職業教科書委員會審查通過

幾何三角

范慶涵編著

商務印書館發行

職業學校教科書

幾何三角

范慶涵編著

商務印書館發行

職業學校教科書委員會委員

（以姓名四角號碼爲序）

唐凌閣	唐雄伯	唐志才	章之汶
譚勤餘	王雲五	賈佛如	何清儒
朱博泉	魏元光	吳福禎	潘序倫
李壽恆	蘇繼廎	葛敬中	葛成慧
黃任之	黃紹緒	黃質夫	林美衍
陳　意	陳朱碧輝	周盛唐	周昌壽
鍾道贊	鄭西谷		

編印職業教科書緣起

我國中等教育，從前側重於學生之升學。但事實上能升學者，究佔少數；大部分不能不從事職業。故現在中等教育之方針，已有漸重職業教育之趨勢。近年教育部除督促各省市教育行政機關擴充中等職教經費，並撥款補助公私立優良職業學校，以資鼓勵外，對於各類職業學校之教學，亦擬有改進辦法。其最重要者，爲向各省市職業學校徵集各科自編講義，擇尤刊印教本，供各學校之採用。先後徵得講義二百餘種，委託敝館組織職業教科書委員會，以便甄選印行。敝館編印中小學各級教科書，已歷多年，近復編印大學叢書，供大學教科參考之用。關於職業學校教科書，亦曾陸續出版多種，並擬有通盤整理之計畫。自奉教育部委託，即提前積極進行。經於二十五年春，聘請全國職業教育專家及著名職業學校校長組織職業學校教科書委員會。該會成立後，一面參照教育部印行之職業學校課程表及教材大綱，釐訂簡明目錄，以便各學校之查

考；一面分科審查教育部徵集之講義及敝館已出未出之書稿。一年以來，賴各委員之熱忱贊助，初審複審工作，勉告完成。計教育部徵集之講義，經委員會選定最優者約達百種，自廿六年秋季起，陸續整理印製出版。本館已出各書，則按照審查意見澈底修訂，務臻妥善；其尚未出版者，亦設法徵求佳稿，以求完備。委員會又建議，職業學校之普通學科，內容及分量，均與普通中學不同，亟應於職業學科外，編輯普通學科教本，以應各校教學上之迫切需要。敝館謹依委員會意見，聘請富有教學及編著經驗之專家，分別擔任撰述。每一學科，並分編教本數種，俾各學校得按設科性質，自由選用。惟我國各省職業環境不同，課程科目亦復繁多，編印之教科書，如何方能適應各地需要，如何方能增進教學效率，非與各省實際從事職業教育者通力合作不爲功 尙祈全國職業教育專家暨職業學校教師，賜以高見，俾敝館有所遵循，隨時改進。無任企幸之至。

中華民國二十六年七月一日　王雲五

緒　言

數學一科，在我們日常生活上，他的重要程度，是任何人所知道的，自不用再來多講．實在說起來，數學的必要程度，是和文化的發達成爲比例，尤其對於像農工商等，以有形事物當做對象的科學，更可以說是無一時一刻可以離他．

本書於講述中等數學的原理以外，更兼提出關於實業教育上必要諸現象的實際問題．解說此等問題時，力求以數學的方法來處理他，使他和其他學科有密接的聯絡，除去從來數學教科書易於感覺到無味乾燥的缺點，俾學者發生興趣，於不知不覺之間，領悟原理和他的應用．

本書於編輯上，特別注意的數點如下：

1．融合幾何(平面，立體)及三角法，把他們分配在適當的地段，除喚起學者的興趣外，更期啓發其在實際社會上的活用及對於自然界正確的理解．

2．從來的幾何學教科書，開始就講述許多抽象的概念，繁雜的理論，頗使學者一時難以領悟．本書爲避免此等缺點起見，最初專以直觀和實測爲主，漸次引導入於論理的方法．關於定理

和其他的說明解法,務期能以發揮學者的悟性爲目的.

3. 推論力求減少至最低限度,其次要者,編入習題中.

4. 力求避免艱深難解的問題,免使學者易生厭倦,并儘量將有關於社會價值的問題選擇編入.

對於姊妹篇(算術,代數)的聯絡,也特別加意考慮過.

目　　錄

幾何三角

第一章

簡單的圖形

[線和角]

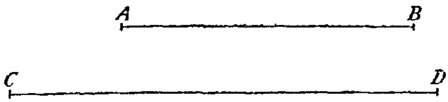
1. 幾何學

像花瓶,桌子,書籍等等有形狀和大小的物體,叫做**立體**.立體是拿**面**來做他的界限.像桌子,牆壁,黑板等等的面,是平坦的面,這叫做**平面**.

量土地大小的時候,土地的好壞,可以不用管他;定書箱大小的時候,應當用什麼樣的木材?可以不必問他,同這個一樣的道理,研究幾何學的時候,只研究物體的大小,形狀和他的位置,其餘的一切,我們都不去研究.

2. 量線的方法

我們用尺從 A 量到 B, 或是從 C 量到 D, 像這樣量兩點間距離的方法,換句話來說, 就是量直線的長的方法, 可說是無人不知,無人不曉,可是所用的單位,假如是寸的時候,直線 AB

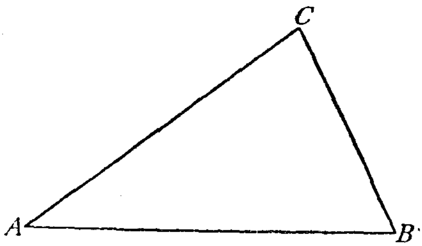


和 CD, 各有多少長?假如單位用釐米,又怎麼樣?或者單位用米,英尺等等,又當怎樣?

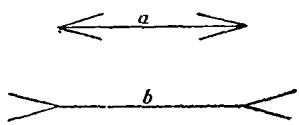
所用的單位,假如不同,那麼所量出來的數目,也就不同了.

習題

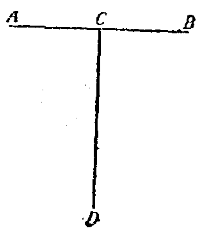
1. 下面三角形的 AB, BC, CA 各有多少長?



2. a 直線和 b 直線,看起來,那一條較長?試用尺量一下,看到底怎樣?

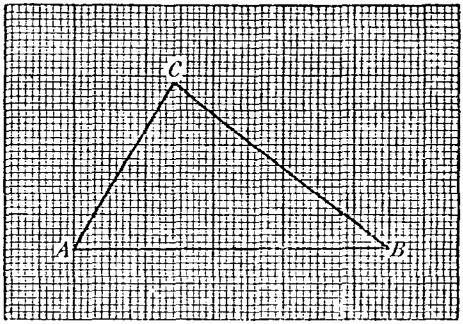


3. AB 直線和 CD 直線,看起來相差多少?又實際量出來的結果怎樣?



4. 下面方格紙的粗線的距離是一釐米,間用釐米做單位的時候,AB 的長是多少?假如用 $\frac{1}{5}$ 釐米做單位,又是多少?

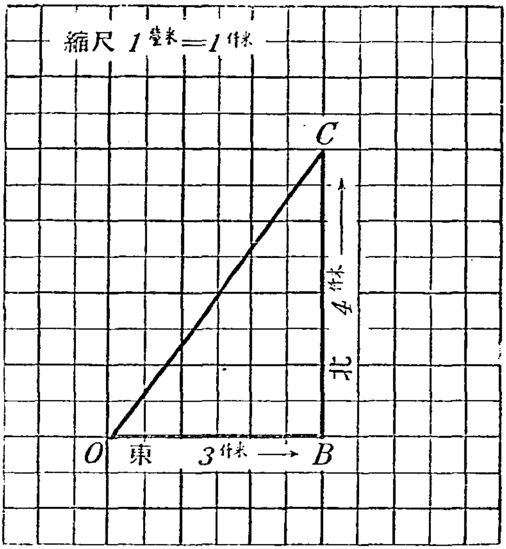
用圓規量 AC 或 BC 的長的時候,問怎樣纔能夠知道他們的數目?試用這個方法,求出他們的長.



5. 一人從某地向東走了三里以後,又向北走四里.問他這時離開出發地有多少遠?

[解] 在方格紙上畫一個縮圖,就可量出他的距離來.

(1) 假定 O 是出發的地點,從 O 向右當做東,從 O 向上當做北.



(2) 因爲要去量他的

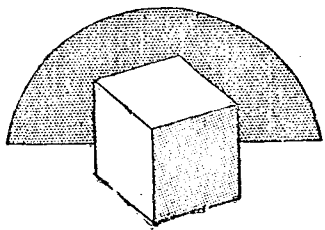
實際的距離,所以非用縮圖不可. 今在縮圖上,用一釐米的長來代表一仟米的距離(這叫做縮尺,縮尺的單位,不必一定是用釐米,只要看那種方便,就用那一種),所用的縮尺,一定要在圖上標明出來.

(3) 在圖上,畫 $OB=3$ 仟米, $BC=4$ 仟米,則從 O 到 C 的長 OC,就是所求的距離了.在圖上量 OC 的長是 5 釐米,所以實際的距離是 5 仟米.

6. 用 1/2 釐米作爲一米的縮尺.試把教室裏面地面的大小,用圖畫出來.并且把窗戶,講臺和門等等的位置也畫出來,假使能夠的話.

7. 甲乙二人,乘脚踏車從同一地點出發,甲向北走了 20 仟米以後,又轉向東走 14 仟米.乙向南走了 16 仟米以後,又轉向西走 10 仟米.問兩人相隔多少遠?

3. 面 線 點 圖形



面有位置,長短和寬狹,卻沒有厚薄.

線只有位置和長短,沒有寬狹和厚薄.

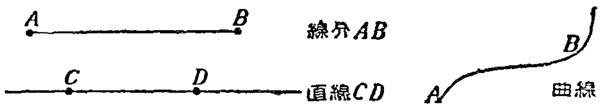
點只有位置,沒有長短,也沒有寬狹和厚薄.

面的界限，或是面和面交界的地方是線．線的界限或是兩個線相交的地方是點．

直線(換句話來說，就是筆直的線)是當做兩端無限長的線．用兩點來限制直線的一部分的長，叫做線段，或叫做有限直線．對於有限直線，凡是無限長的線，叫做無限直線．

無論那一部分，都不是直線的線，叫做曲線．

立體，面，線，點，或是他們所集合成的東西，叫做圖形．在一個平面上的圖形，叫做平面圖形．

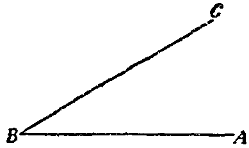


4. 角

相交於一點的兩條直線所做成的圖形，叫做角．

直線 AB 和 BC 叫做角的邊，兩邊相交的一點 B，叫做頂點．

記號 $\angle$，用來代表“角”字．

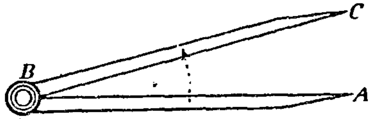


例如 $\angle ABC$，或是 $\angle CBA$；或是 $\angle B$.

5. 角的大小．

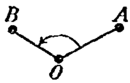
在一條固定直線 BA 上面的一定點 B 的周圍，迴轉另一條直線 CB，那麼 BA 和 BC 就做成一個角．BC 越向前迴轉，

那麼所成的角,就越大了.



角的大小,是一直線在另一直線上一定點的周圍迴轉的分量,所以角和兩邊的長,是絲毫沒有關係的.

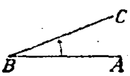
甲乙二人,從同一地點向不同的方向前進的時候,在一定時間內,他們所隔開距離的遠近,是和他們原來方向相差的大小(就是角的大小)很有關係的,角越大,那麼相隔的距離就越大;可是,如果時間非常的長久,雖然他們的方向很接近,結果相隔的距離,仍然可以極遠;假如時間很短,那麼雖然相差的方向很大,相隔的距離,也就不大了.



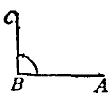
6. 角的名稱

迴轉的分量,小於一迴轉的四分之一的時候的角,叫做銳角;等於一迴轉的四分之一的時候的角,叫做直角;大於一迴轉的四分之一而小於半迴轉時候的角,叫做鈍角;等於半迴轉時候的角,叫做平角.

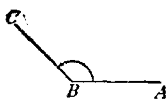
平面的二邊成一直線.



銳角



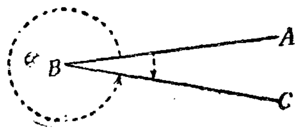
直角



鈍角

平角

像下面的圖形,把 BA 迴轉到 BC 的位置的時候,有兩種不同的方法.所以



從一點向外面到二直線的時候,一定總是做成兩個角. 這兩個角,互相叫做共軛角,其中大的一個,叫做優角,小的叫做劣角.

寫做 $\angle ABC$ 的時候,通常是指劣角.

習　題

1. 筆直插在地上的木桿,和他的影子所成的角,是個什麼角?

2. 在教室的裏面,有銳角,鈍角,直角的地方沒有? 把他們指出來.

3. 試把一張紙疊成直角.

7. 量角的方法

直角的 1/90, 叫做度,通常就是把這個當做角的單位.一度的 1/60, 叫做分,一分的 1/60 叫做秒.

直角=90 度,平角=2 直角=180 度.

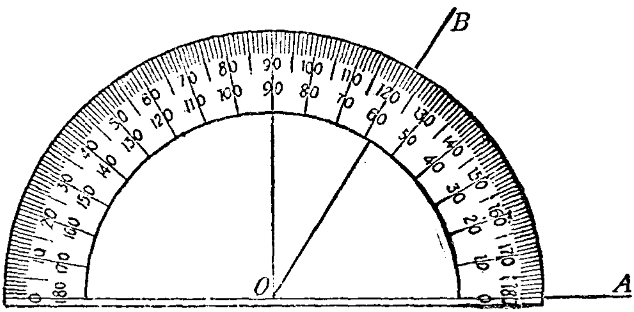
恰好一迴轉所畫的角,是 4 直角,那就是 $360°$.

15 度 25 分 12 秒的角,寫做 $15°\,25'\,12''$.

量角的大小,用分度規.分度規是在一個圓形的周圍,刻有分割線的物件,通常,把他的半圓周分做 180 等分,每一分割線和中心 O 連結起來,就成爲 180 度.但是也有把全圓的圓周,分做 360 等分而刻有度數的分度規.

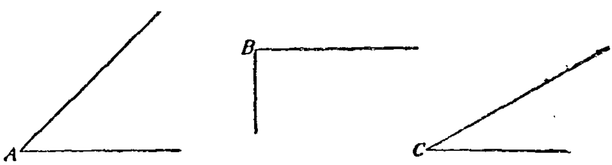
下面的圖,是指示量角的方法:把分度規的中心,重疊在角的頂點 O 上,再把刻有零度的線,重疊在角的一邊上,那麼和角的另一邊相重的地方的刻度,就是角的大小了.

$\angle AOB=?$



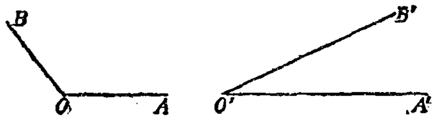
習　題

1. 試用分度規,把下面的三個角量出來.



2. 試比較 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 諸角的大小.那個角的邊較長?邊的長短和角的大小有什麼關係?

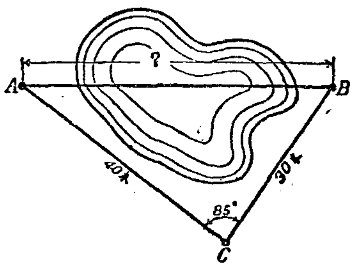
3. 試量出右圖的角度幷 AB 和 $A'B'$ 的距離. AB 或是 $A'B'$ 的距離,和角的大小有什麼關係?



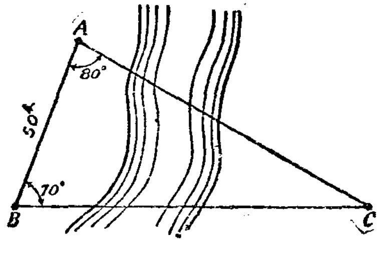
4. 試用分度規,畫 30°, 45°, 60°, 90° 等等的角.

[這幾種角,務必要練習,用目力去畫他]

5. 在 12 釐米長的線段的兩端,各作 50° 的角,畫兩條線相交於一點,試量出這兩線所成的角.試比較所畫的兩條線的長短.又,三個角加起來,是多少度?



6. A 地和 B 地的中間,有一水池,他的距離,不能直接量出,現在從 A 量到 C,是 40 米,從 C 量到 B 是 30 米,量得 C 角是 85°. 試用縮圖求出 AB 的距離.



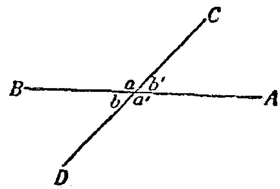
7 AC 兩地,中隔一

河,試用縮圖把他的距離求出來.

[兩個角的名稱]

8. 對頂角

畫 AB 和 CD 相交的兩條直線,則 a 角和 a' 角,或是 b 角和 b' 角,叫做對頂角.

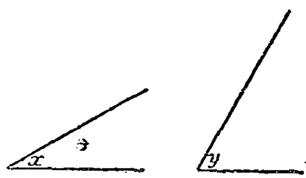


試把 $\angle a$ 和 $\angle a'$ 及 $\angle b$ 和 $\angle b'$ 的大小量出來比較一下.

凡是對頂角都是相等的.

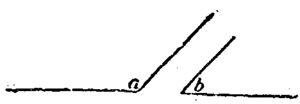
9. 餘角 補角

把右圖的 x 角和 y 角加起來,看是多少?



兩個角加起來是 90° 的時候(就是一直角的時候), 每一個角,叫做另一個角的餘角.

右圖的 $\angle a$ 和 $\angle b$ 加起來,是多少?



兩角相加的和是 180° 的時候(就是一個平角的時候),每一個角,叫做另一個角的補角.

習　題

1. 下面的每個角的餘角是多少?

$30°, 45°, 20°, 54° 20', 70° 18' 34''$.

2. 下面的每個角的補角是多少?

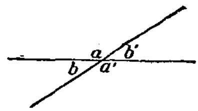
$15°, 50°, 88°, 120°, 142°, 98° 14'$.

3. 假使 $\angle a$ 是 $18°$ 的餘角,試用式子把他表示出來.

4. a 和 b 是互爲補角,試用式子把他表示出來.

5. 試把直角分做兩份,使這一份是那一份的三分之二.

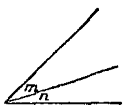
6. 互爲補角的兩個角,知道其中的一個角比另一個角小 $98°$. 問這兩個角各是多少?

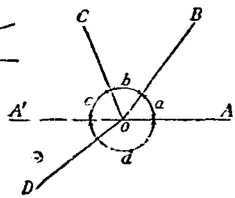


7. 說明對頂角所以相等的道理來,但是不許用分度規去量他.

10. 鄰角

兩個角的頂點和一邊是共通,并且另外的邊,分開在共通邊的兩旁. 像這樣的兩個角,叫做鄰角.





$\angle m$ 和 $\angle n$ 或是 $\angle a$ 和 $\angle b$, 都是鄰角.

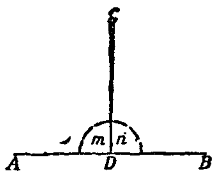
延長 AO, 成一直線 AA',

那麼就做成兩個平角,因此:

(1) 從一點畫出許多直線所做成全體的鄰角的和,等於4直角.

(2) 從一直線上的一點,在同一方面所畫出許多的直線和原來直線所做成的鄰角的和,等於2直角.

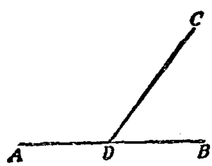
11. 垂線和斜線



兩直線相交,做成相等的鄰角的時候,這兩條直線叫做互相垂直,或叫做互相直交.

這個時候,這一直線叫做那一直線的垂線.他們相遇着的一點,叫做垂線的足,或叫做垂足.

圖中的 AB 和 CD,是互相垂直.CD 是 AB 的垂線,通常寫做 $CD \perp AB$.



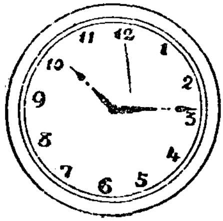
相交的兩條直線不垂直的時候,叫做互相斜交.

這個時候,這一直線叫做那一直線的斜線.

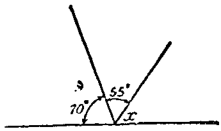
習　題

1. 南和東北所成的角,向東迴轉,是多少度?是多少直角?

若是向西迴轉，又是多少度？是多少直角？

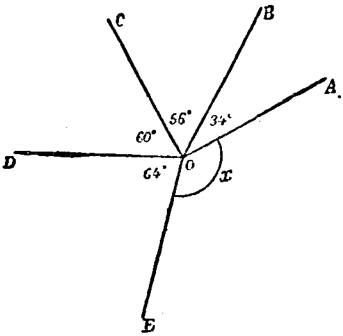


2. 鐘錶的長針（分針），一點鐘迴轉幾度？15 分鐘是幾度？一分鐘又是多少度？短針（時針）一點鐘迴轉幾度？



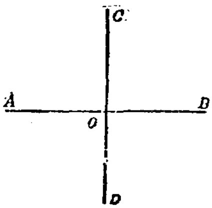
3. 右圖的 $\angle x$，是多少度？

4. 下圖的 $\angle x$，是多少度？



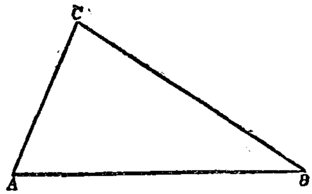
這五條線段的裏面，有沒有成直角的兩條線段？

5. 兩直線相交所做成的四個角，其中如果有一個角是直角，則其餘的三個角，也都是直角了．試把他的理由說明出來．



[三 角 形]

12. 三角形的角的和



三條線段所包圍的圖形，叫做三角形.

三角形的記號用 $\triangle$.

照 $\triangle ABC$ 的樣式，畫一個任意的三角形，精密的量出他的三個角的大小來，看看全體加起來是多少度？

若用式子表示出來，就是 $\angle A+\angle B+\angle C=?$

三角形的三個角的和是 180°.

習 題

1. 畫一個三角形，使他的兩個角，一個是 38°，一個是 54°.

2. 三角形中的第一個角，是第二個角的 3 倍，第三個角是第二個角的 6 倍.問每一個角是多少度？

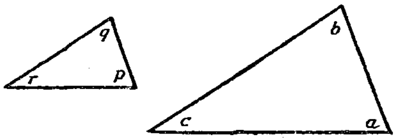
3. 三角形中，有一個角是直角的時候，其餘的兩個角，就互爲餘角.試把他的理由說明出來.

4. 畫一個三角形，使他的兩個角相等，并且把這相等的兩個角所對的兩個邊量出來比較一下.

5. 畫一個三角形，使他的兩個角，一個是 30°，一個是 90°.

問 90° 所對的邊比 30° 所對的邊大多少倍?試用尺量出來,比較一下.

6. 一個三角形中的兩個角,若和另一個三角形中的兩個角各各相等,則其餘的一個角,也就相等.試把他的理由說明出來.



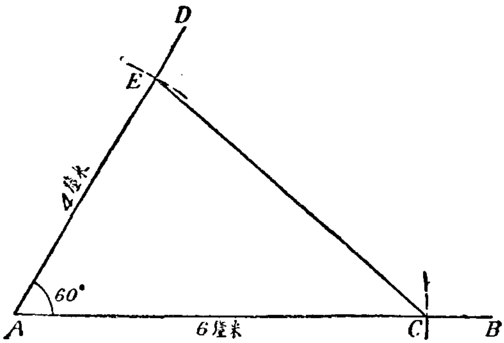
$$\text{假定}\begin{cases}\angle a=\angle p,\\ \angle b=\angle q.\end{cases}$$

13. 知道三角形的兩個邊,和這兩個邊所夾的角(夾角),畫三角形的方法

假定夾角是 60°,兩邊的長,一個是 6 釐米,一個是 4 釐米.

畫一直線 AB,在他的上面,取 AC 等於 6 釐米.

用分度規畫$\angle BAD=60°$.



在 AD 的上面,取 $AE=4$ 釐米.

把 E 和 C 連結起來,那麼 $\triangle AEC$ 就是所求的三角形了.

像這樣畫的三角形,如果非常正確的話,多畫幾個把他們裁下重疊放起來,一定是完全一致.試練習一下.

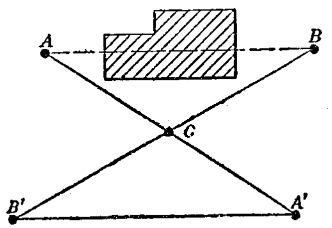
14. 全等三角形

凡是能夠完全一致的三角形,叫做**全等三角形**.

由上節的練習,得到下面的重要事項:

兩個邊和他的夾角各各相等的兩個三角形,是全等三角形.

應用這個原理,可以求出未知的距離.



假如 AB 之間,有某種障礙物,不能直接量出他的距離來的時候,我們可以應用上面的原理,照下面的方法去求他.

任意選一個適當的一點 C,通過 C 點和 A 點,畫直線 AA',作 $A'C=AC$; 通過 C 點和 B 點,畫直線 BB',作 $B'C=BC$.

連結 B', A' 兩點,那麼量出 $A'B'$ 的長,就是所求的 AB 的距離了. [何故?]

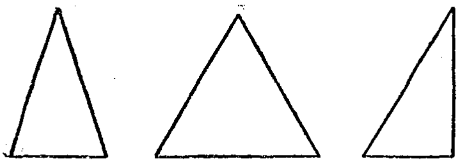
表示 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 全等的記號是:

$$\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'.$$

15. 二等邊三角形 等邊三角形 直角三角形

(定義) 兩條邊相等的三角形,叫做**二等邊三角形**,或叫做**等腰三角形**,相等的二邊所夾的角,叫做**頂角**,其他的兩個角,叫做**底角**,相等的邊以外的一個邊,叫做**底邊**.

三條邊都相等的三角形,叫做**等邊三角形**.

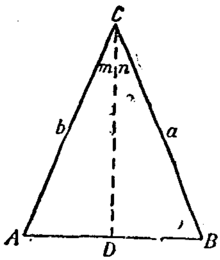


有一個角是直角的三角形,叫做**直角三角形**,和直角相對的一個邊,叫做**斜邊**.

16. 定理 二等邊三角形的兩底角,必定相等.

設$\triangle ABC$的兩邊a和b相等,那麽$\angle A$和$\angle B$必相等.他的理由是這樣:

把$\angle C$分爲二等分(就是使$\angle m=\angle n$),作一直線CD(叫做$\angle C$的二等分線).那麽由14節的原理,就知道$\triangle ADC\equiv\triangle BDC$,所以他們的對應角(或叫做相當角)$\angle A$和$\angle B$,也就相等了.



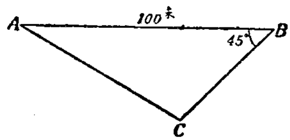
17. 定義和定理

用語言來說明一個名詞的特性,使他的意義和其他的名詞不相混合,這種語言,叫做**定義**.

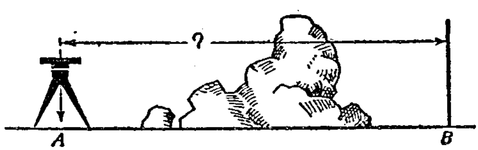
由定義和已經承認是正確的事項等等,依推理而知爲正確的事實,叫做**定理**.

習　題

1. 已知 $AB=100$ 米, $\angle B=45°$. 問能作一個三角形的縮圖否?



2. 從 A 到 B 的距離,因爲他的中間有某種障礙物,不能



直接去量他.試就已經知道的方法,把他的距離求出來.

3. 把下面各事項的道理講出來:

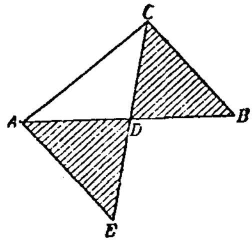
(a) 二等邊三角形的頂角的二等分線,必把底邊也二等分,并且還是底邊的垂線 [叫做底邊的**垂直二等分線**].

(應用全等三角形)

(b) 一線段的垂直二等分線上的任意一點,到這線段的

兩端的距離,總是相等.

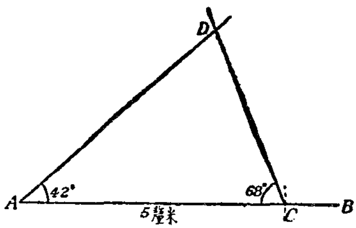
(c) $\triangle ABC$ 的一邊 AB 的二等分點,假定是 D, 連結 CD, 並且把他延長到 E, 使 $DE=CD$, 再連結 A, E, 則 $\triangle ADE\equiv\triangle BDC$.



18. 已知三角形的一邊和兩個角,畫三角形的方法

假定一邊的長是 5 釐米,兩個角,一個是 42°, 一個是 68°.

在任意直線 AB 的上面,取 $AC=5$ 釐米, 用分度規在 A 點作 42° 的角,在 B 點作 68° 的角,那麼 $\triangle ACD$ 就是所求的三角形了.



精密的照這樣所畫成的許多三角形,如果把他們重疊起來,一定是完全一致,換句話來說,就是全等.因此得到下面的重要事項:

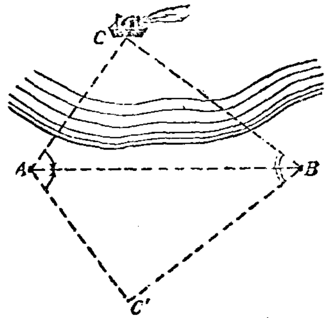
定理 相當的一邊和兩個角各各相等的兩個三角形,是全等三角形.

這個定理,測量的時候,也常用他.

假使 C 是湖中的一點, A 是岸上的一點,打算去求 AC 間

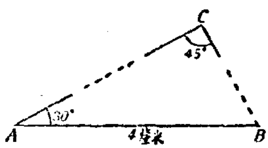
的距離的時候,就得用這個定理.

取適當的距離 AB. 用測角器,測定 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的角度. 作 AC', 使 $\angle C'AB=\angle CAB$; 作 BC', 使 $\angle C'BA=\angle CBA$. 得交點 C', 量出 AC' 的長,就是 AC 的距離了. (何故?)

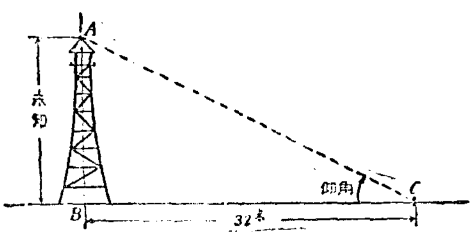


習　題

1. 已知 $AB=4$ 釐米, $\angle A=30^\circ$, $\angle C=45^\circ$. 試作此三角形.

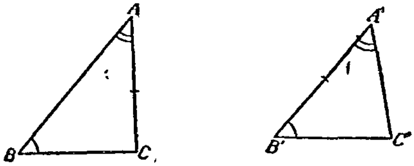


2. 從地上的一點 C 看到塔頂的線 (視線) CA, 和水平線 BC 所成的角 (仰角) 是 40°. 試用縮圖求塔的高.

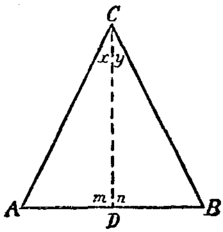


3. 下圖所畫的兩個三角形, 一個邊和兩個角, 各各相等.

間是不是全等三角形?



4. 三角形的兩個角,如果相等,那麼他們所對的兩個邊,也就相等.



(把 $\angle C$ 分做二等分,倘能看出 $\triangle ADC \equiv \triangle BDC$,就可以知道 $AC=BC$.)

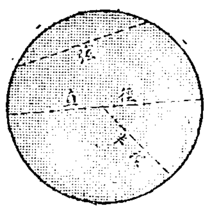
5. 在右圖的三角形中,只知道 $\angle x = \angle y$; $\angle m = \angle n$. 試說明 $AD=DB$.

[圓和作圖]

19. 圓

用圓規畫圓,是任何人所知道的,用不着再來詳細說明.

圓是一切曲線中最簡單的一種曲線.

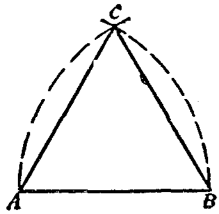


(定義) 一種曲線上的一切的點,到某一定點的距離,若全是相等,則這種曲線所包圍的平面圖形,叫做圓.這個定點,叫做圓的中心.這種曲線,叫做圓周.從中心到圓周所引的線段,叫做半徑.圓周的一

部分,叫做圓弧,或叫做弧,連結弧的兩端的線段,叫做弦.通過中心的弦,叫做直徑.

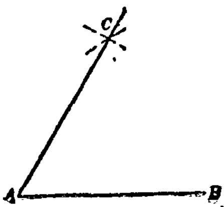
20. 作等邊三角形的方法

作線段 AB, 用 A 和 B 各做中心,AB 做半徑,各畫圓弧交於 C 點,從 C 點用直線連結到 A 和 B, 就成一個等邊三角形 ABC.



