漢譯世界名著

實數探原

R. Dedekind 著

朱言鈞譯註

商務印書館發行

漢譯世界名著

實數探原

R. Dedekind 著

朱言鈞譯註

商務印書館發行

譯餘贅語

凡可證之理,不可置之不證而遽信之,此人人所共喻,不待言而自明者. 惟欲證一理,必有他理,爲其所據,而所據之理,又必有其所據以爲推. 循是以論,必有最後不可證之理而後證明之事始有可能. 然則何者可證,何者爲不可證,不可證者何以知其爲確切不易之眞理;諸如此類問題,近而言之,則係乎學術系統之嚴密,遠而論之,則有關人類認識之本原,其間層累曲折之關係,殊有幽渺而難明者. 數學之所本者爲實數之義;R. Dedekind 深追遠溯,窮其流而討其源,證其所可證,明其所不可證;其不朽之著作有二,一曰"連續性與無理數",二曰"數之意義",精微潔淨,發前人所未發,造端宏大,實開晚近研討數學基礎問題者之先河. 實數果何謂乎? 實數之起源何自乎? 讀此兩文,可以發人深思,哲學家之討論認識問題者亦當知所問津矣.

R. Dedekind 生於西曆一八三一年,卒於一九一六年,求學於德國之哥庭根 (Goettingen),掌教於 Zuerich 及 Braunschweig,爲一代之數學大師. 新義之發明,恆有歷數十年數百年而後一見,乃時會爲之,非可強求;若 Dedekind 之發明,誠可謂有史以來罕見之寶;文化先進之國無不刊有譯本,吾國豈能獨付闕如. 不佞譯此,在民國二十四五年之交,自

愧譾陋,不足達作者深旨;初意欲自撰一文,附於譯文之後,詳述數十年來數學基礎研究之進展,藉以闡明Dedekind影響之偉大,奈人事卒卒,迄未有成;玆承商務印書館諸公之熱心援助,先將譯文刊行,此願之償,惟有俟諸異日而已.

目　次

連續性與無理數 …… 1

1. 有理數之特性 …… 3
2. 有理數與有理點 …… 16
3. 直線之連續性 …… 17
4. 無理數之創造 …… 20
5. 實數之連續性 …… 27
6. 實數之運算 …… 29
7. 窮微之解析學 …… 52

數之意義 …… 61

1. 物系;系之原素 …… 61
2. 物系攝影 …… 67
3. 攝影之相似性;相似系 …… 70
4. 攝影於己 …… 74
5. 有窮與無窮 …… 82
6. 單純無窮之物系;自然數 …… 85
7. 較大與較小之數 …… 88
8. 數列之有窮及無窮分系 …… 97
9. 數列攝影之定義 …… 99
10. 單純無窮物系之類 …… 107

11. 數之相加……………………………… 110
12. 數之相乘……………………………… 113
13. 數之冪 ……………………………… 116
14. 有窮物系之基數……………………… 118

實數探原

連續性與無理數

余著此文之動機,遠在一八五八年之秋;時余承乏Zürisch工業學院講席,爲諸生講授微分學,深覺解析之學,尙闕一美滿之基礎.如當說明一變數向一極限收斂,或證明任何變數,苟永遠趨大或趨小而其値始終有涯者必有一極限之類,非求助於幾何方法不爲功.幾何方法之應用,在初習微分學者,自有其教育上之意義,且爲節省講授之時間計,亦殊有不得已者.惟以幾何方法說明解析學中之概念或證明解析學中之定理,在學理上爲一絕大缺點,實爲無可諱言之事.余爲此常耿耿於心,乃反覆深思,期在必得一純粹論數之原則,爲解析學立一不拔之基礎.嘗思解析學中有論及連續變數,而所謂連續,其義何指,未嘗有一精密之定義;復觀當時所奉爲最嚴密之解析教本,其中定理之證明,亦多未能以連續性爲其應有之基礎,蓋不知不覺中常假定其他定理,而此種定理,又未能用純粹解析方法加以證明者也(註一).如上所擧之定

註一 解析學中所論,既爲連續變數,則何謂連續,宜有一精密之定義.以此爲基,種種定理,可得而推,如是始得稱爲解析學之正軌.今不求基本概念之確立,反借助其他科學中之假定,以證此學中之定理,此Dedekind所引以爲憾者也.

理,即為其中之一例(註二).余既詳加研討,認此項定理或與此有同等意義之定理可為解析學之充分基礎,乃窮源竟委進而求其起源於解析學之中,因之而得一連續性之定義(註三).此事之發見,實在一八五八年十一月二十四日,後數日即以告吾友Durege,因之而引起長時間之激烈討論.其後除與一二門弟子商榷外,曾在Braunschweig各教授之學術團體中作簡略之報告,惟稽延至今,尚未著文公之於世.今年正思發表此文之前數日,忽蒙 E.Heine 以其新著"函數論之基本" (Die Elemente der Funktionenlehre 載 Crell's Journal Bd. 74) 一文見示,其中所論,與本文不謀而合.惟自信此文對理論之關鍵所在,似有更嚴密之申述,不特形式較為簡明而已.當余寫此序文之時,(一八七二年三月二十日)承 Cantor 賜寄其新著"三角級數理論中一定理之推廣" (Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, 載 Math. Annalen von Clebsch und Neumann Bd. 5), 捧誦一過,彌覺感謝.所尤引以自慰者, Cantor 文第二節中所述之原理與余此文中第三節所

註二 連續性之義未定,欲證'一變數,苟永遠趨大或趨小而其值始終有涯者必有一極限',將自陷於循環推理之錯誤,否則亦無形中受吾人空間觀之束縛,認為當然之理而不加以證明耳.

註三 吾人苟將上述未能證明之理作為假定,或擇其他一理,意義與此相等者作為假定,則解析學中種種定理或可由是而推,是即所謂'解析學之充分基礎".惟其如是,吾人必將此理之內容細加研討,窮其認識之起源,為解析學求一純粹之數的基礎,此 Dedekind 自述其發明經過,足資吾人深省者也.

論之連續性,外貌雖有不同,按其實際則完全無異.至實數之集團既認爲有完備性之後,實數在概念上如復加以等次之分,究有何種利益,余此時尙不敢斷言也.

1. 有理數之特性

有理數理論之發展,當爲讀者所已知,無待本文之贅述;惟欲使立論之基礎透澈明瞭,特將有理數之起源及特性提要言之.凡屬人類,莫不知有所謂正整數.正整數者,前後相接,秩然有序,吾人旣舉其居前之數,隨後之一數即追踪而至,如此相連相續,永無窮期.由居前之一數,進而至隨後之一數,此種動作爲人類本能之事;吾人無以名之,名之曰"計數之基本動作".此無窮多之正整數爲思想必要之工具,已爲世人所共認.吾人旣具有此工具,復施以加減乘除四種法則以發見其間種種公例,於是吾人對正整數之認識,將隨之而益富.所謂加法,吾人苟細考其意義,不過將數次計數之基本動作相繼施行,併而爲一次動作而已(註四).乘法之意義亦然.加法與乘法在正整數範圍內雖可任意施用,惟其相逆法——加法之相逆法爲減法,乘法之相逆法爲除法——則不能暢行無阻.惟

註四　如無加法之應用,則由5至8,必先後實施三次基本動作而後可.用相加之法,將3加於5得8,則一次手續已足,是加3之事,實將三次計數之基本動作併爲一次手續.由是以觀,有加法則計數之工作可以省略.有乘法則加法之手續可以化簡;思想愈進步,時間與勞力將因之而愈經濟.如是之例,言之甚多.

其如是,吾人不得不有他種數之創造;所謂負數,分數及零者遂因之而起.凡正整數,負整數,正分數,負分數及零統稱之謂有理數.有理數者,自成一完備獨立之系統,吾人以R之符號表之(註五).至其系統之所以得稱完備與獨立者,實由於如下之事實:吾人將R中任何兩數相加相減相乘相除,其結果必仍為R中之一數;申言之,盡加減乘除四則之應用,其所創造者始終為R中固有之數;緣此之故,R之系統謂之完備與獨立.惟應用除法之時,有不可不注意者,即以零除任何數為無意義之事,故在嚴禁之列耳.

有理數之系統尚有一重要之特性,即其中之數均先後有序,排列於一單度空間(eindimensionales Gebiet)之內,向正負兩方向,相接相續直至無窮.此處吾人應用幾何學中之術語,以說明解析學中之事實,用意不過使意義可以益見顯明;非謂解析學中之理論,必非借用他種科學術語不可也.

吾人倘用兩種符號a與b以代表同一有理數,則$a=b$或$b=a$.所謂a,b為兩不同之有理數,其意謂$a-b$為一正數或為一負數.苟其為正數,則吾人稱a大於b:$a>b$;或b小於a:$b<a$.苟其為負數,則$b-a$為正,於是稱b大於a:$b>a$或a小於b:$a<b$.既明何謂兩不同之有理數,則以下諸理之眞確,可以見矣.

註五　R之完備及獨立,Dedekind在他處已有詳盡之說明,參閱Dedekind所編之數論(Vorlesungen ueber Zahlentheorie von P. G. L. Dirichlet. Zweite Auflage § 159).

I. 若$a>b$, $b>c$,則$a>c$(註六).無論何時,若有兩不同(或稱不相等)之數a與c,又有一數b小於a,c兩者之一數,大於其他之一數,則吾人可應用幾何術語,謂b處於a與c兩數之間.

II. 若a與c爲任何兩不相等之數,則必有無窮多不同之數如b者處於a與c兩者之間(註七).

III. 苟a爲一確定之數,則R中所含之數可由之而分爲前後兩段;兩段所含,均爲無窮;前段所含,均小於a,後段所含,均大於a.至a本身,可屬於前段,或屬於後段.苟其屬於前段,則爲前段中最大之數,苟其屬於後段,則爲後段中最小之數.但無論如何,前段中任何一數,必小於後段中之任何一數,凡此皆顯而易見之理也.

案數之起源,由於比較.比較之事,有賴於人類抽象之本能;蓋比較兩物之初,必先將其性質詳審而並觀之,苟其未爲兩者所共有則棄置之,其共有者始彼此比較之.抽其共有,去其獨有,然後可以從事於比較.常聞人言,陽貨貌似孔子,此就其容貌而比較言之.考'相似'兩字之意義,所以表示兩物間之關係,非形容一物所獨有之特性.類此之辭,不一而足.如'相親''相愛''相友'皆是;他如數

註六　此種性質,謂之序次性.

註七　假定$a>c$,則$\frac{a-c}{2}$亦爲R之中一數,且居於a,c兩者之間.每兩數之間,既有一數之可尋;由是以推,任何兩數之間,必有無窮多之數.此種性質,謂之稠密性.

學中'相似'(similar),'相合'(congruent),'相平行''相垂直'諸概念,無一不表達兩物間之關係者也.吾人試就此種關係而詳討之,亦有可得而論者.

兩物間之關係,有可易者,有不可易者.何謂可易?如陽貨貌似孔子,則孔子貌亦似陽貨;如嚴又陵爲伊籐博文之同學,則伊籐博文亦爲嚴又陵之同學,此其關係,謂之可易.數學中如平行,如垂直,如相合,如相似皆表示關係之可易者.至若中國向美國借款,而美國未嘗向中國舉債,故'舉債'所表示者爲不可易之關係.惟此不可易之關係,僅就事實言之耳;在論理上美國向中國借債亦未始不可能.其在論理上有萬不可易者如:孔子爲子思之祖父,子思則絕對非孔子之祖父;此種關係之不可易,吾人由推理可以斷定之.因此之故,乃稱之曰必不可易之關係.

復次,有可傳(transitiv)之關係,有不可傳之關係.何謂可傳?如江蘇爲中國之一部分,上海爲江蘇之一部分,則上海亦爲中國之一部分,如是者謂之可傳.他如數學中之相似,相合,平行,垂直皆表示關係之可傳者.要之,如甲與乙發生某種關係,乙與丙發生同一關係,則甲與丙亦發生同一關係者,其關係爲可傳,否則爲不可傳.如美國借款與中國及日本,但中國與日本未嘗因此之故而發生債務關係,故其關係爲不可傳.如是之例,不勝枚舉,

讀者可自思得之.

綜觀上述之定義,乃知有如下種種不同性質之關係可言:

(1) 可易而又可傳;例如數學中之相合相似平行及垂直是.

(2) 可易而不可傳;例如朋友關係.

(3) 可傳而不可易;例如全體與部分之關係.

(4) 不可易而又不可傳;例如父子之關係.

數學中所謂相等,其義無他,一可易可傳之關係是已.反之,惟關係之可易可傳者,始可加以相等兩字.歷觀以上所舉之例,凡可易可傳者,其中必含一相等之物:平行之線,其方向相等;相似之圖形,其形狀相等;以此類推,他可知已.

凡可傳而必不可易之關係,吾人名之曰序次(Anordnung).反之,普通文字中所謂序次,如'先後''左右''全分''大小'等等皆表示關係之可傳而必不可易者.例如有甲乙兩多邊形於此,所謂甲之面積小於乙,其意卽謂甲可與乙之某部分相合.全體與部分之關係既爲可傳,則大小之關係自亦可傳;至大小關係之爲必不可易,乃顯而易見之事.吾人觀察事物,細加抽象,擇性質之可傳而必不可易者創一簡明之法以表達之,於是數之概念遂因之而起.

請先舉例言之,吾人苟無數之概念,如不知'五'之應用,則吾人兩手中有相等之手指未始不可認識.何以言之?將左手各指加於右手各指之上,如是則左手之各指必有右手之一指且僅有一指與之相配,右手之各指亦必有左手之一指且僅有一指與之相配.此種關係,謂之一一相應;其爲可易可傳,自是顯而易明.據同理,吾人不必藉數之應用,亦可知吾人所有之耳目少於吾人所有之手指.其法維何?將手指加於耳目之上,則每一耳及目,誠得一指與之相配,但每一手指則未能有一耳或目與之相配;故其間之關係,未能一一相應.由耳目所組成之集團僅能與手指所組成之集團之一部分相應而已;於此可知其關係爲可傳而不可易.復次,有兩盒棋子於此,其一所裝爲黑子,其他所裝爲白子.吾人以左手取黑子,同時以右手取白子,並規定每次進取時各取一子;其已取出者使之彼此相應,如是繼續爲之,直至其中之一空無所有而後已.苟黑盒先白盒而空,則黑子實與白子之一部分相應;換言之,黑子少於白子.苟其同時空無所有,則黑白一一相應;換言之,黑白子彼此相等.要而言之,兩集團所含之物苟一一相應,則其物之多相等;苟甲集團所含之物與乙集團之一部分相應,則甲所含少於乙,或乙所含多於甲.

吾人既將任何事物所組成之集團詳審而比較之,

其中有一一相應者,亦有僅與一部分相應者.一一相應者謂之相等,否則謂不相等.此'相等''多於''少於'諸字之用,所以表達關係之性質;惟其如是,此種表達方法必力求其精確;欲求其精確,必有一標準以計量之而後可.此計量之標準,凡屬人類莫不共有;其物維何,曰數而已矣.

凡有理性者無不能運用

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ……

等物,凡此種種,統稱之謂正整數.正整數本身,絕無意義可言,惟先後有序,秩然不亂,既舉其一,他即隨之,相隨相續,以至無窮.此種先後有序之數:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ……

可自成一集團,謂之正整數之集團.明乎此,若有一盒黑棋於此,當吾人手取黑子之時,口中念一數字,使取出之黑子,各有一數且僅有一數與之相應;最後如得—61,則黑子之集團與正整數之集團之一部分對應,而61者即所以表示黑子之多寡.循是以論,吾人既有正整數之集團,凡有窮集團所含之多寡,均得以明顯之語表達之矣.

正整數之意義,略如上述.吾人倘將一正整數與一正整數相加,其結果必爲一正整數且爲唯一之正整數,換言之,在正整數之集團中,加法有唯一之結果,且可以暢行無阻,蓋此集團中任何兩數相加又爲其中之一數且爲其中唯一之數也.考加法之實施,實受種種法則之

束縛,如

$$a+b=b+a \qquad \text{(加法之交換原理)}$$

$$(a+b)+c=a+(b+c) \qquad \text{(加法之結合原理)}$$

此法則之眞確,人人公認之而不疑;因此之故,遂以原理稱之.

今欲將b個相等之正整數a相加:

$$\underbrace{a+a+a+\cdots\cdots+a}_{\text{共}b\text{個}a}$$

其結果與b乘a,即ba同;於是知乘法之用,所以使加法更見敏捷而已.乘法在正整數之集團中,亦有唯一之結果,且可暢行無阻,何則,任何兩正整數相乘必又爲一正整數且爲唯一之正整數故也.實施乘法之時,亦有不易之法則須遵守者,其內容如次:

$$ab=ba \qquad \text{(乘法之交換原理)}$$

$$(ab)c=a(bc) \qquad \text{(乘法之結合原理)}$$

$$(a+b)c=ac+bc. \qquad \text{(分配原理)}$$

數學中之法,常有一相逆法與之對峙;如甲爲乙之相逆法,則乙亦爲甲之相逆法,兩相逆法相繼應用之後,結果又回復原狀;加法之相逆法,減法是也.欲在正整數之集團內實施減法,有一必要之假定,即被減數必大於減數而後可.所謂由a減去b,其意即謂欲求一數c,加以b後復得a者.若被減數a不大於減數b,$a\leqq b$(此可讀作

a 不大於 b), 則求之正整數之集團中,決無一如是之 c 故減法在此集團中未能暢行無阻,可以見矣.然則欲使減法在在可行,非於正整數之外,別創新數不可.當被減數 a 與減數 b 相等時: $a=b$, 欲求減法之可以實施,必有零而後可;當 $a<b$ 時,又必有負整數而後可.吾人將新創之負整數及零加入於正整數之集團中:

$$\cdots\cdots-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\cdots\cdots$$

可知其中各數亦先後相隨,秩然有序.至負整數之如何相加相乘,自宜有明確之規定;吾人如是規定之,使上節中所述各原理依然有效可也.

正整數,負整數及零所成之集團,世常稱之謂整數之集團.整數集團中任何數相加相減相乘,必仍爲其中之一數,已如上所言矣.

在正整數之集團中,若更施以除法(乘法之相逆法)則其中所含之數,又感不敷應用.所謂 a 除 $b(b\neq0)$, 其意欲求索一數 c, 以 b 乘之復得 a 者;苟 a 未嘗含 b, 則此事在整數之集團中爲不可能.然則欲使之可能,非於整數之外,別創他數不可,所謂分數者,遂因之而起.凡正負整數,正負分數及零統稱之謂有理數,其所組成之集團謂有理數之集團.考有理數集團之重要性質,約有三種,請略言之.

其一,有理數集團之序次性.正負整數及零之大小

有序,已如上所言.分數之間,亦大小有序,秩然不亂;欲辨兩分數 $\frac{a}{b}$ 及 $\frac{c}{d}$ 之大小,可先歸之於同一分母

$$\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$$

$$\frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}$$

然後視其分子之大小 $ad \gtreqless bc$,

以定其大小可矣.至如何判定分數與整數之大小,自無待論.此種性質,謂之有理數集團之序次性.

其二,有理數集團之完備性.將任何有理數施以加減乘除四種法則,其結果仍爲一有理數.此種性質,謂之有理數集團之完備性;其意以爲其中所含已足應付加減乘除四法之用,故堪稱完備也.惟以零除任何數爲無意義之事,自在嚴禁之列耳.

其三,有理數集團之稠密性.任何兩不同之有理數之間,復有其他有理數.何則,兩不同之分數必可設法化之,使其分母爲同一之正整數,分子之相差大於一,如是則必有其他分數介於此兩者之間.循是以推,任何兩不同之有理數之間尚有無窮多之有理數,可以識矣.此種性質,謂之有理數集團之稠密性.

有理數者,常可視爲兩整數之商數,如:

$$7=\frac{7}{1}=\frac{14}{2}=\frac{-35}{-5}=\frac{56}{8}=\cdots\cdots$$

$$\frac{-3}{4}=\frac{3}{-4}=\frac{-24}{32}=\frac{3000}{-4000}=\cdots\cdots$$

於此可見任何有理數得有無窮多之形式表而達之.欲求其形式之唯一,吾人常加以相當之限制,卽規定分母爲一正整數,分子與分母不能共含一數是也.

此外更有一簡明之法,用以表達有理數者.其法卽取10爲基數(Basis),尋常所謂十進之法.舉例明之:

$$760=7\cdot100+6\cdot10+0\cdot1=7\cdot10^2+6\cdot10^1+0\cdot10^0$$

$$\frac{1}{4}=0{,}25=0\cdot10^0+2\cdot10^{-1}+5\cdot10^{-2}$$

由是以觀,視有理數爲10之指數級數,亦無不可.此級數內所含之項,亦可無窮,如

$$\frac{25}{7}=3{,}571428571428 57\cdots\cdots$$

$$\frac{2}{3}=0{,}66666\cdots\cdots$$

惟分數如化爲無窮小數,必爲一循環小數,且任何循環小數必爲一有理分數,此不難證明者耳.

由正整數出發,逐步推廣數之範圍以適應需要,如是論數,自是簡而易明.惟欲說明數之概念,大可不必如是.昔Euklid著幾何原理,會同時輸入點,面,線等基本概念,並建立原理以規定其間之關係.至二十世紀初年,德國大數學家D. Hilbert乃應用其法以論數之概念,其意以爲如是不特理論之系統更見嚴密,而認識之基礎,亦

將隨之而益固.凡任何事物,其間所發生之關係如下列各原理所規定者,吾人稱之曰數,並以 $a, b, c\cdots\cdots$ 等符號表之.原理之種類有四,曰聯結原理 (Axiome der Verknuepfung), 曰運算原理 (Axiome der Rechnung), 曰序次原理 (Axiome der Anordnung), 曰連續原理 (Axiome der Stetigkeit),今一一述之如次:

I. 聯結原理

I 1. 由 a 及 b 用'加法'必得一確定之數 c:

$$a+b=c \text{ 或 } c=a+b.$$

I 2. 苟 a 及 b 為任何已知之數,必有且僅有一數 x, 又必有且僅有一數 y 如

$$a+x=b \text{ 及 } y+a=b.$$

I 3. 必有一確定之數——吾人名之曰零並以 0 表之——對任何數 a 發生如下之關係:

$$a+0=a \text{ 及 } 0+a=a.$$

I 4. 由 a 及 b 用'乘法'必得一確定之數 c 如

$$ab=c \text{ 或 } c=ab.$$

I 5. 苟 a 及 b 為任何兩已知之數,又 a 非 0, 必有且僅有一數 x, 又必有且僅有一數 y 如

$$ax=b \text{ 及 } ya=b.$$

I 6. 必有一確定之數,——吾人名之曰一,並以 1 表之——對任何數 a 發生如下之關係:

$$a\cdot 1=a \text{ 及 } 1\cdot a=a.$$

II. 運算原理

苟 a, b, c 爲任何數,則

II 1. $a+(b+c)=(a+b)+c.$

II 2. $a+b=b+a.$

II 3. $a(bc)=(ab)c.$

II 4. $a(b+c)=ab+ac.$

II 5. $(a+b)c=ac+bc.$

II 6. $ab=ba.$

III. 序次原理

III. 1. 苟 a, b 爲任何兩不同之數,則其中之一如 a 必大於其他,於是其他稱謂較小:

$$a>b \text{ 及 } b<a.$$

III 2. 若 $a>b$ 及 $b>c$, 則 $a>c$.

III 3. 若 $a>b$, 則

$$a+c>b+c \text{ 及 } c+a>c+b$$

III 4. 若 $a>b$ 及 $c>0$, 則

$$ac>bc \text{ 及 } ca>cb.$$

IV. 連續原理

IV 1. (雅克米特之原理 Archimchies Axiom) 苟 a, b 爲大於零 $a>0, b>0$ 之任何兩數,將 a 疊次自加必得一和,大於 b:

$$a+a+a+\cdots\cdots+a>b.$$

IV 2. (完備原理)吾人不能更加入其他事物於此數之系統中,使如上各原理均爲有效.換言之,此種數之系統,其間關係由上述原理所規定者,無擴張之可能.

數者,由 Hilbert 言之,滿足上述原理之事物而已.惟此原理是否各自獨立,又其間是否永無矛盾之可能,凡此種種,均有待於吾人之反覆勤求,期於必明者也.欲論其詳,惟有俟諸異日.

2. 有理數與有理點

觀於上述有理數之性質,吾人自聯想及於一直線上各點相處之地位.在一直線 L 之上,有兩相反之方向可以識別,其一謂右,其他謂左.苟 p 與 q 爲兩不同之點,則有兩種情形可以發生.其一,p 居 q 之右或謂 q 在 p 之左;其二,q 居 p 之右或謂 p 在 q 之左.兩者必有其一,且除此兩種情形外,無第三種情形可以發生.明乎此,吾人復得如下之認識:

I. 苟 p 居 q 之右,q 居 r 之右,則 p 亦必居 r 之右.於是吾人復稱 q 居於 p 及 r 之間.

II. 苟 p 與 r 爲兩不同之點,則必有無窮多之點,居於 p 與 r 之間.

III. 苟 p 爲一直線 L 上確定之點,則 L 中一切之點必因之而分爲前後兩段,兩段中所含之點均爲無窮,前段之點,在

p之左,後段之點,在p之右.至於p點本身,可屬於前段,或屬於後段.要之,前段中任何一點,必在後段中任何一點之左.

觀於以上所述,可見有理數與一直線上之點,其間有極相類似之現象.因此之故,吾人可使兩者之間發生一種關係;其法無他,在直線上擇一起點作為零點,並擇一相當單位以計量線段之長;如是則任何有理數a,必有一線段之長與之相應;苟a為一正數,則由零點向右作此線段,其終點p即可用以代表a之數;苟a為一負數,則由零點向左作一線段以與之相應.至與0相應之點,自為零點無疑.由是以論,任何有理數a,換言之,R中任何一數,必有直線L上之一點且僅有一點與之相應.如與a及b相應之點為p及q,又如$a>b$,則p必居q之右.前節中所述I,II,III諸理與本節中I,II,III諸理彼此相應,一一吻合,讀者可細玩而自得之.

