

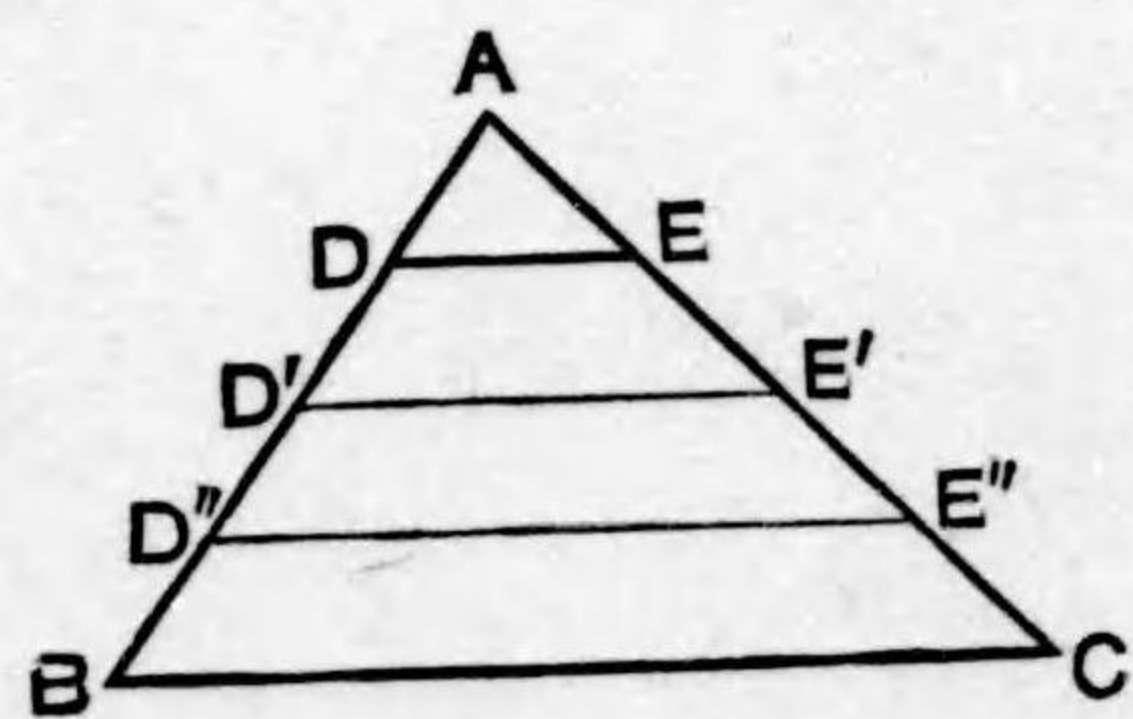
第二章 比例線 中心角

128. 定理一 三角形ノ一邊ニ平行ナル直線ハ、他ノ二邊ヲ比例スル部分ニ分ツ。

$\triangle ABC$ ノ底 BC ニ平行ナル直線ヲ DE トス。
然ルトキハ

$$BD : DA = CE : EA$$

證明 i $\frac{BD}{DA}$ ガ整数ナル場合。



例ヘバ、 BD ガ DA ノ三倍ナリトセヨ。

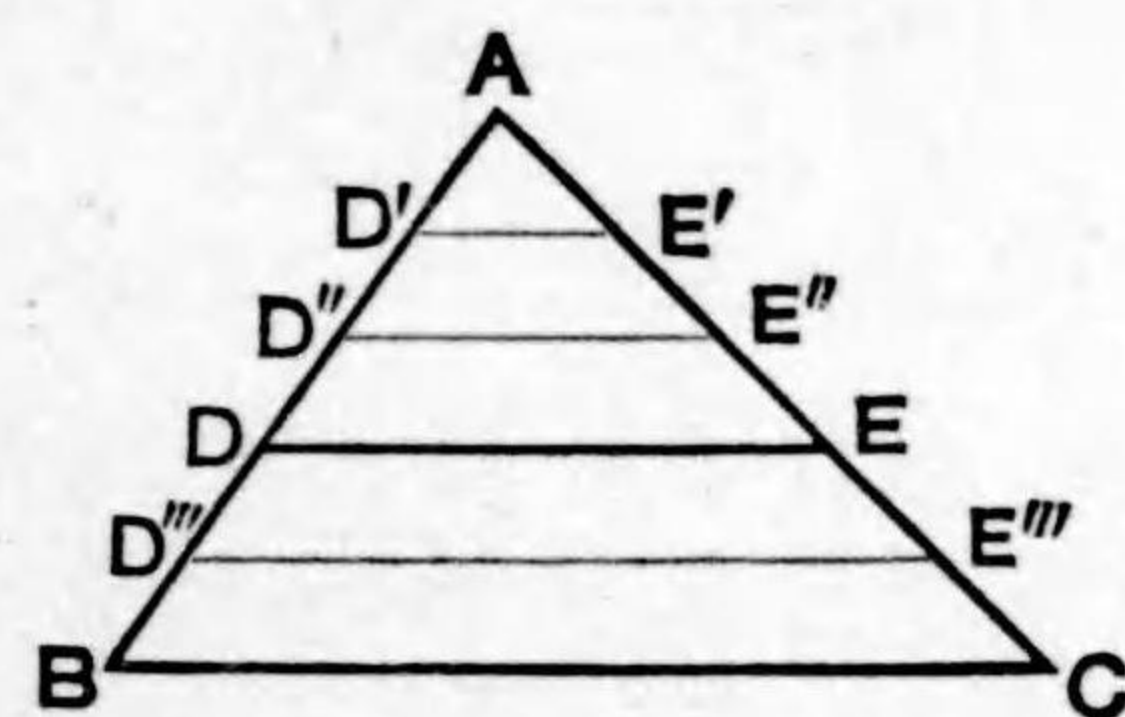
DA ヲ單位トシ、 DB ヲ測リテ DB ヲ三等分スル點ヲ D', D'' トシ、此等ノ點ヨリ BC ニ平行ニ

$D'E', D''E''$ ヲ引ケバ、 E, E', E'' ニ於テ AC ガ四等分セラル。故ニ

$$\frac{BD}{DA} = 3 \text{ ナラバ } \frac{CE}{EA} = 3$$

$$\therefore BD : DA = CE : EA$$

證明 ii $\frac{BD}{DA}$ ガ分數ナル場合。



例ヘバ BD ガ DA ノ $\frac{2}{3}$ 倍ナリトセヨ。

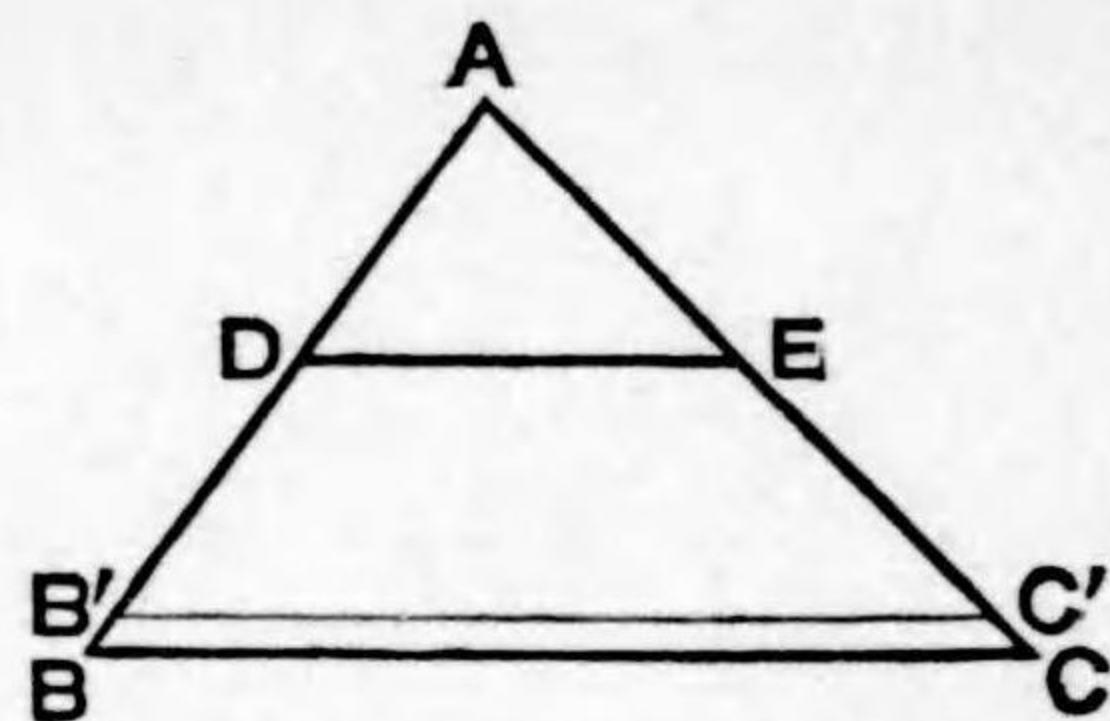
AD ヲ三等分スル點ヲ D', D'' トシ、 $D'A$ ヲ單位トシテ DB ヲ測リ、 DB ヲ二等分スル點ヲ D''' トシ、此等ノ點ヨリ BC ニ平行ニ $D'E', D''E'', D'''E'''$ ヲ引ケバ、 E, E', E'', E''' ニ於テ AC ガ五等分セラル。

$$\therefore \frac{BD}{DA} = \frac{2}{3} \text{ ナラバ } \frac{CE}{EA} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore BD : DA = CE : EA$$

BD, DA が夫々 D'A の二倍三倍ナル如ク二量ガ各第三ノ量ノ丁度整数倍ニ等シキトキハ此第三ノ量ヲ名ヅケテ初ノ二量ノ公度ト稱ス。

證明 iii $\frac{BD}{AD}$ が不盡數ナル場合。



AD ヲ若干等分シ之ヲ單位トシテ DB ヲ測レバ, 此ノ單位ノ若干整数倍ナル DB' ト, 此ノ單位ヨリ小ナル B'B ヲ含ム。故ニ B' ヲリ BC ニ平行線 B'C' ヲ引ケバ

$$\frac{B'D}{DA} = \frac{C'E}{EA}$$

AD ヲ等分スル數ヲ次第ニ大キクスレバ, B'B ハ如何程ニテモ小サクスルコトヲ得。

$$\therefore BD : DA = CE : EA$$

系一 $BA : DA = CA : EA$

系二 $BA : CA = DA : EA = BD : CE$

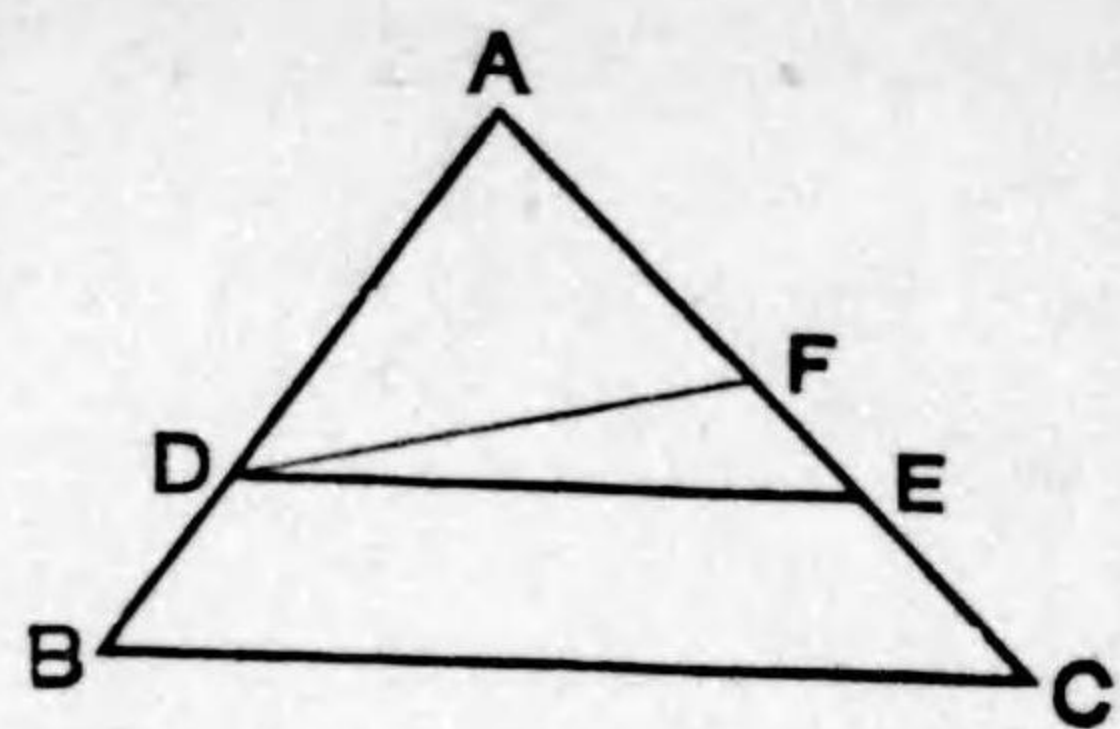
系三 數多ノ平行線ガニツノ直線ト交リ, 之ヲ數多ノ部分ニ切斷スレバ, ニツノ直線ノ任意ノニツノ部分ノ比ハ, 他ノ直線ノ之ニ對應スル部分ノ比ニ等シ。

129. A, B 二量アリテ $\frac{A}{B}$ が整数或ハ分數ナレバ, A ハ B 或ハ B ヲ若干等分セルモノノ若干整数倍ニ等シ。此ノ如キ A, B 二量ヲ可度ナリト稱シ, 然ラザルモノ即チ不盡數ナルトキハ之ヲ不可度ナリト稱ス。

例ヘバ前ニ云ハル如ク, 正方形ノ對角線ト一邊トハ不可度ナリ。

問題 1. 梯形ノ對角線ハ互ニ比例ヲナス如ク他ヲ分ツ。

130. 定理二 三角形ノ二邊ヲ等比ニ分ツ點ヲ結ブ直線ハ底ニ平行ナリ。



$\triangle ABC$ = 於テ

$$BD:DA=CE:EA$$

ナリトセバ $DE \parallel BC$ ナリ。

證明 Dヨリ BC ニ平行線ヲ引キ、之ヲ DF トスレバ

$$BD:DA=CF:FA$$

然ルニ $BD:DA=CE:EA$

故ニ DF ハ DE ト合セザルベカラズ。

故ニ DE ハ BC ニ平行ナリ。

131. 此ノ如ク

甲モ乙モ各唯一ツニ限リテ有リ得

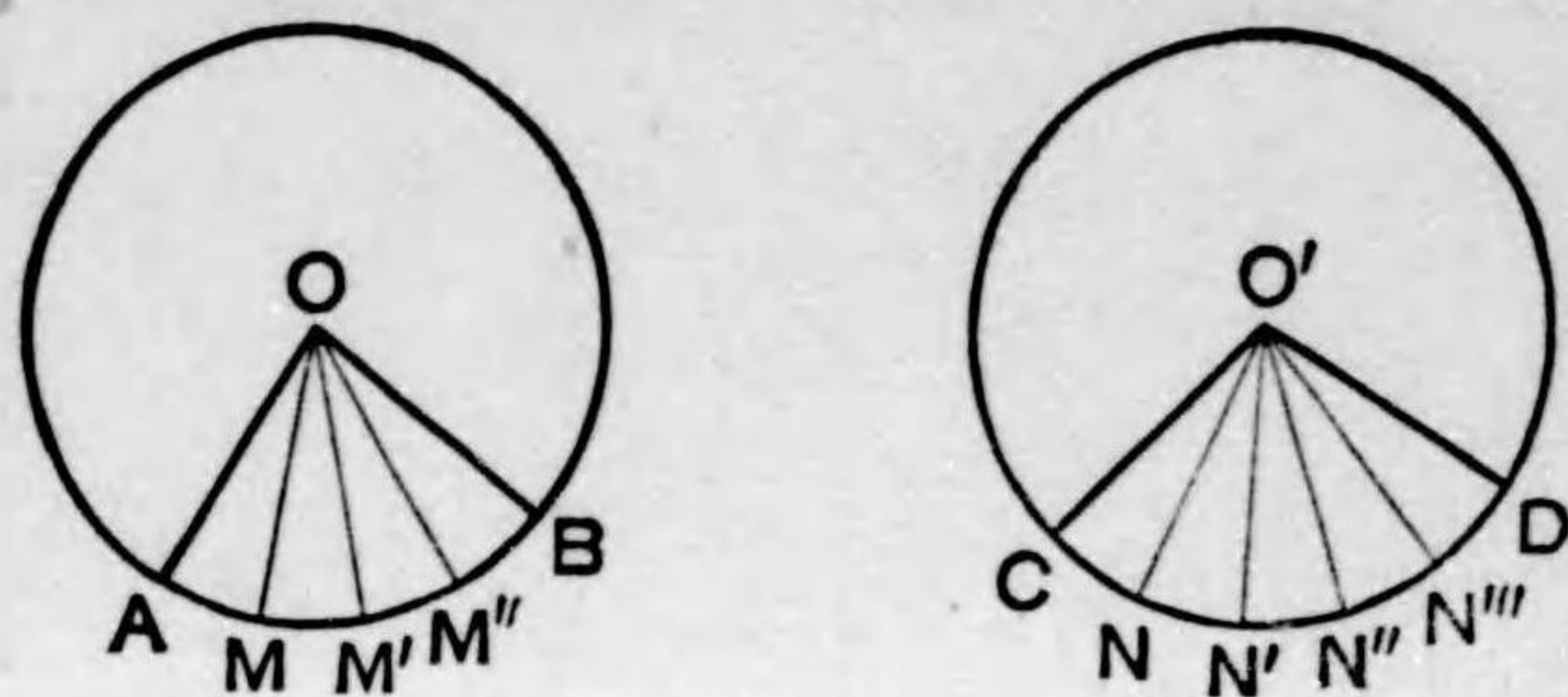
ベキトキ、甲ハ乙ナリト云フコトヲ證明シタルトキハ、之ヨリシテ直チニ乙ハ甲ナリト云フコトヲ得。此ノ論法ヲ名付ケテ同一法ト稱ス。

第一篇定理四ノ如キハ即チ同一法ニヨリテ證明セルモノナリ。

問題 2. ニツノ三角形 ACB , ADB ノ共通邊 AB 上ノ一點 E ヲ通リテ AC , AD ニ平行線ヲ引キ、之ガ夫々 BC , BD ト交ル點ヲ F 及ビ G トスレバ、 FG ハ CD ニ平行ナリ。

問題 3. 二直線 AOB , COD ノ交點ヲ O トシ、 AB , CD ノ中點ヲ夫々 P 及ビ Q トス、若シ $AO:OB=CO:OD$ ナラバ PQ ハ AC 及ビ BD ニ平行ナリ。

132. 定理三 同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ、中心ニ於テノ角ノ比ハ其ノ立ツ處ノ弧ノ比ニ等シ。



$$\angle AOB : \angle CO'D = \widehat{AB} : \widehat{CD}$$

證明 弧 AB ヲ若干等分シ、其ノ分點 M, M' 等ヲ中心 O ニ結付ケ、 $\angle AOB$ ヲ若干等分シ、其一ツヲ單位トシテ $\angle CO'D$ ヲ測リ、其ノ分點ヲ N, N', N'' 等トス。而シテ定理一ノ如クシテ之ヲ證スルコトヲ得。

系 同半徑ノ扇形ノ面積ノ比ハ弧ノ比ニ等シ。

問題 4. 相等シキ圓ガ互ニ直交スルトキハ、兩圓ニ共通ナル部分ノ面積ト半徑上ノ正方形ノ面積トノ和ハ、其ノ一ツノ圓内ノ面積ノ半ニ等シ。

第三章 相似直線形

133. ニツノ同邊數ノ多角形 $ABCDE, \dots, A'B'C'D'E', \dots$ ニ於テ、角 A, B, C 等ガ順次ニ角 A', B', C' 等ニ等シキトキハ、此ノ二ツノ多角形ヲ等角ナリト稱シ、AB ト A'B', BC ト B'C', CD ト C'D' 等ヲ對應邊ト稱シ、 $\angle A$ ト $\angle A'$, $\angle B$ ト $\angle B'$ 等ヲ對應角ト稱ス。

ニツノ多角形ガ等角ニシテ對應邊ガ比例ヲナストキ、此ノ二ツノ多角形ヲ相似ナリト稱ス。

ニツノ多角形ノ相似ナルコトヲ示スニ \sim ナル記號ヲ用フ。

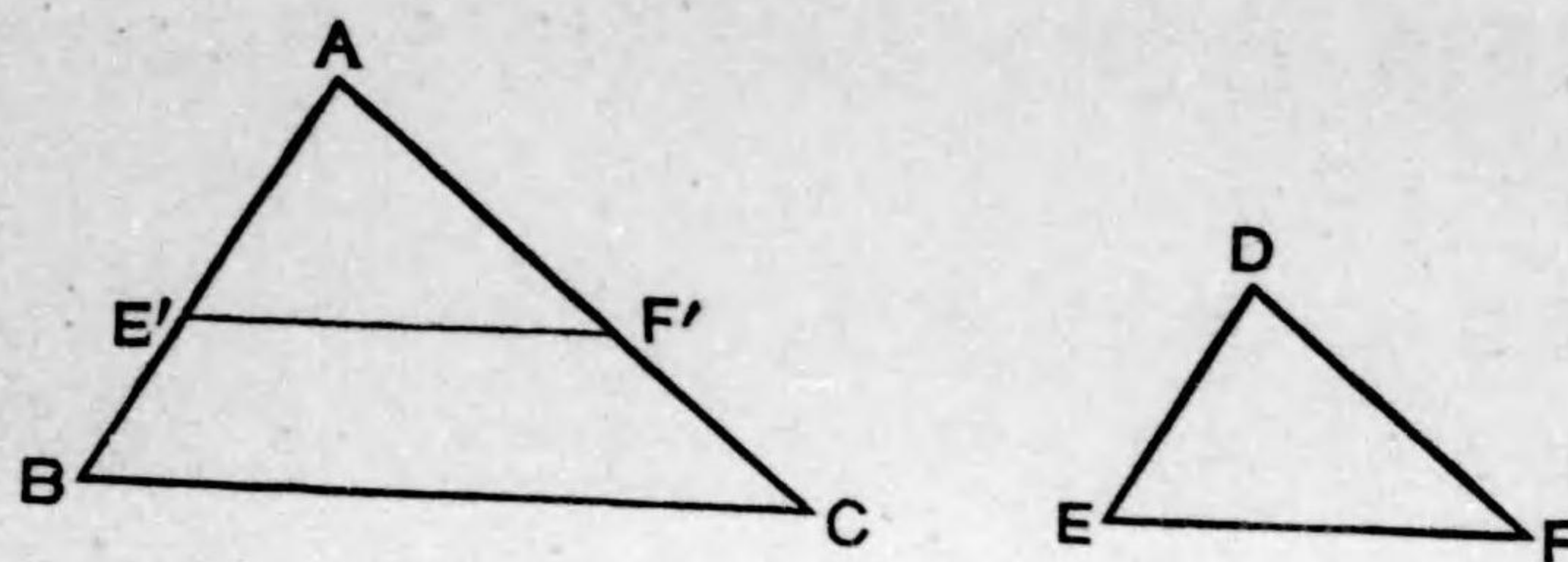
問題 5. 同一ノ多角形ニ相似ナル多角形ハ互ニ相似ナリ。

問題 6. 一ツノ多角形ノ各角ガ夫々他ノ一ツノ多角形ノ各角ニ等シクトモ,此ノ二ツノ多角形ハ必ズシモ相似ナラズ。

134. 二ツノ三角形ノ相似タルベキ場合ハ下ノ如シ。

- i 三ツノ角ガ夫々等シキトキ。
- ii 一角相等シク其ノ角ヲ夾ム二邊ガ比例ヲナストキ。
- iii 三邊ガ互ニ夫々比例ヲナストキ。

135. 定理四 一ツノ三角形ノ三ツノ角ガ夫々他ノ一ツノ三角形ノ三ツノ角ニ等シキトキ,此ノ二ツノ三角形ハ相似ナリ。



$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ ナルトキハ

$\triangle ABC$ の $\triangle DEF$

證明 $\triangle AE'F'$ ノ如ク $\triangle DEF$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ重ヌルトキハ $E'F' \parallel BC$ ニ平行ナリ。

$\therefore BA : CA = E'A : F'A = ED : FD$

同様ニ $AC : BC = DF : EF$

故ニ等角ニシテ對應邊比例ヲナスニヨリ相似ナリ。

問題 7. 二ツノ圓ノ中心ヲ結ブ直線ハ其ノ共通切線ト交リタル點ニ於テ半徑ノ比ニ内分或ハ外分セラル。

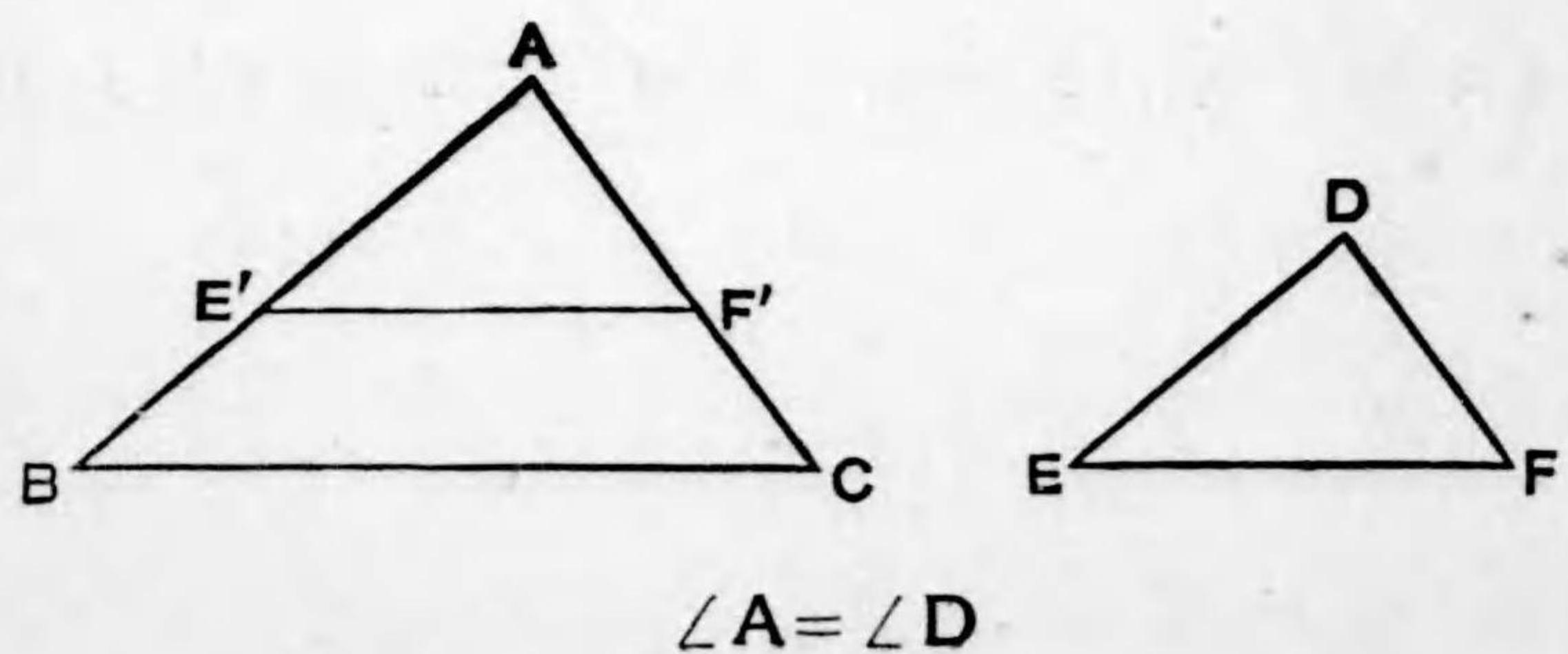
此ノ内分及ビ外分ノ點ヲ二圓ノ相似ノ中心ト稱ス。而シテ之ヲ内心ト外心トニ區別ス。

問題 8. 三角形ノ底邊ニ平行ニ引ケル凡テノ

直線ガ、他ノ二邊間ニ夾マル、部分ハ、底邊ヘノ中線ニヨリテ悉ク二等分セラレ。

問題 9. 二直線 OAB, OCD ガ一ツノ圓ト A, B, D 及ビ C ニ於テ交ル。今 $OA=6$ 寸, $OC=4$ 寸 $CD=8$ 寸 及ビ $BD=7$ 寸 ナラバ AB 及ビ AC ノ長さ如何。

