球面三角學

編輯者

常福元

北平文化學社印行

球面三角學

編輯者

常元福

北平文化學社印行

民國二十三年十二月 日初版發行

實價大洋捌角
（實價不折不扣 外埠酌加寄費）

球面三角學

有著作權 翻印必究

編輯者 常福元

發行人 邵松如 北平和平門前文化學社

印刷者 文化學社 北平和平門前 電南三五八〇

總發行所 北平和平門前電話南局三五八〇 有線電報掛號二四二九 文化學社

分發行所 上海公共租界老靶子路三六九號 文化學社上海分社 開封特約分社 鄭州特約分社

本書已照出版法呈請內政部註冊

三版序

吾國之有正式球面三角學,當自明末時西人翻譯曲線三角法始。元郭守敬氏,雖曾以弧矢命算,立黃赤互求之率;但取數甚難,爲用不廣。曲線三角法,經清世編入曆象考成,改名弧三角形,始列爲天學先修科。後之作者,有梅文鼎氏之弧三角舉要,江永氏之正弧三角疏義,汪萊氏之弧角條目。道光以後,徐有壬氏編務民義齋算學,張作楠氏編翠薇山房數學,吳嘉善氏編白芙堂叢書,均有收錄。顧以上諸書,雖列入著作之林,但不合教科之用。余自民國十九年,在輔仁大學講授球面三角學,國在手可用之西書,只有 Wentworth 與 Granville 兩種,且嫌失之太簡;乃旁採 Todhunter 與 W. J. M'clelland and T. Preston 兩書,編輯是篇以應之。初版選材稍多,再版量爲删節;今值排印三版,爰將書中錯誤詳爲改正,并識其原始於此。

中華民國二十三年十月十五日江寧常福元書於北平私立輔仁大學

目錄

球面三角學

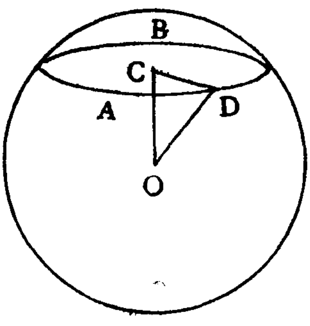
第一章

大圓與小圓

1. 立體表面上各點。至表面外之某定點。有同等之距離者。則此立體卽謂之球體。或稱渾圓。其表面曰球面。某定點曰球心。距離曰半徑。亦簡稱幅。通過球心之直綫。以球面爲界者。曰直徑。或簡稱徑。

球體亦可由半圓旋轉而成。中樞之直徑別稱爲軸。軸之兩端曰極。

2. 以平面割球體。所割之界爲平圓。



如圖。AB爲割界。O爲球心。作OC直垂割面。在割界上任選一點D。連OD與CD。因OC直垂割面。故∠OCD爲直角。

$$\therefore CD=\sqrt{OD^2-OC^2}$$

但O與C皆定點。OC之長度不

變。又 OD 爲球之半徑。其長度亦不變。故 CD 亦不變。即割界上之各點。距 C 點皆不變。故割界爲平圓，C 爲圓心。

凡割面經過球心者。所割之界名曰大圓。不經過球心者。所割之界名曰小圓。故大圓之半徑。即球體之半徑。

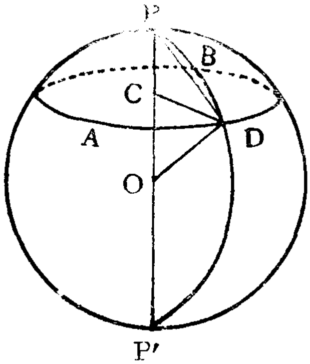
3. 經過球心及球面上任何兩點。可作一平面。且祇能作一平面。但兩點若爲直徑之兩端。則三點同居一直線。可作無量數之平面。故通過球心及球面上兩點。祇可作一大圓。若兩點居直徑之兩端。則大圓之位置不能決定。

凡通過兩點之唯一大圓。其周必不能爲兩點所平分。故距弧有長短。今爲取便引用。以後凡稱兩點間之距弧者。皆指較短之距弧而言。

凡通過球面上之三點。不同在一大圓之周者。祇能作一小圓。因大圓之面必經過球心。而此則否也。

4. 球體之徑。直垂大圓或小圓之面者。爲圓之軸。軸之兩端爲圓之極。故大圓之兩極。距圓周皆等。小圓之兩極則否。因有遠極近極之別。但爲取便引用。以後凡稱小圓之極者。皆指近極而言。