3. 直線之連續性

任何有理數,可由直線上之一點以代表之,已如上所述矣.惟直線之上更有無窮多之點不能代表有理數者,吾人不可不注意及之.如有一點p,苟其所代表者為一有理數a,則op之長必與所規定之單位可以通約(Commensurabel),換言之,必有一第三者之線段,使單位與op均為其倍數而後可.然希臘古代之數學家已知有線段之存在,其長與單位不可通約,例如平方形之邊為1者,其對角線(Diagonal)即為此種不可

通約之線段.蓋由零點作一線段,其長與此對角線相等,則此線段之終點必不能代表一有理數也.不啻惟是,此種不可通約之線段,爲數甚多,吾人不難證明之.由是以論,直線 L 中所含之點,必多於 R 中所含之數,可以識矣.

明乎以上所述,吾人倘欲將直線上之現象用數以表達之,則有理數殊有不敷應用之慨.因此之故,吾人必將有理數之系統加以擴張,使其與直線具有同等之完備性而後已.

以上所述,凡稍稍從事數學者無不知之.今不厭其詳,爲之瑣述者,因便於引入以下之討論耳.觀於前人輸入無理數之時,無不應用幾何學中之概念與事實.吾人固不能否認數學中種種發明,如數之概念之擴張,有賴於幾何事實之暗示與刺激者甚多,(虛數之發明,實未嘗如是);若謂因此之故,吾人從事解析科學之時,種種理論即可以幾何爲根據,則期期以爲不可.解析學旣爲數之科學,自宜有獨立之系統,不必倚賴外力,有獨自發展之能力而後可.考負數及分數之發見,皆不必求助於外力;負數與分數之運算方法又得一一歸併於運算正整數之定理.明乎此,當輸入無理數之時,吾人亦必純粹用已知之有理數以規定欲定之無理數,如是始可謂之壁壘森嚴,精密圓滿.然此事果如何可能耶?

吾人旣將有理數所組成之系統(即前用 R 之符號以表達者)與直線上之點相比較,知後者所含,多於前者;因此遂謂後者之系統更較完備,後者無漏,前者有漏,後者連續,前者不

連續.雖然,所謂連續,其意何指.吾人必求一精確之標準,以測量連續性之存在;以此爲基,一切推論,始有確切不易之精.余既明問題之所在,苦思冥索,歷時甚久,始發見之.在前節中,既略論直線上任何一點 p 必將此直線分爲前後兩段,前段中各點,必在後段中各點之左.據余所見,連續性者無他,在乎此事之逆;明白言之,在乎以下之原則是已(註八).

"苟直線上之點,裂爲前後兩段,前段各點均在後段各點之左,如是則必有一點,且僅有一點使此兩段之分裂得以產生."

讀者於此,或不無驚奇之感想;所謂連續,不過如是,其淺顯易明,幾爲人人所公認.讀者以此爲顯而易見之事,正余意料所及,亦余所引以爲幸者.蓋余既不能證明此理,無論何人,恐亦不能證明之也(註九).直線之具有連續性,或爲人人所公

註八　欲求審思明辨之功,必無苟於定義而後可.常俗用字,每多歧義,意義牽連,相假爲用,用之既久,義益糾紛.例如連續,常人每以爲無斷之意,因其無斷,乃可分之無盡.惟此意義,殊不精確,欲以如此不精之器,求通專精之學,其事未有能成功者.故必立一精密之原則,爲測量連續性之標準;Dedekind 不朽之業,在乎此原則之發見而已.

註九　欲證一理,其義無他,將此理歸併於其他已證之理,在已證之理中,求得欲證之理所以成立之故是已.明乎此,乃知科學中若事事必有一證明,其結果將使無事得有一證明.科學之職務,固在證其所當證,尤在知其所不必證.所當證者,非證不可;不必證者,證之徒自欺耳.然則何者當證,何者不必證,是有待於智者之眞知灼見,不能爲初學者道也.Dedekind 既選其所不必證者立爲原則,於是其他之理,均由是而得嚴密之證明,解析之學因之而有堅固之基礎,厥功可謂偉矣.

認,故遂稱之謂原理.至實際上空間之性質如何,治數學者置之不論焉可也.

4. 無理數之創造

連續性之義既明,吾人乃可進而討論如何使未嘗連續之有理數系統加以增補而成一連續之系統.誠如第一節中所述,任何有理數 a 必將 R 分為前後兩段,使前段之數,均小於後段之數;至 a 本身,則為前段中最大之數,或為後段中最小之數.凡遇此種情形發生之時,詳言之,苟 R 裂為兩段 A_1 與 A_2,且 A_1 中任何一數 a_1 均小於 A_2 中任何一數 a_2,如是吾人即稱之謂一分截 (Schnitt), 並以 (A_1, A_2) 之符號表之.如前述之有理數,即能產生一如是之分截;此分截復有一重要之性質不可不注意者,即前段有一最大之數或後段有一最小之數是也.反而言之,苟一分截果有如是之性質者,其產生亦有賴於此最大或最小之數引而出之.要之,有理數者,固足以產生具有此種特性之分截,具有此種特性之分截,亦藉有理數而始產生也.

雖然,分截之成,亦有未藉有理數者;如下所言,即其一例.設定 D 為一正整數,但非一整數之自乘方(註十).於是必有一正整數 n,使如下之關係得以成立:

註十 謂無一整數,自乘後為 D.

$$n^2<D<(n+1)^2.$$

吾人將一切正有理數a_2,其自乘方大於D者歸入後段A_2,其他有理數a_1歸入前段A_1,如是亦得一分截(A_1, A_2).何則,任何a_1均小於任何a_2故也(註十一).如$a_1=0$,或爲負數,則a_1自小於a_2,因a_2根據定義均爲正數故;苟a_1爲正,據定義其自乘方$\leqq D$,故a_1必小於a_2,因a_2之自乘方均大於D也.

依此法所產生者誠爲一分截,無疑義矣.惟此分截,未嘗藉一有理數而生.欲證之,當先證無一有理數,其自乘方爲$=D$.此事在稍習數論者固已熟知,爲求備之意,姑將以下之反證約而言之.苟其有一有理數,其自乘方$=D$者,則必有正整數如t及u之存在,滿足

$$t^2-D^2u^2=0.$$

此處吾人自可假定u爲適合此條件之最小之正整數;如其不然,亦可使其爲最小者(註十二).因$\frac{t}{u}$居於兩整數之間,故得

$$nu<t<(n+1)u$$

於是 $$u'=t-nu$$

註十一　凡根據一確定之法則,得數兩段,前段所含,均小於後段所含者,皆得稱之爲分截.有理數所引起之分截復有一重要之特性,卽前段有一最大者或後段有一最小者是也.

註十二　設假定,無一整數,自乘後爲D.若其有一分數,自乘後爲D者,其意無異謂有兩整數t及u如

$$\left(\frac{t}{u}\right)^2=D$$

必爲一正整數且小於 u. 何則, $t>nu$, 故 $t-nu>0$; 苟 $t-nu>u$, 則 $t>u(n+1)$, 是不可也,故 $u'=t-nu<u$. 復次.

$$t'=Du-nt$$

亦必爲一正整數,蓋 $t'=Du-nt>Du-n^2u>u(D-n^2)$ 故也.於是

$$t'^2-Du'^2=(n^2-D)(t^2-Du^2)=0$$

是 u' 小於 u 而又適合如上之條件,故與 u 之假定相矛盾.明乎此,可知任何有理數 x 自乘必 $<D$ 或 $>D$. 惟其如是,吾人倘反觀此分截,可知 A_1 段中無一最大之數, A_2 段無一最小之數. 欲證之,但證 A_1 如有壹 x, 其中必有壹 $y>x$, A_2 如有壹 x, 其中

觀此可知滿足此條件者,不僅 t, u 兩數; 蓋 t, u 如有一公約數,將此公約數除去,其數依然滿足如上之條件;又若將 t, u 各乘以同一之數 $a(a\neq 0)$, 所得兩數亦滿足之.由是以論,凡滿足

$$\left(\frac{t}{u}\right)^2-D=0$$

之 t, u, 爲數甚多;其中之 u 必有一最小者.惟此最小者之必然存在,吾人乃卽以 u 名之.旣假定 $\frac{t}{u}$ 爲一分數,自乘後爲 D, 其必介於兩整數如 n 及 $n+1$ 之間:

$$n<\frac{t}{u}<n+1$$

自爲顯然之理.於是得

$$nu<t<(n+1)u$$

因 $t>nu$, 故 $t-nu>0$; 又因 $t<(n+1)u$, 故 $t-nu<u$; 由是知 $t-nu$ 卽上文中之 u' 必爲一小於 u 之一正整數.復次,因

$$n^2<\left(\frac{t}{u}\right)^2=D$$

可知 $$n^2-D<0$$

或 $$D-n^2>0$$

復因 u 假定爲一正整數,故

$$u(D-n^2)>0 \text{ 或 } uD-n^2u>0$$

必有壹 $y<x$ 可矣(註十三).吾人使 $y=\dfrac{x(x^2+3D)}{3x^2+D}$

則
$$y-x=\frac{3x(D-x^2)}{3x^2+D}$$

$$y^2-D=\frac{(x^2-D)^3}{(3x^2+D)^2}$$

於是在 A_1 中取一正數 x, 則 $x^2<D$, 故 $y>x$, $y^2<D$ 是 y 雖大於 x, 仍在 A_1 之中.更於 A_2 中取壹 x, 其 $x^2>D$, 則 $y<x$, $y>0$, $y^2>D$ 是 y 雖小於 x, 仍在 A_2 之中.此種分截,其前段無一最大之數,後段無一最小之數,故不能由一有理數而生.

明乎以上所述,乃知分截未必皆由有理數而產生.惟其如是,有理數系統 R 之無連續性,可以識矣.

亦無疑義.惟

$$nu<t$$

故 $uD-nt$ 必大於 $uD-n^2u$, 因之更大於0.由是知 $uD-nt$ 卽上文中之 t' 爲一正整數.復據 t' 及 u' 之定義:

$$t'=uD-nt$$

$$u'=t-nu$$

可推知

$$\begin{aligned} t'^2-Du'^2&=(Du-nt)^2-D(t-nu)^2\\ &=D^2u^2+n^2t^2-Dt^2-Dn^2u^2\\ &=n^2(t^2-Du^2)-D(t^2-Du^2)\end{aligned}$$

故
$$t'^2-Du'^2=(n^2-D)(t^2-Du^2)=0$$

於是得文中所述之矛盾,據反證法遂知無一分數,自乘爲 D.

註十三 欲證 A_1 中無一最大之數,其法如下. A_1 中任何一數 x 可據之以求 A_1 中其他一數 y, 其值必大於 x. 此事如果可能,則 A_1 中必無一最大之數矣.證 A_2 中無一最小之數,其理亦同.

無論何時,若有一分截未藉有理數而產生者,吾人即創一種新數,所謂無理數以適應之.無理數之定義,完全由此分截而定;吾人稱此無理數與此分截相應,亦稱此分截由無理數而生(註十四).R 中之漏隙,既依此方法加以補充;自是以後,凡任何分截,必有一有理數或無理數與之相應;任何分截,必藉一有理數或無理數而產生.所謂兩數不相同,或不相等,當於其所產生不同之分截中見之.

凡有理數與無理數統稱之謂實數.吾人欲將一切實數依其大小而序次之,必先就兩數 α 與 β 所產生之分截 (A_1, A_2) (B_1, B_2),研究其間之關係(註十五).任何分截 (A_1, A_2),其內容如何,由其中任何一段可以決定之;例如既知 A_1 之所含何如,A_2 必爲一切不含於 A_1 之有理數所成;此外 A_1 復具有一特性,苟其含 a_1,則一切小於 a_1 者亦在 A_1 之中.明乎此,吾人欲研究 $(A_1, A_2)(B_1, B_2)$ 間之關係,僅比較兩者之前段 A_1 與 B_1 已足.

註十四 凡分截之未藉有理數而產生者,即規定一無理數,或謂產一無理數;或逕謂此種分截即爲一無理數.如此規定無理數之定義,其所根據,純粹爲一解析原則矣.

註十五 將一切有理數依一確定法則分爲前後兩段,使前段之數均小於後段之數者,謂之分截.若分截中之前段無一最大之數,後段無一最小之數,此分截即謂之無理數.如是以有理數規定無理數,與前之以整數規定分數同;吾人純粹由數之立場,以已知之數規定欲定之新數,其意義始可以大明,此種思想,一脈相傳,所從來遠矣.雖然,所謂數者,必有大小或相等之可言,且必根據不易之原理可以相加相乘.無理數既爲一種分截,吾人當由其分截之性質明其大小及相等之義,復進而求其加相乘之道.以下即對此加以討論.

吾人既從事於此類比較,乃有如下各種情形之發見,茲特一一論之.

第一,A_1與B_1完全相同;換言之,凡A_1中任何一數a_1同時在B_1之中,B_1中任何一數亦同時在A_1之中.如是A_1與B_1自必完全相同.兩者之前段既相同,產生此分截之數α與β遂謂之相等(註十六).以符號表之,得$\alpha=\beta$或$\beta=\alpha$.

苟A_1與B_1未嘗相同,換言之,A_1中有一數a_1'未出現於B_1而出現於B_2之中:$a_1'=b_2'$,於是B_1中一切之數b_1自小於$a_1'=b_2'$故必在A_1之中(註十七).苟其如是,尚有不同之情形可以發見.

第二,若a_1'爲A_1中唯一之數未出現於B_1,其他A_1中之數a_1均出現於B_1如是則此種a_1自均小於a_1'換言之,a_1'爲A_1中最大之數,故(A_1, A_2)必由此有理數$\alpha=a_1'=b_2'$而產生.更就(B_1, B_2)言之,吾人既知B_1中之b_1均出現於A_1,又小於B_2中之$a_1'=b'_2$,於是B_2中任何其他之數b_2必大於b_2',蓋如小於b_2',

註十六　兩者之前段既相同,根據前說,其後段亦必相同.產生此相同分截之數謂之相等.

註十七　凡A_1段中之數稱a_1;B_1段中之數稱b_1;A_2段中之數稱a_2;B_2段中之數稱b_2;餘類推.若於某段中取一特殊之數,則於其上加一$'$,如a_1'爲A_1段中一特殊之數.A_1中若有一數a_1',在B_2之中,則必有

$$a_1'=b_2'$$

因 $$b_1<b_2$$

故 $$b_1<b_2'$$

於是 $$b_1<a_1'$$

因a_1'在A_1之中,b_1既均小於a_1',自必在A_1之中.

必亦小於a_1'自在A_1之中,亦在B_1之中矣.由是以論,b_2'實爲B_2中最小之一數.故(B_1, B_2)實由此$b_2'=a_1'=\alpha=\beta$而產生.故在此種情形之下,$(A_1, A_2)(B_1, B_2)$兩分截未始不相同也.

第三,苟A_1中至少有兩不同之數a_1', a_1''未出現於B_1,則據第一節所述,a_1'與a_1''之間尙有無窮多之數,此無窮多之數亦必在A_1而未在B_1之中.苟其如是,吾人稱(A_1, A_2), (B_1, B_2)謂不相同,產生此不同分截之數α與β爲不相等;吾人稱α大於β,或β小於α,並用如下之符號$\alpha>\beta$或$\beta<\alpha$表而達之.此定義旣明,有一言不可不聲明者,此處所謂"相等""大於""小於"等定義,苟α, β爲有理數時,與尋常定義完全相符是也(註十八).

此外尙有兩種情形可得而言者.第四,苟B_1中有一數且僅有一數b_1'未在A_1之中,則(A_1, A_2), (B_1, B_2)兩分截實際上未嘗相異,蓋兩者由同一有理數$\alpha=a_2'=b_1'=\beta$所產生也.第五,苟B_1中至少有兩不同之數未出現於A_1之中,則$\beta>\alpha$或$\alpha<\beta$.

觀於以上所述,乃知兩不相等之數,其中之一必較大,其他則較小;除此兩種可能外,別無第三種情形.此理雖淺,至今始有一精嚴之根據.吾人從事基本研究之時,不可不愼重其

註十八　有理數如何謂之相等,又如何謂一有理數大於或小於一其他有理數,其義早已明定.惟爲行文之便利或爲理論之嚴整,不妨另立定義,惟規定同一事物之定義必可互相溝通,屬於此者必屬於彼,屬於彼者,亦屬於此.吾人旣以一種分截規定一無理數,是否亦可用一他種分截規定一有理數.苟定義所涵,精確不易,無循環說明之弊,與前之所謂有理數者又相符合,自亦未始不可,讀者宜深思而自得之.

事,凡日常習用之詞句,必經一番嚴密之批評,毫釐之差可發生千里之謬也.

最後吾人擬將$\alpha>\beta$之情形,細加探討.若其中較小之β為一有理數,則必在A_1之中;何則,所謂$\alpha>\beta$, A_1中必有一a_1'在B_2之中,故β為B_1之最大數或為B_2之最小數,要之必$\leqq a_1'$故在A_1之中,可斷言也.依同理,可以推知較大之α,苟其為一有理數必在B_2之中,因$\alpha\geqq a_1'$故也.由是以論,苟有一分截(A_1, A_2)由α而產生,凡小於α之有理數均屬於A_1,大於α之有理數均屬於A_2.若α本身亦為一有理數,則可屬於A_1或屬於A_2.

於是吾人復得一重要之認識:如$\alpha>\beta$,則A_1中有無窮多之數,未在B_1之中;如是亦必有無窮多之數,與α及β不相同者.此種有理數c必$<\alpha$,以其在A_1之中故;又必$>\beta$以其在B_2之中故.

5. 實數之連續性

既明以上所述,一切實數均先後有序,自成一有組織之系統,可以識矣.所謂先後有序之系統,詳言之不外如下諸定理之所涵而已.(以下α, β, γ均表示實數).

I. 苟$\alpha>\beta$, $\beta>\gamma$,則$\alpha>\gamma$.吾人亦稱β居於α與γ兩數之間(註十九).

註十九 既明如何比較無理數之大小,又明如何比較有理數與無理數之大小,然後實數之序次性可證.

II. 若α與γ爲兩不同之數,則必有無窮多之數如β者,居於α與γ之間.

III. 苟α爲一固定之數,則一切實數,由之而分爲前後兩段.兩段所含,各爲無窮;前段之數均小於α,後段之數均大於α;至α本身,可屬於前段,或屬於後段;苟其屬於前段,則爲前段中最大之數,屬於後段,則爲後段中最小之數.要之,實數之領域必由α而裂爲前後兩段,前段之數均小於後段之數;吾人亦稱此分段與α相應,或由α而產生.

以上之定理,乃上節所述定義之必然結果;讀者可自證之.實數之領域,除上述三種特性外,更有所謂連續性者(註二十).

VI. 苟一切實數裂爲前後兩段,前段之數均小於後段之數,如是必有一數且僅有一數α之存在,使此分段得以產生.

證: 吾人名實數之領域爲$\overline{R}$,當$\overline{R}$裂爲兩段$\overline{A_1}$與$\overline{A_2}$,則有理數之領域R亦必分而爲A_1及A_2,凡$\overline{A_1}$中之有理數歸入A_1,其他有理數,換言之,凡$\overline{A_2}$中之有理數均歸入A_2.故R之分爲A_1與A_2,與$\overline{R}$之分爲$\overline{A_1}$及$\overline{A_2}$必同時實現.因此之故,必有一確定之數α,使R之分爲A_1與A_2,得以產生.苟除α之外,尚有其他一數β之存在,則α與β之間,復有無窮多之有理數如c者.苟$\beta<\alpha$,則$c<\alpha$,故c屬於A_1,同時亦屬於$\overline{A_1}$.又因$\beta<c$之

註二十 由分數之法創造無理數數之後,實數之連續性乃得以實現.

故,β亦必屬於$\overline{A_1}$無疑,蓋$\overline{A_2}$中任何一數必較$\overline{A_1}$中之c為大故也.苟$\beta>\alpha$,則$c>\alpha$,故c必屬於A_2,同時亦屬於$\overline{A_2}$.復因$\beta>c$之故,β亦必屬於$\overline{A_2}$,蓋$\overline{A_1}$中任何一數必較$\overline{A_2}$中之c為小故也.由是以觀,凡異於α之β,苟其$\beta<\alpha$,則屬於$\overline{A_1}$;苟$\beta>\alpha$,則屬於$\overline{A_2}$.惟其如是,α本身必為$\overline{A_1}$中最大之數,或為$\overline{A_2}$中最小之數.故α為唯一之數使$\overline{A_1}$及$\overline{A_2}$之分段得以產生,是即吾人所欲證明者也.

6. 實數之運算

實數之義既明,然後可進而討論如何運算實數之道.吾人所欲探討者,如何將實數之運算歸併於有理數之運算而已.設在有理數之領域R中有兩分截,(A_1, A_2),(B_1, B_2),其產生由於α及β兩數,吾人將如何立一分截(C_1, C_2)之定義,使與其運算之結果γ相應,此不可不首先加以說明者也.為力求簡便之故,請就加法之例說明之.

凡任何有理數C,苟其$C\leqq a_1+b_1$,則歸之於C_1段,式中a_1為屬於A_1之一數,b_1為屬於B_1之一數,其他有理數之未適合如是條件者均歸之於C_2.既依此法將一切有理數分裂之後,其必為一分截(C_1, C_2)自無疑義,何則,凡C_1中之數c_1均小於C_2中之數c_2故也.彼使(A_1, A_2),(B_1, B_2)產生之兩數α與β若均為有理數,則C_1中之c_1均不大於$\alpha+\beta$:$c_1\leqq\alpha+\beta$,因$a_1\leqq\alpha$,$b_1\leqq\beta$,故$a_1+b_1\leqq\alpha+\beta$.不甯惟是,C_2中任何一數c_2必不小於$\alpha+\beta$:c_2

$\geqq \alpha+\beta$. 倘若其 $c_2<\alpha+\beta$, 換言之, $\alpha+\beta=c_2+p$, 式中 p 爲一正有理數,則

$$c_2=(\alpha-\tfrac{1}{2}p)+(\beta-\tfrac{1}{2}p)$$

因 $\alpha-\frac{1}{2}p$ 屬於 A_1, $\beta-\frac{1}{2}p$ 屬於 B_1, 是與 c_2 之定義相矛盾矣.於是 $c_1\leqq\alpha+\beta$, $c_2\geqq\alpha+\beta$, 故 $(C_1\ C_2)$ 之分截,實由 $\alpha+\beta$ 一數而產生.明乎以上所述,倘 α 與 β 爲任何兩實數,則兩者相加之結果 $\alpha+\beta$ 吾人卽以 (C_1, C_2) 之分截規定之,如是得一定義,與舊日有理數之定義固絲毫未相抵觸也.至 α 與 β 兩者之中,其一 α 爲有理數時,吾人將 α 屬於 A_1 固可,屬於 A_2 亦可,要之.所謂 $\alpha+\beta$ 之義固可瞭然不必贅矣.

以上略論相加之義,至其他運算如相減相乘相除,求冪,求根及對數等等定義,均可依法規定之.以上各定義旣立,初等數學中多數定理,以余所見從未證明者,均有一一證明之餘地,如 $\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}$ 卽其一例也.惟運算之性質如較複雜,定義之立.亦較困難,是亦理所使然,不足爲奇;然種種困難,未始不可設法避免之.欲減少此種困難,'區域'之概念頗見重要,特略言之.凡有理數相聚,成一集團 A; 若 a 與 a' 爲 A 中之兩數,一切處於 a, a' 兩數之間之有理數亦均在 A 之中,苟如是者, A 卽稱之謂一區域.例如一切有理數所組成之集團,或任何分截中之前後兩段皆所謂區域是也.倘有一有理數 a_1 小於 A 中之任何一數,復有一有理數 a_2 大於 A 中之任何一數,如是則 A 之區域謂之有限. A 之區域,苟爲有限,則不特有一 a_1,

必有無窮多之數如 a_1 者小於 A 中之任何一數;不特有一 a_2,必有無窮多之數如 a_2 者大於 A 中之在何一數.由是以論,一切有理數之集團必因之而分爲 A_1, A, A_2 三段;且必有兩確定之有理數或無理數 α_1 及 α_2 之存在,謂之 A 之下界及上界 (die untere und obere Grenze).所謂 A 之下界 α_1 者,乃由一分截而定,其前段由 A_1 之數所成;所謂 A 之上界 α_2 者,由一分截而定,其後段由 A_2 之數所成者也.明乎此,凡處於 α_1 與 α_2 之間之有理數或無理數 α_1 均稱之謂'處於 A 區域之內'.若處於 A 區域之內之數同時亦處於 B 區域之內,則 A 亦稱 B 之分區.

運算有理數之時,吾人已知有所謂交易原理及分配原理如 $(a+b)c=ac+bc$ 等等,今欲將此種原理,擴張其應用範圍於任何實數,其事似不甚易.然細考之,亦殊不難.要之,凡數學中加減乘除四則本身實具有連續性;此處所謂連續性,可用如下之定理說明之.

"若有一數 μ 爲計算 α, β, γ……諸數後所產生之結果,又 μ 爲 L 區域內之一數,如是則必有 A, B, C……諸區域之存在,其中各含 α, β, γ……,且 α, β, γ……等等如代以其他含於 A, B, C……中之數,其運算之結果亦必處於 L 區域之內".欲證明此理之眞確,莫便於應用變數,函數,及極限等概念,本文不復贅矣.

案連續性之義既明,然後立分截之說以創無理數;藉以完成實數之連續性,更進而討論實數之運算法則;

自是以後,解析學遂有一純粹基礎;綜觀所論,精微極矣惟考其關鍵所在,要在闡明無理數之義而已.與前說殊途同歸者,有所謂級列之說,首創之者為德國數學大家Cantor.今略敍其旨,以便彼此互相溶發耳.為行文之便,試舉例言之,所謂$\sqrt{2}$,其義果何所指.謂$\sqrt{2}=1,414$,則1,414自乘未嘗為2;謂$\sqrt{2}=1,41421$,則1,41421自乘與2相去甚遠.今欲力求精確之故,或謂$\sqrt{2}=1,4142135\cdots\cdots$,吾人於此苟將小數加至百位或千位之多,其非$\sqrt{2}$依然如故;至於在小數之後加以……,謂如是如是,未知所謂如是者究竟如何,蓋未明如何相繼相續之道,即謂如是如是,所言可謂全無意義.由是以論,$\sqrt{2}$之為物,與有理數有截然不同者;後者如$\sqrt{9}=3$, $\frac{35}{7}=5$,皆為吾人所深知;他如$\frac{25}{7}=3,5714285714\ 85714\cdots\cdots$其中小數週而復始,循環無已,故雖為無窮小數,其全體情形,已可瞭然.反觀$\sqrt{2}$,吾人既知其非一有理數,故決非一循環小數;其果為何物,殊不可知.