136. 定理五 一ツノ三角形ノ一角ガ他ノ一ツノ三角形ノ一角ニ等シク、此等ノ角ヲ夾ム處ノ二邊ガ比例ヲナストキ、此ノ二ツノ三角形ハ相似ナリ。



$$AB:AC=DE:DF$$

ナルトキハ

$$\triangle ABC \text{ の } \triangle DEF$$

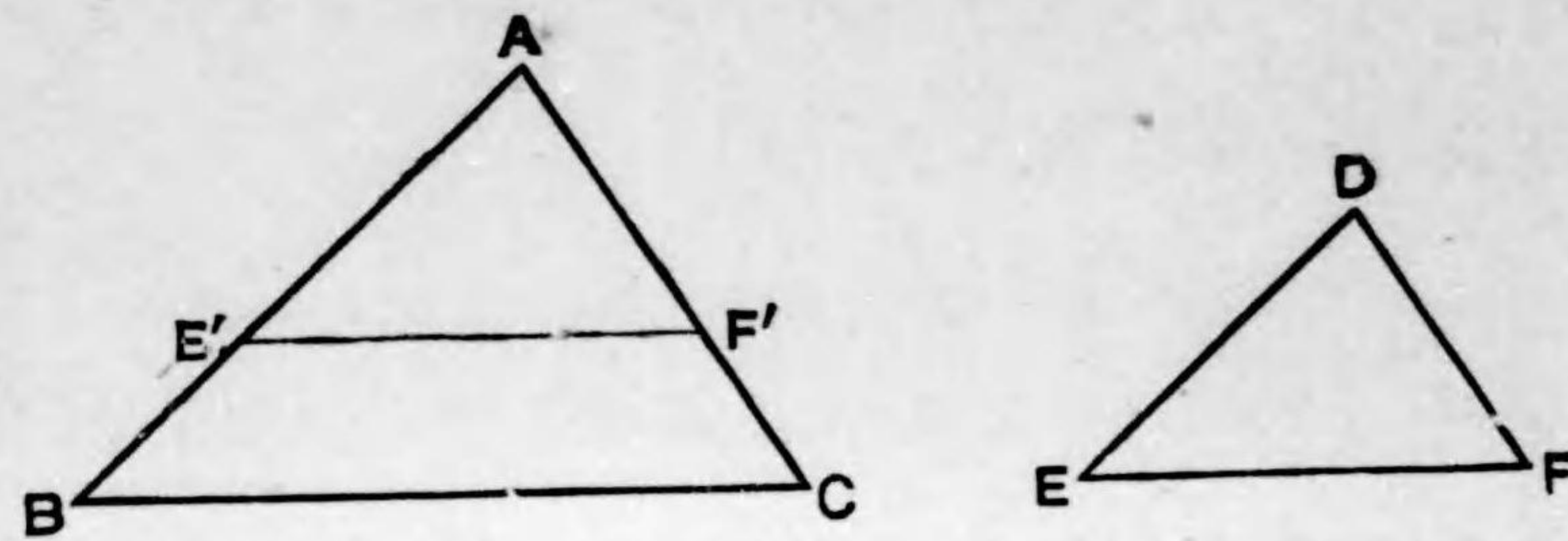
證明 $\triangle AE'F'$ ノ如ク $\triangle DEF$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ重ヌルトキハ

$$AB:AC=DE:DF$$

ナルヲ以テ $E'F'$ ハ BC ニ平行ナリ。故ニ $\triangle ABC$ ト $\triangle AE'F'$ トハ等角、從ヒテ $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トハ等角ナリ。故ニ定理四ニヨリテ相似ナリ。

問題 10. 相似三角形 ABC, DEF ノ對應邊 BC, EF ヲ相等シキ比ニ分ツ點ヲ夫々 H, K トスレバ、 $AH:DK=BC:EF$

137. 定理六 一ツノ三角形ノ三ツノ邊ガ夫々他ノ一ツノ三角形ノ三ツノ邊ト比例ヲナストキ、此ノ二ツノ三角形ハ相似ナリ。



二ツノ三角形ニ於テ

$$AB:DE=BC:EF=CA:FD$$

ナラバ

$\triangle ABC$ の $\triangle DEF$

證明 AE' ヲ DE ニ等シクトリ, E' ヨリ BC ニ平行ニ $E'F'$ ヲ引ケバ, $\triangle ABC$ の $\triangle AE'F'$ ナルヲ以テ

$$AB:AE'=BC:E'F'=CA:F'A$$

$$\text{然ルニ } AB:DE=BC:EF=CA:FD$$

而シテ

$$AE'=DE$$

\therefore

$$E'F'=EF$$

$$F'A=FD$$

\therefore

$$\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$$

\therefore

$$\triangle ABC \text{の} \triangle DEF$$

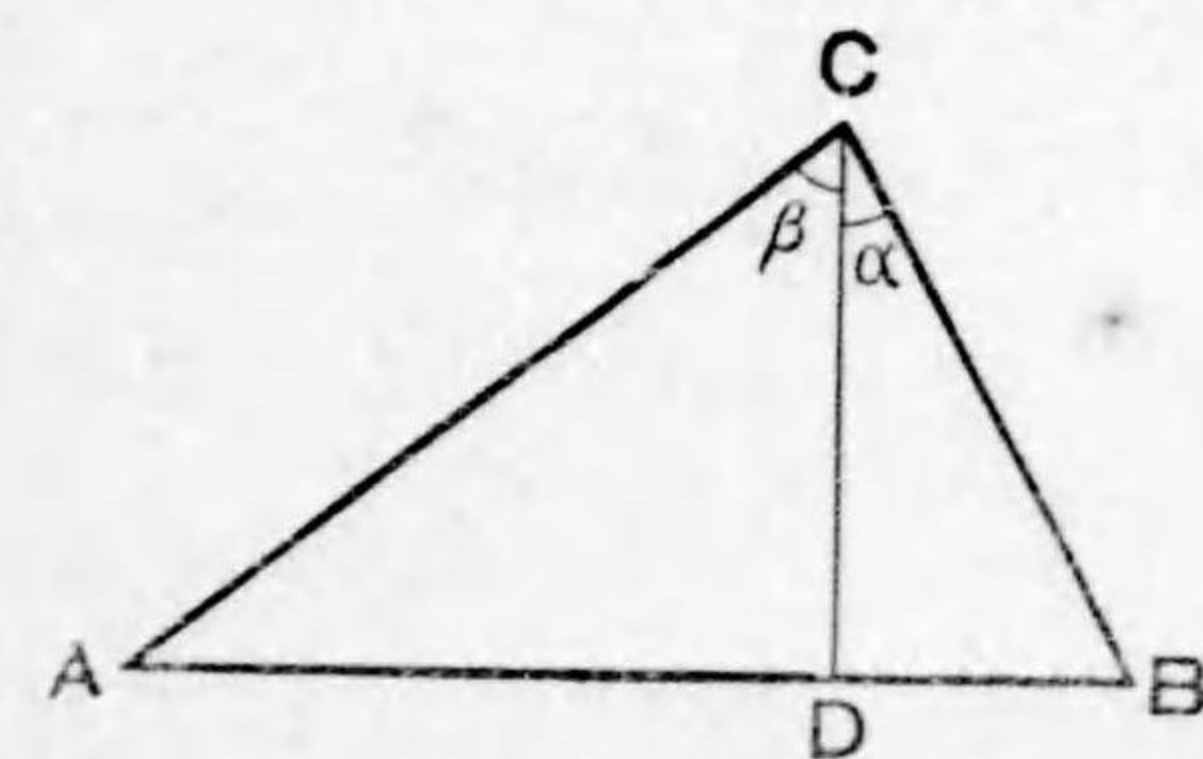
問題 11. 三角形ノ三邊ノ中點ヲ結ビテ得ラルル三角形ハ原三角形ト相似ナリ。

138. 定理七 直角三角形ノ直角

頂ヨリ斜邊ニ垂線ヲ引ケバ

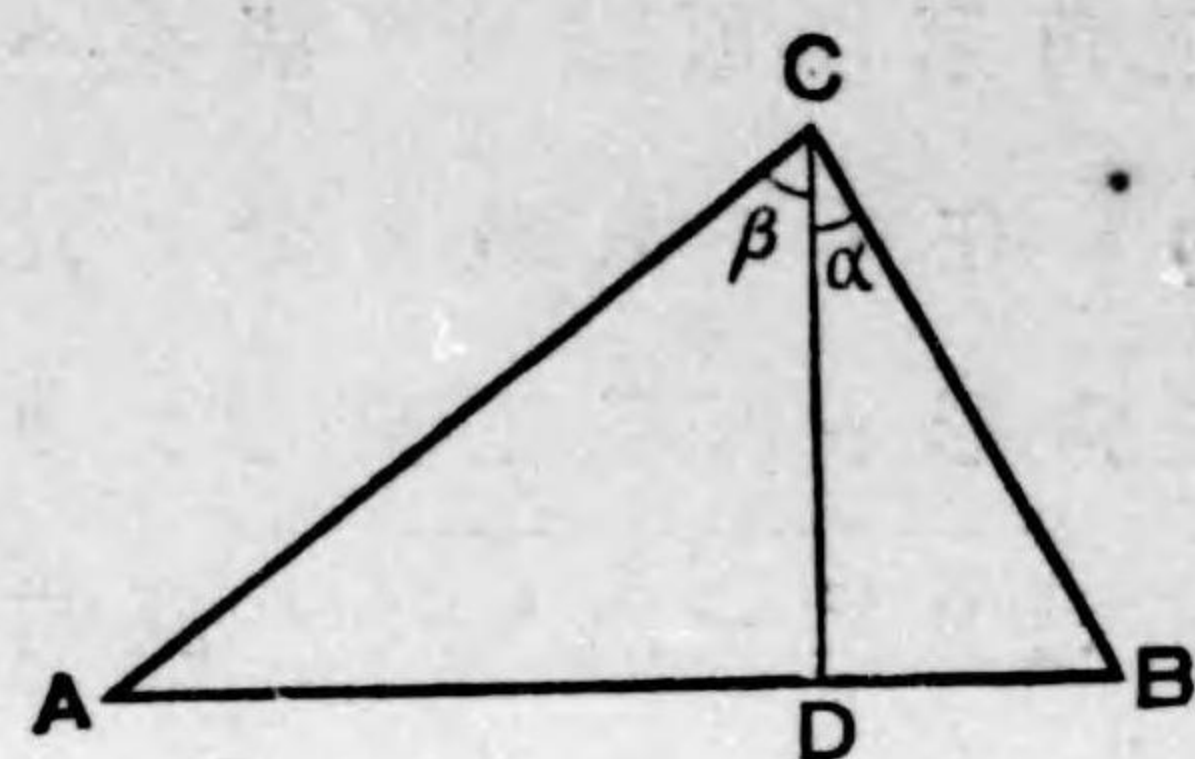
1. 垂線ノ兩側ニアル二ツノ三角形ハ相似ニシテ,原三角形トモ相似ナリ。

2. 垂線ハ斜邊ノ二ツノ分ノ比例中項ナリ。



證明

i 各 $\angle\alpha$ ノ餘角ナルヲ以テ



$$\angle B = \angle \beta$$

同様 =

$$\angle A = \angle \alpha$$

故 =

$$\triangle CAD \text{ の } \triangle BCD$$

又 $\angle B$ が共通ニシ $\angle \alpha = \angle A$ ナルヲ以テ

$$\triangle ABC \text{ の } \triangle BCD$$

ii

$$\triangle ADC \text{ の } \triangle CDB$$

$$AD : DC = DC : DB$$

問題 12. 圖ニ於テ $AB : BC = BC : BD$

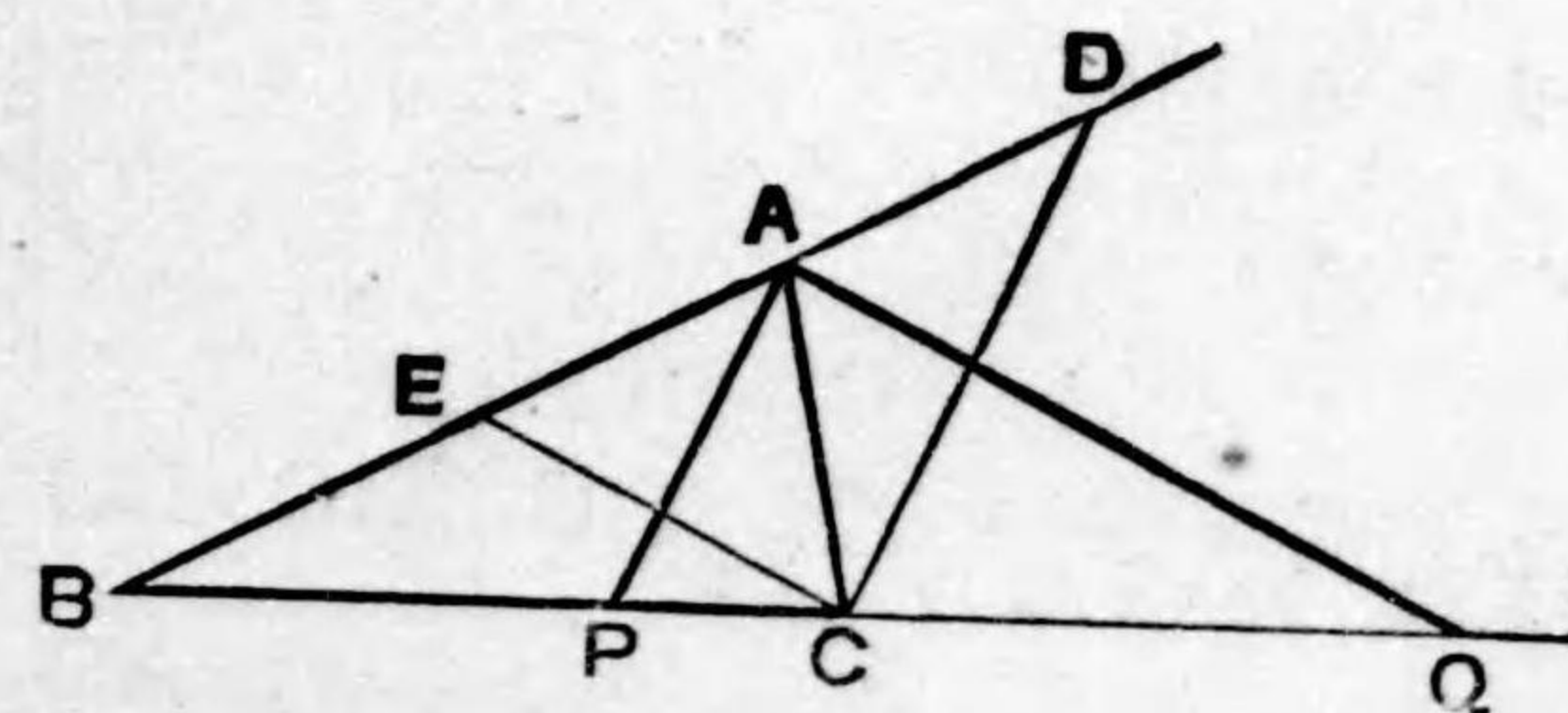
$$AB : AC = AC : AD$$

問題 13. 直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ヲ夫々 6 尺, 8 尺ナリトス。直角頂ヨリ斜邊ニ下セル垂線ノ長サヲ求ム。

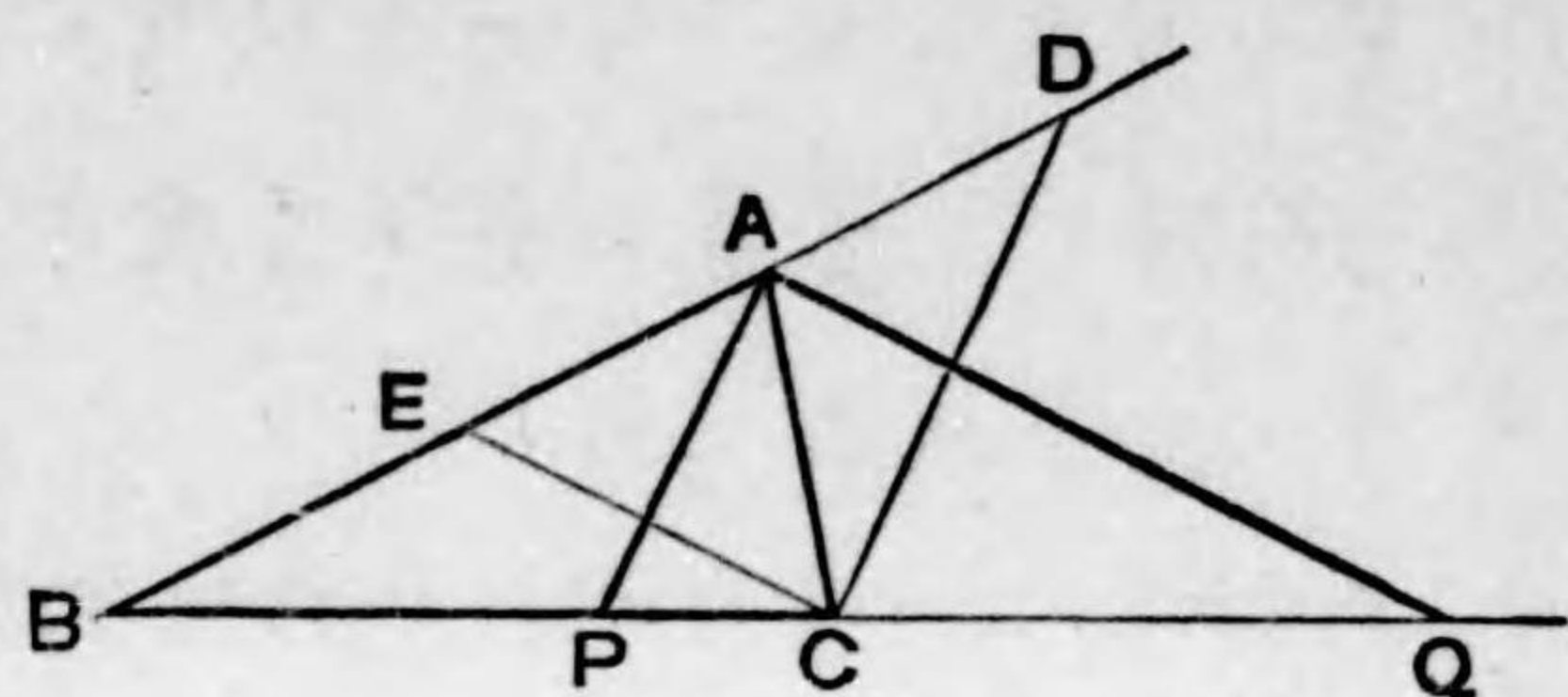
問題 14. 三角形ノ頂點ヨリ底邊ヘ引ケル垂線ガ三角形ノ内ニ在リテ底邊ノ分ノ比例中項ナルトキハ, 此ノ三角形ハ直角三角形ナリ。

問題 15. 斜邊 9 尺, 一邊 6 尺ノ直角三角形アリ。直角頂ヨリ斜邊ヘ下セル垂線ハ, 之ヲ如何ナル長サニ分ツカ。

139. 定理八 三角形ノ一角ノ二等分線ハ, 對邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ等シク内分シ, 又其ノ外角ノ二等分線ハ對邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ等シク外分ス。



- i $\triangle ABC$ ノ $\angle A$ ノ二等分線 AP ヲ引クトキ
ハ $BP : PC = AB : AC$
- ii $\triangle ABC$ ノ外角 CAD ノ二等分線 AQ ヲ引



クトキハ $BQ: CQ = AB: AC$

証明 C ヨリ PA = 平行 = CD ヲ引ケバ,
 $\triangle ACD$ ハ二等邊三角形ナリ。

而シテ $BP: PC = BA: AD$

$\therefore BP: PC = BA: AC$

同様ニ C ヨリ AQ = 平行 = CE ヲ引ケバ

$BQ: CQ = BA: EA$

$\therefore BQ: CQ = BA: AC$

此ノ如ク直線 BC ヲ二點 P, Q ニテ内分及ビ
 外分スルトキ

$BP: PC = BQ: QC$

ナレバ調和二分タルト稱ス。

B, P, C, Q ヲ調和列點ト稱ス。

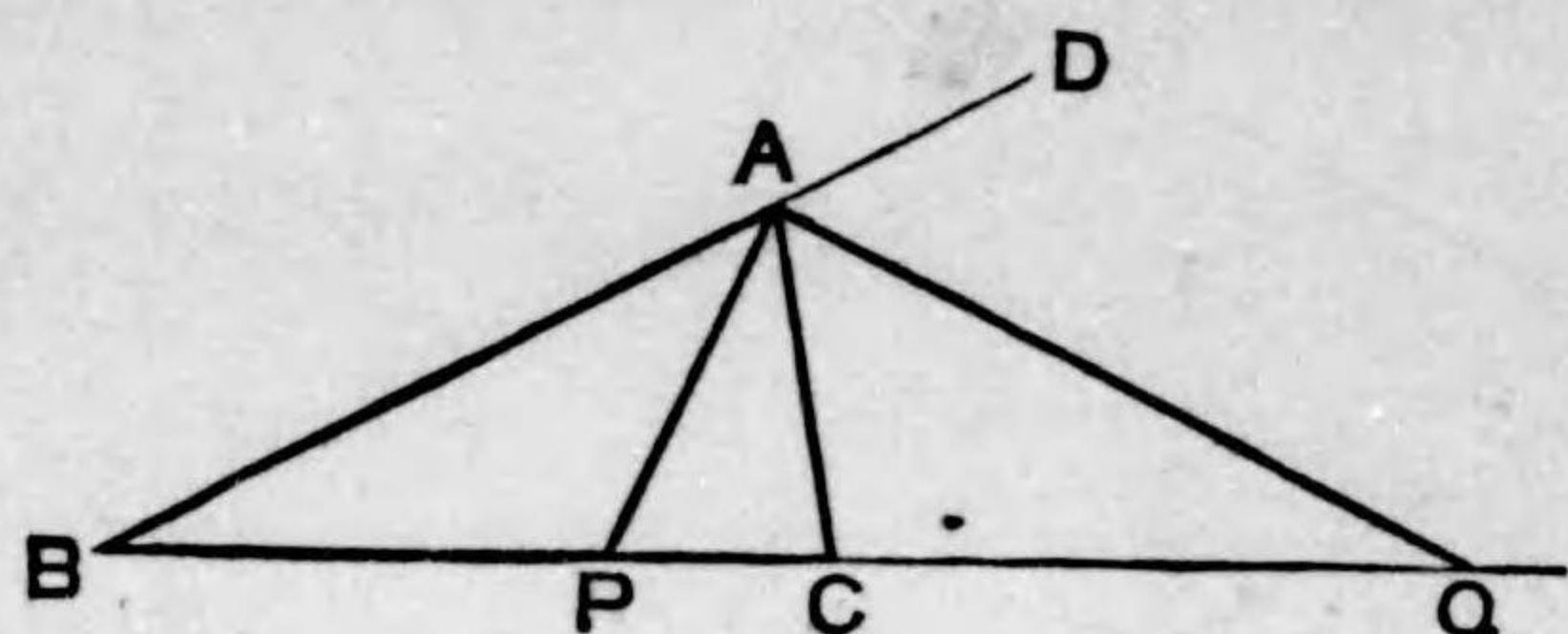
P, Q ハ B, C ニ關シテ互ニ調和共軛點ナリト
 稱ス。

問題 16. 底 6 尺 5 寸他ノ二邊 8 尺及 12 尺ナル
 三角形アリ。頂角ノ二等分線ガ底ヲ分ツ部分何
 尺ヅツナルカ。

問題 17. $\triangle ABC$ ノ一邊 BC ノ中點ヲ D トス。
 $\angle ADB, \angle ADC$ ノ二等分線ガ夫々 AB, AC ト交
 ル點ヲ E 及ビ F トスレバ $EF \parallel BC$ 。

問題 18. 一點 O ヲ出ヅル四直線 OA, OB, OC,
 OD アリテ $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 45^\circ$ トス。
 一直線 ABCD ヲ以テ之ヲ切り $AO = DO$ ナラシ
 ムレバ, AB 又ハ CD ハ AD 及 BC ノ比例中項
 ナリ。

