figure C : Je dis que $A . B :: C . D$. Car les quarrés de ces li-



gnes seront [1] proportionnels entr'eux ; puisque le quarré d'une ligne est [2] cette ligne multipliée par elle-même. Mais les figures semblables qui auront ces lignes pour côtés homologues, seront [3] entr'elles comme les quarrés de ces mêmes lignes *e*, *f*, *g*, *h*. Ces figures semblables seront donc aussi proportionnelles, *ce qu'il falloit démontrer.*

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Soient les quatre figures semblables & proportionnelles *A*, *B*, *C* & *D*, c'est à dire que *A* . *B* :: *C* . *D*. Je dis que leurs côtés homologues sont proportionnels, par exemple, que *e* . *f* :: *g* . *h*. Car, puisque [4] *A* . *B* :: *C* . *D*, & que [3] les quarrés des côtés homologues de ces figures sont entr'eux, comme ces mêmes figures ; les quarrés de ces côtés homologues, seront aussi proportionnels, c'est à dire que *ee* . *ff* :: *gg* . *hh*. Or, puisque les quarrés sont proportionnels, leurs racines seront [5] aussi proportionnelles. Donc *e* . *f* :: *g* . *h*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

[1] *Part.* 1. *Cor.* 2. *Prop.* 12. *Algeb.*
[2] *Cor.* 2. *Def.* 53. *Geo.*
[3] *Prop.* 62. *Geo.*
[4] *Supposit.*
[5] *Part.* 2. *Cor.* 2. *Prop.* 12. *Algeb.*

DE LA SITUATION des lignes droites comparée à celle des plans ; & de la situation des plans comparée à celle d'autres plans.

LES propoſitions ſuivantes ſont d'un grand uſage pour bien entendre la Trigonometrie Spherique, qui eſt un des principaux fondemens de l'Aſtronomie ; pour la theorie & la pratique de la Gnomonique ou de la ſcience des Cadrans ſolaires ; pour la Perſpective, c'eſt à dire l'art de repreſenter les objets tels que nos yeux les apperçoivent, & qui ſatisfait à l'explication phyſique de pluſieurs beaux Phenomenes de la viſion ; generalement pour l'intelligence de tout ce qui ſe trouve dans les Mathematiques, où il eſt neceſſaire de conſiderer les proprietés des lignes droites qui rencontrent des ſurfaces planes, & les proprietés des plans qui en rencontrent d'autres, ou qui leur ſont paralleles.

Ceux qui ne ſont pas encore accoûtumés à la repreſentation des plans qui ſe rencontrent ou qui ſe coupent, ont quelquefois de la peine à découvrir les verités qu'on y propoſe. Mais lorſqu'ils y font un peu d'attention, & qu'ils perſévérent, la difficulté ſe diſſipe peu à peu, & ils ne trouvent plus qu'évidence. De ſorte que pour achever heureuſement l'étude de ces

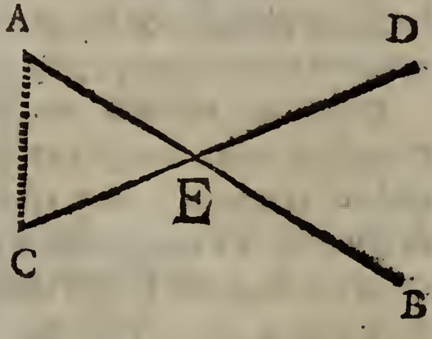
Elemens, & en tirer un fruit avantageux, il ne s'agit que d'avoir un peu de fermeté; de faire une lecture frequente de ce qui d'abord peut paroître obſcur; de former la reſolution de vaincre courageuſement tout obſtacle. Et alors on connoîtra par ſa propre experience le bon ſuccés de ſon travail. On peut aſſurer qu'il n'y a rien dans toute la ſuite capable d'arrêter un eſprit un peu laborieux; de ſorte qu'aprés avoir fini ces Elemens, en continuant avec la même vigueur à s'appliquer à d'autres traités de Mathematiques, il aura le plaiſir, non ſeulement d'apprendre ce que les autres ſçavent; mais même il ſe trouvera en état d'inventer.

PROPOSITION LXV.

Deux lignes qui ſe coupent, ſont dans le même plan.

DEMONSTRATION.

Soient les deux lignes *AB* & *C D* qui ſe coupent au point E : je dis que ces deux lignes ſont dans le même plan. Car on peut conſiderer une ligne droite, menée du point *A* au point *C*, qui ſoit enſuite mûë vers E tranſverſalement ſur les lignes *A* E & *C* E. Alors [1] on aura décrit le plan triangulaire *A C* E dans lequel ſont les lignes partiales *A* E



[1] *Cor. 1. Def. 9. Geo.*

& *C E*. Donc [1] les lignes entieres *A B* & *C D* seront toujours dans le même plan, c'est à dire que si on prolonge le plan *A C E* il passera par le plan *E B D* dans lequel se trouvent les autres parties *E B* & *E D* des lignes *A B* & *C D*, *ce qu'il falloit demontrer.*

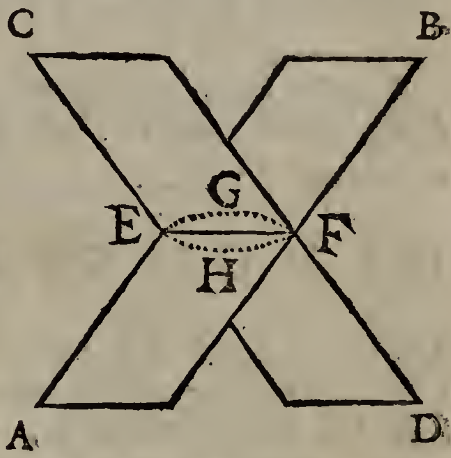
PROPOSITION LXVI.

Si deux plans se coupent, leur commune section sera 1° une ligne ; 2°, une ligne droite.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

SOient les deux plans *A B* & *C D* qui se coupent en *E F* : Je dis que leur commune section *E F* est une ligne. Car si cette commune section *E F* n'étoit pas une ligne seulement, & que ce fût, par exemple, une surface ; il faudroit que quelqu'un des deux plans *A B* & *C D* eût de l'épaisseur ou profondeur, ce qui est [2] contre la définition de la



surface. Donc la commune section *E F* des deux plans *A B* & *C D* est une ligne, *ce qu'il falloit démontrer.*

[1] *Cor. def.* 10. *Geo.* [2] *Def.* 9. *Geo.*

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

SOit la ligne *E F* commune ſection des deux plans *A B* & *C D* : je dis que cette ligne *E F* eſt une ligne droite. Car des deux mêmes points *E* & *F* de cette ligne *E F* ſi on mene dans le plan *C D* une ligne droite *E G F*, & dans le plan *A B* encore une ligne droite *E H F*, il eſt conſtant [1] que ces deux lignes droites ſe confondront en une ſeule, laquelle ſe trouvera en même temps dans les deux plans. Or il n'y a que la ligne qui eſt la commune ſection de deux plans, qui ſe trouve en même temps dans les deux plans. Donc cette commune ſection eſt une ligne droite, *ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION LXVII.

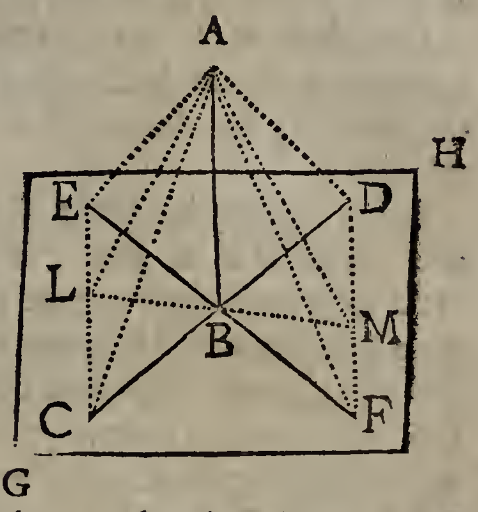
Si une ligne droite eſt perpendiculaire à deux lignes qui ſe coupent, elle le ſera auſſi au plan de ces mêmes lignes.

DEMONSTRATION

SOit la ligne *A B* perpendiculaire à chacune des deux lignes droites *C D* & *E F* : Je dis que cette ligne *A B* ſera auſſi perpendiculaire au plan *G H*, c'eſt à dire [2], à toutes les lignes menées dans ce plan par le point *B*, par exem-

[1] *Cor. 3. Ax. 2. Geo.*
[2] *Def. 20. Geo.*

ple à la ligne *LBM*. Pour le démontrer soient prises à volonté les lignes égales *BC*, *BF*, *BD*, *BE*; & par leurs extremités soient menées les lignes droites *EC* & *FD*. Du point *A* aux points *E*, *L*, *C*, *F*, *M*, & *D*, il faut mener autant de lignes droites.



Puisque les lignes *BE* & *BC* sont [1] égales aux lignes *BF* & *BD*, & les angles *EBC* & *DBF* étant [2] égaux entr'eux; les bases *EC* & *DF* seront [3] égales. Les angles *ECB* & *BDF* seront [4] égaux entr'eux.

Les angles *LBC* & *DBM* sont [2] égaux entr'eux. Les deux angles *LCB* & *LBC* seront donc égaux aux angles *BDM* & *DBM*. Outre cela les côtés *CB* & *BD* sont [1] égaux. Les lignes *CL* & *MD*, *BL* & *BM* seront [5] donc égales.

Mais les quatre triangles rectangles *ABE*, *ABC*, *ABF*, *ABD*, ayant le côté *BA* commun, & les autres côtés *BE*, *BC*, *BF*, & *BD* égaux [1], & encore [6] les angles droits *ABE*, *ABC*, *ABF*, & *ABD* égaux, les bases *AE*, *AC*, *AF*, *AD* seront [4] aussi égales entr'elles,

[1] *Par construction.*
[2] *Part. 1. Prop. 22. Geo.*
[3] *Part. 1. Prop. 35. Geo.*
[4] *Cor. 2. Prop. 35. Geo.*
[5] *Cor. 4. Prop. 31. & Cor. 2. Prop. 52. Geo.*
[6] *Cor. 3. Prop. 20. Geo.*

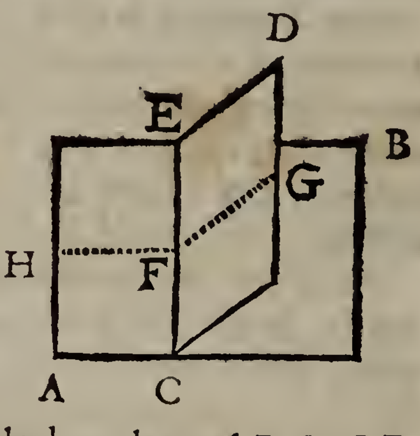
& puiſqu'on vient de voir que *C E = F D*, les angles *A D F* & *A C E*, c'eſt à dire, les angles *A D M* & *A C L* ſeront [1] égaux entr'eux.

Les côtés *A C* & *C L* étant donc égaux aux côtés *A D* & *D M*, & l'angle *A C L* = *A D M*; on aura [2] les baſes *A L* & *A M* égales entr'elles.

Enfin puiſque les côtés *A B* & *B L* ſont égaux aux côtés *A B* & *B M*, & que les baſes *A L* & *A M* ſont auſſi égales entr'elles, les angles *ABL* & *A B M* ſeront [1] égaux entr'eux. Chacun ſera donc [3] droit. *A B* ſera donc perpendiculaire à *L M* &, par le même raiſonnement, à toute autre ligne menée dans le plan *G H*, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Dans un des plans *A B* & *C D* perpendiculaires l'un à l'autre, ſi on mene la perpendiculaire *G F* à leur commune ſection *C E*; cette ligne *G F* ſera perpendiculaire à l'autre plan *A B*. Car ſi dans ce plan *A B* par le point *F* on mene la ligne *F H* perpendiculaire à *C E*, on aura l'angle *H F G* qui ſera [2] l'angle des plans *A B* & *C D*. Et puiſque ces plans ſont [3] perpendiculaires

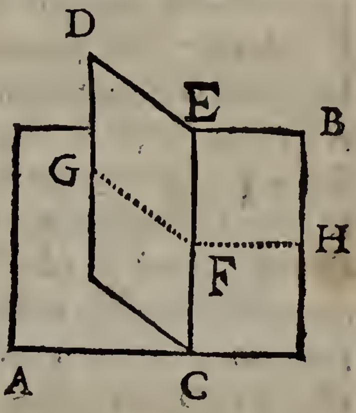


[1] *Cor. 2. Prop. 35. Geo.*
[2] *Part. 1. Prop. 3 . Geo.*
[3] *Part. 1. Prop. 21. Geo.*
[4] *Def. 18. Geo.*
[5] *Suppoſit.*

l'un à l'autre, & que des plans perpendiculaires l'un à l'autre, sont ceux qui forment des angles droits ; cet angle *H F G* est donc droit. La ligne *G F* sera donc perpendiculaire aux deux lignes *F H* [1] & *F C* [2], qui sont dans le même plan *A B*. La ligne *G F* sera donc [3] perpendiculaire au plan *A B*, c'est à dire [4] à toutes les lignes droites menées dans ce plan par le point *F*.

COROLLAIRE II.

Si une ligne est perpendiculaire à un plan, tous les plans dans lesquels elle se trouvera seront perpendiculaires au même plan. Soit, par exemple, la ligne *F G* perpendiculaire au plan *A B* : je dis que le plan *C D* dans lequel se trouve cette perpendiculaire *F G*, est aussi perpendiculaire au plan *A B*.



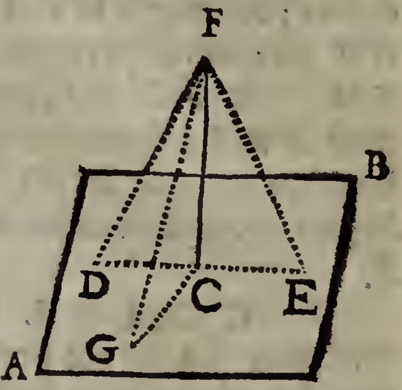
Car si on mene par le point *F* la ligne *F H* perpendiculaire à la commune section *C E*, l'angle *H F G* sera [5] droit. Donc le plan *C D* sera perpendiculaire au plan *A B*, puisqu'ils formeront [1] l'angle droit *H F G*.

COROLLAIRE III.

La proposition presente donne une maniere de mener une ligne perpendiculaire à un plan par un point donné dans ce plan. Soit, par

[1] *Def.* 14. *Geo.*
[2] *Supposit.*
[3] *Prop. pres.*
[4] *Def.* 20. *Geo.*
[5] *Def.* 20. & *Def.* 14. *Geo.*

exemple, le plan *A B* auquel il faille mener une perpendiculaire par le point *C*. Il faut mener dans ce plan *A B* & par le point *C* une ligne droite *D E*, & prendre de part & d'autre du point *C* les parties *C D* & *C E* égales entr'elles, & faire les lignes droites *D F* & *E* F d'une longueur prise à volonté



& égales entr'elles pour [1] construire le triangle Isoscele *D* F *E*. Ensuite par le point *C* il faut mener à volonté dans le plan *A B* la ligne *C G* égale à *C D*, ou à *C E*. Enfin on inclinera le plan *D E* F au plan *A B* jusqu'à ce que le point F s'écarte suffisamment du point *G* pour que la ligne *G* F devienne égale à *D* F, ou à *E* F. Alors du point F au point *C* on menera la ligne F *C* : je dis que cette ligne F *C* est la perpendiculaire cherchée. Car les triangles *D* F *C*, F*EC*, & F *G C* ont le côté *C* F commun, & à l'égard du reste sont [2] equilateraux l'un à l'autre. Ils sont donc équiangles [3] aussi l'un à l'autre. L'angle F *C D* est donc égal à F *C E*. Ces angles F *C D* & F *C E* sont donc [4] des angles droits. Donc F *C G* qui leur est [2] égal est aussi droit. Donc la ligne *C* F est [5] perpendiculaire aux lignes *D E* & *G C*. Donc [6] elle est perpendiculaire au plan *A B*.

[1] *Cor. 4. Prop. 35. Geo.*
[2] *Par construction.*
[3] *Cor. 2. Prop. 35. Geo.*
[4] *Part. 1. Prop. 21. Geo.*
[5] *Def. 14. Geo.*
[6] *Prop. pres.*

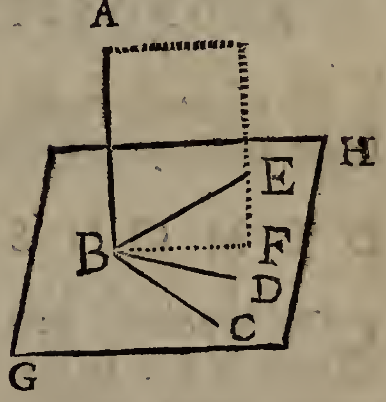
PROPOSITION LXVIII.

Si une ligne droite est perpendiculaire à trois autres qui se coupent en un même point, ces trois autres lignes sont dans un même plan.

DEMONSTRATION

Soit la ligne droite *AB* perpendiculaire aux trois lignes droites *BC*, *BD* & *BE* : je dis que ces trois dernieres lignes sont dans un même plan.

Les lignes *BC* & *BD* sont [1] dans le même plan. Soient les lignes *BC* & *BD* dans le plan *GH*; alors puisque la ligne *AB* est [2] perpendiculaire aux lignes *BC* & *BD*, elle sera [3] perpendiculaire à ce plan *GH*. S'il étoit possible que la troisiéme ligne *BE* ne fût pas dans le plan *GH*; puisque



cette ligne *BE* rencontre la ligne *AB* au point *B*, considerons [1] un autre plan *AE* qui passe par la perpendicúlaire *AB* & par cette ligne *BE*: il est évident que ce plan *AE* & le plan *GH* se rencontrant déja au point *B*, si on prolonge le plan *AE*, il coupera necessairement le plan

[1] *Prop. 65. Geo.*
[2] *Supposit.*
[3] *Prop. 67. Geo.*

G H. Soit *B F* leur commune section. La ligne *A B* sera [1] perpendiculaire à la commune section *B F*, parcequ'elle est perpendiculaire au plan *G H*; & la ligne *B F* sera [2] perpendiculaire à *A B*. Mais [3] la ligne *B E* est aussi perpendiculaire à la ligne *A B*. Il y auroit donc deux lignes *B E* & *B F* perpendiculaires à une même ligne *A B* dans un même plan *A F*, & par un même point *B*; ce qui est [4] impossible. Donc la ligne *B E* ne peut être dans un autre plan que *G H*. Donc la ligne *B E* est dans le même plan que les lignes *B C* & *B D*, *ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION LXIX.

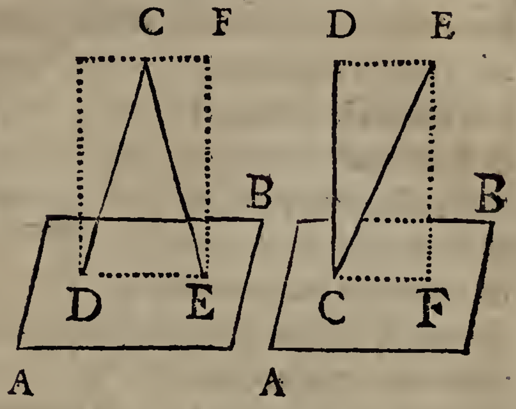
On ne peut mener par un même point deux lignes droites perpendiculaires à un même plan.

DEMONSTRATION

Soit le point *C* pris dans le plan ou hors le plan *A B*: Je dis qu'il est impossible qu'on puisse mener plusieurs perpendiculaires, par exemple, *C D*, *C E*, à ce plan. Car [5] si on suppose qu'il passe un autre plan *D F* par ces deux lignes *C D* & *C E*, & que la commune section de ce dernier plan *D F* avec le plan *A B* soit *D E* dans la premiere figure, & *C F* dans

[1] *Def. 20. Geo.*
[2] *Cor. 1. Prop. 5. Geo.*
[3] *Supposit. & Cor. 1. Prop. 5. Geo.*
[4] *Cor. Prop. 4. Geo.*
[5] *Prop. 65. Geo.*

la seconde ; les lignes *C D* & *C E* seroient [1] perpendiculaires à cette commune section *D E* dans la premiere figure ; & dans la seconde *C D* & *C E* seroient aussi perpendiculaires à la commune section *C F*, le tout dans le même plan *DF* puisque



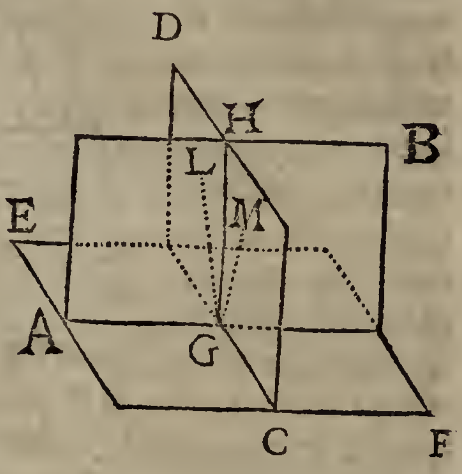
les communes sections *D E* & *CF* sont en même temps dans le plan *D F* & dans le plan *A B*. Ce qui est [2] impossible. Car il faudroit que dans un même plan on pût mener deux lignes par un même point perpendiculairement à une autre ligne. Donc aussi il est impossible qu'on puisse mener d'un même point plusieurs lignes perpendiculaires à un même plan, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Si deux plans qui se coupent sont perpendiculaires à un autre plan, leur commune section lui sera aussi perpendiculaire. Soient les plans *A B* & *C D* dont chacun est perpendiculaire au plan *E F* ; & soit *G H* la commune section de ces deux plans *A B* & *C D* : Je dis que cette commune section *G H* sera aussi perpendiculaire

[1] *Def. 20. Geo.*
[2] *Cor. Prop. 4. Geo.*

au plan *E F*. Pour le démontrer il suffit de faire voir que par le point *G* on ne peut mener une ligne differente de *G H*, qui soit perpendiculaire à la commune section *AG* du plan *A B* avec le plan *E F*; & que par le même point *G* on ne peut mener une autre ligne que *GH* qui soit perpendiculaire à la commune section *C G* du plan *D C* avec le plan *E F*. Car



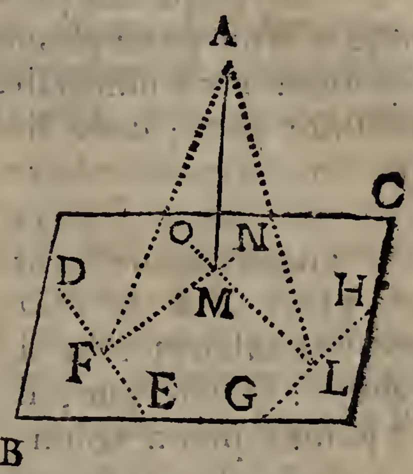
s'il estoit possible que *G L* menée dans le plan *A B* fût perpendiculaire à la commune section *A G* des plans *A B* & *E F*; & que *G M* menée dans le plan *C D* fût aussi perpendiculaire à la commune section *C G* des plans *C D* & *E F*: chacune de ces deux lignes seroit [1] perpendiculaire au plan *E F* par le même point *G*. Ce qui est [2] impossible. Donc la ligne *G H* qui est la commune section des plans *A B* & *C D* perpendiculaires au plan *E F*, est aussi perpendiculaire à ce plan *E F*.

COROLLAIRE II.