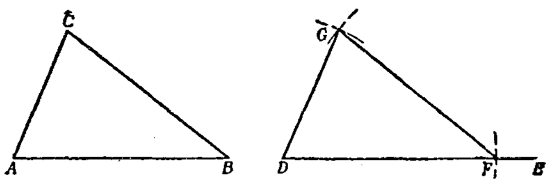
21. 作 60° 的角的方法

作任意線段 AB, 用前節同樣的方法求出 C 點,連結 AC, 則 $\angle BAC=60°$.



22. 作一個三角形,使他和一個已知的三角形等邊的方法

設 ABC 是一已知三角形.



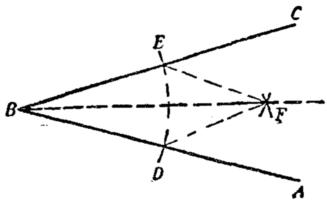
作任意直線 DE, 用 D 做中心, AB 做半徑,畫圓弧截 DE 於 F. 再以 D 和 F 各做中心,用 AC 和 BC 各做半徑,畫兩弧交於 G 作 GD 和 GF, 則 $\triangle DFG$ 就是所求的三角形了.

照上面的畫法，如果非常正確的話，把他裁下重疊放起來，一定是完全一致.試練習一下.

定理 三邊各各相等的三角形，是全等三角形.

28. 把一個角分做二等分的方法

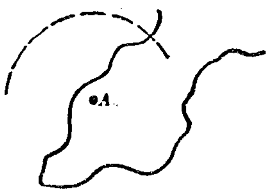
用 B 做中心，任意的長做半徑，畫圓弧，切 BC 於 E；切 BA 於 D.



以 D 和 E 各做中心，用任意相等的半徑，畫兩圓弧相交於 F，則 BF 直線，就把 $\angle ABC$ 分做二等分了.

是否眞正相等？試把他的理由說明出來（比較 $\triangle BEF$ 和 $\triangle BDF$）.

習 題



1. 在右圖的曲線上，求出到 A 點的距離等於 1.1 釐米的點.

2. 作每邊等於 5 釐米的等邊三角形.

3. 試把三角形的三個角，都分做二等分.

4. 試把一個角分做四等分.

5. 試把教室的兩個牆壁間的角分做二等分.

24. 把一條線段分做二等分的方法

以 A 和 B 各做中心,任意的長做半徑,

在AB的兩側畫四圓弧交於 C, D 兩點.

連結 C 和 D 的直線交 AB 於 E 點,則 $AE=EB$.

是否眞正相等?試用尺量他一下.

不用尺量,像下面用說明,也可以講出他相等的道理來.

連結 AC, AD, BC, BD 四直線.

$\because\ \triangle CAD \equiv \triangle CBD.$　　[三邊相等]

$\therefore\ \angle m = \angle n.$

又　$\triangle CAE \equiv \triangle CBE.$　[二邊和一夾角相等]

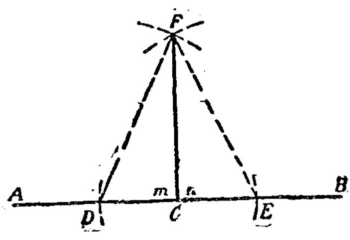
$\therefore\ AE = EB.$

25. 過直線上的一點, 他的垂線的方法

設直線 AB 上的一點是 C.

作平角 ACB 的二等分線 CF, (23)

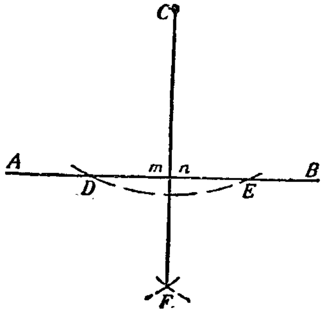
則 CF 就是所求的垂線了.



他的理由如何? (11)

26. 從直線外的一點,作他的垂線的方法

設C是直線AB外的一點.以C爲中心,用任意的半徑畫圓弧,截AB於D和E.



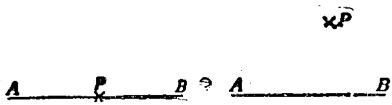
再以D, E各爲中心,仍用上面的半徑畫兩圓弧相交於F點,則CF就是所求的垂線了.如果CF的確是垂線,那麼$\angle m$就非等於$\angle n$不可.試沿着AB或CF把紙折轉疊過去實驗一下.

習　題

1. 試二等分三角形的各邊.

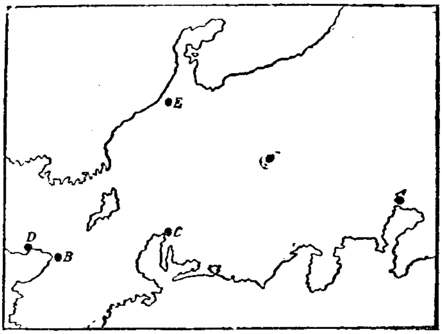
2. 試在一張紙上,畫一條線垂直於紙的一邊.

3. 從P點畫AB的垂線,只限定用一條絲線或棉線.試想出他的方法來,實際去畫他一下.



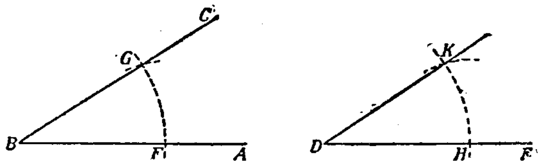
4. 在下面的圖上,畫出到A和B兩點等距離的地方來〔17 習題 3 (b)〕. 到A和C等距離的地方,也畫出來.到$A, B,$

E三點等距離的地方又怎樣?



27. 作一個角等於一已知角的方法

設 $\angle ABC$ 是已知角.



作任意直線 DE.

以 B 做中心,用任意的半徑畫圓弧,截 BA 於 F,截 BC 於 G.

再以 D 做中心,用和上面相等的半徑畫圓弧 HK.

然後以 H 做中心,用 FG 的長做半徑畫圓弧,截 HK 弧於 K,作直線 DK,則 $\angle EDK$ 就是所求的角了.

用分度規量出 $\angle B$ 和 $\angle D$, 去檢驗他們是否相等?又,試說明他們所以相等的道理來.

[直線和平面的性質]

28.　直線的性質

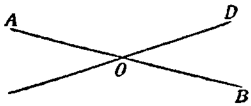
(公理)　通過兩點,能作一直線,且只能作一直線.

這就是說: 兩點能決定一直線.

上面的事實,是由經驗所知道的,并且是任何人不問理由就能確定的事實.

像這樣的事實,叫做公理,是爲推理的基礎.

由上面的公理,卽刻就得到下面的事實:



(a)　有兩點共同的直線,完全密接重合.

(b)　相交二直線的交點,只有一個.

29.　平面的性質

(定義)　把一條直線,放在一個面上,若是這直線的各部分,在這面上的任何所在,都是密密地接合的時候,那麼這個面,就叫做平面.換句話來說:就是,面上的任意兩點連結的直線,全包含在這個面的裏面的面,叫做平面.

木匠製造桌面或其他平板時,要用曲尺的邊緣去檢驗他平

不平,就是這個道理.

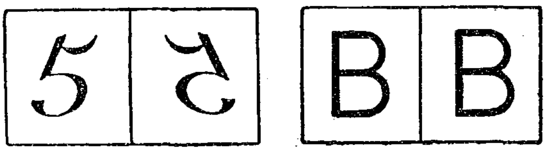
像茶葉筒等類圓筒的面上，也可以使直線和他密密接合，可是圓筒面并不是平面,這是什麽道理?

(公理) 凡是平面,他的任何部分,必能和其他的部分或是和其他平面的任何部分相重合.

(公理) 一個平面，被他上面的一條直線把他分做兩部分的時候，在每一部分中各取一點所連結成的直線，必和最初的直線相交.

30. 重合

(定義) 兩個平面圖形,完全可以一致的時侯,這兩個平面圖形,叫做互相重合.



平面圖形的重合有兩種:

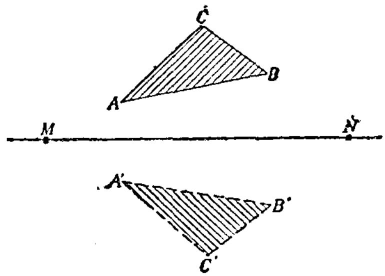
(i) 把兩個圖形中的一個，翻轉過來，方纔能夠重疊放在另一個的上面相一致的時侯.

(ii) 不必翻轉過來,就能夠重疊放在一起的時候.

31. 對稱

用一條無限直線 MN, 把平面分做兩部分,在 MN 的一方,

設有 $\triangle ABC$ 的平面圖形.



今沿着直線 MN, 把平面的兩部分折合重疊起來,那麽,圖形 ABC 就到 $A'B'C'$ 的位置了.

(定義) 沿着一直線折合起來能完全相一致的兩個圖形,叫做**互相對稱的圖形**.這個直線叫做對稱軸.

上面的兩個圖形 ABC 和 $A'B'C'$, 就是對於 MN 軸而對稱.一個圖形的本身,也可以對稱.

對稱的圖形,當然是重合,自不用再加說明.

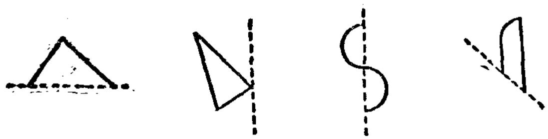
習　題

1. 角的兩個邊,對於什麽樣的軸是對稱?

2. 試在中國字和英文字母中,選幾個對稱的寫出來.

3. 二等邊三角形,有幾個對稱軸? 等邊三角形,又有幾個對稱軸?

4. 把下面圖形的對稱圖形畫出來.(點線是表對稱軸)



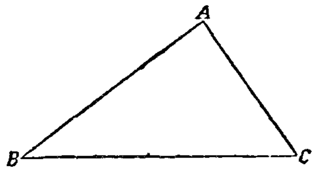
[最短路程]

32. (公理) 直線是從一點到另一點的最短路程.

連結兩點的線段的長,叫做距離.

33. **定理** 三角形的一邊,小於他二邊的和,而大於他二邊的差.

在 $\triangle ABC$ 中,假定 BC 是最大的一邊.



由上面的公理,知道 BC 直線,是由 B 點到 C 點的最短路程.

$$\therefore \quad BC < BA + AC.$$

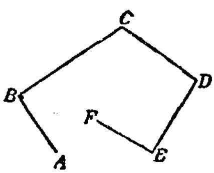
又,由上面式子的兩方面,減去 AC,那麼就得到:

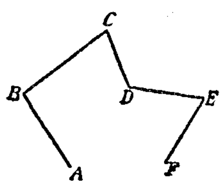
$$BC - AC < BA.$$

這就是一邊 BA,大於他二邊的差.

34. **折線的比較**

(定義) 用連續的一羣線段所做成的圖形,叫做折線.



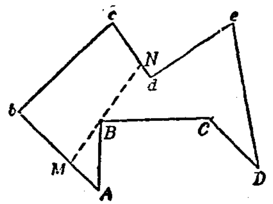


線段的各連續點 A, B, C……等等,叫做頂點.最初的點 A 和最後的點 B, 叫做端點.

取折線的任意相鄰的四頂點 B, C, D, E, 其第一點 B 和第四點 E, 若是在其餘兩點所連結的直線 CD 的同側時,這種折線,叫做**凸折線**;若是在不同側的時侯,就叫做**凹折線**.

定理 凡是凸折線,總比和他同端點而在他的凸側方面所有一切的任何折線都要短.

設 $AbcdeD$ 是和凸折線 $ABCD$ 同端點而包圍 $ABCD$ 的凸側的折線.



通過 B 點,在 $\angle ABC$ 的外側作任意直線 MN, 則

折線路 $AMNdeD<$ 折線路 $AbcdeD$.

又 折線路 $ABNdeD<$ 折線路 $AMNdeD$.

$\therefore$ 折線路 $ABNdeD<$ 折線路 $AbcdeD$.

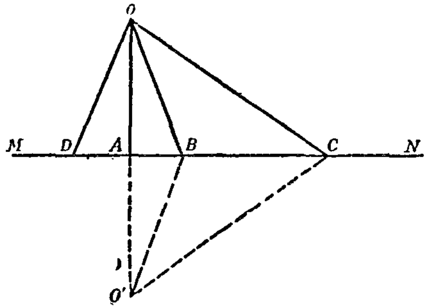
延長 BC, 照這樣的方法做去, 自易得到凸折線 $ABCD$ $<$ 折線路 $ABNdeD$.

$\therefore$ 凸折線 $ABCD<$ 折線路 $AbcdeD$.

35. 從一點到一直線的最短路程

從某一地點 O, 到一條筆直的河邊 MN 去取河中的水的

時候,他的最短路程,雖然任何人都知道垂線 OA; 但是他的理



由的說明,已有相當的必要.

(1) 設 OA 是垂線, OB 是斜線, O' 點是對於 MN 直線 O 點的對稱點,則

$$直線\ OO' < 折線\ OBO'.$$

$$\therefore\quad \frac{直線\ OO'}{2} < \frac{折線\ OBO'}{2}.$$

$$\therefore\quad OA < OB.$$

(2) 在 OA 同側的二斜線 OB, OC, 把他們的長比較一下,則得

$$凸折線\ OBO' < 折線\ OCO'.$$

$$\therefore\quad \frac{凸折線\ OBO'}{2} < \frac{包圍折線\ OCO'}{2}.$$

$$\therefore\quad OB < OC.$$

就是斜線的足離垂線足的距離越遠,那麼,斜線就越長.

(3) 在 OA 兩側的兩斜線 OB 和 OD, 若是他們的足,離垂足是等距離,那麼這兩個斜線就必定相等. [何故?]

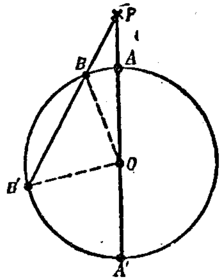
定理 從直線外的一點,引垂線和斜線到這條直線上,則得

(1) 垂線比任何斜線短;

(2) 斜線的足到垂足的距離越大,則斜線越長;

(3) 斜線的足到垂線足的距離相等, 則斜線的長也相等.

36. 從一點到圓周的最短路程



設一點是 P, 圓的中心是 O, PBB' 是和圓周相交的任意直線, PAA' 是通過中心的直線.

現在把 PA 和 PB; PA' 和 PB' 等等的長比較在下面:

(1) $OP-OB<PB.$

但 $$OB=OA.$$

$$\therefore\quad OP-OA<PB.$$

$$\therefore\quad PA<PB.$$

(2) $OP+OB'>PB'.$

但 $$OB'=OA'.$$

$$\therefore\quad OP+OA'>PB'.$$

$$\therefore \quad PA' > PB'.$$

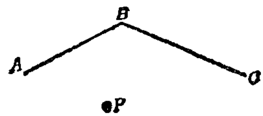
定理 從一點到圓周上所有一切的線段的裏面，要算：在連結這個點和中心的直線上的線段是最短或是最長.

習題

1. 相隔約 100 米上下的兩個地點，各插有一棒. 今兩人用 20 米長的繩索和一根棍棒測這兩地的距離，問如何量法?

2. 二等邊三角形的頂點和底邊上的任意一點連結的線段，比等邊的每一邊要短，試說明他的理由.

3. 試求出從一點 P 到直線 AB 和 BC 的最短路程.

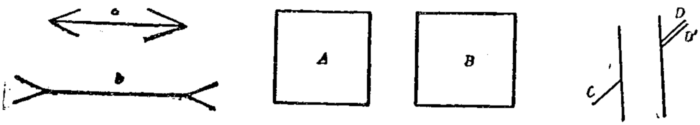


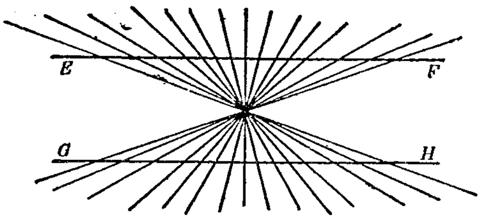
37. 不用實驗或實測，而用推理來說明事實的方法，也是非常重要.

用實驗或實測來證實諸事項的是否正確，前面已經學過很多. 至於不用實驗或實測而用推理來證實的方法，也相當的講過. 但是實驗或實測的方法，手續較繁，有時，對於某種事項，想去把他的一切情形都做完全，很覺困難.

並且無論怎樣精密的實驗或實測，他的結果，決不能絕對的正確；不但如此，並且對於由幾種特別的情形實驗所得到的結論，並不能一定就說是一般的情形也是正確.

此外,我們肉眼的觀察,有時也很容易發生非常的錯誤.





例如: 圖上的線段 a 和 b, 看起來,好像長短不同,然而實在是相等.

矩形 B, 看起來,像正方形;然而實在 A 是正方形.

直線 C 的延長,是 D 還是 D'? 簡直看不清楚.

直線 EF 和 GH, 看起來,是彎曲的;然而實在是眞正筆直的直線,一點也不彎.

像上面所說,只由觀察,實測,實驗等等所斷定的事項,有時還是不能正確. 所以:我們要得到一個很嚴正的判斷,必定要把已經認爲確實的事項當做基礎, 一步一步的由推論的方法, 把他論理的證實出來纔對.

凡是說明定理等正確的理由時,都是用這種方法.

38. 定理的證明

定理有假設和終結的兩個部分.

假定的事項,換句話來說;就是:已經知道的條件,叫做假設.

用由假設得到的結果所證明的事項,叫做終結.

由假設而得到終結的理由,叫做證明.

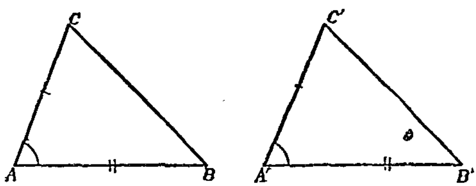
證明定理的時候,是拿下面的事項當做基礎來推論他.

(1) 定義, (2) 假設, (3) 公理, (4) 已經認爲確實的定理.

定理 兩個邊和他的夾角各各相等的兩個三角形,是全等三個形.

[假設] 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中,

$$AB=A'B',\ AC=A'C',\ \angle A=\angle A'.$$



[終結] $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$.

[證明] 把 $\triangle ABC$ 放在 $\triangle A'B'C'$ 上,而使 $\angle A$ 和 $\angle A'$ 相重合. (29 公理) (30 定義)

因 $AB=A'B'$. (假設)

$\therefore$ B' 點和 B 點一致. (28 公理)·(30 定義)

因 $AC=A'C'$. (假設)

$\therefore$ C' 點和 C 點一致. (28 公理) (30 定義)

由是 $B'C'$ 和 BC 一致. (28 公理)

$\therefore$ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. (30 定義)

習 題

照前節的順序,證明下面的諸定理:

1 16 節的定理.

2. 18 節的定理.

3. 22 節的定理.

4. 斜邊和另一邊各各相等的兩個直角三角形,是全等三角形.

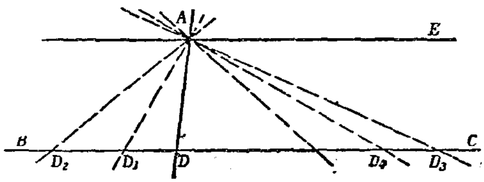
第 二 章

平行線和垂線

[平 行 的 條 件]

39. 平行線

通過一已知直線 BC 外的一點 A, 作一條和 BC 相交於



D 點的直線 AD.

把 AD 直線,照鐘錶上長短針回轉的方向,來轉動於 A 點的周圍的時候,則 AD 和 BC 的交點 D_1, D_2, D_3,……等點,就順次的向左移動, 越走越遠, 最後必定達到我們所說不出來的一個很遠很遠的地方,換句話來說,就是無限遠.

再繼續回轉下去,這個交點,就會來到右方,漸漸的達到 D_3, D_4,……等相近的位置了.

照上面所說的 D 點,當他從左方移到右方的一刹那間,這

個時候的 AD, 我們可以想像他必定占有一個決不能和直線 BC 相交的位置 AE.

(定義) 在同一平面上不相交的二直線,叫做平行線,或叫做二直線平行.

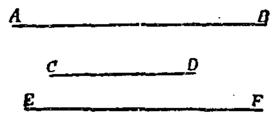
二直線 AE, BC 平行的記號是: $AE \parallel BC$.

二直線 AE, BC 不平行的記號是: $AE \nparallel BC$.

在一平面上的二直線,或是相交,或是平行.

(公理) <u>通過一直線外的一點,和他平行的直線,只有一條.</u>

40. **定理** 和同一直線平行的兩直線,必互相平行.



[假設] $CD \parallel AB, EF \parallel AB$.

[終結] $CD \parallel EF$.

[證明] 若 $CD \nparallel EF$, 那麼必定相交,假定他的交點是 P.

若 P 在直線 AB 之外,那麼,就是通過直線外的一點,可以作二直線和他平行了. (和 39 公理相反)

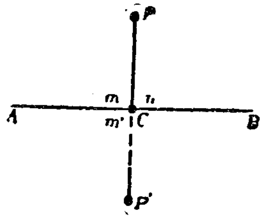
若 P 在直線 AB 上,那麼,就是 CD, EF 都和 AB 相交了. (和假設相反)

上面的兩種情形,無論那一種,都是不合理,所以知道決沒有交點的存在,那就是 CD 和 EF 不能相交.

$$\therefore \quad CD \parallel EF.$$

(註) 像上面的證明方法,假定終結不對,則發生和已知的公理,定義,定理等等相反或者是和假設不符的事實.因此,就斷定終結是對的.像這樣的證明方法,叫做反證法.

41. 定理 從直線外的一點,向這直線所作的垂線,只有一條.



[假設] $PC \perp AB$,就是

$\angle m=\angle n=$直角.

[終結] 從 P 到 AB 的垂線,除 PC 以外沒有第二條.

[證明] 對於 AB 線,取 P 的對稱點 P'.

沿着 AB 直線折疊起來,則 PC 和 $P'C$ 必相重合.(31 定義)

$\therefore\quad \angle m'=\angle m=$直角.

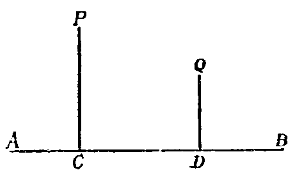
$\therefore\quad \angle m'+\angle m=2$ 直角.

$\therefore\quad PCP'$ 成一直線.

因通過 P, P' 二點的直線,只有一條.

$\therefore$ 從 P 到 AB 的垂線,除 PC 以外,沒有第二條.

42. 定理 垂直於同一直線的二直線互相平行.



[假設] $PC \perp AB$, $QD \perp AB$.

[終結] $PC \quad QD$.

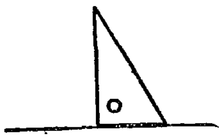
［證明］ 若 $PC \nparallel QD$，那麼 PC 和 QD 必定相交，假定他的交點是 M. 由是由題的假設，得：

$MC \perp AB$, $MD \perp AB$ 是不合理. (41 定理)

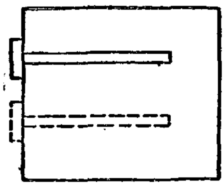
$$\therefore \quad PC \parallel QD.$$

習 題

1. 三角板的直角，是不是正確？他的邊，是不是眞正直線？我們要怎樣去調查他？



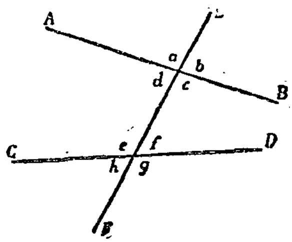
2. 用丁字規作平行線的方法和他的理由，試說明之.



3. 有二平行線，現在對於第一線作一平行線，對於第二線，也作一平行線，則所作的兩條線必定也相平行.

43. 同位角 錯角 內角 外角

(定義) 二直線 AB, CD 和一直線 EF 相交，共做成八個角. 他們的名稱是：



同位角： (a 和 e), (b 和 f), (c 和 g), (d 和 h).

錯 角: (c 和 e), (d 和 f).

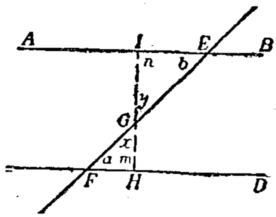
內 角: (c, d, e, f).

外 角: (a, b, h, g).

44. 定理 二直線和一直線相交，其中的一組錯角若是相等,則這二直線就互相平行.

[假設] 二直線 AB, CD 和直線 EF 相交, $\angle a=\angle b$.

[終結] $AB \parallel CD$.



[證明] 在 EF 上任取一點 G, 作 $GH \perp CD$. 延長 HG 和 AB 交於 I.

$$a=b, x=y.$$

$$\therefore \quad m=n.$$

但 $$m=90^\circ.$$

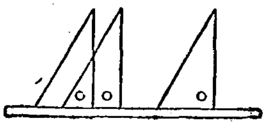
$$\therefore \quad n=90^\circ.$$

$$\therefore \quad AB \perp IH.$$

$$\therefore \quad AB \parallel CD.$$

習 題

1. 用一根尺和一塊三角板,或是用兩塊三角板,試通過 P 點作 AB 的平行線.



2. 二平行線和另一直線相交，他的同位角的二等分線互相平行.

[平行線的性質]

45. 逆定理

正方形，是一個四邊都相等的四邊形.那麼，凡是四邊都相等的四邊形，就全是正方形嗎？

兩個三角形全相等的時候，他們各相當的角就相等.那麼，各相當角相等的兩個三角形，就是全等三角形嗎？

(定義) 定理的假設和終結互相更換所生的事項，叫做原定理的**逆定理**.

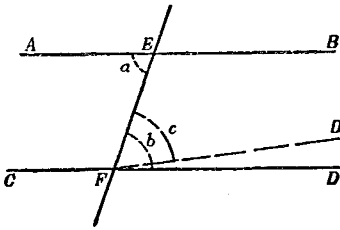
逆定理不常眞.必定要由證明，方能確定他是否爲眞.

46. 定理 二平行線和另一直線相交，則兩組的錯角必相等. (44的逆定理)

[假設] $AB \parallel CD$，直線 EF 和這平行線相交.

[終結] $\angle a=\angle b$.

[證明] 假定 $\angle a \neq \angle b$.



通過 F 作 FD',使

$$\angle c=\angle a,$$

則 $FD' \parallel EB$.

但 $FD \parallel EB$.

那麼,就是通過 F 的二直線,都和 EB 平行.但這是不可能的.

$\therefore$ 最初的假定,是不合理.

$$\therefore \angle a=\angle b.$$

[推論] 兩平行線和另一直線相交,則同位角必相等.且在直線同側的內角的和,各等於 2 直角.

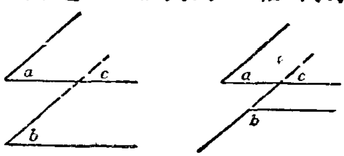
(註) 由某事項可以直接推定出來的事項,叫做該事項的推論.

習 題

1. 一直線垂直於二直線中的一線,必定也垂直於他一線.

2. 要築一條筆直的道路,和另外兩條平行的道路相交,而使他同側的兩個內角之中的一個角,是那一個角的 5 倍.問每一個角是多少度?

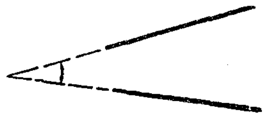
3. 兩個角的兩邊各各相平行,則這兩個角,或是相



等,或互是補角.

4. 二平行線和另一直線相交,則他的同側的內角的二等分線必互相垂直.

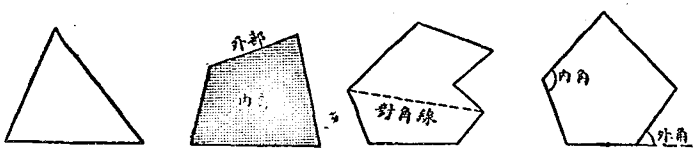
5. 能相交但不能畫出交點的兩直線間的角度,怎樣求法?



[多角形的角的和]

47. 多角形

(定義) 用折線所包圍的平面部分,叫做多角形.此等做成多角形的界限的折線,叫做多角形的周,周的各線段,叫做多角形的邊,邊的端,叫做頂點.多角形相鄰的兩邊所夾的角,叫做內角或叫做角,一邊和他的鄰邊的延長線所成的夾角,叫做外角.



有三個角的多角形,叫做三角形或三邊形,有四個角的,叫做四角形,或四邊形;……;有 n 個角的,叫做 n 角形或 n 邊形.

多角形的邊,頂點,角,數目都是相同的.

多角形中不相鄰的兩個頂點所連結成的直線,叫做多角形的對角線.

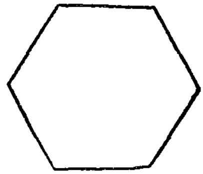
(定義) 延長多角形的各邊,沒有一個邊進到多角形的內

部,那麼這個多角形,就叫做**凸多角形**,不是像這樣的多角形,叫做**凹多角形**.

凸多角形的任何一個內角,總是小於二直角.

凹多角形的所有內角之中,至少必有一個大於二直角.

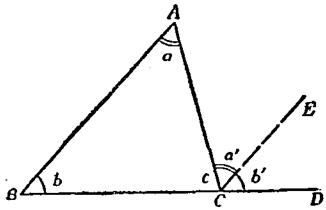
只寫做多角形的時候,都是指凸多角形而言.



(定義) 各邊都相等,且各角也都相等的多角形,叫做**正多邊形**,或**正多角形**.

48. **定理** 三角形的內角的和,等於2直角.

[證明] 延長 $\triangle ABC$ 的一邊 BC, 做成外角 $\angle BCA$, 且作 $CE \parallel AB$, 則



$$\angle a=\angle a',\ \angle b=\angle b'.$$

$$\therefore\ \angle a+\angle b+\angle c=\angle a'+\angle b'+\angle c'$$

$$=2\text{ 直角}.$$

習題

1. 三角形的外角,等於兩內對角的和.

(和外角不相鄰的內角,叫做內對角)

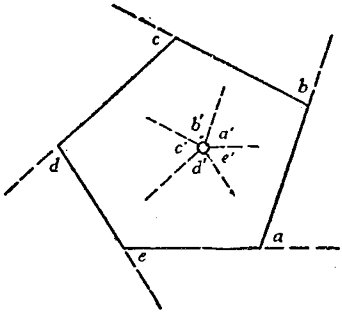
2. 三角形的外角,大於兩內對角中的任何一個角.

3. 二等邊三角形頂點的外角的二等分線,和底邊平行.

4. 三角形能不能有兩個以上的直角或　角?

5. 試把直角三等分. (任意角的三等分的方法,是沒有的)

6. 順次延長凸多角形各邊所生的各外角的和, 等於四直角.



(暗示) 自多角形內的任意一點, 作各邊的延長線的平行線. $a=a'$, $b=b'$,……

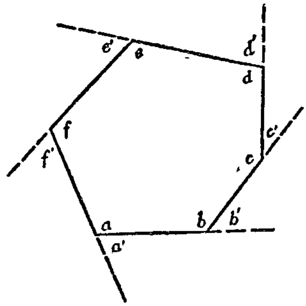
7. 四角形,五角形,六角形等等的對角線,各有多少?

8. 從五角形的一頂點作所有的對角線, 問把五角形共分做幾個三角形? 照同樣的辦法,從一個頂點作諸對角線,把四角形, 六角形, 七角形……等等分做三角形,試把上面表上的各項

多角形的邊數	三角形的數	內角的和
4	2 卽 4－2	(4－2)180°
5	3 卽 5－2	(5－2)180°
6	4 卽 6－2	
7		
8		
9		
n		

計算出來塡寫上去.

9. n 邊的多角形的內角的和,等於 $(2n-4)$ 直角.



$a+a'=2$ 直角,

$b+b'=2$ 直角,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$a+b+c+\cdots\cdots+a'+b'+c'\cdots=?$$

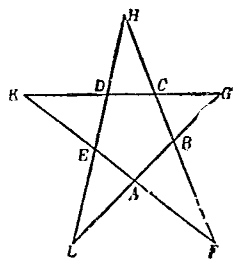
但 $$a'+b'+c'+\cdots\cdots=4 \text{ 直角}.$$

$$\therefore\quad a+b+c+\cdots\cdots=?$$

10. 正五角形,正六角形,正八角形等等的每一個角,各是多少度?表示 n 邊正多角形的角的公式是怎樣?試把他寫出來.

11. 某多角形的內角的和,是外角的和的 2 倍.問這個多角形是多少邊?

12. 某多角形的內角的和是 720°. 問這個多角形是多少邊?

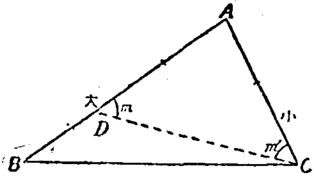


13. 四邊形中,若有兩個角互爲補角,則其餘的兩個角,也就互爲補角.

14. 延長五角形 $ABCDE$ 的各邊.做成一個星形 $FGHKL$, 則

$$\angle F+\angle G+\angle H+\angle K+\angle L=2\text{ 直角}.$$

49. 定理 三角形的二邊,若是不相等,則大邊所對的角,大於小邊所對的角.



[假設] 在 $\triangle ABC$ 中,

$AB>AC$.

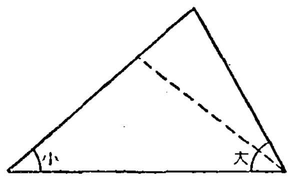
[終結] $\angle C>\angle B$.