誠如以上所言,$\sqrt{2}$之無窮小數如何進展之情形,不能一望而知;然吾人固有一簡明之方法,使前一位小數既知之後,即可憑此方法以知其後一位果為何數.所難者,欲知一位,非算一位不可,無法知其全體耳.惟多得一位小數,則自乘之後向2更進一步;小數之位數愈多,

自乘後之結果離 2 愈近,如是而已.要而言之,下列諸有理數

$$1;\ 1,4;\ 1,41;\ 1,414;\ 1,4142;\ 1,41421;$$

依一確定法則前後相隨者謂之敍列.敍列中之數,爲研究之便,姑以 $a_0, a_1, a_2, a_3\cdots\cdots$ 名之:

$$a_0=1$$

$$a_1=1,4=1+\frac{4}{10}$$

$$a_2=1,41=1+\frac{4}{20}+\frac{1}{10^2}$$

$$a_3=1,414=1+\frac{4}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{4}{10^3}$$

$$a_4=a_3+\frac{2}{10^4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n=a_{n-1}+\frac{\alpha_n}{10^n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n+m}=a_n+\frac{\alpha_{n+1}}{10^{n+1}}+\frac{\alpha_{n+2}}{10^{n+2}}+\cdots\cdots\frac{\alpha_{n+m}}{10^{n+m}}$$

其中 $\alpha_n\alpha_{n+1}\cdots\cdots\alpha_{n+m}$ 各爲1, 2, 3……9中之一數;吾人可循一確定之法規定之,使 a_n 及 a_{n+m} 諸數自乘後與2相差愈趨愈微.復觀 a_{n+m} 及 a_n,兩者之差:

$$\left|a_{n+m}-a_n\right|=\left|\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}+\frac{a_{n+2}}{10^{n+2}}+\cdots\cdots+\frac{a_{n+m}}{10^{n+m}}\right|$$

必因 n 之變大而變小;何則,設 ε 爲一任何已知之正有理數,其値任意小均無不可,吾人必能求得一正整數 N,當 n 大於 N 時上式中右方之各項小於 $\frac{\varepsilon}{m}$ (m 爲一固定之正整數),其結果使

$$\left|a_{n+m}-a_n\right|<\varepsilon,$$

惟所取之 ε 愈小,則 N 必隨之而愈大而後可,所最當注意者,不論 ε 爲任何小之正有理數,必有一 N 之存在,凡 n 之大於 N 者必能使

$$\left|a_{n+m}-a_n\right|<\varepsilon$$

之成立耳.尚有一言須申述者.如上之討論雖應用十進小數,惟所發見之理,則未嘗受此假定之束縛.吾人所以應用十進小數者,固爲便於計算之故,亦未始不受習慣之影響;苟用其他之數如 2 或 12 等爲基數以表達有理數,如上之理依然眞確,可斷言也.

旣明以上所述,吾人乃立一定義曰:苟一有理數之敍列 $a_1, a_2, a_3\cdots\cdots a_n\cdots\cdots$ 當 m 爲一固定之正整數時必能覓得一正整數 N,當 n 大於 N 時,

$$\left|a_{n+m}-a_n\right|$$

小於任何正有理數 ε,如是則謂之基本敍列,或謂此敍列有一極限 b.擧例明之:

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{n}{n+1}$$

因 $a_{n+m}-a_n=\frac{n\ m}{n+m+1}-\frac{n}{n+1}=\frac{m}{(n+m+1)(n+1)}<\frac{1}{n+1}$,

觀此可知必可求得一N,凡n之大於N者$a_{n+m}-a_n$之差小於任何小之有理數,故其爲一基本敍列,自無待論.復因

$$1-a_n=1-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

可知必可求得一如是之正整數N,凡n之大於N者a_n與1之相差小於任何小之正有理數.惟其如是,吾人以此基本敍列代表1固可;或視此基本敍列與1形異而實同,故即稱$\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4}\cdots\cdots\right)$爲1

$$1=\left(\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\cdots\cdots\right)$$

亦無不可.明乎此,苟一基本敍列向一有理數愈趨愈近,換言之,其極限爲一有理數,吾人即稱此敍列爲此有理數.苟其未能向一有理數愈趨愈近,換言之,其極限未爲一有理數,則吾人即以此基本敍列規定一新數,名之謂無理數.如

$$(1;\ 1,4;\ 1,41;\ 1,414;\ 1,4142\cdots\cdots)$$

爲一基本敍列,其極限未爲一有理數,因以無理數稱之.此敍列中之有理數,苟其中小數之位數愈多,則自乘後與2相去愈微;吾人欲表達此特性,乃常用$\sqrt{2}$之符號:

$$\sqrt{2}=(1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\cdots\cdots)$$

故$\sqrt{2}$者,實表達一種基本級列,其意義於是可以瞭然矣.

如上所言,凡一基本級列,其極限未爲一有理數者,均稱之謂無理數.平情論之,以有理數之級列規定無理數,亦爲事理所必至,殊無新奇之可言.蓋負整數之規定,既有賴於正整數及一減號,分數之創造,亦非整數不爲功;要之,必用已知之數規定新創之數而後其意義始可以大明,此種思想,一脈相傳,所從來遠矣.

無理數之定義既明,乃可進而討論其序次性及如何運用之道.苟有兩無理數b及b'如下:

b:　　$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\cdots\cdots a_n\cdots\cdots)$

b':　　$(a_1',\ a_2',\ a_3',\ a_4'\cdots\cdots a_n'\cdots\cdots)$

此級列者,既爲有理數組織而成,其間所能發生之關係必爲如下三種之一:

1. $|a_n-a_n'|$之值當n愈大時,與零相差愈微.苟其如是,則此兩級列所表達之無理數b及b'謂之相等,吾人以$b=b'$表之.

2. 必能求得一正整數N,當n大於N時,a_n-a_n'之值大於一正有理數ε.苟其如是,則謂b大於b',吾人以$b>b'$表之.

3. 必能求得一正整數N,當n大於N時,a_n-a_n'小於一負有理數$-\varepsilon$.苟其如是,則謂b小於b',吾人以$b<b'$

表之.

明乎此,則不難推知如下之認識.苟 b, b', b'' 爲三無理數,其基本敍列爲

$$b \qquad (a_1, \ a_2, \ a_3 \cdots\cdots b_n \cdots\cdots)$$

$$b' \qquad (a_1', \ a_2', \ a_3' \cdots\cdots b_n' \cdots\cdots)$$

$$b'' \qquad (a_1'', \ a_2'', \ a_3'' \cdots\cdots a_n'' \cdots\cdots)$$

又 $b>b', b'>b''$ 則 $b>b''$. 何則,既有一 N, 當 n 大於 N 時,

$$a_n-a_n'>\varepsilon$$

$$a_n'-a_n''>\varepsilon'$$

則 $$a_n-a_n''>\varepsilon+\varepsilon',$$

因 ε 與 ε' 爲兩正有理數,故 $\varepsilon+\varepsilon'$ 亦爲一正有理數.於是知有一正整數 N, 當 n 大於 N 時 a_n-a_n'' 大於一正有理數,是卽所謂 $b>b''$.

復次,無理數與有理數之間,其關係亦不外"等於""大於""小於"三者之一,其理易明,故不復贅.

更有進者,欲明無理數之如何運用,必先將基本敍列如何相加相乘之道加以說明.設 b 及 b' 代表兩基本敍列,吾人必證明如下運算

$$b \pm b' = b''$$

$$b \cdot b' = b''$$

$$\frac{b}{b'} = b''$$

各有其確切之意見義;申言之,如 b 及 b' 爲兩基本敍列,

則運算之結果b''亦爲一基本級列,故爲一同類之數.所謂$b+b'$,其意謂由

$$b: \qquad (a_1,\ a_2,\ a_3\cdots\cdots a_n\cdots\cdots)$$

$$b': \qquad (a_1',\ a_2',\ a_3'\cdots\cdots a_n'\cdots\cdots)$$

運用相加之法組織而成:

$$b+b': (a_1+a_1',\ a_2+a_2',\ a_3+a_3'\cdots\cdots a_n+a_n'\cdots\cdots);$$

或以 $\qquad a_1'',\ a_2''\cdots\cdots a_n''\cdots\cdots$

代 $\qquad a_1+a_1',\ a_2+a_2'\cdots\cdots a_n+a_n'\cdots\cdots,$

得 $\quad b+b': \quad (a_1'',\ a_2'',\ a_3''\cdots\cdots a_n''\cdots\cdots)$

因
$$a_{n+m}''-a_n''=(a_{n+m}+a_{n+m}')-(a_n+a_n')$$
$$=(a_{n+m}-a_n)+(a_{n+m}'-a_n')$$

故 $\quad |a_{n+m}''-a_n''|\leqq|a_{n+m}-a_n|+|a_{n+m}'-a_n'|.$

復因b及b'爲兩基本級列之故,故必有一正整數N及一任何小之正有理數如$\frac{\varepsilon''}{2}$,當$n>N$時,

$$|a_{n+m}-a_n|<\frac{\varepsilon''}{2}$$

$$|a_{n+m}'-a_n'|<\frac{\varepsilon''}{2}.$$

因此之故當$n>N$時,

$$|a_{n+m}''-a_n''|<\varepsilon'';$$

其意即謂

$$b+b': \quad (a_1'',\ a_2'',\ a_3''\cdots\cdots a_n''\cdots\cdots)$$

亦爲一基本級列,故亦爲一同類之數.此基本級列或此

數者謂之b及b'兩數之和 $b+b'=b''$. 據同理可證明由b及b'兩敍列運用相減之法所成之:

$$b-b': \quad (b_1-b_1',\ b_2-b_2',\ b_3-b_3'\cdots\cdots)$$

亦爲一基本敍列;此基本敍列者謂之b及b'之差:$b-b'=b''$.

復次,吾人運用相乘之法.由兩基本敍列

$$b: \quad (a_1,\ a_2,\ a_3\cdots\cdots a_n\cdots\cdots)$$

$$b': \quad (a_1',\ a_2',\ a_3'\cdots\cdots a_n'\cdots\cdots)$$

另組一敍列如下

$$b'': \quad (a_1a_1',\ a_2a_2',\ a_3a_3'\cdots\cdots a_na_n'\cdots\cdots)$$

此敍列者,亦可證其爲一基本敍列.何則,由

$$(a_{n+m}-a_n)(a_{n+m}'-a_n')=a_{n+m}a_{n+m}'-a_na_{n+m}'-a_{n+m}a_n'$$
$$+a_na_n'=a_{n+m}a_{n+m}'-a_na_{n+m}'-a_{n+m}a_n'+2a_na_n'-a_na_n'$$

可知

$$|a_{n+m}a_{n+m}'-a_na_n'|\leqq|(a_{n+m}-a_n)(a_{n+m}'-a_n')|$$
$$+|a_na_{n+m}'+a_{n+m}a_n'-2a_na_n'|$$

或 $$|a_{n+m}a_{n+m}'-a_na_n'|\leqq|a_{n+m}-a_n||a_{n+m}'-a_n'|$$
$$+|a_n(a_{n+m}'-a_n')+a_n'(a_{n+m}-a_n)|.$$

因b及b'爲兩基本敍列,故當n相當大時,必得

$$|a_{n+m}-a_n|<\varepsilon$$

$$|a_{n+m}'-a_n'|<\varepsilon'$$

因之遂得

$$|a_{n+m}a'_{n+m}-a_na'_n|<\varepsilon\varepsilon'+|a_n|\varepsilon'+|a'_n|\varepsilon$$

ε及ε'者,兩任意小之正有理數;苟以ε''表另一任意小之正有理數使

$$\varepsilon'=\frac{\varepsilon''}{2a_n},\qquad \varepsilon=\frac{a_n\varepsilon''}{\varepsilon''+2a_na'_n}$$

則
$$\varepsilon\varepsilon'+a_n\varepsilon'+a'_n\varepsilon=\frac{a_n\varepsilon''^2}{2a_n(\varepsilon''+2a_na'_n)}+\frac{\varepsilon''}{2}$$
$$+\frac{a_na'_n\varepsilon''}{\varepsilon''+2a_na'_n}=\varepsilon''$$

故吾人但取

$$\varepsilon'\leqq\frac{\varepsilon''}{2|a_n|},\qquad \varepsilon\leqq\frac{|a_n|\varepsilon''}{\varepsilon''+2|a_na'_n|}$$

則當n相當大時,必

$$|a_{n+m}a'_{n+m}-a_na'_n|<\varepsilon\varepsilon'+|a_n|\varepsilon'+|a'_n|\varepsilon<\varepsilon''$$

於是可知b''亦爲一基本敍列;此敍列謂之b與b'之積.

最後吾人可用相除之法由兩基本敍列如

b: $(a_1,\ a_2,\ a_3\cdots\cdots a_n\cdots\cdots)$

b': $(a'_1,\ a'_2,\ a'_3\cdots\cdots a'_n\cdots\cdots)$

者,另組一敍列如下:

$\frac{b}{b'}$: $\left(\frac{a_1}{a'_1},\ \frac{a_2}{a'_2},\ \frac{a_3}{a'_3}\cdots\cdots\frac{a_n}{a'_n}\cdots\cdots\right)$

此敍列之爲一基礎敍列,亦不難證明.證之如次:

由

$$(a_{n+m}-a_n)(a_{n+m}'-a_n')=a_{n+m}a_{n+m}'-a_na_{n+m}'$$
$$-a_n'a_{n+m}+a_na_n'$$
$$=a_{n+m}a_n'-a_na_{n+m}'-2a_n'a_{n+m}$$
$$+a_{n+m}a_{n+m}'+a_na_n',$$

得知

$$|a_{n+m}a_n'-a_na_{n+m}'|\leqq|a_{n+m}-a_n||a_{n+m}'-a_n'|$$
$$+|a_n'(a_{n+m}-a_n)|-|a_{n+m}(a_{n+m}'-a_n')|.$$

因 b 及 b' 為兩基本敍列之故，必有一正整數 N 及任何小之正有理數如 ε 及 ε' 者，當 $n>N$ 時，

$$|a_{n+m}-a_n|<\varepsilon$$
$$|a_{n+m}'-a_n'|<\varepsilon'$$

故當 $n>N$ 時

$$|a_{n+m}a_n'-a_na_{n+m}'|\leqq\varepsilon\varepsilon'+|a_n'|\varepsilon-|a_{n+m}|\varepsilon'.$$

由是得

$$\left|\frac{a_{n+m}a_n'-a_na_{n+m}'}{a_n'a_{n+m}'}\right|=\left|\frac{a_{n+m}}{a_{n+m}'}-\frac{a_n}{a_n'}\right|<\frac{\varepsilon\varepsilon'+|a_n'|\varepsilon-|a_{n+m}|\varepsilon'}{|a_n'a_{n+m}'|}$$

苟另擇一任意小之正有理數 ε''，使

$$\varepsilon^2<\varepsilon''|a_{n+m}a_{n+m}'|\qquad\varepsilon'^2<\varepsilon''\left|a_n'^2\frac{a_{n+m}'}{a_{n+m}}\right|$$

則
$$\frac{\varepsilon\varepsilon'+|a_n'|\varepsilon-|a_{n+m}|\varepsilon'}{|a_n'a_{n+m}'|}<\varepsilon''$$

故必有一正整數 N 之存在，當 n 大於 N 時

$$\left|\frac{a_{n+m}}{a_{n+m}'}-\frac{a_n}{a_n'}\right|<\varepsilon'',$$

於是知 $\frac{b}{b'}$ 亦爲一基本敍列;此敍列謂之 b 與 b' 之商數.

綜上所論,凡基本敍列亦可施以加減乘除四種運算,且運算之結果,仍爲一基本敍列.此義既明,乃可進而證其運算之時,種種法則,對有理數有效者,在此亦依然眞確.因此之故,Cantor 遂以此種基本敍列爲一種新數,稱之謂無理數.Cantor 之文發表於一八七二年(見 Math. Annalen 第 123 頁).

據前所論,無理數者,由 Dedekind 之理論言之,爲一有理數之分截,惟據康脫爾 Cantor 之敍列說,實爲一基本敍列,故此兩種定義必能互相溝通而後可.

苟有一無理數 α,爲一有理數之分截所規定,吾人必可應用種種不同之法,求得有理數並疊次根據已得者以求其他有理數,使其值與 α 漸漸相近.其最普遍可行者有如下之法:在前段中求一整數 a,後段中求 $a+1$,於是

$$a<\alpha<a+1$$

將 a 至 $a+1$ 之一節分爲十節,其長相等,更於

$$a;\ a+0,1;\ a+0,2\cdots\cdots a+0,9;\ a+1$$

諸數中求索兩數,將 α 包於其間者.既得此兩數,便將其間之距離分爲十相等之節以求得其他兩數.將此法疊

次應用,可與a愈趨愈近,如是則a之大略情狀,已可由有理數表而達之.要之,旣有一有理數之分截以規定一無理數a,吾人必能求得兩有理數a_1, a_1'前者屬於分截之前段,後者屬於分截之後段;然後依次求得a_2, a_2',及a_3, a_3'……使每次均包a於其間,惟其間之相隔,則任何小均無不可.考此種依此求得之有理數,如a_1, a_2, a_3……逐漸變大惟不能大於a,如a_1', a_2'……逐漸變小惟不能小於a, a之性質,於此已昭然可見;因之吾人亦常用如下之符號

$$(a_1,\ a_2,\ a_3\cdots\cdots \mid \cdots\cdots a_3'\ a_2'\ a_1')$$

以表a.此種表達之法,亦稱漸近法.漸近法之應用,實不限於無理數,如

$$\frac{1}{3}=0{,}33333\cdots\cdots$$

可視爲

$$\frac{1}{3}=(0;\ 0{,}3;\ 0{,}33;\ 0{,}333\cdots\cdots \mid \cdots\cdots 0{,}34;\ 0{,}4;\ 1),$$

又
$$\frac{1}{11}=0{,}09090909\cdots\cdots$$

與

$$\frac{1}{11}=(0;\ 0{,}0;\ 0{,}09;\ 0{,}090\cdots\cdots \mid \cdots\cdots 0{,}091;\ 0{,}10;\ 0{,}1;\ 1)$$

亦形異而實同,蓋無一不用漸近法而得之者.又如兩整數之相除,其中亦未始不含有漸近法之意義.例如5842

除23,吾人必先問58中果含有幾個23,答案為2;細考此中意義,實將所欲求之商數先以漸近值200代之;旣得200,乃欲更進而求一較前更近之漸近值,其法將200×23=4600由5842減去,得1242;因124中含有五個23,遂得第二漸近值200+50;復用前法,由1242減去50×23=1150得92,因$\frac{92}{23}=4$,故知最後之商數為254.綜觀以上所述,不過用一確定方法(方法之內容不可一概而論)求得一數,然後屢次根據已得之數以求其他之數,使其值與欲求之數漸漸趨近而已.

如上所論,苟有一有理數之分截以規定一實數,吾人可用漸近法求得有理數$a_1, a_2 \cdots\cdots a_1', a_2', a_3' \cdots\cdots$以表此實數:

$$(a_1;\ a_2;\ a_3;\cdots\cdots \mid \cdots\cdots a'_3;\ a'_2;\ a'_1);$$

旣明此理,吾人可求其逆,為無理數別立一定義.首創此定義者為Bachmann,其言曰,苟依一確定之計算方法,得有理數$a_1, a_1', a_2, a_2'. a_3, a_3' \cdots\cdots$,其中

$$a_1,\ a_2,\ a_3\cdots\cdots$$

諸數無一大於

$$a'_1,\ a'_2,\ a'_3\cdots\cdots$$

中之任何一數,又$a_1, a_2, a_3 \cdots\cdots a_n \cdots\cdots$不因$n$之變大而變小:

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots\cdots$$

$a_1', a_2', a_3' \cdots\cdots a_n' \cdots\cdots$不因$n$之變大而變大;

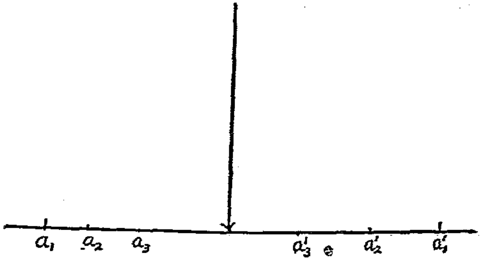
$$a_1' \geqq a_2' \geqq a_3' \geqq \cdots\cdots$$

又必有一正整數N之存在,當$n>N$時

$$a_n' - a_n$$

之差小於任意小之正有理數ε,如是則必有一數a(有理數或無理數)大於一切a_n,小於一切a_n',吾人因以$a=(a_n \mid a_n')$表之.

由作圖之法說明之,$a_1'-a_1$實表示直線上一節之長,而$a_2'-a_2$所表示者亦為一節,惟因$a_2' \leqq a_1'$, $a_2 \geqq a_1$之故,此節實居於前節之內.循是以推,節之長逐漸趨小,惟在前之節必包在後者於其中,節節相疊,有如下圖



吾人因以節套稱之(Nest of intervals).凡一節套均為一實數(有理數或無理數),吾人以

$$(a_n \mid a_n')$$

或 $$(a_1;\ a_2;\ a_3\cdots\cdots \mid \cdots\cdots a_3';\ a_2';\ a_1')$$

表之,如

$$\left(\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\cdots\cdots \middle|\ \cdots\cdots\frac{4}{3};\ \frac{3}{2};\ \frac{2}{1}\right)$$

實爲1,蓋惟此1之數,大於左列 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}\cdots\cdots$ 小於右列 $\cdots\cdots\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}$,故永遠在一切節中也.苟

$$(a_1;\ a_2;\ a_3\cdots\cdots \mid \cdots\cdots a_3';\ a_2';\ a_1')$$

中之 a_n 及 a_n' 適合上述條件而未能代表一有理數者(卽無一有理數大於一切 a_n 小於一切 a_n' 者)謂之無理數.復次,細觀節套之條件,謂 a_n 不因 n 之變大而變小,a_n' 不因 n 之變大而變大,如是則其所包羅甚廣,蓋未嘗限制 a_n 及 a_n' 中有相同之數之出現.除此以外,必求 $a_n<a_n'$ 之成立.又必能求得一 N,凡 n 之大於 N 者 $a_n'-a_n$ 之值任意小,如是始得稱之謂節套.更有一言須申述者,吾人旣以一節套表一實數,其所表者必爲唯一之實數.何則,苟其爲兩不同之實數 a 及 a',則至少必有兩有理數 r_1, r_2 介於 a 及 a' 之間.假定 $r_1<r_2$,則一切 a_n 自小於 r_1,一切 a_n' 又必大於 r_2;因此之故,$a_n'-a_n$ 之值必始終大於 r_2-r_1,不能因 n 之變大而爲任意小.此與節套之定義相矛盾,故節套之僅能代表一數,可以知矣.

復次，若兩種節套 $(a_n|a_n')$, $(b_n|b_n')$ 所表之數 $a=(a_n|a_n')$, $b=(b_n|b_n')$ 相等，其必要與充分條件爲

$$a_n\leqq b_n',\qquad a_n'\geqq b_n$$

何以言之？苟 $a=b$，則 $a_n\leqq a\leqq a_n'$, $b_n\leqq a\leqq b_n'$ 故 $a_n\leqq b_n'$, $b_n\leqq a_n'$ 自是顯而易見．反之，苟 $a_n\leqq b_n'$，則 $a\leqq b$ 之眞確，不難證明．蓋知 $a>b$ 或 $a-b>0$，則因 $a_n'-a_n$ 當 n 相當大時可任意小之故，必可求得一正整數 p，使

$$a_p'-a_p<a-b;$$

惟 $a<a_p'$，由是可知 $a_p-b>0$，復因 $b_n'-b_n$ 當 n 相當大時可任意小之故，必可求得一正整數 r，使

$$b_r'-b_r<a_p-b;$$

惟 $b>b_r$，故由是知 $b_r'<a_p$．於是擇一正整數 m，大於 p 及 r 者，如下之理

$$b_m'<a_m$$

自更有效；此與所假定者適相矛盾，故 $a\leqq b$．據同理，可得 $a\geqq b$，由是遂知 $a=b$．明乎此相等之義，試就節套中任意改易有限個之數，在不抵觸 $a_n<a_n'$ 之條件下，其所表之實數依然不變，可斷言也．苟 $a_n\leqq b_n'$，並有一 m 使 $a_m'>b_m$ 者，則 $a=(a_n|a_n')>b=(b_n|b_n')$；至 $b>a$ 之義，亦可推想得之．明乎是，若 $a=b$, $b=c$ 則必 $a=c$；又 $a>b$, $b>c$ 則 $a>c$ 諸理之眞確，亦一一可證明之．

復次，苟 $a=(a_n|a_n')$, $(b_n|b_n')$ 爲兩節套，並爲研究之便，

先假定其中a_1, b_1均爲正數,如是則不難證明

$$(a_n+b_n\,|\,a_n'+b_n')$$

$$(a_n-b_n\,|\,a_n'-b_n')$$

$$(a_nb_n\,|\,a_n'b_n')$$

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\middle|\frac{b_n'}{b_n'}\right)$$

亦均爲節套無疑.蓋既知$a_n<a_n'$, $b_n<b_n'$,故$a_n+b_n<a_n'+b_n$(n爲任何整數;又a_n+b_n必不因n之變大而變小,$a_n'+b_n'$不因n之變大而變大,可由a_n, b_n, a_n, b_n之性質推知之.至必有一正整數N,當n大於N時

$$a_n'+b_n'-(a_n+b_n)$$

爲任意小,亦顯而易見,因當n相當大時

$$a_n'-a_n,\qquad b_n'-b$$

均任意小,故

$$a_n'+b_n'-(a_n+b_n)=a_n'-a_n)+(b_n'-b_n)$$

亦非如是不可.於此可見$(a_n+b_n\,|\,a_n'+b_n')$實爲一節套,此節套所規定之數謂之a與b之和:$a+b$.其他規定a, b兩數之差,之積,之商之法亦同,玆不復贅.自是以後,運算之道既明,吾人乃可進而證明一切運算法則在此依然有效,其事甚易,故不贅焉.既明如上三說,復細讀文中§7所論,則其間如何溝通之關係,可以豁然大悟矣.