Du point *A* pris hors le plan *B C* si on se propose de mener une ligne perpendiculaire à ce plan *BC*; il faut mener à volonté les lignes *DE* & *G H* sur ce plan *B C*, de sorte qu'elles fassent un angle étant prolongées. Ensuite du

[1] *Cor. 1. Prop. 67. Geo.*
[2] *Prop. Pres.*

point *A* il faut mener [1] les lignes *A F* & *A L* perpendiculairement à ces lignes *D E* & *G H*, qui les rencontreront aux points *F* & *L*. Enfin par le point *F* il faut mener la ligne *F N* perpendiculairement à la ligne *D E*, & par le point *L* il faut encore mener la ligne *L O* aussi perpendiculaire à *GH*: Je dis que la ligne *A M* menée du point donné *A* au

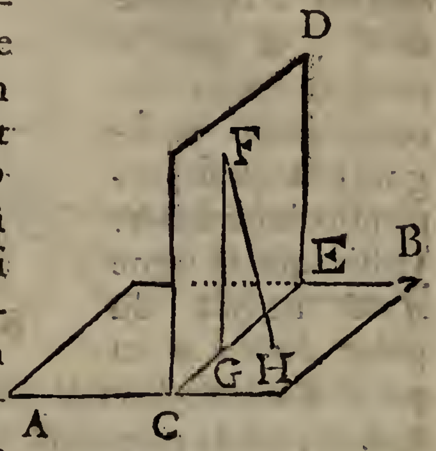


point d'intersection *M* des perpendiculaires *F N* & *L O*, est la perpendiculaire cherchée. Car les lignes *A L* & *O L* étant [2] perpendiculaires à la ligne *G H*, reciproquement [3] *G H* est perpendiculaire à ces lignes *A L* & *O L*. Donc [4] *G H* est perpendiculaire au plan *O L A*. Donc [5] le plan B *C* est perpendiculaire au plan *OLA*, & reciproquement le plan *O L A* est perpendiculaire au plan *B C*. De même à cause que les lignes *A F* & *F N* sont perpendiculaires à la ligne *D E*, le plan *A F N* sera [4] perpendiculaire au plan *B C*. Donc la commune section *A M* de ces plans *A F N* & *A L O*, qui sont perpendiculaires à *B C*, sera [6] aussi perpendiculaire au plan *B C*.

[1] *Part. 1. Cor. 2. Prop. 5. Geo.*
[2] *Par construction.* [3] *Cor. 1. Prop. 5. Geo.*
[4] *Prop. 67. Geo.*
[5] *Cor. 2. Prop. 67. Geo.*
[6] *Cor. 1. Prop. pres.*

COROLLAIRE III.

Si deux plans ſont perpendiculaires l'ûn à l'autre, & ſi d'un point pris dans un de ces deux plans on mene perpendiculairement une ligne droite à l'autre plan ; cette ligne ſera perpendiculaire à la commune ſection de ces deux plans. Soient les plans *A B* & *C D* perpendiculaires l'un à l'autre : Je dis que, ſi du point *F* pris à volonté dans le plan *C D* on mene une ligne perpendiculaire au plan *A B*, cette ligne ſera perpendiculaire à la commune ſection *C E* de ces deux plans *A B* & *C D*. Car, ſi cette ligne menée du point *F* perpendiculairement au plan *A B* n'eſtoit pas perpendiculaire à la commune ſection *E C*, & ſi elle étoit, par exemple *F H* ; alors ayant [1] mené du point *F* la ligne *F G* perpendiculairement à la commune ſection *C E*, cette ligne *F G* ſeroit auſſi [2] perpendiculaire au plan *A B*. Il y auroit donc deux perpendiculaires menées du point *F* au plan *A B*, ce qui eſt [3] impoſſible. Donc la ligne menée du point *F* perpendiculairement au plan *A B* ſera la ſeule ligne *F G* qui eſt perpendiculaire à la commune ſection *C E*.



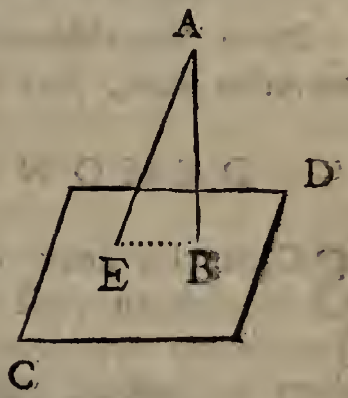
[1] *Part.* 1. *Cor.* 2. *Prop.* 5. *Geo.*
[2] *Cor.* 1. *Prop.* 67. *Geo.*
[3] *Prop. preſ.*

PROPOSITION LXX.

Si d'un point pris hors d'un plan on mene une ligne droite perpendiculairement à ce plan ; elle sera la plus courte de celles qu'on peut mener de ce point à ce plan.

DEMONSTRATION.

Soit le point *A* pris hors le plan *C D* ; de ce point soit menée la ligne *A B* perpendiculairement à ce plan : Je dis que cette ligne *A B* est la plus courte de celles qu'on peut mener du point *A* au plan *C D* ; qu'elle est plus courte que la ligne *A E* menée à volonté du point *A* au plan *C D*. Pour le démontrer, dans le plan *C D* & par les extremités de ces lignes *A B* & *A E* soit menée la ligne *E B*. Alors



l'angle *A B E* du triangle *A E B* étant [1] droit, chacun des angles *A* & *E* sera [2] aigu. Donc [3] la ligne *A B* sera plus courte que *A E*, & par le même raisonnement, elle sera aussi plus courte que toute autre menée du point *A* au plan *C D*, *ce qu'il falloit demontrer.*

[1] *Def. 20. & Def. 14. Geo.*
[2] *Cor. 2. Prop. 31. Geo.*
[3] *Part. 2. Prop. 33. Geo.*

COROLLAIRE.

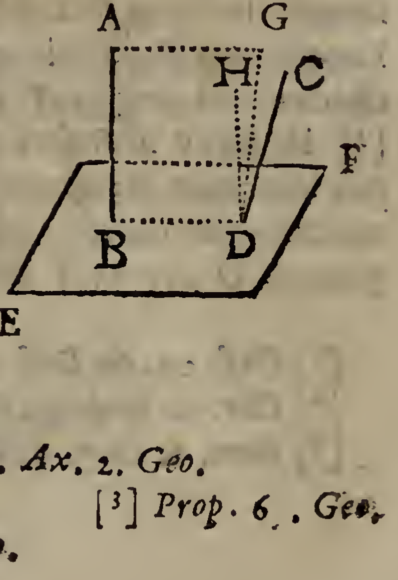
La distance d'un point à un plan, est mesurée par la longueur de la perpendiculaire menée de ce point à ce plan ; puisque [1] il n'y en a pas de plus courte que cette perpendiculaire. Il est donc évident [2] que toutes les perpendiculaires menées d'un plan à un autre qui lui est parallele, sont égales entr'elles. Et enfin on conclura [2] que lorsque toutes les perpendiculaires menées d'un plan à un autre sont égales, ces deux plans sont [2] paralleles entr'eux.

PROPOSITION LXXI.

Deux lignes droites qui sont perpendiculaires à un même plan, sont dans un même plan.

DEMONSTRATION.

Soient les deux lignes droites *A B* & *C D* dont chacune est perpendiculaire au plan *EF*: Je dis que ces deux lignes *A B* & *C D* sont dans un même plan.



Pour le démontrer, du point *B* au point *D* soit menée la ligne *B D*.

Les lignes *A B* & *B D* sont [3] dans le même plan que j'appellerai *B G*, qui est [4] perpendiculaire au plan *E F*. La ligne *C D* doit aussi

[1] *Prop. Pres. & Cor. 1. Ax. 2. Geo.*
[2] *Def. 21. Geo.* [3] *Prop. 6. Geo.*
[4] *Cor. 2. Prop. 65. Geo.*

ſe trouver dans le même plan *BG*. Car ſi elle n'y étoit pas; par le point *D* ſoit [1] menée dans ce plan *BG* la ligne *DH* perpendiculairement à la commune ſection *BD* du plan *BG* avec le plan *EF*. Alors [2] cette ligne *HD* ſera perpendiculaire au plan *EF*. Mais [3] la ligne *CD* étoit auſſi perpendiculaire au même plan *EF* par le même point *D*. Il y auroit donc par le même point *D* deux lignes *HD* & *CD* perpendiculaires au même plan *EF*, ce qui eſt [4] impoſſible. La ligne perpendiculaire *CD* eſt donc dans le même plan que l'autre perpendiculaire *AB*, *ce qu'il falloit démontrer.*

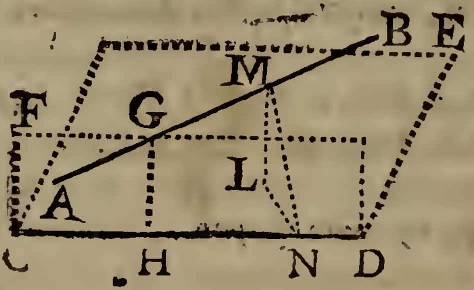
[1] *Part. 2. Cor. 2. Prop. 5. Geo. p. 242.*
[2] *Cor. 1. Prop. 67. Geo. p. 502.*
[3] *Suppoſit.*
[4] *Prop. 69. Geo. p. 506.*

PROPOSITION LXXII.

Deux lignes paralleles sont dans le même plan.

DEMONSTRATION.

Pour démontrer que deux lignes paralleles entre elles sont toujours dans le même plan il sufit de faire voir que, si deux lignes ne sont



pas dans le même plan, elles ne seront point paralleles. Soient les lignes *AB* & *CD* dans des plans differens : je dis que *AB* n'est point parallele à *CD*. Pour le démontrer, considerons le plan *CE* mené par la ligne *CD* parallelement à la ligne *AB*, c'est à dire, de telle sorte que la ligne *AB* en soit également distante dans toute sa longueur. Par cette même ligne *CD* considerons encore un autre plan *FD* qui soit mené perpendiculairement au precedent *CE*; ce dernier plan *FD* ne passera point par la ligne *AB*, car *AB* & *CD* seroient dans le même plan, ce qui est contre la supposition presente, *FD* coupera donc *AB* par exemple au point *G*. Alors du point *G* soit [1]

[1] *Cor. 2. Prop. 5. Geo. p. 243.*

menée *GH* perpendiculaire à la commune ſection *CD*. Cette ligne *GH* ſera [1] perpendiculaire au plan *CE*. Enſuite du point *M* pris à volonté dans la ligne *AB* ſoit [2] menée *ML* perpendiculairement au plan *CE*. Puiſque la ligne *AB* dans toute ſa longueur eſt [3] également diſtante du plan *CE*, les perpendiculaires *GH* & *ML* ſeront [4] égales entre elles. Enfin du point *M* ſoit [5] menée *MN* perpendiculairement à la ligne *CD*, & du point *L* au point *N* ſoit menée *LN*.

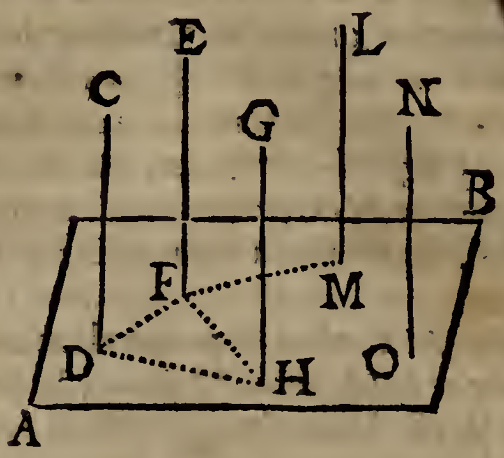
Puiſque *ML* eſt [3] perpendiculaire au plan *CE*, l'angle *MLN* ſera [6] droit ; la perpendiculaire *MN* eſt donc plus grande que *ML* [7], ou que ſon [4] égale *GH*. Les lignes *MN* & *GH* menées de la ligne *AB* perpendiculairement à *CD* n'étant donc point égales, *AB* n'aura pas [8] tous ſes points également diſtans de *CD*. Les deux lignes *AB* & *CD* ne ſeront donc point [9] paralleles, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Les lignes droites qui ſont perpendiculaires à

[1] *Cor. 1. Prop. 67. Geo. p. 502.*
[2] *Cor. 2. Prop. 59. Geo. p. 508.*
[3] *Par conſtruction.*
[4] *Cor. Prop. 70. Geo. p. 512.*
[5] *Cor. 2. Prop. 5. Geo. p. 243.*
[6] *Def. 20. Geo. pag. 202.*
[7] *Part. 1. Prop. 6. Geo. p. 246.*
[8] *Cor. 3. Prop. 6. Geo. p. 249.*
[9] *Def. 8. Geo. p. 196.*

un même plan sont paralleles entr'elles. Soient les lignes *CD*, *EF*, *GH*, *LM*, *NO*, &c.



perpendiculaires au plan *AB* : Je dis qu'elles sont paralleles entr'elles. Pour le démontrer, soient menées les lignes droites *DF*, *DH*, &c. dans le plan *AB* par leurs extremités. Alors les lignes *CD* & *GH*, par exemple, sont [1] dans le même plan, ce qui est [2] une condition requise pour le parallelisme. Outre cela ces deux lignes perpendiculaires sont [3] perpendiculaires à la ligne *DH*. Ces lignes *CD* & *GH* sont [4] donc paralleles l'une à l'autre. On fera le même raisonnement pour les lignes *CD*, *LM*, *EF*, &c.

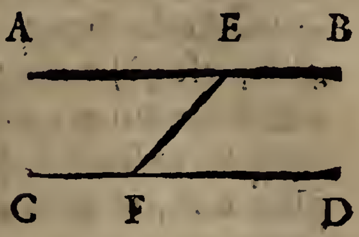
COROLLAIRE II.

Si les lignes *AB* & *CD* sont paralleles, la ligne droite *EF* menée du point *E* d'une de

[1] *Prop. 71. Geo. p. 512.*
[2] *Prop. Pres.*
[3] *Def. 20. Geo. p. 202.*
[4] *Part. 2. Prop. 15. Geo. p. 283.*

ces

cés paralleles au point F de l'autre, sera dans le plan de ces deux paralleles. Car, puisque [1] la ligne *E F* est droite & qu'elle a déja deux de ses points *E* & *F* dans la surface plane qui [2] passe par les paralleles *A B* & *C D*. Il faut necessairement [3] que cette ligne droite soit entierement dans le plan de ces paralleles.

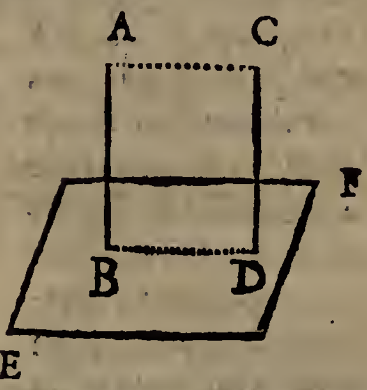


PROPOSITION LXXIII.

Si de deux lignes droites paralleles entr'elles, l'une est perpendiculaire à un plan, l'autre sera aussi perpendiculaire au même plan.

DEMONSTRATION

Soient les lignes *A B* & *C D* paralleles entr'elles, & soit la ligne *A B* perpendiculaire au plan *E F*; Je dis que l'autre ligne *C D* est aussi perpendiculaire au même plan *E F*. Pour le démontrer, soit menée dans le plan *E F* la ligne *B D* par les extremités de ces lignes *A B* & *CD*. Et par leurs autres extremités soit menée la ligne *A C*.



Puisque [1] la ligne *A B* est perpendiculaire au plan *E F*, cette ligne *A B* sera [4] perpendiculaire à *B D*; & reciproquement *B D* sera [5]

[1] *Supposit.* [2] *Prop. Pres.* [3] *Def.* 10. *Geo.* [4] *Def.* 20. *Geo.* [5] *Cor.* 1. *Prop.* 5. *Geo.*

perpendiculaire à *A B*. Le plan *A D* sera donc [1] perpendiculaire au plan *E F*. Mais *C D* étant [2] parallele à *A B*, est [3] dans son même plan *A D*. Et la ligne *B D* étant perpendiculaire à *A B*, est [4] aussi perpendiculaire à *C D*. Donc reciproquement *C D* sera [4] perpendiculaire à *B D*. Et enfin [5] *C D* sera perpendiculaire au plan *E F*, *ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION LXXIV.

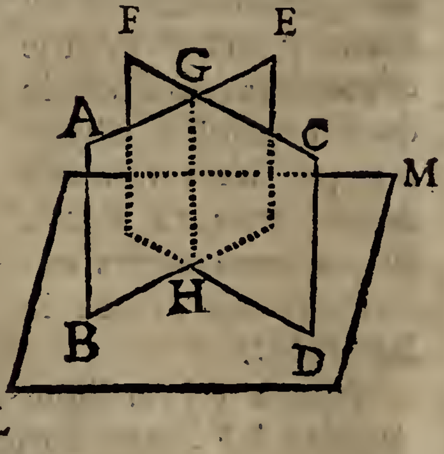
1°. *La commune section de deux plans qui passent par deux lignes paralleles, est parallele à ces mêmes lignes.*

2°. *Les lignes droites paralleles à une même ligne sont paralleles entr'elles, quoique elles & cette même ligne droite soient dans des plans differens.*

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

SOient les lignes *A B* & *C D* paralleles entr'elles : Je dis que la commune section *G H* des plans *B E* & *D F* qui passent par ces paralleles *A B* & *C D*, est parallele à ces mêmes lignes *A B* & *C D*. Pour le démontrer, considerons un plan *L M* qui coupe la ligne *A B* de sorte



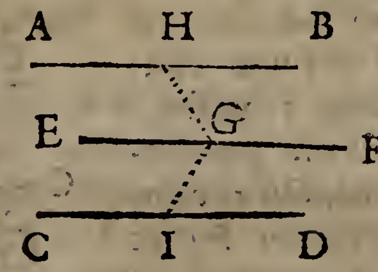
[1] *Cor. 2. Prop. 67. Geo.* [2] *Supposit.*
[3] *Prop. 71. Geo.* [4] *Part. 1. Prop. 15. Geo.*
[5] *Cor. 1. Prop. 67. Geo.*

qu'elle lui soit perpendiculaire. Alors l'autre parallele *C D* sera [1] aussi perpendiculaire au même plan *L M*; & les plans *B E* & *D F* qui passent par ces lignes *A B* & *C D*, seront [2] perpendiculaires au plan *L M*. Leur commune section *G H* sera donc [3] perpendiculaire au plan *L M*; elle sera donc [4] parallele aux lignes *A B* & *C D*, *ce qu'il falloit démontrer.*

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

SOit la ligne *A B* parallele à *E F*, & la ligne *C D* aussi parallele à *E F*. Soit le plan des lignes paralleles *A B* & *E F* different du plan des lignes *C D* & *E F*, c'est à dire que *E F* soit la commune section de deux plans dont un passe par la ligne *A B* & l'autre par *C D*; car si ces trois lignes *A B*, *E F* & *C D* étoient dans le même plan, la proposition presente seroit la même que la vingt-sixiéme : Je dis que la ligne *A B* est parallele à *C D*.



Pour le démontrer, par un point de la ligne *E F*, par exemple *G*, & dans le plan des deux paralleles *A B* & *E F* soit menée *G H* perpendiculaire à *E F*. Par le même point *G* & dans le plan des deux paralleles *C D* & *E F* soit menée *G I* perpendiculaire à la même ligne *E F*.

[1] *Prop.* 73. *Geo.*
[2] *Cor.* 2. *Prop.* 67. *Geo.*
[3] *Cor.* 1. *Prop.* 69. *Geo.*
[4] *Cor.* 1. *Prop.* 72. *Geo.*

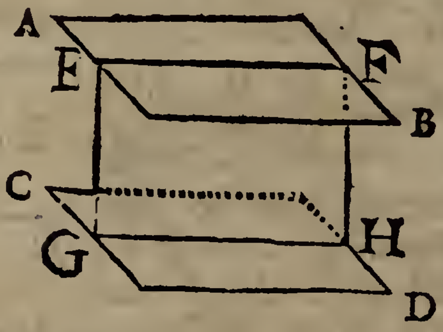
Puisque *E F* est [1] perpendiculaire aux lignes *G I* & *G H*, cette ligne *E F* sera [2] perpendiculaire au plan qui passe par ces deux lignes *G H* & *G I*. Les lignes *A B* & *C D* qui sont [3] paralleles à la ligne *E F*, seront [4] aussi perpendiculaires au même plan des deux lignes *G H* & *G I*. Donc [5] les lignes *A B* & *CD* seront paralleles entr'elles, *ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION LXXV.

Si deux plans paralleles sont coupés par un troisiéme plan, leurs communes sections seront aussi paralleles.

DEMONSTRATION.

Soient les plans paralleles *A B* & *C D* coupés par un troisiéme plan *E H* : Je dis que leurs communes sections *E F* & *G H* seront paralleles entr'elles. Car ces lignes *E F* & *G H* sont dans un même plan *E H*, ce qui est [6] une condition requise pour le parallelisme. Outre cela, ces lignes *E F* & *G H* étant dans les plans *A B* & *C D* qui sont [3] paralleles, c'est à dire [7] également distans l'un de l'autre dans toute leur

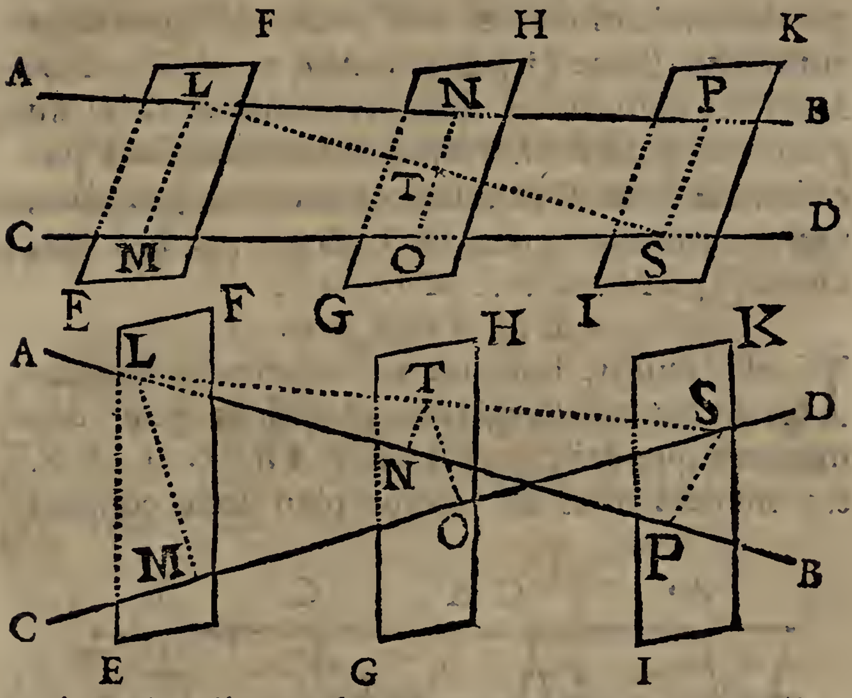


[1] *Par construction & Cor. 1. Prop. 5. Geo.*
[2] *Prop. 67. Geo.*
[3] *Supposit.*
[4] *Prop. 73. Geo.*
[5] *Cor. 1. Prop. 72. Geo.*
[6] *Prop. 72. Geo.*
[7] *Def. 21. Geo.*

étenduë ; ces lignes ſeront auſſi également diſtantes l'une de l'autre dans toute leur longueur. Donc [1] elles ſeront paralleles entr'elles, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Les lignes droites coupées par des plans paralleles, ſeront coupées proportionnellement.



Soient les lignes droites *A B* & *C D*, paralleles, ou non ; dans le même plan, ou dans differens plans. Soient encore les plans paralleles *E F*, *G H*, *I K* qui coupent ces lignes aux points *L*, *M* ; *N*, *O* ; *P*, *S* : Je dis que ces lignes *A B* & *C D* ſeront coupées proportionnellement, c'eſt à dire que *L N* . *N P* :: *M O* . *O S*. Pour le démontrer, du premier point de ſection *L* d'une de ces lignes droites *A B* au deuxiéme point de ſection *S* de la ſeconde ligne *C D* ſoit menée la ligne *L S*. Et du point *L* au point *M* ; de *N* à *T*, & de *T* à *O* ;

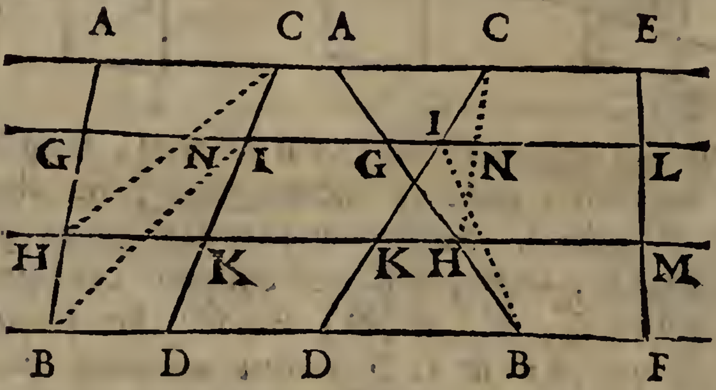
[1] *Def.* 8. *Geo.*

enfin de *P* à *S*, où ces trois lignes *AB*, *CD* & *LS* sont coupées, soient menées des lignes droites.