140. 定理九 三角形ノ底ヲ他ノ
 二邊ノ比ニ等シク内分及ビ外分スル
 點ヲ頂點ニ結ブ直線ハ, 頂角及ビ其ノ
 外角ヲ二等分ス。

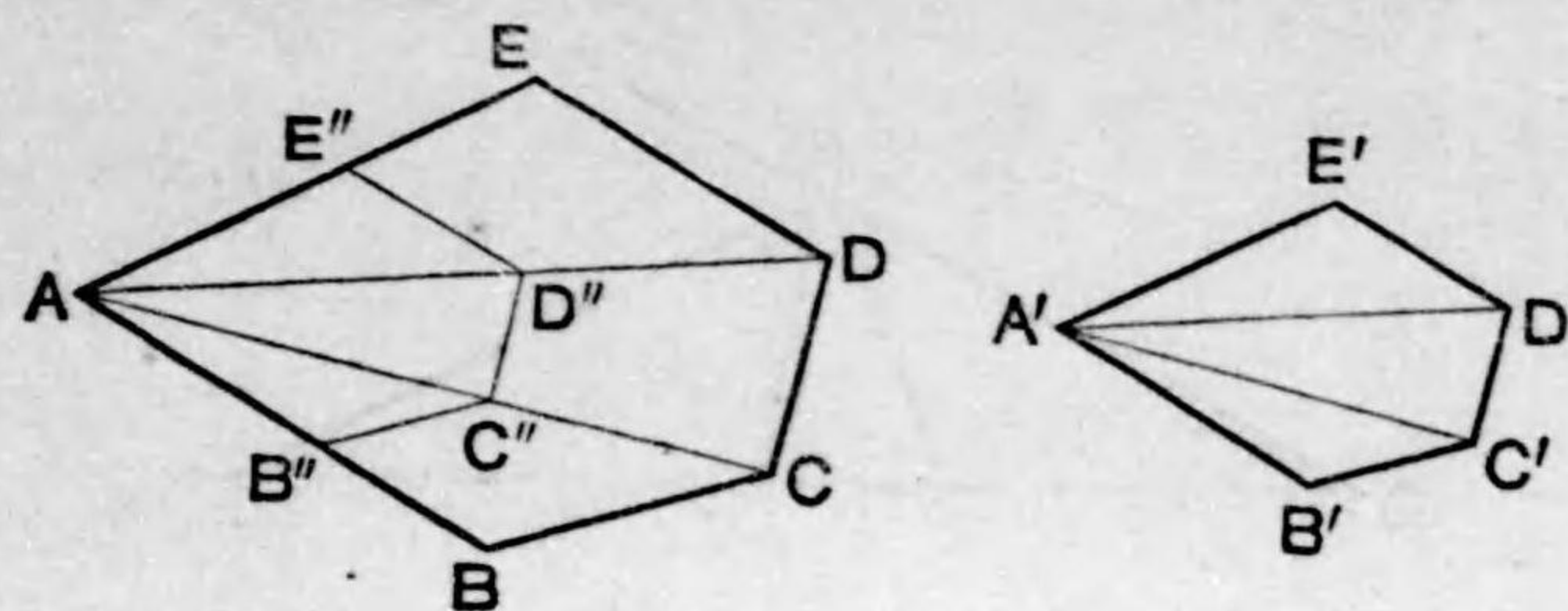


$\triangle ABC$ ノ底 BC ヲ $AB:AC$ ニ等シク内分及ビ外分スル點 P, Q ヲ A ニ結ブトキハ PA ハ $\angle BAC$ ヲ, QA ハ $\angle CAD$ ヲ二等分ス。

證明 $\angle BAC$ 及ビ $\angle CAD$ ヲ二等分スル直線ハ, BC ヲ $AB:AC$ ニ等シク内分及ビ外分ス。而シテ P, Q ハ此ノ點ナリ。故ニ同一法ニヨリテ PA, QA ハ $\angle BAC$ 及ビ $\angle CAD$ ヲ二等分スルコトヲ知ル。

問題 19. 圓ニ内接スル三角形 ABC アリ。 D ヲ BC 上ノ一點トスルトキ $AB:AC=BD:DC$ ナラバ AD ノ延長ハ弧 BC ヲ二等分ス。

141. 定理十 相似多角形ハ同數ノ相似三角形ニ分ツコトヲ得。



ニツノ相似多角形ヲ $ABCDE, A'B'C'D'E'$ トシ,

相對應スル角ノ頂點 A, A' ヨリ對角線ヲ引キ, 兩多角形ヲ同數ノ三角形ニ分ツ。然ルトキハ

$$\triangle ABC \text{ の } \triangle A'B'C'$$

$$\triangle ACD \text{ の } \triangle A'C'D'$$

$$\triangle ADE \text{ の } \triangle A'D'E'$$

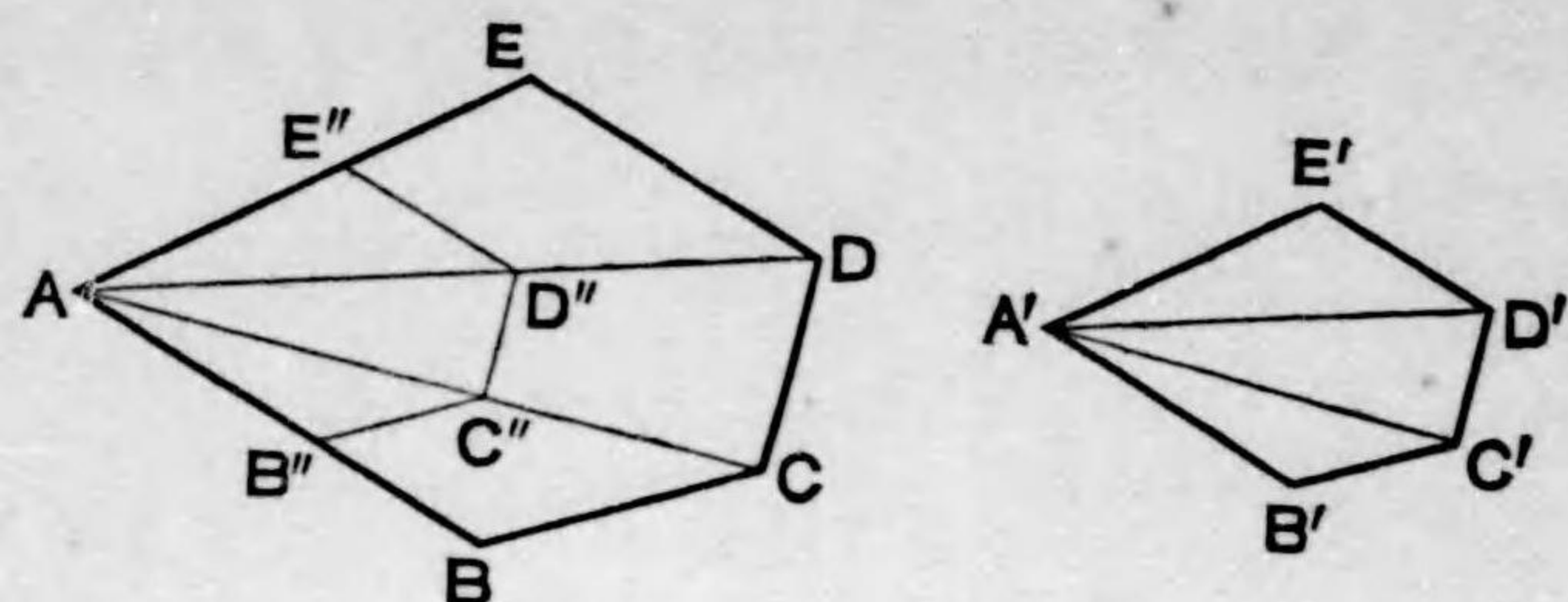
證明 AB'' ヲ $A'B'$ ニ等シクトリ, B'' ヨリ BC ニ平行ニ $B''C''$ ヲ引ケバ

$$\frac{AB}{AB''} = \frac{BC}{B''C''}$$

然ルニ $A'B' = AB''$

而シテ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$

$\therefore B'C' = B''C''$



又 $\angle A'B'C' = \angle ABC = \angle AB''C''$

$\therefore \triangle A'B'C' \equiv \triangle AB''C''$

而シテ $\triangle ABC \sim \triangle AB''C''$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

次ニ $\angle BCD = \angle B'C'D'$

$\angle BCA = \angle B'C'A'$

$\therefore \angle ACD = \angle A'C'D'$

故ニ同様ニ $\triangle CDA \sim \triangle C'D'A'$

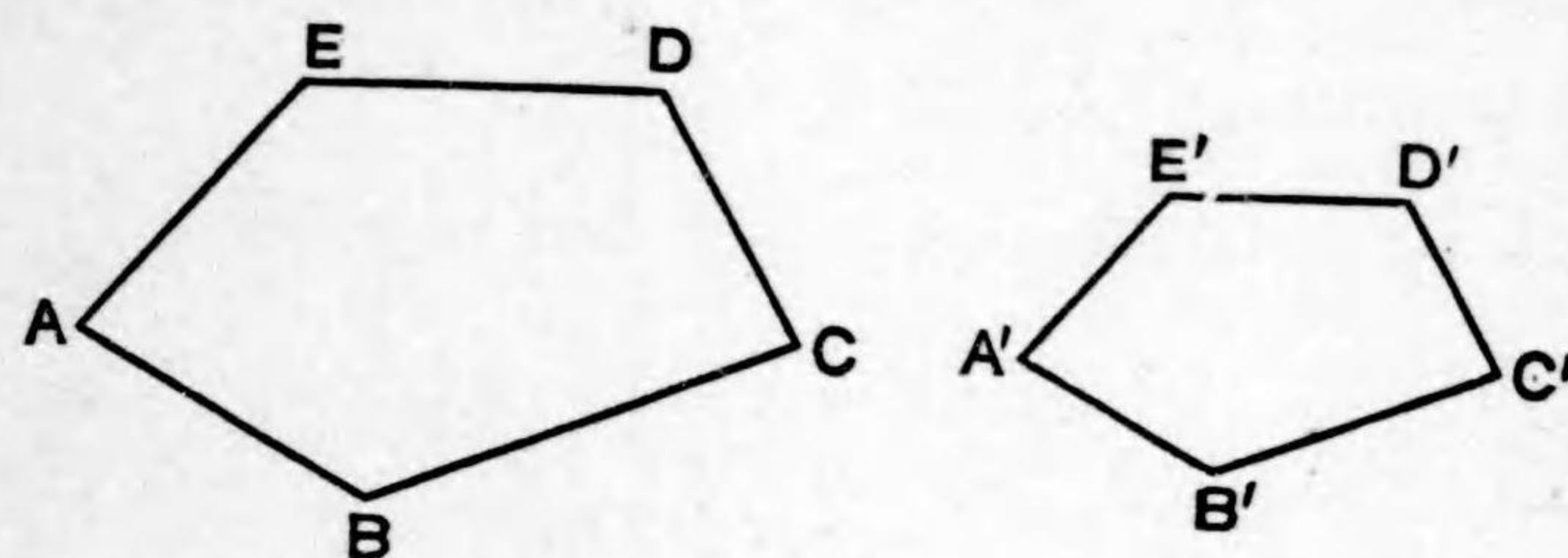
又同様ニ $\triangle DEA \sim \triangle D'E'A'$

問題 20. 相似多角形ノ相對應スル對角線ノ比ハ對應邊ノ比ニ等シ。

問題 21. 一ツノ四邊形ノ三ツノ角ガ夫々他ノ一ツノ四邊形ノ三ツノ角ニ順ニ相等シク、且一雙

ノ相等シキ角ヲ夾ム邊ガ比例ヲナストキハ、此ノ兩形ハ相似ナリ。

142. 定理十一 相似多角形ノ周ノ比ハ其ノ對應邊ノ比ニ等シ。



多角形 ABCDE ト A'B'C'D'E' トガ相似ナリトス。

然ルトキハ

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'A'} = \frac{AB}{A'B'}$$

證明 兩多角形ハ相似ナルヲ以テ

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

故ニ比例ノ性質ニヨリテ

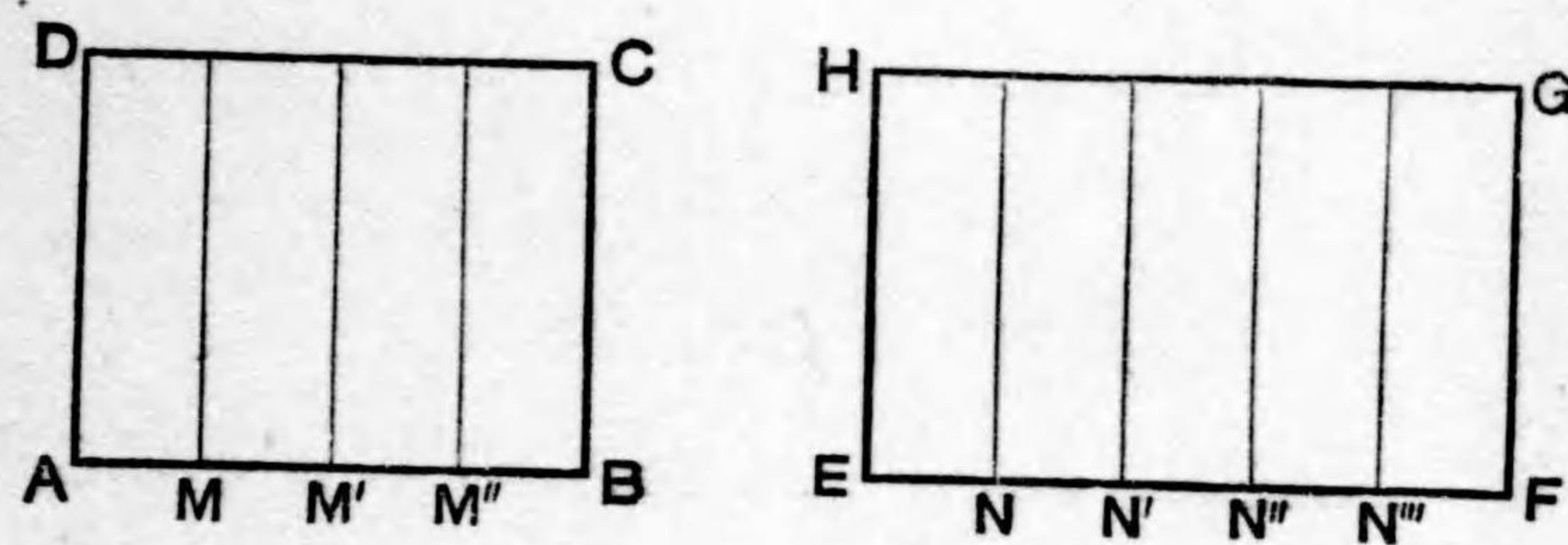
$$\frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'A'} = \frac{AB}{A'B'}$$

問題 22. 相似多角形ノ凡テノ對角線ノ和ノ比
ハ對應邊ノ比ニ等シ。

第四章

面積

143. 定理十二 等高ノ矩形ノ比
ハ其ノ底ノ比ニ等シ。



ABヲ若干等分シ,其ノ分點 M, M'等ヨリ AD
ニ平行線ヲ引キ,矩形 ACヲ若干ノ相等シキ矩形
ニ分チ,之ヲ單位トシテ矩形 EGヲ測リ,其ノ分
點ヲ N, N', N''等トス。而シテ定理一ノ如クシ
テ

$$\text{矩形 AC} : \text{矩形 EG} = \text{AB} : \text{EF}$$

ナルコトヲ證シ得ベシ。

系一 等高ノ平行四邊形ノ比ハ其ノ底ノ比ニ等シ。

系二 等高ノ三角形ノ比ハ其ノ底ノ比ニ等シ。

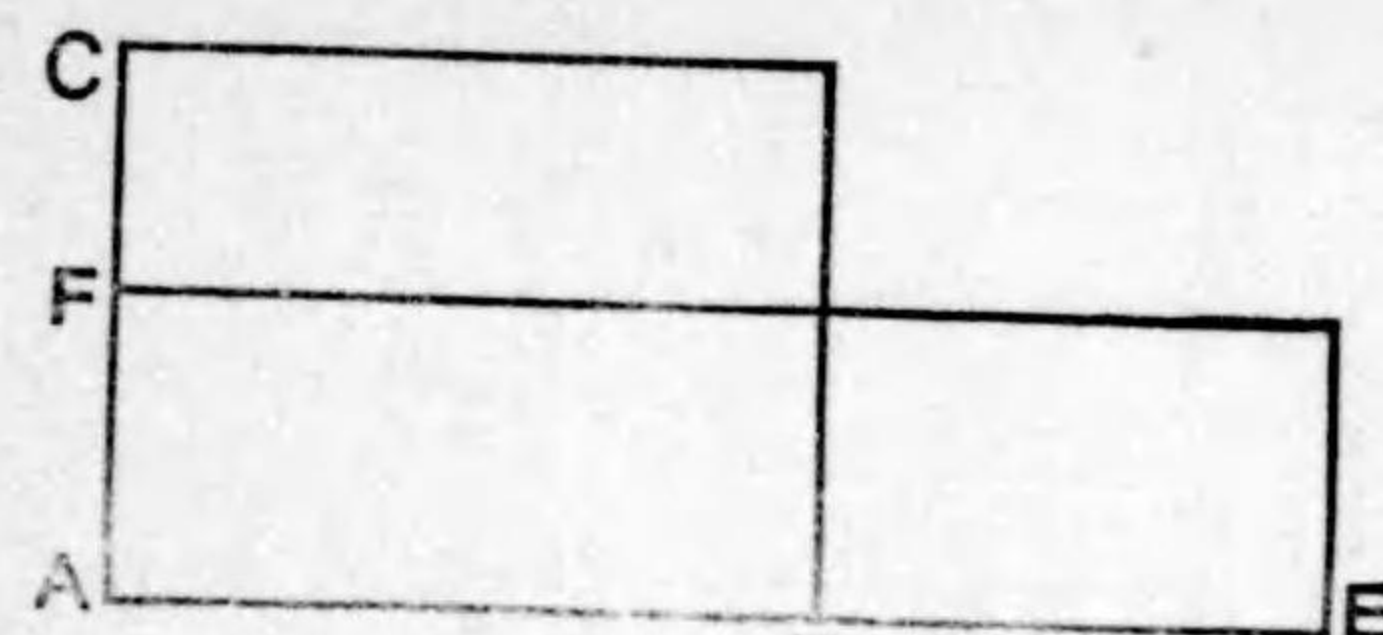
問題 23. 等底ノ矩形又ハ三角形ノ比ハ其ノ高さノ比ニ等シ。

問題 24. 四邊形 ABCD = 於テ $\angle A$ 及ビ $\angle C$ ノ二等分線ガ BD 上ニ於テ交ラバ, $\angle B$ 及ビ $\angle D$ ノ二等分線ハ AC 上ニ於テ交ル。

問題 25. 四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ E トス。 $\triangle AEB = 4$ 平方寸, $\triangle BEC = 7$ 平方寸, $\triangle CED = 6$ 平方寸ナルトキ $\triangle DEA$ ノ面積ヲ求ム。

問題 26. $\triangle ABC$ ノ邊 BC 上ノ一點 O ヨリ AB, AC ニ平行ニ OM, ON ヲ引キ, AC ト M, AB ト N ニ於テ交ラシムレバ $\triangle OMN$ ハ $\triangle BNO, \triangle CMO$ ノ比例中項ナリ。

144. 定理十三 四ツノ直線ガ比例ヲナストキ, 外項ヨリナル矩形ハ内項ヨリナル矩形ニ等シ。



AB, AE, AF, AC ヲ四ツノ直線トシ,
 $AB:AE = AF:AC$ トス。

然ラバ 矩形 BC = 矩形 EF

證明 矩形 BF : 矩形 EF = AB : AE

矩形 BF : 矩形 BC = AF : AC

然ルニ $AB:AE = AF:AC$

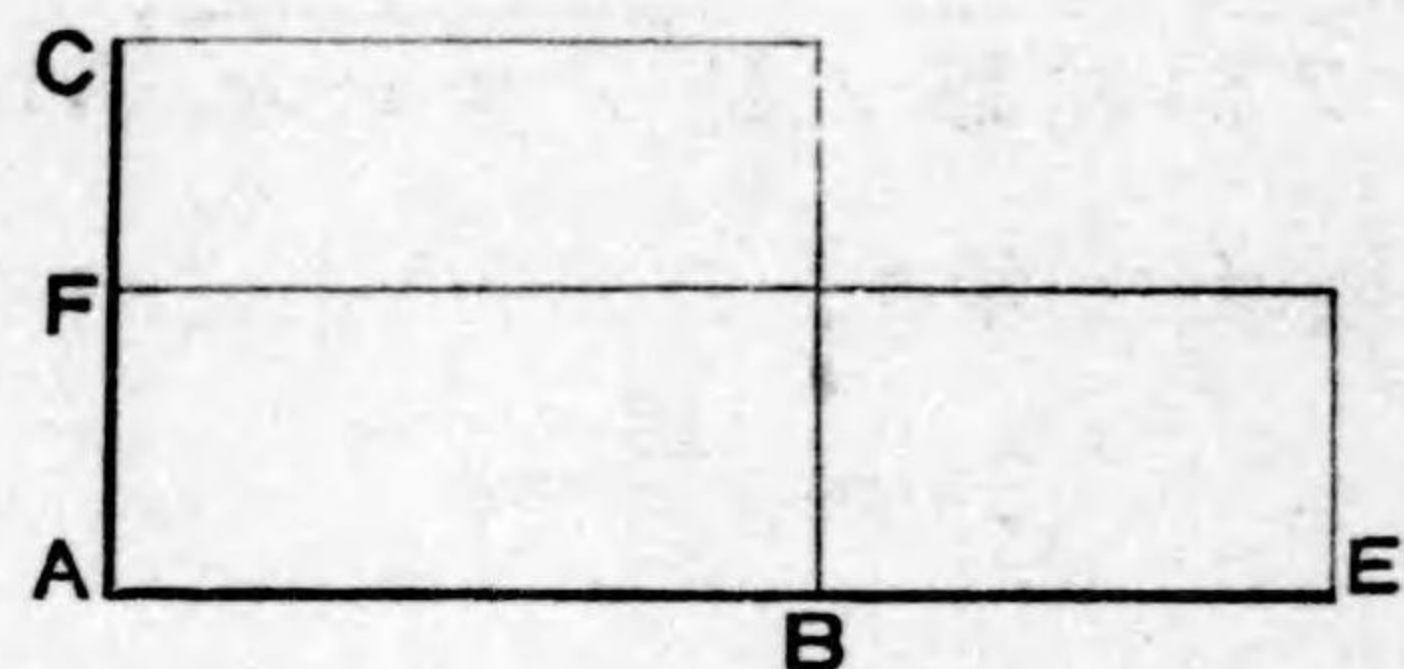
\therefore 矩形 BF : 矩形 EF = 矩形 BF : 矩形 BC

\therefore 矩形 BC = 矩形 EF

問題 27. 直角三角形 ABC ノ斜邊 BC へ A ヨリ下シタル垂線ヲ AD トス。然ラバ

$$\overline{DA}^2 = \overline{DB} \cdot \overline{DC}, \overline{BA}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{BC}, \overline{CA}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CB}$$

145. 定理十四 二ツノ矩形ガ相等シキトキ,一ツノ矩形ノ二邊ヲ内項トシ他ノ矩形ノ二邊ヲ外項トスル比例ガ成立ツ。



矩形 $BC =$ 矩形 EF

然ラバ $AB : AE = AF : AC$

證明 矩形 $BF : 矩形 EF = AB : AE$

矩形 $BF : 矩形 BC = AF : AC$

然ルニ 矩形 $EF = 矩形 BC$

$\therefore AB : AE = AF : AC$

問題 28. 一ツノ三角形ノ二邊ノ比ハ其ノ邊ニ對スル高サノ反比ニ等シ。

146. 數多ノ比ノ乘積ニ等シキ比ヲ夫等ノ比ノ複比或ハ相乘比ト稱ス。

相等シキニツノ比ノ複比ヲ各ノ比ノニ乘比ト稱シ,三ツノ比ノ複比ヲ三乘比ト稱ス。其ノ他之ニ倣フ。

A, B, C ヲ同種類ノ量トスレバ, $A : C$ ハ $A : B$ 及 $B : C$ ノ複比ニ等シ。

證明

$$\frac{A}{B} = m \quad \frac{B}{C} = n$$

トスレバ

$$A = mB \quad B = nC$$

$$A = mnC$$

$$\frac{A}{C} = mn = \frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C}$$

A, B, C, D ナル四ツノ直線ニ就キテ, $A : B$ ト $C : D$ トノ複比ハ $A \cdot C : B \cdot D$ ニ等シ。

證明

$$\frac{A}{B} = m \quad \frac{C}{D} = n$$

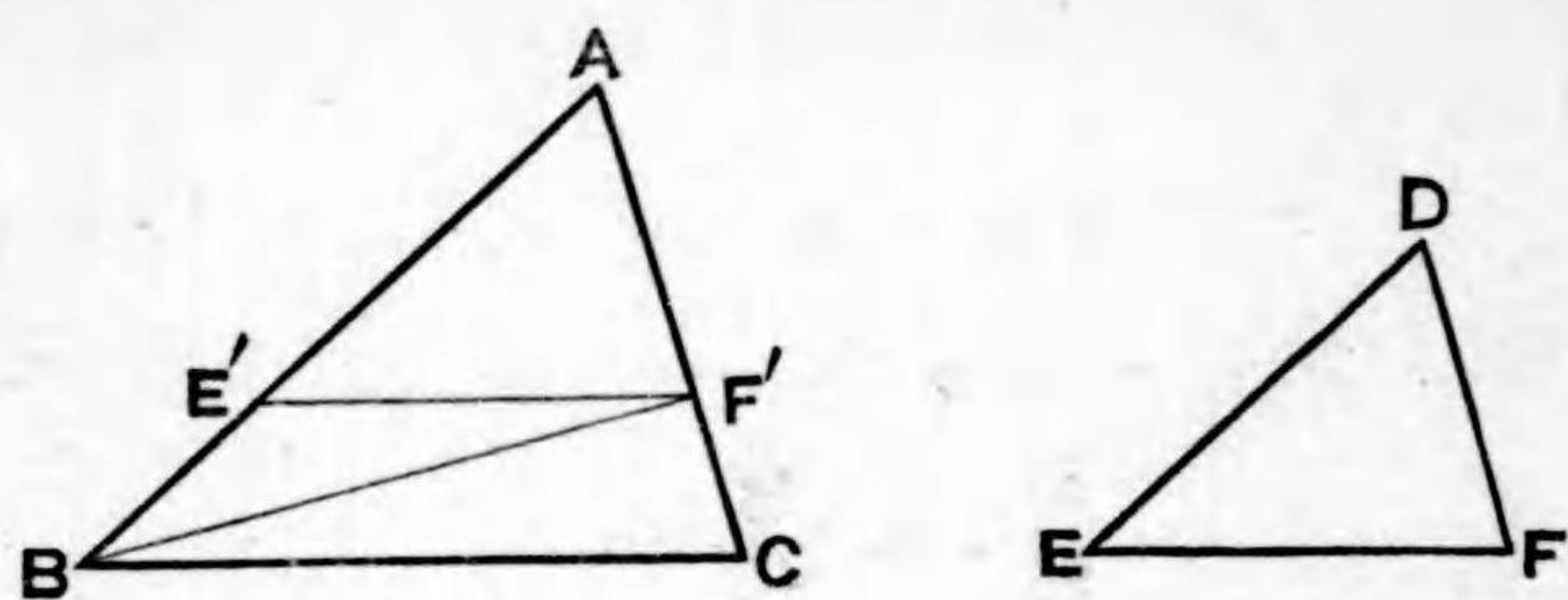
トスレバ

$$A = mB \quad C = nD$$

$$A \cdot C = mnB \cdot D$$

$$\frac{A \cdot C}{B \cdot D} = mn = \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D}$$