人類發見有理數之不足應用,爲時甚早;希臘畢何

學家已有所謂不可通約數之理論.其後解析幾何及微積分學相繼成立,數學新潮,風起雲湧,數學家爭以發見新理相號召,至其推論之是否嚴密,基礎之是否穩固,常不加以深究.無理數如 $\sqrt{2}$ 者以為既有開方之法可求,其他性質可以不必深論.德國大數學家高斯 Gauss 處此種潮流極盛之時,獨能洞見時弊,以為毫釐之差可發生千里之謬,所謂近代數學之精嚴,至是遂漸具萌芽.

法國大數學家 Cauchy 在其 1821 年所出版之解析學中已有所謂極根之概念,其中有論及無理數之時,則認為已知之數.Cauchy 之意,以為一敍列 $a_1, a_2, a_3, a_4 \cdots\cdots$ 如向一極限 s 收斂其必要與充分條件為 s 與 a_n 之相差因 n 之變大而為任意小.惟 Cauchy 未嘗注意此條件之為充分,必有一證明而後可.吾人苟無無理數之概念,則此證明為不可能之事,蓋收斂之敍列,不必有一有理數之極限故也.

Cauchy 之前,有 Bolzano 者,深知如上收斂條件之為充分,非加以證明不可,且設法證之而未有圓滿之結果.至 Dedekind 出,始明此事之關鍵,實繫於無理數之概念;其思想發源於一八五八年,苦心思索,至十餘年之久,始將其名山不朽之"繼續性與無理數"一文公諸於世,時一八七二年,實 Cantor 發表其敍列說之年也.Dedekind 以一有理數之分截定一無理數,Cantor 以一基本敍列定

一無理數,可謂分途異唱,殊致同歸者矣.此外尚有一事須補述者.德國大數學家 Weierstrass 在其大學講演中亦屢次說明無理數之概念,並因之而得證 Bolzano 前所不能證明之理.其弟子有 E. Kossak 者因 Weierstrass 講演從未刊行,竟不先不後,於一八七二年撰短文以傳之,故一八七二年可稱無理數論完成之年,在數學史上劃一新時期也.

近年以來,復有 P. Bachmann 將 Cantor 之意光大之而創節套說,前已略述其意,欲知其詳,可閱 Knopp Theorie und Anwendung der Unendlichen Reihen 一書第一章.

要而論之,無理數之理論,除 Dedekind 之分截說外,未始無美中不足之處.如

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\cdots\cdots$$

$$\frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}\cdots\cdots$$

雖爲外貌不同之級列,其代表0之一數則同.故任何實數,有種種不同之表達形式.惟其如是,則何謂相等,亦非加以明確之規定不可.既明何謂相等,復須證明如下諸理

1. 若 $a=b$, 則 $b=a$.

2. 若 $a=b$ $b=c$, 則 $a=c$.

之眞確,而後一切推理可以進行.凡此種種在 Dedekind 之分截說皆爲當然之理,無證明之必要.

綜觀以上所述,讀者或將發一疑問.論數之概念,既有不同之學派,則數學之內容,或亦因之而分,如 Dedekind 之數學中所已證明者,在 Cantor 之數學中未必真確.此言似是而實非.何則,數之定義雖不同,然任何數之系統中,如 $a<b$, $a+b$ 之意義均有明確之規定,其運算法則,又有精密之證明;吾人可將任何系統中之數與其他系統相應,兩者之間,不特發生一一對應之關係,且滿足如下之條件:苟 a, b 為某系統中之兩數, α, β 為別一系統中與之對應之數,則與

$$a+b,\quad a-b,\quad ab,\quad \frac{a}{b}$$

諸數對應者必為

$$\alpha+\beta,\quad \alpha-\beta,\quad \alpha\beta,\quad \frac{\alpha}{\beta}$$

又若 $a<b$, 則 $\alpha<\beta$. 因此之故,若有一定理在其一系統有效者,在其他系統亦為有效.吾人可使 Dedekind 之分截與 Cantor 之敍列一一對應,且一一滿足上述之要求,善悟者深思而自得之可也.明乎是,乃知數學中所注重者,不在數之本身,而在其間之關係.數與數所發生之關係,必有法則規定之,此種法則,亦稱原理;吾人必細加思索,窮其究竟,蓋原理之間,必彼此和諧,無發生矛盾之可能,而後數學始有一不拔之基.近年以來, Hilbert 有鑒於此,特創原理學以從事於此,其影響於數學前途者遠矣.

7. 窮微之解析學

以上之討論對於微積學(亦稱窮微之解析學)中之定理有密切之關係,當於本節中約而論之.

有一變數 x, 其值在規定之變區內發生變化.苟其另有一數 a 使 x 與 a 相差之絕對值 $|x-a|$ 愈變愈小,小於任何小(但大於 0) 之正數,如是吾人卽稱 x 趨於 a 之極限,或稱 x 向 a 之極限收斂,此稍習微積學者類能言之也.

微分學中有一重要定理:"苟一變數永遠增大,其值又爲有涯,卽不能趨於無窮大者,則必向一極限收斂".

此定理余證之如下:根據假定,必有一數,因之亦有無窮多之數 a_2 者,當 x 無論如何變化,終不能超越之: $x<a_2$. 此種 a_2, 吾人集之而成 $\overline{A_2}$, 其他之數 a_1, 均歸之於 $\overline{A_1}$ 之一段. $\overline{A_1}$ 所含之數,必有一特性,卽 x 之變必有使 $x\geqq a_1$ 之時,因此之故,任何 a_1 必小於任何 a_2, 故必有一分截隨之而產生.於是根據實數之連續性,必有一數且僅有一數 a 之存在,使此分截得以確立.此 a 者,爲 $\overline{A_1}$ 中最大之數或爲 $\overline{A_2}$ 中最小之數.前者乃不可能之事,因 x 繼續增大,無有窮期.故 a 爲 $\overline{A_2}$ 中最小之數.於是吾人必能在 $\overline{A_1}$ 中任擇一數 a_1, 滿足 $a_1<x<a$ 之關係.可以斷言. x 向 a 之極限收斂.從可識矣(註二十一).

註二十一 x 苟必在任何兩數 m, n 之間:

$$n<x<m$$

而此任何兩數又含一數 a 於其間,則 a 必爲 x 之極限.蓋 $|x-a|$ 如是必可任意小. m, n 爲任何兩數,惟必有一數 a 存於其間耳.

細觀如上之證明,可知此定理與連續性之意義實具有同一之意義.苟連續性之理未能成立,換言之,實數之領域內如有一漏隙之可尋,則此定理亦無從得證.苟此定理果眞確者,連續性之理亦必眞確.

微分學中復有一定理,與此理具有同等之意義且應用更廣者:"設 δ 爲一任何已知之正數,當 x 在其變化之途程中果能指定一處,過此以往,x 之變化小於 δ 者,則 x 必向一極限收斂".此定理者,爲如下定理之逆:如一變數 x 向一極限收斂,則在其變化之過程中必有一處,過此以往,其變化之量必小於任何已知之正數.是理之眞,顯而易見;至其逆之證明,可由上述之定理或由連續性之理推論得之.余擬由連續性之理,作如下之推論.設 δ 爲一任何正數(即假定 $\delta>0$),在 x 之變化過程中,依假定必有一確定之時間,過此以往,x 之變化小於 δ,換言之,苟 x 當時適等於 a,其以後之變化必受 $x>a-\delta$ 及 $x<a+\delta$ 條件之限制.由是以論,過此以後,x 之值必自限於兩確定及有盡數之間.於是吾人將一切數 α_2 之滿足 $\alpha_2 \geqq x$ (如 $a+\delta$) 者歸入 $\overline{A_2}$,其他未含於 $\overline{A_2}$ 者歸入 $\overline{A_1}$.設 α_1 爲 $\overline{A_2}$ 中之一數,則 x 無論如何變化,必有無窮多次使 $x>\alpha_1$ 得以發見.於此可見任何 α_1 均小於 α_2,故 $(\overline{A_1}, \overline{A_2})$ 之爲一分截,自無待言.推其如是,必有一實數且僅有一實數之存在,使此分截之產生:吾人稱之曰 $\dot{\alpha}$.復次,根據以上之假定,復可另創一分截:吾人將一切 β, (如 $a-\delta$),苟 x 無論如何變化,β_1 均不大於 x 者 $x \geqq \beta_1$ 歸

入$\overline{B_1}$,其他之數β_2,歸入$\overline{B_2}$;於是$x<\beta_2$在$\overline{B_2}$中必有無窮多次之發現.創造此分截之數,吾人名之曰β.細考α與β兩數,實具有如下之特性:苟ε為一任何小之正數,則$x<\alpha+\varepsilon$, $x>\beta-\varepsilon$;且無論如何,必無$x<\alpha-\varepsilon$, $x>\beta+\varepsilon$之現象.倘α與β為兩不同之數,則$\alpha>\beta$,蓋$\alpha_2\geqq\beta_1$故也.苟其如是,x變化之量尙可過於$(\alpha-\beta)-2\varepsilon$,是與吾人最初之假定相矛盾.因此之故,必$\alpha=\beta$而後可於是由$x>\alpha+\varepsilon$, $x>\alpha-\varepsilon$,可以推知x必向α之極限收斂.

觀於上述兩例,連續性原理在微分學中之重要,可以見矣.

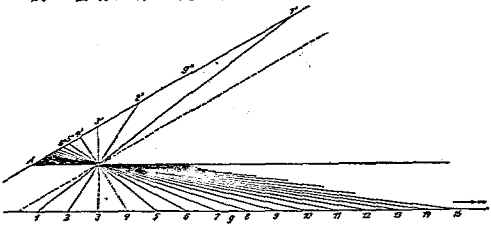
案對無理數欲作精微之審察者不可不明集論.任何事物相聚謂之集.

所謂數集,乃由數相聚而成.若在直線上任擇一零點及一單位,則與數對應之點亦成一集,謂之點集.為行文之便,吾人常將數集與點集不加分辨.點集中有所謂聚點與孤點之分.何謂聚點?在某點之左右,各取一點,得一間隔,此間隔即以某點之鄰區稱之;無論其鄰區如何小,其中含有無限個屬於同一點集之點者,某點即謂之聚點.其他無此性質之點謂之孤點.例如正整數集中:

1,| 2 || 3 || 4 | ......

1, 2, 3, 4......等數均為孤點,蓋此諸數各有一鄰區,其中無一正整數.然則正整數集中果有無一聚點之可尋,亦

爲一富有趣味之問題.觀於下圖:

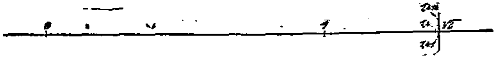


吾人任取一直線外之點 P 將列於 g 線之各正整數依其序次由 P 投影於 g', 得 $1', 2', 3', 4'$……諸點,見可此 $1', 2', 3', 4'$……諸點羣向 A 趨近.在 A 點任意劃一鄰區,不論此鄰區如何小,必有無窮多屬於同集之點出現於其中,故 A 爲一聚點.惟其如是,因 A 由 g 線上之點投影而來,故 g 線在無窮遠常謂有一聚點.

聚點之例,不勝枚舉.任何基本數列如

2,718 281 828 459 045……$=e$

可視爲一有理點集 2; 2,7; 2,71; 2,718; 2,7182;……,其中有理點羣向 e 趨近,在 e 之任何小之鄰區,有無窮多此種數可尋.他如 $\sqrt{2}$, 亦爲 1; 1,41 1,414; 1,4142……相聚之處,觀於下圖,略可瞭然.



聚點與孤點之義旣明,吾人復立數定義曰:苟一點集中各點均爲孤點,則此點集謂之孤集.苟其除孤點之外,復有聚點,且各聚點均屬於此點集者謂之閉集(abgeschlossene Menge).復次,苟一點集中之點均爲聚點,則此點集謂之稠密(in sich dicht).苟點集中之點均爲聚點,且各聚點又屬於其中者,謂之閉密(perfekt).

由是以論,有理數之集團實爲一密集,蓋在任何有理數之任何鄰區中,有無窮多之有理數,故任何有理數爲一聚點,其集爲一稠密集,於此可見雖然,此集之聚點有非有理數而爲無理數者,如

1 1,4 1,41 1,4142 1,41421……

之聚點 $\sqrt{2}$ 爲一無理數,故未嘗屬於此集,由是知有理數集決非一閉集.明乎此,可知實數集旣爲稠密,又爲閉集,故爲一閉密集.此閉密集,Cantor 亦稱之謂連續體(continuum).

復次,有可數之集(abzählbare Menge),有不可數之集,何謂可數集?一集之得與正整數集一一相應者謂之可數,否則謂不可數.明此定義,然後可進而證明有理數集爲可數,實數集爲不可數.此集論中一基本定理,其影響被於數學之全體而嚴密證明之者,Cantor 其第一人也.

有理數集之可數性,可證之如次.任何已知之正有理數如 $\frac{m}{n}$,(m 與 n 均爲正整數)其分子與分母之和 $m+n$

必爲一確定之數,吾人以 s 表之: $s=m+n$. 反之,若 s 爲吾人所已知之一正整數,則除 $\frac{m}{n}$ 之外,必尙有其他正有理數如 $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}$, 其分子與分母之和適爲 s 者;此種正有理數,其個數必爲有限,自無待論.吾人將此種有限個之有理數 $\frac{m}{n}, \frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}$……依其分子之大小而序次之;分子大者在前,分子小者在後,苟其分子分母有一共同約數者,則棄之不顧,最後得一有理數,其分子爲最小,分母爲最大.例如已知 $s=7$, 則一切正有理數 $\frac{m}{n}$ 之適合 $m+n=s$ 者可序次之如下:

$$\frac{6}{1}, \frac{5}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6}$$

又如 $s=8$, 則得

$$\frac{7}{1}, \frac{5}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{7}$$

其中 $\frac{6}{2}, \frac{4}{4}$ 及 $\frac{2}{6}$ 三者因分子分母共含一約數,故已棄去之矣.明乎此,吾人可將一切有理數依如下之法序次之.列於最前者爲 $\frac{0}{1}$, 其 s 爲 $0+1=1$, 隨之而至者爲一切正有理數,其 s 依次爲 $s=2, 3, 4, 5$……;凡有理數之 $s=m+n$ 相等者依其分子之大小而序次之;又每正有理數 $\frac{m}{n}$ 之後更插入一負有理數 $-\frac{m}{n}$, 遂得:

$$\frac{0}{1}, \quad \frac{1}{1}, \quad -\frac{1}{1}; \quad \frac{2}{1}, \quad -\frac{2}{1}; \quad \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}; \quad \frac{3}{1}, \quad -\frac{3}{1}; \quad \frac{1}{3},$$

$$-\frac{1}{3};\quad \frac{4}{1};\ -\frac{4}{1};\quad \frac{3}{2};\ -\frac{3}{2};\quad \frac{2}{3};\ -\frac{2}{3};\quad \frac{1}{4};\ -\frac{1}{4};\quad \frac{5}{1};$$

$$-\frac{5}{1};\quad \frac{1}{5};\ -\frac{1}{5};\quad \frac{6}{1};\ -\frac{6}{1};\quad \frac{5}{2};\ -\frac{5}{2};\quad \frac{4}{3};\ -\frac{4}{3};\quad \frac{3}{4};$$

$$-\frac{3}{4};\quad \frac{2}{5};\ -\frac{2}{5};\quad \frac{1}{6};\ -\frac{1}{6};\quad \frac{7}{1};\ -\frac{7}{1};\quad \frac{5}{3};\ -\frac{5}{3}\cdots\cdots$$

…………………………………………………………

由是以觀,一切正負整數及分數均已排列於上,吾人可依次使與正整數相應,其間必有一一對應之勢;有理數集之可數性於是遂得證矣.

次證實數集團之不可數.試取一切實數之滿足$0<x\leqq 1$條件者,名之曰M集.任何實數,可由一有盡小數或無盡小數表而達之.惟因$1=0,999999\cdots\cdots$之故,任何有盡小數如

$$0,\ a_1a_2a_3a_4\cdots\cdots a_m$$

($a_1, a_2\cdots\cdots$等各為$0,1,2\cdots\cdots9$中之一數,惟$a_m\neq 0$)亦可化為無盡之形式:

$$0,\ a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{m-1}a_m-1\ 999\cdots\cdots,$$

例如 $\qquad 0{,}123=0{,}122999\cdots\cdots.$

由是以論,一切M集中之數皆可由一無盡小數

$$0,\ a_1a_2a_3a_4\cdots\cdots$$

代表之,其中$a_1, a_2, a_3\cdots\cdots$各數均不外$0,1,2\cdots\cdots9$諸數中之一也.明乎此,苟能證明無論如何將$M$中之數與正整數相應,求得一可數之集$M_0$,吾人必能在$M$中更得一無盡小數未屬於$M_0$,則$M$之不可數為反證法推論必有之

結果假定M爲一可數集M_0,其中各數與正整數一一對應如下:

(1) $0, a_1a_2a_3a_4a_5\cdots\cdots$

(2) $0, b_1b_2b_3b_4b_5\cdots\cdots$

(3) $0, c_1c_2c_3c_4c_5\cdots\cdots$

(4) $0, d_1d_2d_3d_4d_5\cdots\cdots$

(5) $0, e_1e_2e_3e_4e_5\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

於是吾人可依如下之法,更得一

$$0\ \alpha_1\beta_2\gamma_3\delta_4\cdots\cdots$$

此無盡小數由如下兩條件規定之.其一,其中之第一位小數α_1與(1)之第一位a_1相異,其第二位β_2與(2)之第二位b_2相異……因a_1, b_2, c_3……等不外$0, 1, 2\cdots\cdots 9$中之一數,則$\alpha_1, \beta_2, \gamma_3\cdots\cdots$之選擇未嘗因此條件而有過分之束縛.其二,$\alpha_1, \beta_1\cdots\cdots$諸數無一爲0,換言之,$\alpha_1, \beta_1\cdots\cdots$各數不外$1, 2, 3, 4\cdots\cdots 9$諸數中之一.如是求得之

$$0,\ \alpha_1\beta_2\gamma_3\delta_4\cdots\cdots$$

必代表一小於1之實數,故必在M之中,然與M_0中之已數者無一從同,蓋與其中各數至少有一位小數相異故也.故謂M卽M_0,換言之,謂M可數,無有是處.旣證M爲不可數,吾人若更加零之一數於其中,其不可數如故,因此凡實數之適合$0\leqq x\leqq 1$者均不可數.循是以推,任何連續體之不可數,亦可識矣.

數之意義

1. 物系;系之原素

1. 凡吾人思想之對象,本文中均稱之謂事物,或簡稱謂物.爲討論之便,常用各種符號如拉丁或希臘字母以表事物;所謂 a 物或 a,其意卽指 a 所表之事物,非指字母 a 而言.任何事物之究竟,視一切對此所發之言論或思想而定.所謂 a 物與 b 物相同(或謂 a 卽 b),或 b 物與 b 物相同(或謂 b 卽 a),其意卽謂凡一切對 a 所發之言論對 b 亦爲有效,或一切對 b 所發之言論對 a 亦爲有效.若 a 及 b 所表者爲同一事物,則吾人用 $a=b$ 或 $b=a$ 之符號表而達之(註一).苟除 $a=b$ 或 $b=a$ 之外,復有 $b=c$,換言之,c 所表之物卽爲 b 所表之物,則 c 所表之物,亦卽爲 a 所表之物,故 $a=c$.復次,苟 a 所表之物與 b 所表者未嘗相同,則 a, b 兩物謂之相異或不同;申言之,a 所表之物非 b,b 所表之物非 a,如是必有一特性,爲其中之一所有而爲其他所無.

註一 $a=b$ 與 $b=a$ 所表之意義相同,非待加說明不可,讀者幸深思而體會之.

2. 吾人常將不同之事物如 $a, b, c\cdots\cdots$ 由一共同觀點加以研討;因此之故,常集合之使成一系,謂之物系,並以 S 之符號表之. $a, b, c,\cdots\cdots$ 者,謂之 S 之原素 (Element), 或謂 $a, b, c,\cdots\cdots$ 含於 S 之中,反之亦可稱 S 由 $a, b, c,\cdots\cdots$ 集合而成.復次,S 本身亦可作爲吾人思想之對象,故亦可稱之謂事物. S 之內容如何,視其所含之原素而定,要而言之,必有一決定任何事物是否屬於 S 之法則,而後 S 乃定(註二). 今有兩物系 S 與 T 於此,苟 S 中每一原素亦爲 T 之原素,又 T 之每一原素亦爲 S 之原素,如是則 S 與 T 謂之相同,吾人以 $S=T$ 表之. 爲求行文之便,當系中僅含一個原素之時,換言之,僅有一物 a, 凡異於 a 者均非其原素時,仍稱之謂系,惟其中無一原素時,不復以系稱之(註三).

3. 說明 苟 A 系之每一原素同時亦含於 S 之中,則謂 S 之分系 (Teil), 吾人以 $A \prec S$ 之符號表之.如是則 S 亦可稱

註二 謂必有一確定之法則,藉此法則,可以斷定任何事物是否爲 S 之原素,如是則何者爲 S 之原素,何者非 S 之原素,可以一言而決. S 之內容如何,至是始可完全決定.據 Dedekind 之意,此法則之內容如何,不必有何限制.吾人所要求者,必有一種規定,因此規定可以決定任何事物之是否屬於 S, 如是而已;至於如何規定,則非所問,蓋無論如何規定,本文所論各理均爲有效故也.要而言之;此法則之必須存在,爲吾人所要求,否則某種事物之屬於某系與否,將無從取決;此法則之內容如何,不必加以任何條件之束縛. Dedekind 在本文中曾加一附註,謂 Kronecker 立論,與彼頗有不同, K. 氏以爲此種法則之內容,宜受相當條件之限制(參閱 Journal für Mathematik Bd. 99 S. 334—336), 惟 K. 氏主張之根據如何,尚望見告,以便討論云.

註三 在他種研究中,無一原素時亦有仍稱爲系者.此爲求推論或行文之便,可各自有特殊之規定,不足論也.

謂 A 之全部 (Ganzes), 意謂 S 實包含 A 之一切原素於其中；惟 $S \ni A$ 之符號雖可用以表達同一意義,因欲力求簡明之故,本文中擬絕對不用.復次,據 2 所述, S 中之任何原素 a, 可自成一系(註四),故 $a \prec S$ 之眞確,無待深論.

4. 定理　據3所論,可知 $A \prec A$(註五).

5. 定理　據3及2所論,若 $A \prec B$ 又 $B \prec A$, 則 $A = B$(註六).

6. 說明　若 A 系爲 S 系之分系而與 S 相異,則 A 謂 S 之眞分系 (echter Teil). 據5所論,乃知 A 苟爲 S 之眞分系,則 S 必非 A 之分系,換言之, S 中必有一原素,未含於 A 之中.

7. 定理　苟 $A \prec B$ 及 $B \prec C$, 或謂 $A \prec B \prec C$, 則 $A \prec C$；且 A 必爲 C 之眞分系,苟 A 爲 B 之眞分系或 B 爲 C 之眞分系.此理可由3及6推知之(註七).

8. 說明　以 $A, B, C, \ldots\ldots$ 諸系爲基可循如下之法另創一系,謂之 $A, B, C, \ldots\ldots$ 諸系之合系,吾人以 $M(A, B, C \ldots\ldots)$ 表之. $M(A, B, C, \ldots\ldots)$ 之組織法如下：凡屬於且亦惟屬於 $A, B, C, \ldots\ldots$ 中任何一系之原素,換言之,屬於 A, 或屬於 B, 或屬於 C

註四　任何原素 a 可視爲僅含此一個原素之系.

註五　因 A 中任何原素均在 A 之中,故據 3 所立之定義, A 亦可視爲其本身之分系也.

註六　苟 A 之任何原素均在 B 之中, B 之任何原素均在 A 之中,則據相同之定義, A 與 B 實相同無疑.

註七　苟 A 之任何原素均在 B 之中, B 之任何原素均在 C 之中,則 A 之任何原素自亦在 C 之中.復次,苟 A 與 B 相異,或 B 與 C 相異,則 A 與 C 不能相同,故 A 爲 C 之眞分系.

者均爲M之原素.此定義當僅有一組A出現時吾人亦依然用之,故$M(A)=A$.惟不可不注意者,此種$A, B, C,\cdots\cdots$之合系爲一種,以$A, B, C,\cdots\cdots$諸系作爲原素之系又爲一種,兩者不可不加以明辨也.

9. 定理 $A, B, C,\cdots\cdots$各系均爲其合系

$$M(A, B, C,\cdots\cdots)$$

之分系,可由8及3推知之(註八).

10. 定理 苟$A, B, C,\cdots\cdots$爲S之分系,則

$$M(A, B, C,\cdots\cdots)\prec S,$$

可由8及3推知之(註九).

11. 定理 苟P爲$A, B, C,\cdots\cdots$中任何一系之分系,則$P\prec M(A, B, C,\cdots\cdots)$,可由9及7推知之(註十).

12. 定理 苟$P, Q,\cdots\cdots$中各系爲$A, B, C,\cdots\cdots$任何一系之分系,則$M(P, Q,\cdots\cdots)\prec M(A, B, C,\cdots\cdots)$;其理可由11及10推知之(註十一).

註八 根據$M(A, B, C,\cdots\cdots)$之組織法,可知$A, B, C,\cdots\cdots$各系中任何原素均在M之中,故[illegible]M之分系.

註九 因$A, B, C,\cdots\cdots$各系中之任何原素均在S之中,M中所含,既爲此種原素,且亦僅此種原素,故亦一一含於S之中.

註十 P祇爲A或B或$C,\cdots\cdots$之分系,$A, B, C,\cdots\cdots$又各爲$M(A, B, C,\cdots\cdots)$之分系(見9),故根據7所論,P亦爲M之分系.