[證明] 在 AB 線上,取 $AD=AC$,

則 $$\angle m=\angle m'.$$

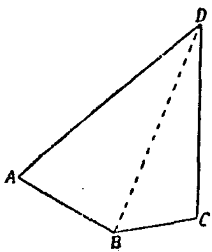
但 $$\angle m'>\angle B,\ \angle C>\angle m.$$

$\therefore\ \angle C>\angle B$.



[推論] 三角形的兩個角,若是不相等,則大角所對的邊,大於小角所對的邊.(學者自證之)

習 題

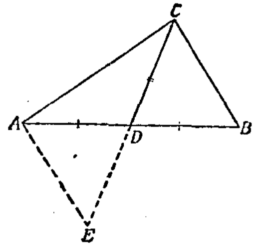


1. 直角三角形的斜邊,大於其餘兩個邊的任何一個邊.在鈍角三角形中,鈍角所對的邊是最大.

2. 四邊形的四邊中,若 BC 是最小,AD 是最大,則

$\angle ABC > \angle ADC$;

$\angle BCD > \angle BAD$.



3. 假定 $\triangle ABC$ 的底邊的中點是 D, $AC > BC$, 則

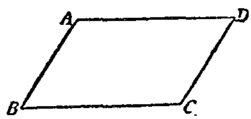
$\angle ACD < \angle BCD$,

$$CD < \frac{1}{2}(AC + CB).$$

[平行四邊形的性質]

50. 平行四邊形

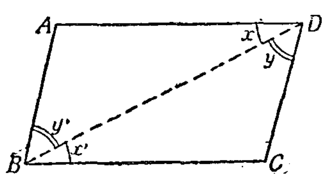
(定義) 兩組對邊各各平行的四邊形,叫做平行四邊形.



平行四邊形 $ABCD$ 的記號是:

$$\square ABCD.$$

51. 定理 平行四邊形的對角線,把平行四邊形分做全等的兩個三角形.



[假設] 在 $\square ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, BD 是對角線.

[終結] $\triangle ABD \equiv \triangle BCD$.

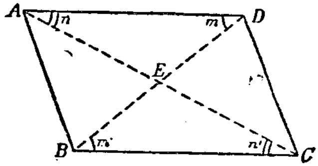
[證明] $AD \parallel BC$. $\therefore$ $x = x'$.

$$AB \parallel DC. \quad \therefore \quad y=y'.$$

BD 是共通線.

$$\therefore \quad \triangle ABD \equiv \triangle BCD.$$

52. 定理 平行四邊形的兩對角線，彼此互相分做二等分.



[假設] 在 $\square ABCD$ 中，對角線 AC 和 BD 相交於 E 點.

[終結] $AE=EC, DE=EB.$

[證明] $AD \parallel BC. \quad \therefore \quad m=m'.$

同理 $n=n'.$

但由前節定理 $\triangle ABC \equiv \triangle ACD.$

$$\therefore \quad AD=BC.$$

$$\therefore \quad \triangle AED \equiv \triangle BEC.$$

$$\therefore \quad AE=EC, DE=EB.$$

習 題

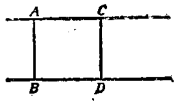
1. 平行四邊形的對邊相等.

2. 平行四邊形的對角相等.

3. 平行四邊形相鄰的兩個角互爲補角.

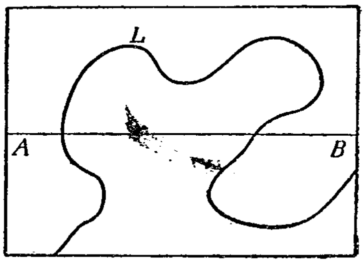
4. 二平行線間所夾的平行線段均相等.

5. 平行線的距離均相等.



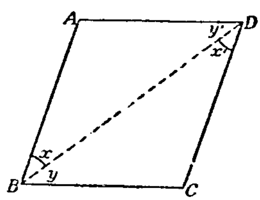
在平行線間的共通垂線的部分的長,叫做平行線的距離.

6. 試在下圖曲線 L 的上面,把距直線 $AB=10$ 毫米距離的點求出來.



[做成平行四邊形的條件]

53. **定理**　兩組對邊各各相等的四邊形是平行四邊形.



[假設]　四邊形 $ABCD$ 中,

$AB=DC, AD=BC.$

[終結]　$ABCD$ 是平行四邊形.

[證明]　作對角線 BD.

$AB=CD, AD=BC, BD$ 共通.

$$\therefore \quad \triangle ABD \equiv \triangle BCD.$$

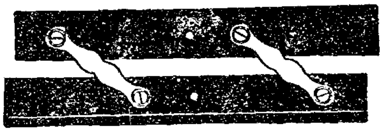
$$\therefore\quad \angle x=\angle x'.$$

$$\therefore\quad AB\parallel DC.$$

同理 $AD\parallel BC$.

$\therefore$ $ABCD$ 是平行四邊形.

習 題

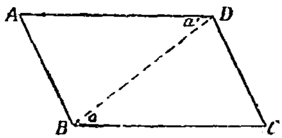


1. 右圖的器具，叫做平行尺，是畫平行線所用的器具，他的原理怎樣?

2. 平行四邊形兩對角的二等分線,互相平行.

3. 平行四邊形中,若有一個角是直角,那麼其餘的每一個角,都是直角.

54. 定理 一組對邊相等且平行的四邊形,是平行四邊形.

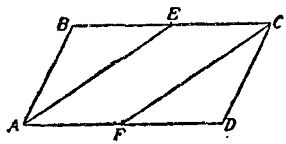


(學者自證之)

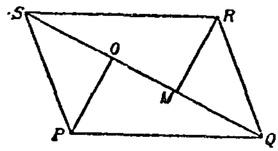
習 題

1. 平行四邊形兩個對邊的中點連結的直線，把平行四邊形分做兩個平行四邊形.

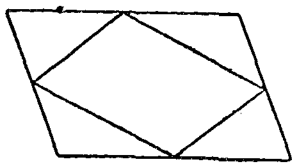
2. 假定 E 和 F 是 $\square ABCD$ 的兩個對邊的中點，則 $AECF$ 也是一個平行四邊形.



3. 在 $\square PQRS$ 中，若是 $RM \perp SQ$, $PO \perp SQ$, 則 $RM=PO$ 且 $RM \parallel PO$.



4. 把平行四邊形各邊的中點順次連結起來所成的四邊形，是平行四邊形.

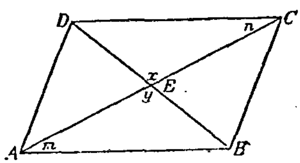


55. **定理** 四邊形的兩個對角線，若是彼此互相二等分，那麽這個四邊形是平行四邊形.

[假設] 四邊形 $ABCD$ 中，

$AE=EC$, $DE=EB$.

[終結] $ABCD$ 是平行四邊形.



[證明] $AE=EC$, $DE=EB$, $\angle x=\angle y$.

$\therefore \quad \triangle AEB \cong \triangle DEC.$

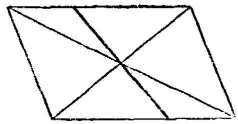
$\therefore \quad DC=AB, \ \angle m=\angle n.$

$\therefore \quad AB \parallel DC.$

同理 $AD \parallel BC$.

$\therefore$ $ABCD$ 是平行四邊形.

習 題



1. 通過平行四邊形的對角線的交點而在相對的兩邊之間所夾的線段,是被這個交點分做二等分.

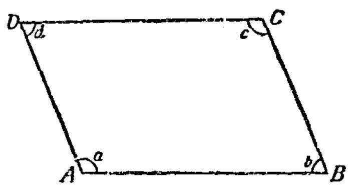
2. 平行四邊形的兩對角線,互相直交,且彼此互相二等分,則這平行四邊形的四個邊必都相等.

56. **定理** 四邊形的兩組對角,若各各相等,則這四邊形是平行四邊形.

[假設] 在四邊形 $ABCD$ 中, $a=c$, $b=d$.

[終結] $ABCD$ 是平行四邊形.

[證明] $a+b+c+d=4$ 直角.



又 $a=c$, $b=d$.

$\therefore$ $2a+2b=4$ 直角.

$\therefore$ $a+b=2$ 直角.

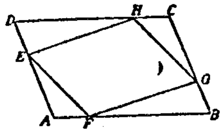
$\therefore$ $AD \parallel BC$.

同理 $AB \parallel DC$.

$\therefore$ $ABCD$ 是平行四邊形.

習 題

1. 在 $\square ABCD$ 中,若是

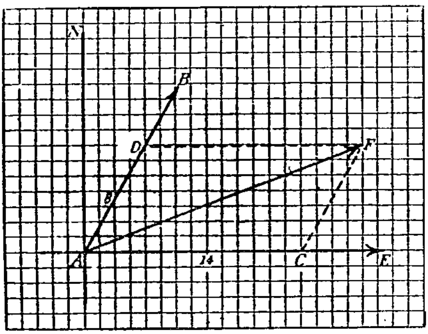


$$DE=AF=BG=CH,$$

則 $EFGH$ 是平形四邊形.

2. 連結三角形二邊的中點的線段,平行於第三邊且等於第三邊的一半.

3. 今有一船,用每時 8 仟米的速度向北偏東 30° 的方向



AB (記做 $N\,30°E$) 前進,但是河水向東方 AE 流動,每時的速度是 14 仟米.問船實際所進行的方向怎樣?

〔解〕 在 AE 線上,取 14 單位 AC; AB 線上,取 8 單位 AD. 用 AC 和 AD 當做二邊作一平行四邊形 $ACFD$, 則對角線 AF, 就是所求的方向了.

AF 的長,就是船每點鐘所通過的仟米數.

AD 和 *AE*, 叫做**分速度**; *AF* 叫做**合速度**.

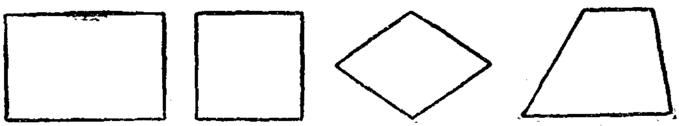
4. 成 60° 的兩個力,同時作用於某物體,一個是 5 仟克; 一個是 12 仟克.試求出他們的合力來.

57. 矩形 正方形 菱形 梯形

(定義) 所有的角,都是直角的四邊形,叫做**矩形**.四邊都相等的矩形,叫做**正方形**.四邊都相等的四邊形,叫做**菱形**.一組對邊平行的四邊形,叫做**梯形**.

梯形中平行的兩個邊,叫做**底**,一個叫做**上底**;另一個叫做**下底**.

梯形中,不是底的兩個邊若是相等,則這梯形,叫做**等腰梯形**.



習題

1. 矩形,正方形,菱形,等腰梯形等等的對稱軸,各有多少?

2. 直角三角形斜邊的中點,到各頂點的距離,都是相等的.

3. 矩形的對角線相等.

4. 菱形的對角線,把菱形的角分做二等分;且兩對角線彼此互相垂直.

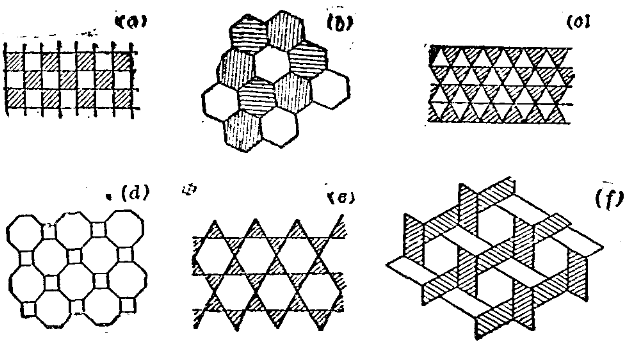
5. 等腰梯形的底角是相等的.

6. 只有一個對稱軸的四邊形,是一個怎樣的四邊形?他的角,邊,對角線等等,有什麼關係?

7. 下面的圖形,是把正多角形貼緊(就是一點空隙都沒有)鋪設起來的模樣,我們種種的裝飾上面,都常常應用他.試就各種模樣回答下面的事項:

(i) 能夠一點空隙都沒有的鋪設起來,他的理由怎樣?(試着眼到各多角形所集合的點的角的和)

(ii) 用不同的顏色,塗相鄰的多角形.問要幾種顏色?



把 (c) 圖的三角形,用種種的方法集合起來,就可做成各種複雜的模樣.(e) 圖就可從 (c) 圖做成.

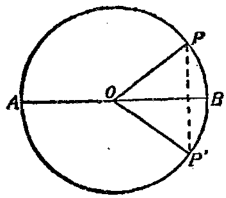
第 三 章

圓

[圓和直線相互的位置]

58. 定理 直徑是圓的對稱軸.

[證明] 關於 O 圓的任意直徑 AB,取對稱的二點 P 和 P',則



$$OP=OP'.$$

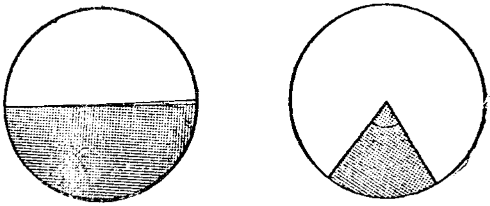
所以這兩條線段中的任何一線段,若是等於半徑,則另一線段,必定也等於半徑.換句話來說,就是,二點 P 和 P',無論那一點,若是在圓周上,則另一點必定也在圓周上.

同理: 圓周上的任何一點,對於直徑 AB,總有在圓周上他部分相對稱的一點.故圓周是關於直徑而對稱.所以,被包圍於圓周內的圓,也就是對於直徑而對稱了.

59. 半圓 弓形 扇形

(定義) 用直徑所分成的圓的二部分,他的每一部分叫做

半圓.用弦所分成的圓的二部分,各叫做**弓形**,兩個弧中的大的



一個弧,叫做**優弧**;小的叫做**劣弧**.兩個半徑間所夾的圓的部分,叫做**扇形**,兩個半徑所夾的角,叫做**圓的中心角**.

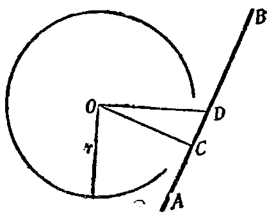
60. 圓和直線相互的位置

一個圓和一條直線相互的位置,有下面三種不同的情形:

(假定從圓 O 的中心到直線 AB 的距離是 OC.)

I. 垂線 OC 大於半徑的時候:

因為 OD 等等的斜線,都大於半徑,所以直線 AB,全在圓周的外面,那麼,就是直線和圓**沒有共通點而不相交**.



II. 垂線 OC 小於半徑的時候:

斜線 OD 的足,向右方離垂線足 C 越遠,斜線的長,就漸次的越大,終必有達到大於半徑的時候,那麼,由小於半徑變到大於半徑的途程中,是必定非有一個 $OD=r$ 的時候不可.這個時候的 D 點,就在圓周的上面了.除此以外的位置,因為 $OD \neq r$,

所以總是不在圓周上面的.和這個一樣的道理,斜線足 D 在 C 的左方,也有一個時候是在圓周的上面.

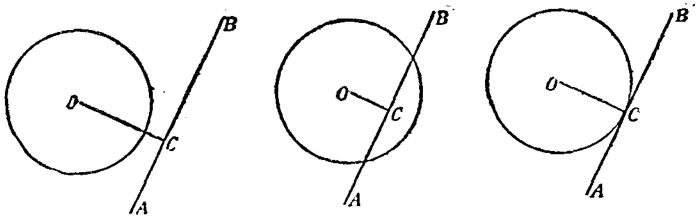
照上面所說:圓和直線有兩個共通點,所以叫做**交於二點**.

III. 垂線 OC 等於半徑的時候:

C 點既然是直線上的一點,且在圓周上,而斜線 OD 等等的長,又都大於半徑,那麼,就是:直線上除掉一點 C 以外,其他一切的點,都在圓周以外了,換句話來說,就是:在直線上,并且也在圓周上的點,只有一點,這叫做**交於一點**.

這個時候的直線和圓,叫做**相切**,相切的時候的直線,叫做**切線**,C 點,叫做**切點**.

定理 從圓外的中心到一直線的距離:若大於半徑,則直線全在圓周外;若小於半徑,則直線是圓的割線;若等於半徑,則直線是圓的切線.



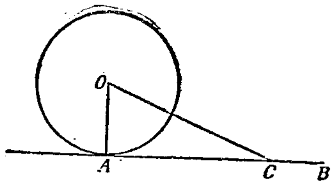
61. **定理** 圓的切線,必垂直於通過切點的半徑.反之,在半徑的外端所作垂直於半徑的直線,必是圓的切線.

[證明] (1) 假定 AB 是和 O 圓切於 A 點的切線.

在 AB 上取任意一點 C, 則 C 必在圓外.

$\therefore\quad OC\quad OA.$

那麼, OA 就是從 O 到 AB 的最短距離.



$\therefore\quad OA\quad AB.$

(2) 若 $OA\perp AB$, 則 $OA<OC$. $\therefore$ C 在圓外.

$\therefore$ AB 只能和圓交於一點.

$\therefore$ AB 是圓的切線.

習　題

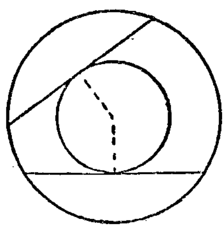
1. 試作圓周上的一個定點的切線.

2. 試用一已知點做中心作切於一已知直線的切圓.

3. 試作平行於一已知直線,而切於一已知圓的切線.

4. 試作一圓, 切於已知直線上的一已知點, 且圓的中心, 在另一已知直線上.

5. 試作一圓, 切於已知直線上的一已知點, 且通過另一已知點.



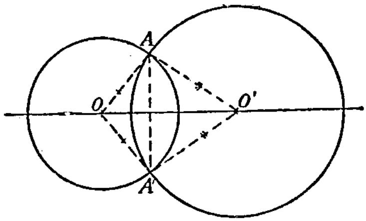
6. 已知圓中的一定長度的諸弦, 必切於和這圓同中心的一個定圓.

(同中心的圓, 叫做同心圓.)

[兩個圓的相互位置]

62. 兩個圓的共通點

因爲圓是對於通過中心的直線而對稱，所以兩個圓是對於通過兩中心的直線而對稱．因此得到下面的定理：



定理　兩個圓若是都通過中心線外的某一點，則對於中心線這個點的對稱點，這兩個圓必定也都通過．

反之，假定 A 和 A' 是兩個圓共通的兩點，則 O 和 O' 兩點中的任何一點，到 A 和 A' 的距離，都是相等，所以對於 OO' 軸，A' 點是 A 點的對稱點．換句話來說，就是：兩個圓若是有一個交點 A，則另一交點 A'，必定是對於中心線和 A 對稱．因此得到下面的定理：

定理　兩個圓不能有兩個以上的交點．兩圓的交點，若是在中心線的上面，則兩圓只能有此一交點．

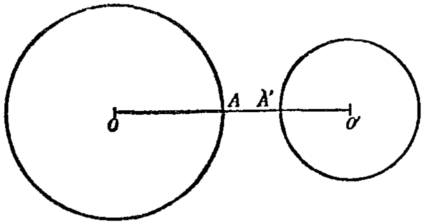
63. 兩個圓相互的位置

兩個圓的相互位置，有下面不同的五種情形：

定理

I.　一圓全在他圓的外面．

各圓周上的一切點,都在他一圓周的外面.



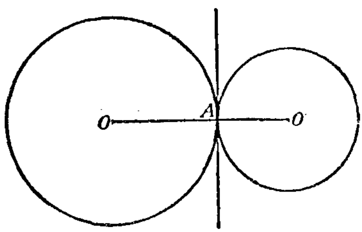
中心線 OO',在 O, O' 之間的 A, A' 兩點處和兩圓相交,且兩線段 OA 和 $O'A'$,沒有一個共通點.

$$\therefore \quad OO'=(OA+O'A')+AA'.$$

中心間的距離,大於兩半徑的和.

II. 兩圓互相外切.

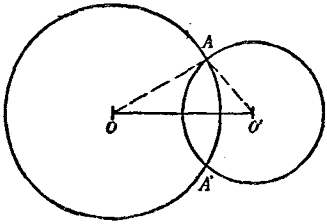
兩圓只有在中心線上而在 O, O' 兩點間的一個共通點的時候,這兩個圓,叫做外切.

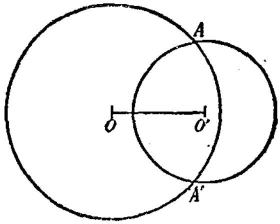


中心間的距離,等於兩半徑的和.

在 A 點垂直於 OO' 的直線,和兩圓都相切,而兩圓在這個公切線的兩側.

III. 兩圓相交.





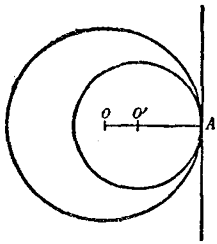
兩個圓對於中心線,有共通對稱的兩點 A 和 A' 的時候,這兩個圓,叫做**相交**.

在 OAO' 中,一邊 OO', 小於他二邊的和,而大於他二邊的差.故:

中心間的距離,小於兩半徑的和,而大於兩半徑的差.

一圓的中心,或在他圓的外面;或在他圓的裏面.

IV. 兩圓互相內切.



兩圓只有在中心線而不在 O, O' 兩點間的一個共通點 A 的時候,這兩個圓叫做**內切**.

中心間的距離,等於兩半徑之差.

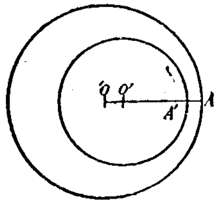
在 A 點垂直於 O, O' 的直線,和兩圓都相切,而兩圓在這個公切線的同側.

外切或內切,總叫做**兩圓相切**, 他的唯一的共通點,叫做切

點.

V. 一圓全在他圓的裏面.

一圓周上的點, 全在第二圓的裏面, 第二圓周上的點, 全在第一圓的外面. 中心線 OO', 和兩圓交於 A, A' 兩點, 且 OA' 全在 OA 內.



$$\therefore \quad OO' = (OA - O'A') - AA'.$$

中心間的距離, 小於兩半徑的差.

[推論] 上面的五個定理, 他們的逆定理亦眞.

習 題

1. 從中心以外的一點, 到圓周上相等的線段, 只有兩條.

2. 通過相切的兩個圓的切點, 作任意割線, 他和兩圓的交點到中心的兩個半徑互相平行.

3. 相交的兩個圓的公弦, 被中心線分爲垂直二等分.

4. 試作切於一已知圓上一定點的切圓. 像這樣的圓有幾個?

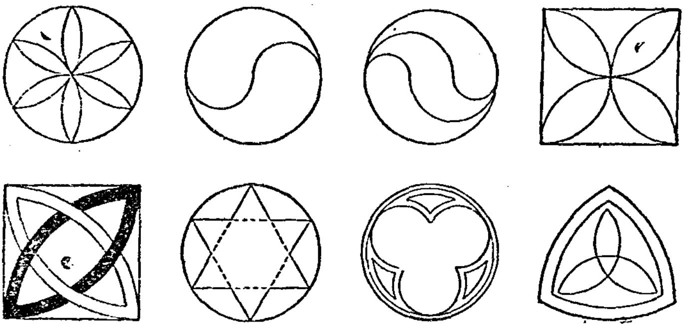
5. 試作通過一已知點, 而切於一已知圓的切圓.

6. 設三個圓的半徑是 3 糎米, 3.4 糎米, 2.5 糎米. 試把這三個圓畫成互相外切.

7. 試用一已知點做中心,作切於一已知圓的切圓.

8. 試用一已知長的半徑,作切於兩個已知圓的切圓.間有不可能的情形沒有?

9. 用尺和圓規畫下面諸圖形的方法如何?

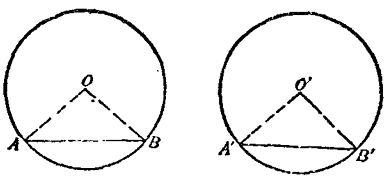


[弧　和　弦]

64. **定理**　在同圓或等圓中,和相等的中心角所對的弧必相等.又,和等弧相對的中心角必相等.

因爲中心角若是一致,則弧必定也是一致.逆定理亦眞.

65. **定理**　在同圓或等圓中,和等弧所對的弦必相等.又,和等弦所對的弧必相等.



［證明］ (1) $\widehat{AB}=\widehat{A'B'}$. $\therefore$ $\angle O=\angle O'$.

$\therefore$ $\triangle ABO\equiv\triangle A'B'O'$. $\therefore$ $\overline{AB}=\overline{A'B'}$.

(2) $\overline{AB}=\overline{A'B'}$. $\therefore$ $\triangle ABO\equiv A'B'O'$.

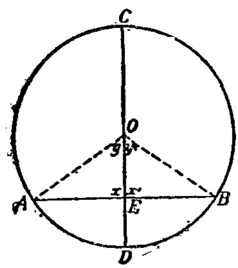
$\therefore$ $\angle O=\angle O'$. $\therefore$ $\widehat{AB}=\widehat{A'B'}$.

66. 定理 垂直於弦的直徑,把這弦分做二等分;并且把對於這弦的兩個弧,也分做二等分.

［假設］ 在 O 圓中,CD 是直徑,且 $CD\perp AB$; CD 和 AB 的交點是 E.

［終結］ $AE=EB$; $\widehat{AD}=\widehat{DB}$, $\widehat{AC}=\widehat{CB}$.

［證明］ 作 OA 和 OB,則



$\triangle AEO\equiv\triangle BEO$.

$\therefore$ $AE=EB$.

又 $y=y'$.

$\therefore$ $\widehat{AD}=\widehat{BD}$

及 $\widehat{AC}=\widehat{CB}$.

習 題

1. 把圓周分做三等分的三點所連結成的三角形,是等邊三角形.

2. 把圓內互相垂直的兩個直徑的各端順次連結起來,問

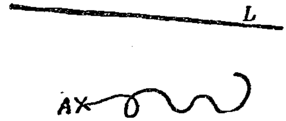
做成一個怎樣的多角形?

3. 把弦分做二等分的直徑，必和這弦垂直；并且把這弦所對的弧也分做二等分.

4. 試把一已知長的弧分做二等分.

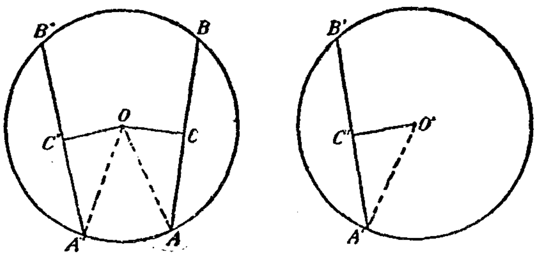
5. 一點和一直線的距離是 5 尺.現在要用這個點做中心，去畫一個圓截取這直線的部分的長是 8 尺.問所畫的圓的半徑是多少長?

6. 試用一已知長的半徑通過兩個定點作一圓.



7. 用一條棉線或絲線,量 A 點到直線 L 的距離的方法是怎樣?

67. **定理**　在同圓或等圓中，相等的弦，到中心的距離必相等.反之,到中心等距離的弦必定相等.



〔假設〕　O 圓 $=O'$ 圓, $AB=A'B'=A''B''$;

$OC\perp AB, O'C'\perp A'B', OC''\perp A''B''$.

［終結］　　$OC=OC'=O'C'$.

［證明］ 作 $OA, OA'', O'A'$，則

$$AO=A'O'=A''O.$$

$$\therefore\quad \triangle AOC\equiv\triangle A''OC''\equiv\triangle A'O'C'.$$

$$\therefore\quad OC=OC'\quad 及\quad OC=O'C'.$$

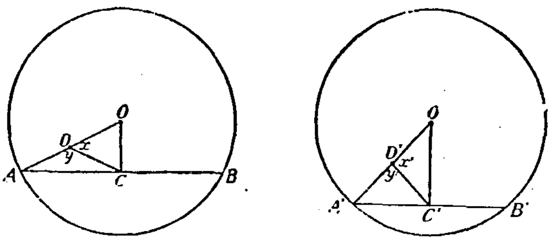
上面的逆，設 $OC''=O'C'=OC$，則

$$\triangle OAC\equiv\triangle OA''C'\equiv\triangle O'A'C'.$$

$$\therefore\quad AC=A'C'=A''C''.$$

$$\therefore\quad AB=A'B'=A''B''.$$

68. 定理 同圓或等圓中，離中心近的弦，大於離中心遠的弦.



［證明］ 設 AB 和 $A'B'$ 是 O 圓和 O' 圓的兩弦，OC 和 $O'C'$ 是從中心到兩弦的兩垂線；幷且 $OC<O'C'$. 又 OA 和 $O'A'$ 的中點是 D 和 D'，則

$$DA=DO=DC=D'A'=D'O'=D'C'.$$

故在 $\triangle ODC$ 和 $\triangle O'D'C'$ 中，

$$\angle x < \angle x'. \quad \therefore \quad \angle y > \angle y'.$$

故在 $\triangle DAC$ 和 $\triangle D'A'C'$ 中,

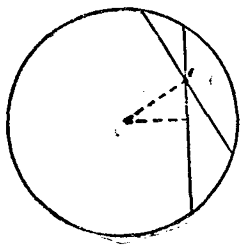
$$AC > A'C'. \quad \therefore \quad 2AC > 2A'C'.$$

$$\therefore \quad AB > A'B'.$$

［推論］ 逆定理亦眞.

習　題

1. 相交兩弦的交點和中心連結成的直線,若和兩弦所成的兩個角相等,則這兩條弦必相等.



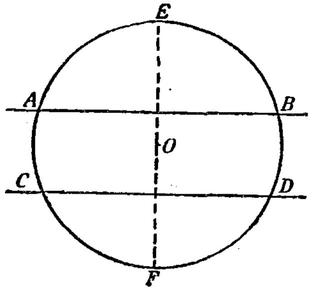
2. 和連結兩個等圓的中心線相平行的直線,若被這兩圓所截,則所截取的兩弦必相等.

3. 通過圓內一點所作一切弦的裏面,要算被這個點分做二等分的一條弦是最短.

69. **定理** 在互相平行兩割線間的兩弧,一定是相等.反之,在圓內不相交的兩割線,若是他們所夾的兩弧相等,則這兩條割線必相平行.

［假設］ (1) 在 O 圓中, $AB \parallel CD$, 且和圓交於 A, B 及 C, D 各點.

[終結] $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.



[證明] 作 $OE\perp AB$, 并延長和 CD 相交,則

$$OE\perp CD,\quad \overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{DE}$$

$$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EB}$$

$$\therefore\quad \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$$

[假設] (2) $\overset{\frown}{AC}=BD$, AB 和 CD 在圓內不相交.

[終結] $AB \parallel CD$.

[證明] 作 $OE\perp AB$, 延長到 F, 則

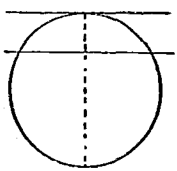
$$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE},$$

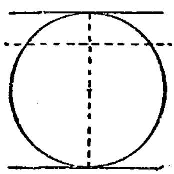
$$\overset{\frown}{EC}=\overset{\frown}{ED}.$$

$$\therefore\quad EF\perp CD.\quad \therefore\quad AB\parallel CD.$$

習 題

1. 上面的定理, 若兩平行線中的一線, 是圓的切線的時候,怎樣?



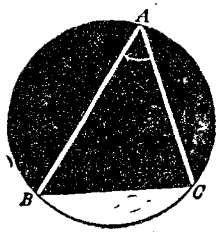


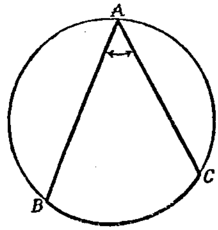
2.　上面的定理，若兩平行線，都是圓的切線的時候，又怎樣？

[圓　周　角]

70.　弓形角　圓周角

(定義)　弓形的弧上的一點，和他的弦的兩端連結的兩弦

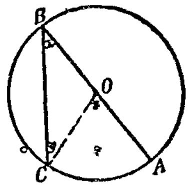




所成的角，叫做**弓形角**；對於圓來說，弓形角，叫做**圓周角**，或叫做**內接角**.

$\angle BAC$ 是弓形 BAC 的角，也是 BC 弧所對的圓周角.

71.　定理　圓弧所對的圓周角，等於這弧所對的中心角的一半.



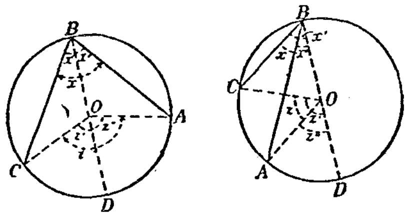
[證明]　(1)　圓周角的一邊通過中心的時候：

$OB=OC$.　$\therefore$　$\angle x=\angle y$.

$\therefore$　$\angle z=\angle x+\angle y=2\angle x$.

$\therefore$　$\angle x=\dfrac{1}{2}\angle z$.

(2) 圓周角的各邊,不通過中心的時候:



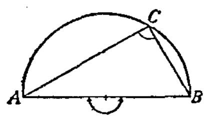
作直徑 BOD, 則由 (1), 得: $\angle z'=2\angle x',\ \angle z''=2\angle x''.$

$$\therefore\quad \angle z'\pm\angle z''=2(\angle x'\pm\angle x'').$$

$$\therefore\quad \angle z=2\angle x.\quad \therefore\quad \angle x=\frac{1}{2}\angle z.$$

72. **定理** 對於直徑的圓周角,是一個直角.