Les lignes *LP* & *LS* seront [1] dans le même plan; les lignes *LS* & *SM* seront aussi dans le même plan. Or les communes sections *TN* & *SP* du plan triangulaire *LSP* & des plans paralleles *GH* & *IK*, sont [2] paralleles entr'elles. Donc [3] *LN* . *NP* :: *LT* . *TS*. Mais les communes sections *LM* & *TO* du plan triangulaire *LSM* & des deux plans paralleles *EF* & *GH*, sont paralleles entr'elles. On aura donc encore *MO* . *OS* :: *LT* . *TS*. Donc [4] *LN* . *NP* :: *MO* . *OS*.

REMARQUE.

IL est facile de faire un raisonnement semblable à celui du Corollaire precedent pour démontrer que des lignes droites *AB*, *CD*, *EF*, &c. menées dans un même plan sont coupées



proportionnellement par les lignes paralleles *AE*, *GL*, *HM*, *BF*, &c. Car du point *C* au point *H* ayant mené *CH*; on trouve [4] que *AG* . *GH* :: *CN* . *NH* :: *CI* . *IK*. Donc

[1] *Prop.* 65. *Geo.* [3] *Part.* 1. *Prop.* 51. *Geo.*,
[2] *Prop. Pres.* [4] *Cor.* 3. *Def.* 12. *Algeb*

[1] $AG . GH :: CI . IK$. On prouvera de même que $CI . IK :: EL . LM$, &c. Ensuite si on mene la ligne IB, on trouvera encore de la même maniere que $GH . HB :: IK . KD$. &c.

PROPOSITION LXXVI.

1°. *Si plusieurs plans sont paralleles ; une même ligne droite étant perpendiculaire à un ; sera perpendiculaire aux autres.*

2°. *Si une même ligne droite est perpendiculaire à plusieurs plans, ils seront paralleles.*

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

SOient les plans AB & CD paralleles entr'eux ; soit la ligne GH perpendiculaire au plan AB : Je dis que cette ligne GH est aussi perpendiculaire au plan CD. Pour le démontrer; considerons un plan GN qui passe par la perpendiculaire GH, dont les communes sections avec les plans AB & CD soient GM & IN. Faisons encore passer un autre plan GS par cette perpendiculaire GH, dont les communes sections avec les plans AB & CD soient GP & IS.

Puisque les plans AB & CD sont paralleles,

[1] *Cor. 3. Def. 12. Algeb.*

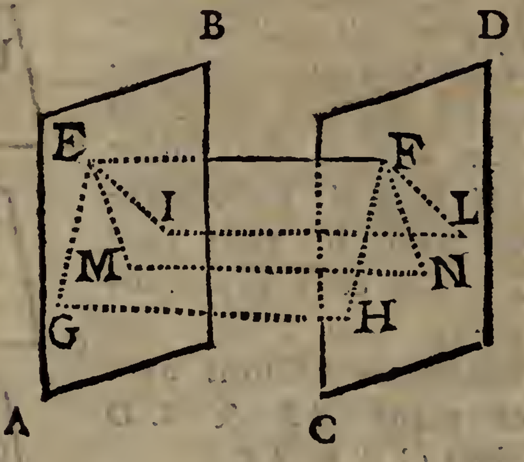
les communes sections *G M* & *I N* seront [1] paralleles ; par la même raison *G P* & *I S* seront aussi paralleles entr'elles. Mais [2] la ligne *G H* étant perpendiculaire à *A B*, l'angle *I G M* sera [3] droit ; & l'angle *G I N* sera aussi [4] droit. *G I* sera donc perpendiculaire à *I N*. Par la même raison *I G P* étant [3] droit, G *I S* sera aussi droit. G *I* sera donc perpendiculaire à *I S*. Donc [5] la ligne G *I* sera perpendiculaire au plan *C D*, *ce qu'il falloit démontrer.*

Et si le plan *C D* est encore parallele à *E F*, on démontrera que la ligne *G H* est encore perpendiculaire à ce plan *E F* par un raisonnement semblable à celui qu'on vient de faire.

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Soient les plans *A B* & *C D*, ausquels la ligne *E F* soit perpendiculaire : Je dis que ces plans sont paralleles entr'eux. Pour en connoître l'évidence il suffit de démontrer que toutes les perpendiculaires menées d'un de ces plans à l'autre seront égales entr'elles. Et pour cela, soit menée G *H* parallele à cette ligne *E F* ; & dans



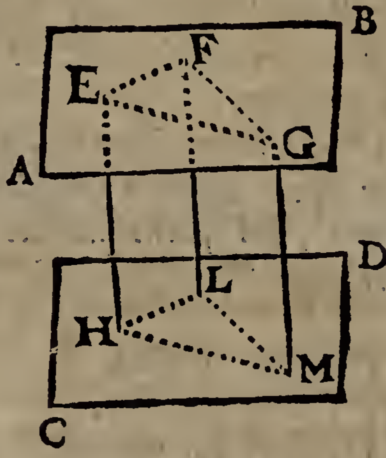
[1] *Prop. 75. Geo.*
[2] *Supposit.*
[3] *Def. 20. & Def. 14. Geo.*
[4] *Part. 3. Prop. 24. Geo.*
[5] *Prop. 67. Geo.*

le plan *AB* d'un point de rencontre E de la ligne *EF* à un autre G de la ligne G *H* soit menée E G ; de même soit menée *F H* dans le plan *CD*.

Puisque [1] G *H* est parallele à la perpendiculaire E F, cette ligne G *H* sera aussi [2] perpendiculaire aux plans *A B* & *C D*. Or [3] les angles *FEG*, G*HF*, E G *H* & *H F*E sont droits. La figure E *H* sera donc [4] un parallelogramme. Donc [5] la perpendiculaire G *H* sera égale à E F. On démontrera de la même maniere que les autres perpendiculaires *I L*, *M N*, &c. menées d'un de ces plans à l'autre, sont égales entr'elles, chacune étant égale à E F. Ces plans seront donc [6] également distans l'un de l'autre dans toute leur étendue. Donc [7] ils seront paralleles entr'eux, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Si chacun des trois points E, *F* & G sont également distans du plan *C D*, le plan *AB* sera parallele au plan *C D*. Car puisque les distances de ces points sont [6] mesurées par des perpendiculaires, les lignes E*H*, *FL*, & G *M* menées de ces points perpendiculairement au plan *C D* seront égales entr'elles. Or [8] elles sont



[1] *Par construction.* [2] *Prop.* 73. *Geo.*
[3] *Def.* 20. *&* *Def.* 14. *Geo.*
[4] *Cor.* 3. *Prop.* 20. *Geo.* *&* *Cor.* 1. *Prop.* 38. *Geo.*
[5] *Part.* 1. *Prop.* 37. *Geo.* [6] *Cor. Prop.* 70. *Geo.*
[7] *Def.* 21. *Geo.* [8] *Cor.* 1. *Prop.* 72. *Geo.*

paralleles entr'elles ; & prises deux à deux elles sont [1] dans le même plan. Les lignes *LM* & *FG* ; *HL* & *EF* ; *HM* & *EG* seront [2] égales entr'elles. Les figures *EM*, *EL* & *FM* seront donc [3] des parallelogrammes. Or l'angle *EHL* étant [4] droit, l'angle *EFL* sera [5] droit. On trouvera encore par un raisonnement semblable que l'angle *LFG* est droit. Donc la ligne *LF* sera [6] perpendiculaire au plan des lignes *EF* & *FG*, c'est à dire [7] à *AB*. Donc *LF* sera perpendiculaire aux plans *AB* & *CD*. Ces plans seront donc [8] paralleles entr'eux.

PROPOSITION LXXVII.

1°. *Si dans un plan les côtés d'un angle rectiligne sont paralleles aux côtés d'un autre qui est dans un autre plan ; & si les plans de ces paralleles se terminent mutuellement d'une part à leur commune section ; ce dernier angle sera égal au premier.*

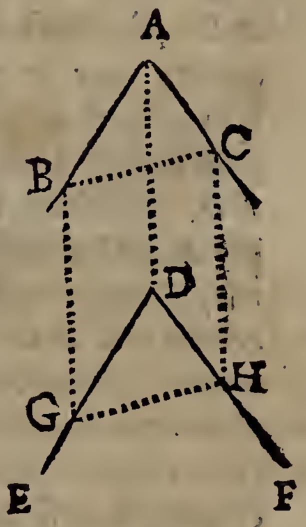
2°. *Si deux lignes d'un angle sont paralleles aux deux lignes d'un autre dont le plan est different, les plans de ces angles seront paralleles entr'eux.*

[1] *Prop.* 72. *Geo.*
[2] *Prop.* 36. *Geo.*
[3] *Def.* 49. *Geo.*
[4] *Def.* 20. & *Def.* 14. *Geo.*
[5] *Part.* 1. *Prop.* 38. *Geo.*
[6] *Prop.* 67. *Geo.*
[7] *Def.* 10. *Geo.*
[8] *Part.* 2. *Prop. Pres.*

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit l'angle *BAC* dont les côtés *AB* & *AC* sont paralleles aux côtés *DE* & *DF* d'un autre angle *EDF* dont le plan n'est pas le même que celui du premier angle *BAC*; ces lignes paralleles *AB* & *DE*, *AC* & *DF* étant disposées de maniere que leurs plans se terminent à leur commune section *AD*: Je dis que cet angle *BAC* = *EDF*. Pour le démontrer, sur la ligne *DE* il faut prendre *DG* = *AB*, & sur *DF* il faut prendre *DH* = *AC*; ensuite menez *BG*, *AD*, *CH*; *BC* & *GH*.

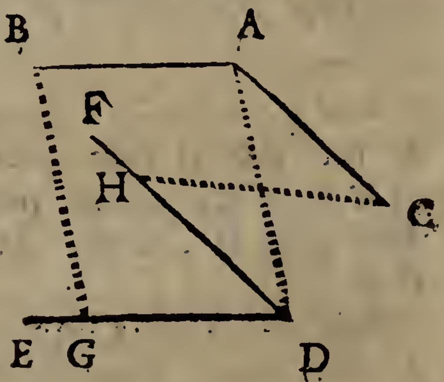


Puisque les deux lignes *AB* & *DG* sont [1] paralleles & [2] égales, les deux lignes *BG* & *AD* seront [3] égales & paralleles; & par la même raison les deux lignes *CH* & *AD* seront aussi égales & paralleles. Les deux lignes *BG* & *CH* seront donc égales [4] & [5] paralleles entr'elles; & enfin [3] les lignes *BC* & *GH* seront égales l'une à l'autre. Les deux triangles *BAC* & *GDH* étant donc équilateraux, ils seront [6] équiangles. Donc [6] l'angle *BAC* = *EDF*, *ce qu'il falloit démontrer.*

[1] *Supposit.*
[2] *Par construction.*
[3] *Prop. 36. Geo.*
[4] *Ax. 18. Gen.*
[5] *Part. 2. Prop. 74. Geo.*
[6] *Cor. 2. Prop. 35. Geo.*

REMARQUE.

Les plans des paralleles *AB* & *DE*, *AC* & *DF* se terminent l'un & l'autre à leur commune section *AD*; car autrement la premiere partie de la proposition presente se trouveroit fausse, parcequ'elle seroit trop générale. Puisque les côtés de l'angle *BAC* peuvent être disposés de maniere que le plan des paralleles *AC* & *FD* ne se termine pas à la commune section *AD* où il est rencontré par le plan *BD* qui est celui des paralleles *BA* & *ED*. Et alors l'angle *BAC* étant obtus, *EDF* sera aigu; & plus *BAC* sera obtus, plus *EDF* sera aigu pour conserver le parallelisme des lignes *AC* & *FD*. Au contraire, si *BAC* est aigu *EDF* sera obtus. Cela vient encore de ce que les lignes *AD* & *HC* se coupant, on ne peut pas [1] conclure certainement que *AD* = *HC*.



DEMONSTRATION

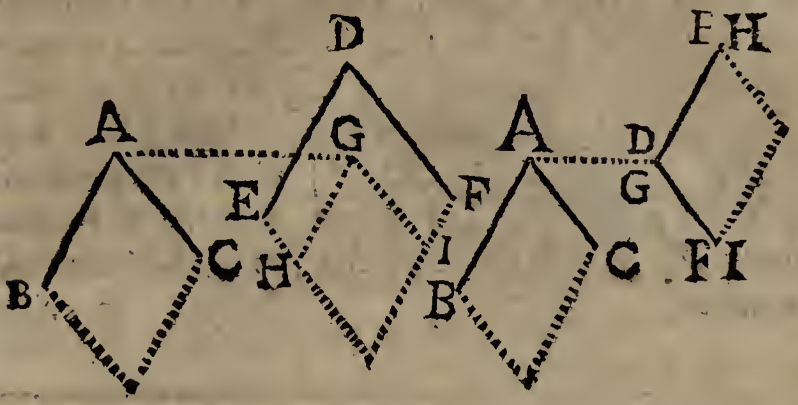
DE LA SECONDE PARTIE.

Soient les deux lignes droites *AB* & *AC* qui se rencontrent au point *A*, paralleles aux

[1] *Remarque de la Prop. 36. Geo.*

deux

deux lignes *DE* & *DF* qui ſe rencontrent au point *D* dans un autre plan que celui des



lignes *AB* & *AC* : Je dis que leurs plans *BC* & *EF* qui paſſent par ces lignes, ſont paralleles entr'eux. Pour le démontrer, du point *A* ſoit menée la ligne *AG* perpendiculairement au plan *EF*. Par le point *G* où elle rencontre ce plan *EF*, ſoient menées dans le plan *EF* les lignes *GH* & *GI* paralleles aux lignes propoſées *DE* & *DF*.

Puiſque les lignes *GH* & *GI* ſont [1] paralleles aux lignes *DE* & *DF*, & que [2] *AB* & *AC* ſont paralleles auſſi aux lignes *DE* & *DF*; la ligne *AB* ſera [3] parallele à *GH*, & *AC* ſera parallele à *GI*. Or les paralleles *AB* & *GH* étant [4] dans le même plan, on trouvera dans la premiere figure que les angles *AGH* + *GAB* ſeront [5] égaux à deux droits. Mais l'angle *AGH* eſt

[1] *Par conſtruction.*
[2] *Suppoſit.*
[3] *Prop.* 74. *Geo.*
[4] *Prop.* 72. *Geo.*
[5] *Part.* 3. *Prop.* 24. *Geo.*

[1] droit ; l'angle *G A B* sera donc droit. On trouvera encore par un raisonnement semblable, que l'angle *G A C* est droit dans l'une & dans l'autre figure. Enfin [2] dans la seconde figure *A G H* = *G A B*. La ligne *A G* étant donc perpendiculaire aux lignes *A B* & *A C*, elle sera [3] perpendiculaire à leur plan *B C*. Cette ligne *A G* est [4] aussi perpendiculaire au plan *E F*. Les plans *B C* & *E F* sont donc [5] paralleles entr'eux, *ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION LXXVIII.

1°. *Si un plan rencontre un autre plan, les angles formés de part & d'autre d'un de ces plans seront droits ou égaux à deux droits.*

2°. *Si deux plans se coupent, leurs angles opposés par le sommet seront égaux entr'eux.*

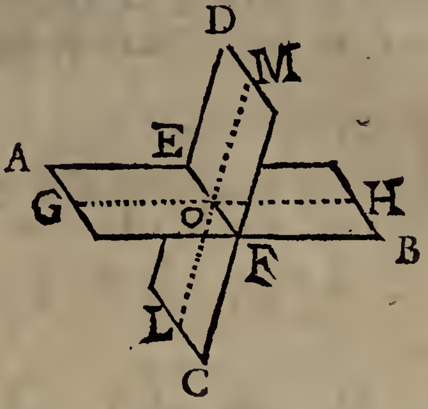
DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

SOit le plan *D F* qui rencontre le plan *A B*. Je dis que les angles qui sont formés de part & d'autre de ce plan *D F*, pris ensemble,

[1] *Def. 20. & Def. 14. Geo.*
[2] *Part. 1. Prop. 23. Geo.*
[3] *Prop. 67. Geo.*
[4] *Par construction.*
[5] *Part. 2. Prop. 76. Geo.*

ſont égaux à deux droits. Pour le démontrer, par un point de la commune ſection *EF*, par exemple *O*, ſoit menée dans le plan *AB* la ligne *GH* perpendiculairement à cette commune ſection *EF*, & par le même point *O* ſoit encore menée dans



le plan *DF* la ligne *LM* perpendiculaire à cette commune ſection *EF*. Alors les angles *GOM* & *MOH* ſont [1] les angles des plans *DF* & *AB*. Et parceque la ligne *GH* eſt droite, ces angles *GOM* & *MOH* ſont [2] dans le même plan. Enfin ces angles *GOM* & *MOH* ſont [3] droits ou égaux à deux droits, *ce qu'il falloit démontrer.*

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

SOient les plans *AB* & *CD* qui ſe coupent ; je dis que les angles de ces plans qui ſont oppoſés par le ſommet, ſont égaux entr'eux. Car les angles *GOL* & *MOH*

[1] *Def.* 18. *Geo.*
[2] *Prop.* 65. *& Cor. Def.* 10. *Geo.*
[3] *Part.* 1. *Prop.* 21. *Geo.*

ſont [1] les angles de ces plans, & ces angles ſont oppoſés par le ſommet, & [2] dans le même plan; ils ſont donc [3] égaux entr'eux, *ce qu'il falloit démontrer.*

[1] *Def. 18. Geo.*
[2] *Prop. 65. & Cor. Def. 10. Geo.*
[3] *Part. 1. Prop. 22. Geo.*

CHAPITRE III.

DES CORPS OU SOLIDES.

IL est impoſſible de faire un grand progrés dans la Phyſique nouvelle, ſans ſçavoir la maniere de connoître combien de maſſe ont certains corps, & combien de ſurface. Parceque leur repos, leurs differens degrés de mouvement, leur ſituation, figure & volume, ſont ordinairement l'origine des Phenomenes les plus conſiderables.

La connoiſſance des ſolides eſt fort avantageuſe dans les Mechaniques pour la conſtruction des Machines, pour déterminer les Centres de gravité, pour trouver les Equilibres, &c. Dans la Navigation pour la conſtruction des Vaiſſeaux, pour comparer la peſanteur de leur volume à un pareil volume d'eau, pour connoître leur plus grande charge, &c.

On ſe trouve ſouvent dans la neceſſité de mesurer des murailles selon leur trois dimensions, pour sçavoir combien de toises cubes elles contiennent, combien de pieds, &c. Il y a tant d'ouvrages qui se rencontrent continuellement dans l'Architecture, dont la perfection dépend de la coupe des pierres, & d'une Theorie exacte des corps! s'il est necessaire d'estimer des ouvrages de Fortifications, par exemple, des excavations de fossés, la solidité des remparts, &c, on n'y peut reussir sans la connoissance des solides. Enfin les usages de cette partie de la Geometrie sont tres-frequens & d'une grande utilité dans le reste des Mathematiques; & quand même cette utilité ne paroîtroit que dans les exemples qu'on vient d'apporter; cela seroit suffisant pour en rendre l'étude recommandable, & pour animer le zéle de ceux qui commencent à s'appliquer à ces sciences.

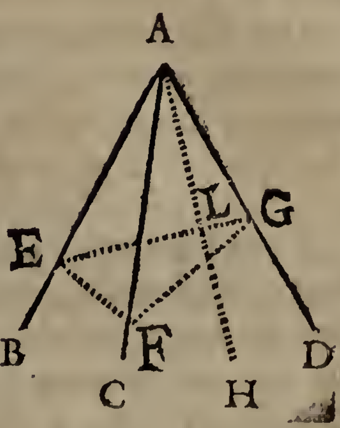
PROPOSITION LXXIX.

Si trois angles plans font un angle solide; deux, pris ensemble, seront plus grands que le troisiéme.

DEMONSTRATION.

SOient les angles plans *BAC*, *CAD* & *DAB* qui forment un angle solide dont le sommet est *A*: Je dis que deux de ces angles plans pris à volonté, par exemple *BAC* & *CAD* sont plus grands que le troisiéme *DAB*.

Si un de ces deux angles *BAC*, *CAD*, est plus grand que l'angle *D A B*, ou s'il eſt égal à l'angle *D A B* ; il eſt évident que ces deux angles *B A C* & *C A D*, pris enſemble, ſont plus grands que l'angle *DAB*. Car c'eſt ajouter quelque choſe à une de deux grandeurs égales, ou à la plus grande, & rien à l'autre égale ou plus petite.



Mais ſi chacun des angles *B A C* & *C A D* eſt plus petit que le troiſiéme angle *D A B* ; par les points *E* & *G* éloignés du point *A*, & pris à volonté dans les lignes *A B* & *A D*, ſoit menée *E G*. De cet angle *D A B* retranchons une partie *H A B* qui ſoit égale à l'angle *C A B*. Sur la ligne *A C* prenons la partie *A F* égale à *A L*. Enfin du point *E* au point *F*, & du point *F* au point *G* ſoient menées les lignes *E F* & *F G*.

Les triangles *L A E* & *F A E* ont le côté *A E* commun, & [1] $AL = AF$. Outre cela [1] l'angle $LAE = FAE$. Les baſes *E L* & *E F* ſeront [2] donc égales. Mais [3] $EF + FG > EG$. Donc [4] $FG > LG$. Le côté *A G* eſt commun aux deux triangles *F A G* & *L A G*, & [1] $AF = AL$. L'angle *F A G* eſt donc [5] plus grand que l'angle *L A G*. En ajoutant d'une part l'angle *F A E*, & de l'autre

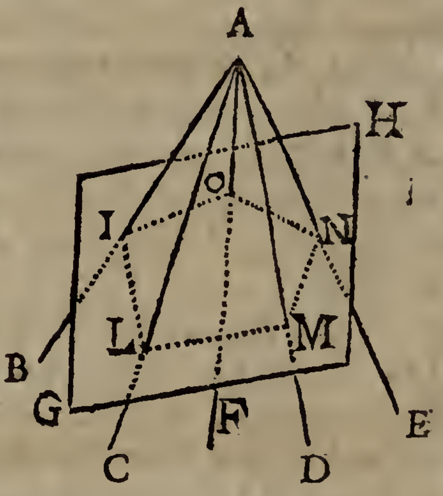
[1] *Par conſtruction.*
[2] *Part.* 1. *Prop.* 35. *Geo.*
[3] *Prop.* 1. *Geo.*
[4] *Ax.* 17. *Geo.*
[5] *Cor.* 3. *Prop.* 35. *Geo.*

part l'angle *LAE* égal [1] au precedent ; on trouvera [2] que la somme des angles $BAC + CAD > BAD$, *ce qu'il falloit démontrer.*

On suivra cette même methode, pour démontrer que $BAC < BAD + CAD$, & que $CAB + BAD > CAD$.

COROLLAIRE.

Tous les angles plans qui font un angle solide sont, ensemble, moindres que quatre droits. Soit un angle solide dont le sommet est *A* : Je dis que la somme des angles plans *BAC*, *CAD*, *DAE*, *EAF*, *FAB*, qui le forment, quelque nombre qu'il y en ait, est plus petite que quatre angles droits. Pour le démontrer, considerons un plan, par exemple *GH*, qui coupe transversalement les plans de ces angles qui composent l'angle solide dont le sommet est *A*. Alors les communes sections de ces plans & du plan *GH* formeront la figure rectiligne *ILMNO* ; & il y aura des angles solides dont les sommets seront les points *I*, *L*, *M*, *N*, &c.