註十一 $P, Q,\cdots\cdots$各系既爲$A, B, C,\cdots\cdots$中任何一系之分系,根據11所論,遂知:

$$P\prec M(A, B, C\cdots\cdots)$$
$$Q\prec M(A, B, C\cdots\cdots)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

13. <u>定理</u>　苟 A 由 $P, Q\cdots\cdots$ 中任何數系集合而成,則 $A \prec M(P, Q, \cdots\cdots)$. 何則,由 8 所述之定義,$A$ 之每一原素,必含於 P, Q 中任何一系之中,故亦必含於 $M(P, Q\cdots\cdots)$ 之中. A 爲 $M(P, Q\cdots\cdots)$ 之分系,於此可見.

14. <u>定理</u>　苟 $A, B, C\cdots\cdots$ 各系由 $P, Q\cdots\cdots$ 中任何數系集合而成,則

$$M(A, B, C\cdots\cdots) \prec M(P, Q\cdots\cdots),$$

其理可由 13 及 10 推知之(註十二).

15. <u>定理</u>　苟 $P, Q\cdots\cdots$ 各系爲 $A, B\cdots\cdots$ 任何一系之分系,而 $A, B\cdots\cdots$ 又爲 $P, Q\cdots\cdots$ 中任何數系集合而成,則

$$M(P, Q\cdots\cdots) = M(A, B, C\cdots\cdots),$$

其理可由 12, 14 及 5 推知之(註十三).

於是復據 10, 知

$$M(P, Q\cdots\cdots) \prec M(A, B, C\cdots\cdots),$$

是卽吾人所欲證者.

註十二　由假定及 13 可知

$$A \prec M(P, Q\cdots\cdots)$$
$$B \prec M(P, Q\cdots\cdots)$$
$$C \prec M(P, Q\cdots\cdots)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

於是根據 10 所論得

$$M(A, B, C\cdots\cdots) \prec M(P, Q\cdots\cdots)$$

註十三　因 $P, Q\cdots\cdots$ 各系爲 $A, B, C\cdots\cdots$ 中任何一系之分系,據 12 所論,迺知

$$M(P, Q\cdots\cdots) \prec M(A, B, C\cdots\cdots)$$

16. 定理 苟 $A=M(P,Q)$ 又 $B=M(Q,R)$, 則 $M(A,R)=M(P,B)$. 何則,由前證之定理15,

可知 $$M(A,R)=M(P,Q,R),$$

$$M(P,B)=M(P,Q,R),$$

故 $$M(A,R)=M(P,B),$$

17. 說明 苟有一物 g, 同時爲 $A,B,C\cdots\cdots$ 各系之原素(A 及 B 及 $C\cdots\cdots$ 均含有 g) 則 g 謂之 $A,B,C\cdots\cdots$ 諸系之公原素或簡稱謂公素 (gemeinsames Element). 復次,苟有一系,同時爲 $A,B,C\cdots\cdots$ 各系之分系,則謂之 $A,B,C\cdots\cdots$ 諸系之公分系. 凡 $A,B,C\cdots\cdots$ 之一切公原素所集合而成之系,吾人以

$$G(A,B,C\cdots\cdots)$$

之符號表之其爲 $A,B,C\cdots\cdots$ 之公分系自顯而易見.此定義,當僅有一系 A 出現時,吾人仍擬應用,因之遂得 $G(A)=A$. 明乎是,可知 $A,B,C\cdots\cdots$ 若無公原素,則亦無公分系之存在,於是 $G(A,B,C,\cdots\cdots)$ 之符號無意義之可言,蓋據2所論無原素之系不得復稱系也.

18. 定理 $A,B,C\cdots\cdots$ 之任何公分系爲 $G(A,B,C,\cdots\cdots)$ 之分系(註十四).

又因 $A,B,C\cdots\cdots$ 爲 $P,Q\cdots\cdots$ 中任何數系集合而成,故據14得

$$M(A,B,C\cdots\cdots)\prec M(P,Q\cdots\cdots),$$

由是得 $$M(P,Q\cdots\cdots)=M(A,B,C\cdots\cdots),$$

觀於5所論而可知也.

註十四 因 $G(A,B,C\cdots\cdots)$ 由 $A,B,C\cdots\cdots$ 之一切公原素集合而成故也.

19. 定理 $G(A, B, C, \cdots\cdots)$ 之任何分系爲 $A, B, C, \cdots\cdots$ 之分系,其理可由 17 及 7 推知之(註十五).

20. 定理 苟 $P, Q, \cdots\cdots$ 中任何一系爲 $A, B, C, \cdots\cdots$ 中每系之分系,則

$$G(P, Q\cdots\cdots) \prec G(A, B, C\cdots\cdots).$$

何以故? $G(P, Q, \cdots\cdots)$ 之任何原素爲 $P, Q, \cdots\cdots$ 之公原素,故亦爲 $A, B, C, \cdots\cdots$ 之公原素.

2. 物系攝影

21. 說明(註十六) 物系 S 之攝影者,將其中每一原素 a 依一確定之法則使與一確定之事物相應,此事物者,吾人即稱之謂 a 之影,並以 $\phi(a)$ 之符號表之,ϕ 之符號,所以表達法則之內容如何耳.苟其如是,吾人常稱 $\phi(a)$ 與 a 對應,或謂 $\phi(a)$ 由 a 攝影而生,或謂 a 因攝影而轉爲 $\phi(a)$.苟 T 爲 S 之任何分系,則在 S 之影中,亦必有 T 之影可尋,蓋 T 之任何原素 t 均在 S 之中,其在 S 攝影中所得之影 $\phi(t)$ 即爲其在 T 之攝影中所得之影可也.凡 T 之一切原素之影 $\phi(t)$ 可集合而成一系,謂 T 之影,吾人以 $\phi(T)$ 表之.明乎是,則 $\phi(S)$ 之意義如何,亦同時得一說明.攝影之例,所在皆是;淺而言之,如吾人將系中之

註十五 據 17 所論,$G(A, B, C\cdots\cdots)$ 實爲 $A, B, C\cdots\cdots$ 之公分系,故 $G(A, B, C, \cdots\cdots)$ 之任何分系亦爲 $A, B, C, \cdots\cdots$ 之公分系也.

註十六 參閱 Dirichlet 之 Vorlesungen über Zahlentheorie 第三版 1879, § 163.

每一原素由一符號表而達之,其意不過依一確定法則使每一原素有一事物與之對應而已,故亦可謂之攝影.攝影之最淺易者,莫如使每一原素與其本身對應,此種攝影謂之本位攝影.爲求便利之故,以下論及攝影之時,凡任何原素 a 之影,均於其符號之右角加一 $'$,如 a' 者以表之,又如分系 T 之影則以 T' 表之.

22. 定理(註十七) 苟 $A \prec P$,則 $A' \prec B'$.何則,A' 之任何原素爲 A 中原素之影,故亦爲 B 中原素之影;惟其如是,必爲 B' 之原素,是卽吾人所欲證明者也.

23. 定理 $M(A, B, C, \ldots\ldots)$ 之影爲 $M(A', B', C', \ldots\ldots)$.據10所論,$M(A, B, C, \ldots\ldots)$ 爲 S 之分系,吾人以 M 表之:$M = M(A, B, C, \ldots\ldots)$,其影以 M' 表之.於是 M' 中每一原素必爲 M 中一原素 m 之影 m'.惟據8之說明,M 之任何原素 m 必屬於 $A, B, C \ldots\ldots$ 任何一系之中,因之其影 m' 必屬於 A', B', C' 任何一系之中,故據8所述,知其亦爲 $M(A', B', C', \ldots\ldots)$ 之原素,遂得根據3知

$$M' \prec M(A', B', C', \ldots\ldots).$$

復因 $A, B, C, \ldots\ldots$ 爲 M 之分系(根據9),故 $A'B'C'$ 亦爲 M' 之分系(根據22),遂得根據10以推知

$$M(A', B', C', \ldots\ldots) \prec M'.$$

於是知

$$M' = M(A', B', C', \ldots\ldots),$$

註十七 試與下述定理27比較觀之.

$M(A', B', C', \cdots\cdots)$為$M(A, B, C, \cdots\cdots)$之影遂得證矣.

24. 定理(註十八) $A, B, \cdots\cdots$諸系之任何公分系之影必爲$G(A', B', C', \cdots\cdots)$之分系.何則,$A, B, C, \cdots\cdots$之任何公分系之影,據22所論,必爲$A', B', C', \cdots\cdots$之公分系,於是復據18可知其必爲$G(A', B', C', \cdots\cdots)$之分系.明乎是,乃知$A, B, C, \cdots\cdots$之一切公原素所集合而成之系$G(A, B, C, \cdots\cdots)$,其影亦爲$G(A', B', C', \cdots\cdots)$之分系而疑.

25. 說明及定理 如以ϕ表S之攝影,換言之,有一確定之法則,使S中任何原素有一事物與之對應,吾人可將如是產生之影$\phi(S)$,復依一種法則,使其與確定之事物相應.蓋物可攝影,已如上述,影復爲物,又可攝影;惟其如是,旣得$\phi(S)$,再度攝影,可得物影之影,有如$\psi[\phi(S)]$;此物影之影,與原始事物之間,亦有彼此對應之法則,故先ϕ而後ψ,兩次攝影相繼實施,復爲一種攝影,吾人以$\psi\cdot\phi$或$\psi\phi$之符號表之.凡一原素a,先經ϕ復經ψ之攝影而產生之影,吾人以$\psi[\phi(a)]$表之.所當注意者,ψ與ϕ前後之序次不可顚倒.蓋$\phi\psi$之符號惟$\psi(S')\prec S$時始有意義之可言也.更有進者,苟吾人將S中任何原素a一次攝影

$$\phi(a)=a',$$

及再度攝影

$$\psi(a')=\psi[\phi(a)]=\theta(a)$$

註十八 試與下述定理29比較觀之.

之後,復加以三次攝影

$$\xi(a)=\xi\psi(a')$$

並以η代表先ψ後ξ相繼實施之攝影$\eta=\xi\psi$,由是得知

$$\xi\theta(a)=\xi\psi(a')=\eta(a')=\eta\phi(a).$$

於此可見任何原素之經$\xi\theta$攝影者與經$\eta\phi$者同.因此之故,遂謂$\xi\theta=\eta\phi$;將θ與η之意義代入,遂得如下之結果:

$$\xi\cdot\psi\phi=\xi\psi\cdot\phi;$$

此ϕ,ψ,ξ先後實施之攝影亦可用$\xi\psi\phi$表之.

3. 攝影之相似性;相似系

26. 說明 如上所言,所謂S之攝影者,其中任何原素必有一確定之事物依一確定之法則與之對應之謂.苟S中兩不同之原素a, b必有兩不同之事物$a'=\phi(a), b'=\phi(b)$與之對應者,則此攝影謂之相似.循是以論,苟$s'=t'$,則$s=t$;如是則$S'=\phi(S)$中任何原素爲S中一確定原素之影.惟其如是,吾人乃有一與ϕ相對峙之攝影,謂之ϕ之反攝影,常用$\overline{\phi}$表而出之;ϕ之反攝影無他,將S'任何原素a'與a對應$[\overline{\phi}(a')=a]$是已,至其必具有相似性可以斷言.明乎是,則$\overline{\phi}(S')=S$之爲眞,亦無待論;復次,$\overline{\phi}$之反攝影必爲ϕ,兩相反攝影相繼實施必爲一本位攝影,凡此皆顯而易明者也.

27. 定理 苟$A'\prec B'$.則$A\prec B$.何則,苟a爲A之原素,其影a'必爲A'之原素,據假定又必爲B'之原素,故可用b'表之,於

是知b'之影b必在B之中.由是以論,A之任何原素a必爲B之原素,蓋由$a'=b'$必知$a=b$故也.

28. <u>定理</u> 苟$A'=B'$,則$A=B$(註十九).

29. <u>定理</u> 苟$g=G(A, B, C,\cdots\cdots)$,則

$$g'=G(A', B', C',\cdots\cdots).$$

何以言之?據公分系之定義,凡$G(A', B', C',\cdots\cdots)$之每一原素均含於$S'$之中,故爲$S$中所含原素$g$之影$g'$,可以斷言.復因$g'$爲$A',B',C',\cdots\cdots$諸系之公原素,故據27所論,$g$必爲$A,B,C,\cdots\cdots$諸系之公原素,因之必爲$G(A, B, C,\cdots\cdots)$中之原素.惟其如是,凡$G(A', B', C',\cdots\cdots)$之任何原素必爲$G(A, B,\cdots\cdots)$中一原素之影,於是可知其必爲$g'$之原素,因之遂得$G(A', B', C',\cdots\cdots)\prec g$.復據24所論,$A, B, C,\cdots\cdots$諸系之任何公分系之影必爲$G(A', B', C'\cdots\cdots)$之分系:

$$g'\prec G(A', B', C',\cdots\cdots).$$

由是遂得根據5以推知

$$g'=G(A', B', C',\cdots\cdots),$$

是即吾人所欲證者.

30. <u>定理</u> 凡物系之本位攝影均爲相似(註二十).

31. <u>定理</u> 苟ϕ表S之相似攝影,ψ表$\phi(S)$之相似攝影,則先ϕ後ψ相繼實施之攝影$\psi\phi$亦爲相似,且其反攝影必爲

註十九 其理可由定理27及5推知之.

註二十 因相異之原素終爲相異故也.

$\overline{\phi\psi}=\overline{\phi}\overline{\psi}$. 何以言之?據假定,凡$S$中兩相異之原素$a, b$必有兩相異之$a'=\phi(a)$, $b'=\phi(b)$以應之,而後者復有兩相異之影:

$$\psi(a')=\psi\phi(a) \qquad \psi(b')=\psi\phi(b);$$

故$\psi\phi$之爲相似,於此可見.復次,任何原素$\psi\phi(S)$經$\overline{\psi}$之攝影將歸於$\phi(S)=S'$,復經$\overline{\phi}$而歸於S. 由是以論,先$\overline{\psi}$後$\overline{\phi}$相繼實施,可使$\psi\phi(S)$復回於S. 故$\overline{\phi\psi}$實爲$\psi\phi$之反攝影也.

32. 說明 兩物系R及S謂之相似,苟S有一相似攝影ϕ,使$\phi(S)=R$. 於是$\overline{\phi}(R)=S$. 據是以觀,任何物系必與其本身相似(註二十一).

33. 定理 若R, S兩系相似,則與R相似之系Q亦與S相似.何則,據假定,S必有一相似攝影ϕ使$\phi(S)=R$, R必有一相似攝影ψ使$\psi(R)=Q$,於是根據定理31,$\psi\phi$必爲S之一相似攝影使$\psi\phi(S)=Q$,是卽吾人所欲證者.

34. 說明 觀乎以上所述,吾人可將一切與R相似之系,且亦惟一切與R相似之系如$Q, R, S,\cdots\cdots$歸於一類.於是R可稱爲此類之代表.旣明定理33,可知任何一系苟其屬於同類無不可爲其類之代表.

35. 定理 苟R, S爲兩相似系,則S之任何分系必與R之一分系相似,S之任何眞分系亦必與R之一眞分系相似.何則,S旣有一相似攝影ϕ,使$\phi(S)=R$,復名T爲S之任何分

註二十一 因任何物系可由本位攝影(據定理30知其相似)與其本身對應故也.

系：$T \prec S$，吾人根據定理22，可知$\phi(T) \prec \phi(S)$，故$\phi(T) \prec R$．復次，若T爲S之眞分系，則必有一原素s含於S而未含於T，於是根據定理27，$\phi(s)$雖含於R，未能含於$\phi(T)$，故$\phi(T)$爲R之眞分系，是卽吾人所欲證者．

案數學由至簡以推至繁，循序漸進，永無止境．惟苟窮其最初之所據，則所謂至簡，有甚幽渺而難明者．如以自然數爲始，漸進則有負數，分數，無理數及複數；然所謂自然數，其義何若，殊難猝通．或謂自然數者，淺顯易知，何待深論；是皆囿於習俗之膚近而常忘事理之眞實．治學首貴深考精求，凡理之可證者，必求所以證之；可證而不證，要爲學問格致之大患，不可不愼也．平精論之，自然數之理，殊多渾而不晰，如能鉤深索隱而登諸至確至顯之域，則數學基礎將隨之而益固．昔Frege創關係之說以闡明數之意義，求其淵源於邏輯之中，至Russell而其說大昌．數十年來，名家踵起，補偏救弊，闡發甚多．其中抱深思獨見之明者，首推Dedekind所著Was sind und was sollen die Zahlen?一文．綜其大旨，欲將自然數歸於最顯之觀念．吾人生長於此，俯仰觀察之所得者雖錯綜紛紜，要能將事事物物，彼此分辨，察其同異，集合之，剖析之以考其間之關係．故物系之義，實爲人類理性中最初最淺之觀念．其次則有分系，合系，公分系，又如事物之相應，譬影之相似；將此種種發揮而宣襮之以證自然數之理；如是則本

源易明,條貫可立,誠所謂體大思精,創新時代之著作也.

譯文冠以"數之意義",自信尚足達作者原指.又本文初次發表於一八八七年,殫十餘年之力,下筆抒詞,一字不苟.其用意所在,既略如上述,讀此文者苟反覆思索,自能漸有所悟,初不必有何數學知識也.前三段既明極基本之觀念,繼此復有所謂連系(Kette)之說.

4. 攝影於己

36. 說明 苟以S表一物系,φ表一法則,據是以攝S之影(攝影之相似與否,在此不加假定),因而獲得之影$\varphi(S)$爲他一物系如Z者之分系,則吾人常謂:S由φ攝影於Z.惟如是,苟$\varphi(S)\prec S$,可謂S由φ攝影於己.此種攝影於己之法則φ,本段中擬略加研討.爲行文之便,仍用§2中之符號如$\varphi(s)=s'$以表一原素s之影,如$\varphi(T)=T'$以表一分系T之影.此s',T'者,惟其爲S攝影於己而得,故根據22及7必爲S之原素或分系,可斷言也.

37. 說明 名K爲S之任何分系,苟$K'\prec K$,則K謂之連系.所當注意者,連系之稱,必同時聲明其所據法則φ之爲何;蓋S攝影於己之法則如有變化,昔之連系未必仍爲連系故也.

38. 定理 S爲一連系.

39. 定理 一連系K之影K'爲一連系.何則,由$K'\prec K$,

根據22可以知$(K')' \prec K'$.

40. <u>定理</u> 苟A爲一連系K之分系,則$A' \prec K$.何則,由$A \prec K$,據22以知$A' \prec K'$;復由$K' \prec K$,據7可以知$A' \prec K$.

41. <u>定理</u> 苟A之影A'爲一連系L之分系,則必有一連系K之存在,滿足$A \prec K$, $K' \prec L$兩條件;且A及L兩者之合系$M(A, L)$卽爲一如是之K.

欲證之,可令$K = M(A, L)$,於是根據9知$A \prec K$,故如上條件之一,已見滿足.復據23,知$K' = M(A', L')$;又據假定$A' \prec L$, $L' \prec L$遂得知第二條件$K' \prec L$亦必成立,蓋觀於10所證者可以知之.至K之必爲一連系,亦無疑義,蓋由既證之$K' \prec L$及$L \prec K$(因$K = M(A, L)$,據9可以知$L \prec K$)可以知$K' \prec K$.

42. <u>定理</u> $A, B, C\cdots\cdots$諸連系之合系M爲一連系.何則,由$M = M(A, B, C\cdots\cdots)$可根據23以知$M' = M(A', B', C'\cdots\cdots)$;復因$A, B, C\cdots\cdots$均爲連系之故:$A' \prec A$, $B' \prec B$, $C' \prec C\cdots\cdots$遂得根據12,推知

$$M(A', B', C'\cdots\cdots) \prec M(A, B, C\cdots\cdots).$$

故
$$M' \prec M,$$

是卽吾人所欲證者.

43. <u>定理</u> $A, B, C\cdots\cdots$諸連系之一切公原素G成一連系.何以言之?據17,G既爲$A, B, C\cdots\cdots$之公分系,則根據22,可知G'必爲$A', B', C'\cdots\cdots$之公分系.復因$A, B, C\cdots\cdots$爲連系之故,換言之,$A' \prec A$, $B' \prec B$, $C' \prec C\cdots\cdots$,可知G'亦爲$A, B, C\cdots\cdots$之公

分系(根據7).惟如是,遂得根據18以知$G'\prec G$,是卽所欲證者.

44. 說明 苟A爲S之一分系,聚一切S之連系(如S者),各含A爲其分系者,而求其一切公原素,此公原素相聚,常以A_0表之(註二十二).其必能存在,無待深論,蓋A本身卽爲一如是之公分系也.據43所論,A_0必爲一連系,因之吾人常稱A_0爲A之連系.所不可不注意者,如上之說明,與所據之攝影法則息息相關;故爲明晰計,A之連系A_0可用$\varphi_0(A)$表而出之.苟其攝影法則爲ω,則A之連系爲$\omega_0(A)$,如是庶可免歧義之發生也.

45. 定理 據44所述之義,可知$A\prec A_0$.何則,A爲一切連系之公分系,而A_0適爲此種連系之公原素所成,故$A\prec A_0$,乃根據18所必有之結果.

46. 定理 $(A_0)'\prec A_0$.因據44,A_0爲一連系故也(註二十三).

47. 定理 苟A爲一連系K之分系,則$A_0\prec K$.因據定義,A_0爲一切此種K之公原素所成,故亦爲其公分系,因此$A_0\prec K$.

48. 注意 觀於44所述,A_0之涵義,可由45,46,47三定理完全標識之,讀者深思而自得之可也.

49. 定理 $A'\prec(A_0)'$.其理由45,22可以知之.

50. 定理 $A'\prec A_0$.其理由49,46,7可以知之.

註二十二 讀者如嫌過於抽象,可設想A爲一線段中之點.

註二十三 參閱37所述連系之義.

51. 定理 苟A爲一連系,則$A_0=A$. 何則,A如爲一連系A之分系,則據47可以知$A_0 \prec A$. 惟據45既知$A \prec A_0$,故$A_0=A$.

52. 定理 苟$B \prec A$,則$B \prec A_0$. 其理由45,7可以知之.

53. 定理 苟$B \prec A_0$,則$B_0 \prec A_0$,其逆亦眞.欲證之,其法如下:既知A_0爲一連系,據47可由$B \prec A_0$以推$B_0 \prec A_0$. 反之,苟$B_0 \prec A_0$,復因$B \prec B_0$(據45),可據7以知$B \prec A_0$,是卽吾人所欲證者.

54. 定理 苟$B \prec A$,則$B_0 \prec A_0$. 其理由52,53可以知之.

55. 定理 苟$B \prec A_0$,則$B' \prec A_0$. 蓋由53既知$B_0 \prec A_0$,復據50知$B' \prec B_0$,故$B' \prec A_0$乃爲根據7所應有之理.

56. 定理 苟$B \prec A_0$,則$(B_0)'=(A_0)'$. 其理由53,22可以知之.

57. 定理及說明 A之連系之影必爲A之影之連系,申言之,$(A_0)'=(A')_0$. 故此物系亦得以A_0'表之,且簡稱謂A之連系影或影連系.爲求明晰計,亦可應用44中之符號,以$\varphi(\varphi_0(A))$或$\varphi_0(\varphi(A))$表而達之.

欲證此定理,可先令$(A')_0=L$,據44以知L之必爲一連系,復據45以知$A' \prec L$. 於是根據41知必有一連系K之存在,滿足

$$A \prec K,\ K' \prec L,$$

由是(據47)得 $A_0 \prec K$.

故$(A_0)' \prec K'$,由是而知$(A_0)' \prec L$,換言之,$(A_0)' \prec (A')_0$. 復次,吾人

據49既知$A'\prec(A_0)'$，而$(A_0)'$據44，39爲一連系，遂得據47以知$(A')_0\prec(A_0)'$.觀於$(A_0)'\prec(A')_0$及$(A')_0\prec(A_0)'$之成立，可知$(A'_0)=(A')_0$，是卽所欲證者.

58. 定理 A之連系爲A及其影連系相合而成，換言之，$A_0=M(A,A'_0)$.

欲證之，可先令

$$L=A'_0=(A_0)'=(A')_0,$$

$$K=M(A,L).$$

於是根據45知$A'\prec L$；復因L爲一連系，故據41，K亦爲一連系，惟由$K=M(A,L)$既知$A\prec K$(據9)，遂得

$$A_0\prec K.$$

蓋由47可以知之.復次，吾人據45知$A\prec A_0$，據46知$L\prec A_0$；惟如是，遂得據10以知

$$K\prec A_0.$$

欲求$A_0\prec K$及$K\prec A_0$之同時成立，自必$A_0=K$，是卽所欲證之理.

59. 普遍歸納定理 欲證一連系A_0爲任何物系Σ之分系——不論Σ爲S之分系與否——吾人僅證如下兩事已足，卽

ρ. $A\prec\Sigma$.

σ. A_0及Σ之任何公原素之影爲Σ之原素.

何以言之？ρ如果眞確，則A_0及Σ兩者必合有公原素，換

言之,必有 $G=G(A_0,\Sigma)$ 之存在(註二十四).因此,$A\prec G$,蓋由18可以知之.復據17既知

$$G\prec A_0$$

可知 G 必爲 S 之一分系;S 者,即由 φ 攝影於己之物系也.於是據55又得 $G'\prec A_0$.復次,σ 如果亦真,其意謂 $G'\prec\Sigma$,換言之,G' 爲 A_0 及 Σ 兩者之分系,因此據18必爲 G 之分系無疑.於是根據連系之定義(37),G 必爲一連系.復據上所證,$A\prec G$;故據47必有

$$A_0\prec G.$$

欲求此與上所證之 $G\prec A_0$ 同時成立,必 $G=A_0$ 而後可.故據17得知 $A_0\prec\Sigma$,是即所欲證之理.

60. 數學中所習用之普遍歸納法(即由 n 推至 $n+1$ 之推理法)實藉上述定理作爲基礎,容後再加詳論.上述定理,可申述之如次:欲證一連系 A_0 之一切原素均具有某種性質 C(或某種定理 D,其中有涉及一未定之物 n 者,對於一連系之一切原素 n 均爲有效),吾人但證如下兩事已足,即

ρ. 物系 A 之一切原素 a 均具有 C 之性質(或謂定理 D 對於一切 a 均爲有效)及

σ. A_0 之任何原素 n 如具有 C 之性質,其影 n' 亦有 C 之性質(或謂一定理 D,苟其對於 A_0 之一原素 n 爲有效,對其影

註二十四 據 ρ 所假定謂 $A\prec\Sigma$;復據45:$A\prec A_0$,故 A_0 及 Σ 必含有公原素;A 既爲 A_0 及 Σ 之公原素,故 $A\prec G$ 乃爲必然之理.