(試由前定理證明他)

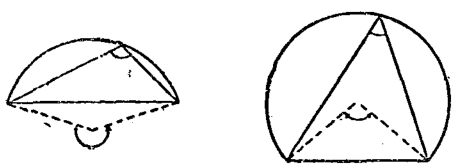


習題

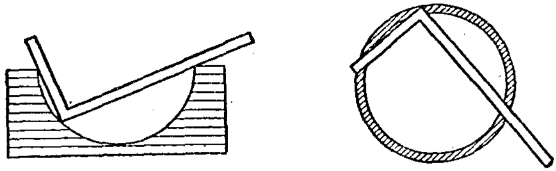
1. 圓的內接角的二等分線,把他所對的弧,也分做二等分.

2. 同圓或等圓中,等弧所對的圓周角必等.

3. 大於半圓的弓形角是銳角,小於半圓的弓形角是鈍角.

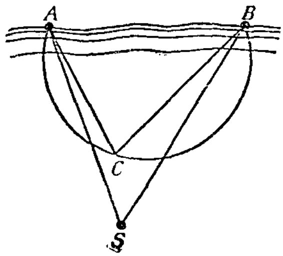


4. 半圓形的溝是否正確？試說明用曲尺去檢查他的方法.



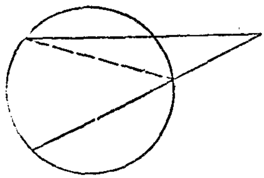
5. 試說明用曲尺去把圓輪分做二等分的方法.

6. 右圖的 AB 是岸,岸的附近有暗礁，圓弧是表示船舶等應當躲避的危險區域. 今從船上所測得的角 ASB, 若是比已知角 ACB 小的時候，那麼船就在危險區域以外了.試說明他的理由.



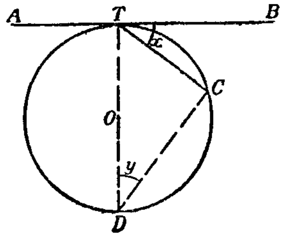
7. 把三角形的兩邊,各當做直徑所作的兩個圓,必在第三邊上或是在他的延長線上相交.

8. 在圓外一點相交的兩條割線所成的角，等於兩割線間的兩弧所對的兩個圓周角的差.



73. **定理** 圓的切線和通過切點的弦所成的角，等於這個角內的弧所對的圓周角.

〔證明〕 設 AB 是 O 圓的切線, TC 是通過切點的任意弦.



作直徑 TD, 則

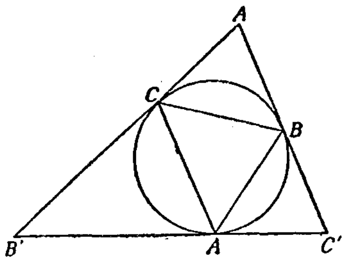
$\angle x=$ 直角 $-\angle CTD=\angle y$.

但是 $\angle x$ 內的弧 $\overset{\frown}{TC}$ 所對的圓周角都等於 $\angle y$.

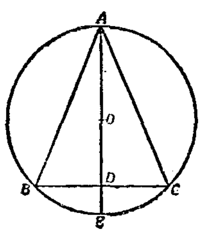
$\therefore$ $\angle x$ 內的弧 $\overset{\frown}{TC}$ 所對的圓周角 $=\angle x$.

習題

1. $\triangle ABC$ 的各頂點在一圓周上, $\angle A=57°$, $\angle B=66°$,



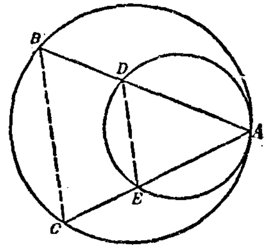
在 A, B, C 各點作圓的切線,成一三角形 $A'B'C'$. 問 A', B', C 三個角,各是多少度?



2. 從二等邊三角形 ABC 的頂點 A 所作的垂線,和底邊交於 D 點,和通過三頂點的圓交於 E 點.試證明 AB 邊切於通過 B, D, E 三點的圓.

3. 從互相內切的兩圓的切點，作任意兩割線 ADB 和 AEC. 試證明

$$BC \parallel DE.$$



74. **作圖題**　用尺作通過兩點的直線，和用圓規作圓，以及合於某種條件的圖形的作法，以前都學過很多.

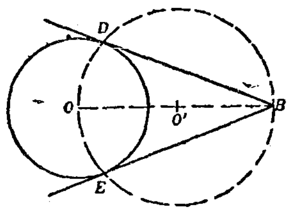
(定義)　求適合於某一定條件的圖形的作法的問題，叫做作圖題，實際去畫圖形，叫做作圖.

作圖是否爲眞，非由證明不能確定他.

作圖所能夠用的器具，只限於尺和圓規.

75. **作圖題**　從圓外一點，作這圓的切線.

[題意]　假定 B 是一已知圓 O 外的一點，從 B 作圓 O 的切線.



[作圖]　連結 B, O. 用 BO 當做半徑作圓，和圓 O 交於 D, E 兩點，則 BD, BE 就是所求的切線了.

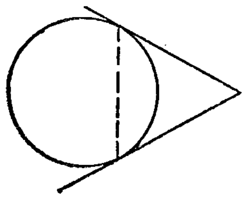
[證明]　(學者自證之)

[討論]　所求的切線有二，且僅限於二.

習　題

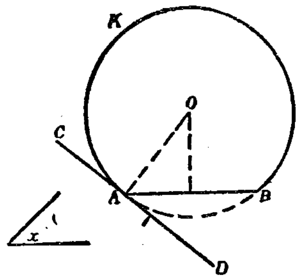
1. 從圓外一點所作這圓的兩切線是等長.

2. 從圓外一點所作兩切線間的角，等於被這兩切線所分成兩弧所對的兩個圓周角的差.



3. 在一已知直線上，作一弓形，使他的弓形角，等於一已知角 x.

［作圖］ 在 AB 的一端 A，作 $\angle BAD=\angle x$. 作 $OA\perp CD$，設 OA 和 AB 的垂直二等分線交於 O 點.



用 O 做中心，OA 做半徑，作圓，則這圓必通過 B 點(何故?)，弓形 AKB 就是所求的弓形了.

學者試證明之.

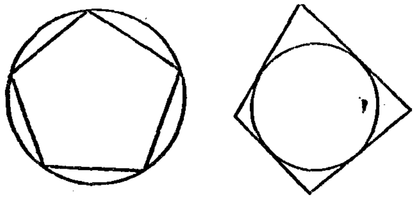
4. 在一已知線段上，試作包含 $60°$ 和包含 $30°$ 的角的兩個弓形.

[內 接 多 角 形]

76. 內接多角形　外切多角形

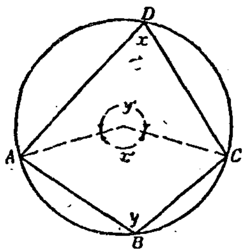
(定義) 頂點全在同一圓周上的多角形，叫做內接多角形；

這個圓,叫做多角形的外接圓.



各邊全和一圓周相切的多角形,叫做圓的外切多角形;這個圓,叫做多角形的內切圓.

77. 定理　圓的內接四邊形的兩個對角,互爲補角.



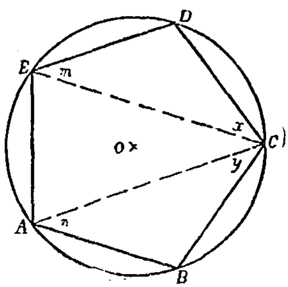
［證明］　$x=\frac{1}{2}x', y=\frac{1}{2}y'.$

$$\therefore\quad x+y=\frac{1}{2}(x'+y')$$

$$=\frac{1}{2}(4\text{ 直角})$$

$$=2\text{ 直角}.$$

78. 定理　把圓周分做若干等分,從各分點順次連結起來,就做成一個內接正多角形.



［假設］　在 O 圓中,

$\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CD}=\cdots\cdots$

順次連結 $A, B, C, D, \cdots\cdots$ 各點,得一多角形 $ABCD\cdots\cdots$.

［終結］　$ABCD\cdots\cdots$ 是一個

內接正多角形.

[證明] $AB=BC=CD=\cdots\cdots$

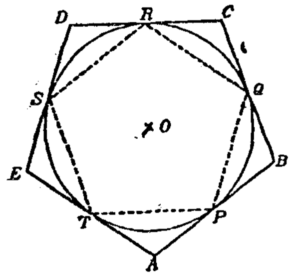
在 $\triangle ABC$ 和 EDC 中, $x=y, m=n.$ (參照 72 習題 2)

$$\therefore \quad \angle D=\angle B.$$

同理: 可證明其餘的角,也都相等.

$\therefore$ $ABCD\cdots\cdots$是一個內接正多角形.

79. **定理** 把圓周分做若干等分,通過各分點作切線,就做成一個外切正多角形.



[假設] 在 O 圓中,

$\overset{\frown}{PQ}=\overset{\frown}{QR}=\overset{\frown}{RS}=\cdots\cdots,$

過 $P, Q, R,\cdots\cdots$各點,作 $AB, BC, CD,\cdots\cdots$諸切線,做成一個外切多角形.

[終結] $ABCD\cdots\cdots$是一個正多角形.

[證明] 作 $PQ, QR, RS, \cdots\cdots$諸直線,則

$$\triangle PBQ\equiv\triangle QCR\equiv\triangle RDS\equiv\cdots\cdots,$$

(參照 73 及 78 定理)

$$\therefore \quad \angle A=\angle B=\angle C=\cdots\cdots,$$

又, $\triangle PBQ$, $\triangle QCR$, $\triangle RDS$, $\cdots\cdots$等等,是二等邊三角形.

$$\therefore \quad AP=PB=BQ=QC=\cdots\cdots,$$

$$AP = BQ$$

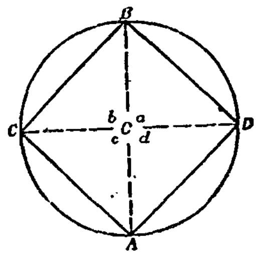
$$\underline{PB = QC}$$

$$\therefore \quad AB = BC$$

同理: $BC = CD = DE = \cdots\cdots$.

$\therefore$ $ABCD\cdots\cdots$是正多角形.

80. 作圖題 試作已知圓的內接正方形.



[作圖] 在 O 圓中,作互相垂直的二直徑 AB 和 CD. 把 A, B, C, D 順次聯結起來,則 $ABCD$ 就是所求的正方形了.

[證明] $\angle a = \angle b = \angle c = \angle d =$直角.

$$\therefore \quad \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CA}.$$

又 $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D =$直角.

$\therefore$ $ADBC$ 是正多角形.

$\therefore$ $ADBC$ 是正方形.

習 題

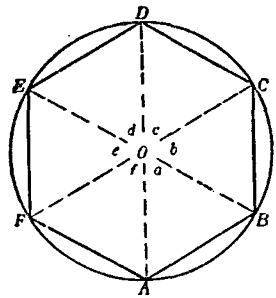
1. 作已知正方形的內切圓.

2. 圓的內接等邊多角形,是正多角形.

3. 正方形兩對角線的交點，是這正方形的內切圓和外接圓的中心.

4. 試作圓的內接正八角形和正十六角形.

81. **作圖題** 試作圓的內接正六角形.



所求的圖形，假定是已經做成，由此去研究他的性質而想出作圖的方法來，這叫做解析.

現在假定所求的正六角形是已經作成，看看圓周是幾等分？再看看這許多弧所對的中心角，又是多少度？

由是想出作 60° 角的一個簡單的方法來了.

[作圖] 用圓周上的任意一點 A 當做中心，圓的半徑做半徑，作圓弧交圓於 B 點.同理可得 C, D, E, F 各點.

連結 $AB, BC, \cdots\cdots$ 諸線段，則 $ABCDEF$，就是所求的正多角形了.

[證明] 作 $OA, OB, OC, \cdots\cdots$ 諸線，則因

$\triangle AOB, \triangle BOC, \cdots\cdots, \triangle EOF$ 是等邊三角形.

$$\therefore \quad \angle a = \angle b = \angle c = \angle d = \angle e = 60^\circ.$$

但 $$\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e + \angle f = 360^\circ;$$

$$\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e=300°.$$

$$\therefore\quad \angle f=60°.$$

因此　$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\cdots\cdots=\overset{\frown}{FA}.$$

$\therefore$　$ABCDEF$ 是正六角形.

習　題

1. 圓的內接正六角形的邊和圓的半徑,是怎樣的關係?

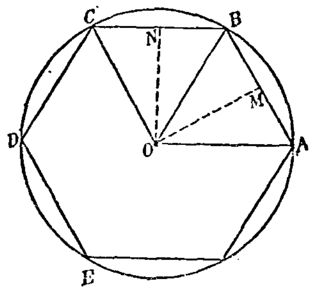
2. 試作圓的內接正三角形和正十二角形.

3. 把正三角形的三個角,各截去相等的正三角形,則得到一個能內接於圓的等角六角形.

4. 圓的內接正三角形的邊,把垂直於他的半徑分做二等分.

5. 試以一已知線段當做一邊,作一個正六角形.

6. 圓的內接六角形,他的三組對邊中的兩組,若是互相平行,則其餘的一組對邊,必定也互相平行.



82. 定理　正多角形,必內接或外切於圓.

〔證明〕 (1) 在正多角形 $ABCD\cdots\cdots$ 中,假定兩鄰角 A, B

的二等分線的交點是 O, 連接 OC, 則

$$\triangle AOB \cong \triangle BOC. \quad \therefore \quad OA=OC.$$

且 $\triangle AOB$ 是二等邊三角形, $\therefore \quad OA=OB=OC.$

$$\therefore \quad \angle OCB=\angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\angle BCD.$$

$\therefore$ OC 是 $\angle BCD$ 的二等分線.

同理: $OD=OE=\cdots\cdots=OA.$

$\therefore$ 正多角形 $ABCD\cdots\cdots$, 內接於以 O 爲中心的圓.

(2) 從 O 點到 $AB, BC,\cdots\cdots$ 各邊作垂線 $OM, ON,\cdots\cdots$, 則

$$OM=ON=\cdots\cdots.$$

$\therefore$ 用 O 做中心, OM 做半徑的圓, 內切於正多角形 $ABCD\cdots\cdots$. 那麼,就是 $ABCD\cdots\cdots$ 外接於以 O 爲中心的圓.

83. **定理** $2n$ 邊的內接正多角形周圍的長,大於 n 邊的內接正多角形周圍的長. (學者自證之)

$2n$ 邊的外切正多角形周圍的長,小於 n 邊的外切正多角形周圍的長. (學者自證之)

84. 由 (83) 的定理,知道一個圓的內接正多角形的邊數 n, 若逐漸增加,則內接形的周圍,就次第的變大;反之,外切正多角形的周圍,就次第的變小, 那麼這兩個周圍的數值, 終久就會和一個共通的數值無限的接近了. 這個共通的數值, 就是圓周的長.

定理 圓周的長和直徑成正比例. (證明從略)

設圓周的長是 P, 直徑是 d, 則

$$P=\pi d.$$

π 是一個常數,叫做圓周率,他的數值大概是 3.14159.

設半徑是 r, 則

$$P=2\pi r.$$

第四章

軌　　跡

[軌　　跡]

85. 點的通路

一點運動的時候，他所通過的路的模樣，要看他運動時的條件是怎樣?纔能夠決定他.譬如:石頭從靜止狀態在空中落下的時候，他所通過的路是一條直線；若是把石頭斜拋於空中，那麼他所通過的路，就是所謂拋物線的曲線了.

又如，一點運動時，他對於某兩定點的距離，若總是相等，則他所通過的路，是連接兩定點的直線的垂直二等分線.

適合於某條件的點所移動的通路，叫做適合於這條件的點的軌跡.

(定義)　包含適合於某條件所有一切的點，而不包含其餘的點的圖形，叫做適合於該條件的軌跡.

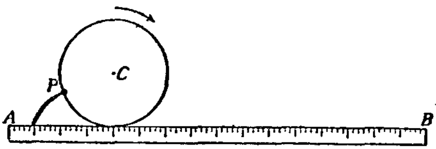
86. 軌跡的探尋方法

求軌跡的時候，把適合於條件的若干點先記出來，從這些點的方面，就可以看出軌跡的大概情形了.

有時由已經得到的知識，也很容易的看出軌跡來.

習 題

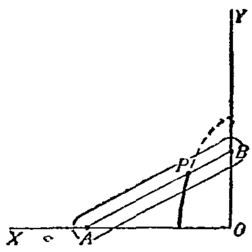
1. 一個 C 圓，沿尺的邊迴轉時（但不滑動），試把圓周上的



一點 P 的軌跡畫出來. P 的軌跡，叫做擺線或叫做旋輪線.

由實測的結果，圓周的長，是直徑的幾倍？

2. 作互相垂直的二直線 OX 和 OY，更作一線段 AB，使 A 在 OX 線上滑動，B 在 OY 線上滑動，試把 AB 線段上中心以外的一定點 P 的軌跡畫出來. P 的軌跡是橢圓的一部分.



3. 火車在軌道上行走的時候，車輪中心的軌跡是什麼？

4. 和一直線等距離的點的軌跡是什麼？

5. 和二平行線等距離的點的軌跡是什麼？

6. 和一定點等距離的點的軌跡是什麼?

7. A 地和 B 地相隔 16 仟米.試求出離 A 點 10 仟米,離 B 點 8 仟米的地點來.

8. 設有穿過城市中間筆直的一條河道.試用圖表出離市的中心 12 仟米,離河的中央部 10 仟米的地點.

87. 軌跡的證明

斷定適合於某條件的點的軌跡,是某種圖形的時候,非加以證明不可.由 (85) 節的定義,知道證明軌跡,必定要證明下面的兩種事項:

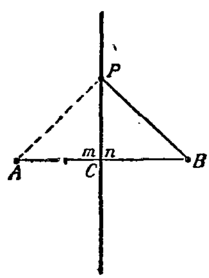
(1) 凡是圖形上的點,都適合於條件;

(2) 所有不是圖形上的點,都不適合於條件。

不用 (2),或是用:

所有適合於條件的點,都在圖形的上面.

88. **定理** 到兩定點等距離的點的軌跡,是連結兩定點的線段的垂直二等分線.



[證明] (1) 假定 A, B 是二定點,AB 的垂直二等分線是 PC. 在 PC 上取任意的一點 P, 連結 PA 和 PB, 則

$\triangle ACP \equiv \triangle BCP$. $\therefore$ $PA = PB$.

即, P 點到二點 A, B 是等距離.

(2) 假定 P 是到 A, B 兩點等距離的一點,卽 $PA=PB$, 連結 PC, 則

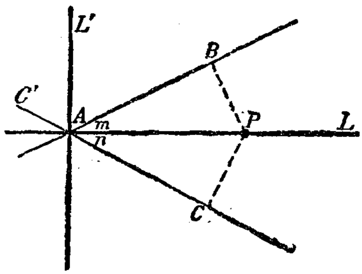
$$\triangle ACP \equiv \triangle BCP. \quad \therefore \quad \angle m = \angle n = \text{直角}.$$

卽, PC 是 AB 的垂直二等分線.

$\therefore$ AB 的垂直二等分線,是到 A, B 二點等距離的點的軌跡.

89. 定理 到相交二直線等距離的點的軌跡, 是這二直線所成的角的二等分線.

[證明] (1) 假定 AB, AC, 是相交的二直線, AL 是 $\angle BAC$ 的二等分線, AL' 是 $\angle BAC'$ 的二等分線.



在 AL 線上取任意一點 P, 作 $PA\perp AB$, $PC\perp AC$, 則

$$\triangle ABP \equiv \triangle ACP. \quad \therefore \quad PB = PC.$$

在 AL' 線上取 P 點,也是同樣證明.

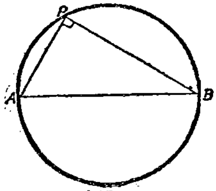
(2) 假定 $PB\perp AB$, $PC\perp AC$, $PB=PC$, 則

$$\triangle ABP \equiv \triangle ACP. \quad \therefore \quad \angle m = \angle n.$$

故 P 點在 AB, AC 二直線所成的角的二等分線 AL 或

AL' 的上面.

∴ 到相交二直線 AB, AC 等距離的點的軌跡,是 AB 和 AC 所成的角的二等分線 AL 和 AL'.



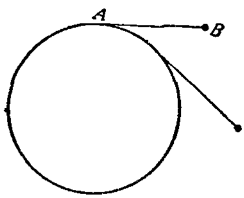
90. **定理**　把一已知線段當做斜邊的直角三角形,他的直角的頂點的軌跡,是拿這個線段當做直徑的圓周.

(學者自證之)

習　題

1. 通過兩定點的圓的中心的軌跡是什麼?

[解]　先用 (86) 節的方法,探知他的軌跡,後用 (87) 節的方法證明他.



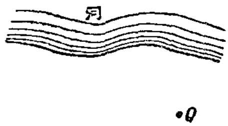
2. 到一直線等距離的點的軌跡是什麼?

3. 一已知線段的一端,恆切於一已知圓移動的時候,問他一端的軌跡是什麼?

4. 一已知圓恆切於另一已知圓而迴轉的時候,問這迴轉圓的中心的軌跡是什麼?

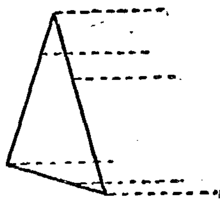
5. 某一點在一個三角形的一邊上,且到其他二邊的距離

是相等.試求這個點的位置.

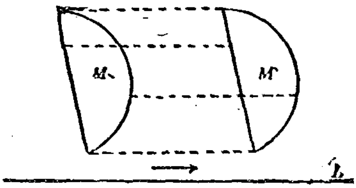


6. 到 P, Q 二地點是等距離的河岸上的一個地點,在什麼地方?

7. 某一點,到相交二直線是等距離,且到一已知點的距離,等於一已知長.試求這個點的位置.

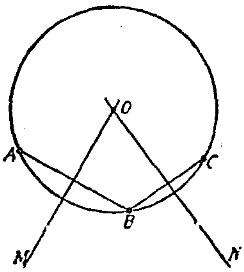


8. 一已知線段的一端,延着一已知三角形的周圍上,保持一定的方向移動的時候.問他一端的軌跡是什麼?



弓形 M 上所有一切的點,平行於一直線 L 的方向移動一定距離的時候,我們可以想像他生出一個弓形 M'.這個時候,M' 叫做是由 M 平行移動所發生的圖形.

由平行移動所生的圖形,是和原圖形完全重合.



91. 定理 通過不在一直線上的三點的圓周,只限於一個.

[證明] 假定 ABC 是不在一直線上的三點,AB, BC 的垂直二等分

線 M 和 N 的交點是 O.

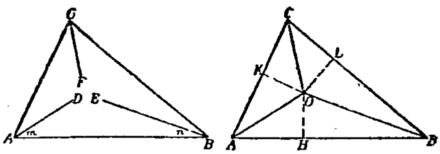
用 O 做中心,OA 做半徑作圓,則這圓必通過 B 和 C 兩點,就是過三點可作一圓.

又,因中心 O, 非是 M 和 N 的交點不可,但是二直線的交點,只有一個,且半徑的長,也只有一種.

故通過三點 A, B, C 的圓周,只限於一個.

92. **定理**　三角形各角的二等分線,在對於各邊等距離的一點處相交.

[證明]　在 (i) 圖的 $\triangle ABC$ 中,假定 AD, BE, CF 各是



(i)　　(ii)

$\angle A, \angle B, \angle C$ 的二等分線,那麼

$$\frac{\angle A}{2}+\frac{\angle B}{2}=\angle m+\angle n<2\text{ 直角}.$$

故 AD, BE 不相平行而交於一點,假定這交點是 O, 作

$$OH\perp AB,\ OK\perp AC,\ OL\perp BC. \qquad \text{(ii 圖)}$$

$$\because\ OH=OK,\ \ OH=OL.\ \ \therefore\ OK=OL$$

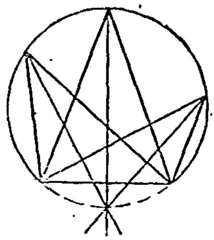
$\therefore$　CF 必通過 O 點.

就是,三角形各角的二等分線,在對於三邊等距離的一點 O

處相交.

(註) 三角形內角的二等分線的交點,叫做三角形的內心.內心是三角形的內切圓的中心.

習 題



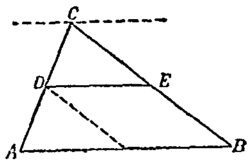
1. 試求一已知圓的中心.

2. 試作一已知三角形的內切圓.

3. 同一弓形角的二等分線,都交於一點.

4. 三角形 ABC 的內角 A 和外角 B, C 的三條二等分線,交於一點.

(註) 三角形的兩外角的二等分線和一個內角的二等分線的交點,叫做三角形的傍心.



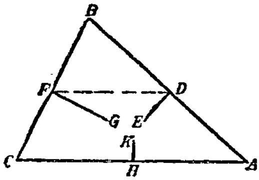
5. 三角形的傍心到各邊是等距離.

93. 定理 三角形三邊的垂直二等分線,交於到各頂點等距離的一點.

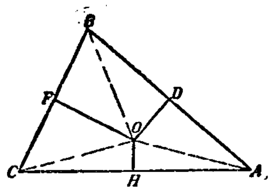
[證明] 在 (i) 圖中,假定 DE, FG, HK, 各是 AB, BC, CA 的垂直二等分線.連結 F, D.

$$\angle EDB = \text{直角}, \ \angle GFB = \text{直角}.$$

$$\therefore \ \angle EDB + \angle GFB = 2 \text{ 直角}.$$



(i)



(ii)

但是 $\angle EDF+\angle GFD<\angle EDB+\angle GFB.$

$\therefore$ $\angle EDF+\angle GFD<2$ 直角.

$\therefore$ DF 和 FG 交於一點,假定這交點是 O.

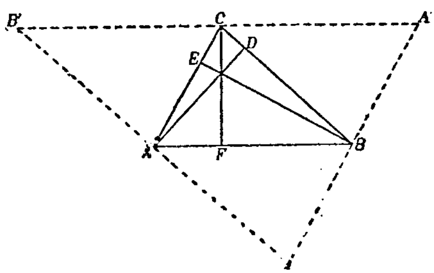
在 (ii) 圖中, $OC=OB$, $OA=OB$. $\therefore$ $OC=OA$.

$\therefore$ HK 必通過 O 點.

(註) 三角形各邊的垂直二等分線的交點,叫做外心.外心是三角形的外接圓的中心.

94. **定理** 從三角形的各頂點作各對邊的垂線,交於一點.

[證明] 在 $\triangle ABC$ 中,假定 $AD\perp BC$, $BE\perp AC$, CF



$\perp AB$.

作 $B'C' \perp AD$, $C'A' \perp BE$, $A'B' \perp CF$, 作成一三角形 $A'B'C'$, 則

$$AB \parallel A'B',\ BC \parallel B'C',\ CA \parallel C'A'.$$

$$\therefore\quad B'C = AB = CA'.$$

$\therefore$ CF 是 $A'B'$ 的垂直二等分線.

同理,可證明 AD, BE 各是 $B'C'$, $C'A'$ 的垂直二等分線.

$\therefore$ AD, BE, CF 交於一點.

(註) 從三角形的各頂點所作對邊的三條垂線的交點,叫做垂心.

習 題

1. 試作三角形的外接圓.

2. 試作通過三點的圓弧.

3. 在正三角形 ABC 的外接圓的 BC 弧上任取一點 P, 則 $PA = PB + PC$.

4. 從正三角形的各頂點向對邊各作垂線, 則這三角形被分做全等的六個直角三角形.

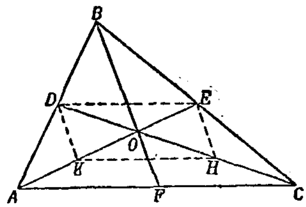
95. 定理 三角形各頂點和對邊中點所連結成的三直線, 必相交於一點. 從這交點到各頂點的距離, 各等於中線的三分

之二.

[證明] 假定AE, BF, CD是$\triangle ABC$的三中線.

$\because$ $\angle EAC+\angle DCA<2$直角.

$\therefore$ AE和CD必交於某一點O.



連結AO的中點K和OC的中點H, 作DE, DK, EH; 則

$$DE \parallel AC,\ DE=\frac{1}{2}AC; \qquad \text{(56 節習題 2)}$$

$$KH \parallel AC,\ KH=\frac{1}{2}AC.$$

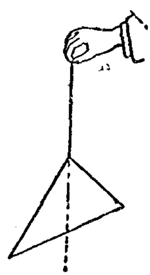
$\therefore$ $KHED$是平行四邊形.

$$\therefore\ EO=OK=KA,\ DO=OH=HC.$$

$$\therefore\ AO=\frac{2}{3}AE,\ CO=\frac{2}{3}CD.$$

同理,可證明CD和BF的交點,也是在從C到D的三分之二,并且也在從B到F的三分之二的一點.

(註) 三中線的交點,叫做三角形的重心.



用厚紙作一三角形, 把他的重心求出來用針支持住,則這三角形必保持平衡. 又,試用絲線或棉線,把這三角形的頂點繫好吊起來看看. 絲的延長線必通過對邊的中點.

習　題

1. 二等邊三角形中相等的兩條邊的中線相等.

2. 從三角形的一頂點作一中線,更從他二頂點向這中線各作垂線,則這二垂線必相等.

第五章

相 似

[線段的比例]

96. 線段的比

(定義) 一種量 a 對於同種類的另一量 b 的比,就是表示 a 量是 b 量的幾倍的意思.

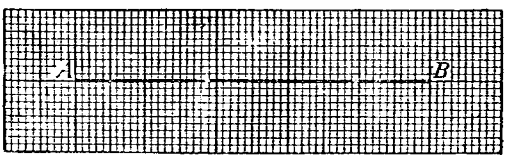
a 對於 b 的比,寫做: $a:b$ 或 $\frac{a}{b}$.

a 叫做比的前項;b 叫做比的後項.

計量線段的長,就是求這個線段的長,是單位長的幾倍的意思.

單位長,可以用釐米,米,尺,寸,英尺,和其他等等.

表示某線段是單位長的幾倍的數值,叫做線段的量度.



譬如: 用釐米做單位量線段 AB 的時候,他的量度是 5.

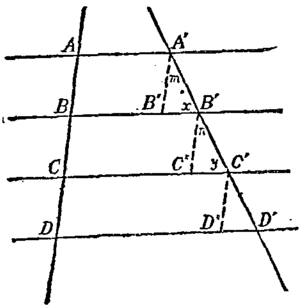
(定義) 線段的比，就是用同種單位所量出的兩條線段的量度的比.

譬如： 量得兩線段，一是 3 釐米；一是 5 釐米，那麼他們的量度是 3 和 5，所以這兩線段的比是 3:5.

97. 定理 一直線被若干平行線所截，若所截取的諸線段，都是相等，則其他任意被截的直線，所截取的諸線段，必一定也相等.

[假設] $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel \cdots\cdots$,

$$AB = BC = CD = \cdots\cdots.$$



[終結] $A'B' = B'C' = C'D' = \cdots\cdots.$

[證明] 作 $A'B'' \parallel AB$, $B'C'' \parallel BC$, $C'D'' \parallel CD, \cdots\cdots$,

$\because \quad B'B'' \parallel C'C''$, $\quad \therefore \quad \angle x = \angle y$.

又 $\qquad A'B'' \parallel B'C''$, $\quad \therefore \quad \angle m = \angle n$.

又 $\qquad A'B'' = AB = BC = B'C''$.

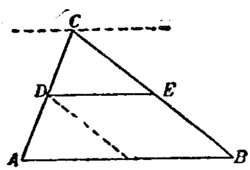
$$\therefore \quad \triangle B''A'B' \equiv \triangle C''B'C'.$$

$$\therefore \quad A'B' = B'C'.$$

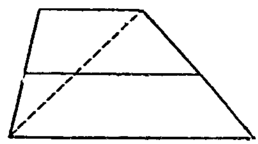
同理,可證明 $B'C' = C'D' = \cdots\cdots$,

習 題

1. 通過三角形一邊 AC 的中點而和第二邊 AB 平行的直線 DE,必通過第三邊 BC 的中點;且 DE 是 AB 的一半。



2. 在梯形中,從他的不是底的一邊的中點,作平行於底的直線,必通過不是底的另一邊的中點;且他的長,等於兩底的和的一半。

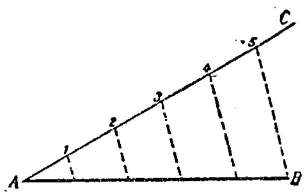


3. 把一已知線段,等分做一已知數的方法:

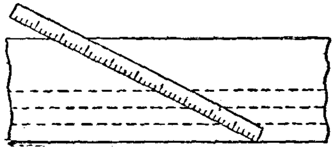
設分線段為 5 等分.