147. 定理十五 一ツノ角ガ相等
シキニツノ三角形ノ比ハ、其ノ角ヲ夾
メル二邊ノ矩形ノ比ニ等シ。



$\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ $\angle A = \angle D$ トスレ
バ

$$\triangle ABC : \triangle DEF = AB \cdot AC : DE \cdot DF$$

證明 $\triangle AE'F'$ ノ如ク $\triangle DEF$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上
ニ重ネ、B ト F' トヲ結ビ付クルトキハ

$$\frac{\triangle AE'F'}{\triangle ABF'} = \frac{AE'}{AB}$$

$$\frac{\triangle ABF'}{\triangle ABC} = \frac{AF'}{AC}$$

$$\therefore \frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{DE \cdot DF}{AB \cdot AC}$$

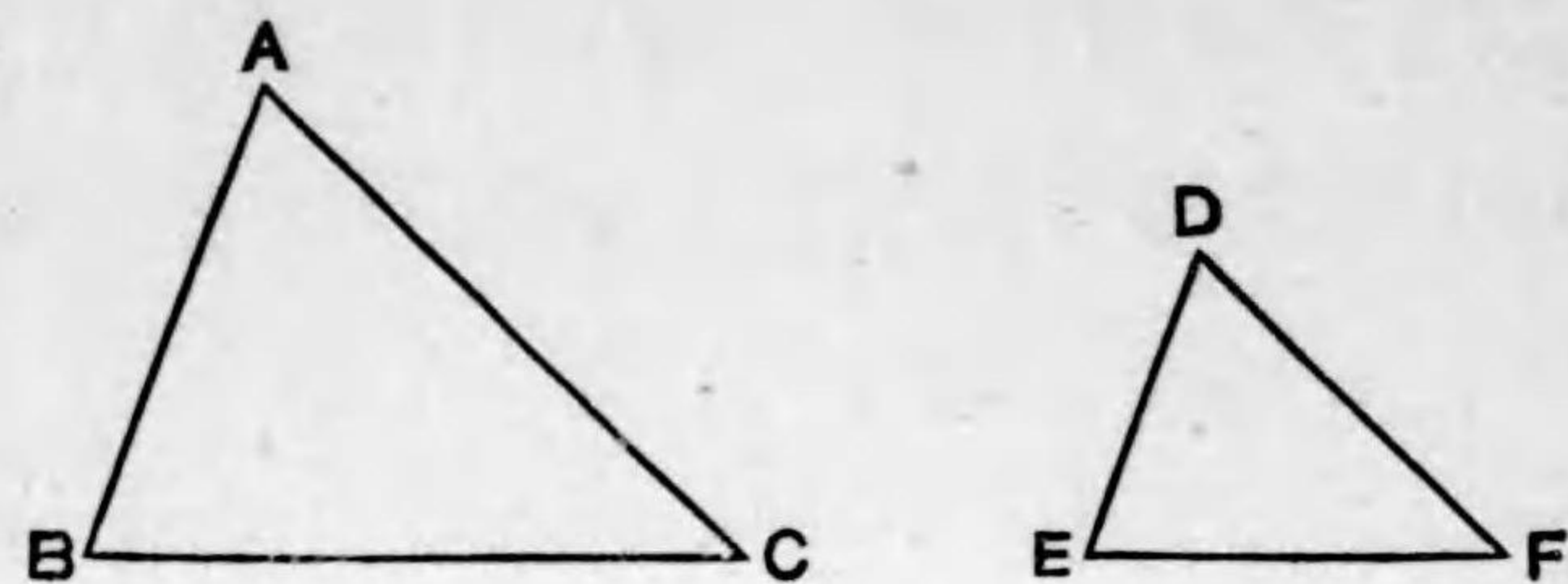
系一 一角相等シキニツノ平行四邊形ノ比ハ、
其ノ角ヲ夾メル二邊ヨリナル矩形ノ比ニ等シ。

系二 一ツノ三角形ノ一ツノ角ガ、他ノ一ツノ
三角形ノ一ツノ角ノ補角ナルトキハ、此ノニツノ
三角形ノ比ハ夫等ノ角ヲ夾ム二邊ヨリナル矩形
ノ比ニ等シ。

問題 29. $\triangle ABC$ ノ邊 AB, AC ノ上ニ夫々點
D 及ビ點 E ヲ取リ、 $AD : DB = 2 : 3$, $AE : EC = 7 : 5$
ナラシム。ニツノ三角形 ABC ト ADE トヲ比
較セヨ。

問題 30. $\triangle ABC$ ノ一ツノ角 A 又ハ其ノ補角
ヲ頂角トシ、AB, AC ノ比例中項ヲ二邊トスル二
等邊三角形ハ原三角形ニ等シ。

148. 定理十六 相似三角形ノ比
ハ其ノ對應邊ノ二乗比ニ等シ。



$\triangle ABC \sim \triangle DEF$

トセバ

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{DE}^2}$$

證明 此ノニツノ三角形ハ相似ナルヲ以テ

$$\angle A = \angle D$$

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{AB \cdot AC}{DE \cdot DF} = \frac{AB}{DE} \cdot \frac{AC}{DF}$$

而シテ
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{DE}^2}$$

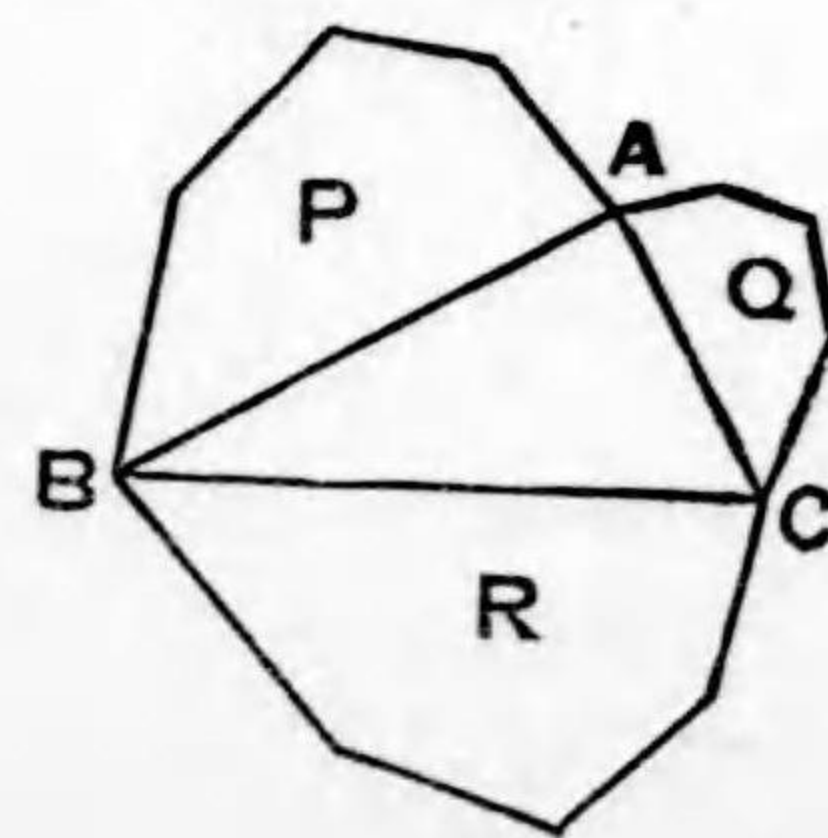
系 相似多角形ノ比ハ其ノ對應邊ノ二乗比ニ等シ。

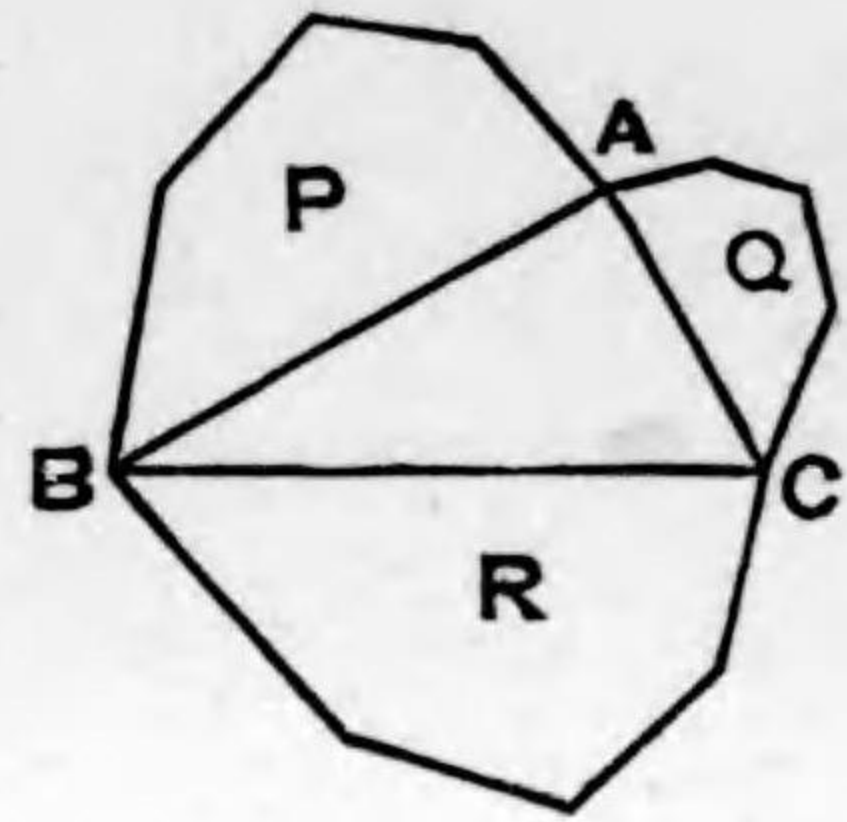
問題 31. ニツノ相似三角形ノ對應邊ハ夫々5寸及ビ3寸ニシテ,一方ノ面積ガ75平方寸ナルトキ,他ノ方ノ面積ヲ求ム。

問題 32. $\triangle ABC$ ノ重心ヲGトシ, BC, CAノ中點ヲ夫々D, Eトス。 $\triangle ABG$ ト $\triangle DEG$ トノ面積ヲ比較セヨ。

問題 33. 同一圓ノ内接正六邊形ト外接正六邊形トノ面積ノ比ハ3ト4トノ如シ。

149. 定理十七 直角三角形ノ三邊ヲ對應邊トシ各邊上ニ相似多角形ヲ畫クトキハ,斜邊ノ上ノ多角形ハ他ノ二邊ノ上ノ多角形ノ和ニ等シ。





P, Q, R ヲ直角三角形 ABC ノ三邊上ニ畫ケル相似多角形トスレバ

$$P+Q=R$$

證明

$$P:Q=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$$

∴

$$P+Q:Q=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2:\overline{AC}^2$$

又

$$R:Q=\overline{BC}^2:\overline{AC}^2$$

然ルニ

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$$

∴

$$P+Q:Q=R:Q$$

∴

$$P+Q=R$$

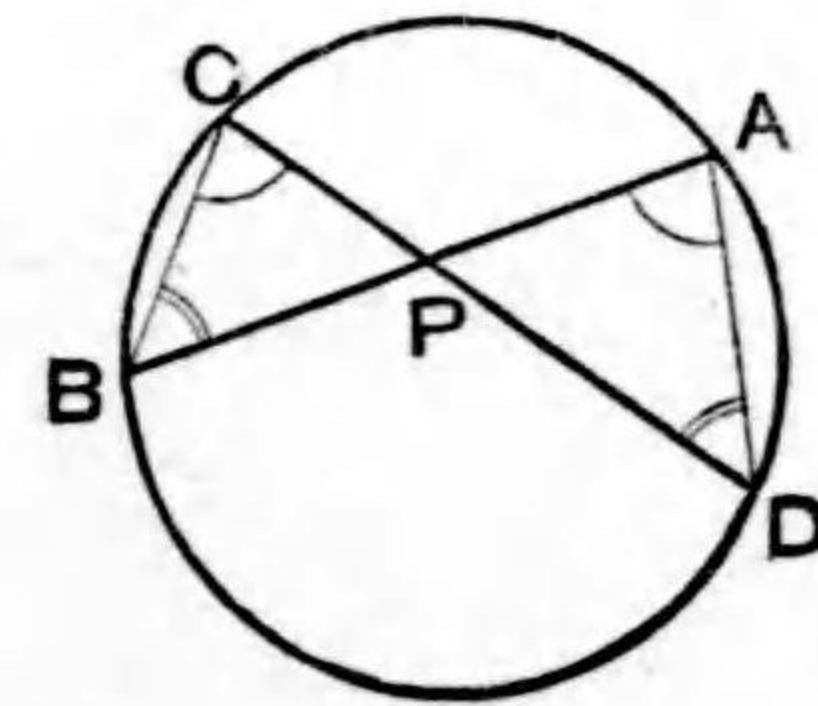
是即チ Pythagoras ノ定理ノ擴張セラレタルモノナリ。

問題 34. 直角三角形ノ二邊ノ上ニソレガ對應邊トナル如ク畫カレタル相似多角形ノ比ハ、直角

頂ヨリ斜邊ヘ引ケル垂線ガ之ヲ分ツ分ノ比ニ等シ。

問題 35. 直角三角形ノ二邊ノ上ニ畫カレタル正三角形ノ面積ガ九平方寸ト二十五平方寸ナルトキハ斜邊ノ長サハ如何。

150. 定理十八 ニツノ弦ガ交ルトキ其ノ一ツノ弦ノ二ツノ分ヨリナル矩形ハ、他ノ弦ノ二ツノ分ヨリナル矩形ニ等シ。

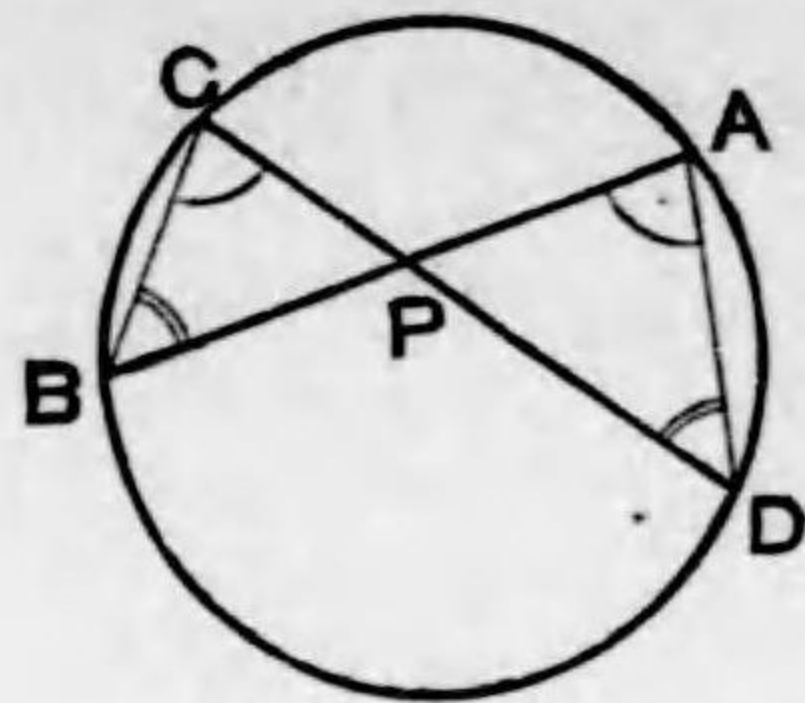


ニツノ弦 AB, CD ノ交點ヲ P トスレバ

$$AP \cdot BP = CP \cdot DP$$

證明 C ト B, A ト D ヲ結ベバ

$$\angle C = \angle A$$



$$\angle B = \angle D$$

$$\therefore \triangle BCP \sim \triangle ADP$$

$$\therefore AP : DP = CP : BP$$

$$\therefore AP \cdot BP = CP \cdot DP$$

系一 逆ニ二直線 AB, CD ガ P ニ於テ交リ
 $AP \cdot BP = CP \cdot DP$ ナレバ, A, C, B, D ナル四點
 ヲ通ル圓ヲ畫クコトヲ得。

證明 $AP : CP = DP : BP$

而シテ $\angle CPB = \angle APD$

$$\therefore \triangle CPB \sim \triangle APD$$

$$\therefore \angle A = \angle C$$

故ニ A, C, B, D 四點ヲ通ル圓ヲ畫クコトヲ
 得。

系ニ 圓内ノ一定點ヲ通ル凡テノ弦ノ二ツノ
 分ヨリナル矩形ハ悉ク相等シ。

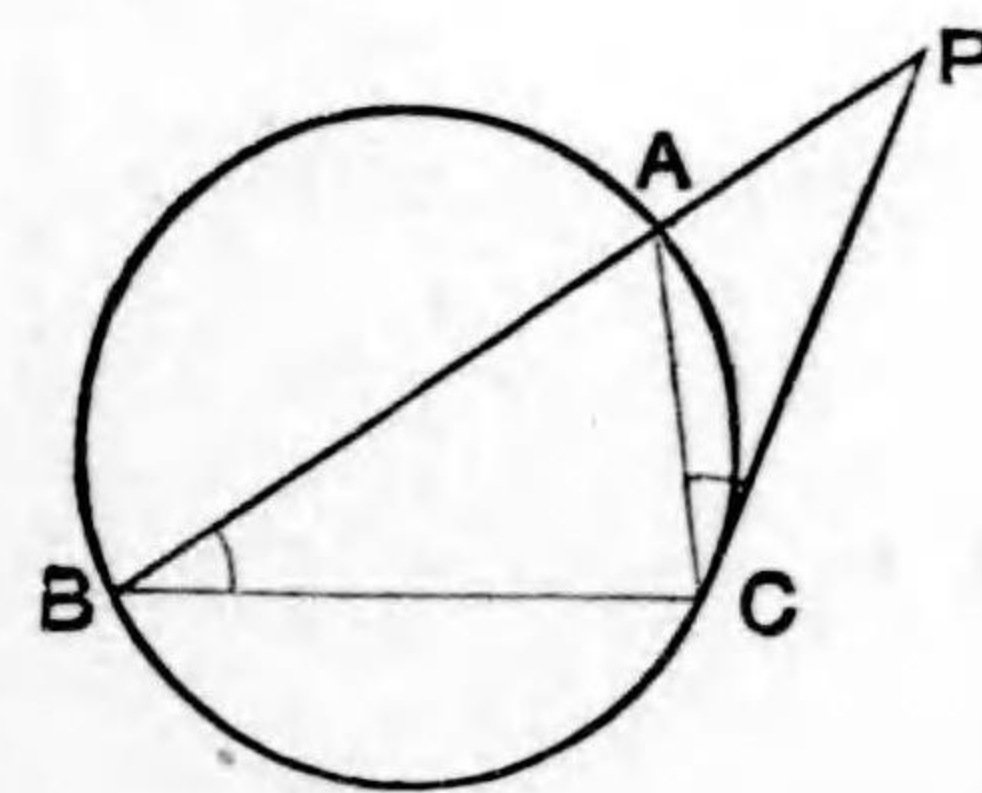
問題 36. 圖ニ於テ O ヲ中心トスレバ

$$AP \cdot BP = CP \cdot DP = \overline{OA}^2 - \overline{OP}^2$$

問題 37. 鋭角三角形ノ三ツノ高サガ垂心ニヨ
 リテ分タルタル分ヨリナル矩形ハ相等シ。

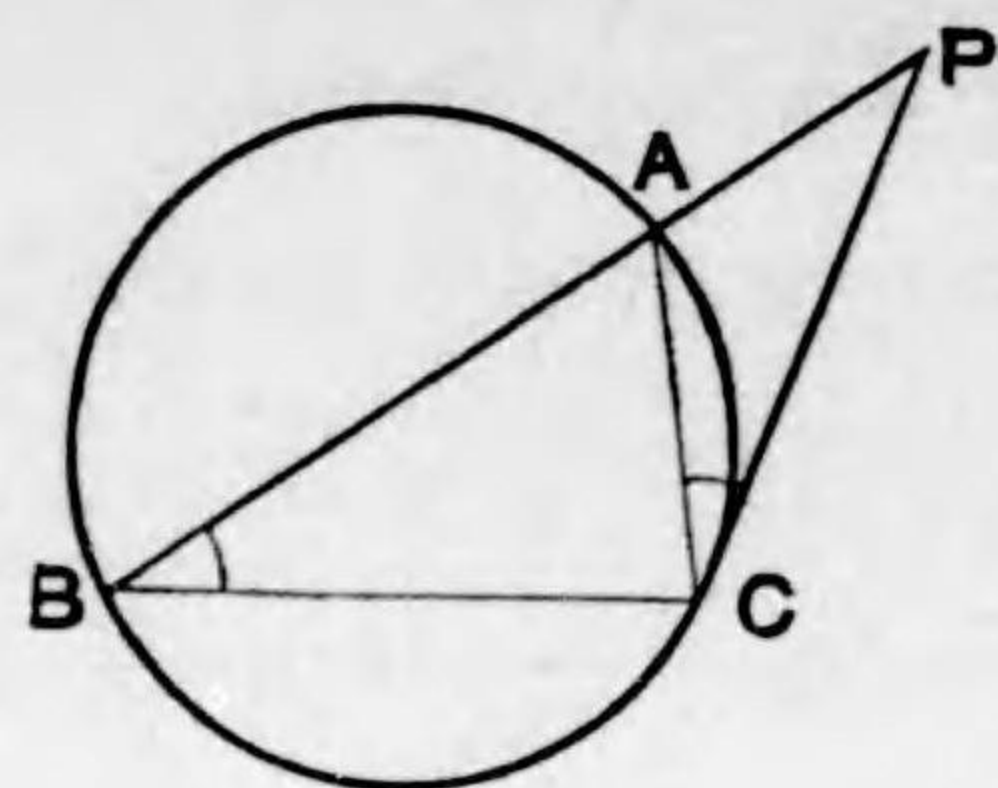
問題 38. 半徑 4 寸ナル圓内ノ一點ヲ通ル弦ノ
 分ノ矩形ガ 15 平方寸ナルトキハ, 此ノ點ヲ通ル直
 徑ハ如何ニ分タル、カ。

151. 定理十九 圓外ノ一點ヨリ
 其ノ圓ニ切線及ビ割線ヲ引クトキハ,
 切線上ノ正方形ハ割線ノ二ツノ分ヨ
 リナル矩形ニ等シ。



圓外ノ一點 P ヲリ割線 PAB 及ビ切線 PC ヲ
 引クトキハ

$$PA \cdot PB = \overline{PC}^2$$



證明 CヲAトBニ結び、 $\triangle ACP$ 、 $\triangle BCP$ ヲ作レバ

$$\angle ACP = \angle B$$

而シテ $\angle P$ ハ兩三角形ニ共通ナリ

$$\therefore \triangle ACP \sim \triangle BCP$$

$$\therefore PA : PC = PC : PB$$

$$\therefore PA \cdot PB = PC^2$$

系一 逆ニ、若シ一ツノ圓外ノ點ヨリ引ケル割線ノ分ヨリナル矩形ガ、其ノ點ヲ圓周上ノ一ツノ點ト結ブ直線ノ上ノ正方形ニ等シケレバ此ノ直線ハ圓ニ切ス。

證明 $PA \cdot PB = PC^2$

$$\therefore PA : PC = PC : PB$$

而シテ $\angle P$ ハ共通ナル故

$$\triangle APC \sim \triangle BPC$$

$$\therefore \angle ACP = \angle B$$

故ニ PC ハ圓ニ切ス。

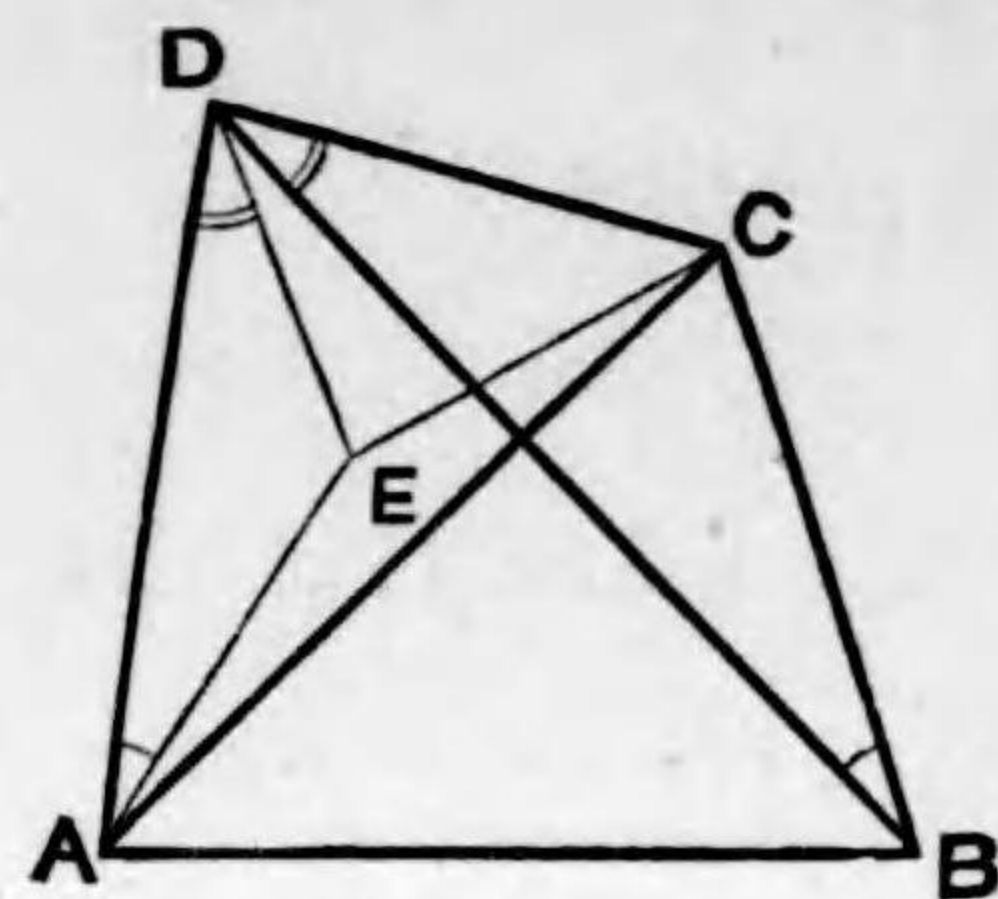
系二 圓外ノ一定點ヨリ引ケル凡テノ割線ノ分ヨリナル矩形ハ悉ク相等シ。

問題 39. 二直線 OAB 、 OCD ガ圓ト交ル點ヲ A 、 B 、 C 、 D トス。 $OA=5$ 寸、 $OC=7$ 寸、 $CD=3$ 寸ナルトキ、 AB ノ長ヲ求ム。