亦必有效).

至本段所述與59之意義完全相同,不難概見.何則,將Σ視爲一物系,其中原素均具有C之性質(或謂定理D對Σ之一切原素均有效),兩者涵義之一致,即昭然無疑.

61. 定理 $M(A,B,C\cdots\cdots)$之連系爲$M(A_0,B_0,C_0\cdots\cdots)$.試名前者爲$M$,後者爲$K$;吾人但證$M_0=K$即可.欲證之,其法如下.由42知$K$必爲一連系,又據45知$A\prec A_0, B\prec B_0, C\prec C_0\cdots\cdots$故$M\prec K$(據12).於是據47得知

$$M_0\prec K.$$

復次,由9既知$A,B,C\cdots\cdots$中每一系爲M之分系,其同時必爲M_0之分系,乃據45及7所必有之結論.於是復據47知$A_0,B_0,C_0\cdots\cdots$中每一系均爲M_0之分系,故(據10)必有

$$K\prec M_0.$$

欲求此與前證之$M_0\prec K$同時成立,必$M_0=K$而後可(據5),是即所欲證之理.

62. 定理 $G(A,B,C\cdots\cdots)$之連系爲$\mathring{G}(A_0,B_0,C_0\cdots\cdots)$之分系.試名前者爲$G$,後者爲$K$,吾人但證$G_0\prec K$即可.據43,已知$K$爲一連系.復據45知$A\prec A_0$, $B\prec B_0\cdots\cdots$故$G\prec K$(據20).由是遂得$G_0\prec K$,蓋據47而可以知之.

63. 定理 苟$K'\prec L\prec K$, K自必爲一連系,於是L亦爲一連系(註二十五).苟L爲K之眞分系,U爲K之一切原素未合

註二十五 由$L\prec K$知$L'\prec K'$,復因$K'\prec L$故得$L'\prec L$.

於L者所成;復名連系U_0爲K之眞分系,V爲一切K之原素未合於U_0者所成,如是則$K=M(U_0, V)$, $L=M(U'_0 V)$(註二十六).又若$L=K'$,則$V \prec V'$(註二十七).其證請讀者自思得之.

案連系之義,至爲顯明.如S之任何分系K憑一確定法則φ而攝影,得$\varphi(K) \prec K$者,K即謂之連系.由此定義,可以推知連系之種種簡單性質,如S爲一連系(38),連系之影復爲連系(39),多種連系之合系及公原素亦均爲連系(42, 43)等等皆是.然後聚一切連系之含一確定物系如A爲其分系者而求其公原素,自必又成一連系,吾人以A之連系稱之.此A之連系之必能存在,可無疑義,本文中以A_0表而識之.明乎此義,遂知$A \prec A_0$(44) $A_0' \prec A_0$(6),又A如爲一連系K之分系,則$A_0 \prec K$.此外復有$(A_0)' = (A')_0$(7)及$A_0 = M(A, A'_0)$(58)兩重要關係之成立,其證皆淺而易明.復次,苟$A \prec \Sigma$,又$G(A_0 \Sigma)$之影亦屬於Σ,則A_0必爲Σ之分系,其理之眞,不難證之(59),殊不知即可作爲普遍歸納法之基礎.綜觀所論,結構精嚴,一字一語,必寓微旨,正如善弈者之著子,偶然一下,後來咸得其用,思力至此,臻絕頂矣.

註二十六 據定義已知$K=M(L, U)$及$K=M(U_0 V)$復據58知$U_0=M(U, U'_0)$,故$L=M(U'_0 V)$.

註二十七 由$M(U'_0 V)=M(U'_0 V')$可以知之.

5. 有窮與無窮

64. 說明 凡一物系,苟其與本身之一眞分系相似者,謂之無窮,否則謂之有窮(註二十八).

65. 定理 凡僅含一個原素之物系必爲有窮.因此種物系無眞分系(2, 6)故也.

66. 定理 世上必有無窮物系之存在.何則,我之思想界,換言之,一切事物,足以爲我思想之對象者,顯然成一如是之無窮物系.試名我之思想界爲S,其中任何一思爲s;於是我思此思s,又爲一思s',此s'者,因其由思s而得,故可視爲s之影,其必屬S,自無待論.循是以論,苟以思s,作爲攝影之法則φ,遂可由S以得$\varphi(S)=S'$.此S'不特爲S之分系,且爲其眞分系,蓋S中必尙有異於s'之思想(如關於我本身者即其一例),故未含於S'之中.復次,苟a, b爲S中兩相異之思想,其影a', b'亦必相異,因此φ必爲一相似攝影(26).由是S之爲一無窮物系可以見矣.

67. 定理 苟R, S兩系相似,則R之爲有窮或爲無窮,視S之爲有窮或爲無窮而定.

假定S爲無窮,意謂S與其本身之一眞分系S'相似,則R旣與S相似,亦必與S'相似(據33).復據35, S'必與R之一眞分

註二十八 案此無窮之義,爲Dedekind理論中重要關鍵,在當時可稱一寶貴之創建.Dedekind於一八八二年九月間以此創作函告Cantor;據聞數年之前與Schwarz及Weber亦略有討論,惟當時未能引起應有之注意耳.

系R'相似.故R與R'之相似,換言之,R爲無窮,乃爲必然之理(33),是卽所欲證之理.

68. 定理 任何物系S,苟有一無窮分系T,則其本身亦爲無窮;換言之,有窮物系之任何分系必爲有窮.

欲證之,試假定T爲無窮,於是必有一相似攝影ψ者,使$\psi(T)$爲T之一眞分系.T既爲S之一分系,吾人可據ψ以創一S之攝影φ,其道如下:名s爲S中任何原素;苟其同時屬於T,則$\varphi(s)=\psi(s)$,其不屬於T者,則$\varphi(s)=s$.由是可知φ必爲一相似攝影;何則,苟a,b爲S中兩相異之原素,同屬於T者,則其影$\varphi(a)=\psi(a)$, $\varphi(b)=\psi(b)$亦必相異,因ψ爲一相似攝影故也;苟a屬T而b未屬於T,則$\varphi(a)=\psi(a)$與$\varphi(b)=b$亦顯然不同;苟a,b兩者均不屬T,則$\varphi(a)=a$, $\varphi(b)=b$之不同,更無待論.復次,$\psi(T)$既爲T之一分系,亦爲S之一分系,故$\varphi(S)\prec S$,可以斷言.不寧惟是,據前所論,$\psi(T)$實爲T之眞分系,故吾人必能在T之中,同時在S之中,求得一原素t,未含於$\psi(T)=\varphi(T)$者.惟S之原素s,苟其未含於T,其影$\varphi(s)$爲s,故與t相異.因此之故,t必不能含於$\varphi(S)$之中,換言之,$\varphi(S)$爲S之一眞分系,故S之爲無窮,遂得證矣.

69. 定理 任何物系,苟與一有窮物系之一分系相似,必爲有窮.其理可由67,68推知之.

70. 定理 苟a爲S之一原素,其他異於a之原素相聚而成之T爲有窮,則S亦爲有窮.

根據64所述,吾人欲證S之爲有窮,其道無他,試名φ爲其任何相似之攝影於己之法則,但證所得之影$\varphi(S)$或S'無論如何,不能爲S之眞分系,換言之,必$=S$可矣.據上所論,S可視爲a與T之合系:$S=M(a,T)$,故據23知其影S'爲a'與T'之合系:$S'=M(a',T')$;復因φ爲相似攝影之故,可知a'不能含於T'之中(26).既假定$S'\prec S$,則a'及T'之任何原素必爲a或T之原素.於是有兩種情形可以發生;其一,a未在T'之中;其二,a在T'之中.苟a未在T'之中,則$T'\prec T$,至爲顯然;且T據假定既爲有窮,遂得$T'=T$;又據前述,a'不能含於T'之中,因此亦不能含於T,故$a'=a$;於是知此種情形之下,必$S'=S$而後可,是即所欲證之理.苟a在T'之中,試名b'爲含於T之一原素如b者之影,U爲T中異於b之其他一切原素u,於是$T=M(b,U)$,復據15得$S=M(a,b,U)$,故$S'=M(a',a,U')$.然後更創T之一攝影如$\psi(b)=a'$, $\psi(u)=u'$,於是$\psi(T)=M(a'U')$.至ψ之爲相似,可以斷言,蓋φ爲相似,且a未含於U而a'亦未含於U'故也.復次,因a及u均各與b相異,遂知a'及每一u'均與a相異(因ψ相似且$\psi(b)=a'$, $\psi(u)=u'$),因此必一一含於T之中,故得$\psi(T)\prec T$;復因T爲有窮,遂知$\psi(T)=T$,故$M(a',U')=T$.由是復據15以知

$$M(a,a',U')=M(a,T).$$

故得$S'=S$,是即所欲證之理.

案有窮與無窮之別人似知之而不能言其故.如吾人知一友之面龐,雖猝遇於百人之中,猶能辨之,獨至提

縱欲寫其貌,則廢然而止,此無他,所知者渾而不晰故也.使工傳神者見之,則一晤之餘,可以背寫.蓋知之晰,始能言之確.本段論無窮,或近於獨斷,要能曲達其旨,實爲數學中一大發明.

6. 單純無窮之物系;自然數

71. 說明 有一物系N,苟其有一相似攝影φ,憑是而攝影於己以得$\varphi(N)$,使N爲一未含於$\varphi(N)$之原素之一連系(參閱44),如是則N謂之單純無窮.此未含於$\varphi(N)$之原素謂之N之基本原素,或簡稱基素,自後將以1表之;此單純物系N常謂'由φ而序'.細審N之涵義,不過謂有一法則φ及一原素1之存在,滿足如下四種條件$\alpha,\beta,\gamma,\delta$而已(連系及影之符號均照前,爲明晰計耳):

α. $N' \prec N$.

β. $N = 1_0$.

γ. 1未含於N'.

δ. φ爲一相似攝影.

由α,γ,δ可知一單純無窮之物系N必爲無窮,因其與本身之一眞分系N'相似故也(註二十九).

72. 定理 每一無窮物系S必含一單純無窮物系N爲

註二十九. 簡言之,如N中有一原素,未含於其相似影系$\varphi(N)$之中,而N又適爲此原素之連系者,則N謂之單純無窮.蓋$\varphi(N)$旣爲N之眞分系,N之爲無窮,可無疑義.

其分系.何則,S既為無窮,據64必有一相似攝影如φ者,使$\varphi(S)$或S'為S之一眞分系.於是必有S之一原素如1者,未含於S'.推如是,吾人但據44,求1之連系$\varphi_0(1)=1_0$,可知其必為一如是之單純無窮,由φ而序之物系N:$N=1_0$,因其滿足71所述四條件故也(註三十).

73. 說明 吾人討論一單純無窮,由φ而序之物系時,苟將其中原素之性質,概置不問,惟求彼此可以分辨,且其間關係一如φ之所規定,如是則此種原素卽謂自然數或序數.或簡稱為數,其中基素1並以N之基數稱之.凡一切定理,可由71之$\alpha,\beta,\gamma,\delta$推論而得者,在種種單純無窮之物系中自必有效,不論此種物系所含原素之為何;以是為研討之對象,得成一種科學,世常以算學(Wissenschaft von den Zahlen, Arithmetik)稱之.由§4所說明之概念及所證之定理,可推得如下各定理,其中$a, b\cdots\cdots m, n\cdots\cdots$仍用以表$N$之原素卽所謂數者,$A,B,C\cdots\cdots$用以表$N$之分系,$a',b',\cdots\cdots m',n',\cdots\cdots A',B'\cdots\cdots$則所以表由$\varphi$攝影而得之影;故仍為$N$之原素或分系.又一數$n$之影$n'$亦稱隨$n$之數(註三十一).

74. 定理 據45知任何數n必在其連系n_0之中;又據53,知$n \prec m_0$與$n_0 \prec m_0$意義相同.

註三十 注意此定理之重要.此定理可稱為單純無窮之存在定理.繼此以往,自然數之理,遂得確立.

註三十一 於此立一定義,則所謂前後相隨之自然數,得歸併於至確至簡之觀念.

75. 定理 據57知$n_0'=(n_0)'=(n')_0$.

76. 定理 據46知$n_0'\prec n_0$.

77. 定理 據58知$n_0=M(n, n_0')$.

78. 定理 N中任何與1不同之數必屬於N',換言之,必爲N中一數之影;以符號表之,得$N=M(1, N')$.其理可由77及71推論得之(註三十二).

79. 定理 N爲唯一連系,含有1者,何則,1苟含於一其他連系K,則據47可知$N\prec K$,於是$N=K$,蓋$K\prec N$乃爲當然之理.

80. 普遍歸納定理(由n以推n') 欲證一定理對一連系m_0中一切數n均爲眞確,但證如下兩事已足:

ρ. 此定理當$n=m$時必眞.

σ. 苟此定理對連系m_0中之一數n爲眞,對隨於其後之數n'亦眞.

其理可由59及60推知之(註三十三).至應用之時,吾人常取$m=1$,卽$m_0=N$.

案立義如此,可謂切實精要,密合無間;讀之令人斗然記憶;循緒逐節以索,又一一得理之來源.繼此以往,更見從前所論,伏脈至細,種因至遠,使全局應有之理,逐處湧現,隨地關合,苟能反覆勤求,其樂有不可勝言者.

註三十二 因據58或77知$1_0=M(1, 1'_0)$,故據71得$N=M(1, N')$.

註三十三 至是所謂普遍歸納之理,可謂顯明極矣.

7. 較大與較小之數

81. 定理 任何一數 n 與隨於其後之數 n' 必不相同．欲證之，可用普遍歸納法(80)．因

ρ. 此定理當 $n=1$ 時必眞，蓋 1 不含於 N' (據 71)，而隨於其後之 $1'$，因其爲 1 (1 含於 N 之中) 之影，必爲 N' 之一原素故也．

σ. 苟此定理對一數 n 爲眞，換言之，名 n 之影 n' 爲 p ： $n'=p$，n 與 p 不相同，於是根據 φ 之相似性，知 n' 與 p' 即 p 與其影 p' 亦不相同；故此定理對 n 之影亦眞，是即所欲證之定理．

82. 定理 在 n 之連系影 n'_0 中，必有 n 之影 n'，但無 n 本身之可尋．欲證之，可用普遍歸納法(80)．因

ρ. 此定理當 $n=1$ 時必眞，蓋 $1'_0=N'$，復據 71，1 本身未含於 N' 之中故也．

σ. 苟此定理對一數 n 爲眞，名 n 之影 n' 爲 p ： $n'=p$，則 n 不含於 p_0，換言之，n 必與含於 p_0 中任何一數 q 相異，於是根據 φ 之相似性，可知 n' 或 p 必與含於 p'_0 之任何一數 q' 相異．故 n' 不能含於 p'_0 之中．由是以論，苟此定理對 n 爲眞，對隨於其後之 n' 亦眞，是即所欲證之理．

83. 定理 連系影 n'_0 爲連系 n_0 之眞分系．其理可由 76，74，82 推知之(註三十四)．

註三十四 據 76 知 $n'_0 \prec n_0$，復因 n 必含於 n_0 而未含於 n'_0 故 n'_0 爲 n_0 之眞分系．

84. 定理　苟 $m_0=n_0$，則 $m=n$. 據74，知 m 含於 m_0，復據77，知

$$m_0=n_0=M(n, n_0').$$

因此之故，倘此定理非眞，即 m 與 n 相異，則 m 必含於 n_0' 之中，於是根據74所論，由 $m\prec n_0'$ 將有 $m_0\prec n_0'$ 之關係，復因 $m_0=n_0$ 而得 $n_0\prec n_0'$，是與83相矛盾矣；故此定理必眞.

85. 定理　苟有一數所成之連系 K，其中未含 n 之數，則 $K\prec n_0'$. 欲證之，可用普遍歸納法(80). 因

ρ. 由78知此定理當 $n=1$ 時必眞.

σ. 苟此定理對任何一數 n 爲眞，則對隨於其後之數 $p=n'$ 亦眞. 何則，據假定 p 若不含於 K，則 n 亦不能含於 K(40)，故根據假定可知 $K\prec n_0'$. 惟據77既知 $n_0'=p_0=M(p, p_0')$，故 $K\prec M(p, p_0')$；復因 p 不含於 K 之故，遂得 $K\prec p_0'$，是即所欲證之理.

86. 定理　苟 K 爲數所成之連系，其中未含 n 而含 n 之影 n'，則 $K=n_0'$.

因 n 未含於 K，據85可知 $K\prec n_0'$. 復因 $n'\prec K$ 之假定，據47可知 $n_0'\prec K$. 故 $K=n_0'$.

87. 定理　在任何數所成之連系 K，必有一數且僅有一數 k，其連系 $k_0=K$(註三十五).

何以證之. 苟 K 中含有1，則據79，$K=N=1_0$. 理已得證. 苟

註三十五　既證必存一數 k，即可知其僅有一如是之 k，蓋據84由 $k_0=m_0$ 知 $k=m$ 故也.

其不然,試名Z爲一切不含於K之數相聚而成,於是其中必含有1;惟Z爲N之眞分系,故據79必非連系,可以斷言.惟如是,Z必非Z之分系.故Z中必有一數n,其影n'未含於Z,故必含於K者.復次,n旣含於Z,未含於K,吾人得據86以知$K=n'_0$.故得一數$k=n'$,其連系爲K,是卽所欲證之理.

88. 定理　苟m, n爲兩不同之數,則就其連系m_0, n_0而論,其中之一必爲其他之一眞分系(83,84)(註三十六);於是必有$n_0 \prec m'_0$或$m_0 \prec n'_0$之成立.

何以證之.苟n含於m_0,則據74,$n_0 \prec m_0$.於是m必不能含於n_0(蓋m倘含於n_0,則$m_0 \prec n_0$;如是則$m_0=n_0$,據84將有$m=n$矣).惟如是,遂得據85以知$n_0 \prec m'_0$.反之,苟n不含於m_0,吾人得據類似之推理以知$m_0 \prec n'_0$.

89. 說明　一數m謂小於一數n,或謂n大於m,以符號表之:

$$m<n \text{ 及 } n>m$$

苟其間有如下關係之成立:

$$n_0 \prec m'_0$$

此關係據74亦可寫如

$$n \prec m'_0.$$

90. 定理　苟m, n爲任何兩數,則其間必有如下三種

註三十六　倘$m_0=n_0$則據84必有$m=n$.現所欲證者,如m, n不相同,則必有$n_0 \prec m'_0$或$m_0 \prec n'_0$之成立耳.此理旣立,更若面立大於及小於之義,參閱89.

情形λ,μ,ν之一(註三十七):

$$\lambda.\quad m=n,\quad n=m;\quad 即\quad m_0=n_0.$$

$$\mu.\quad m<n,\quad n>m;\quad 即\quad n_0\prec m_0'.$$

$$\nu.\quad m>n,\quad n<m;\quad 即\quad m_0\prec n_0'.$$

何以證之.苟λ果能成立,則μ或ν必無成立之可能,蓋據83必無$n_0\prec n_0'$故也.苟λ不能成立,則據88,μ,ν兩者之中,必有其一.

91. 定理 任何n必小於其影n':$n<n'$.何則,90中所論ν之情形,在$m=n'$時必能成立故也.

92. 說明 欲明$m=n$或$m<n$(卽m不能$>n$),常用如下之符號

$$m\leqq n\ 或\ n\geqq m.$$

如是常謂m至多等於n,或n至少等於m.

93. 定理 如下三種條件

$$m\leqq n,\quad m<n',\quad n_0\prec m_0$$

之意義相同(註三十八).

何以證之.苟$m\leqq n$,則由90所論之λ,μ可以推知$n_0\prec m_0$,蓋據76知$m_0'\prec m_0$故也.反之,苟$n_0\prec m_0$,據74其意卽謂$n\prec m_0$,於是由$m_0=\mathfrak{M}(m,m_0')$可知$n=m$或$n\prec m_0'$卽$n<m$.由是以論,$n\leqq m$與$n_0\prec m_0$兩者意義實同.復次,據22,27,75可知$n_0\prec m_0$之

註三十七 案其中$n_0\prec m'_0$據74與$n\prec m'_0$同義,$m_0\prec n'_0$與$m\prec n'_0$同義.

註三十八 案$n_0\prec m_0$復與$n\prec m_0$同義.

意,即謂$n'_0 \prec m'_0$,故據90得$m<n'$,是即所欲證者.

94. 定理 如下三種條件

$$m'\leqq n,\ m'<n',\ m<n$$

之意義相同.

其爲眞確,由93中之m代以m',可以見之.

95. 定理 苟$l<m$及$m\leqq n$,或$l\leqq m$及$m<n$,則$l<n$.惟若$l\leqq m$及$m\leqq n$,則$l\leqq n$.

何則,由$m_0 \prec l'_0$及$n_0 \prec m_0$可知$n_0 \prec l'_0$,是即所謂$l<n$.由$m_0 \prec l_0$及$n_0 \prec m'_0$兩者之前一關係得$m'_0 \prec l'_0$由是亦得$n_0 \prec l'_0$.復次,由$m_0 \prec l_0$及$n_0 \prec m_0$得$n_0 \prec l_0$,是即所謂$l\leqq m$,故此理遂得證矣.

96. 定理 在N之任何分系T中,必有且僅有一最小數k;所謂最小之數,乃一如是之數,小於其他任何含於T之數.苟T僅含一數,則此數即謂T之最小數.

因T_0爲一連系(44),故據87必有一數k,其連系$k_0=T_0$.由是旣知$T \prec M(k, k'_0)$(據45及77),可知k本身必含於T之中(否則$T \prec k'_0$,據47遂得$T_0 \prec k'_0$,於是$k_0 \prec k'_0$,是與83相矛盾),而T之其他任何與k相異之數均含於k'_0,因之均大於k(89);由是據90知T中僅有一個最小數.

97. 定理 連系n_0之最小數爲n;又1爲數之最小者.蓋據74及93,$m \prec n_0$與$m\geqq n$之意義相同故也(註三十九).又此

註三十九 謂任何異於n之m含於n_0者必$m\geqq n$.

定理亦可由96推知之,蓋使$T=n_0$,即得$k=n$(51).

98. 說明 苟n爲任何一數,凡一切不大於n,即未含於n_0'之數,概以Z_n表之.故

$$m \prec Z_n$$

之條件,據92及93所論,必與如下條件之一

$$m \leqq n,\ m < n',\ n_0 \prec m_0$$

意義相同.

99. 定理 $1 \prec Z_n$又$n \prec Z_n$.其理由98或由71及82可以知之.

100. 定理 就98所論諸同義之條件

$$m \prec Z_n,\ m \leqq n,\ m < n',\ n_0 \prec m_0$$

觀之,又各與 $Z_m \prec Z_n$

同其意義.

何以證之.由$m \prec Z_n$即$m \leqq n$及$l \prec Z_m$即$l \leqq m$,得據95以知$l \leqq n$,其意即謂$l \prec Z_n$.循是以論,苟$m \prec Z_n$,則Z_m中任何原素l同時必爲Z_n之原素,遂得$Z_m \prec Z_n$.反之,苟$Z_m \prec Z_n$,則據7可以知$m \prec Z_n$,蓋據99,$m \prec Z_m$故也.

101. 定理 考90所論λ,μ,ν各條件得申述之如下:

λ. $m=n,\ n=m,\ Z_m=Z_n$;

μ. $m<n,\ n>m,\ Z_{m'} \prec Z_n$;

ν. $m>n,\ n<m,\ Z_{n'} \prec Z_m$.

據100既知$n_0 \prec m_0$及$Z_m \prec Z_n$兩者同義,此定理之證,即可

由 90 得之.

102. 定理 $Z_1=1$. 何則,據 99,1 既含於 Z_1 之中,而任何與 1 相異之數含於 $1_0'$ (78),因此不含於 Z_1 (98) 故也.

103. 定理 據 98 知 $N=M(Z_n, n_0')$.

104. 定理 n 為 Z_n 及 n_0 之唯一公原素,換言之,$n=G(Z_n, n_0)$.

何則,由 99 及 74 知 n 必含於 Z_n 及 n_0 之中.又連系 n_0 中任何與 n 相異之原素皆含於 n_0' (77) 故不含於 Z_n (98),是即所欲證之理.

105. 定理 據 91, 98 知 n' 必不含於 Z_n 之中.

106. 定理 苟 $m<n$,則 Z_m 為 Z_n 之眞分系;其逆亦眞.

苟 $m<n$,則 $Z_m \prec Z_n$ (100);又據 99,任何含於 Z_n 之 n,因 $n>m$ 之故,不能含於 Z_m,故 Z_m 為 Z_n 之眞分系.反之,苟 Z_m 為 Z_n 之眞分系,據 100 可知 $m\leqq n$.但 m 必不 $=n$;倘其 $=n$,則將有 $Z_m=Z_n$,是不可能之事.故 $m<n$.

107. 定理 Z_n 為 $Z_{n'}$ 之眞分系.因據 91 既知 $n<n'$,故此定理為 106 所必有之結論.

108. 定理 $Z_{n'}=M(Z_n, n')$. 何則,任何含於 $Z_{n'}$ 之數必 $\leqq n'$ (99),換言之,必 $=n'$ 或 $<n'$;此種不大於 n' 者據 98 必為 Z_n 之原素,因此遂得 $Z_{n'} \prec M(Z_n, n')$.反之,據 107 既知 $Z_n \prec Z_{n'}$,復據 99 知 $n' \prec Z_{n'}$,故由 10 得 $M(Z_n, n') \prec Z_{n'}$;於是 $Z_{n'}=M(Z_n, n')$,是即所欲證之理.

109. 定理 Z_n之影Z_{n}爲$Z_{n'}$之眞分系.

考Z_n中所含,爲Z_n中之數如m者之影m';因$m \leqq n$,故$m' \leqq n'$(據94),由是遂知$Z_n < Z_{n'}$(據98).復次,據99,知1在$Z_{n'}$之中(註四十),又據71,知1未在Z_n之中,故Z_n爲$Z_{n'}$之眞分系.

110. 定理 $Z_{n'} = M(1, Z_n)$.