過 A 點作任意直線 AC,在他的上面,以任意的等距離,取 1, 2, 3, 4, 5 五點,連結 5 和 B.

從 4, 3, 2, 1 各點,作 $5B$ 的平行線,則 AB 就分做 5 等分了.



試把紙的一邊分做 7 等分.



4. 等分一塊板或一塊布的時候，常用一根尺，傾斜放在他的面上，是什麽緣故?

98. 線段的比例

(定義) $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 的兩個比相等的時候，a, b, c, d 四個量，叫做成比例.

a, b, c, d 四個量成比例的時候，寫做 $a:b=c:d$ 或 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

這叫做比例式或叫做比例，a 和 d 叫做外項；b 和 c 叫做內項；d 叫做 a, b, c 的第四比例項.

三個量 a, b, c 成比例的時候，即

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}.$$

b 叫做 a 和 c 的比例中項；c 叫做 a, b 的第三比例項.

例如 $\frac{2}{6}=\frac{6}{18}$.

線段 AB, CD, EF, GH 之間，有 $\frac{AB}{CD}=\frac{EF}{GH}$ 關係的時候，這四線段就成比例.

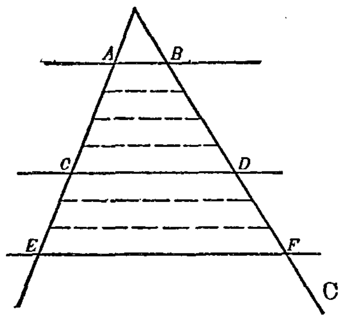
(定義) 兩線段的比,等於另一個兩線段的比的時候,叫做這四線段成比例.

99. **定理** 兩條線段,假如被若干平行線所截,則他們相當的部分的比,必定相等.

[假設] $AB \parallel CD \parallel EF$;

AE, BF 和諸平行線相交.

[終結] $\frac{AC}{CE}=\frac{BD}{DF}$, $\frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BD}$, $\frac{AE}{CE}=\frac{BF}{DF}$.



[證明] 假定 AC 和 CE 用同一單位所量得的量度是 m 和 n, 則

$$\frac{AC}{CE}=\frac{m}{n}.$$

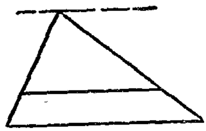
從 AE 上每單位的分點,作 EF 的平行線,那麼,這若干平行線,必把 BF 分做和 AE 相同的等分數.

由是:把 BF 上被等分部分中的一份,當做單位,去量 BD 和 DF, 他們的量度,必定也是 m 和 n.

$$\therefore \quad \frac{BD}{DF}=\frac{m}{n}. \qquad \therefore \quad \frac{AC}{CE}=\frac{BD}{DF}.$$

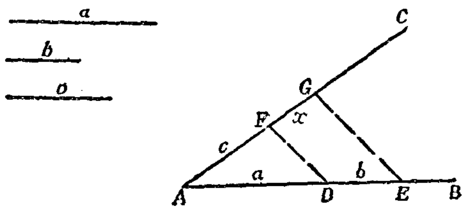
其餘的關係,也可以同樣證明.

習 題



1. 平行於三角形一邊的直線,必把他二邊分成比例.

2. 試作已知三線段 a, b, c 的第四比例項.



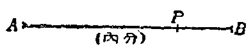
[解] 求 $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$ 式中的 x.

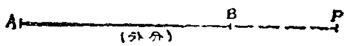
作任意相交的二直線 AB 和 AC, 在他們的上面,取 a, b, c. 連結 DF, 作 $EG \parallel DF$, 則 FG 就是所求的線段了.

(學者自證之)

100. 把一線段,分做兩份,使他的比,等於一已知比.

把線段 AB 分成 $\frac{m}{n}$ 的比,就是在線段 AB 上,去求出有 $\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n}$ 關係的某一點 P 的意思.





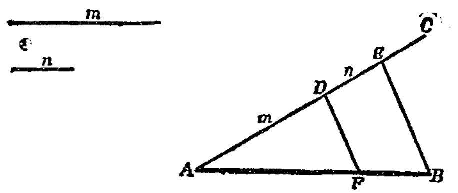
有 $\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n}$ 關係的 P 點,在 AB 的延長線上,也有一點.這個時候的 P 點,叫做

把 AB 外分爲 $\frac{m}{n}$ 的比,故上面所說在 AB 線段內所求的 P 點,叫做把 AB 內分爲 $\frac{m}{n}$ 的比.

無論那一種情形,比的項,一定要照 $A\to P$, $P\to B$ 的次序所量得的部分.

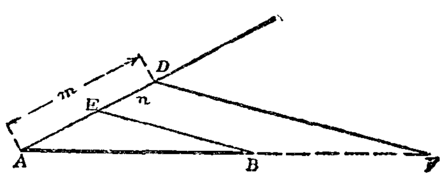
習 題

1. 試把 AB 線段內分爲 $\frac{m}{n}$ 的比.



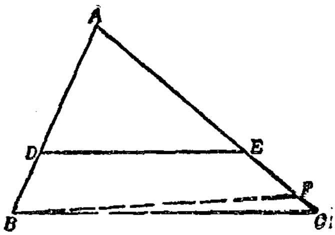
[解] 作通過 A 點的任意直線 AC, 取 $AD=m$, $DE=n$, 連結 BE, 作 $DF\parallel BE$, 則 F 就是所求的點了. (學者自證之)

2. 試把 AB 線段外分爲 $\frac{m}{n}$ 的比. 參照下圖,試另作圖并證明之.



3. 試把5釐米長的線段內分及外分爲3:1的比.

101. **定理** 把三角形的兩邊分做成比例的直線,必和第三邊平行.



〔假設〕 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

〔終結〕 $DE \parallel BC$.

〔證明〕 假如 $DE \nparallel BC$;

作 $BF \parallel DE$, 則

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EF}.$$

但 $$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}, \quad \therefore \quad \frac{AE}{EF}=\frac{AE}{EC}.$$

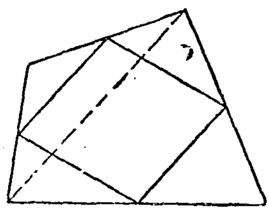
$$\therefore \quad EF=EC.$$

但這是不可能的.

$\therefore$ $DE \nparallel BC$ 的事,是不能成立.

$$\therefore \quad DE \parallel BC.$$

習 題



1. 連結三角形兩邊中點的直線,必和第三邊平行.

2. 把四邊形各邊的中點順次連結所做成的四邊形,是平行四邊形.

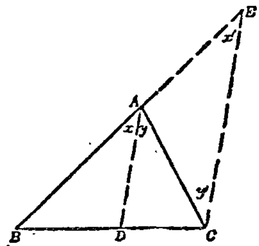
3. 連結三角形各邊中點的直

線,把原來的三角形分做四個全等三角形.

4. 連結四邊形兩組對邊中點的直線,必彼此互相二等分.

102. **定理**　三角形內角的二等分線,必把他的對邊內分爲其他二邊的比.

［假設］　在 $\triangle ABC$ 中, $\angle x=\angle y$.



［終結］　$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BA}{AC}$.

［證明］　延長 BA, 作 $CE \parallel DA$,

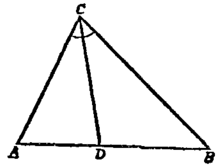
則　$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BA}{AE}$.

但　$\angle x=\angle x'$, $\angle y=\angle y'$.

又　$\angle x=\angle y$.　$\therefore$　$\angle x'=\angle y'$.　$\therefore$　$AE=AC$.

$$\therefore\quad \frac{BD}{DC}=\frac{BA}{AC}.$$

習　題



1. 三角形外角的二等分線,必把他的對邊外分爲其他二邊的比.

2. 右圖三角形中的 CD, 是 $\angle C$ 的二等分線,試把下面的數值求出來.

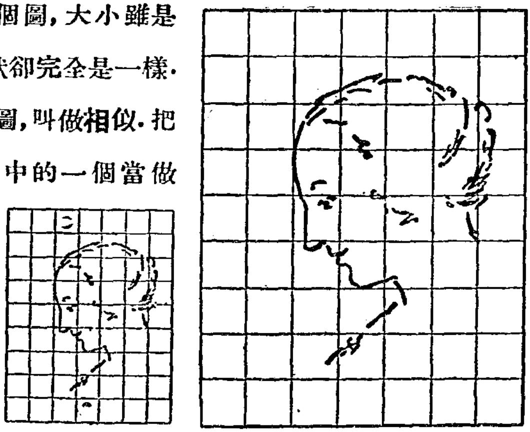
$AC=8$,　$CB=10$,　$AB=9$;　$AD=?$,　$DB=?$

$AC=5$,　$CB=4$,　$DB=3$;　$AD=?$,　$AB=?$

$AC=8$, $CB=16$, $AB=12$; $AD=?$, $DB=?$

[相似三角形]

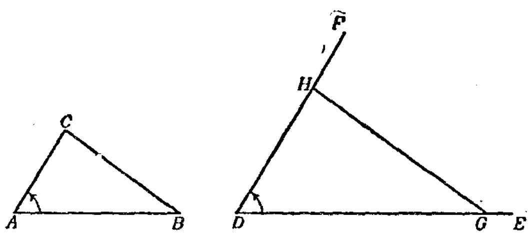
103. 多角形的相似



右面的兩個圖，大小雖是不同，但是形狀卻完全是一樣．像這樣的兩個圖，叫做**相似**．把兩個相似圖形中的一個當做原圖，那麼，另一個就是縮圖或是放大圖．

試畫一個和某三角形同樣形狀的三角形．

[作圖] 假設 $\triangle ABC$ 是一已知三角形．作直線 DE，從 D 點作 DF，使 $\angle FDE=\angle A$．



在 DE 上,取任意的長 DG.

求 AB,DG,AC 的第四比例項 x, 在 DF 上取 $DH=x$.

連結 H,G, 則 $\triangle DGH$ 就是所求的三角形了.

這兩個三角形,大小雖不同,但是形狀完全一樣,所以是**相似三角形**.

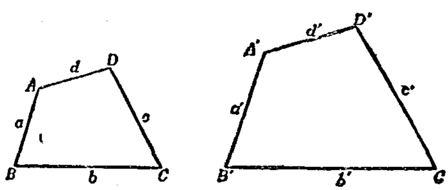
(1) 所有的角,量一量看!兩三角形的相當角,必定是相等.

(2) 量出所有的邊,把 $\frac{AB}{DG}, \frac{BC}{GH}, \frac{AC}{DH}$ 幾個比求一求看!這幾個比,必定是相等.

上面的兩種性質,一切的多角形,都能夠適用.

(定義) 兩多角形的兩相當角相等,并且相當邊的比也都相等的時候,這兩個多角形,叫做**相似**.相似多角形的相當邊的比,叫做**相似比**.

譬如: 在下圖的兩個四角形中,若是:



(1) $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$,

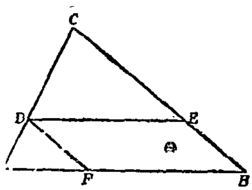
$\angle C=\angle C'$, $\angle D=\angle D'$.

(2) $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$.

那麽,這兩個四角形,就是相似.這可寫做:

$$ABCD \backsim A'B'C'D'.$$

104. 定理 平行於三角形一邊的直線,和其他二邊所做成的三角形,是和原來的三角形相似.



[假設] 在已知三角形 ABC 中, $DE \parallel AB$.

[終結] $\triangle DEC \backsim \triangle ABC$.

[證明] $\triangle DEC$ 的角和 $\triangle ABC$ 的相當角,各各相等 ……………………………………………(1)

$$DE \parallel AB, \quad \therefore \quad \frac{CD}{CA}=\frac{CE}{CB}.$$

作 $DF \parallel CB$,則

$$\frac{FB}{AB}=\frac{DC}{AC}.$$

但 $$DE=FB.$$

$$\therefore \quad \frac{DE}{AB}=\frac{DC}{AC}.$$

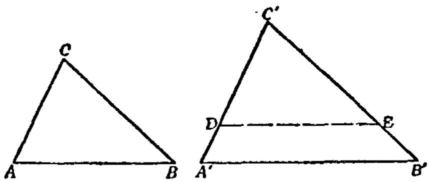
$$\therefore \quad \frac{CD}{CA}=\frac{CE}{CB}=\frac{DE}{AB} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle DEC.$$

105. 定理 兩個角各各相等的兩個三角形，是相似三角形.

［假設］ 在 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 中,

$$\angle A=\angle A',\quad \angle C=\angle C'.$$



［終結］ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

［證明］ 在 $C'A'$ 上,取 $C'D=CA$, 作 $DE \parallel A'B'$, 則

$$\triangle DEC' \backsim \triangle A'B'C',$$

$$\angle D=\angle A'.$$

但 $$\angle A'=\angle A.$$

$$\therefore\quad \angle D=\angle A.$$

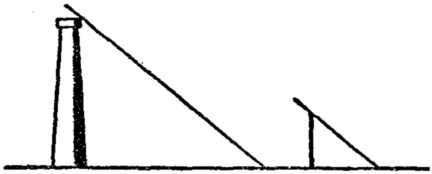
又 $$\angle C=\angle C',\ C'D=CA.$$

$$\therefore\quad \triangle DEC' \equiv \triangle ABC.$$

$$\therefore\quad \triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC.$$

習題

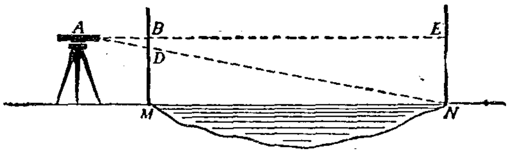
1. 在某時刻,烟筒在地上的影子的長是 36 米；木棒的影



子的長是 4.5 米.今知木棒的長是 2 米.問烟筒的高是多少米?

2. 測河的對岸距離的方法:

假定所要去測量的對岸兩地點是 M 和 N. 在 M, N 兩處,



垂直插兩測桿 MB 和 NE, 從 A 處,用經緯儀水平的觀察兩桿,得出 B 或 E 的高.次再看 N 點,得出 D 的高,那麼,MN 的距離,就可求得了.他的理由怎樣? (AB 的距離是已知)

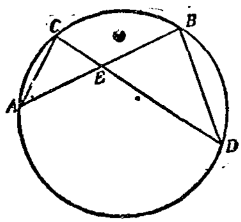
假如 $AB=2$ 米, $EN=2.3$ 米, $BD=15$ 釐米.問兩對岸的距離是多少?

3. 物體大概的高,用一玻璃鏡,可以把他測量出來.

先把鏡面很平的放在地上,然後自己站在恰好能看見這物體頂點的像的位置,則由已知的各距離,就可計算物體的高.試說明他的理由.

4. 兩弦 AB, CD, 若在圓內交於一點 E, 則

$$\triangle AEC \backsim \triangle BED.$$



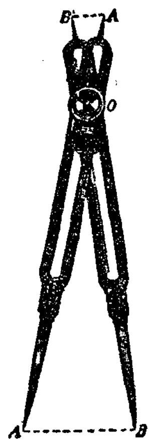
5. 有一個銳角相等的兩個直角三角形,是相似三角形.

6. 頂角相等的兩個二等邊三角形相似.

7. 連結三角形三邊的中點所做成的三角形,和原來的三角形相似.

8. 兩個三角形的相當邊,或是平行;或是垂直,則這兩三角形相似.

9. 右圖所畫的器具,叫做比例規,是把長縮小或放大時所用的器具.移動螺絲 O, 作 $OB'=\frac{1}{3}OB$, $OA'=\frac{1}{3}OA$, 則 $A'B'$ 是等於 $\frac{1}{3}AB$. 他的理由怎樣?



10. 通過相切的兩個圓的切點,作一直線,則他和各圓相交所成的兩弦的比,等於兩圓的直徑的比.

11. 梯形的兩對角線所被分爲兩段的比，各等於梯形中相平行的兩邊的比.

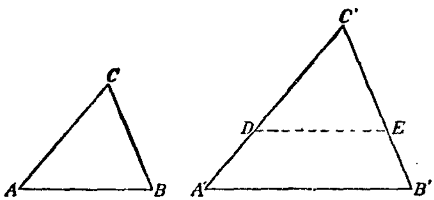
12. 用一木棒，可測出塔的高，試說明他的方法.

13. 試在一已知線段上，作一三角形，和一已知三角形相似.

106. **定理** 兩三角形中，若有一個角相等，且夾這個角的兩條邊成比例，則這兩三角形相似.

[證明] 在 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$ 中，假定

$$\angle C=\angle C',\quad \frac{CA}{C'A'}=\frac{CB}{C'B'}.$$



在 $C'A'$ 上，取 $C'D=CA$；

在 $C'B'$ 上，取 $C'E=CB$；則

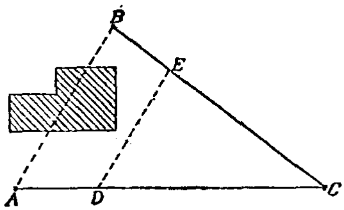
$$\frac{C'D}{C'A'}=\frac{C'E}{C'B'},\quad \therefore\quad DE\parallel A'B'.$$

$$\therefore\quad \triangle DEC'\backsim\triangle A'B'C'.$$

但 $\triangle DEC'\equiv\triangle ABC$, $\therefore$ $ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

習 題

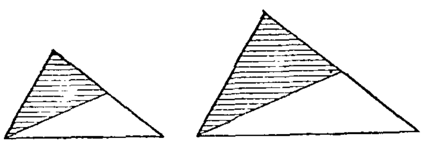
1. AB 間的距離,因爲有房屋隔住,不能直接把他測量出來.今取適當的一點 C,量出 CA 和 CB.在 CA 上取一點 D;更在 CB 上取一點 E,使 $\frac{CD}{CA}=\frac{CE}{CB}$.那麼量出 DE,就可以求出 AB 的距離了.試說明他的理由.



若 $CA=35$ 米,$CD=10$ 米,$DE=6$ 米.求 AB 的距離是多少?

2. 三角形兩邊的長,一個是 14 釐米;一個是 3.5 釐米,所夾的角是 65°.另一三角形兩邊的長,一是 20 釐米;一是 5 釐米,所夾的角也是 65°.試把這兩三角形相似的理由表示出來.

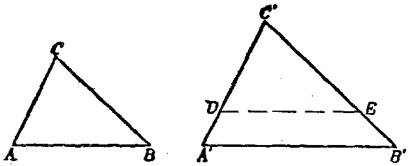
3. 兩相似三角形相當邊的中線的比,等於相似比.



107. **定理** 兩三角形的各相當邊若都成比例,則這兩形相似.

[證明] 在 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 中,假定

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}.$$



在 $C'A'$ 上,取 $C'D=CA$; 在 $C'B'$ 上,取 $C'E=CB$; 則因

$$\frac{CA}{C'A'}=\frac{CB}{C'B'}, \quad \therefore \quad \frac{C'D}{C'A'}=\frac{C'E}{C'B'}.$$

$$\therefore \quad \triangle DEC' \backsim \triangle A'B'C', \quad \therefore \quad \frac{C'D}{C'A'}=\frac{DE}{A'B'}.$$

又因
$$\frac{CA}{C'A'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

即
$$\frac{C'D}{C'B'}=\frac{AB}{A'B'}, \quad \therefore \quad \frac{DE}{A'B'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

$$\therefore \quad DE=AB, \quad \therefore \quad \triangle DEC' \equiv \triangle ABC.$$

$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'.$$

習 題

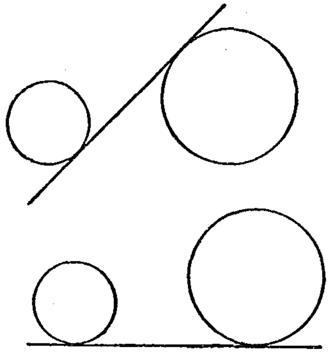
1. 有一三角形的地面,各邊的長,大概是 125 米, 54 米, 112 米.試用 5 釐米的長來代表他的最長的一邊畫一個縮圖.

2. 一三角形周圍的長是 15 釐米;和這三角形相似的另

一三角形三邊的長,是 4.5 釐米, 6.4 釐米, 7.1 釐米.試求第一個三角形各邊的長.

[圓的公切線]

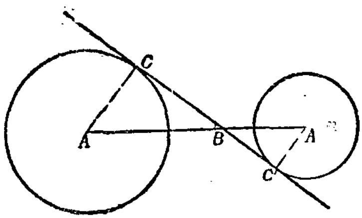
108. 公切線



(定義) 同時切於兩圓的直線,叫做**公切線**.兩圓在公切線同側的時候,這個公切線,叫做**外公切線**;兩圓在公切線反對側的時候,這個公切線,叫做**內公切線**.

109. 作圖題 一圓全在他圓之外,求作這兩圓的公切線.

(I) 內公切線.



[作圖] 連結 A, A', 把 AA' 內分做等於兩半徑的比的一點 B.從 B 作 A 圓的切線 BC,則 BC 就是所求的公切線了.

[證明] 連結 A 點和切點 C, 且作 $A'C' \perp CB$.

現在只要證明 $A'C'$ 是等於 A' 圓的半徑,那麼, BC 就是和 A' 圓相切.

假定 A 圓和 A' 圓的半徑是 r 和 r',

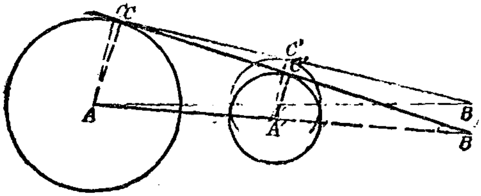
$\because \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'BC', \quad \therefore \quad \dfrac{AB}{A'B}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{r}{A'C'}.$

但 $\qquad \dfrac{AB}{A'B}=\dfrac{r}{r'}, \quad \therefore \quad \dfrac{r}{r'}=\dfrac{r}{A'C'}.$

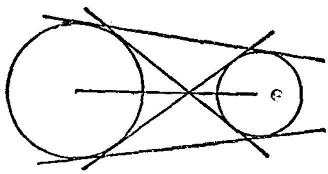
$\therefore \quad A'C'=r', \quad \therefore$ BC 切於 A' 圓.

(II) 外公切線.

[作圖] 把 AA' 外分做等於兩半徑的比的一點假定的



B. 從 B 作 A 圓的切線 BC, 則 BC 就是所求的公切線了.



[證明] 和 (1) 相同.

[討論] 可作兩條內公切線和兩條外公切線. (何故?)

習 題

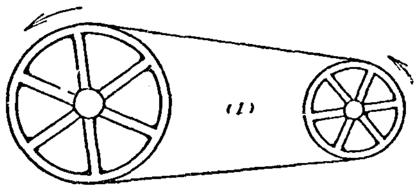
1. 兩圓的中心距離是 6 釐米, 兩半徑是 2.5 釐米和 1.5 釐米. 試作這兩圓的公切線.

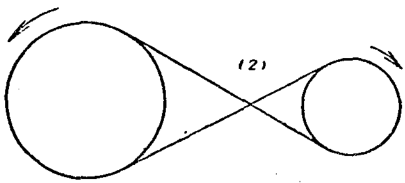
2. 兩圓的公切線,對於中心線是對稱.

3. 兩個等圓的公切線,和中心線平行.

4. 試作兩個等圓的公切線.

5. 兩個皮帶輪上,掛一條皮帶,就可以把一個軸的運動,傳到另一個軸使他也迴轉起來.





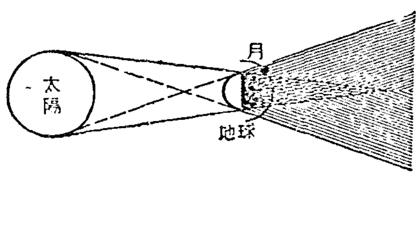
假定兩皮帶輪的半徑是 R 和 r,皮帶輪的兩個軸間的距離是 a,皮帶的全長是 l,則

$$l=\pi(R+r)+2a \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$l=2\sqrt{(R+r)^2+a^2}+\pi(R+r)\cdots\cdots(2)$$

設 $R=30$ 釐米, $r=15$ 釐米, $a=1$ 米. 試求上面兩種情形時,皮帶的全長是多少?

6. 月蝕是月球走到地球的陰影內部時所起的現象. 太陽和地球的兩條外公切線所

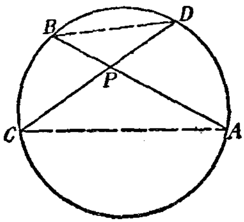


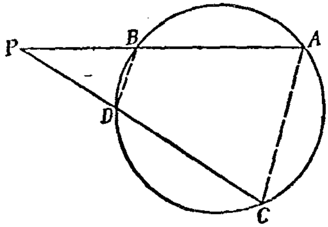
夾的部分是黑暗部，叫做本影；夾於兩條內公切線的部分是半暗部，叫做半影.

假定太陽的半徑是 695,000 仟米，地球的半徑是 6300 仟米.太陽到地球的距離是 149,500,000 仟米.試求本影的長.

[圓的比例線段]

110. 定理　圓的兩弦 AB 和 CD，若是交於圓內或圓外的一點 P，則 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$.





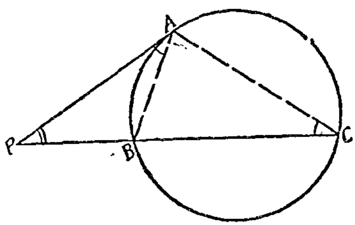
[證明]　$\because$　$\triangle APC \backsim \triangle DPB$.

$$\therefore\quad \frac{AP}{DP}=\frac{PC}{PB}.$$

$$\therefore\quad AP\cdot PB=DP\cdot PC.$$

111. 定理　若 PA 是圓的切線，PC 是圓的割線，則

$$\overline{PA}^2=PB\cdot PC.$$

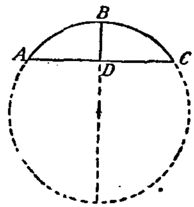


[證明]　連結 AB 和 AC，則因 $\triangle PAB \backsim \triangle PAC$.

$$\therefore \quad \frac{PA}{PC}=\frac{PB}{PA}, \quad \therefore \quad \overline{PA}^2=PB\cdot PC.$$

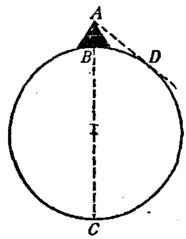
習題

1. 有一圓弧形的路線 ABC. 今測得他的弦 AC 的長是 64 米, AC 的垂直二等分線所夾於弓形 ABC 間的部分的長 BD 是 2 米. 試求圓弧 ABC 的半徑.



2. 問在 3000 米高的山頂上所能看見的距離 (AD) 是多少?

(地球的半徑＝6300 仟米)

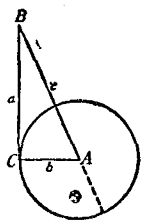


3. 從圓外的一點, 作圓的兩切線. 試用 (111) 節的定理, 證明這兩條切線的長相等.

4. 直角三角形斜邊的平方, 等於他二邊的平方的和.

$$c^2=a^2+b^2.$$

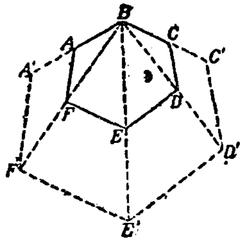
(畢達哥拉斯定理)



[相似多角形]

112. 作圖題 求作一多角形, 和一已知多角形相似.

〔題意〕 假定已知多角形是 $ABCDEF$, 去作一個和他相似的多角形.



〔作圖〕 從任意頂點 B, 向其他各頂點作對角線并延長之.

從 BA 上任意的一點 A', 作

$$A'F' \parallel AF,$$

再順次作 $$F'E' \parallel FE,$$

$$E'D' \parallel ED, \quad D'C' \parallel DC,$$

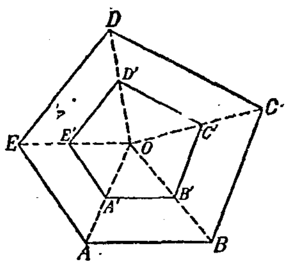
則 $A'B'C'D'E'F'$ 就是所求的多角形了.

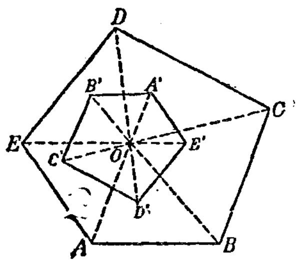
〔證明〕 $\angle D=\angle D'$, $\angle E=\angle E'$,……

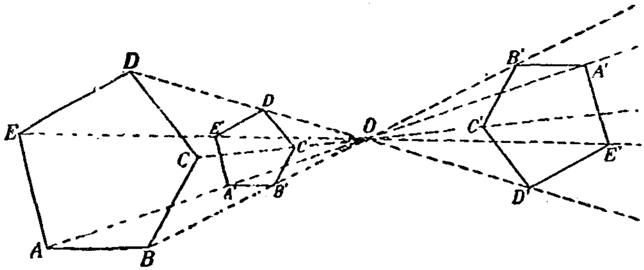
又 $$\frac{CD}{C'D'}=\frac{BD}{BD'}=\frac{DE}{D'E'}=\cdots\cdots$$

$$\therefore \quad \frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EF}{E'F'}=\cdots\cdots$$

113. 定理 從一點向多角形的各頂點連結成直線,把此等直線內分或外分於相同的一已知比的各點,順次連結起來,







則所成的多角形,和原多角形相似. (學者自證之)

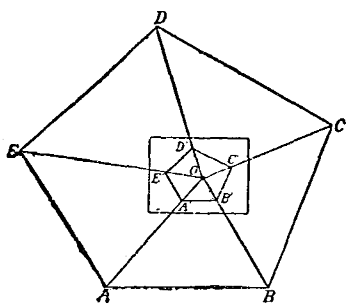
〔推論〕 把兩個相似多角形的各組相當邊各相平行的放起來,則連結他們相當頂點的直線必交於一點

像這樣的兩個多角形,叫做在**相似位置**;這個交點,叫做兩形的**相似中心**.

習 題

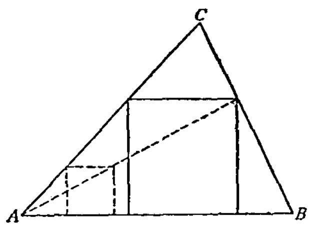
1. 應用上面兩節的原理,可以測量地面.

假定打算去測量的地面是 $ABCDE$, 在他的內部,水平的放一圖板,板的紙上取一點O,從 O 向 $A, B,$……等點的方向各作直線,然後從O點筆直下面地上的一點,實測 $OA, OB,$……等等距離的



長,用適當的縮尺,在紙上記出 A', B',……各點,則 $A'B'C'D'E'$,就是 $ABCDE$ 地域的圖形了.這個方法,叫做平板測量.

2. 試由三角形板 ABC 中,切取一個最大的正方形.



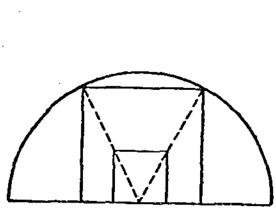
三角形的內接正方形,就是最大,他的求法是這樣:

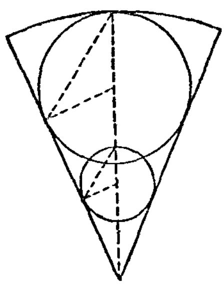
在三角形的一邊上,任取一點當做頂點,作一個正方形,使他的一邊在三角形的另一邊上,那麼,再應用相似的道理,就可以作一個內接正方形了.

像這樣想出一個解法來的方法,叫做相似法.

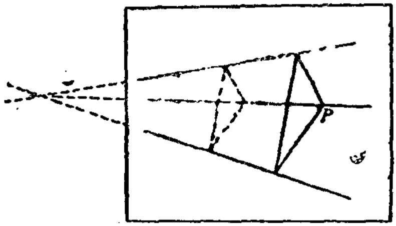
3. 在一已知三角形內,求作一內接矩形,和一已知矩形相似.

4. 在一已知半圓內,求作一內接正方形.在一已知扇形內,求作一內接圓.





5. 有不平行兩條直線,但是他的交點無法畫出來的時候,



試由一已知點作通過這交點的直線.

114. 縮圖和放大圖

用相似多角形的理由，作一個多角形和一已知多角形相似,若是所作的多角形的某一邊,是已知多角形一邊的 x 分之一或是 x 倍的時候,那麼,所作的多角形的其餘各邊,也就都是已知多角形相當邊的 x 分之一或是 x 倍了.

像這樣和原形的形狀完全相同，而大小不同的圖形，叫做縮圖或放大圖.

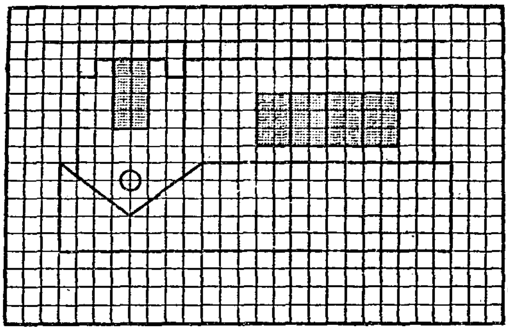
原形若不是直線圖形的時候,可以在原圖上選擇主要的幾點,把他聯結成一個直線圖形. 拿這個直線圖形當做基礎,就可以畫出他的縮圖或放大圖.

