Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2018/2019**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 4

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 4.1. Es seien G und H Gruppen und $\varphi\colon G \to H$ sei ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass $\varphi(e_G) = e_H$ und $(\varphi(g))^{-1} = \varphi(g^{-1})$ für jedes $g \in G$ ist.

Aufgabe 4.2.*

Sei G eine Gruppe. Zeige, dass sich Gruppenelemente $g \in G$ und Gruppenhomomorphismen φ von $\mathbb{Z}$ nach G über die Korrespondenz

$$g \longmapsto (n \mapsto g^n) \text{ und } \varphi \longmapsto \varphi(1)$$

entsprechen.

Aufgabe 4.3. Seien G und H Gruppen und sei

$$\varphi\colon G \longrightarrow H$$

ein Gruppenisomorphismus. Zeige, dass auch die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1}\colon H \longrightarrow G,\ h \longmapsto \varphi^{-1}(h),$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

Aufgabe 4.4. Seien G und H Gruppen und sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass das Bild von φ eine Untergruppe von H ist.

Aufgabe 4.5. Sei G eine (multiplikativ geschriebene) kommutative Gruppe und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass das Potenzieren

$$G \longrightarrow G,\ x \longmapsto x^n,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 4.6. Betrachte die Gruppe der komplexen Zahlen ohne null, $\mathbb{C}^\times = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$. Bestimme für jedes $n \in \mathbb{N}$ den Kern des Potenzierens

$$\mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times,\ z \longmapsto z^n.$$

Sind diese Gruppenhomomorphismen surjektiv?

Aufgabe 4.7. Es sei $\varphi\colon\ G \to H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass durch $U \mapsto \varphi(U)$ und $V \mapsto \varphi^{-1}(V)$ eine Bijektion zwischen den Untergruppen von H und denjenigen Untergruppen von G, die $\operatorname{kern}\varphi$ umfassen, gegeben ist.

Aufgabe 4.8. Sei G eine endliche Gruppe. Zeige, dass jedes Element $g \in G$ eine endliche Ordnung besitzt, und dass die Potenzen

$$g^0 = e_G,\ g^1 = g,\ g^2, \ldots, g^{\operatorname{ord}(g)-1}$$

alle verschieden sind.

Wichtige Beispiele für im Allgemeinen nicht kommutative Gruppen werden durch die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_K(V)$ gegeben, also die Menge der invertierbaren linearen Abbildungen auf einem K-Vektorraum V mit der Hintereinanderschaltung als Verknüpfung.

Aufgabe 4.9. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Determinante

$$\mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow (K \setminus \{0\}, \cdot, 1),\ M \longmapsto \det M,$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 4.10. Man gebe für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine invertierbare Matrix $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ an, derart, dass die Ordnung von M gleich n ist.

Aufgabe 4.11.*

Man gebe eine Matrix $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ der Ordnung 4 an.

Aufgabe 4.12. Es sei $\varphi\colon\ V \to V$ eine lineare Abbildung auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V. Zeige, dass φ genau dann endliche Ordnung besitzt, wenn das Minimalpolynom von φ ein Teiler von $X^n - 1$ für ein $n \in \mathbb{N}_+$ ist.

Aufgabe 4.13. Es sei K ein Körper mit positiver Charakteristik $p > 0$. Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die endliche Ordnung p besitzt.

Aufgabe 4.14. Es sei K ein endlicher Körper und M eine invertierbare $n \times n$-Matrix über K. Zeige, dass M endliche Ordnung besitzt.

Aufgabe 4.15. Bestimme die Nebenklassen zu den folgenden Untergruppen von kommutativen Gruppen.

(1) $(\mathbb{Z}, 0, +) \subseteq (\mathbb{R}, 0, +)$.
(2) $(\mathbb{Q}, 0, +) \subseteq (\mathbb{R}, 0, +)$.
(3) $(\mathbb{R}, 0, +) \subseteq (\mathbb{C}, 0, +)$.
(4) $(\mathbb{Z}n, 0, +) \subseteq (\mathbb{Z}, 0, +)$ $(n \in \mathbb{N})$.
(5) $(\{z \in \mathbb{C} | \, |z| = 1\}, 1, \cdot) \subseteq (\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1, \cdot)$.
(6) $(\{z \in \mathbb{C} | \, z^n = 1\}, 1, \cdot) \subseteq (\{z \in \mathbb{C} | \, |z| = 1\}, 1, \cdot)$ $(n \in \mathbb{N})$.

Wann bestehen die Nebenklassen aus endlich vielen Elementen, wann ist der Index endlich?

Aufgabe 4.16.*

Stifte einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von der Gruppe der komplexen Zahlen ohne null $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ in die multiplikative Gruppe der positiven reellen Zahlen $(\mathbb{R}_+, \cdot, 1)$.

Was ist der Kern dieser Abbildung?

Aufgabe 4.17.*

Stifte einen Gruppenisomorphismus zwischen der additiven Gruppe der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, 0, +)$ und der multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen $(\mathbb{R}_+, 1, \cdot)$.

Aufgabe 4.18. Zeige, dass die beiden kommutativen Gruppen $(\mathbb{Q}, 0, +)$ und $(\mathbb{Q}_+, 1, \cdot)$ nicht isomorph sind.

Aufgabe 4.19. Zeige, dass die Abbildung

$$S_n \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\,,\ \pi \longmapsto M_\pi,$$

die einer Permutation π auf $\{1, \ldots, n\}$ ihre Permutationsmatrix M_π zuordnet, ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 4.20. Sei $M = \{1, \ldots, n\}$ und sei π eine Permutation auf M. Die zugehörige *Permutationsmatrix* M_π ist dadurch gegeben, dass

$$a_{\pi(i),i} = 1$$

ist und alle anderen Einträge 0 sind. Zeige, dass

$$\det M_\pi = \mathrm{sgn}(\pi)$$

ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 4.21. (2 Punkte)

Betrachte die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Zeige, dass diese Matrix einen Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Q}^2$ nach $\mathbb{Q}^2$ und ebenso von $\mathbb{Z}^2$ nach $\mathbb{Z}^2$ definiert. Untersuche diese beiden Gruppenhomomorphismen in Hinblick auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 4.22. (3 Punkte)

Bestimme die Gruppenhomomorphismen von $(\mathbb{Q}, +, 0)$ nach $(\mathbb{Z}, +, 0)$.

Aufgabe 4.23. (3 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ und die Gruppe $\mathbb{Z}/(n)$ isomorph sind.

Aufgabe 4.24. (4 Punkte)

Man gebe für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine invertierbare Matrix $M \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{Q})$ an (dabei sei k geeignet gewählt), derart, dass die Ordnung von M gleich n ist.

Aufgabe 4.25. (3 Punkte)

Sei G eine Gruppe, in der jedes Element die Ordnung zwei hat, d.h. für jedes Gruppenelement g gilt $g^2 = e$. Zeige, dass die Gruppe G dann abelsch ist.

Aufgabe 4.26. (5 Punkte)

Man gebe eine Matrix $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ der Ordnung 3 an.

Abbildungsverzeichnis