La somme des angles de tous les triangles *IAL*, *LMA*, *MNA*, *ANO*, *AIO*, qui ont chacun pour base un côté du polygone

[1] *Par Construction.*
[2] *Ax. 7. gen.*

I L M N O, eſt [1] égale à autant de fois deux angles droits, qu'il y a de côtés à ce polygone *I L M N O*.

La ſomme des angles interieurs du polygone *I L M N O* & de quatre angles droits, eſt auſſi égale [2] à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés à ce même polygone *ILMNO*.

La ſomme des angles des triangles *I A L*, *L A M*, *M N A*, &c. eſt donc [3] égale à la ſomme faite des angles interieurs du polygone *I L M N O* & de quatre droits.

Mais [4] la ſomme des angles *A I O* & *A I L* eſt plus grande que l'angle *O I L* du même polygone. De même $ALI + ALM > ILM$. & $AML + AMN > LMN$. De plus $ANM + ANO > MNO$. Enfin $AON + AOI > NOI$. C'eſt à dire que la ſomme des angles qui ſont à la baſe des triangles *I A L*, *L M A*, *A M N*, &c. eſt plus grande que la ſomme des angles interieurs du polygone *I L M N O*.

Si de la ſomme des angles des triangles *I A L*, *A L M*, *A M N*, &c. on retranche la ſomme des angles plans qui ſont à leur baſe, dont les ſommets ſont *I*, *L*, *M*, & *O*; & ſi de la ſomme faite des angles interieurs du polygone *I L M N O* & de quatre droits, on retranche la ſomme de ces angles interieurs : on trouvera [5] que le reſte des angles des triangles *A I L*, *A M L*, &c. c'eſt à dire, que la ſomme des angles plans qui forment l'angle ſolide dont le ſommet eſt *A*, ſera plus petite que quatre angles droits, *ce qu'il falloit démontrer.*

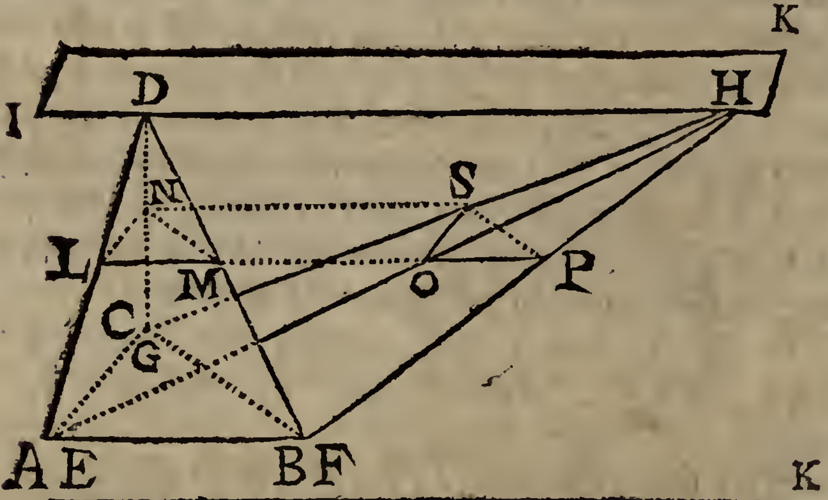
[1] *Prop.* 31. *Geo.*
[2] *Part.* 1. *Prop.* 32. *Geo.*
[3] *Ax.* 18. *gen.*
[4] *Prop. Pref.*
[5] *Ax.* 15. *gen.*

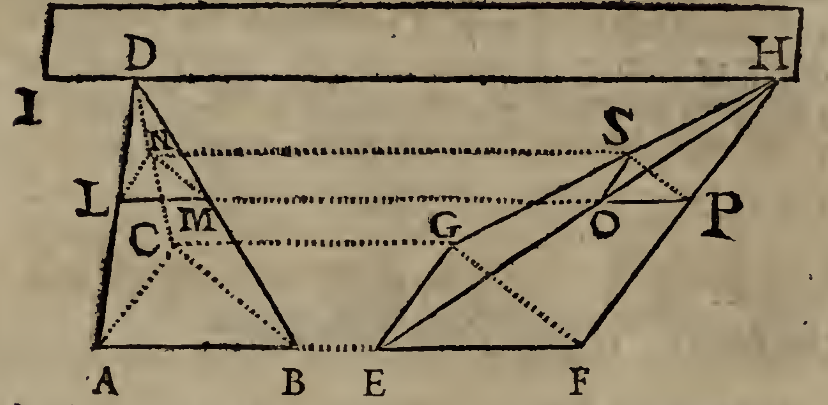
PROPOSITION LXXX.

Les pyramides triangulaires posées sur la même base, ou sur des bases équilaterales l'une à l'autre, sont égales entr'elles.

DEMONSTRATION.

SOient les deux pyramides *ABCD* & *EFGH* sur la même base *ABC*, ou sur des bases





équilaterales *ABC* & *EFG*, & de même hauteur, c'est à dire [1] entre les mêmes plans paralleles *IK* & *AFGC* : Je dis que ces deux py-

[1] *Def. 21. & Cor. Prop. 70. Geo.*

ramides sont égales entr'elles. Pour le démontrer, considerons ces deux pyramides comme divisées en feuillets, lames, oú plans triangulaires paralleles aux bases *ABC* & *EFG*, & d'une épaisseur indefiniment petite. Il est constant que dans l'une de ces pyramides il y aura autant de ces plans, lames, ou feuillets, que dans l'autre; puisqu'on suppose ces mêmes pyramides être de même hauteur. Il reste donc à démontrer que chaque coupe, lame, feuille, ou plan d'une de ces pyramides, sera égale à chaque coupe, feuille, ou lame, qui sera à même hauteur dans l'autre pyramide.

Soit le plan *LPSN* qui coupe ces deux pyramides parallelement au plan *AFGC*. Les communes sections *LM* & *AB* du plan *DAB* & des plans *LPSN* & *AFGC* seront [1] paralleles entr'elles. Les triangles *ABD* & *DLM* seront [2] donc semblables; on dira la même chose des triangles *HEF* & *HOP*; *DAC* & *LND*; *EGH* & *HOS*; *DCB* & *DNM*; *HGF* & *HSP*.

Donc [3] $AB . LM :: AD . LD$, & $EF . OP :: EH . OH$.

Mais [4] $AL . LD :: EO . OH$. & [5] $AL + LD . LD :: EO + OH . OH$, c'est à dire, $AD . LD :: EH . OH$.

Donc [6] $AB . LM :: EF . OP$. Or [7] $AB = EF$. Donc [8] $LM = OP$.

[1] *Prop. 75. Geo.*
[2] *Part. 1. Prop. 24. & part. 1. prop. 52. Geo.*
[3] *Part. 1. Prop. 52. Geo.*
[4] *Cor. Prop. 74. Geo.*
[5] *Part. 3. Cor. Prop. 3. Algeb.*
[6] *Cor. 3. Def. 12. Algeb.* [7] *Supposit.*
[8] *Part. 2. Prop. 9. Algeb.*

On trouvera par un raiſonnement ſemblable à celui qu'on vient de faire, que *CB . NM* :: *BD . MD* :: *FH . PH* :: *FG . PS.* & de ces rapports égaux, on concluera que *CB . NM* :: *FG . PS .* & [1] *CB . FG* :: *NM . PS*. Mais [2] $CB = FG$. Donc $NM = PS$.

On démontrera de la même maniere que $LN = OS$.

Une de ces lames triangulaires *LMN* d'une de ces pyramides eſt donc équilaterale à une autre lame triangulaire *OPS* correſpondante à même hauteur dans l'autre pyramide. Ces deux triangles *LMN* & *OPS* ſont donc égaux entr'eux.

Ce qu'on a démontré à l'égard des feuilles ou lames *LMN* & *OPS* peut eſtre démontré de la même maniere & par les mêmes raiſons de toutes les autres lames ou feuilles comparées entr'elles à même hauteur, c'eſt à dire dans les mêmes plans paralleles aux baſes.

Les pyramides triangulaires *ABCD* & *EFGH* de même hauteur & poſées ſur des baſes équilaterales *ABC* & *EFG* ſont donc égales entr'elles, *ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION LXXXI.

Une pyramide triangulaire eſt la troiſiéme partie d'un priſme de même baſe & de même hauteur.

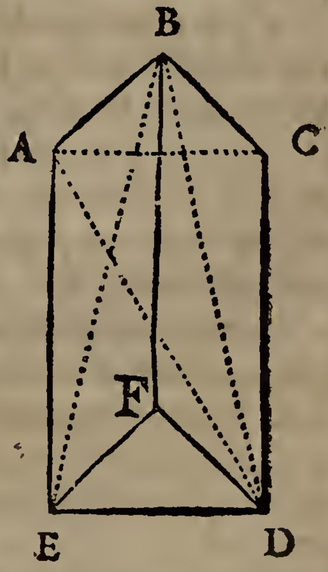
DEMONSTRATION.

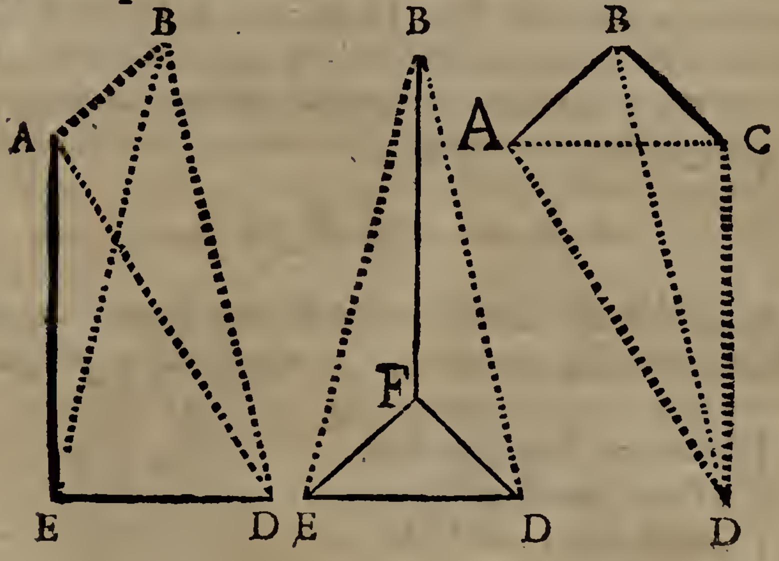
Soit le priſme triangulaire *ABCDEF* : Je dis qu'une pyramide qui aura par baſe un des

[1] *Part. 2. Cor. Prop. 3. Algeb.*
[2] *Suppoſit.*

deux

triangles *A B C*, *D E F*, qui ſont les deux baſes paralleles, ſemblables, & égales du priſme triangulaire *A B C D E F*, & qui ſera de même hauteur que ce priſme; par exemple, la pyramide *E D F B*, ſera la troiſiéme partie de ce même priſme. Pour le démontrer; par un même point, par exemple *B*, ſoient menées les diagonales *B D* & *B E* ſur les deux faces *C F* & *A F*, & ſur la troiſiéme face *C E* ſoit encore menée la diagonale *A D*, qui feront ſix triangles & [1] repreſenteront ce priſme diviſé par les deux plans *E D B* & *A B D*, en trois pyramides *EDFB*, *E A B D*, & *A B C D*. Il faut démontrer qu'elles ſont égales, & pour y réuſſir conſiderons-les [2] dans le priſme *ABCDEF*.





[1] *Prop. 65. Geo.*
[2] *Part. 3. de l'avertiſſ. pag. 230.*

1°. La pyramide *E D F B*, ou *B E F D* qui est la même, est égale à la pyramide *A E B D*. Car la base *B E F* de la pyramide *B E F D* est [1] égale à la base *A E B* de la pyramide *A E B D*. Or ces deux pyramides ont une même hauteur, puisqu'elles ont le même sommet commun *D*. Donc [2] la pyramide *B E F D* = *A E B D*.

2°. La pyramide *D A C B* est égale à la pyramide *A E B D*, ou *A E D B* qui est la même. Car la base *D A C* de la pyramide *D A C B* est [1] égale à la base *A E D* de la pyramide *A E D B*. Or ces deux pyramides ont [3] une même hauteur, puisqu'elles ont le même sommet commun *B*.

La pyramide *D A C B* est [2] donc égale à la pyramide *A E D B*, ou *A E B D*.

Les trois pyramides *E D F B*, *A E B D* & *A C B D* sont donc [4] égales entr'elles. Chacune est donc la troisiéme partie du prisme proposé.

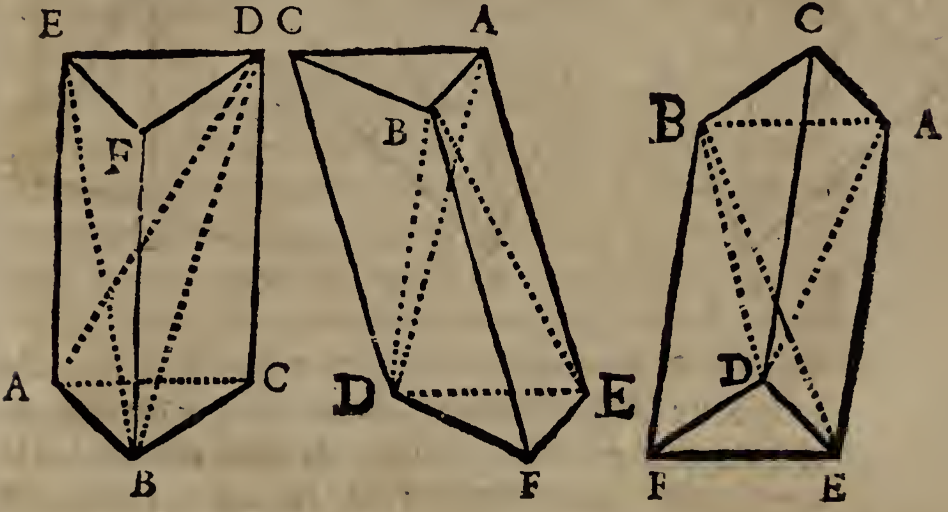
Or la pyramide *E D F B* a la même base & la même hauteur que le prisme *A B C D E F*. Un prisme triangulaire est donc triple d'une pyramide de même base & de même hauteur, *ce qu'il falloit démontrer.*

R E M A R Q U E.

La démonstration qu'on vient de faire, convient non seulement au prisme triangulaire

[1] *Cor.* 2. *Prop.* 37. *Geo.*
[2] *Prop.* 80. *Geo.*
[3] *Cor. Prop.* 70. *Geo.*
[4] *Ax.* 18. *Gen.*

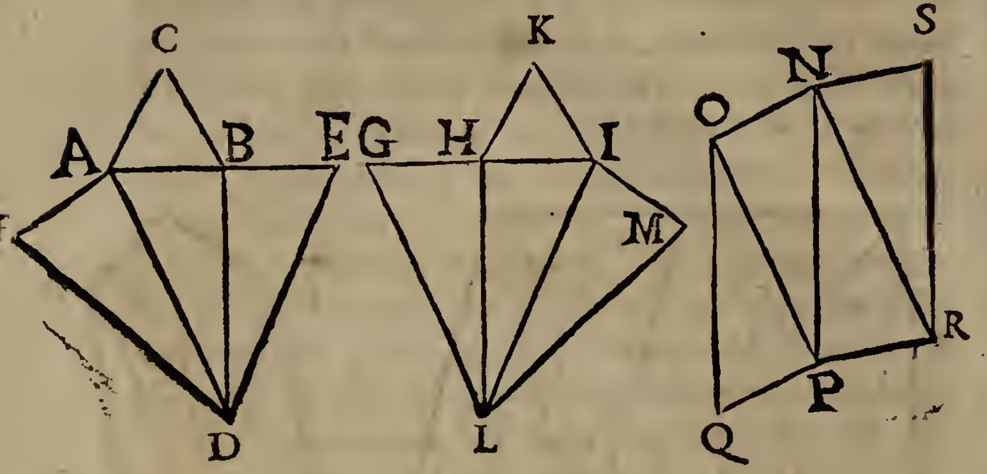
droit, mais auſſi aux obliques triangulaires. C'eſt pourquoi on la peut appliquer aux figures ſuivantes, & on n'y trouvera aucune difficulté particuliere. Les differentes poſitions & coupes des priſmes qui y ſont repreſentées, ſerviront à exercer.



Pour faciliter encore davantage l'intelligence de la propoſition preſente, on peut tailler un priſme triangulaire de bois ou de cire, & enſuite le couper ſuivant les plans *E B D* & *A B D*.

J'enſeignerai même une maniere pour découper du carton dont on fera trois pyramides triangulaires égales entr'elles, qui étant appliquées l'une contre l'autre formeront le priſme triangulaire *A B C D E F*. Et pour y réuſſir plus facilement, je propoſerai la conſtruction d'un priſme rectangle ; ce qui ſuffira, parcequ'il ne s'agit que de faire bien entendre le relief des trois pyramides qui ſont repreſentées dans la figure du priſme *A B C D E F*, car lorſqu'on les ſçait reconnoître dans le priſme rectangle, on les diſtingue avec la même facilité dans le priſme oblique. Aprés avoir mené à volonté la ligne

AB, il faut [1] construire sur cette ligne un triangle équilateral *ABC*. Il faut [2] mener la

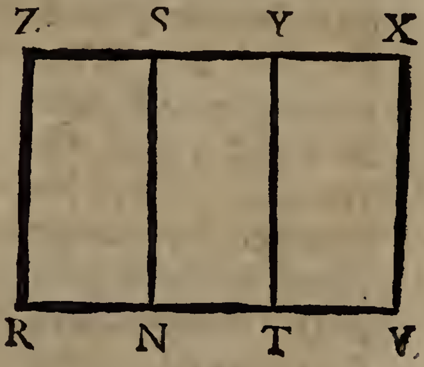


ligne *BD* perpendiculairement à *AB* & de telle longueur qu'on voudra, cette longueur sera la même que celle du prisme. Il faut mener la ligne *AD* pour former le triangle rectangle *ABD*. Et sur le côté *BD* on formera encore [3] le triangle rectangle *DBE* = *ABD*. Ensuite sur l'hypotenuse *AD*, il faut [2] construire un triangle Isoscele, & faire le côté *AF* = *AB*. Il faut encore [4] construire une seconde figure *GLMK* équilaterale à la precedente; observant seulement de faire le triangle isoscele *ILM* sur l'hypotenuse *IL* vers la main droite. Ensuite sur la ligne *OP* = *BD* il faut décrire deux triangles rectangles égaux chacun au triangle *ABD*, pour former le parallelogramme *NQ*, sur une des hypotenuses *NP* ou *OQ*, il faut former le triangle isoscele *NPR*, faisant le

[1] *Part. 3. Cor. 4. Prop. 35. Geo.*
[2] *Cor. 7. Prop. 27. Geo.*
[3] *Cor. 4. Prop. 35. Geo.*
[4] *Part. 4. Cor. 4. Prop. 35. Geo.*

troisiéme côté *RP* = *PQ*, & sur le côté *RN* on fera encore un autre triangle isoscele *SN* = *NO*. Il faut se servir de ciseaux pour couper le carton sur lequel on a décrit ces trois figures, & le couper en suivant les lignes *DFACBED*, &c. & avec un couteau on le coupera à moitié, suivant toutes les lignes transversales *PO*, *PN*, *NR*, *AD*, *HL*, &c. Enfin il faut plier la premiere figure de sorte que les points *F* & *E* se rencontrent sur le point *C*, & que les points *G* & *M* se trouvent sur le point *K*. Il faut appliquer le point *S* sur le point *O*, & le point *Q* sur le point *R*. Alors on aura trois pyramides, dont on en appliquera une, de maniere que son triangle isoscele se trouve sur l'isoscele *RSN*, & que l'isoscele de l'autre se trouve appliqué contre l'isoscele *NRP*; ce qui formera un veritable prisme triangulaire, tel qu'on l'a representé dans la démonstration de la prop. pres. Car les bases qui seront opposées *ABC* & *HIK* seront [1] égales & semblables, & les trois autres surfaces qui le termineront seront [2] des parallelogrammes.

On peut encore [3] faire les trois parallelogrammes rectangles *RS*, *NY*, & *TX*, dont les trois bases *RN*, *NT*, *TV* soient égales entr'elles & chacune un peu plus grande que le côté *AB* d'une des figures precedentes, & la hauteur *RZ* soit égale à *BD*. Aprés



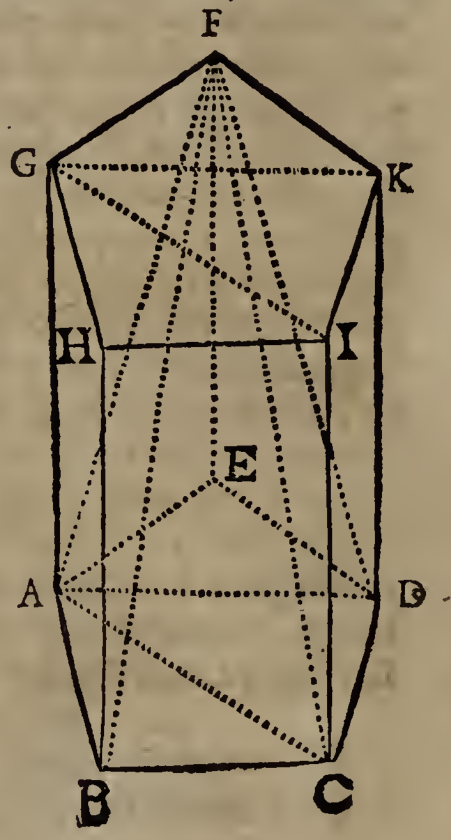
[1] *Par construction.*
[2] *Part. 2. Prop. 37. Geo.*
[3] *Cor. 7. Prop. 27. & Cor. 3. Prop. 37. Geo.*

cela il faut couper le carton, ſuivant le circuit du parallelogramme total *R X*, & enſuite le couper à moitié ſuivant les deux lignes *N S* & *T Y*; & enfin appliquer la ligne *R Z* ſur la ligne *V X* pour former les contours d'un priſme dans lequel ſeront ajuſtées les trois pyramides qu'on vient de conſtruire.

COROLLAIRE I.

Non ſeulement la pyramide triangulaire, mais auſſi toute autre pyramide eſt la troiſiéme partie du priſme qui a même baſe & même hauteur que cette pyramide. Tout priſme, c'eſt à dire triangulaire ou autre, eſt donc triple d'une pyramide qui a même baſe & même hauteur que ce priſme.

Soit le priſme *A B C D E F G H I K*, & la pyramide pentagone *A B C D E F*, de même baſe & de même hauteur que ce priſme : Je dis que la pyramide *ABCDEF* eſt la troiſiéme partie du priſme *A B-C D E F G H I K*. Pour le démontrer, du ſommet, par exemple *A*, d'un des angles de la baſe *A B C D E*, qui eſt l'extremité de la ligne *G A*, ſoient menées les lignes *A D* & *A C* aux ſommets de autres angles pour diviſer cette baſe en trian-



gles; & de l'autre extremité *G* de la même ligne *A* G soient encore menées les lignes *GK* & *GI* aux sommets des autres angles.

Le prisme *ABCDEFGHIK* sera divisé par les plans *GC* & *GD* en trois prismes triangulaires *ABCGHI*, *ACDGIK*, & *ADEGKF*. Pareillement la pyramide *ABCDEF* sera divisée en trois pyramides *ABCF*, *ACDF*, & *ADEF*. Mais chaque pyramide *ABCF*, *ACDF*, &c. qui fait partie de la pyramide totale *A*B*CDEF*, est [1] la troisiéme partie de chaque prisme triangulaire *A*B*CGHI*, *ACDGIK*, &c. qui fait partie du prisme total *A*B*CDEFGHIK*. Puisque toutes ces pyramides qui sont parties de la pyramide *ABCDEF*, & tous ces prismes qui sont parties du prisme *A*B*CDEFGHIK*, sont entre les mêmes plans paralleles *A*B*CDE* & *GHIKF*; les pyramides *A*B*CF*, *ACDF*, & *ADEF*, prises ensemble, c'est à dire la pyramide entiere *A*B*CDEF* est donc la troisiéme partie des prismes *A*B*CGHI*, *ACDGIK*, & *ADEGKF*, pris ensemble, c'est à dire du prisme entier *A*B*CDEFGHIK*. Enfin le prisme *A*B*CDEFGHIK* est donc triple de la pyramide polygone *A*B*CDEF* de même base & de même hauteur.