地圖就是用這個方法所製成的,他的次序是這樣:

先把地上幾個重要地點的距離量出來,連結這幾點作一個縮圖,然後拿這個縮圖當做基礎，再畫其他的細微的部分，就成功了.

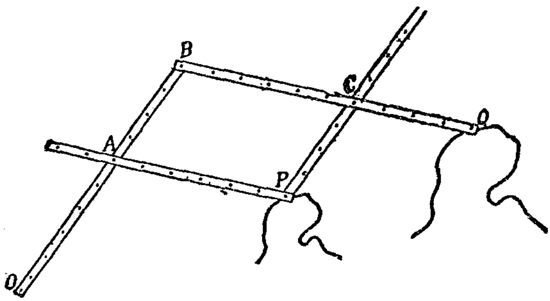
通常所謂二十萬分之一, 五萬分之一等等的地圖, 就是地圖上所有各地點間的距離, 當實際的距離的二十萬分之一, 五萬分之一的意思.

試作下圖的二倍大的放大圖.



又,試作適當地圖一部分的二分之一的縮圖.

下圖的器具,叫做比例畫器 (pantograph), 是縮小圖形或



放大圖形所用的器具. BO, BQ, PA, PC 諸桿的一部分,作成一平行四邊形,若做成 $\frac{OA}{OB}=\frac{BC}{BQ}$ 的時候,則 O, P, Q 三點,總是在一直線上.縮小或放大的比率,則用桿上的刻度去調整他.固定 O 點,把 P 處的針,沿着原圖移動,則 Q 處的鉛筆,就畫出一個和原圖相似的圖形.

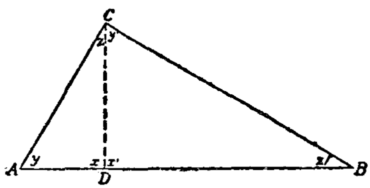
[直角三角形的相似]

115. 定理 從直角三角形的直角頂向斜邊作垂線,則垂線所分成的兩個三角形相似,且各和原三角形也相似.

[假設] 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=$直角, $CD\perp AB$.

[終結] $\triangle ADC\backsim\triangle BDC\backsim\triangle ABC$.

[證明] $y+z'=$直角, $y'+z'=$直角.



$\therefore\quad y+z'=y'+z'$.

$\therefore\quad y=y'$.

又 $\quad x=x'$.

$\therefore\quad \triangle ADC\backsim\triangle BDC$.

又, $\triangle ADC$ 和 $\triangle ABC$ 是互等角三角形,所以相似.

同理 $\quad \triangle BDC\backsim\triangle ABC$.

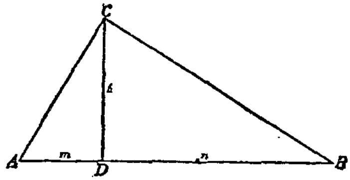
116. 定理 從直角三角形的直角頂向斜邊所作的垂線,是斜邊上所被分做兩部分 (m, n) 的比例中項.

[證明] $CD\perp AB$,

$\angle C=$直角.

$\therefore$ $\triangle ADC\backsim\triangle BDC$.

$\therefore$ $\frac{m}{h}=\frac{h}{n}$.



習 題

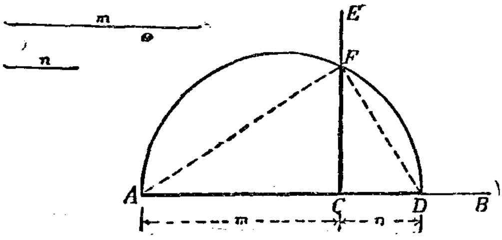
1. 從圓周上的一點,向直徑所作的垂線的平方,等於直徑被垂足所分爲兩部分的相乘積.

2. 從直角三角形的直角頂向斜邊作垂線,若斜邊被垂足分做 3 釐米和 12 釐米的兩部分.問垂線的長和直角的兩邊的長各是多少?

117. 作圖題 求作兩已知線段的比例中項.

[題意] 求作兩線段 m, n 的比例中項.

[作圖] 在一直線 AB 上,取 $AC=m, CD=n$. 作 $CE\perp AB$.



用 AD 當做直徑畫圓,和 CE 交於 F, 則 FC 就是 m 和 n

的比例中項.

［證明］ 作 AF 和 DF, 則

$\because$ $\angle AFD=$直角. $\therefore$ $\triangle AFD$ 是直角三角形.

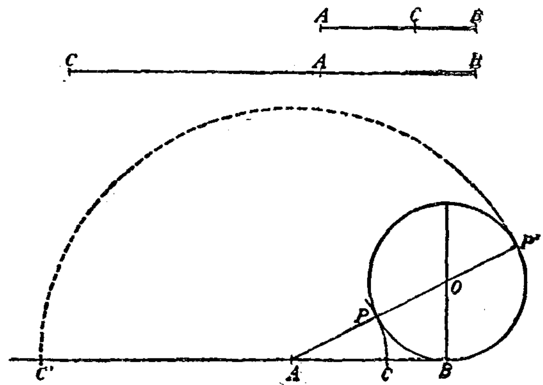
$$\therefore \quad \frac{m}{FC}=\frac{FC}{n}.$$

118. 作圖題 內分或外分一線段爲兩部分，使全線段和任一部分的積,等於另一部分的平方.

［題意］ 把線段 AB 內分或外分於 C 點,而使

$$AB\cdot BC=\overline{AC}^2.$$

［作圖］ 在 AB 線段的一端,作一個和 AB 相切而直徑等



於 AB 的圓.

通過圓的中心 O 和 A點,作一直線,和圓周交於 P, P' 兩點.

用 A 做中心, AP 或 AP' 各做半徑畫圓弧,截 AB 或他的延長線於 C 或 C', 則 C 和 C' 就是所求的內外兩分點了.

[證明] $AP\cdot AP'=\overline{AB}^2$.

又 $AP=AC,\ AP'=AP+PP'=AC+AB$.

$$\therefore\quad AC(AC+AB)=AB^2.$$

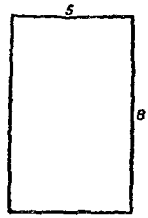
$\therefore\quad \overline{AC}^2=\overline{AB}^2-AC(AB)=AB(AB-AC)=AB\cdot BC$.

同理 $\overline{AC'}^2=AB\cdot BC'$.

(註) 像這樣分割一線段，叫做黃金分割. 用這種關係所作的矩形，換句話來說：就是照(短邊):(長邊(=(長邊):(長邊+短邊)關係所作的矩形，看起來，最是發生一種好感的形狀.

短邊:長邊≈5:8 的時候，大概近於這種關係.

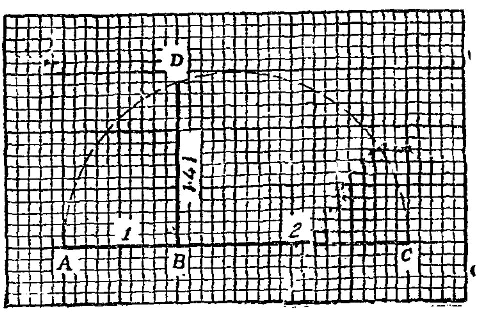
所以明信片，書籍，雜誌等等，多做成和這種形狀大約相近.



習題

1. 用圖解求 $\sqrt{2}$ 之值.

[解] 在方格紙上取 $AB=1$, $BC=2$, 用 AC 做直徑畫圓.

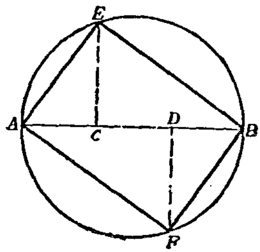


從 B 作垂線交圓於 D 點,則 BD 就是所求的平方根. BD 等於多少?他的理由怎樣?

2. 用圖解求 $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ 諸數值.

3. 正方形的一邊是"對角線"和"對角線的一半"的比例中項.

4. 右圖的圓,是表示圓木材的切口.



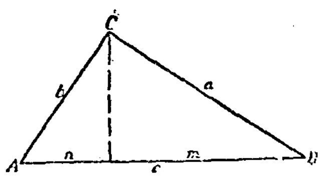
三等分直徑 AB, 得 C, D 兩點,作 $CE \perp AB$, $DF \perp AB$, 則得矩形 $AFBE$. (何以知道是矩形?)

假如木材的直徑是 50 釐米,問這矩形的兩邊各是多少長? 若二邊的長是 a 和 b, 試寫出一個式子來表明 a 和 b 的關係.

照上面的方法,從圓木所切取的角材,是最強的材料.

119. 定理 直角三角形斜邊的平方,等於他二邊的平方的和. (畢達哥拉斯定理)

[(111) 節問題 4, 是另一證明]



[假設] 在直角三角形 ABC 中, $\angle C$ = 直角.

[終結] $a^2+b^2=c^2$.

[證明] 從 C 點作 AB 的

垂線,則 $$\frac{m}{a}=\frac{a}{c} \text{ 及 } \frac{n}{b}=\frac{b}{c}.$$

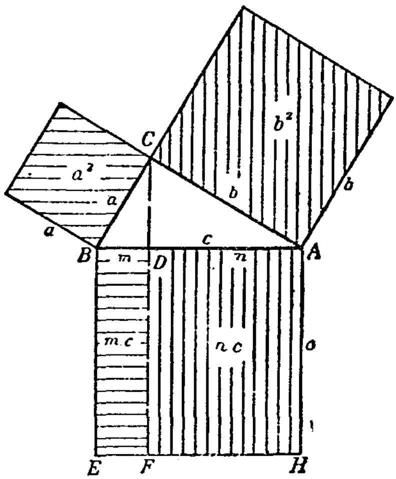
$$\therefore \quad a^2=m\cdot c$$

$$b^2=n\cdot c$$

$$a^2+b^2=(m+n)c$$

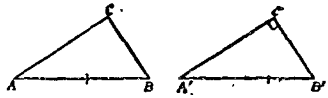
$$\therefore \quad a^2+b^2=c^2.$$

或 $$\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\overline{AB}^2.$$



由上圖,知道 $a^2=m\cdot c$ 式子,就是 BC 上的正方形等於矩形 $DBEF$; $b^2=n\cdot c$ 式子,就是 AC 上的正方形等於矩形 $ADFH$. 所以 AC 上的正方形和 BC 上的正方形的和,等於斜邊 AB 上的正方形.

[推論] 在 $\triangle ABC$ 中,若 $\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\overline{AB}^2$, 則



$\angle BCA=$直角.

作一直角三角形 $A'B'C'$;

使 $\angle C'=$直角, $A'C'=AC, B'C'=BC$, 則

$$\overline{A'C'}^2+\overline{B'C'}^2=\overline{A'B'}^2.$$

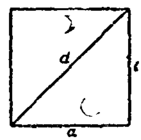
但由作圖及假設 $\overline{A'C'}^2+\overline{B'C'}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$.

$$\therefore\quad A'B'=AB.$$

$\therefore\quad \triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'.\quad \therefore\quad \angle C=\angle C'=$直角.

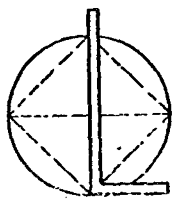
習　題

1. 直角三角形中夾直角的兩邊,一是 3 釐米,一是 4 釐米.問斜邊是多少?



2. 等邊三角形中,邊和高的關係怎樣?

3. 二等邊三角形等邊的長,各是 18 釐米,底邊的長是 16 釐米.問他的高是多少長?



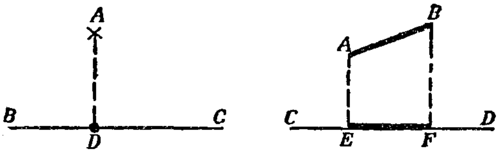
4. 圓的半徑是 r, 問圓的外切正六角形的一邊是多少長?

5. 圓的半徑是 r, 試求圓的內接和外切正三角形每邊的長各是多少?

6. 外接於每邊是 10 釐米的正方形的圓中, 作一正三角形.問他的一邊的長是多少?

120. 正射影

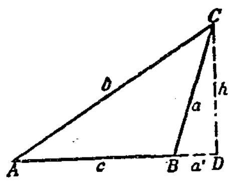
(定義) 從一點,向一直線作垂線,這垂線的足,叫做一點在一直線上的**正射影**.



從一線段的兩端,向一直線各作垂線,這兩端在直線上的正射影所限制的部分,叫做一直線上的線段的**正射影**.

A 點在 BC 線上的正射影是 D, AB 線段在 CD 線上的正射影是 EF.

121. 定理 鈍角三角形中鈍角對邊的平方,等於其他二邊的平方和,再加上這二邊中的一邊與在其邊上他一邊的正射影相乘積的二倍.



[假設] 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC$ 是鈍角.

[終結] $b^2=a^2+c^2+2ca'$.

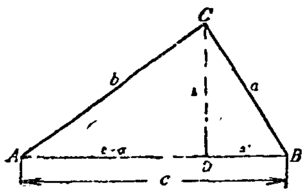
[證明] $b^2=h^2+(c+a')^2, a^2=h^2+a'$.

$$\therefore \quad b^2-a^2=c^2+2ca'.$$

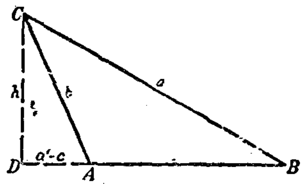
$$\therefore \quad b^2=a^2+c^2+2ca'.$$

122. 定理 三角形銳角對邊的平方,等於其他二邊的平

方和減去這二邊中的一邊與在其邊上他一邊的正射影相乘積的二倍.



[證明]　假定 $\triangle ABC$ 中的 B 角是銳角,則



$b^2=h^2+(c-a')^2, a^2=h^2+a'^2.$

$\therefore\quad b^2-a^2=(c-a')^2-a'^2$

$=c^2-2ca'+a'^2-a'^2.$

$=c^2-2ca'.$

$\therefore\quad b^2=a^2+c^2-2ca'.$

習　題

1. 三角形三邊的長是 7 尺, 8 尺, 10 尺.試求從一頂點向最大邊所作的垂線的長.

2. 三角形三邊的長是 6 釐米, 11 釐米, 7 釐米.試求向最小邊所作的垂線的長.

3. 三角形三邊的長是 a, b, c. 試求三中線的長.又,假定 $a=35$ 毫米, $b=34$ 毫米, $c=28$ 毫米.三中線各是多少長?

4. 平行四邊形的邊各是 25 毫米, 35 毫米,有一條對角線是 40 毫米.問另一對角線是多少長?

第六章

三角函數

[銳角的三角函數]

123. 未知角和距離

求未知角和距離的方法,前面已經講過幾種,就是:

(1) 用縮圖法;

(2) 用全等三角形法;

(3) 用相似三角形法;

(4) 用直角三角形法.

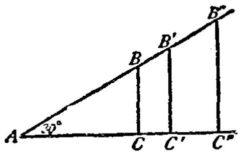
(1), (2), (3) 三種方法,不甚正確,且手續較繁.在直角三角形中,因爲有下面所寫的幾種特性,應用他來求未知角和距離,是比較容易很多.

(a) 畢達哥拉斯定理.

(b) 直角三角形的兩個銳角,互爲餘角.

(c) 一個銳角相等的兩個直角三角形相似.

習題



1. 作一個 30° 的角，從他的一邊上的任意諸點 B, B'……，向另一邊作諸垂線，做成數個直角三角形．試就每個三角形，把下面所寫的諸比的數值，實際量出來．

$$\frac{對邊}{斜邊},\quad \frac{鄰邊}{斜邊},\quad \frac{對邊}{鄰邊}.$$

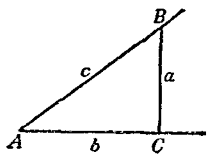
這幾個比中每一個比的數值，對於 B, B'……諸點的位置有沒有關係？并說明他的理由．

2. 作 60° 的角，求上面諸比的數值．

3. 作 45° 的角，求上面諸比的數值．

4. 就 30°, 45°, 60° 諸角，試比較 $\frac{對邊}{斜邊}$ 的比的數值．并同樣比較其他兩個比的數值．問比和角的大小，有沒有關係？

124. 角的三角函數



假定 $\angle A$ 是一已知銳角．

從一邊上任意一點 B，向另一邊引垂線，作成一個直角三角形．

三個比 $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}$，和 B 的位置沒有關係，只和 $\angle A$ 的大小有關係，$\angle A$ 若是一定，那麼，這幾個比的數值，也就一定了．

(定義)　$\angle A$ 的對邊對於斜邊的比,叫做**正弦** (sine), 寫做 $\sin A$. 即

$$\sin A=\frac{a}{c}.$$

$\angle A$ 的鄰邊對於斜邊的比,叫做**餘弦** (cosine), 寫做 $\cos A$. 即

$$\cos A=\frac{b}{c}.$$

$\angle A$ 的對邊對於鄰邊的比,叫做**正切** (tangent), 寫做 $\tan A$. 即

$$\tan A=\frac{a}{b}.$$

(定義)　正弦的逆數,叫做**餘割** (cosecant), 寫做 $\csc A$. 即

$$\csc A=\frac{c}{a}.$$

餘弦的逆數,叫做**正割** (secant), 寫做 $\sec A$. 即

$$\sec A=\frac{c}{b}.$$

正切的逆數,叫做**餘切** (cotangent), 寫做 $\cot A$. 即

$$\cot A=\frac{b}{a}.$$

125.　三角函數

角的大小,若有變更,則正弦,餘弦,正切等等的數值,也就跟着不同. 譬如:正弦的關係,若用 x 代表 $\angle A$, y 代表 $\frac{a}{c}$, 則得

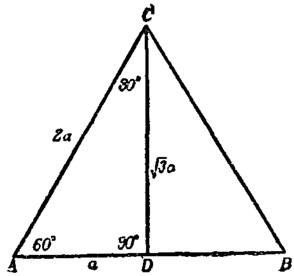
$$\sin x=y.$$

x 的數值,若有變更,則 y 的數值,也就跟着變更了.那就是說: y 是 x 的函數.

(定義)　角的正弦,餘弦,正切,餘切,正割,餘割等,總叫做角的三角函數.三角函數,又叫做三角比或叫做圓函數.

126. 30°, 45°, 60° 的三角函數

1. 從正三角形 ABC 的一頂點 C 向對邊作垂線,把三角形分做二等分,則 $\triangle ADC$ 中的兩個銳角,一個是 30°, 一個是 60°.



$$AC=2AD=2a,$$

$$CD=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{3}\cdot a.$$

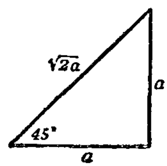
$$\therefore\quad \sin 30^\circ=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2},\qquad \sin 60^\circ=$$

$$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}\,a}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \cos 60^\circ=$$

$$\tan 30^\circ=\qquad\qquad \tan 60^\circ=$$

試把上面諸比的數值求出來.

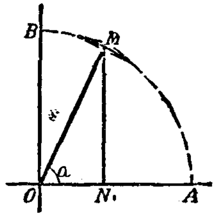
2. 作一個二等邊直角三角形,則得 45° 的角.



試計算下面的諸數值:

$$\sin 45^\circ=\qquad \cos 45^\circ=\qquad \tan 45^\circ=$$

127. 0°, 90° 的三角函數



作互相垂直的二直線 OA, OB, 用 O 做中心,用任意的半徑作圓弧 AMB, 從弧上任意的一點 M, 作 $MN \perp OA$.

把 OM 迴轉於 O 點的周圍,若是漸近於 OB, 則 $\angle a$ 漸大,終必達到 90°. 同時, MN 亦漸大,終必等於 OM, 而 ON 則漸小,終必等於零.

因此,得到 $\angle a$ 的正弦 $\left(\frac{MN}{OM}\right)$ 無限的和 1 相近;

餘弦 $\left(\frac{ON}{OM}\right)$ 無限的和零相近;

正切 $\left(\frac{MN}{ON}\right)$ 無限的增大.

$$\therefore \quad \sin 90^\circ = 1, \qquad \csc 90^\circ = 1,$$
$$\cos 90^\circ = 0, \qquad \sec 90^\circ = \infty,$$
$$\tan 90^\circ = \infty, \qquad \cot 90^\circ = 0.$$

再者,若是把 OM 迴轉漸近於 OA, 則 $\angle a$ 漸小,終必達到 0°. 同時, MN 漸小,終至於零;而 ON 則漸大,終至等於 OM.

$$\therefore \quad \sin 0^\circ = 0, \qquad \csc 0^\circ = \infty,$$
$$\cos 0^\circ = 1, \qquad \sec 0^\circ = 1,$$
$$\tan 0^\circ = 0, \qquad \cot 0^\circ = \infty.$$

習題

1. 在直角三角形中, $\angle C=90°$, $AC=3$, $BC=4$. 問 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的諸函數的數值各是多少?

2. 把下面的幾個 A 角,用圖畫出來:

$$\sin A=\frac{1}{3},\qquad 8\cos A=3,\qquad \tan A=\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

3. 圓的半徑是 r, 中心角是 x, 對於中心角的弦長是 L. 試證:

$$L=2r\sin\frac{x}{2}.$$

4. 一三角形,底邊是 50 公分,頂角是 $60°$. 試求他的外接圓的半徑.

5. 證明下面的等式:

$$(1+\sin 45°+\sin 30°)(1-\cos 45°+\cos 60°)=\frac{7}{4}.$$

6. 把 $\dfrac{\sin 60°-\sin 45°}{\tan 60°-\tan 30°}$ 的數值,算到小數第二位.

7. 由 $\sqrt{3}=x^2\cdot\tan 30°$ 式子,求出 x 的數值.

8. 三角形三邊的長是 6 釐米, 5 釐米, 4 釐米. 問每一邊在其他二邊上的正射影各是多少? 并求這三角形的高,和每個角的正弦,餘弦,正切,等等.

128. 三角函數表

任意角的三角函數的數值,不能像前面兩節那樣的簡單.把他們的近似值,用某種方法計算出來列成一表,叫做**三角函數眞數表**.除此以外,還有叫做三角函數對數表者.

習　題

1. 角度若是增加,問正弦,餘弦,正切等等的變化是怎樣?餘切,正割,餘割等等的變化又是怎樣?試觀察函數表把他答出來.

2. 試由表求出下面的諸數值:

$\sin 20^\circ$, $\cos 11^\circ$, $\tan 20^\circ$, $\cot 30^\circ$,

$\sin 42^\circ$, $\cos 63^\circ$, $\tan 85^\circ$, $\cot 77^\circ$;

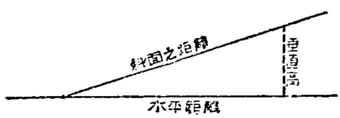
正弦等於 0.3907 的角,　　餘弦等於 0.9816 的角.

正弦等於 $\frac{3}{4}$ 的角,　　餘弦等於 $\frac{1}{3}$ 的角,

正切等於 0.6 的角,　　正切等於 $\frac{5}{4}$ 的角.

129. 斜度

道路,屋頂等等,對於水平面傾斜的程度,叫做**斜度**.通常,用垂直高對於水平距離的比來表斜度;但是在特別情形中,也有用垂直高對於斜面的距離的比來表斜度的時候.

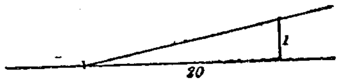


三角函數之眞數表

角度	sin	cos	tan	cot	角度	sin	cos	tan	cot
1°	.0175	.9998	.0175	57.2900	46	.7193	.6947	1.0355	.9657
2	.0349	.9994	.0349	28.6363	47	.7314	.6820	1.0724	.9325
3	.0523	.9986	.0524	19.0811	48	.7431	.6691	1.1106	.9004
4	.0698	.9976	.0699	14.3007	49	.7547	.6561	1.1504	:8693
5	.0872	.9962	.0875	11.4301	50	.7660	.6428	1.1918	.8391
6	.1045	.9945	.1051	9.5144	51	.7771	.6293	1.2349	.8098
7	.1219	.9925	.1228	8.1443	52	.7880	.6157	1.2799	.7813
8	.1392	.9903	.1405	7.1154	53	.7986	.9018	1.3270	.7536
9	.1564	.9877	.1584	6.3138	54	.8090	.5878	1.3764	.7265
10	.1736	.9848	.1763	5.6713	55	.8192	.5736	1.4281	.7002
11	.1908	.9816	.1944	5.1446	56	.8290	.5592	1.4826	.6745
12	.2079	.9781	.2126	4.7046	57	.3387	.5446	1.5399	.6494
13	.2250	.9744	.2309	4.3315	58	.8480	.5299	1.6003	.6249
14	.2419	.9703	.2493	4.0108	59	.8572	.5150	1.6943	.6009
15	.2588	.9656	.2679	3.7321	60	.8660	.5000	1.7321	.5774
16	.2756	.9613	.2867	3.4874	61	.8746	.4848	1 8040	.5513
17	.2924	.9563	.3057	3.2709	62	.8826	.4695	1.8807	.5317
18	.3090	.9511	.3249	3.0777	63	.8910	.4540	1.9629	.5095
19	.3256	.9455	.3443	2.9042	64	.8988	.4384	2.0503	.4877
20	.3420	.9397	.3640	2.7475	65	.9063	.4226	2.1445	.4663
21	.3584	.9336	.3839	2.6051	66	.9135	.4067	2.2460	.4452
22	.3746	.9272	.4040	2.4751	67	.9205	.3907	2.3559	.4245
23	.3907	.9205	.4245	2.3559	68	.9272	.3746	2.4751	.4040
24	.4067	.9135	.4452	2.2460	69	.9336	.3584	2.6051	.3839
25	.4226	.9063	.4663	2.1445	70	.9397	.3420	2.7475	.3640
26	.4384	.8988	.4877	2.0503	71	.9455	.3256	2.9042	.3443
27	.4540	.8910	.5095	1.9626	72	.9511	.3090	3.0777	.3249
28	.4695	.8826	.5317	1.8807	73	.9563	.2924	3.2709	.3057
29	.4848	.8746	.5543	1.8040	74	.9613	.2756	3.4874	.28[illegible]7
30	.5000	.8660	.5774	1.7321	75	.9659	.2588	3 7321	.2679
31	5150	.8572	.6009	1.6643	76	.9703	.2419	4.0108	.2493
32	.5299	.8480	.6249	1.6003	77	.9744	.2250	4.3315	.2309
33	.5446	.8387	.6494	1.5399	78	.9781	.2079	4.7046	.2126
34	.5592	.8290	.6745	1.4826	79	.9816	.1908	5.1446	.1944
35	.5736	.8192	.7002	1.4281	80	.9848	.1736	5.6713	.1763
36	.5878	.8090	.7265	1.3764	81	.9877	.1564	6.3138	.1584
37	.6018	.7986	.7536	1.3270	82	.9903	.1392	7 1154	.1405
38	.6157	.7880	.7813	1.2799	83	.9925	.1219	8.1443	.1228
39	.6293	.7771	.8098	1.2349	84	.9945	.1045	9.5144	.1051
40	.6428	.7660	.8391	1.1918	85	.9962	.0872	11.4301	.0875
41	.6561	.7547	.8693	1.1504	86	.9976	.0698	14.3006	.0699
42	.6661	.7431	.9004	1.1101	87	.9986	.0523	19.0811	.0524
43	.6820	.7314	.9325	1.0724	88	.9994	.0349	28.6363	.0349
44	.6947	.7193	.9657	1.0355	89	.9998	.0175	57.2900	.0175
45	.7071	.7071	1.0000	1.0000	90	1.0000	.0000	∞	.0000

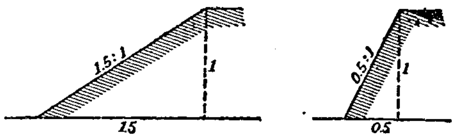
無論是那種情形,總而言之,斜度是不外乎斜面和水平面所成的角的三角函數；所以斜度,和斜面距離或是和水平距離等,都毫無關係,只看所成的角度是怎樣罷了.

道路或水道等等的斜度,例如寫做$\frac{1}{20}$, $\frac{1}{500}$等等的時候,就是單位垂直高對於水平距離的比的意思.

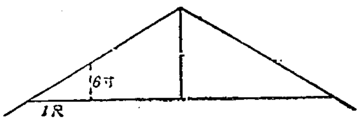


大於$\frac{1}{20}$的斜度的道路,在城市街道中甚少. 水道的斜度,通常大概在$\frac{1}{200}$和$\frac{1}{6000}$之間.

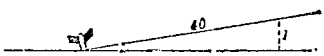
在土工中,他的斜度,是水平距離對於單位垂直高的比. 例如寫做 1.5：1, 0.5：1 等等是.



屋頂的斜度,是用對於梁的單位長的垂直高來表示他.例如對於梁一尺長的高是 6 寸,則叫做 6 寸斜度.



鐵路的斜度,是單位垂直高對於斜面的距離的比.例如對於 40 尺斜面的長,垂直高是 1 尺,則寫做$\frac{1}{40}$.

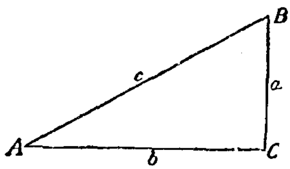


130. 三角函數彼此互相的關係

正弦，餘弦，正切等等彼此間的關係，可用簡單的式子來表示他.

在直角三角形 ABC 中，

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}.$$



$$\therefore\quad \tan A=\frac{\sin A}{\cos A}.$$

又 $a^2+b^2=c^2$；兩邊以 c^2 除之，得

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1,\qquad 即\quad \left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1.$$

$\therefore$ $(\sin A)^2+(\cos A)^2=1$，這個式子通常寫做：

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1.$$

由此，得

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A},$$

$$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}.$$

又 $a^2+b^2=c^2$ 的兩邊，各以 b^2 及 a^2 除之，得

$$1+\tan^2 A=\sec^2 A,$$

$$1+\cot^2 A=\csc^2 A.$$

習 題

1. 證明下面的式子：

(a) $\tan A \cdot \cos A = 1.$

(b) $\sin A = \cos A \cdot \tan A.$

(c) $\sin A \cdot \sec A \cdot \cot A = 1.$

(d) $\sin^4 A - \cos^4 A = \sin^2 A - \cos^2 A.$

(e) $\cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A.$

(f) $(\sin A + \cos A)^2 + (\sin A - \cos A)^2 = 2.$

(g) $\dfrac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}} = \sin A.$

(h) $(\tan A + \sec A)^2 = \dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}.$

2. 下面的諸函數,試用 $\sin x$ 來表示他:

$$\tan x, \qquad \sec x, \qquad \sin^4 x + \cos^4 x.$$

3. 知道 $\tan x + \cot x = 2$, 試求 $\tan x$ 的數值.

4. 知道 $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$, 求 $\cos x$ 的數值.

5. 求下面兩方程式的 x 的數值:

(a) $3\sin x = 2\cos^2 x.$

(b) $6\cot^2 x - 4\cos^2 x = 1.$

6. 設 $\cos a = \dfrac{3}{\sqrt{11}}$, 求 $\sin a$ 及 $\tan a$ 的數值.

131. 三角函數的應用

在直角三角形中,除掉直角以外,若是知道下面所寫的兩個元素, 則其餘的未知元素, 用三角函數是很容易的把他們算出

來：

(1) 直角的二邊.

(2) 一邊和一銳角.

(3) 斜邊和一邊.

(4) 斜邊和一銳角.

習題

1. 已知下面的各數值,試求直角三角形其他的部分(這叫做解直角三角形)：

(a) $c=2000$ 尺, $A=30°$.

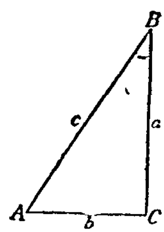
(b) $c=40$ 尺, $a=20$ 尺.

√(c) $b=2.5$ 尺, $B=60°$.

√(d) $a=150$ 尺, $B=45°$.

√(e) $b=\sqrt{3}$, $a=3$.

√(f) $a=135.62$ 尺, $b=200$ 尺.

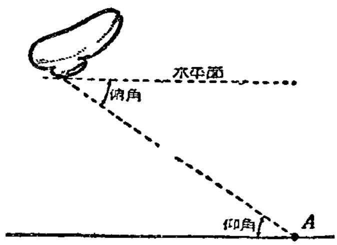


2. 鐵道線路的斜度是 $\frac{1}{40}$, 問向下走 1 仟米的時候, 比原來的位置低下多少?又,線路和水平線所成的角度,大約是多少?

3. 直立一 2.6 米長的棒於地面, 他在地上影子的長是 2.8 米.問太陽的仰角是多少?

4. 從水平的地上的 A 點, 看飛機的仰角是 44°, 飛機筆

直下面的地點到 A 點的距離是 500 米. 問飛機的高是多少?



5. 在 3000 尺高的氣球上面,看敵人戰壕的俯角是 51°. 問從氣球筆直下面的地點到戰壕的水平距離是多少?

6. 從商船的觀測點,看海中潛水艇的俯角是 16°. 若觀測者在水平面上 13 米. 問商船到潛水艇的距離是多少?

7. 旗桿的拉繩,和地面成 45° 的角,在地面上,桿到繩的距離是 14 米. 求繩的長.