5. 從圓之一極。至其周上各點。距離皆等。



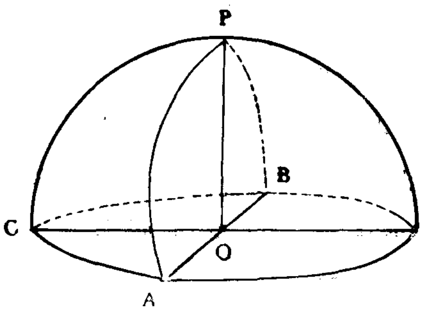
如圖。O爲球心。AB爲球面上之一圓。C爲圓心。P,P′爲兩極。在圓周上任取一點D。連CD,OD,PD諸線。則

$$PD=\sqrt{PC^2+CD^2}$$

但PC與CD皆不變。故PD亦不變。設通過P,D作一大圓。則因PD弦不變。故PD弧亦不變。卽P極距圓周上各點皆等。

凡大圓之弧。由小圓之近極至其周者。名曰小圓之弧輻。

6. 大圓之弧。由大圓之極至其周者。爲一象限。



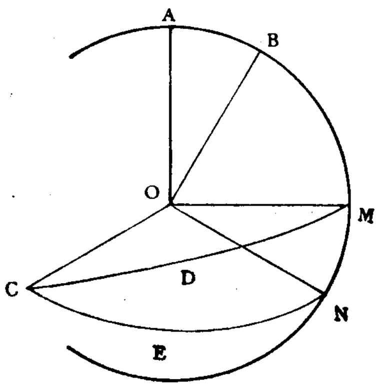
如圖。P爲大圓ABC之極。O爲球心。亦卽圓之心。作PO線。因P爲ABC之極。故PO直垂其面。則∠POA爲直角。因而PA弧爲一象限。

7. 凡兩圓相交。在交點上各圓切線所成之角。謂之兩圓之交角。此角與兩圓面所成之二面角同度。因二面角之大小。係以平面角量之。而交點上之切線。同垂兩面之公共半徑。故切線之交角。卽是二面角之平

面角。亦卽兩圓之交角。

凡圓之軸皆直垂其面。故大圓之經過某圓之軸者。皆直垂圓面。換言之。則此圓與經過兩極之他大圓相交。其交角皆爲直角。

8.　兩大圓之交角。等於其極之距弧。



如圖。O爲球心。CD,CE爲兩大圓。相交於C。A,B爲兩圓之極。通過A,B作大圓。遇CD於M。遇CE於N。連OA,OB,OC,OM,ON諸半徑。

$\because$ AO直垂平面MOC,

$\therefore \angle AOC$ 爲一直角

又BO直垂平面NOC, $\therefore \angle BOC$ 爲一直角

故OC直垂平面AOB, 而OM, ON皆在AOB平面內。故$\angle$s COM, CON皆爲直角。因得 $\angle MON$ 爲CD,CE兩大圓之交角。而 $\angle AOB$ 或AB弧爲兩極之距弧。故

$$\angle AOB=\angle AOM-\angle BOM$$
$$=\angle BON-\angle BOM$$
$$=\angle MON$$

9.　**兩大圓互相平分。**

凡大圓之面。皆經過球心。則兩圓之交線。必爲球之

直徑。亦卽各圓之直徑。而圓爲直徑所平分。故兩大圓之周。皆互相平分於交點。

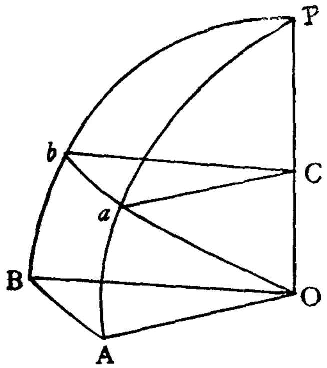
10. 設大圓之弧。連球面上之一點P。及他兩點A與C。皆爲象限。若他兩點非直徑之兩端。則P點卽爲通過A,C點大圓之極。

由第6節之圖觀之。倘PA,PC皆爲象限。O爲球心。則POA,POC皆爲直角。卽PO直垂AOC面。故P爲AC大圓之極。

11. 設從球面上之一點。能作兩大圓之弧。其面皆直垂他一圓之面。則此點卽爲他圓之極。

因兩圓旣同垂他圓之面。則其交線亦必垂之。此交線應爲他圓之軸。故其端點爲他圓之極。

12. 小圓之弧。可以所對之圓心角。及其弧幅計之。



如圖。ab 爲小圓之弧。C爲圓心。aCb 爲圓心角。P爲近極。O爲球心。自P作大圓 PaA, PbB。遇以P爲極之大圓於A與B。則 Pa 或 Pb 卽爲弧幅。又 Ca, Cb, OA, OB。皆直垂OP。故 Ca 與OA平行。Cb 與OB平行。又 $\angle aCb = \angle AOB$。依幾何學定理。凡弧與弧之比。等

於半徑與半徑之比。故

$$\frac{ab}{AB}=\frac{Ca}{OA}$$

$$=\frac{Ca}{Oa}$$

$$=\sin POa$$

$$\therefore\ ab=AB\sin Pa$$

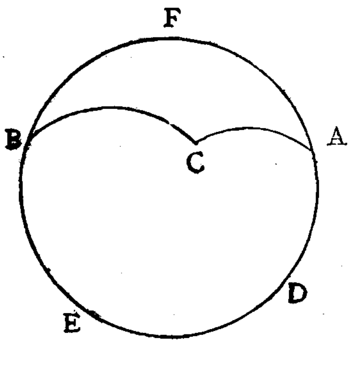
第二章
弧三角形

13. 弧三角形 弧三角形者。球面上大圓弧所成之三角形也。三大圓之弧。爲弧三角形之三邊。三弧所交之角。爲弧三角形之三角。

凡大圓之面。皆通過球心。則三弧之面必會合於球心。因得一個三面立體角。其面角即弧三角形之三邊。其二面角之平面角。即弧三角形之三角。

弧三角形之三角。嘗以 A, B, C, 表之。其對邊則以 a, b, c, 表之。角與邊之度量。可用直角法之度分秒計之。亦可用圓周法之烈典計之。實用上多取直角法。理論上多取圓周法。