問題 40. 直角三角形 ABC ノ斜邊 BC ニ A ヨリ下シタル垂線ヲ AD トス。 $\triangle ADB$ 、 $\triangle ADC$ ノ外接圓ハ夫々 AC 、 AB ニ切ス。

問題 41. 富士山頂ヨリ海面ヲ見ヌルニ、水平線ニ當リテ漸ク橋頭ヲ顯セル軍艦アリ。山頂ヨリ軍艦マデノ距離約幾哩ナルカ。但シ山ノ高サヲ 2 哩、地球ノ直徑ヲ 8000 哩トシテ計算スベシ。

● 152. **定理二十** 四邊形ノ二ツノ對角線ヨリナル矩形ガ相對スル邊ヨリナル矩形ノ和ニ等シケレバ、此ノ四邊形ニ外接スル圓ヲ畫クコトヲ得。



$$DB \cdot AC = AB \cdot CD + AD \cdot CB$$

ナラバ A, B, C, D ナル四點ヲ通ル圓ヲ畫ク
コトヲ得。

證明 形内ニ一點 E ヲトリ、之ヲ A ト C ニ結
ビ

$$\angle DAE = \angle DBC$$

$$\angle ADE = \angle CDB$$

ナラシム。

然ラバ

$$\triangle ADE \text{ の } \triangle CDB$$

∴

$$AD : DB = AE : CB$$

∴

$$AD \cdot CB = DB \cdot AE$$

又

$$AD : DB = ED : DC$$

而シテ

$$\angle ADB = \angle EDC$$

∴

$$\triangle ADB \text{ の } \triangle EDC$$

$$\therefore AB : EC = DB : DC$$

$$\therefore AB \cdot DC = DB \cdot EC$$

$$\therefore AD \cdot CB + AB \cdot DC = DB(AE + EC)$$

$$\text{然ルニ } AD \cdot BC + AB \cdot CD = DB \cdot AC$$

故ニ E ハ AC ノ上ニアルベシ。

$$\therefore \angle DAC = \angle DBC$$

故ニ A, B, C, D ナル四點ヲ通ル圓ヲ畫クコ
トヲ得。

系 圓ニ内接スル四邊形ノ兩對角線ヨリナル
矩形ハ、相對スル邊ヨリナル矩形ノ和ニ等シ。

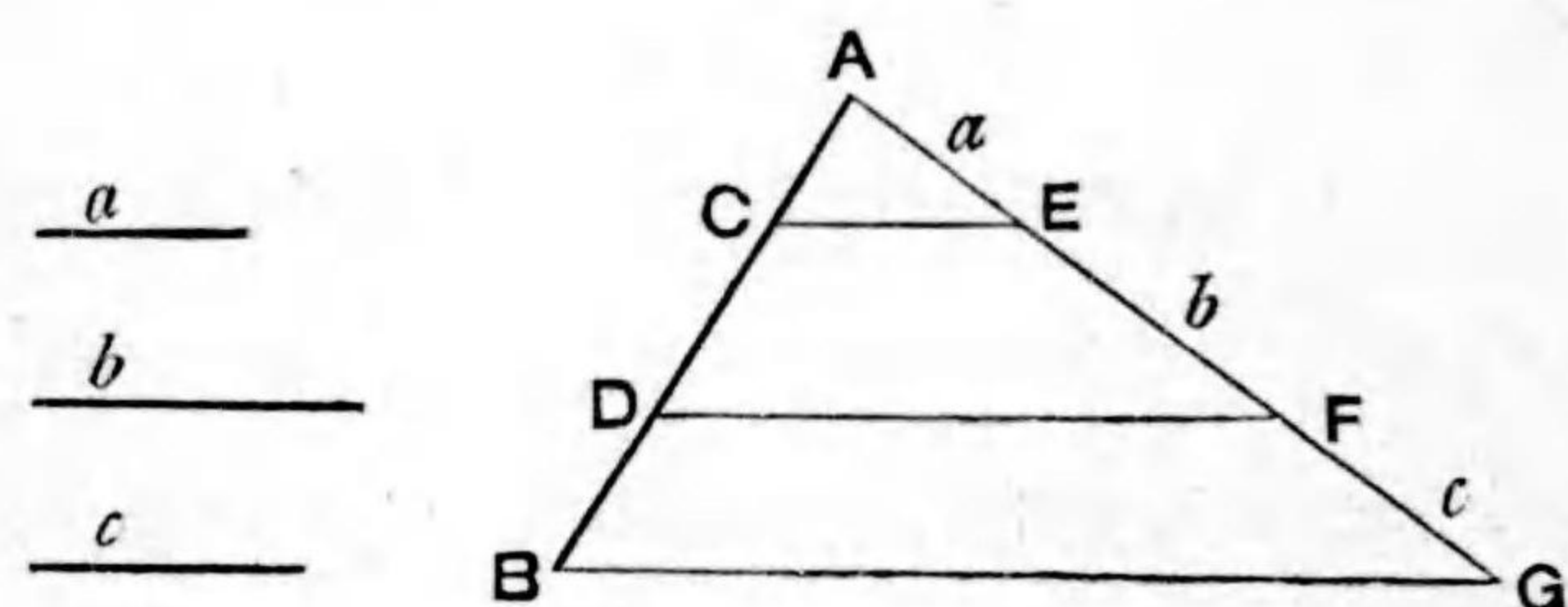
Ptolemy (西曆第二世紀エジプトノ數學者) ノ
定理ト稱スルモノ即チ是ナリ。

問題 42. 圓ニ内接スル四邊形ノ各邊ガ a 寸, b 寸,
c 寸, d 寸, 一ツノ對角線ガ e 寸ナリトス。他ノ一ツ
ノ對角線ノ長サヲ求ム。

問題 43. 三角形ノ二邊ヨリナル矩形ハ、其ノ二
邊ヲ夾ム角ノ頂點ヨリ第三邊ニ引ケル垂線ト外
接圓ノ直径ヨリナル矩形ニ等シ。

第五章 作圖題

153. 作圖題一 一與直線ヲ與比ニ分ツコト。



作圖 ABヲ與直線トシ, $a:b:c$ ヲ與比トス, A點ヨリ ABト任意ノ角ヲ夾ミ直線 AGヲ引キ

$$AE=a, EF=b, FG=c$$

トシ, BトGヲ結ビ, E, Fヨリ BGニ平行線 EC, FDヲ引ケバ C, Dニ於テ ABガ $a:b:c$ ノ如ク分タル。

證明 CE, DFハ BGニ平行ナリ。

$$\therefore \frac{AC}{AE} = \frac{CD}{EF} = \frac{AC+CD}{AE+EF} = \frac{AD}{AF} = \frac{DB}{FG}$$

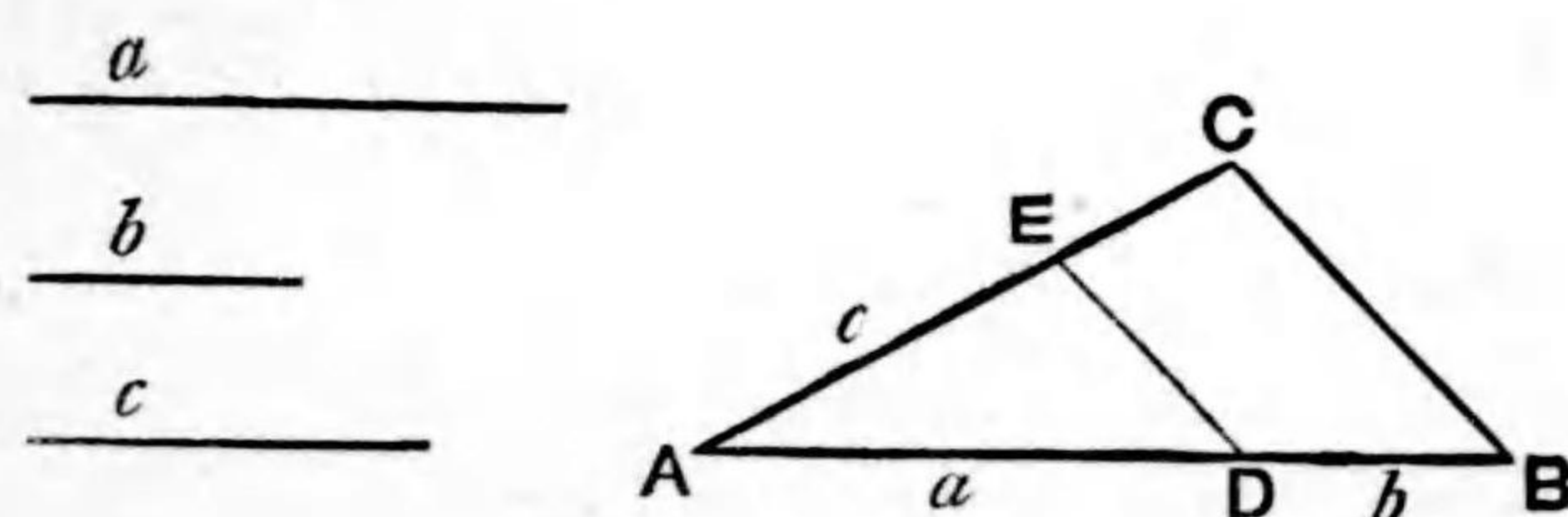
$$\therefore \frac{AC}{a} = \frac{CD}{b} = \frac{DB}{c}$$

問題 44. 與直線ヲ五等分セヨ

問題 45. 與直線ヲ3ト5トノ比ニ内分セヨ。

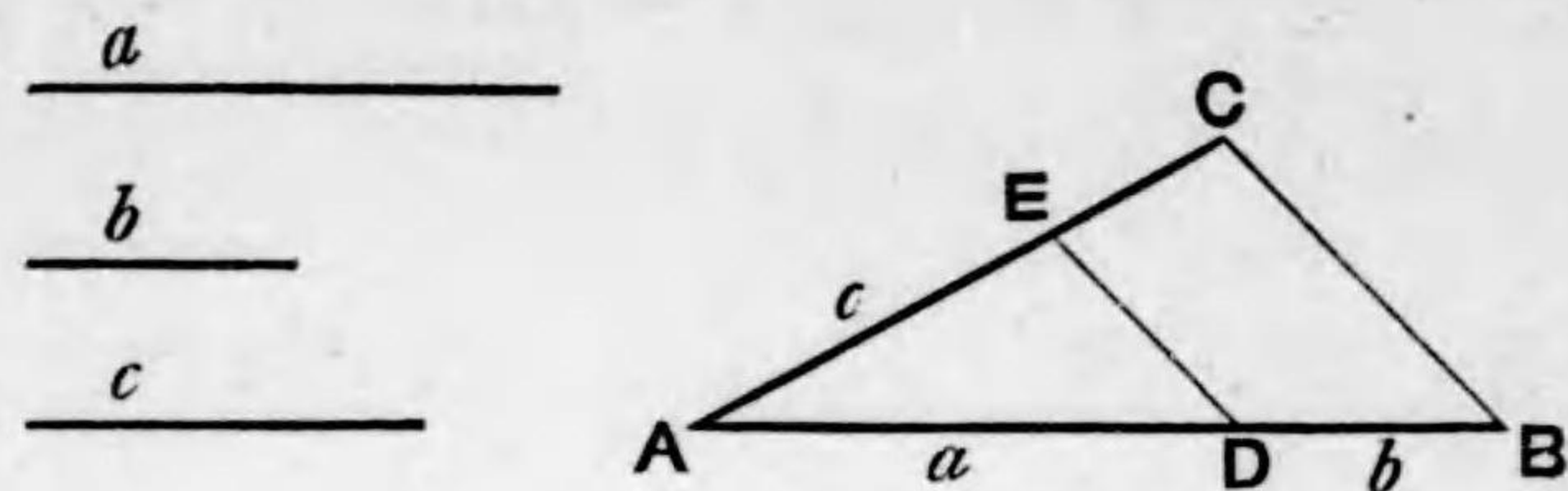
問題 46. 與直線ヲ3ト5トノ比ニ外分セヨ。

154. 作圖題二 三與直線ノ第四比例項ヲ求ムルコト。



作圖 a, b, c ヲ三與直線トス。

$a+b$ ニ等シキ直線 ABヲ引キ, ABト任意ノ角ヲ夾ミ c ニ等シク AEヲ引キ, EトDトヲ結ビ, Bヨリ DEニ平行線ヲ引キ, AEノ延長トCニ於テ交ラシム。然ラバ ECガ求ムル第四比例項ナリ。



證明

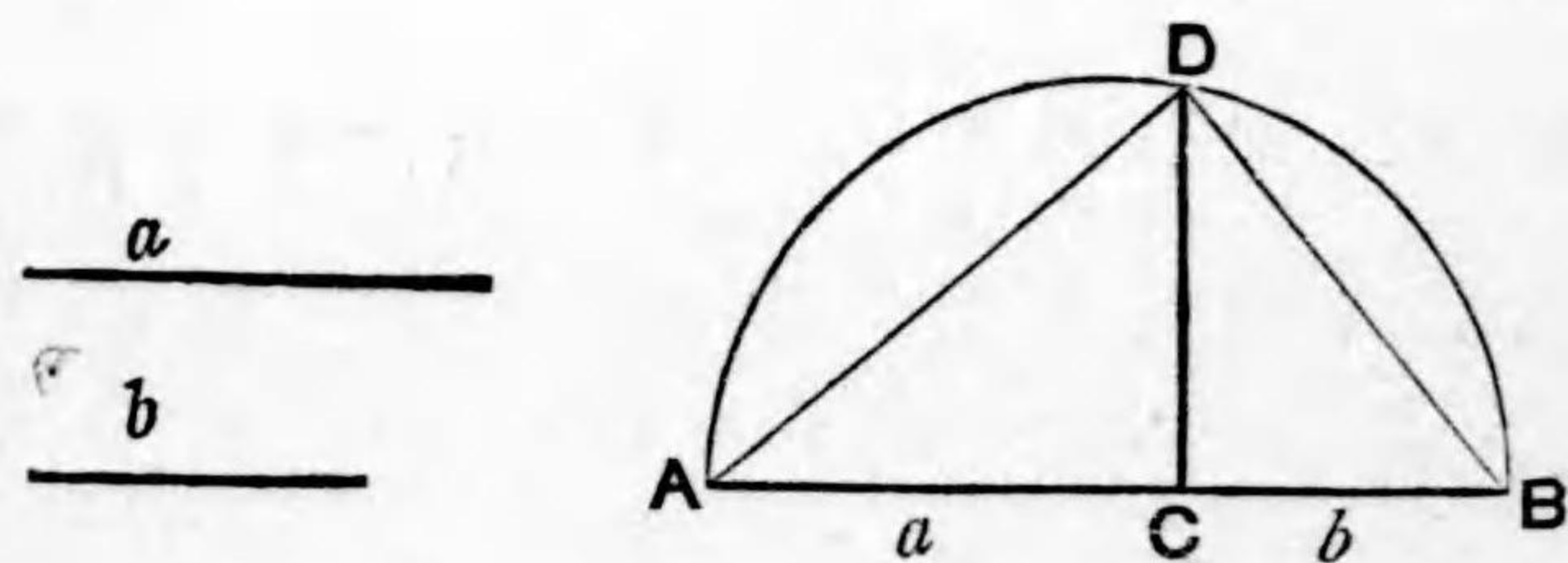
$DE \parallel BC$

\therefore

$AD : DB = AE : EC$

問題 47. ニツノ與直線ノ第三比例項ヲ求ム。

155. 作圖題三 ニツノ與直線ノ比例中項ヲ求ムルコト。



作圖 與直線ヲ a, b トス。

$a+b$ = 等シク直線 ACB ヲ引キ, 之ヲ直徑トシテ半圓ヲ畫キ, C ヨリ AB = 垂線ヲ引キ, 半圓ト

D = 於テ交ラシム。然ラバ CD ハ求ムル處ノ比例中項ナリ。

證明 D ヲ A ト B = 結ベバ半圓内ニアルヲ以テ直角三角形 ABD ヲ得。

\therefore

$AC : CD = CD : CB$

問題 48. 與矩形ニ等シキ正方形ヲ作レ。

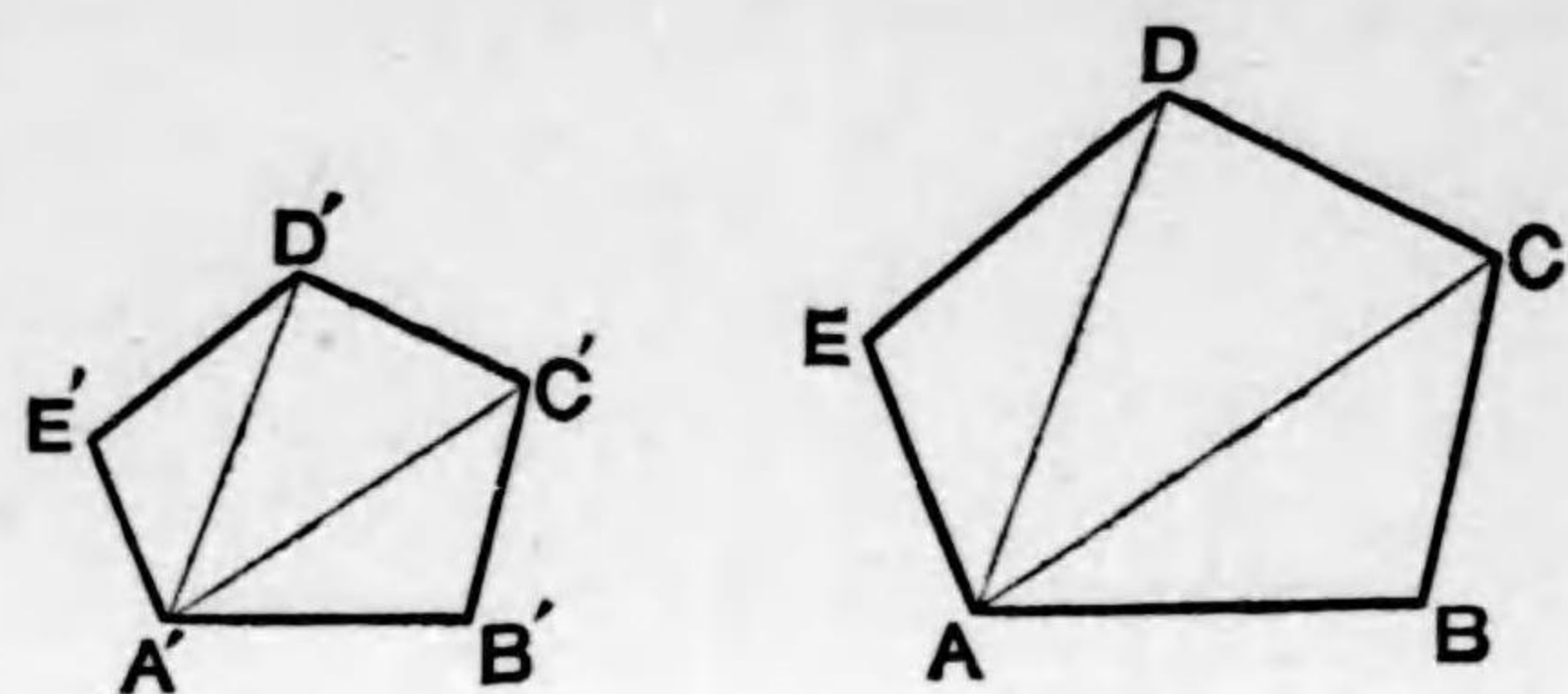
問題 49. 與三角形ニ等シキ正方形ヲ作レ。

問題 50. 與多角形ニ等シキ正方形ヲ作レ。

問題 51. ニツノ與點ヲ通り一與直線ニ切スル圓ヲ畫ケ。

問題 52. 與三角形ノ一角ヲ頂角トシ, 且之ト等積ナル二等邊三角形ヲ作レ。

156. 作圖題四 與直線上ニ與多角形ニ相似ナル多角形ヲ畫クコト。



作圖 ABヲ與直線トシ A'B'C'D'E'ヲ與多角形トス。

A'ヲC', D'ニ結ビ多角形 A'B'C'D'E'ヲ三ツノ三角形ニ分チ, 直線 ABノ兩端ニ其ノ直線ト $\angle C'A'B'$, $\angle C'B'A'$ ニ等シキ角ヲ作り, $\triangle ABC$ ヲ得。又 ACノ兩端ニ $\angle D'A'C'$, $\angle D'C'A'$ ニ等シキ角ヲ作り, $\triangle DAC$ ヲ得。同様ニ $\triangle ADE$ ヲ得。然ルトキハ多角形 ABCDEハ求ムルモノナリ。

證明 三ツノ角相等シキヲ以テ

$$\triangle ABC \text{ の } \triangle A'B'C'$$

同様ニ $\triangle ACD \text{ の } \triangle A'C'D'$

同様ニ $\triangle ADE \text{ の } \triangle A'D'E'$

故ニ多角形 ABCDEト A'B'C'D'E'トハ等角ナリ。

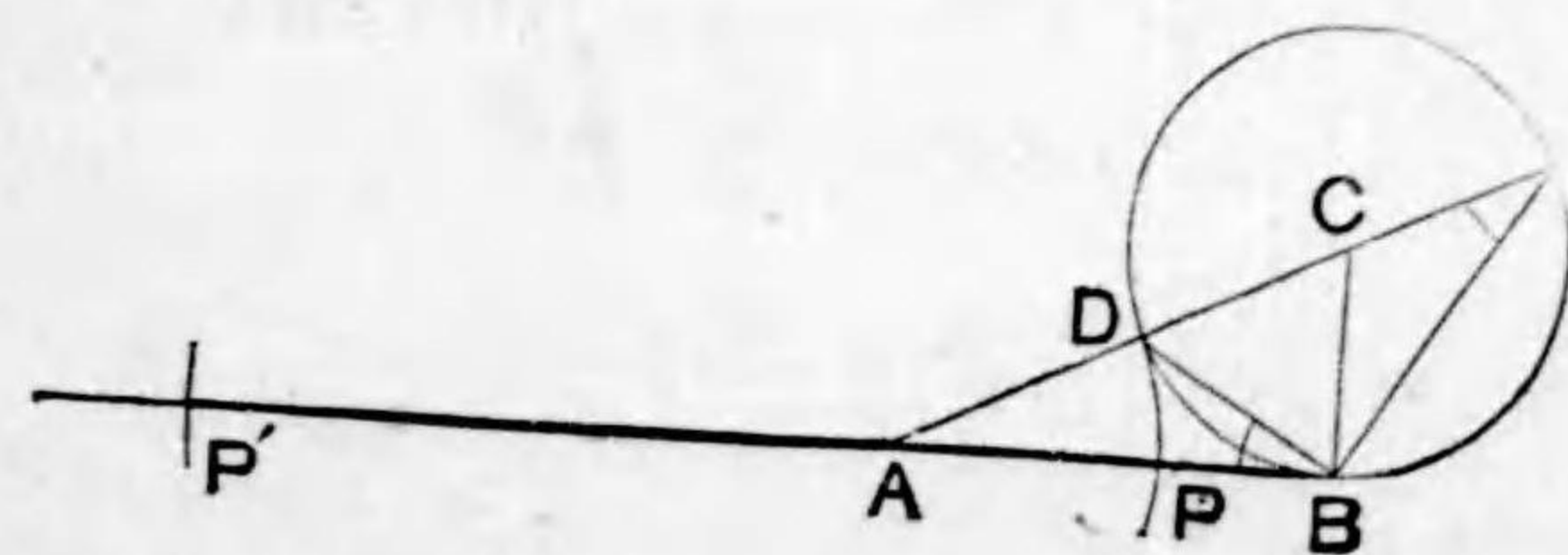
$$\begin{aligned} \text{又 } \frac{AB}{A'B'} &= \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{CD}{C'D'} \\ &= \frac{DA}{D'A'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} \end{aligned}$$

∴ 多角形 ABCDE の 多角形 A'B'C'D'E'