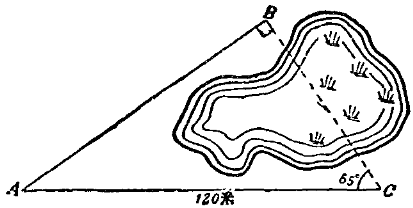
8. 從 48 米高的山崖上,看一船的俯角是 25°. 求崖的頂上到船的距離.

9. 有兩飛機,他們所飛的高度,一架是 250 米; 另一架是 180 米. 在一飛機上,看另一飛機的俯角是 36°. 求這兩飛機相隔的距離是多少?

10. 有一鐘擺,長 4.5 寸,他往復的角度是 60°. 問擺下端所振動的寬是多少?

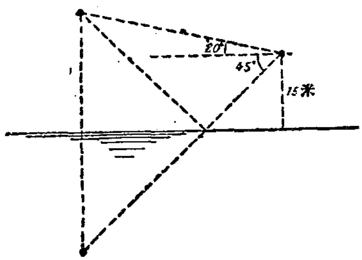
11. 有一傾斜坡,和水平面成 30°, 他的長是 3000 尺. 現在打算減少他的斜度,使他和水平面成 20° 的角. 問這斜坡的長,比原來的要長多少?

12. B, C 兩地點，中間隔一池塘，他的距離，不能直接量出。今在垂直於 BC 的直線 BA 上，取一適當的地點 A，量出 AC 的距離是 120 米，$\angle C$ 是 55°. 問 BC 的距離是多少？



13. 在地點 A，測得某山頂 C 的仰角是 60°. 次在 A 後方的 500 米的地點 B（和 A 在同一平面），和前同一方向，測得 C 的仰角是 30°. 求山的高。

14. 在湖面上 15 米高的地點，看一氣球的仰角是 20°，看氣球在湖裏的像的俯角是 45°. 問氣球在湖面上的高是多少？



15. 某甲從 O 點出發，向北偏東 30°. 走了 300 米以後，向東轉 45°，再走 250 米. 問從所達到的地點離開南北方向線是多少遠？

16. 某建築屋上的探海燈，高於地面 50 米. 現在打算照 300 米遠的目的地. 問應使燈的光線所進行方向的俯角是多少度？

17. 以 18 尺長的梯靠於牆壁，梯和地面成 54° 的角. 問從梯

的下端到牆脚的距離及牆脚到梯的上端的距離各是多少?

18. 一樹被風吹折，樹頂落於離樹根 12 米處而和地面成 45° 的角.求樹的高.

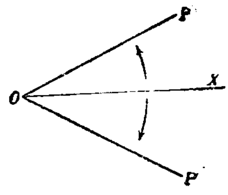
19. 在 18 米長的竿的上端,繫一拉繩,繩的他端,在地面上離竿脚 5 米.求繩的長.

20. 在同一水平面上相隔 2 仟米的 A, B 兩地點,同時測一氣球所在的方向及他的仰角,在 A 處:他的方向是正東,仰角是 30°; 在 B 處:方向是正北,仰角是 60°. 求氣球的高.

[任意角的三角函數]

132. 角的正負

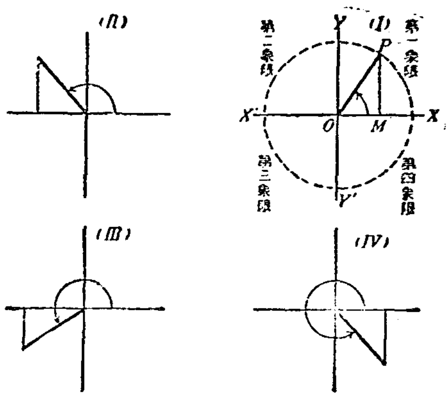
(定義) 一直線 OP, 在另一直線 OX 上一定點 O 的周圍, 反對時針方向迴轉時所成的角, 當做**正角**; 順時針方向迴轉的角,當做**負角**.



133. 任意角的三角函數

作互相垂直的二直線 XOX', YOY', 則把平面分做四部分,

他的每一部分,叫做象限.



在 O 的周圍,迴轉任意線段 OP, 則在各象限內生出種種的角.

從 P 向 OX 或他的延長線上作垂線 PM, 設 OP 所迴轉的角是 θ, 則任意角的三角函數,和銳角的時候同樣,決定在下面:

(定義) $\sin\theta=\dfrac{PM}{OP}$, $\csc\theta=\dfrac{OP}{PM}$,

$\cos\theta=\dfrac{OM}{OP}$, $\sec\theta=\dfrac{OP}{OM}$,

$\tan\theta=\dfrac{PM}{OM}$, $\cot\theta=\dfrac{OM}{PM}$

OP 恆爲正; OM 在 YY' 的右方時是正,左方的是負; PM 在 XX' 的上方時是正,下方時是負.

把在各象限內的角的三角函數的符號,填入下面的空欄內:

象限 / 函數	I	II	III	IV	象限 / 函數
$\sin\theta$					$\csc\theta$
$\cos\theta$					$\sec\theta$
$\tan\theta$					$\cot\theta$

任何角的三角函數,都可用銳角的三角函數來表示他,只照上面的法則添加符號就成了.

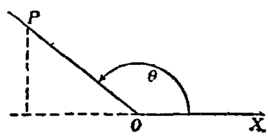
134. 補角和餘角的三角函數

由前節的定義,立刻就得到下面的關係:

$$\sin(180^\circ-\theta)=-\sin\theta,$$

$$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta,$$

$$\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta.$$



就是:鈍角的三角函數,從他的補角的三角函數就能夠知道.

又,由直角三角形的性質,得到下面的關係:

$$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta,$$

$$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta,$$

$$\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta.$$

習　題

1. 求下面的各數值:

$$\sin 120^\circ,\ \cos 120^\circ,\ \sin 135^\circ,\ \cos 135^\circ.$$

2. 求下面各角的正弦，餘弦和正切：

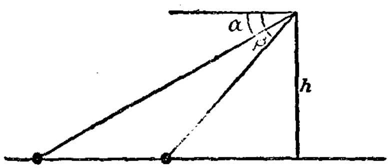
$$160^\circ,\ 220^\circ,\ 240^\circ,\ 270^\circ,\ 275^\circ.$$

3. 把下面的式子化簡單：

(a) $\sin 90^\circ + \tan^2(180^\circ-\theta) - \sec^2(90^\circ-\theta)$.

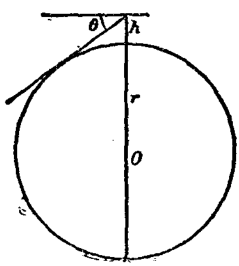
(b) $\dfrac{\sin 150^\circ\cdot\cos(-45^\circ)}{\tan 135^\circ\cdot\cot 125^\circ}$.

4. 從海岸傍邊的一座高樓上，於同一方向，看兩船的俯角，一個是 α，一個是 β. 設樓的高是 h. 試求兩船間的距離.



假如 $h=20$ 米，$\alpha=15^\circ$，$\beta=30^\circ$. 試計算兩船間的距離.

5. 從 h 尺高的山頂上，看地平面的線（切於地面的切線）所成的俯角是 θ. 試作出一個求地球半徑的式子來.



第 七 章

面 積

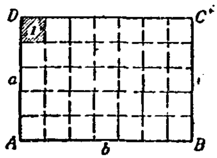
[四邊形的面積]

135. 面積

(定義) 在平面形內平面的量,叫做平面形的面積.

兩多角形的面積相等,叫做等積.

136. 定理 矩形的面積,等於他的二鄰邊的積.

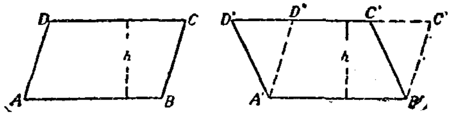


設矩形 $ABCD$ 二鄰邊的長是 a 和 b,面積是 S,則 $S=a\cdot b$.

無論 a, b 是什麽數,這個定理總是對的.

137. 定理 等底等高的兩個平行四邊形是等積.

[假設] 在 $\square ABCD$ 和 $\square A'B'C'D'$ 中,高 h 相等,$AB=A'B'$.



[終結] $\square ABCD = \square A'B'C'D'$.

[證明] 把 $ABCD$ 放在 $A'B'C'D'$ 上,使 AB 和 $A'B'$ 完全相合,則因高是相等,所以直線 DC 和 $D'C'$ 相重,而佔 $D''C''$ 位置.

$$\triangle D'D''A' \equiv \triangle C'C''B'.$$

$$\therefore \quad \square A'B'C''D'' = \square A'B'C'D'.$$

$$\therefore \quad \square ABCD = \square A'B'C'D'.$$

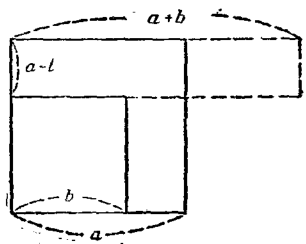
[推論一] 等底等高的平行四邊形和矩形是等積.

[推論二] 平行四邊形的面積,等於底和高相乘的積,

$$A = b \cdot h.$$

習 題

1. 通過平行四邊形對角線的交點的直線,把原形分做二等分.



2. 兩線段 a, b 上的正方形的差,等於這兩線段的和及他的差所做成的矩形,

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

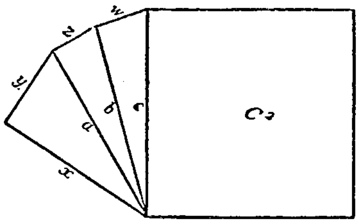
3. 作一正方形,和一已知的矩形等積.

設矩形的兩邊是 a, b,正方形的邊是 x,則

$$x^2=a\cdot b.$$

所以作一個 a 和 b 的比例中項就可以了.

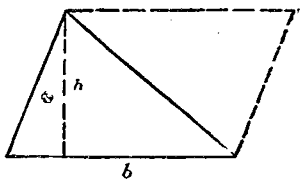
4. 作一正方形,等於二個以上的正方形的和.



設已知正方形的邊是 $x, y, z, w, \cdots\cdots$, 由右圖,自易作出.

[三角形的面積]

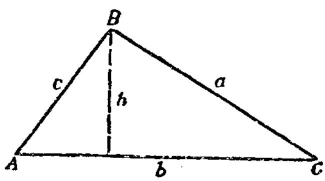
138. **定理** 三角形的面積,是和他等底等高平行四邊形的面積的一半.



[證明] 平行四邊形的對角線,是把這四邊形分做兩個全等的三角形. 由這個道理,所以很容易知道三角形的面積,是和他等底等高平行四邊形的面積的一半.

[推論] 等底等高的三角形是等積(試證明他).

139. **定理** 已知三角形的二邊和這二邊的夾角. 求這三角形的面積



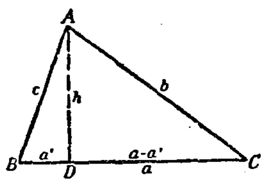
$$\triangle ABC=\tfrac{1}{2}b\cdot h.$$

但 $h=c\sin A.$ $\left[\sin A=\dfrac{b}{c}\right]$

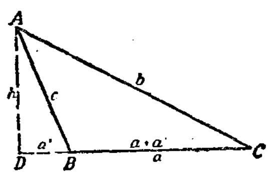
$$\therefore\quad \triangle ABC=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A.$$

140. 定理 知三角形的三邊,求這三角形的面積.

設三角形三邊的長是 a, b, c, 三角形的高是 h, BD 的長是 a', 則
$$h^2=c^2-a'^2=b^2-(a-a')^2.$$
$$\therefore\quad c^2-a'^2=b^2-(a-a')^2.$$
$$\therefore\quad a'=\pm\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}.$$



把上式代入 $h^2=c^2-a'^2=(c+a')(c-a')$ 式中,
$$h^2=\frac{1}{4a^2}(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$
$$\therefore\ \triangle ABC=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$



設 $a+b+c=2s$, 則得

$$\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

習題

1. 三角形的中線把三角形分做二等分.

2. 下面的每個數值,是二等邊三角形的面積.間他們的邊各是多少長?

$$\frac{121}{8}\sqrt{3},\qquad 12,\qquad 10\sqrt{3}.$$

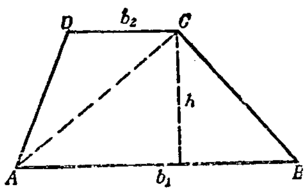
3. 三角形中的一個角是 35°, 夾這個角的兩邊是 50.2 釐米和 37.3 釐米.求這三角形的面積.

4. 三角形三邊的長是 34 尺, 20 尺, 18 尺,和 9 寸, 8 寸, 2.6 寸.求這兩個三角形的面積.

5. 已知三角形的三邊,試作一個求三角形的高的式子來.由這個式子,求第 4 題中三角形之高.

[多角形的面積]

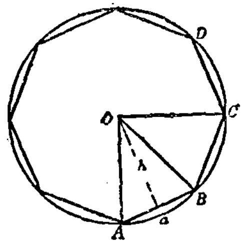
141. 定理 梯形的面積,等於兩底的和乘高的積的一半,



梯形的面積 $ABCD=\frac{1}{2}h(a+b)$.

(學者試證之)

142. 定理 圓的內接正多角形的面積是：



設 a: 一邊的長，

h: 從中心到邊的距離，

n: 邊數，

p: 多角形周圍的長；則

$$\triangle AOB=\frac{a\cdot h}{2},$$

$$\triangle AOC=\frac{a\cdot h}{2}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad ABCD\cdots\cdots=\frac{nah}{2}=\frac{p\cdot h}{2}.$$

143. 定理 圓的外切正多角形的面積：

設 r: 圓的半徑，　a: 一邊的長，

p: 多角形周圍的長，　n: 邊數；則

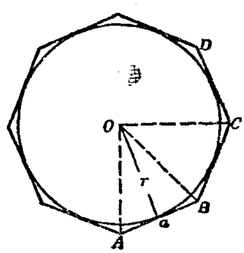
$$\triangle AOB=\frac{a\cdot r}{2},$$

$$\triangle BOC=\frac{a\cdot r}{2}.$$

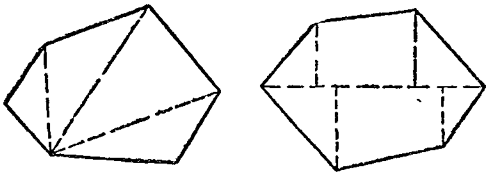
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad ABCD\cdots\cdots=\frac{nar}{2}=\frac{p\cdot r}{2}.$$



144. 任意的多角形,照下面的樣子,把他分做多數的三角形,或是分做若干的三角形和梯形,就可以計算他的面積.



習 題

1. 一個正方形,面積是 16 平方釐米.求他的內切圓和外接圓的半徑.

2. 若圓的半徑是 r,則他的外切正三角形的面積是

$$3r^2\sqrt{3}.$$

3. 圓的半徑是 r,則他的外切正六角形的面積是

$$2r^2\sqrt{3}.$$

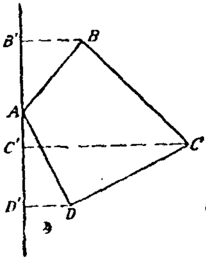
4. 設正六角形一邊的長是 6 釐米.問他的面積是多少?

5. 四邊形 $ABCD$,設

$$AB=29,\ BC=8,\ CD=28,\ DA=21,$$

對角線 $AC=30$.求這四邊形的面積,并求從 D 到 AC 的距離.

6. 測量兩地面,得到下面的結果:試計算各個的面積.



$AB'=15$ 尺,

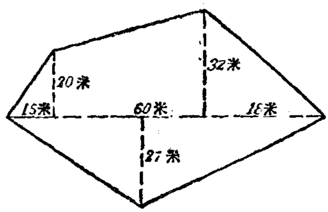
$BB'=16$ 尺,

$AC'=8$ 尺,

$CC'=35$ 尺,

$C'D'=12$ 尺,

$DD'=10$ 尺.



145. 圓的面積

圓的內接或外切多角形的邊數,若是無限的增加,則兩多角形的面積,必定是無限的接近於某一個共通的數值. 這個數值,就是圓的面積了.

定理 圓的面積,等於圓周乘半徑的積的一半.

[證明] 設圓的內接或外切正多角形的面積, 周圍, 半徑, 分別是 s, p, r, 則

$$s=\frac{p\cdot r}{2}.$$

多角形的邊數,無限的增加的時候,則 s, p 各無限的接近於圓的面積 S 和圓周 P.

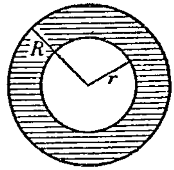
$$\therefore\quad S=\frac{P\cdot r}{2}.$$

就是: $$S=\pi r^2.$$

［推論一］ 扇形的面積，等於半徑和弧長相乘積的一半.

［推論二］ 圓的面積和半徑的平方成比例.

習題



1. 圓周的長是 15 米.求這圓的面積.

2. 兩個同心圓的半徑，一個是 r，一個是 R. 求這兩個同心圓間的圓輪的面積.又，若 $r=5$ 釐米，$R=6$ 釐米.求圓輪的面積.

3. 圓的半徑是 3 尺，扇形的弧長是 7.5 寸. 求扇形的面積.

4. 扇形的面積是 72 平方釐米，半徑是 9 釐米. 問弧的長是多少?

5. 有一扇形，他的半徑是 r，扇形角是 θ，則扇形的面積是 $\frac{\theta}{360}\pi r^2$. 試證明他.

又，角是 30°，半徑是 3.6 寸的扇形的面積是多少?

6. 半徑 15 尺和半徑 30 尺兩圓的面積的比如何?

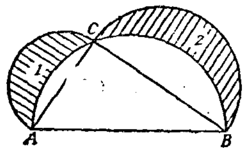
7. 兩圓面積的比是 2 : 4. 問兩半徑的比如何?

8. 在半徑是 15 釐米的圓內，取一個中心角是 60° 的弓形. 求這弓形的面積.

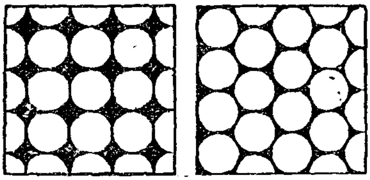
9. 半徑是 20 釐米的圓內，有一個中心角是 72° 的弓形的

面積是多少?

10. 在直角三角形的各邊上,各畫半圓,則新月形 1, 2 的面積的和,等於直角三角形的面積.



11. 把半徑相等的圓,在兩個相等的正方形的裏面,像右面的圖,畫成兩種不同的樣式.間每個方形中空隙的面積是多少?



又,空隙的面積,對於全面積的百分比(%)是多少?

[面積的比例]

146. **定理** (1) 平行四邊形(包含矩形)和三角形面積的比,等於底的比和高的比的積,

$$\frac{A}{A'}=\frac{b}{b'}\cdot\frac{h}{h'}.$$

正方形面積的比,等於邊的平方的比,

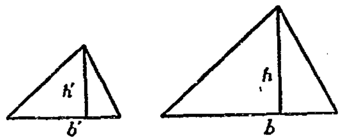
$$\frac{A}{A'}=\frac{a^2}{a'^2}.$$

(2) 等高(或等底)的平行四邊形(包含矩形)面積的比,等於底(或高)的比,

$$\frac{A}{A'}=\frac{b}{b'},\qquad 又\quad \frac{A}{A'}=\frac{h}{h'}.$$

147. 定理 兩個相似三角形面積的比，等於他的相當邊平方的比.

[證明] 設兩面積是 T 和 T'，則

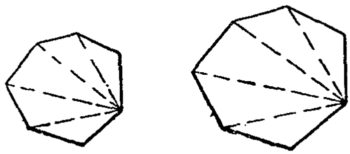


$$\frac{T}{T'}=\frac{b}{b'}\cdot\frac{h}{h'}.$$

但 $$\frac{h}{h'}=\frac{b}{b'}.$$

$$\therefore\quad \frac{T}{T'}=\frac{b}{b'}\cdot\frac{b}{b'},\qquad \therefore\quad \frac{T}{T'}=\frac{b^2}{b'^2}.$$

[推論] 兩個相似多角形面積的比，等於他的相當邊平方的比.



習 題

1. 等底三角形的面積，和高成比例.

2. 正三角形的面積，和一邊的平方成比例.

3. 三角形中，有一邊的長是 3 寸. 問和他相似而面積大二倍的三角形的相當邊是多少長?

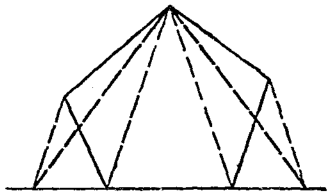
4. 兩個相似三角形中的一組相當邊，是 15 尺和 45 尺. 求他們面積的比.

5. 兩個相似三角形中的一組相當邊，是 5 釐米和 8 釐米，

前一個的面積是 150 平方釐米.問另一個的面積是多少?

6. 某多角形,是另一個和他相似的多角形的 6 倍;小者的一邊是 4 米.求大者的相當邊.

7. 作一個三角形和任意多角形等積.



(參照右圖,自易作出)

8. 有一正六角形,面積是 36 平方公尺.試另作一正六角形,使他的面積,是上面六角形的一半.又,試作一正三角形,使他的面積,是上面原有的六角形的一半.

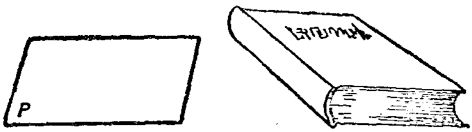
第 八 章

立 體

[直 線 和 平 面]

148. 平面的圖示

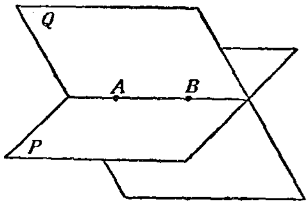
不在同一平面的圖形,換句話來說;就是:立體圖形,也是在紙上或黑板上當做平面圖形把他畫出來.



我們最常用的東西,例如:書籍,帳簿,鏡面以及門,窗等等,大多都是矩形.若是我們遠遠的看去,都好像是平行四邊形.因爲這個道理,所以我們用圖來表明平面的時候,通例,都是用平行四邊形.他的角上記一文字——例如是 P——,就叫做平面 P.

149. 二平面互相的位置

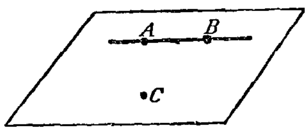
通過在一個平面內的兩點 A, B 的直線,完全在這平面上,所以兩個平面若是共有 A, B 兩點,則各平面必共有直線 AB



上的一切點，其餘的點，則不能共有，換句話來說；就是：**平面相交於一直線.**

若是除掉 AB 直線以外，還有其他的一點 C，是兩個平面所共有，換句話來說；就是共有 A,B,C 三點的兩個平面，必完全**重合.**

又；兩個平面，也有時候，一個共通點都沒有的，這叫做**兩平面互相平行.**



定理　通過不在一直線上三點的平面，只有一個.

這或寫做：不在一直線上的三點，決定一平面；或寫做：相交的兩直線，決定一平面.

定理　兩平面相交處，是一直線.

兩平面互相的位置，有下面所寫的三種情形：

(1)　完全重合.

(2)　相交於一直線.

(3)　互相平行.

150.　直線和平面互相的位置

一直線對於一平面,可占有下面所寫的三種位置:

(1)　直線全在平面內.

(2)　直線和平面,只共有一點.換句話來說;就是相交.

(3)　兩者完全沒有一點是共通,換句話來說;就是平行.

151.　二直線互相的位置.

因爲相交二直線,必能決定一平面,所以,二直線,除掉在同一平面內的情形以外,決不能相交. 又,在同一平面內的二直線,若不平行,則必相交.因此:二直線,可占有下面所寫的三種位置:

(1)　相交.

(2)　平行.

(3)　不在同一平面內.

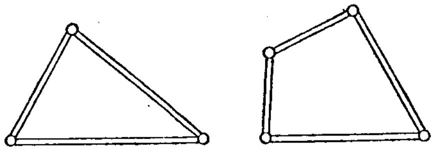
(註)　不在同一平面內(不相交)的兩直線所成的角,用和這兩直線各相平行而且相交的兩直線的交角去量他.

習　題

1.　和相交兩直線中的一直線相交而和另一直線平行的直線,必均在同一平面上.

2.　兩兩相交的三直線,或在同一平面上,或相交於一點.

3. 用三根棒所做成的三角形框.假定每一根棒,都能夠在

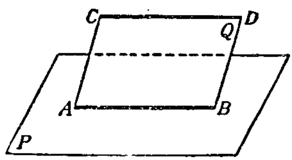


他的兩端的周圍任意自由轉動.問這三角形的形狀,是不是可以改變?假如是四邊形,又是怎樣?

4. 三角形的三邊,在同一平面上.

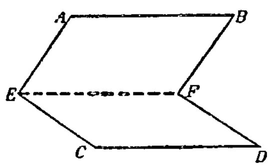
5. 不在同一平面上的四條直線所做成的四邊形 (折面四邊形),把他各邊的中點連結起來,就做成一個平行四邊形.

6. 含兩平行線中的一線 (AB) 而不含另一線 (CD) 的平面,必平行於第二線 (CD).



[證明] $CD \parallel AB$. $\therefore$ CD 必不能在 AB 線上和 P 平面相交.今若假定 CD 在 AB 線外的一點和 P 平面,則含 AB,CD 兩平行線的 Q 平面和 P 平面就完全重合,那麼 CD 就在 P 平面上了.這是和假設相反.

$\therefore$ CD 平行於 P 平面.



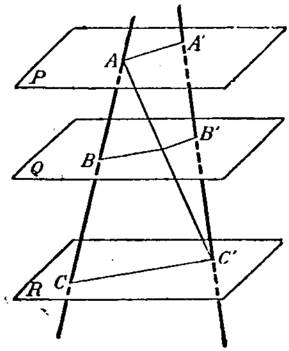
7. 各含兩平行線中一線的兩

個平面的交線，和這兩平行線必相平行.

8. 一平面和平行的兩平面相交，則兩交線必相平行.

9. 若干條任意的直線，若被三個以上的平行平面所截，則在平行面間的各線段的比必相等.卽

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}=\cdots\cdots$$



10. 平行兩平面間所夾的諸線段中點的軌跡是什麼?

(立體幾何的軌跡,多是平面)

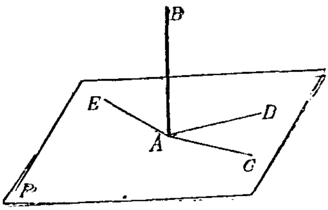
[垂直平面]

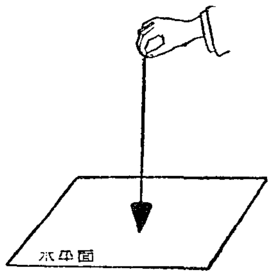
152. 平面的垂線

(定義) 一直線 (AB) 和一平面相交，通過這交點而在這平面內所有一切的直線,若都是和這直線 (AB) 垂直，則這直線叫做平面的垂線.

這個時候,直線和平面,叫做互相垂直.

和平面相交而不垂直於平面的直線,叫做平面的斜線.垂線或斜線和平面的交點,叫做垂線或斜線的足.



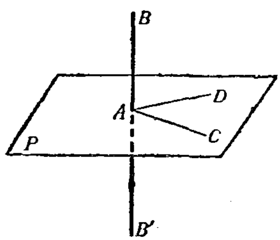


AB 若是 P 平面的垂線，則 AC, AD, AE, 等等的直線，都和 AB 垂直.即 $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $AB \perp AE$,…….

絲線或棉線的一端，吊一重錘，則線向地球的中心垂下. 和這線垂直的平面，叫做**水平面**.

153. 作圖題 通過直線上的一點，作一平面和他垂直.

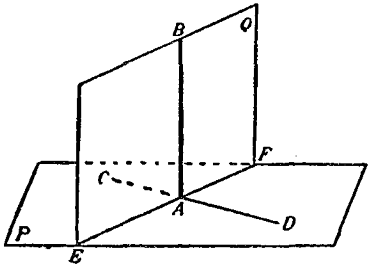
[作圖] 設已知直線 BB' 上的一已知點是 A.



通過 A 點，作垂直於 BB' 的任意二直線 AC 和 AD, 則此二直線所決定的平面 P, 就是通過 A 點而垂直於 BB' 的平面了.

154. 定理 一直線垂直於相交的兩直線於其交點，則這直線必垂直於這兩條相交直線所決定的平面.

155. 作圖題 從平面上的一點，作這平面的垂線.



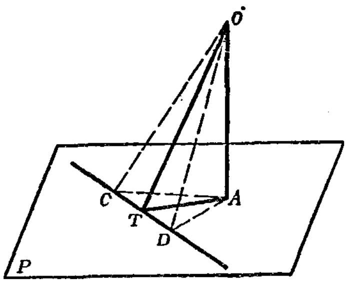
［作圖］ 在 P 平面上，通過 A 點，作任意直線 CD，和垂直於 CD 的平面 Q，設 P 和 Q 的交線是 EF。

在平面 Q 上，從 A 作垂直於 EF 的直線 AB，則 AB 就是所求的垂線了。

［證明］ $CD\perp$ 平面 Q，故 $AB\perp CD$ 且 $AB\perp EF$.

$$\therefore\quad AB\perp \text{平面 } P.$$

［討論］ 所求的直線，只限於一條。



156. 定理 從平面 P 外的一點 O，作平面的垂線 OA，又，從這垂線足 A 向平面 P 內的任意一直線 CD 作垂線 AT，則 OT 垂直於 CD（三垂線定理）。

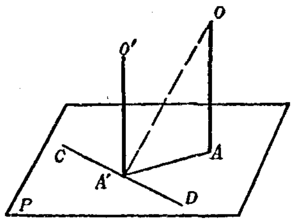
［證明］ 取 C,D 兩點，使 $TC=TD$，則

$$\triangle ATC\equiv\triangle ATD,\qquad \therefore\quad AC=AD.$$

$$\therefore\quad \triangle OAC\equiv\triangle OAD,\qquad \therefore\quad OC=OD.$$

$$\therefore\quad \triangle OTC\equiv\triangle OTD,\qquad \therefore\quad OT\perp CD.$$

157. 定理 垂直於同一平面的二直線，互相平行。



[證明] 設 OA 和 $O'A'$ 都垂直於平面 P, 他們的垂足是 A 和 A'.

在平面 P 上, 通過 A' 點, 作 $CD \perp AA'$, 則 $A'O'$, $A'O$, $A'A$ 三直線, 都和 CD 垂直 (前定理).

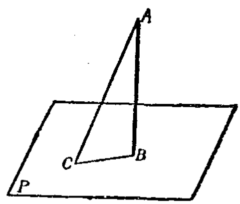
因此, 這三條直線, 同在一平面內.

$\therefore$ $OA, O'A'$ 在同一平面內, 且垂直於 AA'.

$$\therefore \quad OA \parallel O'A'$$

[推論] 垂直於兩平行線中一線的平面, 必垂直於另一線.

158. **定理** 從平面外一點所作垂直於這平面的直線, 只限於一條.



[證明] 設平面外的一點是 A, 先從平面 P 內任意的一點作一垂線, 再從 A 點作這線的平行線, 則由前節的推論, 知道 AB 垂直於 P 平面.

又, 若假定可作兩垂線 AB, AC, 則這兩條直線, 必均垂直於連結兩垂足的直線 BC, 但這是不可能的. 故只限於一條.

159. **點和平面的距離**

(定義) 從平面外一點, 向平面所作垂線的長, 叫做點和平

面的距離.

習 題

1. 從平面外的一點,向平面作垂線和斜線,則

(a) 垂線比任何斜線都短;

(b) 從垂線足到二斜線的足的距離,若是相等,則這兩斜線的長相等;

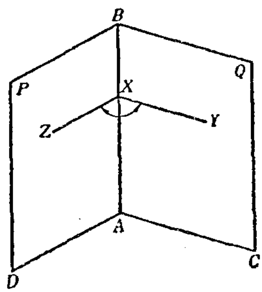
(c) 從垂線足到二斜線的足的距離,若是不等,則距離大的那一條斜線較長.

2. 垂直於同一直線的二平面,互相平行.

3. 夾於兩平行面間的共通垂線的部分(二平行平面間的距離)相等.

4. 到不在一直線上三點等距離的點的軌跡,是通過一個過這三點的圓的中心而垂直於這圓的平面的直線.

5. 含平行四邊形中一條對角線的平面,是到另一條對角線的兩端等距離點的軌跡.



160. 平面所成的角

(定義) 用相交二平面所做成的圖形,叫做**二面角**.交線 AB,叫做二面

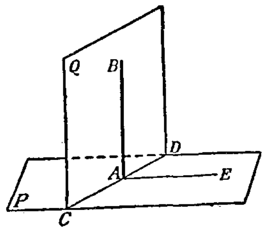
角的稜,平面 P, Q, 叫做二面角的面.

二面角(二平面所成的角)的大小,是用在二平面內從稜上一點 (X) 所作垂直於稜的二直線 (XY, XZ) 所成的角來表示他.

兩平面所作的二面角是直角的時候,叫做**兩平面互相垂直**.

161. 定理 若一直線,垂直於一平面,則凡是通過這直線的平面,都垂直於這個平面.