考$Z_{n'}$中之數,其與1相異者,各爲一數m之影m'(據·8)且均$\leqq n$,故據98必含於Z_n之中(否則$m > n$, $m' > n'$,於是m'將不含於$Z_{n'}$,是不可也);復由$m \prec Z_n$得$m' \prec Z_n$,於是遂知$Z_{n'} \prec M(1, Z_n)$.復次,據99既知$1 \prec Z_n$,又據109知$Z_n \prec Z_{n'}$,遂得$M(1, Z_n) \prec Z_{n'}$(據10).故$Z_{n'} = M(1, Z_n)$,乃根據5所應有之理.

111. 說明 苟E所含之數中,有一數g,大於其他任何含於E之數,則g爲E之最大數;據90,E必僅有一個最大數.苟其僅含一數,則此卽謂其最大者.

112. 定理 據98知n爲Z_n之最大數.

113. 定理 苟E有一最大數g,則$E \prec Z_g$.因任何含於E之數必不大於g:$\leqq g$,故據98含於Z_g.

114. 定理 苟E爲Z_n之分系,換言之,苟有一數n,使一切含於E之數均$\leqq n$,則E有一最大數g.

其證如次.凡一切數p之滿足$E \prec Z_p$者——據吾人所假定必然存在——必成一連系(據·7).蓋據107及7知$E \prec Z_{p'}$故也.

註四十 考$1 \prec Z_n$,惟Z_n爲$Z_{n'}$之眞分系(107)故1亦在$Z_{n'}$之中.觀於1·7及109,知Z_n及Z'_n均爲$Z_{n'}$之眞分系.

於是據87知$E=g_0$,其中g爲此種數之最小者(據96及97).由是得$E<Z_g$,故據98,任何含於E之數必$\leqq g$.所尚待證明者,卽g含於E之中而已.苟$g=1$,則其理至爲顯然;蓋如是可由107知Z_g僅含1,因E亦僅含1故也.苟g與1相異,則據78必爲一數f之影f';惟如是,遂得據108以知$E\prec M(Z_f, g)$;倘g未含於E,勢必$E\prec Z_f$,於是在此種p中將有一f,小於g者(據91),是爲不可能之事.故g必含於E之中.

115. 說明 苟$l<m$及$m<n$,吾人常謂m在l與n之間(或謂n與l之間).

116. 定理 無一數在n與n'之間.

倘有一m如$m<n'$者,則據93得$m\leqq n$,於是由90知必無$n<m$,是卽所欲證之定理.

117. 定理 苟t爲T之一數,但非其最小數(其義如96),則T中必有且僅有一數s,緊居t之前;換言之,必有一數s小於t,但T中無一數,介於s及t之間.復次,苟t非T之最大數(其義如111),則T中必有且僅有一數u,緊隨t之後;換言之,必有一數u大於t,但T中無一數介於t及u之間.惟如是,t必緊隨s後,緊居u前.

其證如次.苟t非T之最小數,試名E爲一切含於T之數,小於t者,於是據98得$E\prec Z_t$,復據114知E中必有一最大數s,具有此定理所規定之性質,且僅有唯一如是之數.復次,苟t非T之最大數,則據96,觀於一切含於T之數,大於t者,其中

必有一最小之u,具有此定理所規定之性質,且惟此u具有如是之性質.至此定理之結論,自必真確,無待贅論.

118. 定理 就N而論,其中n'必緊隨n之後,n必緊居n'之前.

其理由116及117可以知之.

案本段所論,精鑿極矣.除"大於""小於"等義有所規定外,其他一切,皆根於至淺之例以為推,故其理為確然不易.不知者匆促閱過,或以作者預作意設,以便後來立論,播弄翻覆於名號之間,殊為常人所難信.細審之,始瞭然於其企圖之宏遠,有關數學基礎者甚鉅也.蓋何謂數,何謂1,何謂隨於一數之後之數,如何由1出發,相繼加1以達其他自然數;凡此種種,皆不易置答之問題.數學家如Kronecker 雖主張自然數之理無奠定之必要者無論矣;吾人既認為有奠定之必要,則本文所論,不可謂非空前之成功.為學之道無他,藉概念之用以求認識事理而已.概念必需定義而後明,欲解釋一概念,必有一其他概念.循是以推,必有至顯至淺,無待解釋之概念而後可.然則如何層層剝蕉,以達於至簡至顯之基本概念,為討論數學基礎者必要之圖,Dedekind 此文實為斯學開先河也.

8. 數列之有窮及無窮分系

119. 定理 如98中所論之任何物系Z_n必為有窮.欲證

之，可用普遍歸納法．因

ρ. 此定理當 $n=1$ 時據 65 及 102 必眞．

σ. 苟 Z_n 爲有窮，由 108 及 70 可知 $Z_{n'}$ 亦必有窮，是卽所欲證之理．

120. 定理 苟 m, n 爲兩不等之數，則 Z_m 及 Z_n 兩物系不能相似．

試假定 $m<n$，據 106 知 Z_m 爲 Z_n 之眞分系．惟 Z_n 據 119 旣有窮，故 Z_m 與 Z_n 不能相似(據 64)．

121. 定理 數列 N 之任何分系 E，苟其有一最大數(其義見 111)，必爲有窮．此定理可由 113，119 及 68 推知之．

122. 定理 數列 N 之任何分系 U，苟其無一最大數，必爲單純無窮(其義見 71)．

其證如次．苟 u 爲 U 之任何一數，據 117 知 U 必有且僅有一數，緊隨 u 後，吾人得以 $\psi(u)$ 名之，且可視爲 u 之影．考此 U 之攝影法則 ψ，自必有 71 中所論之性質 α：

$$\alpha.\quad \psi(U) \prec U.$$

換言之，U 必由 ψ 而攝影於己．復次，名 u, v 爲 U 之兩不等數，並假定 $u<v$，則據 117 可知 $\psi(u) \leqq v$，$v<\psi(v)$．遂得 $\psi(u)<\psi(v)$ (據 95)．由是知 u, v 若相異，則其影亦不同，是卽 71 所論之 δ：

δ. ψ 爲一相似攝影．

更有進者，苟 u_1 爲 U 之最小數(其義見 96)，則任何含於 U 之 u 必不小於 u_1，卽 $u \geqq u_1$；惟因 $u<\psi(u)$ 之故，遂得據 95 以知

$u_1<\psi(u)$，故 u_1 必與 $\psi(u)$ 不同，換言之，

$$\gamma.\quad u_1 \text{未含於} \psi(U) \text{之中}.$$

由是以論，$\psi(U)$ 實爲 U 之一眞分系，故據 64 可知 U 爲無窮．吾人仍用 44 之符號，假定 V 爲 U 之分系，以 $\psi_0(V)$ 表 V 之連系，即根據法則 ψ 所得之連系，如是則尙待證明者，爲

$$\beta.\quad U=\psi_0(u_1).$$

據 44 知此種連系 $\psi_0(V)$ 必爲 U 之分系，故 $\psi_0(u_1)\prec U$．復次，由 45 知含與 U 之原素 u_1 必含於 $\psi_0(u_1)$；苟有 U 之原素，未含於 $\psi_0(u_1)$ 者，則其中必有一最小數 w（據 96）．此 w 據上之假定自必與 U 之最小數 u_1 不同．惟如是，遂得據 117 知 U 必有一數 v，緊居 w 前，換言之，$w=\psi(v)$．復因 $v<w$ 之故，可據 w 之定義以知 v 必含於 $\psi_0(u_1)$；於是據 55 知 $\psi(v)$ 即 w 亦含於 $\psi_0(u_1)$，與 w 之定義適相矛盾．因此之故，必 $U\prec\psi_0(u_1)$ 而後可．故 $U=\psi_0(u_1)$．由 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 四者之成立，知 U 爲一單純無窮，由 ψ 而序之物系，是即所欲證之理．

123．定理　由 121 及 122 知一數列 N 之任何分系 T，其爲有窮或無窮，視其有無一最大數而定．

9．數列攝影之定義

124．吾人此後仍保持 §6 至 §8 之一切符號，並以 Ω 表一任何物系，其中原素不必含於 N 者．

125．定理　苟一物系 Ω 有一任何（相似或不相似）攝

影法則θ,憑此而攝影於己,復有Ω之一確定原素ω,則求之98所論之Z_n,其中每一數n必有且僅有一攝影ψ_n,適合如下諸條件者(註四十一):

I. $\psi_n(Z_n)\prec\Omega$,

II. $\psi_n(1)=\omega$,

III. $\psi_n(t')=\theta\psi_n(t)$,其中$t<n$,又$\theta\psi_n$之義見25.

欲證此定理,可用普遍歸納法.因

ρ. 此定理當$n=1$時必真.蓋$n=1$時,據102知Z_n僅含1,別無其他;於是吾人可據II以創一攝影ψ_1,適合I者.至III在此,自不可論.

σ. 苟此定理對一數n爲真,則對$p=n'$亦真.欲證之,請先證Z_p僅有一種攝影ψ_p之可能.蓋如有一ψ_p,適合

I'. $\psi_p(Z_n)\prec\Omega$,

II'. $\psi_p(1)=\omega$,

III'. $\psi_p(m')=\theta\psi_p(m)$,其中$m<p$

之條件者,則因$Z_n\prec Z_p$之故(據107),同時必包括Z_n之一攝影(據21),適合I, II, III之條件者;此攝影自必與ψ_n完全相同,因ψ_n爲Z_n之唯一攝影故也.因此之故,就Z_n所含之數而論,其中m之小於p: $<p$,即$\leqq n$者,必有

$$\psi_p(m)=\psi_n(m) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (m)$$

註四十一 此I, II, III三條件未嘗彼此獨立,蓋由II, III可以推知I之必然成立.惟爲力求明晰計,不妨將三者並舉.

其中顯然包括一特殊情形，即$m=n$時：

$$\psi_p(n)=\psi_n(n)\cdots\cdots\cdots\cdots(n)$$

復據105及108，p爲Z_p中唯一之數，不含於Z_n者，遂得由III'及(n)知(註四十二)

$$\psi_p(p)=\theta\psi_n(n)\cdots\cdots\cdots\cdots(p)$$

由是可知僅有一種攝影ψ_p，滿足I'II'III'，蓋ψ_p已由如上(m)及(p)兩條件完全歸併於ψ_n矣．所尚待證明者，即(m)及(p)所規定之攝影ψ_p必能適合I'II'III'而已．此(m)，(p)所規定之ψ_p，觀於I及$\theta(\Omega)\prec\Omega$之成立，可知其必滿足I'無疑．其次，由$(m)$及II，可得II'，蓋1據99亦含於$Z_n$之中．至III'對一切$m$之小於$n$者必爲有效，可由$(m)$及III推知之；復次，III'對$m=n$亦必有效，爲$(p)$及$(n)$之必然結果．由是以論，此定理對$n$若真，對$p$亦必真，是即欲證之理．

126. 定理　苟θ爲一任何攝影法則(相似或不相似)，遞是以攝Ω於己，又ω爲Ω之一原素，則數列N必有且僅有一攝影ψ，滿足如下條件(註四十三)：

I. $\psi(N)\prec\Omega$,

II. $\psi(1)=\omega$,

註四十二　據III'既知$\psi_p(n')=\psi_n(p)=\theta\psi_n(n)$，復據$(n)$遂得$\psi_p(p)=\theta\psi_n(n)$．由是$m$之不大於$n$者，有$\psi_p(m)=\psi_n(m)$之關係；大於$n$者僅$p$一數，有$\psi_p(n')=\theta\psi_p(n)$之關係，其$\psi_p$之性質，完全由$\psi_n$而定．$Z_n$既有唯一攝影，滿足I，II，III之條件，$Z_p$苟有一攝影$\psi_p$，此$\psi_p$可歸併於是，故亦必唯一．既明此，然後證此$\psi_p$確有其應有之特性，如是則唯一與存在兩問題均得解決．

註四十三．意謂單純無窮物系N與Ω之間，必能發生關係如I，II，III所規定者，此定理實爲125之必然結果．

III.　$\psi(n')=\theta\psi(n)$，其中n爲任何數.

其證如次.苟其果有一如是之攝影ψ，則據21，Z_n之攝影ψ_n，滿足125所論之I，II，III三條件者，自必包於其內.惟據前所述，此ψ_n爲唯一之攝影，故

$$\psi_n(n)=\psi(n), \tag{n}$$

爲必然之理.於是ψ已完全決定，故僅有一種ψ之可能(參觀130).反之，由(n)所決定之ψ必能適合I，II，III，可由(n)及125所證之I，II及(p)推知之，是卽欲證之理.

127.　定理　在126所作之假定下，必有

$$\psi(T')=\theta\psi(T)$$

之成立，其中T爲N之任何分系.

何以證之.苟t爲T之任何一數，則$\psi(T')$所含，爲一切$\psi(t')$諸原素，$\theta\psi(T)$所含，爲一切$\theta\psi(t)$，於是據126中之III，得$\psi(t')=\theta\psi(t)$，是卽欲證之理.

128.　定理　在126所作假定之下，又名θ_0爲Ω由θ攝影於己而得之連系(其義見44)，則(註四十四)

$$\psi(N)=\theta_0(\omega).$$

欲證之，請先由普遍歸納法證

$$\psi(N)\prec\theta_0(\omega),$$

卽任何$\psi(n)$爲$\theta_0(\omega)$之原素.誠然，

ρ.　此定理當$n=1$時必眞，因據126 II，知$\psi(1)=\omega$，復據

註四十四　有此定理，則N與Ω之關係更見密切矣.

45 知 $\omega \prec \theta_0(\omega)$ 故也,

σ. 苟此定理對一數 n 爲眞, 則 $\psi(n) \prec \theta_0(\omega)$, 卽據 55 知 $\theta[\psi(n)] \prec \theta_0(\omega)$, 換言之, $\psi(n') \prec \theta_0(\omega)$ (據 126 III), 故對緊隨其後之數 n' 亦眞, 是卽欲證之理.

復次, 吾人當證連系 $\theta_0(\omega)$ 之任何原素 ν 必含於 $\psi(N)$, 卽

$$\theta_0(\omega) \prec \psi(N),$$

並應用普遍歸納法以證之. 蓋

ρ. $\omega=\psi(1)$, 故含於 $\psi(N)$,

σ. 名 ν 爲 $\theta_0(\omega)$ 及 $\psi(N)$ 之一公原素, 則 $\nu=\psi(n)$; 由是根據 126 III 得 $\theta(\nu)=\theta\psi(n)=\psi(n')$, 故 $\theta(\nu)$ 亦含於 $\psi(N)$.

由 $\psi(N) \prec \theta_0(\omega)$ 及 $\theta_0(\omega) \prec \psi(N)$ 之成立, 遂知 $\psi(N)=\theta_0(\omega)$, 是卽欲證之理.

129. 定理 在 126 所作假定之下, 必

$$\psi(n_0)=\theta_0[\psi(n)].$$

其理可用普遍歸納法證明之. 因

ρ. 此定理當 $n=1$ 時, 據 128 必眞, 因 $1_0=N$, $\psi(1)=\omega$ 故也.

σ. 苟此定理對 n 爲眞, 則

$$\theta[\psi(n_0)]=\theta\{\theta_0[\psi(n)]\}.$$

惟據 127 及 75, 知

$$\theta[\psi(n_0)]=\psi(n'_0);$$

復據 57, 126 III

$$\theta\{\theta_0[\psi(n)]\}=\theta_0\{\theta[\psi(n)]\}=\theta_0[\psi(n')].$$

於是得 $$\psi(n'_0)=\theta_0[\psi(n')],$$
故此定理對 n' 亦眞,是卽欲證之理.

130. 注意 在應用126所證定理之前,有一事須特加申述者,卽126所論與59及60所證者有根本不同之點.考59之理,對於任何連系 A_0 均爲有效,其中 A 爲 S 之任何分系,而 S 復有一任何法則攝影於己者.至126所論,僅謂有一單純無窮物系 1_0 之攝影 ψ 而已.倘欲在此定理中(對於 Ω 及 θ 之假定如前所述)將 1_0 代以 S 之任何連系 A_0,更欲求一法則 ψ,使 A_0 攝影於 Ω 如126 II, III 所規定者,卽

ρ. 爲 A 之任何原素 a 必可擇 Ω 之一原素 $\psi(a)$ 以與之相應,

σ. 任何含與 A_0 之原素 n 及其影 $n'=\varphi(n)$ 必滿足 $\psi(n')=\theta\psi(n)$.

恐此種 ψ 未必存在,蓋 ρ 及 σ 兩條件大可不能同時成立也.舉例如下.假定 S 憑 φ 而攝影於己,使 $a'=b$, $b'=a$ (a 及 b 爲 S 中兩不同之原素)如是則 $a_0=b_0=S$;復次,Ω 憑 θ 而攝影於己,使 $\theta(\alpha)=\beta$, $\theta(\beta)=\gamma$, $\theta(\gamma)=\alpha$ (α, β, γ 爲 Ω 中不同之原素).苟吾人要求一法則 ψ,將 a_0 攝影於 Ω,使 $\psi(a)=\alpha$,又對任何含於 a_0 之原素 n $\psi(n')=\theta\psi(n)$,其勢將遇一矛盾,何則,當 $n=a$ 時,得 $\psi(b)=\theta(\alpha)=\beta$,由是知 $n=b$ 時,$\psi(a)=\theta(\beta)=\gamma$,與所假定之 $\psi(a)=\alpha$ 適相矛盾.

苟其果有一攝影法則 ψ,憑是以攝 A_0 於 Ω,且同時適合

ρ, σ之所規定,則由60可知其必完全確定;何則,苟μ滿足此種條件,則$\mu(n)=\psi(n)$必普遍成立,因此定理據ρ對A所含一切原素$n=a$均為有效,又若對A_0之一原素n有效,根據σ對其影n'亦有效故也.

131. 欲見126中所證定理之重要,特補述一事,或對其他研究如羣論方面亦不無關係也.

設有一物系Ω於此,其中原素如ν及ω等彼此可以發生關聯,如ν與ω相聯後又為Ω之一原素,吾人以$\omega\cdot\nu$或$\omega\nu$表之,其物不必與$\nu\omega$盡同.所謂ν與ω相聯而成$\omega\nu$,其意亦可闡明如次.任何確定原素ω有一攝影法則如ω,遞是以攝Ω於已,其結果使Ω中任何原素ν所得之影為$\omega(\nu)=\omega\nu$.明乎此義,苟將126中所證定理應用於Ω及其原素ω,前之所謂θ以ω代之,則與任何數n相應者必有一含於Ω之$\psi(n)$.此原素$\psi(n)$吾人以ω^n表之,並暫稱之為ω之n次羃;其涵義完全由加於其上之條件而定;條件如次:

II. $\omega'=\omega$,

III. $\omega^{n'}=\omega\cdot\omega^n$.

至其存在,已由126可以見之,故不贅敍(註四十五).

註四十五 如是立論,可謂包含於126之一種特例,而126之意,得因此而益顯.設Ω中一確定原素ω與其中任何ν相聯,其結果必為Ω中之原素,不論其相聯之道為何,是即可謂Ω攝影於已之法則θ.於是據126所論,Ω中必有$\psi(n)$與任何n相應,如$\psi(1)=\omega$, $\psi(n')=\omega\cdot\psi(n)$者.應用所設明之符號,遂得II $\omega'=\omega$, III $\omega^{n'}=\omega\cdot\omega^n$,至I之成立為當然之事,故不另舉.

原素間所生之關聯,苟其有$\omega(\nu\mu)=(\omega\cdot\nu)\mu$之性質,其中$\mu,\nu,\omega$爲任何原素,則必有

$$\omega^{n'}=\omega^n\omega,\ \omega^m\omega^n=\omega^n\omega^m$$

之成立,其理可由普遍歸納法證之.

明乎是,乃可討論如下之例.設S爲一物系,爲任何原素所成;Ω又爲一物系,其中原素爲S之一切攝影於己之法則ν.此種ν自可根據25互相聯結,因$\nu(S)\prec S$,且ν與ω相聯之攝影$\omega\nu$又爲Ω之原素也.於是一切原素如ω^n亦爲S攝影於己之法則,人常謂其由ω疊相實施而成.吾人現在所欲討論者,卽此概念與44中所述之連系$\omega_0(A)$果有何關係之可明,其中A復表示S之任何分系.爲行文之便,名$\omega^n(A)$(卽A經ω^n所攝之影)爲A_n,於是由III及25可知$\omega(A_n)=A_{n'}$.由是用普遍歸納法可以推知一切此種物系A_n必爲連系$\omega_0(A)$之分系.蓋

ρ. 此定理當$n=1$時,根據50必能成立;又

σ. 苟此理對n爲眞,據55及$A_{n'}=\omega(A_n)$可知對隨於其後之數n'亦眞,是卽所欲證之理.復次,據45既知$A\prec\omega_0(A)$,故由10知A及其影A_n所合而成之物系K亦必爲$\omega_0(A)$之分系.反之,據23既知$\omega(K)$爲$\omega(A)=A$及一切物系$\omega(A_n)=A_{n'}$卽一切A_n(據78)所合成,而此種物系,據9復爲K之分系,遂得根據10以知$\omega(K)\prec K$,換言之,K爲一連系.復因$A\prec K$(據9)之故,得據47以知$\omega_0(A)\prec K$.於是遂得$\omega_0(A)=K$;申言之,得如下定理:以ω表一物系S攝影於己之法則,A表S之任何分系,

則 A 之連系(據 ω 而得之連系),必由 A 及一切疊經 ω 所擬之影 $\omega^n(A)$ 相合而成(註四十六).

10. 單純無窮物系之類

132. 定理 一切單純無窮之物系均與數列 N 相似,因之彼此亦必相似(據33).

何以證之.假定 Ω 為一單純無窮物系,由一擬影法則 θ 而序,ω 為 Ω 之基素,θ_0 為與 θ 相應之連系,於是據71必有如下條件之成立:

α. $\theta(\Omega)\prec\Omega$,

β. $\Omega=\theta_0(\omega)$,

γ. ω 不含於 $\theta(\Omega)$ 之中,

δ. θ 為一相似擬影.

據126所論,數列 N 必得一擬影法則 ψ,由 β 及128可知其

$$\psi(N)=\Omega.$$

現所欲證者,即 ψ 為一相似擬影,換言之,m 與 n 若為兩相異之數,其影 $\psi(m)$,$\psi(n)$ 亦不同是已.欲證之,試假定 $m>n$,即 $m\prec n'_0$.於是吾人但證 $\psi(n)$ 不含於 $\psi(n'_0)$,即不含於 $\theta\psi(n_0)$ (據127)已足.據普遍歸納法,先證

ρ. 此理當 $n=1$ 時,據 γ 必真,因 $\psi(1)=\omega$ 又 $\psi(1_0)=\psi(N)=\Omega$ 故也,

註四十六 既明此,復與57,58兩定理詳審而比較之,則連系之義,可以益見透澈.

σ. 苟此理對n爲眞,則對隨於其後之n'亦眞.何則,倘$\psi(n')$卽$\theta\psi(n)$果含於$\theta\psi(n'_0)$,則據8及27,$\psi(n)$亦將含於$\psi(n'_0)$,是與所假定者適相矛盾.

133. 定理 任何物系,苟與單純無窮物系相似,因之與數列N相似者(據132, 33),必爲單純無窮.

何以證之.苟Ω爲一與N相似之物系,據32,N自必有一相似攝影ψ,使

$$\text{I.}\quad \psi(N)=\Omega.$$

於是令

$$\text{II.}\quad \psi(1)=\omega,$$

復名$\overline{\psi}$爲ψ之反攝影,則Ω之任何原素ν必有一與之對應之$\overline{\psi}(\nu)=n$,卽一如是之n,其影爲ν者:$\psi(n)=\nu$.惟此n有一緊隨其後之數$\psi(n)=n'$,而如n'復與Ω中一確定原素$\psi(n')$對應.因此之故,Ω中任何原素ν必有其中之一確定原素$\psi(n')$與之對應,卽謂之ν之影並以$\theta(\nu)$表之.如是則Ω之攝影於己之法則已完全確定;吾人所欲證者,卽Ω得由θ而序,爲一單純無窮之物系,滿足132所論$\alpha, \beta, \gamma, \delta$四條件而已.考$\alpha$之成立,由$\theta$之定義可以識之.復次,任何$n$旣有一$\nu=\psi(n)$與之相應,復因$\theta(\nu)=\psi(n')$之故,遂得

$$\text{III.}\quad \psi(n')=\theta\psi(n),$$

由此及I, II, α可以推知θ, ψ必滿足126所述各條件,因之遂得由128及I以知β之成立.復由127及I,知

$$\psi(N')=\theta\psi(N)=\theta(\Omega),$$

由此根據II及ψ之相似性以推知γ之必能成立,蓋否則$\psi(1)$

將含於$\psi(N')$，於是(據27)1亦將含於N'，但據71，γ固未嘗如是也．最後，苟μ，ν為Ω之原素，m，n為與之對應之原素，其影$\psi(m)=\mu$，$\psi(n)=\nu$則由$\theta(\mu)=\theta(\nu)$之假定可以知$\psi(m')=\psi(n')$，由是復據ψ，φ之相似性以知$m'=n'$，$m=n$，故$\mu=\nu$，是卽所欲證之8也．

134. 注意　如上132，133兩定理旣立之後，一切單純無窮之物系乃得自成一類．所謂類者，其義如34．復觀71及73所論，任何關於數之定理，卽關於單純無窮由φ而序之物系N中原素n之定理，申言之，任何定理，其中所論未嘗涉及n之特性，僅對φ所產生之概念有所論斷者，必對於其他任何由θ而序之單純無窮物系Ω及其原素ν亦依然有效．不寧惟是，N之轉移於Ω(如算術定理由一種文字譯為別一種文字，亦為轉移之一)，可由132及133所述之攝影ψ實現之；考此攝影之用，卽將N中每一原素n變為Ω中之一原素ν，卽$\psi(n)$是已．如原素ν可謂Ω之第n個原素而n本身則為N之第n個數也．復次，φ對N中諸定理之意義，使每一原素n有一確定原素$\varphi(n)=n'$隨於其後，此種意義，彼由ψ實現之θ對Ω中諸定理亦具有之，卽由n所轉移之原素$\nu=\psi(n)$，必有由n'所轉移之原素$\theta(\nu)=\psi(n')$隨於其後．因此之故，吾人常謂φ由ψ而轉為θ，以公式表之，得$\theta=\psi\varphi\overline{\psi}$，$\varphi=\overline{\psi}\theta\psi$，明乎以上所述，可見73所論數之概念，自有其確切之理由．繼此以往，吾人對126之他種應用，將更有所論述．

11. 數之相加

135. 說明 據126所論，一單純無窮之物系 N 必有一攝影 ψ，使其與 Ω 發生關係如I, II, III三者所規定. 此 Ω 之物系，其中含有 $\psi(N)$ 者，未始不可作爲 N 本身. 苟試爲之，則 Ω 攝影於己之法則 θ 不必另有規定，卽以單純無窮物系 N 由 φ 而序之法則作爲 θ 可已. 惟如是，遂得 $\Omega=N, \theta(n)=\varphi(n)=n'$，又

$$\text{I.}\quad \psi(N)\prec N,$$

故欲求 ψ 之完全確定，但任意在 Ω 卽在 N 中選擇一原素 ω 卽可. 試擇 $\omega=1$，則所謂 ψ，卽爲 N 之本位攝影(21)，滿足如下之條件

$$\psi(1)=1,\ \psi(n')=[\psi(n)]',$$

故普遍言之，卽滿足 $\psi(n)=n$ 者是已. 由是以論，吾人苟欲得 N 之一其他攝影 ψ，必求一與1相異，換言之(根據78)，求一含於 N 之數 m' 作爲 ω 而後可，如 $\psi(1)=m'$，其中 m 本身則爲任何一數. 惟此攝影 ψ，顯然視 m 而定；因此之故，與任何一數 n 相應之影，卽 $\psi(n)$，吾人得以 $m+n$ 表之. 此 $\psi(n)$ 卽 $m+n$ 稱之爲 m 加 n 之和，或簡稱 m, n 兩數之和. 根據126，實完全由下列兩條件規定之(註四十七)：

註四十七 如是爲加法立一定義，可謂簡而易明. 如欲應用131所述之概念，則 $m+n$ 亦可由 $\varphi^n(m)$ 或 $\varphi^m(n)$ 規定之，其中 φ 之義，已如上述. 此兩定義之完全相同，不難概見；蓋名 $\varphi^n(m)$ 或 $\varphi^m(n)$ 爲 $\psi(n)$，可以證 $\psi(1)=m'$，$\psi(n')=\varphi\psi(n)$ 之必能成立也.