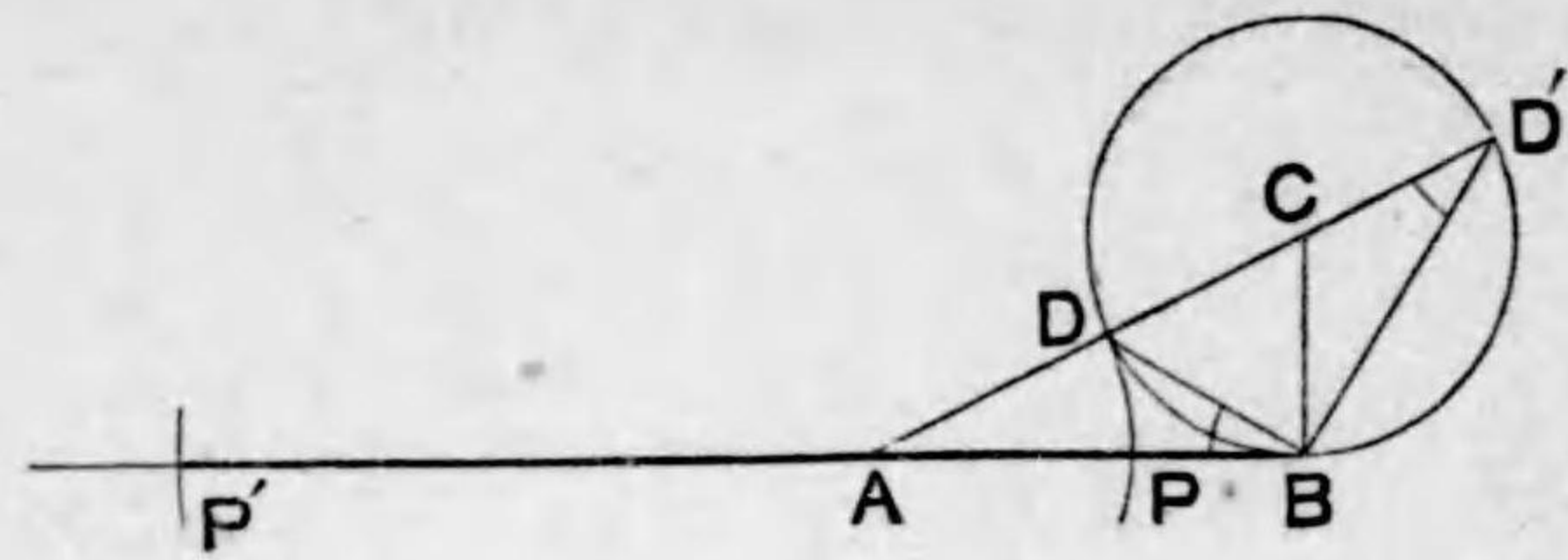
問題 53. 與直線上ニ正六邊形ヲ畫ケ。

157. 一直線ヲ内分或ハ外分シ, 其ノ一ツノ分ガ全線ト他ノ分トノ比例中項ナルトキハ, 其ノ直線ハ中末比例ニ分タルト稱ス。

158. 作圖題五 一與直線ヲ中末比例ニ分ツコト。



作圖 ABヲ與直線トシ, B點ニ垂線 BCヲ引



キ $BC = \frac{1}{2}AB$ トシ BC ヲ半径トシ C ヲ中心トシ
テ圓ヲ畫キ、 A ト C ヲ結ブ直線ガ D, D' ニ於テ
圓ニ交ルトセヨ。 AD, AD' ヲ半径トシ A ヲ中心
トシテ畫キタル圓ガ AB 及ビ AB ノ延長ト交リ
タル點 P, P' ガ即チ AB ヲ中末比例ニ分ツ點ナ
リ。

證明 B ヲ D ト D' トニ結ベバ

$\angle A$ ヲ共有シ

$$\angle ABD = \angle BD'D$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle BD'D$$

$$\therefore AB : AD = AD' : AB$$

$$\therefore AB - AD : AD = AD' - AB : AB$$

$$\therefore PB : PA = PA : AB$$

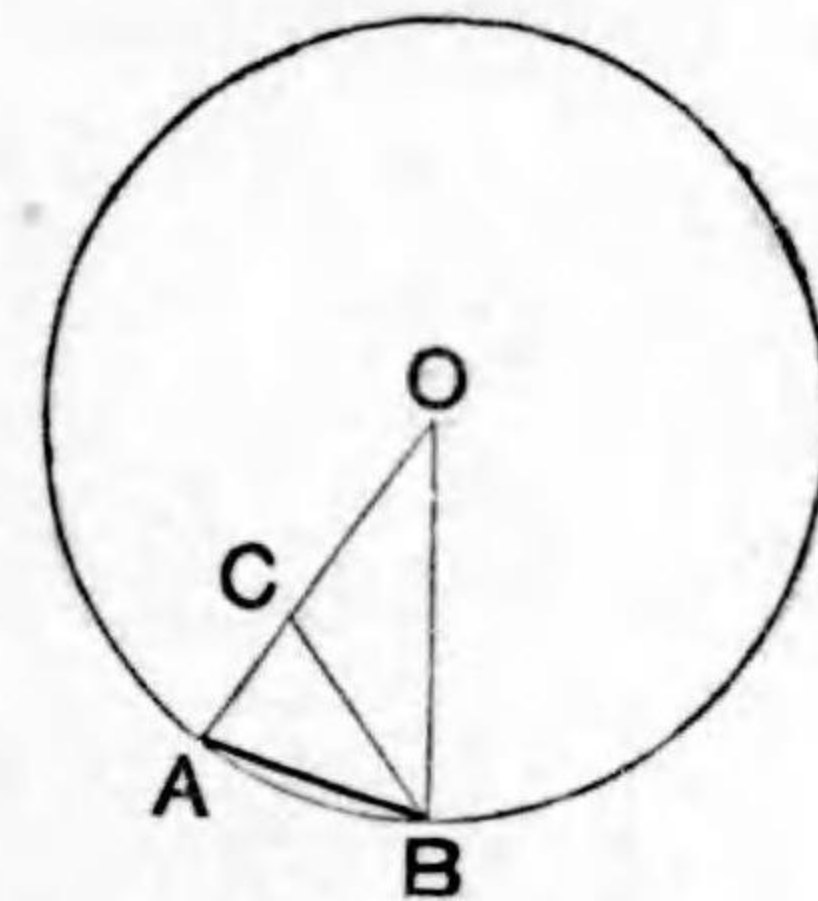
$$\text{又 } AB : AD' = AD : AB$$

$$\therefore AB + AD' : AD' = AD + AB : AB$$

$$\therefore P'B : P'A = P'A : AB$$

問題 54. 長サ 12 尺ノ直線ヲ中末比例ニ分テ。

159. 作圖題六 圓ニ内接スル正
十邊形ヲ畫クコト。



解析 正十邊形ガ圓 O ニ内接セラレタリトシ、
其ノ一邊ヲ AB トスレバ

$$\angle AOB = 36^\circ$$

$$\text{故ニ } \angle A = \angle B = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$$

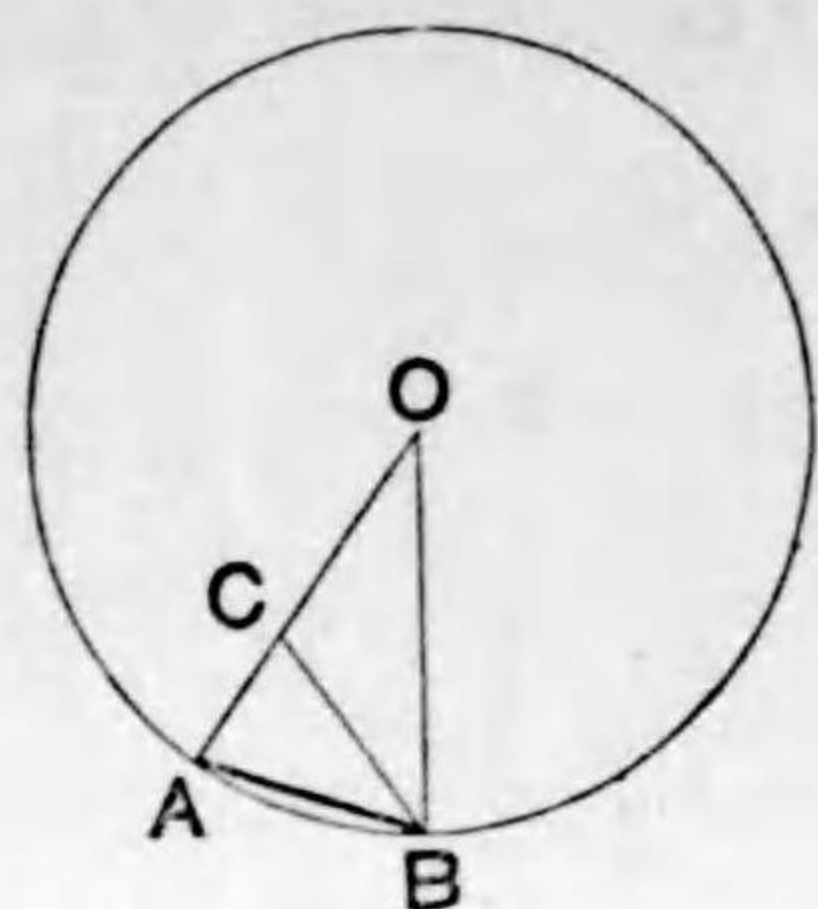
故ニ $\angle B$ ノ二等分線 BC ヲ引ケバ

$$\triangle ABC \sim \triangle AOB$$

$$\therefore OA : AB = AB : AC$$

$$\text{而シテ } AB = CB = CO$$

故ニ OA ハ C ニ於テ中末比例ニ分タル。



由リテ次ノ作圖法ヲ得。

作圖 圓 O ノ半徑 OA ヲ C ニ於テ中末比例ニ分ツトキ,大ナル部分 CO ガ内接正十邊形ノ一邊ナリ。

證明

$$AB=CO$$

而シテ

$$AC:AB=AB:AO$$

又

$$\angle A \text{ハ共通}$$

∴

$$\triangle ABC \text{の} \triangle AOB$$

$\triangle AOB$ ハ二等邊三角形ナルヲ以テ, $\triangle ABC$ モ亦二等邊三角形ナリ。

∴

$$AB=BC=CO$$

∴

$$\angle CBO = \angle O = \angle ABC$$

∴

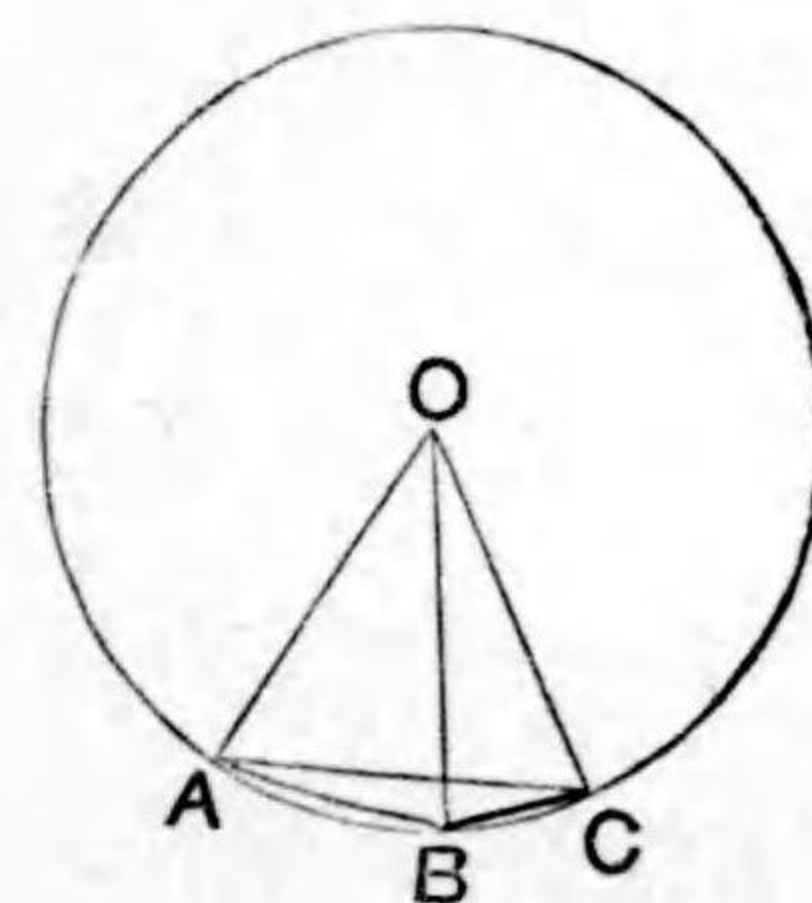
$\angle O$ ハ $\triangle ABO$ ノ三ツノ内角ノ和ノ五分ノ一即チ 36° ナリ。

故ニ CO 即チ AB ハ正十邊形ノ一邊タルベシ。

問題 55. 與直線上ニ正五邊形ヲ畫ケ。

問題 56. 半徑 6 寸ナル圓ニ内接スル正十邊形ノ一邊ノ長サヲ計算セヨ。

160. 作圖題七 圓ニ内接スル正十五邊形ヲ畫クコト。



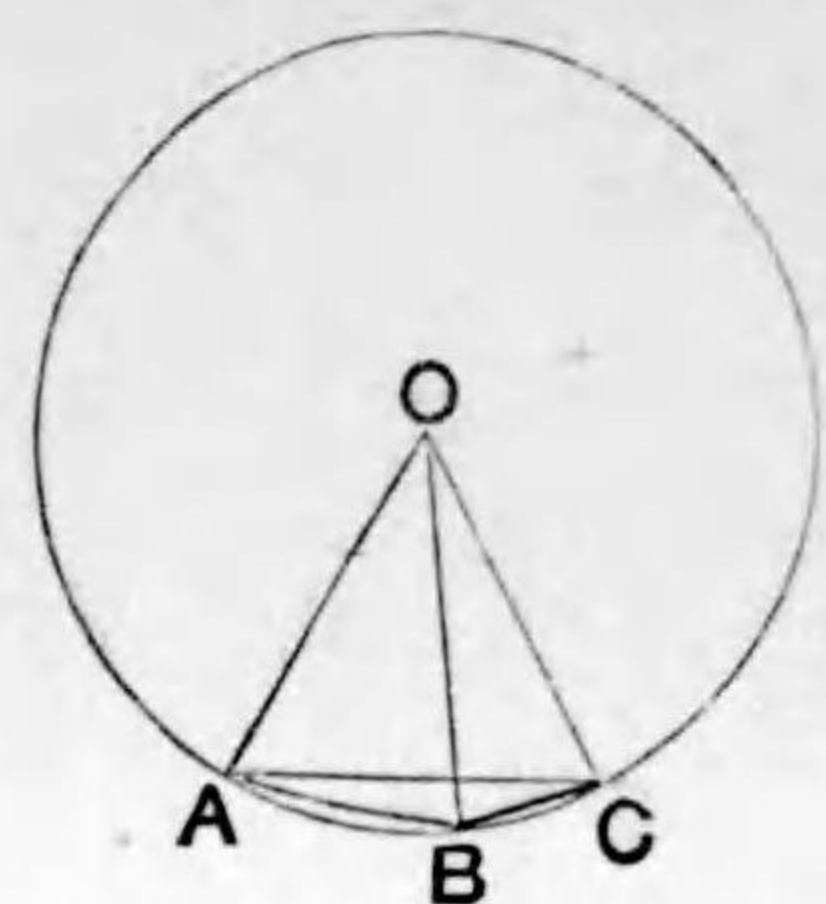
解析 圓 O ニ内接スル正十五邊形ヲ畫キ,其ノ一邊ヲ BC トシ内接正十邊形ノ一邊ヲ AB トスレバ

$$\angle BOC = 24^\circ$$

$$\angle AOB = 36^\circ$$

∴

$$\angle AOC = 60^\circ$$



故ニ AC ハ内接正六邊形ノ一邊ナリ。

由リテ次ノ作圖法ヲ得。

作圖 内接正六邊形及ビ正十邊形ヲ畫キ各一邊ニ對スル弧ノ差ヲ求メ、其ノ弧ニ對スル弦ヲ作レバ即チ内接正十五邊形ノ一邊タルベシ。

證明 一邊ニ對スル中心角ハ 60° 及 36° ノ差即チ 24° ナレバナリ。

問題 57. 48° ノ角ヲ作レ。

第五篇ノ問題

問題 58. $\square AC$ ノ對角線 BD 上ニ一點 E ヲ取リ
 $BE:ED=4:3$

ナラシムレバ $\triangle AED$ ハ平行四邊形ノ $\frac{3}{14}$ ニ等シ。

問題 59. $\triangle ABC$ ノ二邊 AB, AC ノ上ニ夫々 D, E ヲ取リ

$$AE:EC=BD:DA=1:2$$

ナラシムルトキ、 $\triangle BDE$ ト $\triangle CDE$ トノ比ヲ求ム。

問題 60. 兩三角形ノ各邊ガ夫々互ニ平行ナルカ、又ハ互ニ垂直ナルトキハ兩形ハ相似ナリ。

問題 61. 直線 ABC ニ於テ $AB=a, BC=b$ トシ AB 上ニ之ヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ、 C ヲ通ル割線 CDE ヲ引キ $DE=c, CD=x$ トスレバ、 CD ハ $x^2+cx-b(a+b)=0$ ヲリ得ラル。

問題 62. ニツノ相似多角形ヲ對應邊ガ平行スル如ク置ケバ、對應スル處ノ頂點ヲ結ブ直線ハ一點ニ會ス。

此ノ點ヲニツノ相似形ノ相似ノ中心ト稱ス。

問題 63. 二等邊三角形 ABC ノ底 BC 上ノ任意ノ一點ヲ D トシ, AD ガ其ノ外接圓ト交ル點ヲ E トスレバ $AD \cdot AE$ ハ一定ナリ。

問題 64. 與圓弧ヲ二分シ, 其ノ弦ノ比ヲ與比ニ等シカラシメヨ。

問題 65. $\angle A$, a 及ビ $b:c$ ヲ知リテ $\triangle ABC$ ヲ作レ。

問題 66. 半徑 6 寸ナル圓ニ内接スル正五邊形ノ一邊ノ長サヲ計算セヨ。

問題 67. 與角 ACB 内ノ定點 P ヲ通リテ直線 APB ヲ引キ, $PA \cdot PB$ ヲシテ與ヘラレタル正方形ニ等シカラシメヨ。

問題 68. 與扇形又ハ與弓形ニ正方形ヲ内接セシメヨ。

問題 69. 正六邊形ノ邊ヲ兩方ヘ延長シ, 其ノ交點ヲ結ビテ一ツノ正六邊形ヲ得。此ノ二ツノ六邊形ノ比ハ $1:3$ ナリ。

問題 70. 與直線上ノ一點 P ヲ與二點 A, B ニ結ビ, $\angle APB$ ヲ最大ナラシムベキ P 點ヲ求ム。

問題 71. 與二點ヲ通り與圓ニ切スル圓ヲ畫ケ。

問題 72. 與角 BAC 外ノ與點 O ヲリ直線 OBC ヲ引キ, $OB=3BC$ ナラシメヨ。

問題 73. 一直線ヲ求メ之ト與直線トノ比ヲ二ツノ與正方形ノ比ニ等シカラシメヨ。

問題 74. 與三角形ヲ一邊ニ平行ナル直線ニテ二, 三, 四等分セヨ。

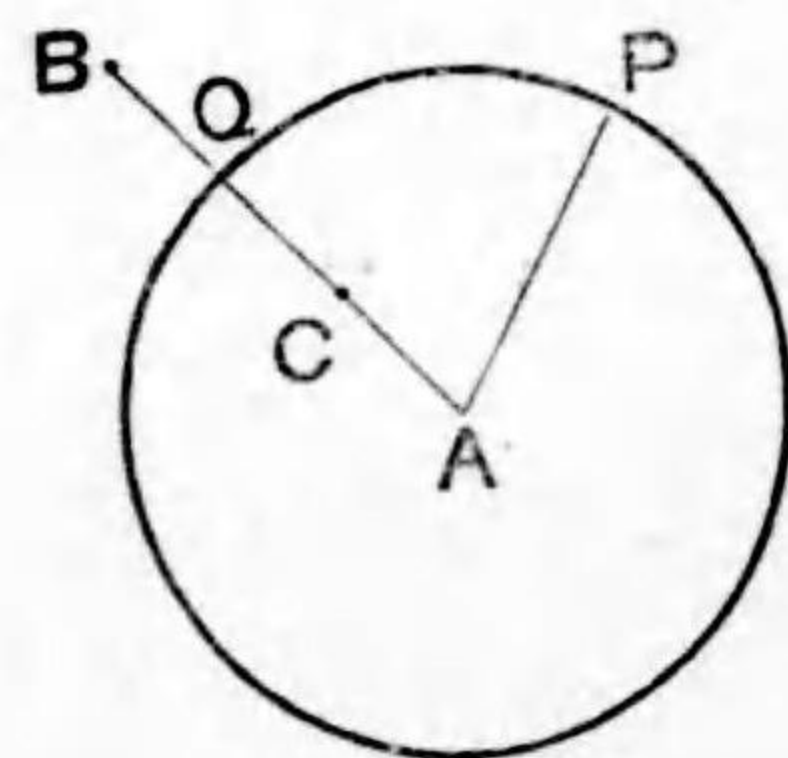
問題 75. 與多角形ト相似ニシテ, 他ノ一ツノ與多角形ト等積ナル多角形ヲ作レ。

第六篇

軌 跡

161. 一ツノ點ガ或ル條件ニ從ヒテ動クトキ、其ノ通過セル道ヲ名ツケテ其ノ點ノ軌跡ト稱ス。

162. 軌跡一 一與點ヨリ定距離ニアル點ノ軌跡。



定距離 AP ヲ半徑トシ、與點 A ヲ中心トシテ畫キタル圓ガ求ムル軌跡ナリ。

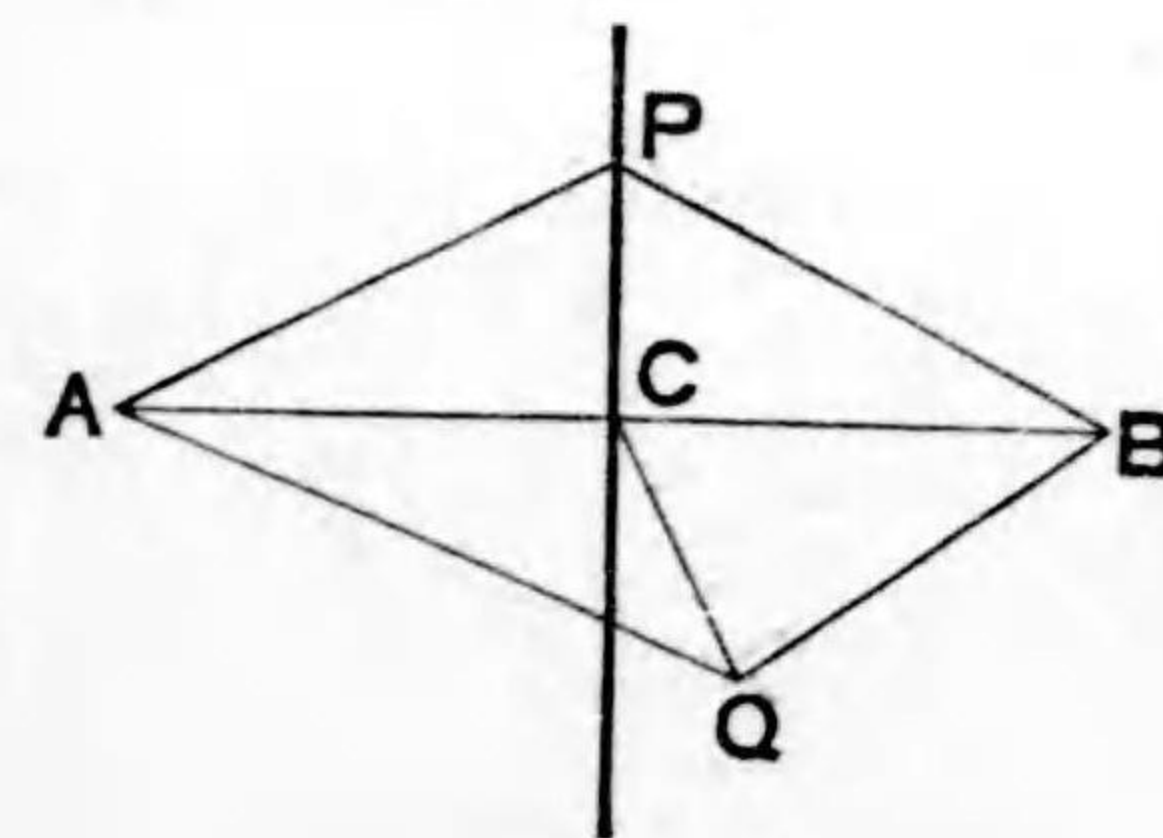
證明 圓周上ニ任意ノ一點 Q ヲトレバ、 AQ ハ半徑ナルヲ以テ $AP = AQ$ ニ等シ。若シ圓ノ外或ハ内ニ B, C ノ如キ點ヲトレバ、 $AB > AQ$ ヲリ大、