[證明] 設 $AB\perp$ 平面 P,通過 AB 的 Q 平面和 P 平面的交線是 CD, 作 $AE\perp CD$, 則因



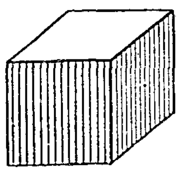
$AB\perp$ 平面 P.

$\therefore$ $AB\perp CD$, $AB\perp AE$ 且 $AE\perp CD$.

$\therefore$ P 和 Q 的二面角是直角.那就是 $P\perp Q$

習 題

1. 交於一點的三直線,若兩兩互相垂直,則含每兩條直線的三個平面,互相垂直.



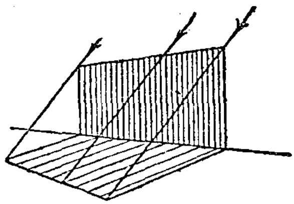
2. 相交的兩個平面,若都和第三個平面垂直,則這兩平面的交線,必垂直於第三平面.

3. 試作垂直於一已知平面而含一已知直線的平面.

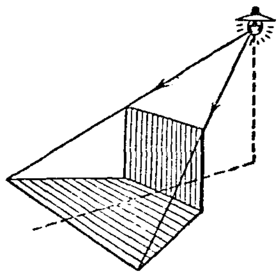
4. 到相交二平面等距離的點的軌跡是什麼?

5. 矩形紙 $ABCD$ 的 AB 邊是 8 釐米, BC 邊是 6 釐米. 今若延着對角線 AC,把紙折疊起來,使平面 ABC 和平面 CDA 互相垂直. 問 BD 的距離是多少?

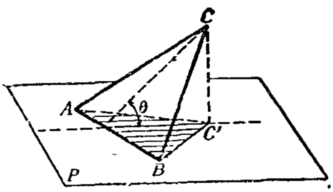
6. 一板壁直立於地上,他的高是 2 米, 寬是 10 米. 現在, 日光直角於板的上緣的方向射於地上,而和地面成 $45°$ 的角. 問板壁的影子的面積是多少?太陽的光線當做平行.



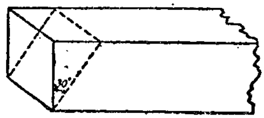
7. 離地 2.6 米高處,有一電燈.從電燈筆直下面一點 3 米遠的地方,和電燈正對着有一塊直立的矩形板. 設板的高是 40 釐米,寬是 50 釐米. 問矩形板在地上的影子的面積是多少? 電燈的光源當做一點.



8. 三角形 ABC 和平面 P 成 $\angle\theta$.設 $\triangle ABC$ 的面積是 S,他射到 P 平面上的正射影



的面積是 S'. 則 $S'=S\cdot\cos\theta$.



9. 有一木料，他的端面的面積是 3.5 平方釐米，今和木料的端面成角 30°，切此木料.問切口的面積是多少?

[多 面 體]

162. 多面體

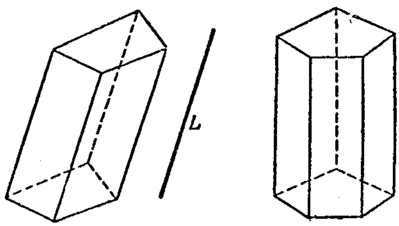
[定義] 用數個平面所包圍的立體，叫做多面體.

成爲多面體界限的平面，是多角形，這叫做多面體的面；面的邊，叫做多面體的稜；面的頂點，叫做多面體的頂點.

由多面體的面的數目上，把他區別爲：四面體，五面體，六面體等等.

163. 稜柱

(定義) 兩個面平行，其餘的面都和一直線平行的多面體，叫做稜柱(或叫做角柱).



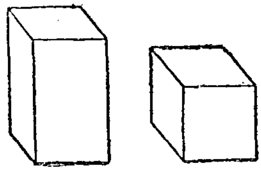
平行的兩個面，叫做底面；其餘的面，叫做側面；側面的交線，叫做側稜；兩底面間的距離，叫做高.

由底面的邊數,把稜柱區別爲三稜柱,四稜柱,五稜柱,等等.

稜柱的側面,都是平行四邊形,所以諸側稜,都是互相平行且相等.並且兩底面是全等的兩個多角形.

直 稜 柱: 側稜和底面垂直的稜柱.

斜 稜 柱: 側稜不垂直於底面的稜柱.



正 稜 柱: 底面是正多角形的直稜柱.

平行六面體: 底面是平行四邊形的四稜柱.

長 方 體: 底面是矩形的直稜柱.

立 方 體: 所有的面都是正方形的長方體.

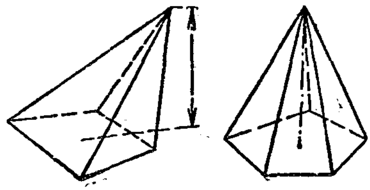
[問] 用平行於底面的若干平面去截稜柱,則稜柱的這幾個截面,都是全等形.試證明之.

一平面和多面體的面相交所做成的多角形,叫做多面體的截面.

164. 角錐

(定義) 底面是多角形;而以底面外的一點做共通頂點,底面的各邊做底邊的諸三角形所包圍的多面體,叫做角錐.

共通頂點,叫做角錐的頂點;和頂點相對的面,叫做底面;會於頂點的稜,叫做側稜;會於頂點的諸三角形,叫做側面;從頂點



到底面所作的垂線的長,叫做**高**.

由底面的邊數,把角錐區別爲:**三角錐**,**四角錐**,**五角錐**,等等.

角錐的底,是正多角形,且多角形的中心,和高的足相重合,則這角錐,叫做**正角錐**.

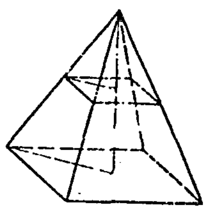
正角錐的側面,都是全等的二等邊三角形.這三角形的高,叫做正角錐的**斜高**.

定理 若一角錐,被平行於底面的一個平面所截,則

(1) 分諸側稜和高成比例;

(2) 截面和底面是相似形;

(3) 底面和截面的比,等於從頂點到各面的距離的平方的比.



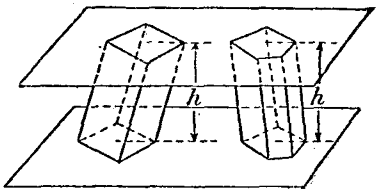
(學者自證之)

165. 體積

(定義) 用面來包圍空間的一部分的量,叫做立體的**體積**.

用單位長當做稜的立方體的體積,就是量體積的單位.

166. 定理 等高等底兩稜柱的體積相等.



［證明］　因兩稜柱是等高，所以把他們的一個底面放在同一平面上，則另一底面，必定也可以同放在另一平面上.

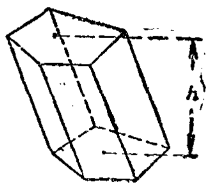
現在把兩稜柱的高，等分做同樣的數目，通過這許多分點，用平行於底的平面截兩稜柱，則這許多截面，必都是等積.

截面的數目，如果非常的多，則兩稜柱所被分成的各部分，也就非常的薄，並且兩底面也各是等積，所以這許多的各部分，都是相等.

因此，由這許多相等部分同數所堆積做成的兩稜柱是等積.

［推論］　等底等高兩角錐的體積相等.

167.　**定理**　稜柱的體積，等於底和高的相乘積.

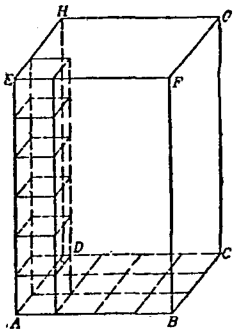


V：體積，　b：底面積　h：高

$$V=b\cdot h.$$

［證明］　作一個和已知稜柱等底等高的長方體 $ABCDEFGH$，假定他的三個稜的長是：

$$AB=4,\qquad AD=3,\qquad AE=6.$$



把各稜等分做這些數目，從各分點作各稜的平行線，則底面 $ABCD$，就被分做 4×3 個正方形，而在各正方形的上面，也就堆積了稜是單位的 6 個立方體.

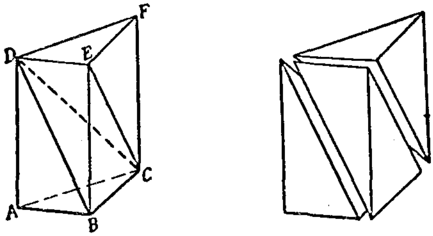
∴ 這個長方體，共包含 $(4\times3)\times6=72$ 個的單位立方體. 那就是：長方體的體積，等於底和高的相乘積. 因此，任意一般其他的稜柱的體積，都是等於底和高的相乘積.

[推論] 等底的稜柱的體積的比，等於其高的比.

168. **定理** 角錐的體積，等於底和高相乘積的三分之一.

V: 體積 b: 底面積 h: 高

$$V=\frac{1}{3}b\cdot h.$$



[證明] 就三稜柱 $ABCDEF$ 看起來，他的各側面，是平行

四邊形．就這各平行四邊形的對角線把稜柱分做三個等積的三角錐 $DABC$, $DBCE$, $DECF$, 則

$$\text{三角錐 } DABC=\frac{1}{3}ABCDEF=\frac{1}{3}ABC\times h.$$

由是，由 166 定理的推論，其他的角錐的體積，也是等於底面積和高的積的三分之一．

［推論］ 等底的角錐的體積的比，等於其高的比．

習 題

1. 平行六面體的四條對角線（連結不在同一平面上的頂點的線段），相交於一點；且彼此互相二等分．

2. 從四面體（三角錐）的頂點，向對面的重心連結的四線段，交於一點；且在這交點處，彼此互相分做 1 和 3 的比．

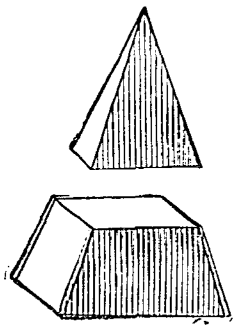
3. 長方體三稜的長是 a, b, c. 求他的對角線的長．若是立方體的時候，又是怎樣？

4. 一正稜柱：高是 1.5 寸，底是每邊 0.9 寸的等邊三角形．問這稜柱的體積和他的表面積各是多少？

5. 一正四角錐：側面是等邊三角形，底的一邊的長是 6 分．求他的體積和表面積．

6. 一正六角錐：底面的一邊是 2 釐米，稜的長是 4 釐米．

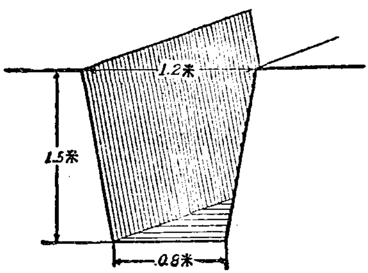
問他的側面積，全表面積和體積各是多少?



7. 一正角錐：底面是每邊2尺的正方形，高是3尺.今在自頂點至底面的垂線的中點，用平行於底的一個平面，截這角錐所得的角錐臺的體積和側面積各是多少?

(在平行於角錐的底面的截面和底面間的部分，叫做角錐臺).

8. 今掘一溝，溝的斷面，如圖所示. 溝的長是15米. 問所掘出來的土的體積是多少?



又，把掘出來的土，填平一個寬是3米，長是4米的窪地.問所填的高是多少?

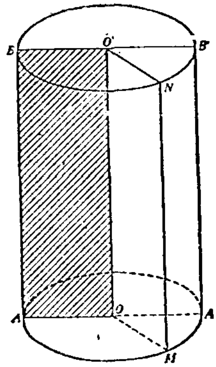
[迴 轉 體]

169. 迴轉體

(定義) 一個平面圖形，迴轉於一個定軸的周圍所成的立體，叫做迴轉體.

170. 直圓柱

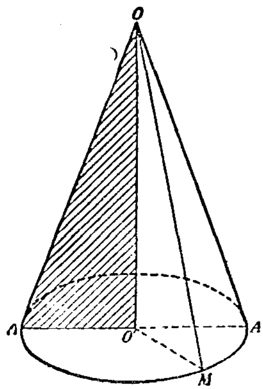
(定義) 以矩形的一邊當做軸,把矩形迴轉起來所成的立體,叫做**直圓柱**.



迴轉時直角於軸的兩邊所生的面,叫做**底面**,底面是相等的兩個圓. 其他平行於軸的一邊所生的面,叫做**側面**, 側面是一個曲面.做成曲面的線,叫做**母線**;當做軸的一邊的長,叫做**高**.

171. 直圓錐

(定義) 以直角三角形直角的一邊當做軸,把他迴轉起來所成的立體,叫做**直圓錐**.



迴轉時垂直於軸的一邊所生的面,叫做**底面**,底面是一個圓. 斜邊所生的面,叫做**側面**,側面是一個曲面.做成曲面的線,叫做**母線**,(**斜高**).軸和斜邊的交點,叫做**頂點**,軸的長,叫做**高**.

172. 定理 直圓柱的側面積,等於底的周和高的積.直圓錐的側面積,等於底的周和斜高的積的二分之一. (證明從略).

$$直圓柱的側面積 = 2\pi rh.$$

r: 底的半徑, h: 高.

$$直圓錐的側面積 = \pi rh'.$$

r: 底的半徑, h': 斜高.

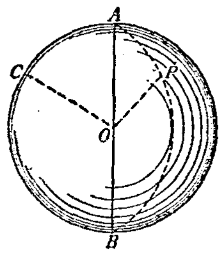
173. 定理 直圓柱的體積,等於底面積和高相乘的積.直圓錐的體積,等於底面積和高相乘積的三分之一 (證明從略).

$$直圓柱的體積 = \pi r^2 h,$$

$$直圓錐的體積 = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

174. 球

(定義) 以半圓的直徑當做軸,把半圓迴轉起來所成的立體,叫做球.

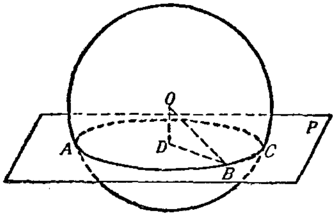


球的表面,是個曲面,這叫做球面.半圓的中心,叫做球的中心.球面是從中心等距離的點的軌跡.

從中心到球面上的點的距離,叫做球的半徑,通過中心而兩端在球面上的線段,叫做球的直徑.

175. 一球被一平面所截,他的截面是一個圓.

[證明] 從中心 O 向截面 ABC 作垂線 OD, 連結垂足 D 和交線上任意一點 B, 則



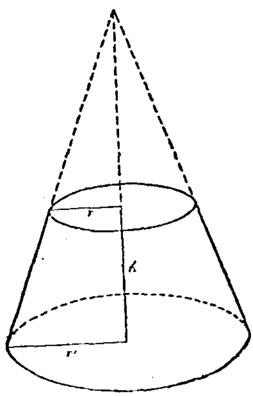
$$\overline{DB}^2=\overline{OB}^2-\overline{OD}^2.$$

$\therefore$ DB 的長是一定不變的.

那就是:截面 ABC,是以 D 當做中心的一個圓.

176. **定理** 半徑是 r 的球的體積等於 $\frac{4}{3}\pi r^3$.半徑是 r 的球的表面積等於 $4\pi r^2$. (證明從略).

習 題



1. 用垂直於軸的平面截直圓錐,他的截面是一個圓.

2. 有一矩形,兩邊的長是 a 和 b. 問以 a 當做軸迴轉時所成的圓柱的體積和以 b 當做軸迴轉時所成的圓柱的體積的比如何?

若 $a=2$ 釐米, $b=3$ 釐米時怎樣?

3. 內徑是 15 釐米,深是 45 釐米

的直圓柱的容積是多少?

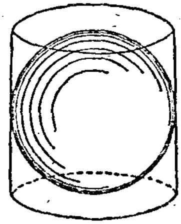
4. 直徑是 3.6 寸,斜高是 4.5 寸的直圓錐的體積是多少?

5. 設直圓錐臺的上下兩底的半徑是 r 和 r', 高是 h, 則他的體積是 $\frac{\pi}{3}(r^2+r\cdot r'+r'^2)$.

6. 有一直圓錐臺形的水桶:口徑是 30 釐米;底徑是 22 釐米;深是 35 釐米.求水裝滿時水的重量.

7. 一球內切於正四面體. 問這球的半徑和他的體積各如何?

8. 有一半徑是 30 釐米的球. 今被在離中心 20 釐米處所截.試求這截面的周圍和他的面積.

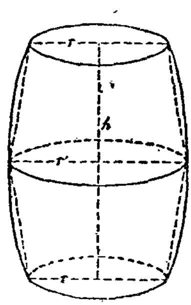


9. 球之表面積和他的外切直圓柱的側面積相等. 又,他的體積,是直圓柱的體積的三分之二.

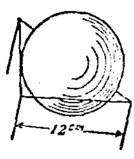
10. 兩球面相交,他們的交線是什麼?

11. 右圖形狀的桶的體積 (V) 大約是:

$$V=\frac{\pi h}{3}(r'^2+r'r+r^2).$$

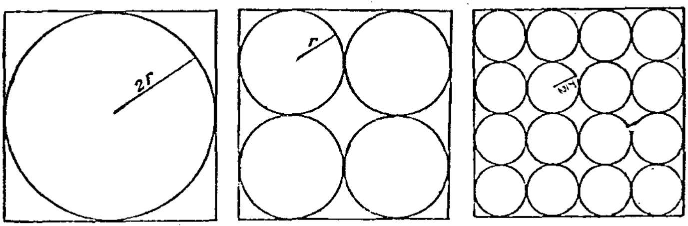


12. 把直徑 8 釐米的球,放在一個每邊是 12 釐米的正三角形的木框上. 問從支持的位置到球的



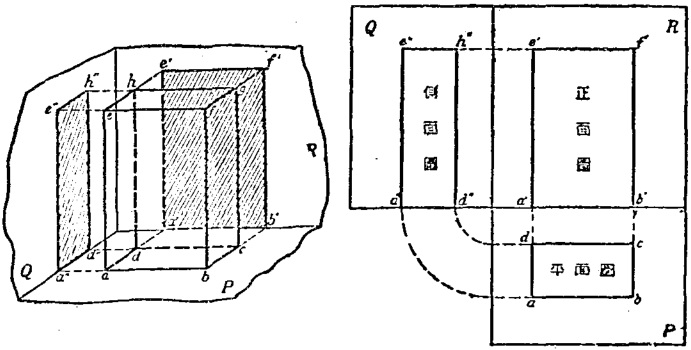
頂上的高是多少?

13. 像下面的圖,在三個相等的立方體的裏面,各充滿三種大小不同的球. 每個立方體中的空隙的容積,怎樣求法?把他的式子寫出來.又,試把各種情形的空隙的分量比較一下.



[投 影 圖]

177. 立體的投影圖

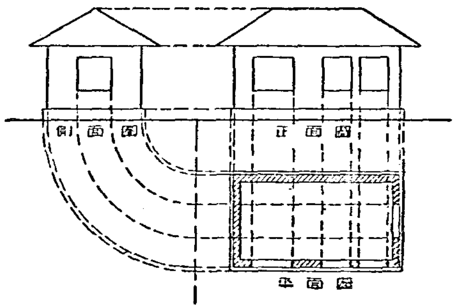


設空間有一立體. 在互成直角的三個平面 P, Q, R 的上面,作這立體的正射影,則由這三個射影,就能夠知道立體的全體的

形狀,并且他的各部分的大小,也可以計算出來.

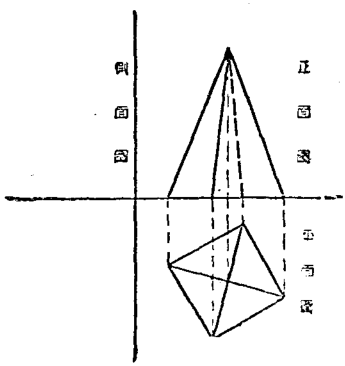
像這樣的圖,叫做投影圖.

投影圖的配置,通常如 (ii) 圖,這三個圖,各叫做立體的平面圖,縱面圖,側面圖.



這種方法,在機械或建築等等的設計上,應用很廣.

試把右面的正四角錐的側面圖,畫出來.



度量衡比較表

第一表　長度

釐米 Centimeters (cm.)	英寸(吋) Inches (in.)	英尺(呎) Feet (ft)	尺	米 Meters (m.)	里	仟米 Kilometers (km.)	英里(哩) Miles (mi.)
1	0.3937 ($\bar{1}.59517$)	0.03281 ($\bar{2}$ 51598)	0.03 ($\bar{2}.47712$,	0.01 ($\bar{2}.00000$)			
2.540 (0.40483	1	0.08333 ($\bar{2}.92082$)	0.0762 ($\bar{2}.88195$)	0.0254 ($\bar{2}.40483$)			
30.48 (1.48402)	12 (1.07918)	1	0.9144 ($\bar{1}.96114$)	0.3048 ($\bar{1}.48402$)			
33.33 (1.52288)	13.12 (1.11805)	1.094 (0.03886)	1	0.3333 ($\bar{1}.52288$)	0.000667 ($\bar{4}.82391$)	0.000333 ($\bar{4}.52288$)	
91.44 (1.96114)	36 (1.55630)	3 (0.47712)	2.743 (0.43826)	0.9144 ($\bar{1}.96114$)	0.0018288 ($\bar{3}.26217$)	0.0009144 ($\bar{4}.96114$)	0.0005682 ($\bar{4}.75449$)
100	39.37 (1.59517)	3.281 (0.51598)	3 (0.47712)	1	0.002 ($\bar{3}.30103$)	0.001 ($\bar{3}.00000$)	0.0006214 ($\bar{4}.79335$)
	792 (2.89873)	66 (1.81954)	60.35 (1.78068)	20.12 (1.30356)	0.04023 ($\bar{2}.60459$)	0.02012 ($\bar{2}.30356$)	0.0125 ($\bar{2}.09691$)
		1,640 (3.21484)	1,500 (3.17609)	500 (2 69897)	1	0.5 ($\bar{1}.69897$)	0.3107 ($\bar{1}.49232$)
		3,281 (3.51598)	3,000 (3.47712)	1,000 (3.00000)	2 (0.30103)	1	0.6214 ($\bar{1}.79335$)
		5,280 (3.72263)	4,828 (2.68377)	1,609 (3.20665)	3.219 (0.50768)	1.609 (0.20665)	1

第二表　面積

平方釐米 Square Centimeters (sq. cm.)	平方英寸(方吋) Square Inches (sq. in.)	平方英尺(方呎) Square Feet (sq. ft.)	平方尺	平方米 Square Meters (sq. m.)	畝	平方仟米 Square Kilometers (sq. km)	平方英里 Square Miles (sq. mi.)
1	0.1550 ($\bar{1}.19033$)	0.001076($\bar{3}.03197$)	0.0009 ($\bar{4}.95424$)				
6.452 (0.80967)	1	0.006944($\bar{3}.84164$)	0.00581 ($\bar{3}.76391$)				
929.0 (2.96803)	144 (2.15836)	1	0.8361 ($\bar{1}.92227$)	0.09290 ($\bar{2}.96803$)	0.0001394 ($\bar{4}.14412$)		
1,111 (3.04576)	172.2 (2.23609)	1.196 (0.07773)	1	0.1111 ($\bar{1}.04576$)	0.0001667 ($\bar{4}.22185$)		
8,361 (3.92227)	1,296 (3.11260)	9 (0.95424)	7.525 (0.87651)	0.8361 ($\bar{1}.92227$)	0.001254 ($\bar{3}.09836$)		
10,000 (4.00000)	1,550 (3.19033)	10.76 (1.03197)	9 (0.95424)	1	0.0015 ($\bar{3}.17609$)	0.000001 $\bar{6}.00000$)	
		7,176 (3.85588)	6,000 (3.77815)	666.6 (2.82391)	1	0.000667 ($\bar{4}.82391$)	0.0002574 ($\bar{4}.41061$)
		43,560 (4.63909)	36,422 (4.56136)	4,047 (3.60712)	6.070 (0.78321)	0.004047 ($\bar{3}.60712$)	0.001562 ($\bar{3}.19382$)
		10,763,928 (7.03197)	9,000,000 (6.95424)	1,000,000 (6.00000)	1,500 (3.17609)	1	0.3861 ($\bar{1}.58670$)
		27,878,400 (7.44527)	23,309,982 (7.36754)	2,590,000 (6.41330)	3,885 (3.58939)	2.590 (0.41330)	1

第三表　容積

立方英寸 Cubic Inches (cu. in)	升，市升 Liter (l.) =1,000 c. c.	美加侖(流質) U S. Gallons (liquid) (U. S. gal.)	英加侖(流質) Imp. Gallons (liquid (Imp. gal.)	立方英尺 Cubic Feet (cu. ft.)	立方尺	立方米 Cubic Meters (cu. m.)
1	0.01639 ($\bar{2}$.21450)	0.004329 $\bar{3}$.63639)	0.003605 ($\bar{3}$.55686)	0.0005787 ($\bar{4}$.76246,	0.0004424 ($\bar{4}$.64586)	
57.75 (1.76155)	0 9464 ($\bar{1}$.97606,	0.25 ($\bar{1}$.39794)	0.2082 ($\bar{1}$.31841)	0.03342 ($\bar{2}$.52401)	0.02555 ($\bar{2}$.40742)	
61.02 (1.78550)	1	0.2642 ($\bar{1}$.42188)	0.220 ($\bar{1}$.34236)	0.03531 ($\bar{2}$.54795)	0.0270 ($\bar{2}$.43136,	0.001 ($\bar{3}$.0000)
231 (2.36361)	3 785 (0 57812)	1	0.8327 ($\bar{1}$.92047)	0.1337 ($\bar{1}$.12607)	0.10221 ($\bar{1}$.00948)	0.003785 ($\bar{3}$.57812)
277.418 (2.44314)	4.546 (0.65764)	1.201 (0.07953)	1	0.1605 ($\bar{1}$.20560)	0.12275 ($\bar{1}$.08901)	0.004546 ($\bar{3}$.65765)
1,728 (3.23754	28.32 (1.45205)	7.481 (0.87393)	6.229 (0.79440)	1	0.7646 ($\bar{1}$.88341)	0.02832 ($\bar{2}$.45205)
2,260 (3.35414)	37.04 (1.56864)	9.784 (0.99052)	8.147 (0.91099)	1.308 (0.11659)	1	0.03704 ($\bar{2}$.56864)
46,656 (4.66891)	76.46 (2.88341)	202.0 2.30529)	168.2 (2.22576)	27 (1.43136)	20.64 (1.31477)	0.7646 ($\bar{1}$.88341)
61,020 (4.78550	1,000. 3.0000)	264.2 (2.42188)	220.0 (2.34235)	35.31 (1.547[illegible])	27 (1.43136)	1

第四表　重量

英兩(盎司) Ounces (oz.)	兩	英磅 Pounds (lb.)	斤	仟克 Kilograms (kg.)	美噸 Short Tons (t=2000 lbs.)	公鐓 Metric Tons (t.)	英噸 Long Tons (t=2240 lbs.)
1	0.9072 ($\bar{1}$.95770)	0.0625 ($\bar{2}$.79588)	0.05670 ($\bar{2}$.75358)	0.02835 ($\bar{2}$.45255)			
1.103 (0.04230)	1	0.06891 ($\bar{1}$.83818	0.06250 ($\bar{2}$.79588)	0.03125 ($\bar{2}$.49485)			
16 (1.20412)	14.515 (1.16182)	1	0.9072 ($\bar{1}$.95770)	0.4536 ($\bar{1}$.65667)	0.0005 ($\bar{4}$.69897)	0.0004536 ($\bar{4}$.65667)	0.0004464 ($\bar{4}$.64975)
17.64 (1.24642)	16 (1.20412)	1.1023 (0.04230)	1	0.5 ($\bar{1}$.69897)	0.0005512 ($\bar{4}$.74127)	0.0005 ($\bar{4}$.69897)	0.0004921 ($\bar{4}$.69205)
35.27 (1.54745)	32 (1.50515)	2.205 (0.34333)	2 (0.30103)	1	0.001102 ($\bar{3}$.04230)	0.001 ($\bar{3}$.00000)	0.0009842 ($\bar{4}$.99308)
1,792 (3.25334)	1,625.7 (3.21104)	112 (2.04922)	101.6 (2.00902)	50.80 (1.70589)	0.560 ($\bar{1}$.74819)	0.05080 ($\bar{2}$.70589)	0.05 ($\bar{2}$.69897)
32,000 (4.50515)	29,030 (4.46285)	2,000 (3.30103)	1,814.4 (3.25873)	907.2 (2.95770)	1	0.9072 ($\bar{1}$.95770)	0.8929 ($\bar{1}$.95078)
35,274 (4.54745)	32,000 (4.50515)	2,205 (3.34333)	2,000 (3.30103)	1,000 (3.00000)	1.1023 (0.04230)	1	0.9842 ($\bar{1}$.99308)
35,840 (4.55437)	32,514 (4.51207)	2,240 (3.35025)	2,032 (3.30795)	1,016 (3.00692)	1.120 (0.04922)	1.016 (0.00692)	1

數之平方,立方,平方根,立方根.

數	平方	立方	平方根	立方根	數	平方	立方	平方根	立方根
1	1	1	1.000	1.000	51	2601	132651	7.141	3.708
2	4	8	1.414	1.260	52	2704	140608	7.211	3.733
3	9	27	1.732	1.442	53	2809	148877	7.280	3.756
4	16	64	2.000	1.587	54	2916	157464	7.348	3.780
5	25	125	2.236	1.710	55	3025	166375	7.416	3.803
6	36	216	2.449	1.817	56	3136	175616	7.483	3.826
7	49	343	2.646	1.913	57	3249	185193	7.550	3.849
8	64	512	2.828	2.000	58	3364	195112	7.616	3.871
9	81	729	3.000	2.080	59	3481	205379	7.681	3.893
10	100	1000	3.162	2.154	60	3600	216000	7.746	3.915
11	121	1331	3.317	2.224	61	3721	226981	7.810	3.936
12	144	1728	3.464	2.289	62	3844	238328	7.874	3.958
13	169	2197	3.606	2.351	63	3969	250047	7.937	3 979
14	196	2744	3.742	2.410	64	4096	262144	8.000	4.000
15	225	3375	3.873	2.466	65	4225	274625	8.062	4.021
16	256	4096	4.000	2.520	66	4356	287496	8.124	4.041
17	289	4913	4.123	2.571	67	4489	300763	8.185	4.062
18	324	5832	4.243	2.621	68	4624	314432	8.246	4.082
19	361	6859	4.359	2.668	69	4761	328509	8.307	4.102
20	400	8000	4.472	2.714	70	4900	343000	8.367	4.121
21	441	9261	4.583	2.759	71	5041	357911	8.426	4.141
22	484	10648	4.690	2.802	72	5184	373248	8.485	4.160
23	529	12167	4.796	2.844	73	5329	389017	8.544	4.179
24	576	13824	4.899	2.884	74	5476	405224	8.602	4.198
25	625	15625	5.000	2.924	75	5625	421875	8.660	4.217
26	676	17576	5.099	2.962	76	5776	438976	8.718	4.236
27	729	19683	5.196	3.000	77	5929	456533	8.775	4.254
28	784	21952	5.292	3.037	78	6084	474552	8.832	4.273
29	841	24389	5.385	3.072	79	6241	493039	8.888	4.291
30	900	27000	5.477	3.107	80	6400	512000	8.944	4.309
31	961	29791	5.568	3.141	81	6561	531441	9.000	4.327
32	1024	32768	5.657	3.175	82	6724	551368	9.055	4.344
33	1089	35937	5.745	3.208	83	6889	571787	9.110	4.362
34	1156	39304	5.831	3.240	84	7056	592704	9.165	4.380
35	1225	42875	5.916	3.271	85	7225	614125	9.220	4.397
36	1296	46656	6.000	3.302	86	7396	636056	9.274	4.414
37	1369	50653	6.083	3.332	87	7569	658503	9.327	4 431
38	1444	54872	6.164	3.362	88	7744	681472	9.381	4.448
39	1521	59319	6.245	3.391	89	7921	704969	9.434	4.465
40	1600	64000	6.325	3.420	90	8100	729000	9.487	4.481
41	1681	68921	6.403	3.448	91	8281	753571	9.539	4.498
42	1764	74088	6.481	3.476	92	8464	778688	9.592	4.514
43	1849	79507	6.557	3.503	93	8649	804357	9.644	4.531
44	1936	85184	6.633	3.530	94	8836	830584	9.695	4.547
45	2025	91125	6.708	3.557	95	9025	857375	9.747	4.563
46	2116	97336	6.782	3.583	96	9216	884736	9.798	4.579
47	2209	103823	6.856	3.609	97	9409	912673	9.849	4.595
48	2304	110592	6.928	3.634	98	9604	941192	9.899	4.610
49	2401	117649	7.000	3.659	99	9801	970299	9.950	4.626
50	2500	125000	7.071	3.684	100	10000	1000000	10.000	4.642

中華民國二十七年六月初版
中華民國二十八年八月三版

周

✤G三四一五

職業學校教科書 幾何三角一冊
(52213)

每冊實價國幣柒角伍分
外埠酌加運費匯費

編著者 范慶涵
發行人 王雲五
長沙南正路
印刷所 商務印書館
發行所 商務印書館
各埠

(本書校對者胡達聰)

職業學校幾何三角　實價柒角伍分