COROLLAIRE II.

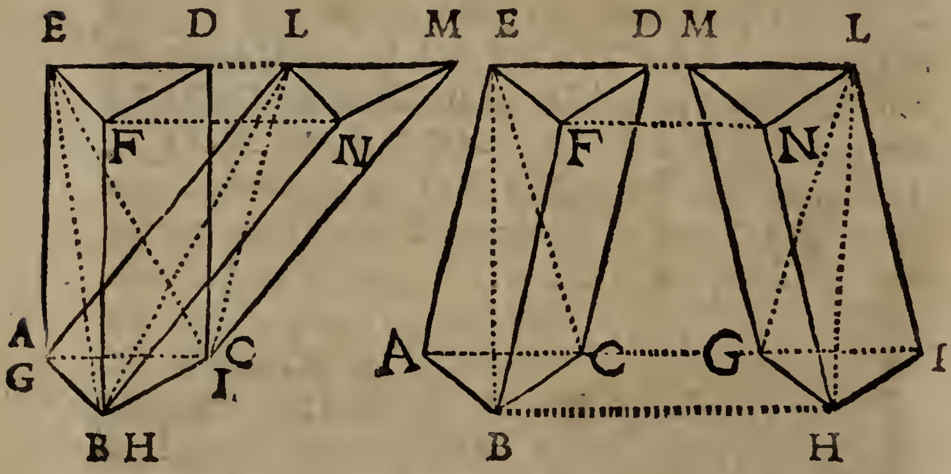
Puisque [2] les cones peuvent estre considerez comme des pyramides d'une infinité de côtez, & que [3] les cylindres peuvent estre regardez

[1] *Prop. pres.*
[2] *Def. 67. Geo.* [3] *Def. 76. Geo.*

comme des prismes aussi d'une infinité de côtez; il suit de la prop. pres. qu'un cone est la troisiéme partie d'un cylindre qui a même base & même hauteur; ou que les cylindres sont triples des cones de même base & de même hauteur.

COROLLAIRE III.

Les prismes triangulaires de même base & de même hauteur, ou qui sont sur des bases équilaterales, & entre les mêmes plans paralleles,

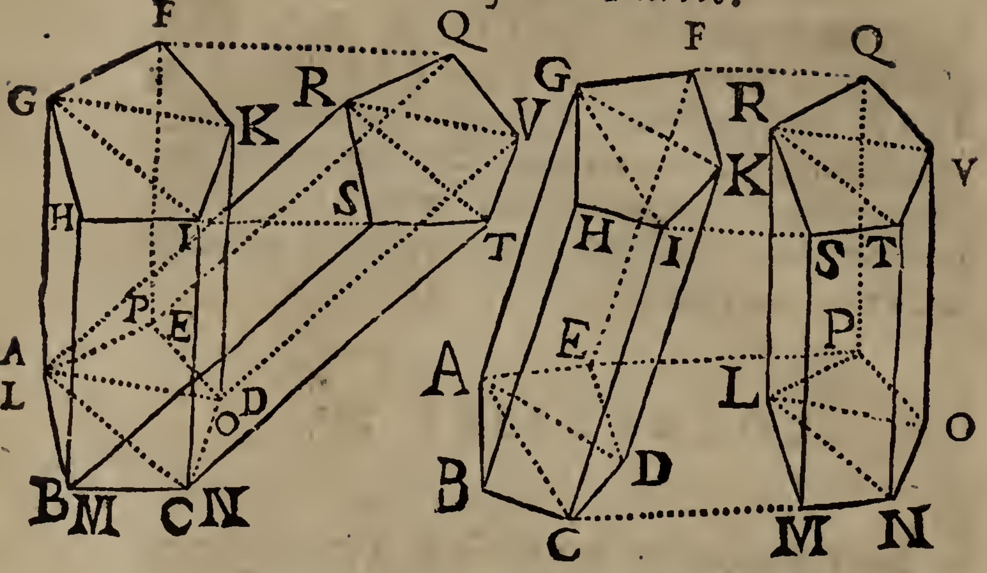


sont égaux entr'eux. Soient les prismes *ABC-DEF* & *GHILMN* sur la même base *ABC*, ou sur les bases égales *ABC* & *GHI*, & entre les mêmes plans paralleles *ABHI* & *EFNL*: Je dis que ces deux prismes sont égaux entr'eux. Car du point *E*, par exemple, aux points *B* & *C* aprés avoir mené les lignes *EB* & *EC*; & du point *L* aux points *G* & *H* aprés avoir mené les lignes *L G* & *L H* ; il eſt [1] évident que les pyramides *A B C E* & *GHIL* ſont égales entr'elles. Or trois fois cette pyramide *A B C E*, & trois fois la pyramide *G H I L* ſont [2] choſes égales ; c'eſt à dire, [3] le priſme entier triangulaire *A B C D E F* eſt égal au priſme entier auſſi triangulaire *G H I L M N*.

COROLLAIRE IV.

Non ſeulement les priſmes triangulaires, mais auſſi tous les priſmes polygones qui ſeront poſez ſur la même baſe, ou ſur des baſes équilaterales & équiangles l'une à l'autre, & qui ſeront de même hauteur, ou entre les mêmes plans paralleles, ſont égaux entr'eux. Soient les priſmes *ABCDEFGHIK* & *LMNOPQRSTV*, ſur la même baſe *A B C D E*, ou ſur les baſes *ABCDE* & *L M N O P* équilaterales & équiangles l'une à l'autre, & poſez entre les mêmes plans paralleles *ABCMNOPE* & *GHISTVQF*: Je dis que ces deux priſmes ſont égaux entr'eux. Pour le démontrer, des ſommets *G* & *A*, *R* & *L* d'angles égaux de ces baſes, ſoient menées des lignes droites aux ſommets des autres angles, pour diviſer ces baſes en triangles. Alors les triangles d'une de ces baſes ſeront égaux aux triangles de l'autre, chacun à chacun.

[1] *Prop. 80. Geo.*
[2] *Ax. 4. ou Ax. 6. gen.*
[3] *Prop. Pref.*



Car, puiſque [1] l'angle $AED = LPO$, & [1] que $EA = PL$, & $ED = PO$; on [2] aura $AD = LO$. Ainſi [3] le triangle $AED = LOP$. L'angle $EDC = PON$ [1] ; & [4] l'angle $EDA = POL$. Donc [5] l'angle $ADC = LON$. On vient de voir que le côté $AD = LO$; & [1] le côté $DC = ON$. Donc [2] le côté $AC = LN$. Donc le triangle $ACD = LNO$. Par le même raiſonnement on trouvera que le triangle $ABC = LMN$.

Le priſme triangulaire $ADEFGK$ eſt [6] égal au priſme $LOPQRV$, & le priſme $ACDKGI = LNOVRT$, & le priſme $ABCIGH = LMNTRS$, c'eſt à dire [7] que le priſme total $ABCDEFGHIK$ eſt égal au priſme entier $LMNOPQRSTV$.

[1] *Suppoſit.*
[2] *Part.* 1. *Prop.* 35. *Geo.*
[3] *Ax.* 1. *Geo.*
[4] *Cor.* 2. *Prop.* 35. *Geo.*
[5] *Ax.* 9. *Gen.*
[6] *Cor.* 3. *Prop. Preſ.*
[7] *Ax.* 3. *Gen.*

COROLLAIRE V.

Il ſuit du Corollaire 4. de la prop. preſ. que les cylindres qui ont même baſe & même hauteur ſont égaux entr'eux.

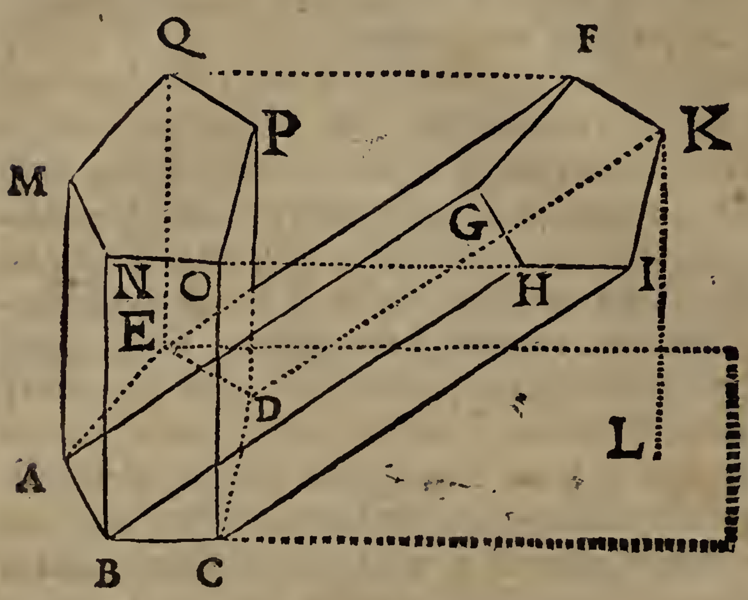
Outre cela il ſuit encore que les cylindres qui ſont ſur des baſes égales & entre les mêmes plans paralleles ou de même hauteur, ſont auſſi égaux entr'eux. Car les cylindres ſont [1] conſiderez comme des priſmes équiangles [2] & d'une infinité de côtez. Or les baſes de ces cylindres de même hauteur, étant égales, ſeront auſſi équilaterales. Parceque ces baſes qui ſeront [3] des cercles égaux, auront des circonferences égales. Et il y aura autant de côtez dans une de ces circonferences que dans l'autre, puiſque de part & d'autre il y en a une infinité. Enfin chaque côté d'une de ces baſes ſera égal à chaque côté de l'autre; puiſque [4] chaque infinitiéme partie de la circonference d'une de ces baſes égales, eſt égale à chaque infinitiéme partie de la circonference de l'autre baſe. Non ſeulement les cylindres de même baſe & de même hauteur; mais auſſi ceux qui auront des baſes égales, & qui ſeront auſſi de même hauteur, ſeront donc égaux entr'eux.

COROLLAIRE VI.

Un priſme oblique eſt égal au produit de ſa baſe multipliée par ſa hauteur. Soit, par exemple, le priſme oblique *ABCDEFGHIK*: Je dis que ſi on multiplie la baſe *ABCDE* par la hauteur *KL*, ou *AM*, qui eſt une ligne

[1] *Def. 76. Geo.*
[2] *Cor. Prop. 47. & Def. 60. Geo.*
[3] *Suppoſit.*
[4] *Ax. 12. Geo.*

menée perpendiculairement d'un point d'une des bases, par exemple *ABCDE*, à l'autre base



parallele, & semblable *GHIKF* prolongée; le produit de cette multiplication exprimera la grandeur de la masse, du volume, ou de la solidité de ce prisme. Car ce produit est [1] le prisme rectangle *ABCDEQMNOP*, qui est [2] égal au prisme oblique proposé *ABCDEFGHIK*. Pour connoître combien de pieds cubiques, de toises cubiques, &c. contient un prisme oblique, il suffit donc de multiplier sa base par sa hauteur.

COROLLAIRE VII.

Un cylindre oblique est égal au produit de sa base multipliée par sa hauteur. Car lorsqu'on multiplie la base de ce cylindre oblique par sa hauteur, on a pour produit un cylindre rectangle égal au cylindre oblique dont il s'agit.

[1] *Cor. 2. Def. 75. Geo.*
[2] *Cor. 4. Prop. Pres.*

COROLLAIRE

COROLLAIRE VIII.

Une pyramide eſt donc égale au tiers du produit de ſa baſe multipliée par ſa hauteur. Car ſi on multiplie la baſe d'une pyramide droite, ou oblique, par la hauteur de cette pyramide, le produit eſt un priſme de même hauteur, dont cette pyramide eſt [1] la troiſiéme partie. Si on multiplie la baſe d'une pyramide par la troiſiéme partie de ſa hauteur, ou ſa hauteur par la troiſiéme partie de ſa baſe; le produit exprimera auſſi la ſolidité de cette pyramide. Parceque la moitié du produit de deux grandeurs multipliées l'une par l'autre, eſt égal au produit d'une de ces grandeurs multipliée par la moitié de l'autre.

COROLLAIRE IX.

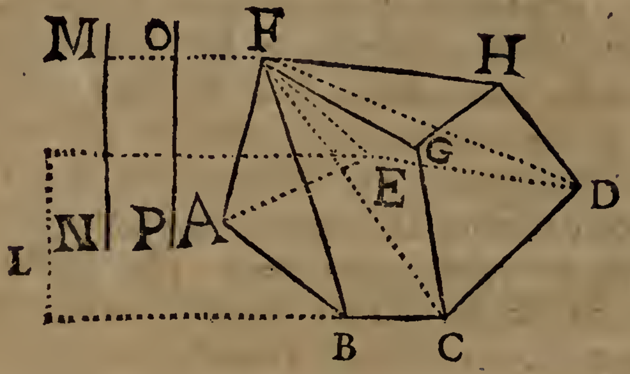
Un cone eſt égal au tiers du produit de ſa baſe multipliée par ſa hauteur; ou au produit de ſa baſe multipliée par la troiſiéme partie de ſa hauteur; ou enfin au produit de ſa hauteur multipliée par le tiers de ſa baſe. Car lorſqu'on multiplie la baſe d'un cône par ſa hauteur, le produit eſt un cylindre dont ce cône eſt [2] la troiſiéme partie.

COROLLAIRE X.

Pour connoître la ſolidité des autres corps terminez par des ſurfaces planes, il faut les

[1] *Prop. preſ. ou Cor.* 1. *Prop. preſ.*
[2] *Cor.* 2. *Prop. preſ.*

considerer comme divisez en pyramides ; de même que les surfaces planes irregulieres ont été [1] considerées comme divisées en triangles. Ensuite il faut [2] chercher la solidité de chaque pyramide, & la somme des soliditez de ces pyramides sera la masse ou solidité du corps proposé.



Soit le corps *A B C D F G H* que je suppose estre une grosse piece de marbre terminée par sept surfaces, sçavoir *A B C D E*, *F G H*, *A B F*, *B C G F*, *C D H G*, *E D H F*, & *A E F*; si on mene les lignes *F C* & *F D*, ce corps sera divisé en ces deux pyramides *A B C-D E F* & *G C D H F*. Si on peut mener [3] du point *F* une ligne perpendiculaire à la base *A B C D E* prolongée, cette perpendiculaire sera la hauteur de la pyramide *A B C D E F*. Si on ne peut mener cette perpendiculaire du point *F*, aprés avoir prolongé cette base *ABCDE* vers L, par exemple ; il faut lui ajuster perpendiculairement deux bâtons *M N* & *O P*, de maniere que ces deux bâtons & le point *F* se trouvent dans le même plan, ce qui se fera

[1] *Cor. 2. Prop. 40. Geo. page 398.*
[2] *Cor. 8. Prop. pres.*
[3] *Cor. 2. Prop. 69.*

[1] en regardant le bâton *M N* & le point *F*, & en posant le bâton *O P* de sorte que le bâton *M N* le couvre à la vûe. Ensuite en borneiant, il faut chercher le point *M* jusqu'à ce qu'en regardant par le point *M* & par le point *F*, on rencontre le point *O* de sorte que la longueur *O P* soit égale à *M N*. Alors *M N* sera égale à la hauteur de la pyramide *A B C D E F*. Parceque la ligne *M F* ayant [2] ses deux points *M* & *O* également [3] distans du plan *LBCDEL*, elle sera [4] parallele au plan *LBCDEL*. On pourra de même trouver la hauteur de la pyramide *G C D H F*, en prolongeant la base *G C D H* par le moyen de quelque planche ou ais aplani qu'on apliquera à cette base. Enfin la solidité de ces deux pyramides fera [5] connoître la solidité totale du corps proposé.

REMARQUE.

Il y a des corps irreguliers, par exemple une Statue, un Vaisseau dont la surface est en partie plane & en partie courbe, selon l'ornement qui s'y rencontre, &c. Alors on ne peut pas facilement diviser ces corps en des pyramides, ou en d'autres corps reguliers, pour en connoître la solidité. Mais on pourra se servir de cette methode qui est assez exacte, quoiqu'elle ne soit pas entierement geometrique.

Il faut construire une caisse ou coffre de bois, dont la figure soit un parallelepipede rectangle,

[1] *Part.* 1. *Cor.* 5. *Prop.* 34. *Geo.*
[2] *Par construction.*
[3] *Cor. Prop.* 70. *Geo.*
[4] *Cor. Prop.* 8. & *Def.* 8. *Geo.*
[5] *Ax.* 3. *Gen.*

& d'une grandeur ſuffiſante pour que le corps dont on veut connoître la ſolidité puiſſe y être contenu & y être couvert d'eau. Il faut exactement enduire le dedans de cette caiſſe avec de la poix, afin que l'eau qu'on y mettra y ſoit retenue ſans qu'elle s'écoule aucunement.

Ayant poſé le fond de cette caiſſe parallelement à l'horizon, par le moyen d'un niveau; il faut mettre dans cette caiſſe le corps irregulier, & y verſer enſuite de l'eau pour la remplir, de ſorte que le corps irregulier ſoit couvert entierement de cette eau. Aprés cela il faut marquer ſur les côtez de la caiſſe, l'endroit où ſe termine la ſurface ſuperieure de l'eau dans laquelle eſt plongé le corps irregulier.

Enfin il faut retirer ce corps hors de l'eau, & aprés qu'elle ſera tranquille, il faudra encore marquer ſur les côtez de la caiſſe l'endroit où ſe termine la ſurface ſuperieure de l'eau, & meſurer [1] la ſolidité des deux parallelepipedes, dont la baſe commune eſt le fond de cette caiſſe, & les hauteurs particulieres de chacun ſont les lignes droites menées depuis chacune de ces deux marques perpendiculairement à cette baſe commune. Enſuite il faut ſouſtraire le plus petit parallelepipede du plus grand, ce qu'on trouvera pour reſte exprimera la ſolidité du corps irregulier propoſé.

[1] *Cor.* 2. *Def.* 75. *Geo.*

PROPOSITION LXXXII.

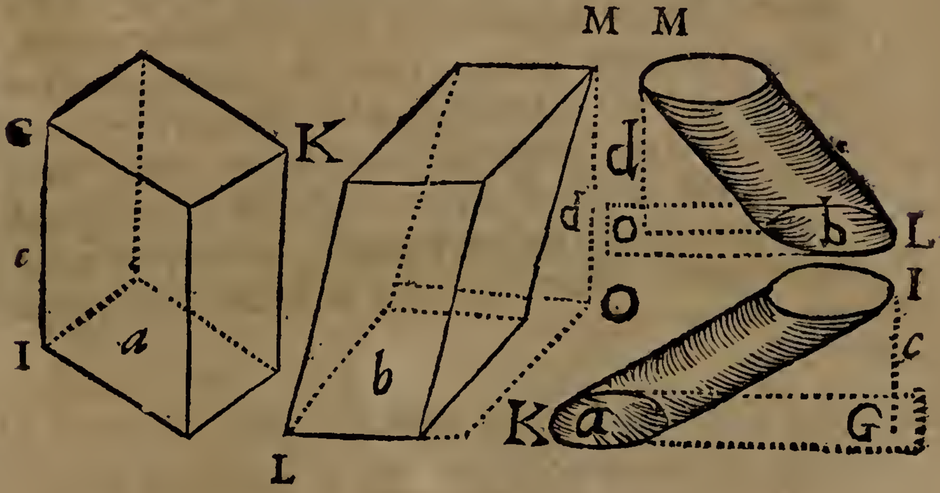
1°. *Les priſmes & les cylindres dont les hauteurs ſont égales, ſont entr'eux comme leurs baſes ; & ſi les baſes ſont égales, ils ſont entr'eux comme leurs hauteurs.*

2°. *Les pyramides & les cones dont les hauteurs ſont égales, ſont auſſi entr'eux comme leurs baſes ; & ſi leurs baſes ſont égales, ils ſont entr'eux comme leurs hauteurs.*

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soient les priſmes, ou les cylindres, *I K* & *L M* dont les hauteurs *I G* & *M O* ſont éga-



les : Je dis qu'ils ſont entr'eux comme leurs baſes. Pour le démontrer, ſoit nommée *a* la baſe du priſme *I K*, & ſa hauteur *G I* ſoit nommée *c*. Soit enſuite nommée *b* la baſe du priſme *L M*, & *d* ſa hauteur *M O*.

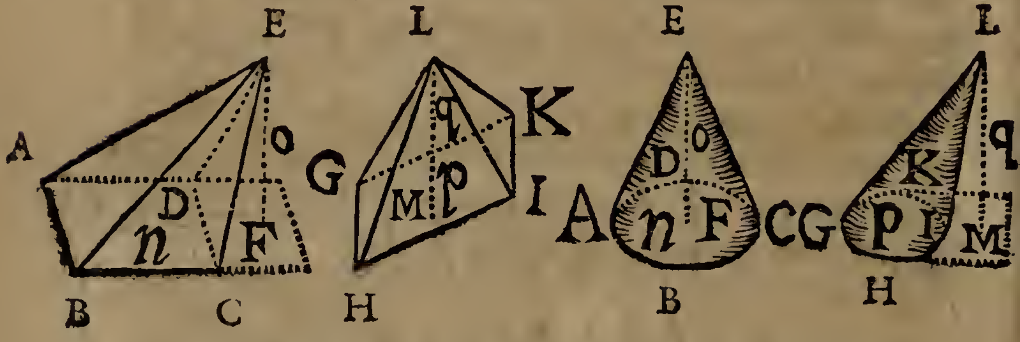
[1] Le priſme ou le cylindre $IK = ac$, & le priſme $LM = bd$. Donc [2] $IK . ac :: LM . bd$. & [3] $IK . LM :: ac . bd$. Mais puiſque [4] la hauteur $c = d$; on [5] aura $ac . bd :: a . b$. on aura donc cette ſuite de rapports égaux $IK . LM :: ac . bd :: a . b$. Donc [6] $IK . LM :: a . b$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Si les baſes a & b êtoient égales, puiſque $IK . LM :: ac . bd$, en diviſant les deux derniers termes de cette analogie par a & b; on trouveroit que $ac . bd :: c . d$. Donc $IK . LM :: ac . bd :: c . d$. Donc IK ſeroit à LM comme la hauteur c à la hauteur d.

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

SOient les pyramides ou les cones $ABCDE$ & $GHIKL$ dont les hauteurs EF & LM



ſoient égales : Je dis que ces pyramides ſont entr'elles comme leurs baſes. Pour le démontrer,

[1] *Cor. 2. Def. 75. Cor. 6. & 7. Prop. 81. Geo.*
[2] *Cor. 1. Def. 12. & Def. 13. Algeb.*
[3] *Part. 2. Cor. Prop. 3. Algeb.*
[4] *Suppoſit.*
[5] *Prop. 6. Algeb.*
[6] *Cor. 3. Def. 12. Algeb.*

j'appellerai n la baſe AC de la pyramide $ABCDE$, & j'appellerai o ſa hauteur EF; je nommerai p la baſe de la pyramide $GHIKL$ & q ſa hauteur LM.

[1] La pyramide ou le cone $ABCDE = \frac{no}{3}$, & la pyramide ou le cone $GHIKL = \frac{pq}{3}$.

Donc [2] $ABCDE . \frac{no}{3} :: GHIKL . \frac{pq}{3}$.

& [3] $ABCDE . GHIKL :: \frac{no}{3} . \frac{pq}{3}$.

Or [4] $\frac{no}{3} . \frac{pq}{3} :: no . pq$. & [5] en diviſant no & pq par les hauteurs [6] égales o & q, on aura $no . pq :: n . p$. On trouvera donc cette ſuite de rapports égaux $ABCDE . GHIKL :: \frac{no}{3} . \frac{pq}{3} :: no . pq :: n . p$. Donc les pyramides $ABCDE$ & $GHIKL$ ſont entr'elles comme leurs baſes n & p, *ce qu'il falloit démontrer.*

Si les baſes n & p étoient égales, il ſeroit facile de démontrer que ces pyramides ſeroient entr'elles comme leurs hauteurs, en diviſant no & pq par ces baſes égales n & p.