$AC < AQ$ ヲリ小ナレバ B 點及ビ C 點ハ皆圓周上ニナシ。故ニ圓 A ハ求ムル處ノ軌跡ナリ。

問題 1. 一與點ヲ通り且定半徑ヲ有スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ム。

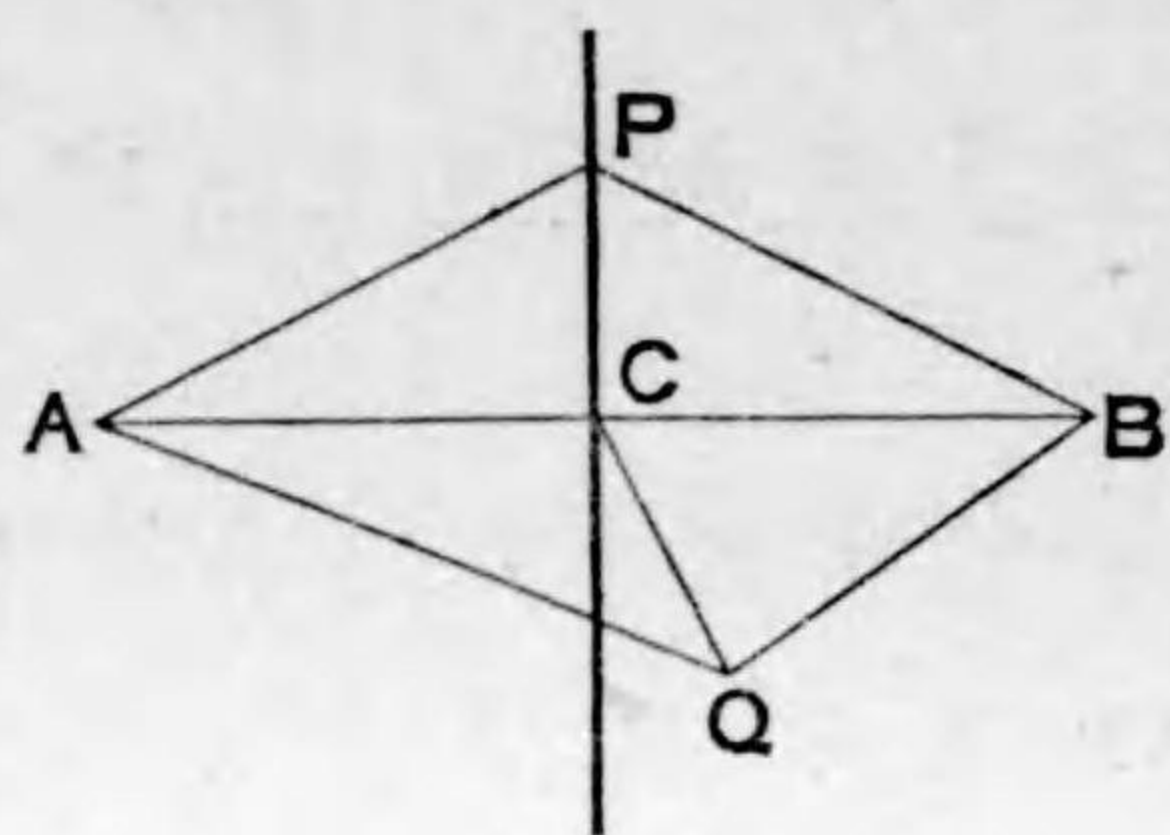
問題 2. 與圓ニ切スル定半徑ノ圓ノ中心ノ軌跡ハ、此ノ圓ト同心ナル圓ナリ。

163. 軌跡二 二與點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡。



二與點 A ト B トヲ結ブ直線ヲ C ニ於テ直角ニ二等分スル直線ガ求ムル所ノ軌跡ナリ。

證明 P ヲ A, B ヲリ等距離ノ點トシ、 PA, PB, PC ヲ結ブ。



然ラバ PC ハ二等邊三角形ノ頂點ト底ノ中點トヲ結ブモノナルガ故ニ底ニ垂線ナリ。

故ニ P ハ C ヲ通り AB ニ垂線ナル直線ノ上ニアリ。

又 Q ヲ A, B ヨリ等距離ナラズトシ QA, QB, QC ヲ結ブ。

然ラバ $\triangle AQC, \triangle BQC$ ニ於テ CQ ハ共通ニシテ

$$AC=BC$$

$$AQ=BQ$$

$$\therefore \angle ACQ = \angle BCQ$$

故ニ Q ハ C ヲ通り AB ニ垂直ナル直線ノ上ニアラズ。

故ニ求ムル軌跡ハ AB ノ中點 C ニ於ケル垂線ナリ。

問題 3. 二與點ヲ通ル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ム。

164. 此ノ如クシテ

或線ガ或條件ヲ満足スル所ノ軌跡タルコトヲ斷定スルニハ、次ノ二定理ヲ證明スルヲ要ス。

1. 此ノ線中ノ總ベテノ點ハ與條件ヲ満足ス。
2. 此ノ線外ノ總ベテノ點ハ與條件ヲ満足セズ。

定理 1 ニ代フルニソレト眞否ヲ共ニスル次ノ定理ヲ以テスルモ可ナリ。

3. 與條件ヲ満足セザル點ハ此ノ線中ニアラズ。

定理 2 ニ代フルニソレト眞否ヲ共ニスル次ノ定理ヲ以テスルモ可ナリ。

4. 與條件ヲ満足スル點ハ此ノ線中ニアリ。
- 要スルニ軌跡タルコトヲ證明スル仕方ニ四通

アリ。即チ (1ト2), (1ト4), (2ト3), (3ト4) ノイ
ヅレカヲ用フレバ可ナリ。

軌跡一ハ1ト2ヲ證明シ,軌跡二ハ3ト4ヲ證
シタルナリ。

問題 4. 軌跡二ヲ證明スルニ1及ビ2ヲ以テ
セヨ。

問題 5. 第二篇ノ定理六ヲ軌跡トイフ辭ヲ以
テ證明セヨ。

165. 1, 2, 3, 4 ノ如キ定理ノ一般ノ形ハ
次ノ如シ。

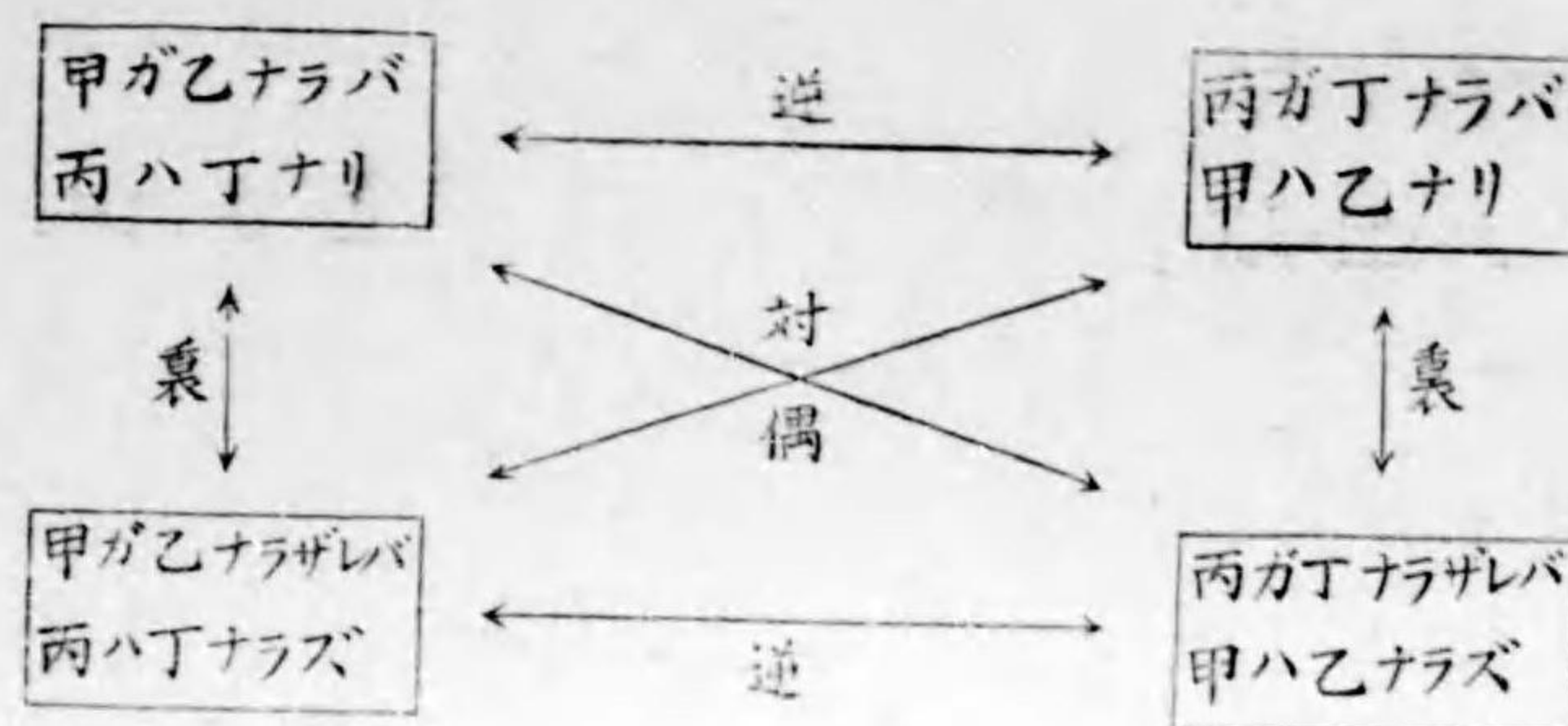
1. 甲ガ乙ナラバ丙ハ丁ナリ。
2. 甲ガ乙ナラザレバ丙ハ丁ナラズ。
3. 丙ガ丁ナラザレバ甲ハ乙ナラズ。
4. 丙ガ丁ナラバ甲ハ乙ナリ。

1ト4, 2ト3トハ互ニ之ヲ逆定理ト稱ス。

1ト3, 2ト4トハ互ニ之ヲ對偶定理ト稱ス。

1ト2, 3ト4トハ互ニ之ヲ裏定理ト稱ス。

其ノ關係次ノ如シ。



或定理ノ逆ノ對偶或ハ對偶ノ逆ハ即チ裏ナリ。
又或定理ノ裏ノ對偶或ハ對偶ノ裏ハ即チ逆ナ
リ。

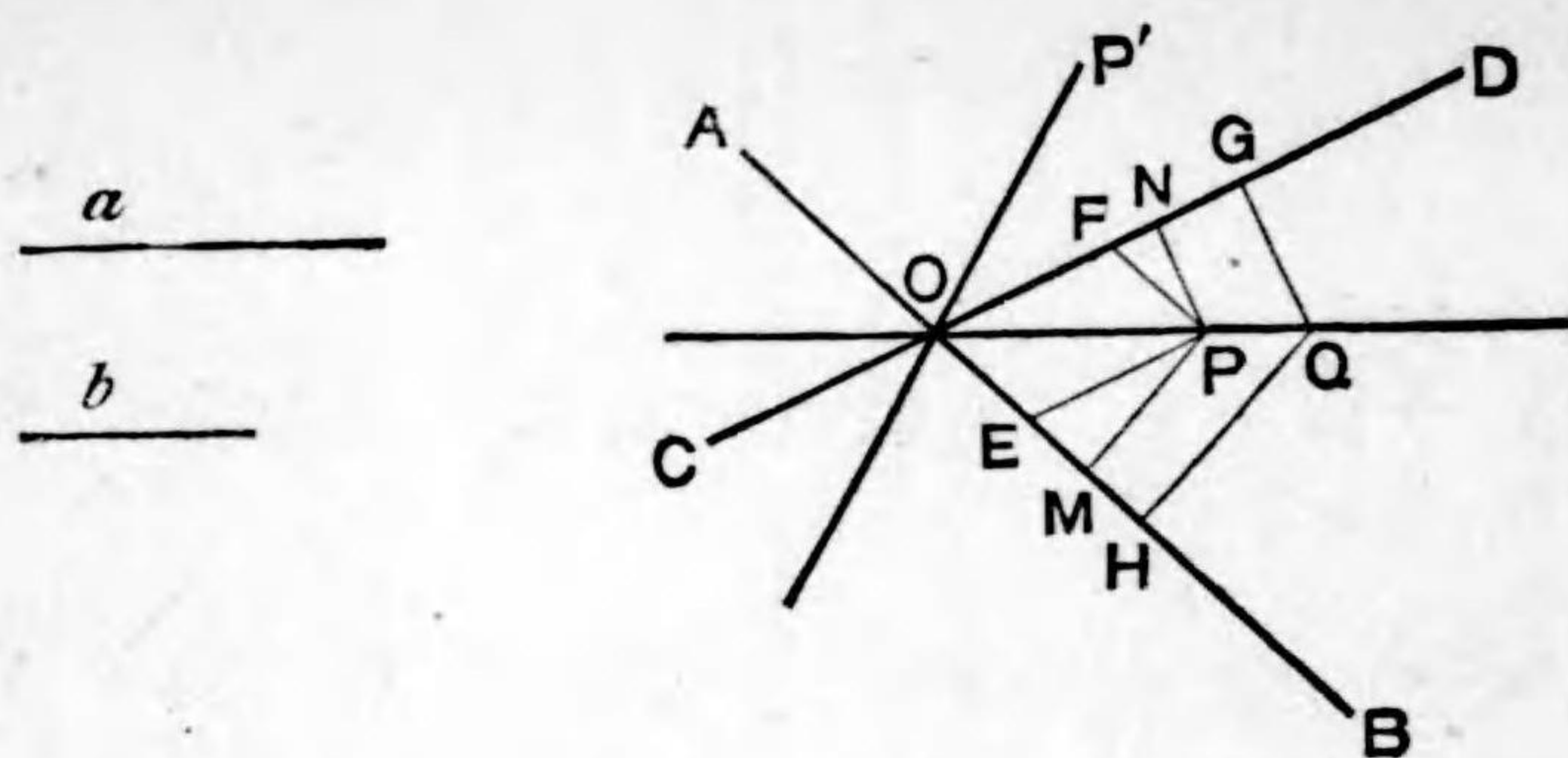
或定理ガ真ナリトモ其ノ逆ハ一般ニ真ナルモ
ノニアラズ。例ヘバ馬ハ動物ナリ然レドモ動物
ハ馬ナリト云フヲ得ザルガ如シ。

或定理ガ真ナリトモ其裏ハ一般ニ真ナルモノ
ニアラズ。例ヘバ馬ハ動物ナリ然レドモ馬ナラ
ザレバ動物ニアラズト云フコトヲ得ザルガ如シ。

然レドモ或定理ガ真ナラバ其對偶ハ必ズ真ナ
リ。例ヘバ馬ハ動物ナリ然ラバ動物ナラザレバ
馬ニアラズト云フヲ得ルガ如シ。

問題 6. 幾何學ノ一定理ヲ舉ゲ,其ノ逆,裏,對偶
ノ真ナルカ真ナラザルカヲ述ベヨ。

166. 軌跡三 相交ル二ツノ直線ヨリノ距離ノ比ガ與比ニ等シキ點ノ軌跡。



二直線ヲ AB, CD トシ, 與比ヲ $a:b$ トス,
P ヲ此ノ條件ヲ満足スル一點トス。即チ

$$PM:PN = a:b$$

然ラバ P ヨリ CD, AB ニ平行線ヲ引ケバ

$$\triangle PEM \text{ の } \triangle PFN$$

$$\therefore PE:PF = PM:PN$$

$$\therefore PE:PF = a:b$$

故ニ $\angle FOP$ ハ一定ノ角ナリ。

故ニ $\angle DOB$ 或ハ $\angle AOC$ ノ内ニ於テ, 此ノ條件ヲ満足スル點ヲ Q トスレバ Q ハ OP ノ上ニア

リ (4ニ相當ス)。

又 OP 上ニ點 Q ヲトレバ

$$\triangle QHO \text{ の } \triangle PMO$$

$$\therefore QH:PM = QO:PO$$

$$\text{又 } QG:PN = QO:PO$$

$$\therefore QH:QG = PM:PN$$

故ニ Q ヨリ AB, CD ニ至ル距離ハ與比ニ等シ (1ニ相當ス)。

$\angle AOD$ 或ハ其ノ對頂角 $\angle BOC$ ニ就キテモ同様ナリ。

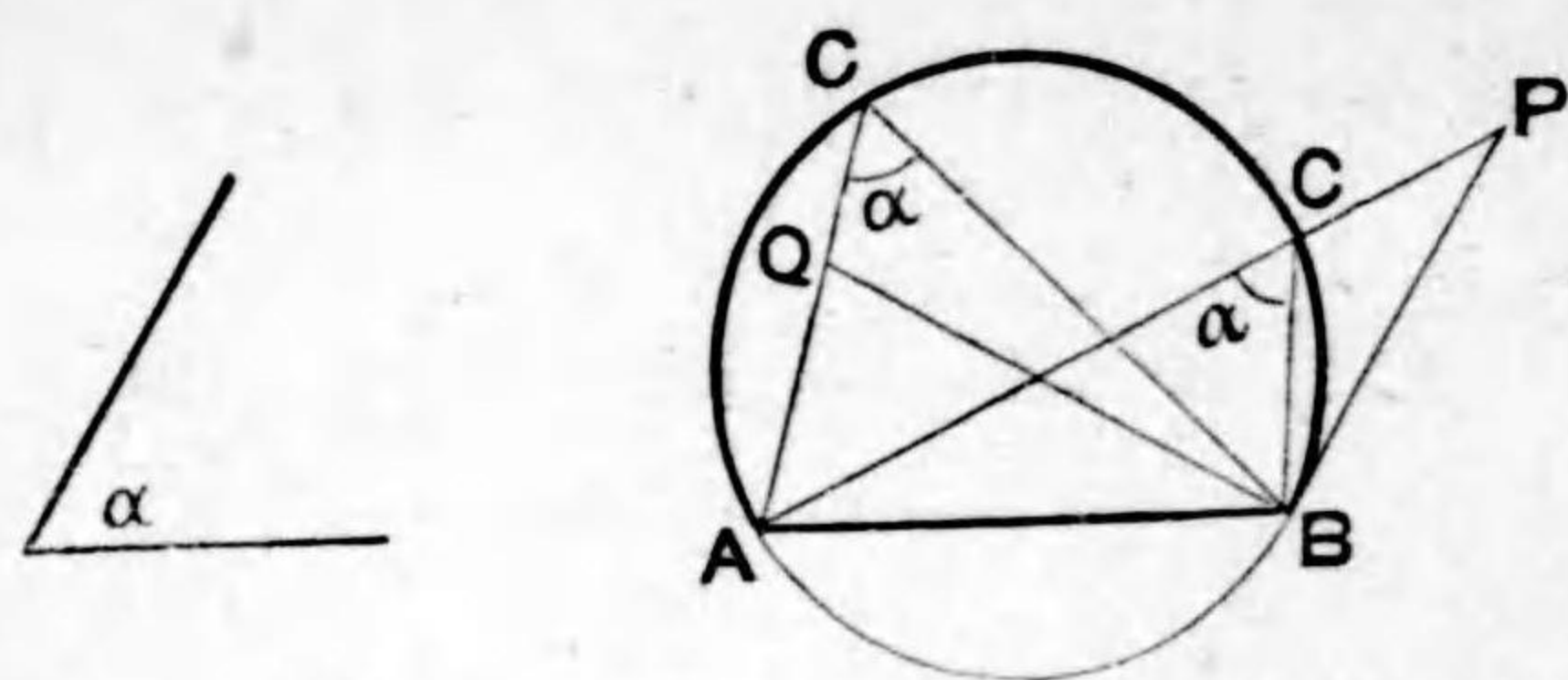
故ニ求ムル軌跡ハ O ヲ通ル二直線 OP, OP' ナリ。

問題 7. 相交ル二直線ヨリノ距離ガ相等シキ點ノ軌跡ヲ求ム。

問題 8. 二ツノ與直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ム。

問題 9. 相交ル二直線ヨリノ距離ノ比ガ與比ニ等シキ點ノ軌跡ヲ作圖セヨ。

167. 軌跡四 一ツノ與直線ノ同
ジ側ニアリテ其ノ直線ガ常ニ一定ノ
角ニ對スル様ナル點ノ軌跡。



與直線 AB ガ常ニ $\angle \alpha$ ニ對スル様ナル點ノ軌
跡ハ、AB 上ニ畫カレタル $\angle \alpha$ ヲ含ム弓形ノ弧ナ
リ。

證明 P 及ビ Q ヲ圓周上ニアラザル點トス
レバ、P 及ビ Q ヲ A ト B ニ結ビ、AP 又ハ AQ
直線ト圓トノ交點 C ヲ B ニ結ブ。然ラバ

$$\angle APB < \angle \alpha$$

$$\angle AQB > \angle \alpha$$

故ニ圓周上ニアラザル點ハ與條件ヲ満足セズ
(2ニ相當ス)。

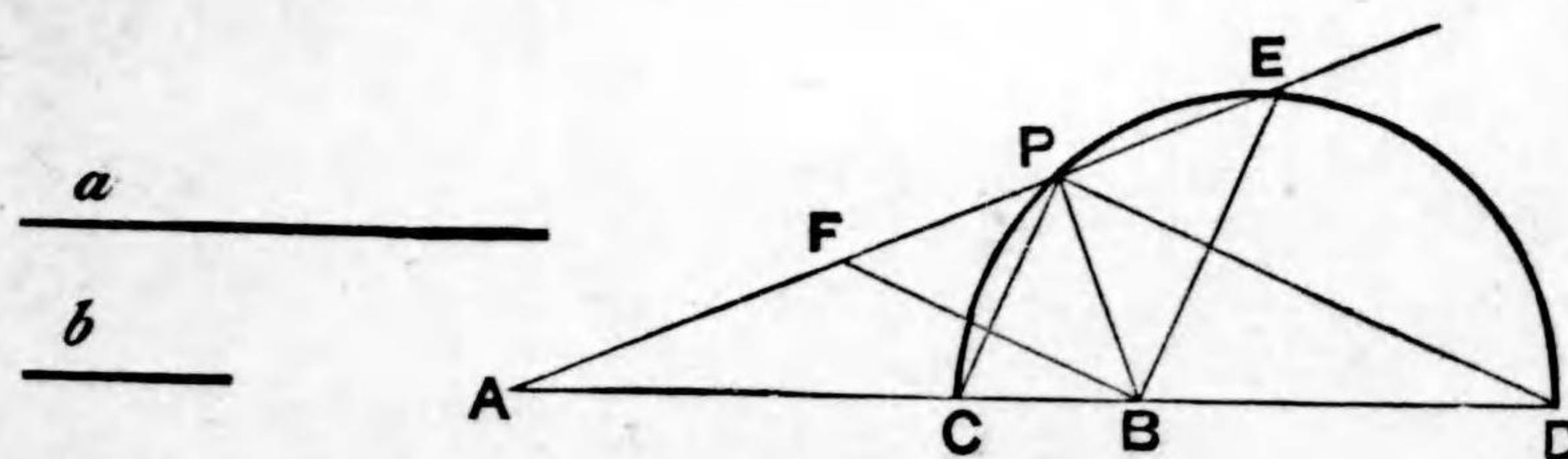
$\angle APB$ モ $\angle AQB$ モ $\angle \alpha$ ニ等シカラズトス。然

ラバ P, Q ハ圓周上ニアラズ(3ニ相當ス)。

故ニ軌跡ハ AB 上ニ畫カレタル $\angle \alpha$ ヲ含ム弓
形ノ弧ナリ。

問題 10. 一點及ビ一圓ガ與ヘラルルトキ、其ノ
點ヲ通ル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求ム。

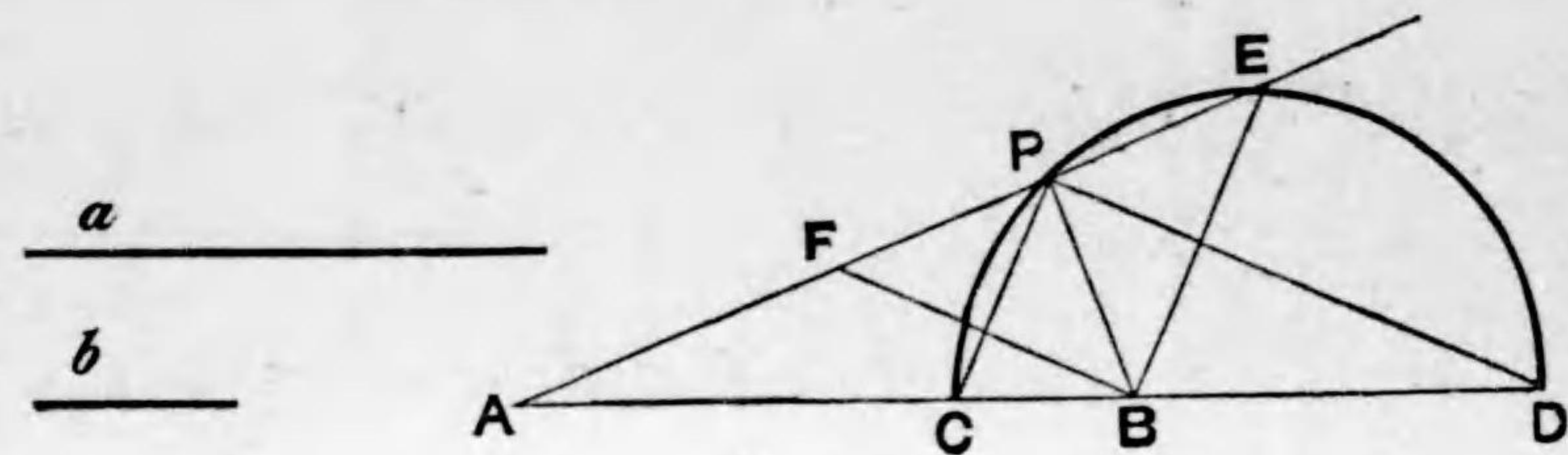
168. 軌跡五 二與點ヨリノ距離
ガ與比ヲ有スル點ノ軌跡。



A, B 二點ヨリノ距離ノ比ガ $a:b$ ニ等シキ點ヲ
P トセヨ。

A ト B トヲ結ビ、AB ヲ C, D ニ於テ與比ニ等
シク内分及ビ外分スルトキハ

$$PA:PB=AC:CB$$



$$PA : PB = AD : DB$$

故ニ PC, PD ハ $\angle APB$ 及ビ其ノ補角 BPE ヲ二等分ス。

故ニ $\angle CPD$ ハ直角ナリ。故ニ P ハ CD ヲ直径トスル圓周上ニアリ (4ニ相當ス)。

又 P ヲ此ノ圓周上ノ點トシ, B ヲ通り PC, PD ニ平行ニ BE, BF ヲ引キ AP ト E, F ニ於テ交ラシム。

然ルトキハ

$$AP : PE = AC : CB = a : b$$

$$AP : PF = AD : DB$$

然ルニ $AC : CB = AD : DB$

$\therefore PE = PF$

而シテ $\angle EBF = 90^\circ$

$\therefore PE = PF = BP$

$$\therefore AP : BP = AC : CB = a : b$$

故ニ P ヲリ A, B 二點ニ至ル距離ハ與比ニ等シ (1ニ相當ス)。

故ニ求ムル軌跡ハ CD ヲ直径トスル圓周ナリ。

問題 11. 一直線上ニ三定點 A, B, C アリ, $\angle APB = \angle BPC$ ナラシムル如キ點 P ノ軌跡ヲ求ム。

169. 作圖題ノ多クハ皆二ツノ軌跡ノ交點ヲ求ムルコトニ歸スベシ。今次ニ二三ノ例ヲ舉ゲテ之ヲ示サン。

a, b, c ナル三邊ヲ知リテ三角形ヲ作ル如キハ, 一邊 c ノ一端ヨリ a ナル距離ニアル點ノ軌跡ト, 他ノ一端ヨリ b ナル距離ニアル點ノ軌跡トノ交點ヲ求ムルコトニ歸ス。