II. $m+1=m'$,

III. $m+n'=(m+n)'$.

136. 定理 $m'+n=m+n'$. 欲證之,可用普遍歸納法.蓋

ρ. 此定理當$n=1$時必眞,因據135 II

$$m'+1=(m')'=(m+1)',$$

復據135 III $(m+1)'=m+1'$故也.復次,

σ. 此定理對n若眞,試名隨於其後之數爲$n'=p$,則$m'+n=m+n'=m+p$,於是$(m'+n)'=(m+p)'$,由是據135 III得$m'+p=m+p'$,故此定理對p亦眞.

137. 定理 $m'+n=(m+n)'$.其理可由136及135 III推知之.

138. 定理 $1+n=n'$.欲證之,可用普遍歸納法.蓋

ρ. 此定理當$n=1$時根據135 II必眞.復次,

σ. 此定理對n若眞,試名$n'=p$,則$1+n=p$,於是$(1+n)'=p'$,由是根據135 III得$1+p=p'$,故此定理對隨n之後之數p亦眞.

139. 定理 $1+n=n+1$.由138及135 II可以見之.

140. 定理 $m+n=n+m$.欲證之,可用普遍歸納法.蓋

ρ. 此定理當$n=1$時據139必眞.復次,

σ. 此定理對n若眞,則$(m+n')=(n+m)'$,據135 III知$m+n'=n+m'$,由是復據136知$m+n'=n'+m$,故對隨n之後之數n'亦眞.

141. 定理 $(l+m)+n=l+(m+n)$. 欲證之,可用普遍歸納法.蓋

ρ. 此定理當$n=1$時必真,因據135 II, III, II可以推知$(l+m)+1=(l+m)'=l+m'=l+(m+1)$. 復次,

σ. 此定理對n若真,則$[(l+m)+n]'=[l+(m+n)]'$,由是(據135 III)得

$$(l+m)+n'=l+(m+n)'=l+(m+n'),$$

故此定理對n'亦真.

142. 定理 $m+n>m$. 欲證之,可用普遍歸納法.蓋

ρ. 此定理當$n=1$時根據135 II及91必真.復次,

σ. 苟此定理對n爲真,根據95對隨於其後之數n'亦必真,因(據135 III及91)

$$m+n'=(m+n)'>m+n,$$

是卽所欲證之理.

143. 定理 苟$m>a$,則$m+n>a+n$;其逆亦真.欲證之,可用普遍歸納法.蓋

ρ. 此定理當$n=1$時根據135 II及94必真.復次,

σ. 苟此定理對n爲真,則對隨於其後之數n'亦真,因$m+n>a+n$據94與$(m+n)'>(a+n)'$同義,因之根據135 III與

$$m+n'>a+n',$$

亦同義故也.

144. 定理 苟$m>a$, $n>b$, 則亦$m+n>a+b$. 蓋由143既知$m+n>a+n$及$n+a>b+a$, 復據140得知$a+n>a+b$, 於是$m+n>a+b$, 乃為95所必有之結果.

145. 定理 苟$m+n=a+n$, 則$m=a$. 何則, 苟m不$=a$, 據90必$m>a$或$m<a$, 於是據143必$m+n>a+n$或$m+n<a+n$, 故據90, $m+n$必不能$=a+n$矣.

146. 定理 苟$l>n$, 則必有一數且僅有一數m, 滿足$m+n=l$者. 欲證之, 可用普遍歸納法. 蓋

ρ. 此定理當$n=1$時必眞. 何則, 苟$l>1$則l據89必含於N', 故為一數m之影m'. 於是據135 II知$l=m+1$, 是卽所欲證之理. 復次,

σ. 苟此定理對n為眞, 則對隨於其後之n'亦眞. 何以言之. 苟$l>n'$, 據91及95必有$l>n$, 於是必有一數k者, 滿足$l=k+n$之條件. 惟此k據138旣不同於1(否則$l=n'$, 是為不可能), 故據78必為一數m之影m', 因之遂得$l=m'+n$, 故據136得$l=m+n'$, 是卽所欲證之理.

12. 數之相乘

147. 說明 觀於§11所論, 吾人旣由N新創攝影於己之法則而得一無窮物系之後, 復可根據126應用此新創者以創N之新攝影ψ. 試以$\Omega=N$, $\theta(n)=m+n=n+m$, 其中m為一確定之數, 則無論如何, 必有

$$\text{I.}\quad \psi(N) \prec N,$$

故欲求ψ之完全確定,但在N中任意選擇一原素ω卽可.求最簡易之選擇法,莫如使$\omega=m$. ψ之性質,必隨m而定.於是任何一數n之影$\psi(n)$,吾人以$m\times n$或$m\cdot n$或mn表之,並稱之謂m乘n之積或m, n兩數之積.根據126,實完全由如下兩條件得以規定之(註四十八):

II. $m\cdot 1=m$,

III. $mn'=mn+m$.

148. 定理 $m'n=mn+n$. 欲證之,可用普遍歸納法.蓋

ρ. 此定理當$n=1$時根據147 II及135 II必眞.

σ. 苟此定理對n爲眞,則

$$m'n+m'=(mn+n)+m';$$

由是(據147 III, 141, 140, 136, 141, 147 III)得

$$\begin{aligned} m'n' &= m'n+m'=(mn+n)+m' \\ &= mn+(n+m')=mn+(m'+n) \\ &= mn+(m+n')=(mn+m)+n' \\ &= mn'+n', \end{aligned}$$

故對n'亦眞.

149. 定理 $1\cdot n=n$. 欲證之,可用普遍歸納法.蓋

註四十八 既使$\Omega=N$, $\theta(n)=m+n=n+m$, 復擇$\omega=m$, 則ψ之性質得由$\psi(1)=m$, $\psi(n')=\theta\psi(n)$而定.然後應用$\psi(n)=m\cdot n$之符號,如$\psi(1)=m$可寫如$m\cdot 1=m$, $\psi(n')=\theta\psi(n)$可寫如$m\cdot n'=\theta(m\cdot n)=m\cdot n+m$.

ρ. 此定理當$n=1$時根據147 II必眞,

σ. 苟此定理對n爲眞,則$1\cdot n+1=n+1$,於是根據147 III及135 II知$1\cdot n'=n'$,故此定理對n'亦眞.

150. 定理 $mn=nm$.欲證之,可用普遍歸納法.蓋

ρ. 此定理當$n=1$時根據147 II及149必眞,

σ. 苟此定理對n爲眞,則

$$mn+m=nm+m,$$

由是據147 III及148知$mn'=n'm$,故此定理對n'亦眞.

151. 定理 $l(m+n)=lm+ln$.欲證之,可用普遍歸納法.因

ρ. 此定理當$n=1$時必眞,蓋由135 II, 147 III, 147 II可以知之.復次,

σ. 苟此定理對n爲眞,則

$$l(m+n)+l=(lm+ln)+l;$$

惟據147 III及135 III,

$$l(m+n)+l=l(m+n)'=l(m+n'),$$

復據141及147 III,

$$(lm+ln)+l=lm+(ln+l)=lm+ln',$$

故$l(m+n')=lm+ln'$.由是知此定理對n'亦眞.

152. 定理 $(m+n)l=ml+nl$.其理可由151及150推知之.

153. 定理 $(lm)n=l(mn)$.欲證之,可用普遍歸納法.蓋

ρ. 此定理當$n=1$時根據147 II必眞.復次,

σ. 苟此定理對n爲眞,則

$$(lm)n+lm=l(mn)+lm,$$

由是(據147 III, 151, 147 III)得

$$(lm)n'=l(mn+m)=l(mn'),$$

故此定理對n'亦眞.

154. 注意 倘在147中,不假定ω與θ之間有何關係而使$\omega=k$, $\theta(n)=m+n$,則據126, N將有一較緊之攝影ψ出現.於是$\psi(1)=k$,而對於其他具有n'形式之數將有$\psi(n')=mn+k$.惟如是,對一切n遂有$\psi(n')=\theta\psi(n)$,即$\psi(n')=m+\psi(n)$之成立,由前述諸理可以證之.

13. 數之冪

155. 說明 設仍取N作爲126中之Ω,復使$\omega=a$, $\theta(n)=an=na$,將更有N之一攝影ψ,滿足

$$\text{I.}\quad \psi(N)\prec N$$

之條件者;其中任何一數n之影$\psi(n)$吾人以a^n表之,並稱之謂a之冪而n則謂冪之指數.其義實由下列兩條件完全規定之(註四十九):

II. $a^1=a$,

III. $a^{n'}=aa^n=a^na$.

註四十九 既使$\Omega=N$, $\theta(n)=a\cdot n=na$,復擇$\omega=a$,則ψ將由$\psi(1)=a$, $\psi(n')=\theta\psi(n)$或$a^1=a$, $a^{n'}=\theta(a^n)=a\cdot a^n=a^n\cdot a$而定.

156. 定理 $a^{m+n}=a^m a^n$. 欲證之,可用普遍歸納法. 因

ρ. 此定理當 $n=1$ 時必眞,蓋由 135 II, 155 III, 155 II 可以見之. 復次,

σ. 苟此定理對 n 爲眞,則

$$a^{m+n}\cdot a=(a^m a^n)a,$$

惟據 155 III 及 135 III 知 $a^{m+n}\cdot a=a^{(m+n)'}=a^{m+n'}$, 復據 153 及 155 III 知 $(a^m\cdot a^n)a=a^m(a^n\cdot a)=a^m\cdot a^{n'}$, 故 $a^{m+n'}=a^m\cdot a^{n'}$, 換言之,此定理對 n' 亦眞,是卽所欲證之理.

157. 定理 $(a^m)^n=a^{mn}$. 欲證之,可用普遍歸納法. 因

ρ. 此定理當 $n=1$ 時必眞,蓋由 155 II 及 147 II 可以見之. 復次,

ρ. 苟此定理對 n 爲眞,則

$$(a^m)^n\cdot a^m=a^{mn}\cdot a^m,$$

惟據 155 III, $(a^m)^n\cdot a^m=(a^m)^{n'}$, 復據 156 及 147 III 知 $a^{mn}\cdot a^m=a^{mn+m}=a^{mn'}$, 故 $(a^m)^{n'}=a^{mn'}$, 換言之,此定理對 n' 亦眞,是卽所欲證之理.

158. 定理 $(ab)^n=a^n b^n$. 欲證之,可用普遍歸納法. 蓋

ρ. 此定理當 $n=1$ 時根據 155 II 必眞. 復次,

σ. 此定理對 n 若眞. 則據 150, 153 及 155 III 可以推知 $(ab)^n\cdot a=a(a^n b^n)=(a\cdot a^n)b^n=a^{n'}b^n$, 由是得 $[(ab)^n\cdot a]b=(a^{n'}b^n)b$. 惟據 153 及 155 III 得 $[(ab)^n\cdot a]b=(ab)^n(ab)=(ab)^{n'}$. 又

$$(a^{n'}\cdot b^n)b=a^{n'}(b^n\cdot b)=a^{n'}b^{n'},$$

於是遂得 $(ab)^n=a^{n'}\cdot b^{n'}$, 故此定理對 n' 亦眞.

14. 有窮物系之基數

159. 定理 苟Σ爲一無窮物系，則98所論之任何Z_n必可相似攝影於Σ之一分系．此定理之逆亦眞．

茲證之如次．苟Σ爲無窮，據72自必有一分系T爲單純無窮，故據132必與數列N相似．惟如是，吾人遂得由35以知任何物系Z_n，旣爲N之分系，必能與T之一分系，因之亦能與Σ之一分系相似；是卽所欲證之理．

其逆雖顯，然欲證之，其事較繁．苟任何Z_n能相似攝影於Σ，其意卽謂不論n之爲何數，必有Z_n之一相似攝影α_n如$\alpha_n(Z_n)\prec\Sigma$．此種α_n之存在，爲吾人所假定，惟其性質如何，未嘗有所限制．因此之故，吾人得據126，加以相當條件以創如下之攝影ψ_n．凡m之不大於n者，換言之$m\leqq n$，卽$Z_m\prec Z_n$之時（據100），其攝影ψ_m均與ψ_n相同．於是遂有

$$\psi_m(m)=\psi_n(m),$$

其中m爲Z_m中任何一數．欲應用126以應吾人之需要，可設想Ω爲一物系，其中原素乃一切可能之相似攝影，將一切Z_n攝影於Σ者所合成者；然後求助於α_n——此種α_n自必含於Ω之中——以規定Ω攝影於己之一法則θ如下．試名β爲Ω之一原素，例如一確定Z_n攝影於Σ之一相似法則．如是$\alpha_{n'}(Z_{n'})$決非$\beta(Z_n)$之一分系，蓋否則$Z_{n'}$據35將與Z_n之一分系相似，因之據107將與其本身之一眞分系相似；倘如是則$Z_{n'}$將爲

無窮，是與119相矛盾矣．因此之故，$Z_{n'}$中必有一數或不同之數如p者，使$\alpha_{n'}(p)$不能含於$\beta(Z_n)$．明乎是，吾人可由此種p中擇一最小者如k(據96)，復因$Z_{n'}$爲Z_n及n'所合成(據108)，可創一$Z_{n'}$之攝影如γ，使一切含於Z_n之數m均有$\gamma(m)=(\beta m)$之影，此外更有$\gamma(n')=\alpha_{n'}(k)$之成立．如是之攝影$\gamma$顯然爲一相似攝影無疑．吾人以是作爲$\beta$之影$\theta(\beta)$，遂得一$\Omega$攝影於己之法則$\theta$．旣將126中所必需之$\Omega$及$\theta$確定之後，更取$\alpha_1$作爲$\Omega$之$\omega$，如是則126中所論之$\psi(N)\prec\Omega$得以完全規定．爲簡明之故，若以$\psi_n$表任何一數$n$之影$\psi(n)$，自必有如下兩條件

II. $\psi_1=\alpha_1$,

III. $\psi_{n'}=\theta(\psi_n)$,

之成立．吾人由普遍歸納法不難認識此ψ_n爲Z_n攝影於Σ之一相似法則．蓋

ρ. 此在$n=1$時根據II必眞．復次，

σ. 苟此對n亦眞，根據III，並觀於θ如何由β以至γ之法則可知其對n'亦眞．更有進者，吾人由普遍歸納法得以證明，苟m爲任何一數，則一切n之$\geqq m$者均具有上述之性質

$$\psi_n(m)=\psi_m(m),$$

因之根據93及74必屬於連系m_0；蓋

ρ. 此在$n=m$時爲眞，至爲顯然．又

σ. n如具有此性質，由III及θ之組織法可知n'亦具有此性質．旣證此新創之ψ_n有此特性之後，遂可進而證明吾

人所欲證之定理. 吾人試爲N創一如是之攝影μ, 使$\mu(n)=\psi_n(n)$與每一數n相應. 於是上述之ψ_n自一一含於μ之中. 惟ψ_n之用, 乃使Z_n攝影於Σ, 因之N必由μ攝影於Σ, 換言之, $\mu(N)\prec\Sigma$. 茍m, n爲兩不同之數, 試假定$m<n$, 則據前所論, $\mu(m)=\psi_m(m)=\psi_n(m)\mu$ 及 $(n)=\psi_n(n)$. 惟ψ_n之攝Z_n於Σ, 既爲相似; m, n爲Z_n兩不同之數, 故$\psi_n(m)$與$\psi_n(n)$必不相同. 因此$\mu(m)$與$\mu(n)$亦不相同; 換言之, μ爲N之一相似攝影. 然N之爲無窮, 已如71所論, 因之據67知與之相似之$\mu(N)$亦必無窮. 復因$\mu(N)$爲Σ之分系, 據68遂知Σ之無窮, 是卽所欲證之理.

160. 定理 一物系Σ之爲有窮或無窮, 視有無一與之相似之Z_n而定.

何以證之. 茍Σ爲有窮, 則據159必有物系Z_n, 不能相似攝影於Σ. 惟據102所論, Z_1之中僅含唯一之數1, 故可相似攝影於任何物系. 由是以論, 凡不能相似攝影於Σ之Z_k, 其中最小數k必與1相異, 因之必$=n'$ (據78). 復因, $n<n'$之故 (據91), 必有一相似之ψ, 將Z_n攝影於Σ. 何則, 倘$\psi(Z_n)$爲Σ之一眞分系, 勢將有一Σ之原素α, 未含於$\psi(Z_n)$之中; 如是則因$Z_{n'}=\mathfrak{M}(Z_n, n')$之故 (據108), 加入$\psi(n')=\alpha$之條件, 得將$\psi$擴張其用, 將$Z_{n'}$相似攝影於$\Sigma$, 與吾人之假定卽$Z_{n'}$未能相似攝影於$\Sigma$者適相矛盾. 於是可見$\psi(Z_n)=\Sigma$, 換言之, Z_n與Σ爲相似物系. 反之, 茍Σ與Z_n相似, 則Σ據119及67必爲有窮, 是卽所欲證之理.

161. 說明　苟Σ爲一有窮物系,據160必有一數n,又據120及33必僅有一數n之存在,使與n對應者有一與Σ相似之物系Z_n;此n卽爲原素之個數,含於Σ之中者.吾人常謂Σ含有n個原素之物系,或謂n者,卽用以表示Σ中果含有若干原素.凡數之用以精密表識有窮物系之此種特性者亦稱基數.要而論之,如有Z_n之一確定相似撰影ψ,遂是而得$\psi(Z_n)=\Sigma$,則含於Z_n中任何一數m(卽任何m,$\leqq n$者)必有Σ中一確定原素$\psi(m)$與之相應;反之,根據26所述,Σ中任何原素,必由$\overline{\psi}$而得Z中之一確定原素與之相應.吾人常將Σ中一切原素由一個字母如a者表而達之,其中不同之數m則另用下標以識之,如$\psi(m)$常代以a_m之符號.惟如是,吾人常謂此種原素由ψ而得相當之序次,a_m因稱之爲Σ中第m個原素.若$m<n$,則$a_{m'}$謂隨於a_m之後之原素,m亦稱最後原素.循是以序次原素,m實同時具有序數之功用(見73).

162. 定理　凡與一有窮物系相似之物系,其中原素之個數相同.其理由33及161可以見之.

163. 定理　含於Z_n中之個數,卽$\leqq n$之數共有n個.蓋據32,Z_n實與本身相似故也.

164. 定理　苟一物系僅含一原素,則其中原素之個數$=1$.其逆亦眞.此理由2,26,32,102,161可以識之.

165. 定理　苟T爲一有窮物系Σ之眞分系,則T所含原素之個數,必小於Σ所含原素之個數或卽爲Σ所含原素

之個數.

其證如次.據68知T必爲一有窮物系,故與Z_m相似,m即爲T所含原數之個數.復次,苟n爲Σ所含原素之個數,換言之,Σ與Z_n相似,則T據35必與Z_n之一眞分系E相似,故據33,Z_m與E相似.倘$n\leqq m$,換言之,$Z_n \prec Z_m$,則E據7將爲Z_m之眞分系,於是Z_m將爲無窮,是與119適相矛盾;故據90必$m<n$而後可,是卽所欲證之理.

166. 定理 設有$\Gamma=\mathfrak{M}(B,\gamma)$,其中$B$爲$n$個原素所成之物系,$\gamma$爲一含於$\Gamma$而不含於$B$之原素,則$\Gamma$必含有$n'$個原素.

何以證之.若$B=\psi(Z_n)$,其中ψ爲Z_n之一相似攝影,吾人得據105及108以創$Z_{n'}$之一相似攝影,其道無他,使$\psi(n')=\gamma$可已.於是$\psi(Z_{n'})=\Gamma$,是卽所欲證之理.

167. 定理 苟γ爲Γ之一原素,其中共有n'個原素者,則Γ中其他原素之個數必爲n.

何以證之.試名B爲Γ中之一切原素異於γ者,則$\Gamma=\mathfrak{M}(B,\gamma)$.苟$b$爲有窮物系$B$所含原素之個數,據前證之理,$b'$必爲$\Gamma$所含原素之個數,故$=n'$.由是據26知$b=n$,是卽所欲證之理.

168. 定理 苟A含m個原素,B含n個原素,A,B兩者復無公原素,則$\mathfrak{M}(A,B)$必含$m+n$個原素.

欲證之,可用普遍歸納法.因

ρ. 此定理當$n=1$時必眞.蓋由166, 164, 135 II可以知之.復次,

σ. 苟此定理對n爲眞,則對n'亦眞.何則,苟Γ爲n'個原素所成之物系,據167可使$\Gamma=M(B,\gamma)$,其中γ爲Γ之一原素,B爲Γ之其他n個原素所成.苟A爲m個原素所成之物系,其中每一原素均未含於Γ,因之亦未含於B,吾人遂得使$M(A,B)=\Sigma$,於是根據假定可知$m+n$實爲Σ所含原素之個數.惟因γ未含於Σ之故,遂得據166以知$M(\Sigma,\gamma)$所含之個數爲$=(m+n)'$,或(據135 III)$=m+n'$.復據15,知$M(\Sigma,\gamma)=M(A,B,\gamma)=M(A,\Gamma)$故$M(A,\Gamma)$所含原素之個數爲$m+n'$,是卽所欲證之理.

169. 定理 苟A,B爲含有m及n個原素之兩有窮物系,則$M(A,B)$亦爲有窮,其中原素之個數爲$\leqq m+n$.

何以證之.苟$B\prec A$,則$M(A,B)=A$,於是其中原素之個數m據142自必$\leqq m+n$.苟B未爲A之分系,試名T爲B之原素未含於A者,其個數p據165所論必$\leqq n$.復因

$$M(A,B)=M(A,T)$$

之故,得據143以知其中原素之個數$m+p\leqq m+n$,是卽所欲證之理.

170. 定理 任何n個有窮物系相合而成之物系亦爲有窮.欲證之,可用普遍歸納法.因

ρ. 此定理當$n=1$時爲眞,至爲顯然.

σ. 苟此定理對n爲眞,試假定Σ爲n'個有窮物系相合而成,A爲其中之一系,B爲其餘諸系相合而成.據167 B所含物系之個數旣爲n,遂得據假定知其爲有窮.復因$\Sigma=\mathfrak{M}(A,B)$之故,得由是根據169以知Σ必爲一有窮物系.

171. 定理 苟Σ爲一有窮物系,其中含n個原素,ψ爲其不相似之一攝影.則$\psi(\Sigma)$所含之個數必小於n.

何以證之.因ψ之不相似,吾人可就Σ中之原素,其影相同者,任意選出其一;將此種種相聚而成一系T,其必爲Σ之一眞分系,可以斷言.同時復知T之攝影,合於ψ者爲一相似攝影,又$\psi(T)=\psi(\Sigma)$,故$\psi(\Sigma)$實與Σ之眞分系T相似,由是據162及165可以推知欲證之理.

172. 結語 據171所證,$\psi(\Sigma)$所含之個數m小於Σ所含之個數n.惟世人常喜稱$\psi(\Sigma)$所含之個數亦爲n者;其故由於通俗所用個數之義與161所述微有不同.如α爲Σ之一原素,復假定Σ中之原素,其影同爲$\psi(\alpha)$者,共有a個;於是$\psi(\alpha)$之在$\psi(\Sigma)$常視爲a個原素之代表,蓋論其起源,確可認爲a個不相同之原素;因此之故,遂以$\psi(\Sigma)$之a重原素稱之.如是更有所謂重原素之概念;其系中之某重原素者,卽告人以此原素在此系中果計數若干次是已.就如上之例而論,可知根據此義,n實爲$\psi(\Sigma)$中所含原素之個數,而m則所以表示系中彼此相異之原素,其個數適與T之所含同.所基之概念不同,持理立論自亦隨之而異,此在數學中固數見不鮮,本文中擬不加詳論.

中華民國參拾年七月

中華民國二十九年十二月初版

(58558)

漢譯世界名著 實數探原 一冊

Two Essays on the Concept of Numbers

每冊實價國幣陸角

外埠酌加運費匯費

原著者 Richard Dedekind

譯註者 朱言鈞

發行人 王雲五 長沙南正路

印刷所 商務印書館

發行所 商務印書館 各埠

H一七五二上