COROLLAIRE I.

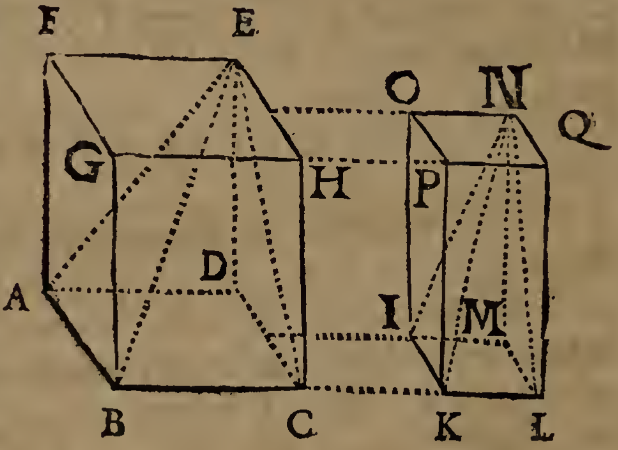
Les priſmes ou les pyramides de même hau-

[1] *Cor.* 8. & 9. *Prop.* 81. *Geo.*
[2] *Def.* 13. *Algeb.*
[3] *Part.* 2. *Cor. Prop.* 3. *Algeb.*
[4] *Prop.* 5. *Algeb.*
[5] *Prop.* 6. *Algeb.*
[6] *Suppoſit.*

teur & de même base, ou dont les bases sont égales, quand même ces bases ne seroient ni équilaterales, ni équiangles, sont [1] égaux, ou égales entr'elles.

COROLLAIRE II.

Si deux prismes de même hauteur, par exemple *ACFH* & *ILOQ*, ont des bases semblables *ABCD* & *IKLM*, de sorte que chaque côté de cette base *ABCD* soit double de chaque côté de la base *IKLM*, le prisme *ACFH* sera égal à quatre fois le prisme *ILOQ*. Car alors la base *AC* sera [2] quadruple de la base *IL*. Le prisme *ACFH* sera [3] donc quadruple du prisme *ILOQ*.

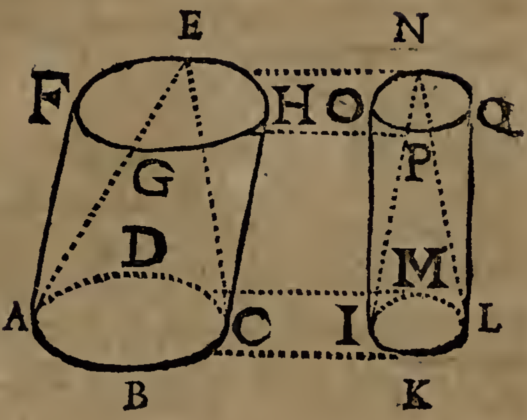


De même, si le diametre de la base *AC* du cylindre *ACFH* est double du diametre de la base *IL* du cylindre *ILOQ* de même hauteur; le quarré de ce diametre de la base *AC* sera [2] quadruple du quarré du diametre de la base *IL*. Et puisque les cercles sont [4] entr'eux comme les quarrez de leurs diametres, le cercle *AC* sera

[1] *Prop. Pres.*
[2] *Cor. 2. Prop. 62. Geo.*
[3] *Part. 1. Prop. Pres.*
[4] *Cor. 2. Prop. 63. Geo.*

auſſi quadruple du cercle *I L*. Enfin [1] le cylindre *A C F H* ſera donc quadruple du cylindre *I L O Q*.

On peut [2] dire la même choſe des pyramides, ou des cones, *ABCDE* & *I K L M N* de même hauteur.



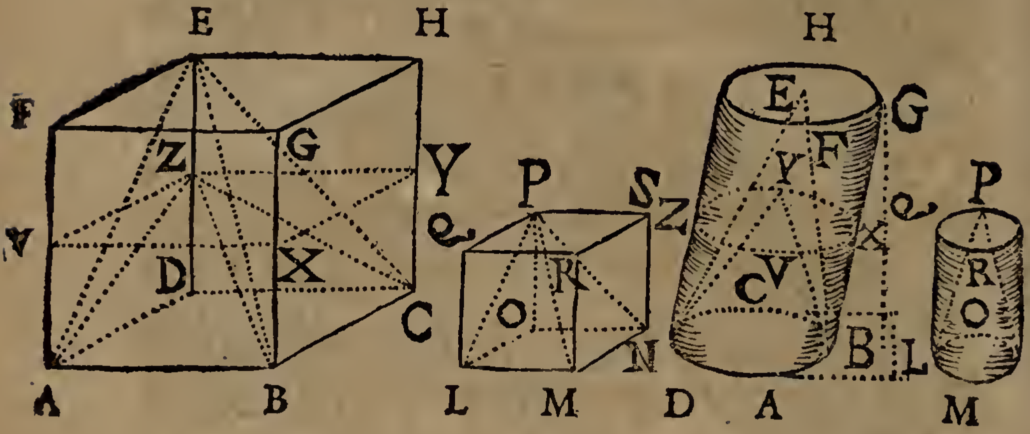
COROLLAIRE III.

Si deux priſmes, ou pyramides, ont des baſes ſemblables, & ſi chaque côté de la baſe du premier de ces corps, eſt double de chaque côté de la baſe du ſecond, & ſi la hauteur du premier eſt double de celle du ſecond de même genre; le premier vaudra huit fois autant que le ſecond. Soit le priſme *A C F H* dont la baſe *A C* eſt ſemblable à la baſe *L N* du priſme *L N Q S*, & chaque côté de cette baſe *A C* ſoit double de chaque côté de la baſe *L N*; ſoit le diametre de la baſe *A C* du cylindre *A C F H* double du diametre de la baſe *L N* du cylindre *L N Q S*. Enfin la hauteur *G B* de ce premier priſme ou cylindre ſoit double de la hauteur *N S* du ſecond: ce premier priſme ſera octuple du ſecond.

Car dans le priſme, ou cylindre *A H* ſi nous conſiderons un autre priſme ou cylindre *A C V Y* de même hauteur que le priſme ou cylindre

[1] *Part.* 1. *Prop. Preſ.*
[2] *Part.* 2. *Prop. Preſ.*

L N Q S, ce prisme *A C V Y* sera [1] quadruple du prisme *L N Q S*. Mais le prisme entier



A H dont la hauteur est [2] double de celle du prisme *L S*, ou du prisme *A Y*, sera [3] double du prisme *A Y*; puisqu'ils sont entr'eux comme leurs hauteurs, étant l'un & l'autre sur la même base *A C*. Le prisme *A H* sera donc double du quadruple du prisme *L S*. Or ce double du quadruple est octuple; parceque le prisme *V H* sera aussi quadruple du prisme *L S*. Le prisme ou le cylindre *A H* sera donc octuple du prisme ou du cylindre *L S*.

La même chose est évidente par le même raisonnement à l'égard des pyramides *A B C D E* & *L M N O P*, ou des cones *A B C D E* & *LMNOP*.

On trouvera aussi par un raisonnement semblable que, si deux de ces corps de même genre ont leurs bases semblables, & si chaque côté d'une de ces bases est triple de chaque côté de la base de l'autre, la hauteur de l'un étant double de la hauteur de l'autre; un de ces corps sera dix-

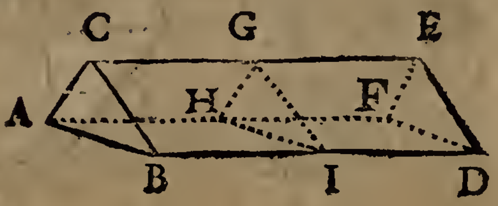
[1] *Cor. 2. Prop. Pres.*
[2] *Supposit*
[3] *Part. 1. Prop. Pres.*

huit fois aussi grand que l'autre. Enfin, si la hauteur de l'un est triple de la hauteur de l'autre, l'un sera vingt-sept fois aussi grand que l'autre, &c.

REMARQUE.

Si on divise un corps en plusieurs parties ; la somme des surfaces de toutes ces parties sera plus grande que la surface de ce même corps avant qu'il fût divisé.

Soit le corps *ABCDEF* ; il est évident que si on le coupe suivant le plan *GHI*, les parties *ABCIGH* & *IGHFDE* seront terminées par les mêmes surfaces qui terminoient le corps entier, & seront encore en outre terminées par deux nouvelles surfaces *IGH* & *IGH*.

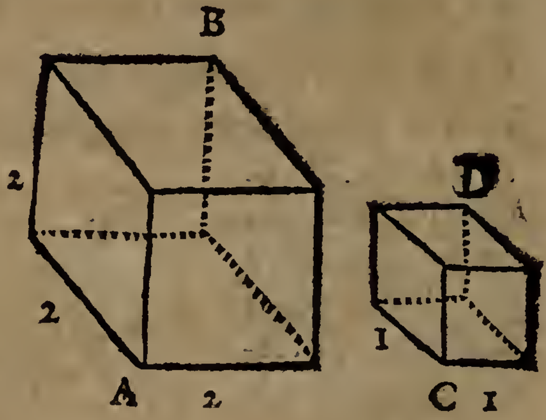


Si on continue à diviser à volonté ces parties; on trouvera encore que, y ayant de nouvelles parties plus petites, la somme de leurs surfaces deviendra encore plus grande que la surface qui appartenoit au tout avant la division. Enfin la multitude des coupes multiplie les surfaces sans augmenter la masse totale, qui est toujours la même.

Il est donc évident que le rapport de la masse d'un grand corps à celle d'un petit de figure semblable, est plus grand que celui de la surface de ce grand corps à celle du petit. Car ce grand corps contient plus de fois le petit, que la surface de ce grand corps ne contient celle du petit.

Soit le corps *A* qui contienne le corps *B*, par exemple six fois. Le corps *A* sera donc égal à 6 *B*. Mais la surface du corps *A* ne contiendra pas six fois la surface du corps *B*; puisque, comme on vient de voir, six fois la surface du corps *B*, ou de 6 *B*, est plus grande que la surface du corps *A*.

Soit le cube *AB* dont chacune des trois dimensions est de deux pieds; & le cube *CD* dont chacune des trois dimensions est d'un pied. Le premier cube [1] contient huit fois le second: & la surface de ce premier contient seulement quatre fois celle du second; c'est à dire que le corps *AB* . *CD* : : 8. 1. & la surface de *AB* est à la surface de *CD*, comme 24 à 6. ce qui fait voir que les petits corps ont plus de surface par rapport à leurs masses, que les grands, dont la figure est semblable à celle des petits.



On pourroit encore dire que plus la figure des corps approche de la cubique, ou de la spherique, moins ils ont de surface par rapport à leur masse.

Enfin, comme les quarrez ou les cercles ont plus de surface par raport à leur circuit, que toute autre figure plane; de même les cubes, ou les Spheres, sont les corps qui ont le plus de masse par raport à leurs surfaces. La brieveté que je me suis proposée dans ces élémens m'empêche de le démontrer plus amplement.

[1] *Cor. 3. Prop. Pres.*

PRO-

PROPOSITION LXXXIII.

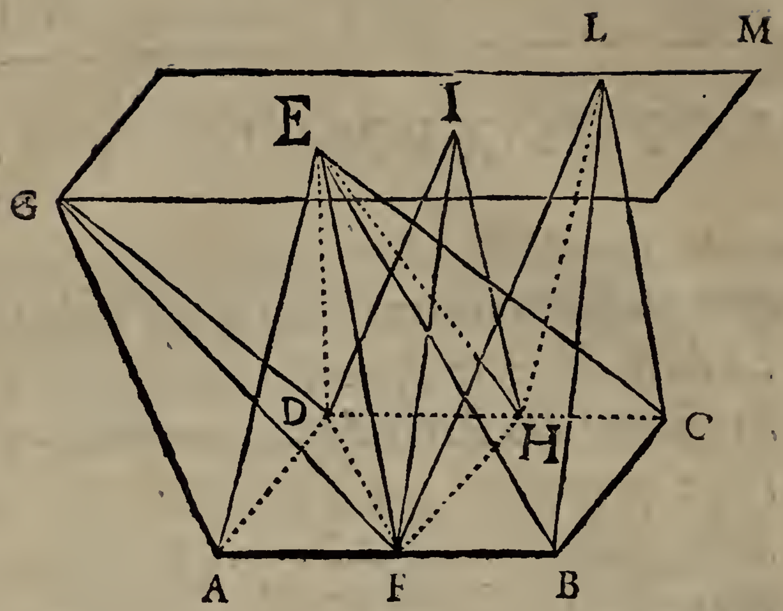
Si une pyramide est de même hauteur que plusieurs autres pyramides; & si la base de cette pyramide est égale à la somme des bases de ces pyramides, cette premiere pyramide sera égale à ces autres pyramides prises ensemble.

DEMONSTRATION.

Soit la pyramide *ABCDE* de même hauteur que les pyramides *AFDG*, *DFHI*, *FBCHL*; & soit la base *ABCD* de la pyramide *ABCDE* égale à la somme des bases *AFD*, *DFH*, & *HFBC* de ces autres pyramides: je dis que la pyramide *ABCDE* sera égale à la somme des pyramides *AFDG*, *DFHI*, & *FBCHL*. Pour le démontrer, soient menées les lignes *EF* & *EH*.

La pyramide *ABCDE* est [1] égale aux pyramides *AFDE*, *FHDE*, & *FBCHE*, prises ensemble. Or [2] la pyramide *AFDE* est égale à

[1] *Ax. 3. Gen.*
[2] *Prop. 80. Geo.*



AFDG ; la pyramide *FHDE* = *FHDI* ; & la pyramide *FBCHE* eſt égale à la pyramide *FBCHL*. Au lieu des pyramides *AFDE* + *FHDE* + *FBCHE*, ſi [1] on prend ce qui leur eſt égal ſçavoir *AFDG* + *FHDI* + *FBCHL* ; on trouvera donc que la pyramide *ABCDE* ſera égale à la ſomme des pyramides *AFDG*, *FHDI*, *FBCHL*, dont les baſes priſes enſemble ſont égales à la baſe *ABCD*, & dont les hauteurs ſont égales à celle de la pyramide *ABCDE* ; ces pyramides étant entre les mêmes plans paralleles *ABCD* & *GM*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

On vient de voir [2] que la pyramide *ABCDE* eſt égale à la ſomme des pyramides *AFDG*, *FHDI*, *FBCHL*, qui ſont [3] de même hauteur que cette pyramide *ABCDE*. Or la pyramide

[1] *Demande* 1. *gen.*
[2] *Prop. Pref.*
[3] *Suppoſit.*

ABCDE eſt [1] égale au produit de ſa baſe *ABCD* multipliée par le tiers de la hauteur, & cette baſe *ABCDE* eſt [2] la ſomme des baſes de ces pyramides *AFDG*, *FHDE*, & *FBCHL*, Il eſt donc évident [3] que la ſomme des pyramides *AFDG*, *FHDI*, *FBCHL* qui ſont de même hauteur, eſt égale au produit de la ſomme de leurs baſes, multipliée par le tiers de leur hauteur commune.

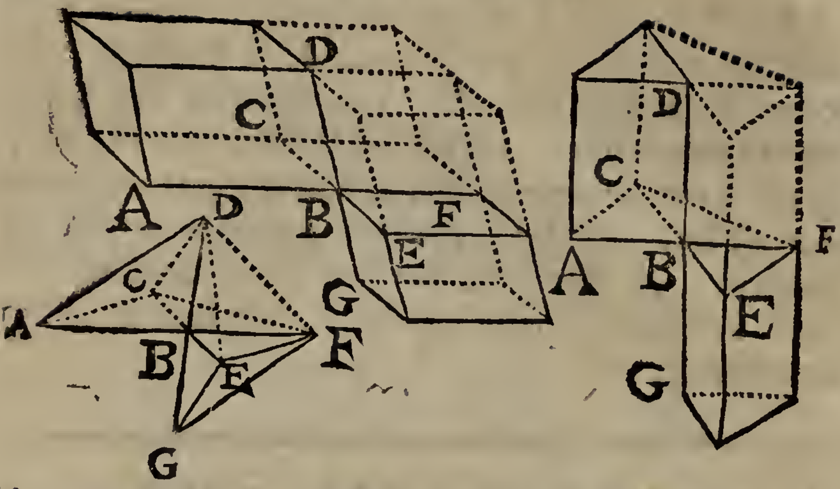
PROPOSITION LXXXIV.

Le rapport qui eſt entre les pyramides triangulaires ſemblables ; entre les priſmes triangulaires ſemblables ; entre les parallelepipedes ſemblables ; eſt triplé de celui qui eſt entre deux des côtez homologues des ſurfaces ſemblables qui les terminent.

DEMONSTRATION.

Soient deux de ces ſolides ſemblables *ABCD* & *BEFG*. Soient *AB* & *BF* ; *CB* & *BE* ; *DB* & *BG*, côtez homologues des ſurfaces ſemblables *ABC*, *BEF* ; *CBD* & *BGE* : c'eſt à dire que *AB* ſoit à *BF* : : *CB* . *BE* : : *DB* . *BG*. Je dis que le rapport du ſolide *ABCD* au ſolide *BEFG*, eſt doublé du rapport de *AB* à *BF*. Pour le démontrer je conſidererai le ſolide *BEFG* appliqué prés le ſolide *ABCD*, de ſorte que les trois lignes *BE*, *BF*, & *BG* qui comprennent les angles plans d'un angle ſolide

[1] *Cor. 8. Prop. 81. Geo.*
[2] *Suppoſition.*
[3] *Dem. 1. gener.*



du corps *BEFG*, & les trois lignes *AB*, *BC*, & *BD*, qui comprennent des angles plans égaux [1] aux precedens dans le solide *ABCD*, soient trois lignes droites *ABF*, *CBE*, & *DBG*. Ce qui est [2] possible, en faisant l'angle $ABE = CBF$, & en faisant l'angle $DBE = CBG$. Ensuite soient prolongées les surfaces de ces deux solides *ABCD* & *BEFG*, pour décrire les deux nouveaux solides *CBFD*, & *BEFD*.

[3] Le solide *ABCD* est au solide *CBFD* :: *ABC* . *CBF* :: *AB* . *BF* . [4].

[3] Le solide *CBFD* est au solide *BEFD* :: *CBF* . *BEF* :: *CB* . *BE* . [4]

Enfin [3] le solide *BEFD*, ou *DBEF*, est au solide *BEFG*, ou *BGEF*, comme la base *DBE* est à la base *BGE* :: *DB* . *BG*.

Puisque les surfaces *ABC*, *BEF*; *CBD* & *BGE* sont [5] semblables, nous avons *AB* . *BF* :: *CB* . *BE* :: *DB* . *BG*. C'est à dire que nous avons ces trois rapports égaux entr'eux.

[1] *Suppos. & Def.* 60. *Geo.*
[2] *Part.* 2. *Prop.* 22. *Geo.*
[3] *Prop.* 82. *Geo.*
[4] *Prop.* 49. *Geo.*
[5] *Supposit.*

$ABCD \,.\, CBFD :: ABC \,.\, CBF :: AB \,.\, BF.$
$CBFD \,.\, BEFD :: CBF \,.\, BEF :: CB \,.\, BE.$
$BEFD \,.\, BEFG :: DBE \,.\, BGE :: DB \,.\, BG.$

$AB \,.\, BF :: CB \,.\, BE :: DB \,.\, BG.$
$ABCD \,.\, CBFD :: CBFD \,.\, BEFD :: BEFD \,.\, BEFG.$

Donc ÷ $ABCD \,.\, CBFD \,.\, BEFD \,.\, BEFG.$

On vient de démontrer que le rapport du ſolide *ABCD* au ſolide *CBFD* eſt égal à celui de *AB* à *BF* ; que le rapport du ſolide *CBFD* au ſolide *BEFD* eſt égal à celui de *CB* à *BE* ; enfin que le rapport du ſolide *BEFD* au ſolide *BEFG* eſt égal à celui de *DB* à *BG*.

On trouvera donc cette progreſſion geometrique ÷ *ABCD* . *CBFD* . *BEFD* . *BEFG*.

Le rapport du ſolide *ABCD* à *BEFG* ſera donc [1] triplé du rapport de *ABCD* à *CBFD*.

Au lieu du rapport de *ABCD* à *CBFD*, prenons [2] le rapport des deux côtez homologues *AB* & *BF* des ſurfaces ſemblables, qui lui eſt égal. Nous trouverons le rapport du ſolide *ABCD* au ſolide ſemblable *BEFG*, triplé de celui des côtez homologues *AB* & *BF* des ſurfaces qui les terminent, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Les pyramides triangulaires ſemblables ; les priſmes triangulaires ſemblables ; & les parallelepipedes ſemblables étant [3] entr'eux. En rapport ou en raiſon triplée des côtez homologues

[1] *Prop.* 19. *Algeb.* & *def.* 18. *d'Algeb.*
[2] *Demande* 1. *Gen.* [3] *Prop. preſ.*

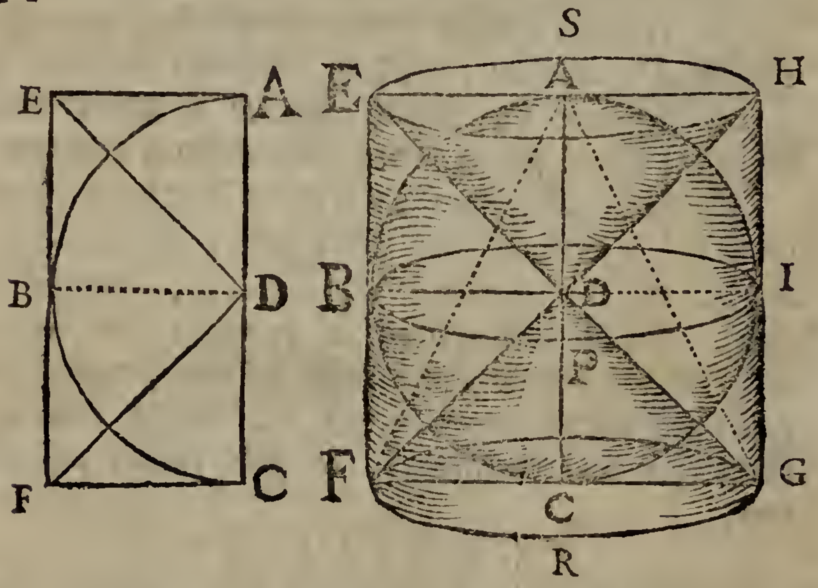
des ſurfaces ſemblables qui terminent ces ſolides : & les cubes de ces côtez homologues étant [1] auſſi entr'eux en raiſon triplée de ces mêmes côtez homologues ; il eſt évident [2] que ces ſolides ſemblables ſont entr'eux comme les cubes des côtez homologues des ſurfaces ſemblables qui les terminent.

PROPOSITION LXXXV.

Une boule, ou Sphere, eſt égale aux deux tiers d'un cylindre qui lui eſt circonſcrit.

DEMONSTRATION.

Le parallelogramme rectangle *FCAE* étant [3] circonſcrit au demi cercle *A B C D* ; le



rayon *DB* étant mené du centre *D* au point d'attouchement B ; enfin les lignes *DE* & *DF* qui ſeront les diagonales des [4] quarrez B A

[1] *Cor.* 1. *prop.* 18. *Algeb.*
[2] *Cor.* 3. *def.* 12. *Algeb.*
[3] *Cor.* 4. *prop.* 12. *Geo.*
[4] *Prop.* 12 ; *prop.* 15 ; *& def.* 50. *Geo.*

& BC, étant menées du même centre *D* aux points *E* & *F* : si on considere que ce parallelogramme *EC* tourne, ou fasse une revolution au tour du diametre *AC* ; il est évident [1] qu'il y aura des corps de trois sortes qui seront décrits par ce mouvement,

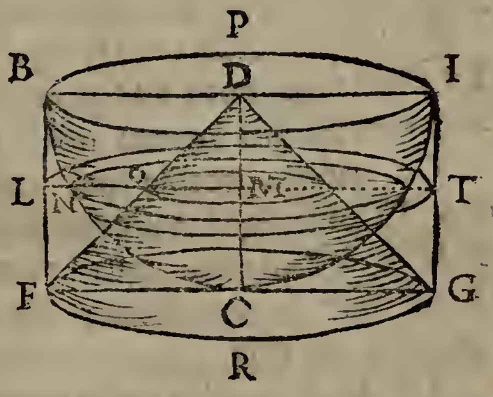
1°. Le cylindre droit *FH*, par le mouvement du parallelogramme rectangle *EC*,

2°. Une Sphere *ABCI*, par le mouvement du demi cercle *ABCD*,

3°. Deux cones droits *ESHD* & *FRGD*, par le mouvement des triangles rectangles *EDA* & *FDC*.