$\triangle ABC$ ニ内接スル圓ヲ畫クコトハ, AB, BC ヲリ等距離ナル點ノ軌跡ト BC, CA ヲリ等距離

ナル點ノ軌跡トノ交點ヲ求ムルニ歸ス。

A, B, C 三點ヲ通ル圓ヲ畫クコトハ, A, B ヨリ
等距離ナル點ノ軌跡ト, B, C ヨリ等距離ナル點
ノ軌跡トノ交點ヲ求ムルニ歸ス。

第六篇ノ問題

問題 12. 與長ノ直線ノ二端ガ夫々直角ニ交ル
二直線上ニアル様ニ動クトキ, 其ノ中點ノ軌跡ヲ
求ム。

問題 13. 同底上ニアル等積ノ三角形ノ頂點ノ
軌跡ヲ求ム。

問題 14. ニツノ與直線マデノ距離ノ和或ハ差
ガ一定ナル點ノ軌跡ハ四ツノ直線ヨリナル。

問題 15. 與圓上ノ一ツノ與點ヨリ引ケル弦ノ
中點ノ軌跡ヲ求ム。

問題 16. 一ツノ圓ニ於テ與長ノ弦ノ中點ノ軌
跡ハ, 之ト同心ナル圓ナリ。

問題 17. 與弧 AB 上ニ任意ノ一點 P ヲ取リ,
AP ノ延長 PQ ヲシテ PB = 等シカラシム。Q
ノ軌跡ハ如何。

問題 18. 一ツノ與點ヨリ一ツノ與直線ニ至ル
凡テノ直線ヲ與比ニ分ツ點ノ軌跡ヲ求ム。

問題 19. ニツノ與點ヘノ距離ノ平方ノ和ガ一
定ナル點ノ軌跡ヲ求ム。

問題 20. 二ツノ與點ヘノ距離ノ平方ノ差ガ一定ナル點ノ軌跡ハ、此ノ二點ヲ結ブ直線ニ垂線ナル一ツノ直線ナリ。

問題 21. 二ツノ與圓ニ相等シキ切線ヲ引キ得ベキ點ノ軌跡ハ一ツノ直線ナリ。

此ノ直線ヲ二圓ノ根軸ト稱ス。

問題 22. $\angle A$, a 及ビ A ヨリ a ニ下セル垂線ヲ與ヘテ $\triangle ABC$ ヲ畫ケ。

問題 23. $\angle A$, a 及ビ $b^2 + c^2$ ヲ與ヘテ $\triangle ABC$ ヲ畫ケ。

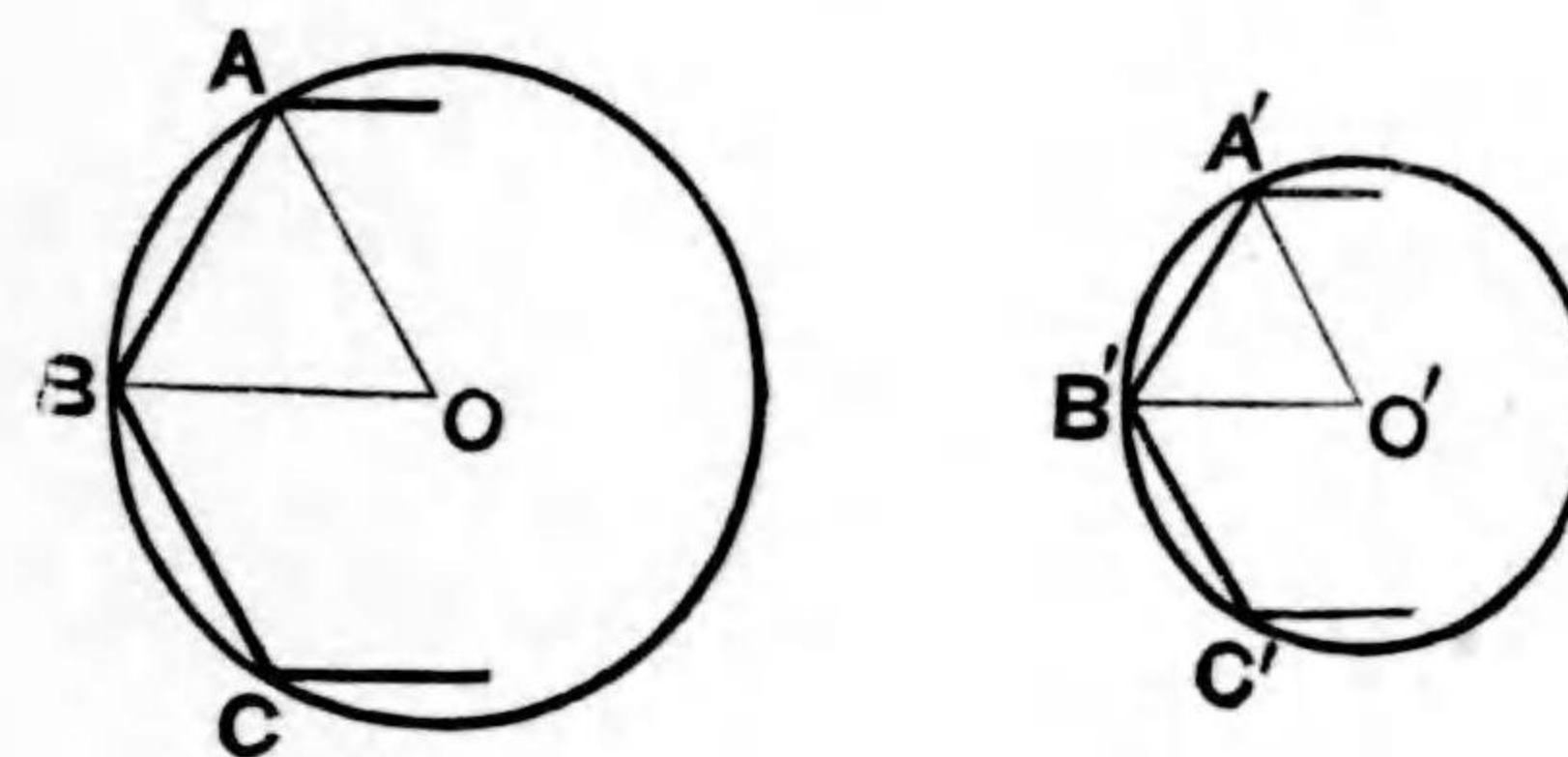
問題 24. AB , BC , AC , BD 及ビ $\angle D$ ヲ與ヘテ四邊形 $ABCD$ ヲ畫ケ。

問題 25. 與三角形ノ三ツノ頂點ヨリノ距離ガ與比ヲ有スル點ヲ求ム。

第七篇

圓周 圓ノ面積

170. 定理一 二ツノ圓ニ内接スル同邊數ノ正多角形ノ周ハ半徑ノ比ニ等シク、面積ハ半徑ノ二乗比ニ等シ。



證明 圓 O , O' ニ内接スル正 n 邊形ノ一邊ヲ AB , $A'B'$ トスレバ

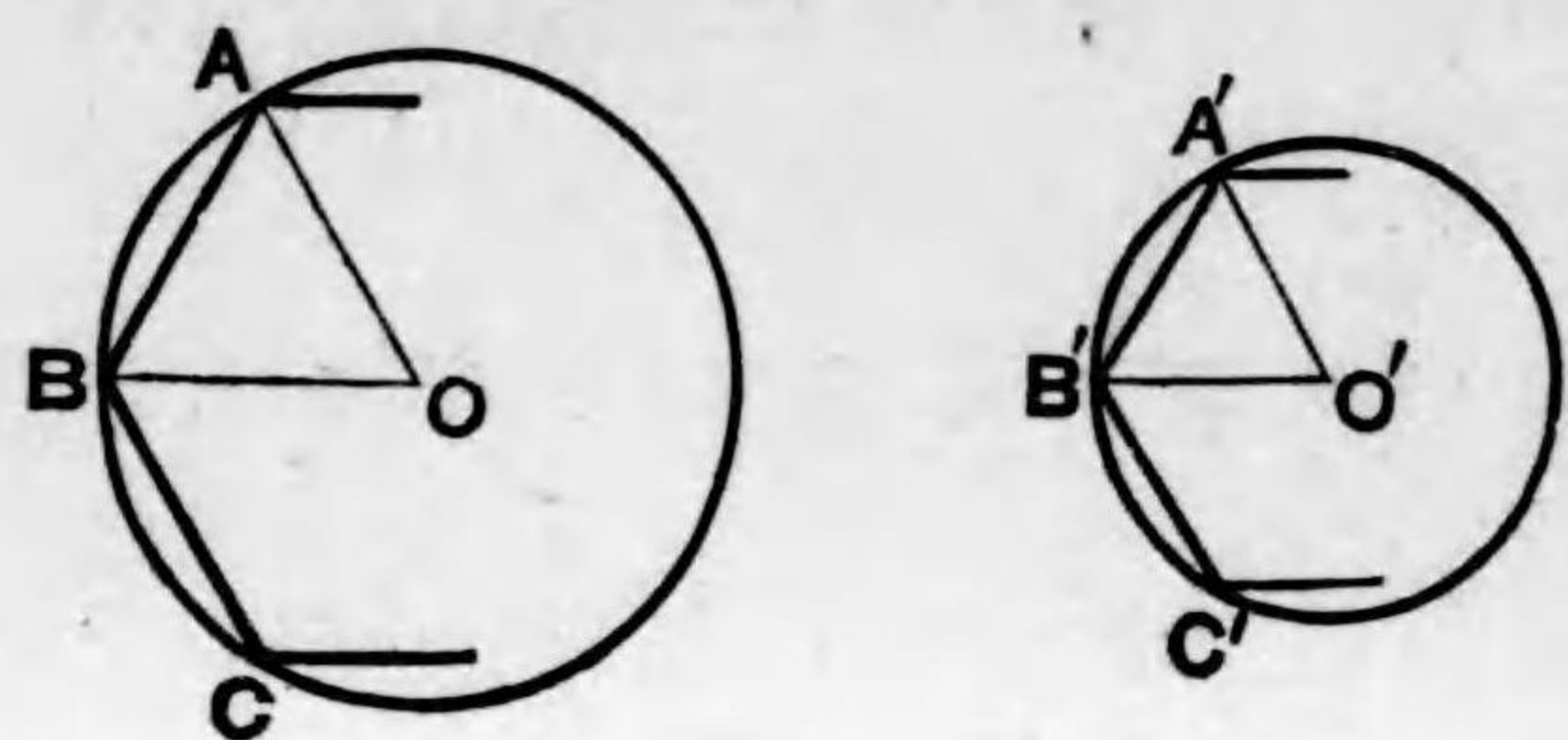
$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{n} = \angle A'O'B'$$

$$\therefore \triangle ABO \sim \triangle A'B'O'$$

$$\therefore AB : A'B' = OA : O'A'$$

$$\therefore nAB : nA'B' = OA : O'A'$$

故ニ二ツノ正多角形ノ周ノ比ハ半徑ノ比ニ等シ。



$$\text{又 } \triangle ABO : \triangle A'B'O' = \overline{OA}^2 : \overline{O'A'}^2$$

$$\therefore n\triangle ABO : n\triangle A'B'O' = \overline{OA}^2 : \overline{O'A'}^2$$

故ニ二ツノ正多角形ノ面積ハ半径ノ二乗比ニ等シ。

問題 1. 甲乙二圓ニ夫々内接スル正五邊形アリ。其ノ面積 a 平方寸及ビ b 平方寸ナリ。而シテ甲圓ノ半径 r 寸ナリト云フ、乙圓ノ半径ハ如何。

171. 定理二 圓周ト直径トノ比ハ定數ナリ。

證明 前定理ニ於テ

$$nAB : nA'B' = OA : O'A'$$

然ルニ圓ニ内接スル正 n 邊形ノ邊數 n ヲ次第

ニ増セバ其ノ多角形ハ如何程ニテモ圓ニ近寄スルコトヲ得。

故ニ圓 O ノ周ヲ C 、圓 O' ノ周ヲ c 、半径ヲ夫々 R 、 r トスレバ

$$C : c = R : r$$

$$\therefore C : c = 2R : 2r$$

$$\therefore C : 2R = c : 2r$$

故ニ圓周ノ直径ニ對スル比ハイヅレノ圓ニ於テモ一定ナリ。

172. 圓周ノ直径ニ對スル比ハ一定ニシテ之ヲ π ニテ表ハス。 π ハ之ヲ圓周率ト稱シ、其ノ値ハ高等數學ニ於テ論ゼラルルモノニシテ一ノ不盡數ナリ。而シテ其ノ値ハ約 3.1416 ナリ。

問題 2. π ノ近似値トシテ $\frac{22}{7}$ 、 $\frac{355}{113}$ ヲ用フル

コトアリ。小數第四位マデ計算シ 3.1416 トノ差ヲ見ヨ。

173. 定理三 半徑 r ナル圓ノ周ハ $2\pi r$ ナリ。

證明 圓周ノ直徑ニ對スル比ハ一定ニシテ π ナリ。

$$\therefore \frac{\text{周圓}}{2r} = \pi$$

$$\therefore \text{周圓} = 2\pi r$$

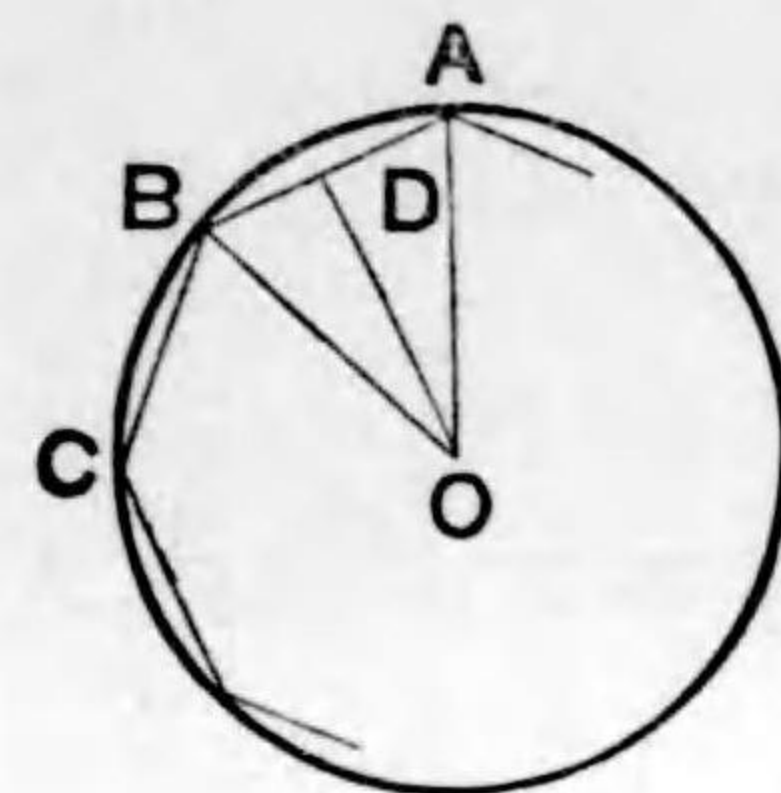
系 圓周ハ半徑ニ比例ス。

問題 3. 次ノ半徑ヲ有スル圓周ノ長サヲ計算セヨ。

(a) 6寸 (b) 1尺

問題 4. 圓周ガ二十一町四十九間ナルトキ、直徑ヲ見出セ。

174. 定理四 半徑 r ナル圓ノ面積ハ πr^2 ナリ。



證明 ABヲ圓ニ内接スル正 n 邊形ノ一邊トス。

中心 O ヲ頂點ニ結付ケテ生ズル三角形 AOB ノ高サヲ OD トスレバ

$$\triangle AOB = \frac{1}{2} AB \cdot OD$$

$$\therefore n \triangle AOB = \frac{1}{2} n AB \cdot OD$$

n ヲ次第ニ増セバ多角形ハ如何程ニテモ圓ニ近寄スルコトヲ得。從ツテ同時ニ OD ハ半徑ニ近寄ル。

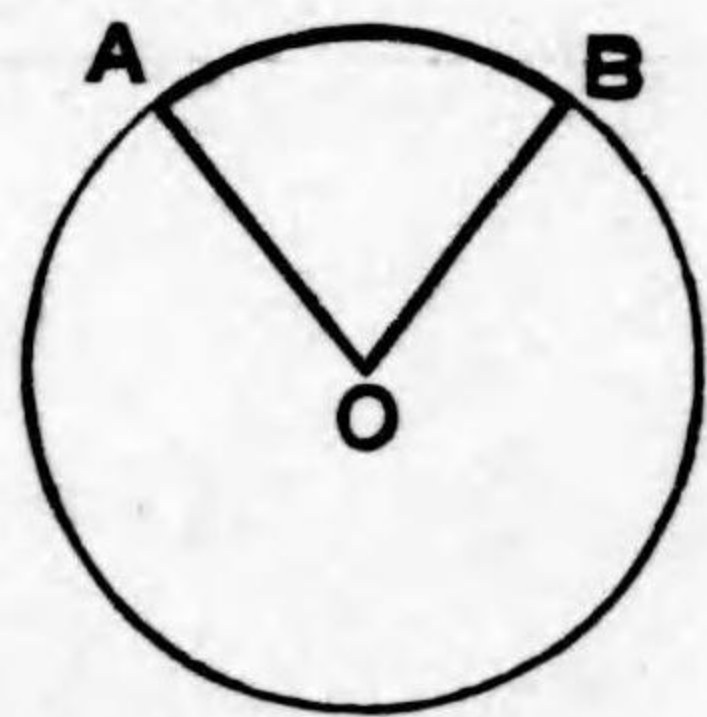
$$\therefore \text{圓 } O \text{ ノ面積} = \frac{1}{2} (2\pi r) r = \pi r^2$$

系 圓ノ面積ハ半徑ノ二乗ニ比例ス。

注意 圓内ノ面積ト云フベキヲ略シテ圓ノ面積ト稱ス。

- 問題 5. 半徑 3 尺ノ圓ノ面積ヲ求ム。
- 問題 6. 面積 282744 平方寸ノ圓アリ,其ノ周圍ヲ求ム。
- 問題 7. 直角三角形ノ斜邊ヲ直徑トシテ畫キタル圓ノ面積ハ他ノ二邊ヲ直徑トセル圓ノ面積ノ和ニ等シ。

175. 定理五 半徑 r ナル扇形ノ面積ハ弧ト半徑トノ積ノ半ニ等シ。



扇形 OAB ノ弧ノ長サヲ l トスレバ

$$\begin{aligned} \text{扇形 OAB} &= \frac{l}{2\pi r} \pi r^2 \\ &= \frac{1}{2}lr \end{aligned}$$

- 問題 8. 角 50° 半徑 2 尺ノ扇形ノ面積ヲ計算セヨ。
- 問題 9. 半徑一尺中心角 60° ノ弓形ノ面積ヲ求ム。

第七篇ノ問題

問題 10. 赤道上ニ於テ 300 哩ヲ隔ツル兩地ノ經度ノ差ヲ求ム。但シ地球ノ直徑ヲ約 8000 哩トス。

問題 11. 面積一町歩ノ圓形ノ土地ノ半徑及ビ周圍ノ長ヲ計算セヨ。

問題 12. 半徑五寸、角 30° ノ扇形ト面積相等シキ扇形ノ角ガ 45° ナルトキ、其ノ半徑ヲ求ム。

問題 13. 等シキ周圍ヲ有スル正三角形ト正六邊形トノ内接圓ノ面積ノ比ハ 4:9 ナリ。

問題 14. 直角三角形ノ二邊ヲ夫々直徑トシテ三角形外ニ畫キタル半圓ト外接圓トノ間ニ生ズル二ツノ弓月形ノ面積ノ和ハ、其ノ三角形ノ面積ニ等シ。

問題 15. 與圓ノ面積ヲ同心圓ニヨリテ、二、三、四等分セヨ。

大正二年十月二十七日發行
 大正二年十一月九日發行
 大正二年十二月十七日發行
 大正二年十月二十七日發行
 大正二年十一月九日發行
 大正二年十二月十七日發行
 大正二年十月二十七日發行
 大正二年十一月九日發行
 大正二年十二月十七日發行
 大正二年十月二十七日發行
 大正二年十一月九日發行
 大正二年十二月十七日發行
 大正二年十月二十七日發行
 大正二年十一月九日發行
 大正二年十二月十七日發行
 大正二年十月二十七日發行
 大正二年十一月九日發行
 大正二年十二月十七日发行



發兌

振替貯金口座東京一三五電話本局四三三三
 東京市神田區表神保町貳番地

同文館

東京市牛込區市谷加賀町一丁目十二番地

印刷者 中田福三郎

代表者 森山章之丞

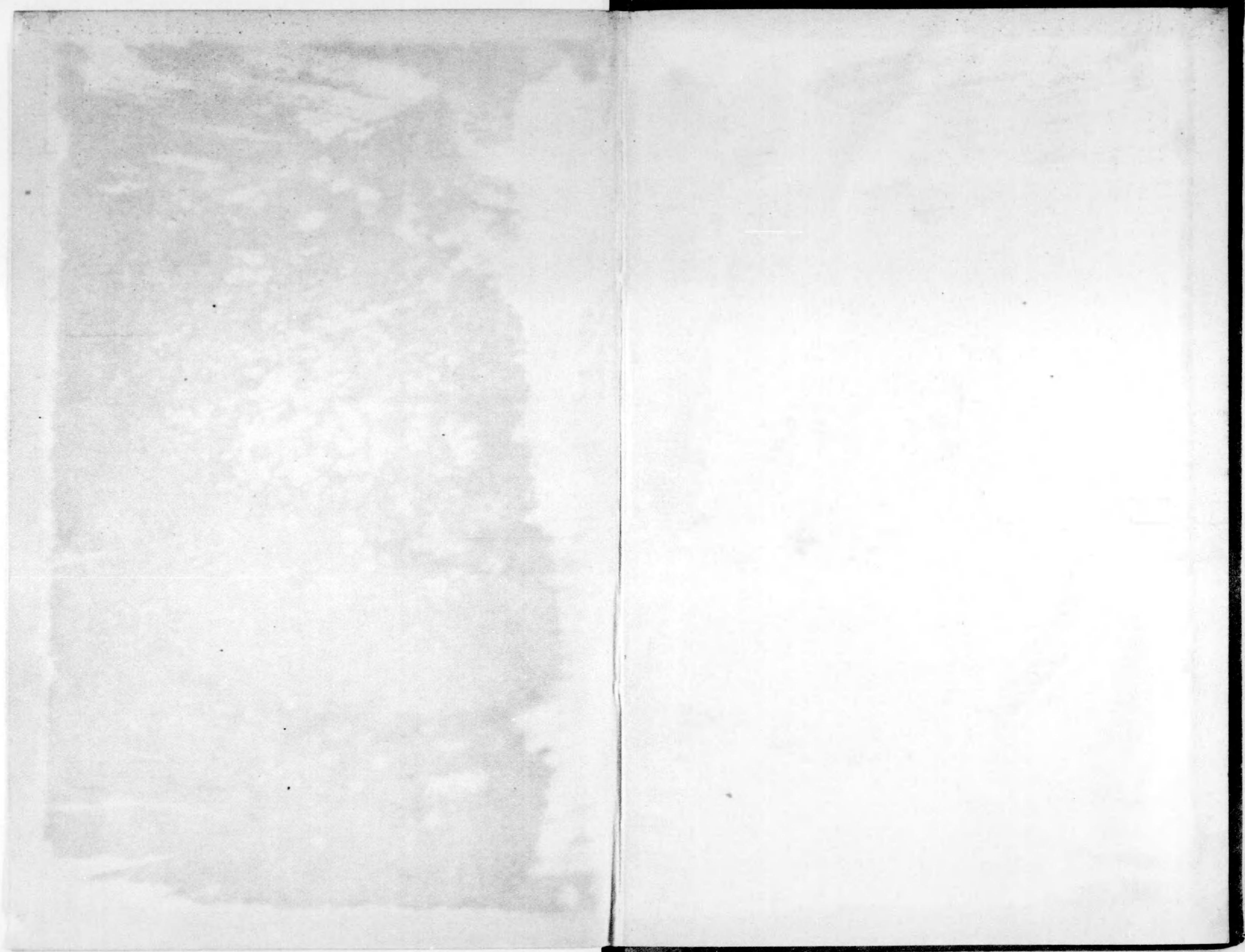
發行者 株式會社 文館

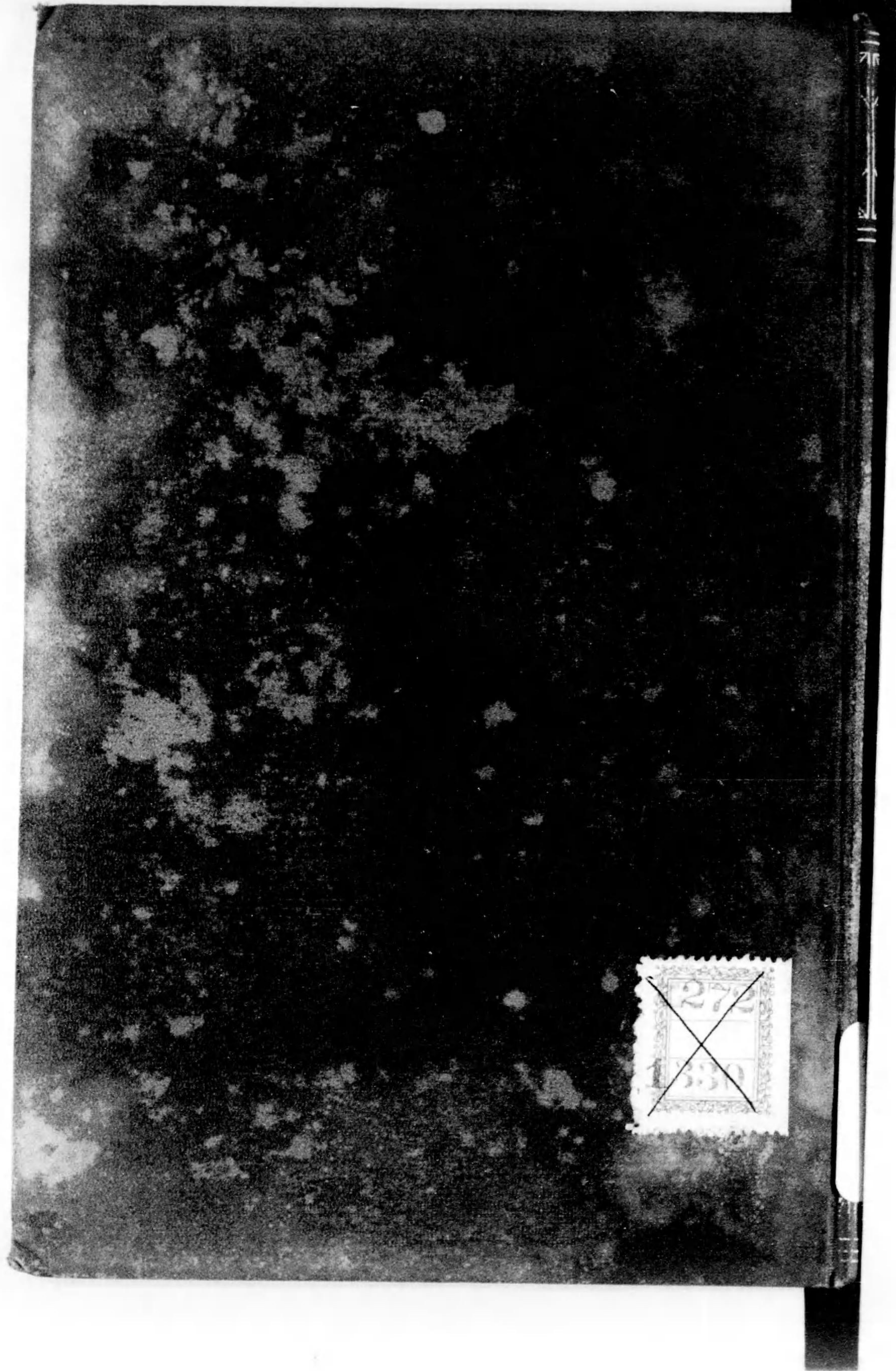
著者 波木井九十郎

定價金 五拾八錢

中等教育幾何學教科書 平面部 全壹册

東京市牛込區市谷加賀町 株式會社 秀英舎 第一工場 印刷





終