Alors la [2] perpendiculaire *DB* ayant décrit le grand cercle *BPI* de la Sphere parallelement à la base *FRG*, le cylindre *FI* sera [3] la moitié du cylindre *FH*.

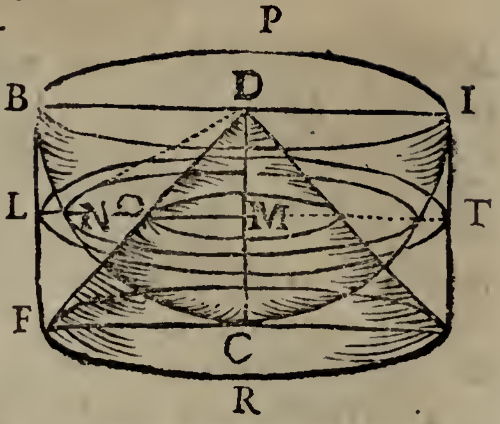
Je démontrerai premierement que l'excés dont le cylindre *FI* circonscrit à l'hemisphere ou demie boule B*CI*, surpasse cette demie sphere B*CI*, est égal au cone *FRGD*.



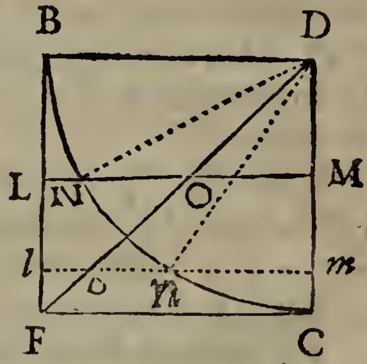
Considerons ces trois corps coupez par des plans dont le nombre est indéfini, & qui soient tous paralleles à la base B*PI*, ou *FRG* ; & faisons ensuite attention à un de ces plans, par exemple *LM* ou *LT*.

Le cercle qui aura pour rayon *ND* sera

[1] *Cor.* 1. *def.* 61. *Geo.*
[2] *Prop.* 12. *Geo.* [3] *Part.* 1. *prop.* 82. *Geo.*



[1] égal aux cercles dont un aura pour rayon *NM*, & l'autre aura pour rayon *MD*. Parceque *LM* étant parallele à la base *FC*, l'angle *NMD* est [2] droit : or puisque [3] *FC* . *CD* :: *OM* . *MD* . & que [4] *FC* = *CD*, on aura donc aussi *OM* = *MD*. Au lieu du cercle qui a pour rayon *MD*, prenons donc son égal, sçavoir celui qui aura pour rayon *OM*. Nous trouverons que le cercle qui aura pour rayon *ND*, sera égal aux deux cercles dont un aura pour rayon *NM* & l'autre aura pour rayon *OM*.



La ligne *ND* est [5] égale à *BD* = *LM* [6]. Le cercle qui aura *LM* pour rayon sera donc égal aux cercles qui auront pour rayons *NM* & *OM*.

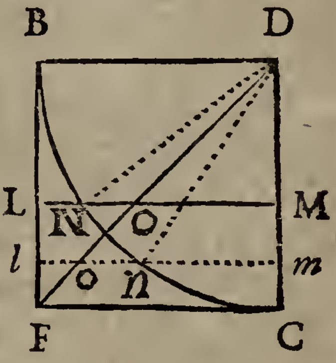
Ce même cercle qui aura *LM* pour rayon era [7] aussi égal au cercle qui aura pour rayon *NM* & à l'anneau qui aura *LN* pour largeur, écrit par la revolution de la ligne droite *LN* au tour de *CD*.

Les deux cercles qui auront pour rayons *NM* & *OM*, seront donc [8] égaux au cercle qui aura

[1] *Cor. 2. prop. 63. & part. 1. prop. 57. Geo.*
[2] *Part. 1. prop. 24. Geo.*
[3] *Part. 1. prop. 52. Geo.*
[4] *Cor. 1. prop. 37. Geo.*
[5] *Cor. 1. def. 29. Geo.*
[6] *Part. 1. prop. 37. Geo.*
[7] *Ax. 3. gen.*
[8] *Ax. 18. gen.*

pour rayon *NM*,& à l'anneau qui aura *LN* pour largeur.

Retranchons de part & d'autre le cercle qui aura pour rayon *NM*, l'anneau qui aura pour largeur *LN* reſtera [1] égal au cercle qui aura pour rayon *OM*. On peut démontrer cette verité de la même maniere à l'égard de chaque anneau & de chaque cercle correſpondant à même hauteur dans le cône *FRGD* pour chaque coupe ou ſection poſſible de ce cylindre, faite parallelement à ſa baſe dans toutes les hauteurs poſſibles.



Or la ſomme de tous ces anneaux décrits dans la révolution de la figure BC au tour de *CD*, par *LN* & par toutes les autres lignes qui compoſent le triangle mixte B*FC*, ſera égale à la ſomme des cercles décrits pendant cette même révolution par le rayon *OM*, & par toutes les autres lignes qui compoſent le triangle rectiligne *FCD*.

Puiſque l'excés dont le cylindre décrit par la révolution du quarré B*FCD* au tour de *CD*, ſurpaſſe l'hemiſphere auſſi décrit par la révolution faite en même temps du quart de cercle B*NCD*, eſt compoſé de la ſomme de tous ces anneaux; & puiſque le cône décrit par la révolution du triangle *FCD* faite auſſi au tour de *CD*, eſt compoſé de la ſomme des cercles décrits par le rayon *OM*, & par toutes les autres lignes qui compoſent ce même triangle rectangle *FCD*: Il ſuit que cet excés dont le cylindre ſurpaſſe l'hemiſphere, ſera égal à ce cône.

[1] *Ax. 9. gen.*

Or ce cône *FRGD* étant de même base & de même hauteur que le cylindre *FI*, il sera [1] la troisiéme partie de ce même cylindre. L'excés dont ce cylindre *F I* surpasse l'hemisphere *DBCIP*, sera donc égal à la troisiéme partie de ce même cylindre *FI*. L'hemisphere restera donc égal aux deux tiers du cylindre *FI* qui lui est circonscrit.

On démontrera de la même maniere que l'excés dont le cylindre *BH* surpasse l'hemisphere *DBAIP* est égal au cône *ESHD* qui est aussi égal au tiers de ce même cylindre *BH*.

Le cylindre entier *FH* surpasse donc la Sphere entiere *ABCI* de la valeur des deux cônes [2] égaux *FRGD* & *ESHD*.

Mais le cône *FRGA* étant [3] double du cône *FRGD* est égal à ces deux cônes égaux *FRGD* & *ESHD*; & ce même cône *FRGA* est [1] le tiers du cylindre entier *FH*.

L'excés dont ce cylindre *FH* surpasse la Sphere *ABCI* qui lui est inscrite, est donc égal au tiers de ce même cylindre. La Sphere *ABCI* reste donc égale aux deux tiers du cylindre *FI* qui lui est circonscrit, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Une Sphere, ou hemisphere, est double du cône qui a même base & même hauteur. Parceque ce cône est [3] le tiers du cylindre circonscrit à la Sphere, ou à l'hemisphere, & cette

[1] *Cor. 2. prop. 81. Geo.*
[2] *Cor. 1. prop. 82.*
[3] *Part. 2. prop. 82.*

Sphere, ou hemiſphere eſt [1] les deux tiers de ce même cylindre.

COROLLAIRE II.

Il eſt donc évident que, puiſqu'un cylindre eſt [2] égal au produit de ſa baſe multipliée par ſa hauteur, la Sphere, ou l'hemiſphere, ſera égale aux deux tiers du produit d'un de ſes grands cercles multiplié par ſon diametre; ou au produit d'un de ſes grands cercles multiplié par les deux tiers du diametre. Car un des grands cercles de cette Sphere, ou la baſe de l'hemiſphere, eſt [3] égal à la baſe du cylindre auquel elle eſt circonſcrite; & la hauteur de ce cylindre eſt égale à un des diametres de la Sphere, ou au rayon de l'hemiſphere. Ce qui eſt un moyen tres-facile pour connoître la ſolidité d'une Sphere.

COROLLAIRE III.

Puiſque l'hemiſphere eſt [4] égal au produit de la baſe multipliée par les deux tiers de ſa hauteur, ou de ſon rayon; le double de l'hemiſphere, ou la Sphere entiere, ſera égale au produit d'un de ſes grands cercles par les quatre tiers du rayon, c'eſt à dire [5], par les deux tiers du diametre.

Or le produit des quatre tiers d'un rayon mul-

[1] *Prop. preſ.*
[2] *Cor. 2. def. 79. Geo.*
[3] *Def. 76. Geo.*
[4] *Cor. 2. prop. preſ.*
[5] *Pag. 56. des fract. de fract.*

tipliez par un grand cercle, eſt égal au produit de quatre grands cercles multipliez par un tiers de rayon. Car appellons ce rayon a ; & appellons b ce grand cercle : les quatre tiers du rayon [1] ſeront donc $\frac{4a}{3}$. Or $\frac{4a}{3} \times b = \frac{4ab}{3}$, & il eſt évident que $\frac{4ab}{3} = 4b \times \frac{a}{3}$.

Une Sphere eſt donc égale au produit de la ſomme de quatre grands cercles multipliez par la 3e partie de leur rayon. Ce qui peut encore faire connoître la ſolidité d'une Sphere, & ce qui ſervira pour en connoître la ſurface.

PROPOSITION LXXXVI.

Les Cylindres dont les hauteurs ſont égales aux diametres de leurs baſes, ou qui ſont circonſcrits à des Spheres, ſont entr'eux comme les Cubes de ces mêmes diametres.

DEMONSTRATION.

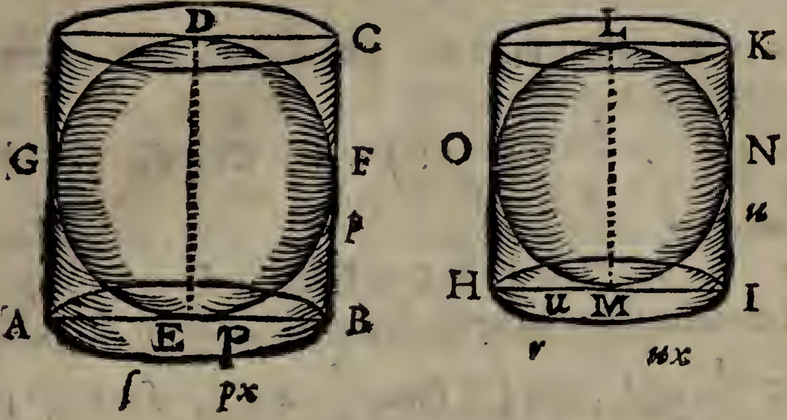
Soit le cylindre *AC* dont la hauteur *DE* ſoit égale au diametre *AB* de ſa baſe ; ſoit encore le cylindre *HK* dont la hauteur *LM* ſoit égale au diametre *HI* de ſa baſe : je dis que ces deux cylindres ſont entr'eux comme les cubes des diametres *AB* & *HI* de ces baſes.

Pour le démontrer, ſoit nommée $ſ$ la circonference de la baſe du cylindre *AC*, & p ſon

[1] *Page* 44. *def.* 1. *des fract.*

diametre

diametre *AB* ; ſoit nommée r la circonference de la baſe du cylindre *HK* & u ſon diametre *HI*;



ſoit enfin appellé x l'expoſant du rapport de la circonference $ſ$ à ſon diametre p, c'eſt à dire que $\frac{ſ}{p} = x$, alors [1] $px = ſ$. L'expoſant du rapport de la circonference r à ſon diametre u, ſera auſſi x, c'eſt à dire $\frac{r}{u} = x$.
[2] Car $ſ . r :: p . u$. Donc [3] $ſ . p :: r . u$. On aura donc encore [1] $ux = r$.

[4] La ſurface de la baſe du cylindre *AC* ſera $\frac{1}{4} ppx$, ou $\frac{1}{4} xpp$. Et ſi on multiplie cette ſurface par la hauteur p, on aura $\frac{1}{4} xp^3$ pour la ſolidité du cylindre *A C*, [5]. De même [6]

[1] *Cor. 3. de la diviſ. pag.* 42.
[2] *Cor. prop. 60. Geo. pag.* 483.
[3] *Part. 2. du cor. prop. 3. Algeb.*
[4] *Cor. 2. prop. 48. Geo.*
[5] *Cor. 2. def. 79. ou cor. 7. prop. 81. Geo.*
[6] *Cor. 2. prop 48, & cor. 2. def. 79. Geo.*

le cylindre HK sera $\frac{1}{4}xu^3$. Or [1] si on divise ces deux produits par $\frac{1}{4}x$, on aura $\frac{1}{4}xp^3 . \frac{1}{4}xu^3 :: p^3 . u^3$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Les deux tiers du cylindre AC, ou de sa valeur $\frac{1}{4}xp^3$, qui [2] sont $\frac{1}{6}xp^3$, sont [3] égaux à la Sphere $GEFD$ inscrite au cylindre AC dont [4] la hauteur DE est un des diametres de cette même Sphere. De même les $\frac{2}{3}$ du cylindre HK, qui sont $\frac{1}{6}xu^3$, sont [3] égaux à la Sphere $OMNL$ qui lui est inscrite, & dont un des diametres est la hauteur LM de ce cylindre. Or [1] $\frac{1}{6}xp^3 . \frac{1}{6}xu^3 :: p^3 . u^3$. Au lieu de $\frac{1}{6}xp^3$ & de $\frac{1}{6}xu^3$ substituant [5] ce qui y est égal, sçavoir les Spheres $GEFD$, & $OMNL$; on aura la Sphere $GEFD . OMNL :: p^3 . u^3$. Les Spheres sont donc entr'elles comme les cubes de leurs diametres.

[1] *Prop. 6. d'Algeb.*
[2] *Page 56. des fract. de fract.*
[3] *Prop. 85. Geo.*
[4] *Supposit.*
[5] *Demande 1. Geo.*

COROLLAIRE II.

Les Spheres ſont donc entr'elles en raiſon triplée du rapport qui eſt entre leurs diametres; puiſqu'elles ſont [1] entr'elles comme les cubes de leurs diametres, & que les cubes de ces diametres ſont [2] entr'eux en raiſon triplée de celle de ces mêmes diametres.

COROLLAIRE III.

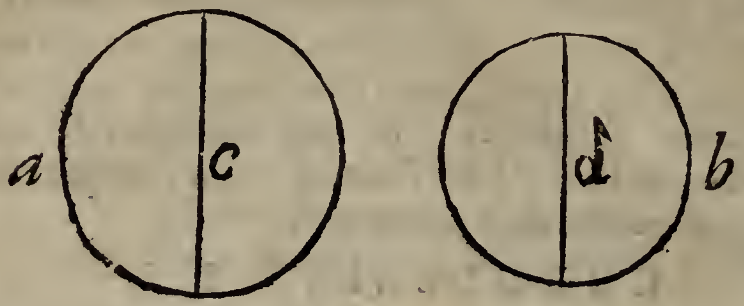
Si un globe a ſon diametre 20 fois auſſi grand que celui d'un autre; la maſſe de ce premier globe ſera 8000 fois auſſi grande que la maſſe de cet autre. Car [3] ce premier globe ſera au ſecond, comme ſon diametre ſera à une 4e de quatre grandeurs continuement proportionnelles dont la premiere & la ſeconde ſeront entre-elles comme les diametres de ces deux globes; & ainſi de ſuite. Soit appellée *a* la derniere de ces quatre grandeurs continuement proportionnelles, la 3e grandeur [4] ſera 20*a*; la 2e ſera 400*a*; & la premiere 8000*a*. Ce qui ſera cette progreſſion ÷ 8000*a* . 400*a* . 20*a* . *a* . dans laquelle il paroit évidemment que la premiere de ces quatre grandeurs eſt 8000 fois auſſi grande que la derniere.

REMARQUE.

De la même maniere que dans la démonſtr. de la prop. preſ. j'ai employé les expoſants des rapports qui ſont entre les circonferences des cercles & leurs diametres, j'aurois peû les em-

[1] *Cor.* 1. *prop. preſ.*
[2] *Cor. prop.* 18. *Algeb.*
[3] *Cor.* 1. *prop.* 19. *d'Algeb.*
[4] *Def.* 16. *Algeb.*

ployer pour démontrer que les cercles, ou les secteurs de cercles, sont entr'eux comme les quarrez de leurs diametres. Soit un cercle dont



la circonference soit appellée a, & son diametre soit c. Soit encore un autre cercle dont la circonference est b, & son diametre est d. Soit enfin $\frac{a}{c} = f$, on appellera donc[1] aussi f le quotient de la circonference b divisée par d. Et on aura $cf = a$, & $df = b$. Le premier cercle sera [2] donc $\frac{1}{4} fcc$. & le 2e sera $\frac{1}{4} fdd$. Donc $\frac{1}{4} fcc . \frac{1}{4} fdd :: cc . dd$.[3].

PROPOSITION LXXXVII.

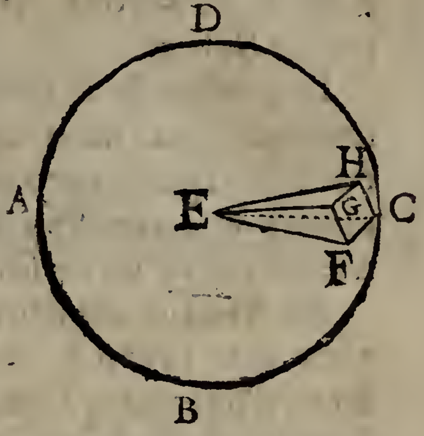
La surface d'une Sphere est égale à quatre des grands cercles de cette même Sphere.

DEMONSTRATION.

Soit la Sphere *ABCD* dont le centre soit *E*. Je la considererai comme un solide composé

[1] *Cor. prop. 60. Geo.*
[2] *Cor. 2. prop. 48.*
[3] *Prop. 6. Algeb.*

[1] d'une infinité de pyramides dont le sommet commun sera le centre *E*, & dont les bases prises ensemble forment la surface de ce même solide. Alors chacune de ces pyramides aura pour hauteur un des rayons de la Sphere.



Car, soit *GFCH* une de ces pyramides dont la base *G F C H* est infiniment petite ; la perpendiculaire menée du centre E à cette surface *GFCH* infiniment petite, sera un des rayons de la Sphere, par exemple *E G*. Parceque les lignes *GF* & *GH* infiniment petites terminées par les rayons *EF* & *EH*, étant prolongées deviennent [2] touchantes des circonferences des cercles qui ont pour rayon *EG*, & dont les plans passent par *EF* & *EH*.

Or les hauteurs de toutes ces pyramides sont [3] égales. La somme de ces pyramides sera donc [4] égale au produit de la somme de leurs bases, multipliée par la 3^e^ partie de leur hauteur commune. La somme de ces pyramides est la Sphere même *ABCD* ; la somme de leurs bases est la surface de la Sphere *ABCD*, & leur hauteur commune est un rayon de cette Sphere.

Le produit de la surface de la Sphere *ABCD*, multipliée par un tiers d'un de ses rayons, est donc égal à cette Sphere.

[1] *Cor.* 2. *def.* 88. *Geo.*
[2] *Fin du cor.* 1. *def.* 88. *& prop.* 12. *Geo.*
[3] *Cor.* 1. *def.* 82. *Geo.*
[4] *Cor. prop.* 83. *Geo.*

Or le produit de quatre des grands cercles de la Sphere *ABCD*, multipliez aussi par un tiers d'un de ses rayons, est [1] encore égal à cette même Sphere.

Le produit de la surface de la Sphere *ABCD*, multipliée par un tiers d'un de ses rayons, est donc [2] égal au produit de quatre des grands cercles de cette Sphere multipliez aussi par le même tiers d'un de ses rayons.

En divisant ces deux produits égaux, par un tiers de ce rayon de la Sphere; un des quotients sera, d'une part, la surface de la Sphere *ABCD*, laquelle surface sera [3] égale à l'autre quotient qui sera quatre grands cercles de cette Sphere, *ce qu'il falloit démontrer.*

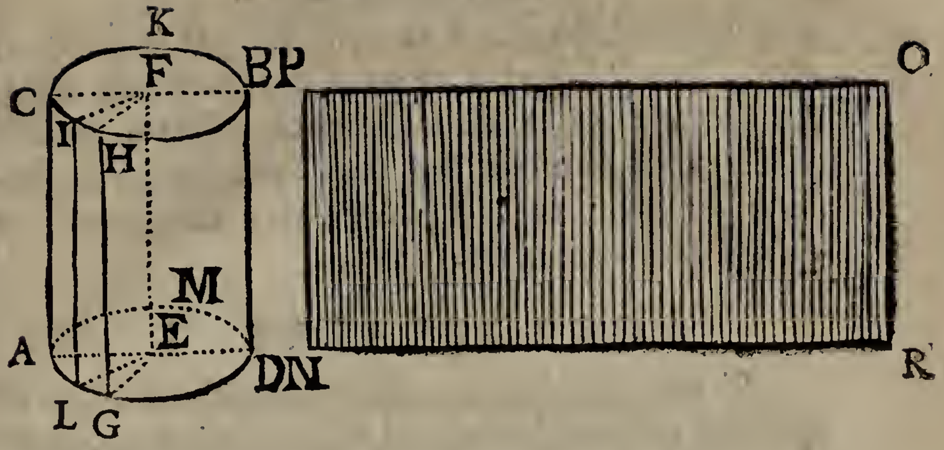
PROPOSITION LXXXVIII.

La surface d'un cylindre droit, ses bases exceptées, est égale au produit du contours ou circonference de la base multipliée par la hauteur.

DEMONSTRATION.

Soit le cylindre droit *AB*; son axe *FE* sera [1] perpendiculaire à la base *AD*. Si des centres *F* & *E*, on considere un nombre indéfini de rayons *FC*, *EA*; *FI*, *EL*; *FH*, *EG*; *FB*, *ED*; &c. qui soient menez paralleles entr'eux : on trouvera que toutes les lignes *CA*, *IL*, *HG*, *BD*, &c. menées par les extrémitez de ces rayons, seront [4] paralleles à l'axe *EF*, &

[1] *Cor.* 3. *prop.* 85. *Geo.*
[2] *Ax.* 18. *gener.*
[3] *Prop.* 6. *Algeb.*
[4] *Prop.* 36. *Geo.*



[1] paralleles entr'elles. Ces lignes *CA*, *LI*, *HG*, &c. seront donc [2] perpendiculaires aux bases paralleles *AGDM* & *CHBK*. Elles seront donc [3] toutes égales entr'elles. Or toutes ces lignes possibles *CA*, *LI*, *HG*, &c. considerées indéfiniment proches l'une de l'autre, sont les côtez des faces infinitiémes du cylindre droit *AB*, qui seront [4] des parallelogrammes rectangles de même hauteur & dont les bases seront les lignes droites infiniment petites qui [5] forment les circonferences *AGDM* & *CHBK*.

Si on considere que cette surface courbe soit déroulée, de sorte que la circonference *AGDM* devienne la ligne droite *NR*, & que la circonference *CHBK* devienne la ligne droite *PO*; alors le parallelogramme total *NO* sera égal à tous les parallelogrammes de même hauteur qui forment le contours du cylindre *AB*. Le

[1] *Part. 2. prop. 74. Geo.*
[2] *Prop. 73. Geo.*
[3] *Prop. 70. Geo.*
[4] *Prop. 36. & def. 49. Geo.*
[5] *Cor. def. 56. Geo.*

produit de la base *NR* multipliée par la hauteur *RO*, sera [1] égal à ce parallelogramme *NO*. Le produit de la circonference *AGDM* multipliée par la hauteur *DB* sera donc égal à la surface du cylindre *AB*, les bases exceptées, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Si on considere un diametre d'une Sphere qui soit perpendiculaire à la base d'un cylindre qui lui est circonscrit; ce diametre sera la hauteur du cylindre. Et si on considere un grand cercle de cette même Sphere qui soit parallele à la base du cylindre droit circonscrit; sa circonference sera [2] égale à celle de la base de ce cylindre, & son diametre sera égal à celui de cette base : puisque la circonference de ce grand cercle de la Sphere se trouve dans la surface du cylindre circonscrit. Un diametre de la Sphere est [3] le même qu'un diametre d'un de ses grands cercles. Le diametre de la base de ce cylindre sera donc égal à la hauteur de ce même cylindre.

En multipliant la circonference de la base du cylindre circonscrit à une Sphere, par son diametre, on aura [4] la surface de ce cylindre, les bases exceptées.

Le produit d'une circonference de cercle multipliée par son diametre est [5] égale à quatre fois ce même cercle.

[1] *Cor.* 2. *def.* 53. *Geo.*
[2] *Cor.* 1. *def.* 78. *geo.*
[3] *Cor.* 1. *def.* 82. *geo.*
[4] *Prop. pref.*
[5] *Cor.* 2. *prop.* 48. *Geo.*

La surface du cylindre circonscrit à une Sphere, est donc égale à quatre des grands cercles de cette même Sphere.

La surface d'une Sphere inscrite à un cylindre est donc [1] égale à la surface de ce cylindre, les bases exceptées.

REMARQUES.

1. La surface d'un cône rectangle est [2] égale au produit de la circonference de sa base multipliée par la moitié de la ligne droite, menée du sommet de ce cône à la circonference de sa base. Car le sommet de ce cône étant un point de l'axe qui est [3] perpendiculaire au milieu de tous les diametres de cette base, ce même sommet sera également éloigné de tous les points de la circonference de la base; toutes les lignes menées du sommet à cette circonference, seront [4] égales entr'elles. Outre cela, la somme de tous les angles qui ont pour sommet celui de ce cône, & qui sont apuyez sur chaque côté infiniment petit de cette circonference, est [5] moindre que la somme de quatre angles droits. La surface du cône droit étant déroulée sera donc un secteur de cercle.

2. Il y a des corps qu'on appelle *Reguliers*; parcequ'ils sont terminez par des surfaces regulieres. Entre ceux dont les surfaces de chacun sont égales entr'elles, on en compte cinq.

[1] *Ax.* 18. *gen.*
[2] *Cor.* 3. *prop.* 48. *Geo.*
[3] *Def.* 68. *& def.* 20. *Geo.*
[4] *Cor.* 4. *ax.* 2. *Geo.*
[5] *Cor. prop.* 79. *Geo.*

Le premier eſt terminé par quatre triangles égaux & équilateraux, ce qui fait qu'on l'appelle, *Tetraëdre.*

Le ſecond eſt terminé par ſix quarrez égaux, ce qui fait qu'on l'appelle, *Exaëdre.* On l'appelle auſſi *Cube* [1].

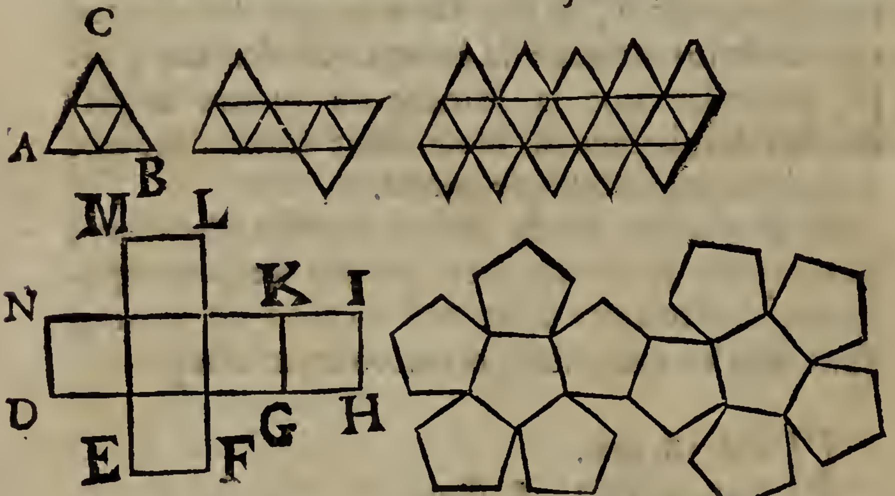
Le troiſiéme eſt terminé par huit triangles égaux & équilateraux. On l'appelle, *Octaëdre.*

Le quatriéme eſt terminé par douze pentagones reguliers & égaux. On l'appelle, *Dodecaëdre.*

Le cinquiéme enfin eſt terminé par vingt triangles égaux & équilateraux. On l'appelle, *Icoſaëdre.*

Si on veut repreſenter facilement ces cinq corps reguliers, il faut ſe ſervir de carton, & y tracer des triangles équilateraux, des quarrez, & des pentagones reguliers, en les diſpoſant comme dans chacune de ces cinq figures.

Tetraëdre *Octaëdre* *Icoſaëdre.*



Exaëdre *Dodecaëdre*

Enſuite il faut, avec des ciſeaux, couper le

[1] *Def. 75. Geo.*

carton ſuivant les lignes droites qui terminent ces figures composées de triangles, de quarrez, &c. & avec un couteau bien aiguiſé, il faut couper à moitié ce même carton ſuivant les lignes tranſverſales de ces mêmes figures.

Enfin, il faut plier le carton de maniere que les plans qui repreſenteront les ſurfaces de chacun de ces corps reguliers ſe joignent l'un l'autre. Les points *A* & *B*, par exemple, ſeront appliquez ſur le point *C*, & on retiendra le tout en cette ſituation avec de la colle, ou du fil, pour former le Tetraëdre. La ligne *HI* ſera appliquée ſur *DN*, *EF* ſur *GH*, & *ML* ſur *KI*, pour former l'Exaëdre. L'ajuſtement des trois autres figures eſt auſſi facile que celui de ces deux premieres.

J'ai crû qu'il ſuffiſoit de faire ces deux dernieres remarques pour ceux qui commencent à s'appliquer à l'étude des Mathematiques; parcequ'une plus longue Theorie ſur ce ſujet & ſur les autres ſolides pourroit rebuter les moins ſtudieux, & ne ſeroit peut-être pas d'une utilité aſſez conſiderable, pour meriter une plus longue attention de ceux qui ſeroient plus zélez & plus laborieux.

Je finirai donc ici ces Elemens, où j'ai tâché de renfermer ce que j'ai crû être d'abord le plus neceſſaire à ceux qui veulent apprendre les Mathematiques. Outre les premiers fondemens de l'Arithmetique & de l'Algebre, j'ai expoſé le plus clairement qu'il m'a été poſſible la Theorie & la Pratique de la Geometrie ordinaire. L'utilité particuliere de chacune de ces trois parties elementaires eſt fort étendue. On y trouve beaucoup de lumieres pour entendre les ouvrages qui ſuppoſent qu'on ſçache ces premiers Elemens. L'experience fait connoître tous les jours, qu'il faut abſolument avoir puiſé dans ces premieres ſources des veritez qui ſont ſi importantes, que ſans elles on ſe trouve privé d'une infinité d'avantages tres-conſiderables, qu'on peut tirer des Mathematiques.

FIN.

TABLE

TABLE

DES PRINCIPALES CHOSES contenues dans ces Elemens.

A

B

C

D

L

M

N

O

P

Q

R

S

TABLE
DE LA GEOMETRIE PRATIQUE.

PROBLEMES.

TABLE

DES PROPOSITIONS des Elemens de Geometrie d'Euclide, qui ſont démontrées dans ces nouveaux Elemens.

J'Ajoute la Table ſuivante pour rendre l'étude de ces Elemens encore plus utile dans la lecture des Traitez des Mathematiques, où on cite Euclide. Les propoſitions qui ſont dans les ſix premiers Livres, dans l'onziéme & dans le douziéme des Elemens de Geometrie de cet ancien Autheur ſont celles qui ſont ordinairement citées. On ne cite preſque jamais les propoſitions de ſes autres Livres. Et entre celles de ces huit livres, il y en a encore pluſieurs qui ſont inutiles, ou qui ne ſervent que pour en démontrer d'autres que j'ai démontrées ſans leurs ſecours. Pour montrer que mes Elemens ſont pour le moins équivalens à ces huit Livres d'Euclide qu'on a coutume d'apprendre; dans la place de ces propoſitions que j'ai crû inutiles, j'ai fait mention de celles que j'y pouvois ſubſtituer tres-utilement.

Prop. 33.	Prop. 36. *page* 370.
Prop. 34.	Part. 1. prop. 37. & cor. 2. de la même prop. & part. 1. prop. 38. *pages* 371. 374. *&* 376.
Prop. 35.	Prop. 39. *page* 380.
Prop. 36.	Cor. 1. prop. 39. *page* 381.
Prop. 37.	Part. 1. prop. 40. *page* 388.
Prop. 38.	Part. 1. prop. 40. *page* 388.
Prop. 39.	Part. 2. prop. 40. *page* 388.
Prop. 40.	Part. 2. prop. 40. *page* 388.
Prop. 41.	Cor. 4. prop. 39. *page* 387.
Prop. 42.	Cor. prop. 41. *page* 403.
Prop. 43.	Part. 1. prop. 41. *page* 401.
Prop. 44.	Cor. prop. 41. *page* 404.
Prop. 45.	Même cor. de la prop. preced.
Prop. 46.	Cor. prop. 36. *page* 371.
Prop. 47.	Part. 1. prop. 57. *page* 467.
Prop. 48.	Part. 2. prop. 57. *page* 467.

Euclide Livre 2.	*Elemens des Mathematiques.*
Prop. 1. 2. & 3.	Je leur substitue la prop. 15. avec ses quatre Corollaires.
Prop. 4.	Prop. 42. *page* 405.
Prop. 5.	Prop. 43. *page* 406.
Prop. 6.	Prop. 44. *page* 408.
Pr. 7. 8. 9. 10. & 11.	Je leur substitue les prop. 20. 27. 28. & 29. avec leurs corollaires.
Prop. 12.	Part. 1. prop. 58. *page* 473.
Prop. 13.	Part. 2. prop. 58. *page* 473.
Prop. 14.	Je lui substitue la prop. 32.

Euclide Livre 3.	*Elemens des Mathematiques.*
Prop. 1. & corol.	Cor. 1. & part. 2. prop. 13. *pages* 272. *&* 270.
Prop. 2.	Je lui ſubſtitue la pr. 38. & ſes cor.
Prop. 3.	Part. 3. & part. 1. prop. 13. *page* 270.
Prop. 4.	Cor. 3. prop. 13. *page* 274.
Prop. 5.6.	Prop. 18. *page* 298.
Prop. 7. & 8.	Prop. 9. & 10. & cor. 1. prop. 14. *pages* 256. 259. *&* 279.
Prop. 9.	Cor. def. 28. Geo. & cor. 3. prop. 14. *page* 204. *&* 280.
Prop. 10.	Cor. 6. prop. 14. *page* 282.
Pr. 11. 12.	Prop. 19. *page* 299.
Prop. 13.	Cor. prop. 19. *page* 300.
Prop. 14.	Part. 1. & 2. prop. 16. *page* 291.
Prop. 15.	Part. 3. prop. 16. *page* 291.
Prop. 16. & cor.	Prop. 12. & ſon cor. 7. *pages* 264. *&* 269.
Prop. 17.	Cor. 8. prop. 27. *page* 334.
Prop. 18.	Cor. 2. prop. 12. *page* 266.
Prop. 19.	Cor. 5. prop. 12. *page* 268.
Prop. 20.	Cor. 6. prop. 27. *page* 332.
Prop. 21.	Cor. 1. prop. 27. *page* 329.
Prop. 22.	Part. 3. prop. 38. *page* 376.
Prop. 23. & 24.	Je leur ſubſtitue les cor. 2. & 3. de la prop. 39.
Prop. 25.	Cor. 1. prop. 13. *page* 272.
Pr. 26.27.	Cor. 2. prop. 20. *page* 303.
Prop. 28.	Prop. 11. *page* 262.
Prop. 29.	Cor. 2. prop. 11. *page* 264.
Prop. 30.	Cor. 5. prop. 20. *page* 305.
Prop. 31.	Cor. 3. prop. 27. *page* 331.

Prop. 32.	Art. 2. 3^{e} circonst. & Cor. 1. prop. 27. *pages* 328. & 329.
Pr. 33. 34.	Je leur substitue les cor. 1. & 2. pr. 40.
Prop. 35.	Prop. 54. & 55. *page* 461. *&* 462.
Prop. 36.	Cor. prop. 55. *page* 464.
Prop. 37.	Je lui substitue la prop. 45. & ses corollaires.

Euclide Livre 4.	*Elemens des Mathematiques.*
Pr. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.	Je leur substitue la prop. 46. son coroll. & la prop. 49. & ses 4. cor.
Pr. 8. 9. 14.	Cor. prop. 46. *page* 413.
Prop. 10. 11. 12. 13.	Je leur substitue la prop. 50. ses trois premiers coroll. & son 5^{e}.
Prop. 15.	Cor. 1. prop. 45. *page* 410.

Euclide Livre 5.	*Elemens des Mathematiques.*
Prop. 1. 2. 3. 4. 5. 6.	Je leur substitue les prop. 1. 2. 3. 4. 5. & 6. d'Algeb. & leurs coroll.
Prop. 7.	Part. 1. prop. 8. & part. 1. prop. 9. d'Algeb. *pages* 146 *&* 147.
Prop. 8.	Part. 1. prop. 10. & part. 1. prop. 11. d'Algeb. *page* 148. *& page* 149.
Prop. 9.	Part. 2. prop. 8. & part. 2. prop. 9. d'Algeb. *pages* 146 *&* 147.
Prop. 10.	Part. 1. prop. 10. & part. 2. prop. 11. d'Algeb. *pages* 148. *&* 149.
Prop. 11.	Cor. 3. Déf. 12. d'Algeb. *page* 65.
Prop. 12.	Prop. 15. d'Algeb. *page* 160.

Prop. 20.	Prop. 61. & cor. 1. prop. 62. *pages* 483. *&* 488.
Prop. 21.	Je lui substitue le cor. 3. de la pr. 63.
Prop. 22.	Prop. 64. *page* 495.
Prop. 23.	Cor. prop. 56. *page* 466.
Prop. 24. 25. &c.	Je leur substitue les coroll. 1. & 2. de la prop. 58. les prop. 59. 60. 62. & leurs coroll.
Prop. 31.	Cor. 3. prop. 62. *page* 489.

Euclide Livre II.	*Elemens des Mathematiques.*
Prop. 1.	Cor. Déf. 10. Geo. *page* 197.
Prop. 2.	prop. 65. *page* 498.
Prop. 3.	prop. 66. *page* 499.
Prop. 4.	prop. 67. *page* 500.
Prop. 5.	prop. 68. *page* 505.
Prop. 6.	Cor. 1. prop. 72. *page* 516.
Prop. 7.	Cor. 2. prop. 72. *pages* 516. *&* 517.
Prop. 8.	prop. 73. *page* 517.
Prop. 9.	part. 2. prop. 74. *page* 518.
Prop. 10.	part. 1. prop. 77. *page* 526.
Prop. 11.	Cor. 2. prop. 69. *page* 508.
Prop. 12.	Cor. 3. prop. 67. *page* 504.
Prop. 13.	prop. 69. *page* 506.
Prop. 14.	part. 2. prop. 76. *page* 523.
Prop. 15.	part. 2. prop. 77. *page* 526.
Prop. 16.	prop. 75. *page* 520.
Prop. 17.	Cor. prop. 75. *page* 521.
Prop. 18.	Cor. 2. prop. 67. *page* 503.
Prop. 19.	Cor. 1. prop. 69. *page* 507.
Prop. 20.	prop. 79. *page* 534.
Prop. 21.	Cor. prop. 79. *page* 536.

Prop. 22. 23. 24. 26. &c.	Je ſubſtitue les cor. 1. & 2. de la prop. 67. la prop. 70. ſon coroll. le cor. 1. de la prop. 72. & la part. 1. de la prop. 74.
Prop. 25.	part. 1. prop. 82. *page* 557.
Prop. 29. 30. & 31.	Cor. 3. & 4. prop. 81. *p.* 548. *&* 549.
Prop. 32.	part. 1. prop. 82. *page* 557.
Prop. 33.	prop. 84. *page* 567.
Prop. 34. 35. &c.	Je leur ſubſtitue la part. 1. pr. 76. & ſon coroll. la prop. 78. les cor. 6. 7. 8. 9. 10. 11. de la prop. 81. les trois coroll. de la prop. 82.

Euclide Livre 12.	*Elemens des Mathematiques.*
Prop. 1.	prop. 63. *page* 491.
Prop. 2.	Cor. 2. prop. 63. *page* 493.
Prop. 3.	Je lui ſubſtitue le cor. 2. prop. 81. *page* 547.
Prop. 4.	Je lui ſubſtitue la prop. 83.
Pr. 5. 6.	part. 2. prop. 82. *page* 557.
Prop. 7.	prop. 81. *page* 540.
Prop. 8.	prop. 84. *page* 567.
Prop. 9.	pr. 3. & 2. d'Algeb. & cor. 8. pr. 81.
Prop. 10.	Cor. 2. prop. 81. *page* 547.
Prop. 11.	part. 1. prop. 82. *page* 557.
Prop. 12. & 13.	Je leur ſubſtitue la prop. 85. & ſes trois corollaires.
Prop. 14.	part. 1. prop. 82. *page* 557.
Prop. 15.	pr. 3. & 2. d'Algeb. cor. 7. & 9. pr. 81.
Prop. 16. & 17.	Je leur ſubſtitue les prop. 86. 87. & 88. avec leurs Corollaires.
Prop. 18.	Cor. 2. prop. 86. *page* 579.

DEMONSTRATIONS NOUVELLES, particulieres à ces Elemens.

DANS L'ALGEBRE.

PRop. 3. avec son Coroll. prop. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. & 20. avec leurs Corollaires.

DANS LA GEOMETRIE.

Cor. 1. & 3. de la prop. 5. Cor. 1. 2. 3. 4. 5. & 6. de la prop. 6. Cor. 2. 3. & 4. de la prop. 7. Prop. 8. & son cor. Part. 2. de la prop. 9. Part. 2. de la prop. 10. Prop. 11. & ses cor. Prop. 12. & ses cor. 1. & 4. le cor. 2. de la prop. 13. & la Combinaison des 4 choses de la prop. 14. les cor. 1. 2. 3. 4. 5. & 6. de la prop. 14. Prop. 15. Part. 1. & 2. de la prop. 16. Prop. 17. prop. 19. & son cor. Cor. 1. 3. & 5. de la prop. 20. Prop. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. Les cor. 1. 2. 3. 4. & 5. de la prop. 29. Prop. 35. & ses cor. 1. 2. 3. & 4. Prop. 37. Part. 1. de la prop. 38. & ses cor. 1. 2. & 3. les cor. 2. & 3. de la prop. 39. Cor. 1. de la prop. 40. Prop. 46. & son cor. Prop. 47. & son cor. Prop. 50. & ses cor. Prop. 56. & son cor. Les prop. 58. & 61. sont en partie nouv. Cor. 1. 2. & 4. de la prop. 62. Cor. 1. & 3. de la prop. 63. Prop. 64. Cor. 1. 2. 3. de la prop. 67. Cor. 2. de la prop. 69. Prop. 70 ; & son cor. Prop. 71. Prop. 72 ; & ses cor. 1. & 2. prop. 73. Part. 1. prop. 74. prop. 76. & son cor. le cor. de la prop. 79. & la demon-

strat. de la prop. 80. sont presqu'entierement nouv. les cor. 2. 3. 4. 5. 6. &c. de la prop. 81. Les cor. 2. & 3. de la prop. 82. prop. 83. Presque toute la prop. 84, son Coroll. &c.

Il y a encore plusieurs autres propositions, & Corollaires, même dans tout l'ouvrage une maniere de proposer, d'expliquer & de démontrer, dont ceux qui ont lû plusieurs Livres elementaires, remarqueront facilement la nouveauté.

APPROBATION.

J'Ay lû par ordre de Monseigneur le Chancelier ces *Elemens des Mathematiques*, & n'y ay rien trouvé qui en doive empêcher l'impression. Fait à Paris ce 24 Novembre 1702.

FONTENELLE.

PRIVILEGE GENERAL.

LOUIS par la grace de Dieu Roy de France & de Navarre, à nos Amez & Feaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de nôtre Grand Conseil, Prevost de Paris, Baillifs, Senechaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Justiciers qu'il appartiendra; SALUT. *Le Sieur* POLYNIER, *Docteur en Médecine*, nous ayant fait remontrer, qu'il desireroit faire part au public d'un ouvrage de sa composition intitulé, ELEMENS DES MATHEMATIQUES, s'il nous plaisoit lui en permettre l'impression, & lui accorder nos Lettres de Privilege sur ce neceſſaires ; Nous lui avons permis & accordé, permettons & accordons par ces preſentes, de faire imprimer par tel Imprimeur ou Libraire qu'il voudra choiſir ledit Livre, en telle forme, marge, caractere, & autant de fois que bon lui ſemblera, pendant le temps de huit années conſecutives, *à compter du jour de la date des preſentes*, & de le faire vendre & diſtribuer par tout nôtre Royaume ; Faiſant défenſe à tous Libraires, Imprimeurs & autres d'imprimer, faire imprimer, vendre & diſtribuer ledit Livre ſous quelque pretexte que ce ſoit, même d'impreſſion étrangere & autrement, ſans le conſentement de l'Expoſant, ou de ſes ayans cauſe, ſur peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de quinze cens livres d'amande contre chacun des Contrevenans, applicable un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Expoſant, & de tous dépens, dommages & intereſts ; à la charge d'en mettre avant de l'expoſer en vente deux Exemplaires en nôtre Bibliotheque publique, un autre dans le Cabinet des Livres de nôtre Château du Louvre, & un en celle de nôtre tres-cher & Feal Chevalier, Chancelier de France le Sieur Phelippeaux de Pontchartrain Commandeur de nos Ordres, de faire imprimer ledit Livre dans *nôtre Royaume & non ailleurs*, & en beau caractere & papier, ſuivant ce qui eſt porté par *les Reglemens des années* 1618. *&* 1686. & de faire enregiſtrer les preſentes *és Regiſtres de la Communauté des Libraires de nôtredite bonne Ville de Paris*, le tout à peine de nullité d'icelles, du contenu deſquelles Nous vous mandons & enjoignons de faire jouir l'Expoſant ou ſes ayans cauſe, pleinement & paiſiblement, ceſſant, &

faisant cesser tous troubles & empêchemens contraires. VOULONS que la copie desdites presentes qui sera imprimée au commencement ou à la fin dudit Livre, soit tenue pour dûement signifiée, & qu'aux Copies collationnées par l'un de nos Amez & Feaux Conseillers & Secretaires, foy soit ajoutée comme à l'Original. Commandons au premier nôtre Huissier ou Sergeant, de faire pour l'execution des presentes toutes significations, défenses, saisies, & autres actes requis & necessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires; Car tel est nôtre plaisir. Donné à Versailles le sixiéme jour de Décembre l'an de grace mille sept cens deux, & de nôtre Regne le soixantiéme; par le Roy en son Conseil.

LE COMTE.

Registré sur le Livre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs, conformement aux Reglemens. A Paris ce 12 de Décembre 1702. Signé P. TRABOUILLET, *Syndic.*

A PARIS,
De l'Imprimerie de JACQUE QUILLAU, Imprimeur Juré Libraire de l'Université, rue Galande, proche la rue du Fouare.