14. 邊之長度限制 弧三角形三邊之長度。原不應有限制。但習慣上多取小於百八十度者。如圖。ADEB, BC, CA 三弧成一個三角形。AFB, BC, CA 三弧亦成一個三角形。但因ADEB 弧大於半圓。多不之取。凡稱 ABC 三角形。皆指AFB,BC,CA 三弧所成之三角形而言。此種限制雖



屬肌造。而删繁就簡。俾便初學。乃其唯一之原因也。

依此限制。三邊既各小於百八十度。則三角亦必各小於兩直角。因而弧三角形常爲凸形。其內陷者非所論也。

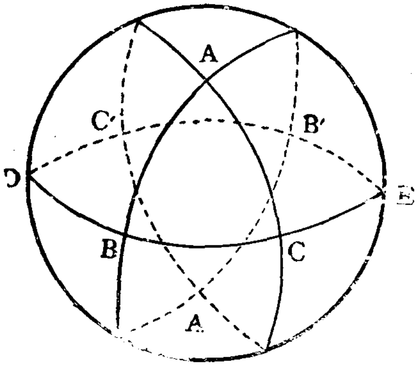
15. 弧三角形之種類　弧三角形之分類。與平三角形同。兩邊相等者。曰等腰弧三角形。三邊皆等者。曰等邊弧三角形。惟直三角形在平三角形上。祇能有一直角。而在弧三角形中。則可三角皆直。有一直角者。曰直弧三角形。有兩直角者。曰雙直三角形。有三直角者。曰全直三角形。

弧三角形之三邊。既皆爲大圓之弧。故可各等於一象限。有一邊爲象限者。曰象弧三角形。兩邊爲象限者曰雙象三角形。三邊皆爲象限者。曰全象三角形。

凡雙直三角形。雙象三角形，皆等腰弧三角形。凡全直三角形。全象三角形，皆等邊弧三角形。

16. 瓜瓣形，瓣餘三角形，底弧三角形　球面上兩半圓所成之形。爲瓜瓣形。如圖。ABA′, ACA′ 爲兩半圓相交於 A, A′。則 ABA′ CA 卽爲瓜瓣形。而 A, A′ 爲直徑之兩端。故 A′ 爲 A 之底點。

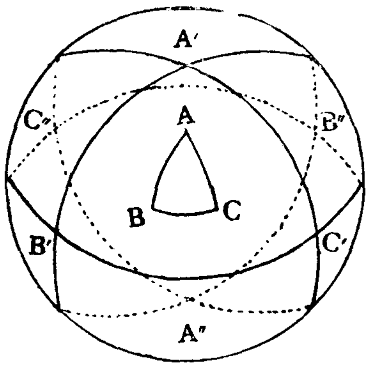
今作 BC 弧。與 AB, AC 兩弧合成 ABC 弧三角形。又合成 A′ BC 弧三角形。但此兩形合爲一瓜瓣形。故 ABC,



A′BC 互爲瓣餘三角形。

凡弧三角形之任何兩邊。皆可引長成一瓜瓣形。故由每個三角形。可作成三個瓣餘三角形。就本圖言之。ABC 爲原三角形。A′BC,B′ECA,C′DBA 皆爲瓣餘三角形。而 B′ 爲 B 之底點。C′ 爲 C 之底點。故 A′B′C′ 三角形。爲原三角形之底弧三角形。

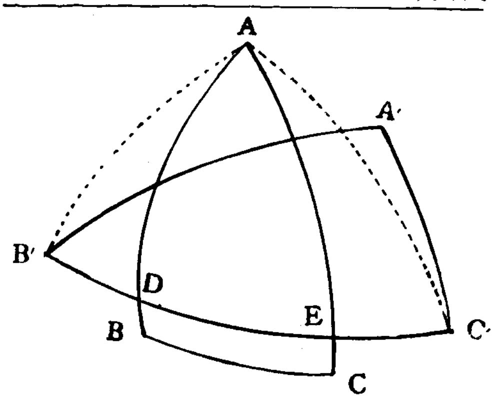
17. 極三角形　如圖。ABC 爲任一弧三角形。A′,B′,C′ 爲 BC, CA, AB 三弧之極。則 A′B′C′ 三角形爲原三角形之極三角形。



凡一大圓之弧皆有兩極。則 BC,CA,AB 三弧共有六極。以弧連之。可得八個三角形。或以 A,B,C爲極作全圓周。亦得八個三角形。如 A′B′C′, A″B′C″, A′B″C′, A′B″C″, A″B′C′, A″B″C′, A′B′C″

A″B″C″。但所謂極三角形者乃專指A′B′C′一形而言。卽A, A′同居BC邊之一方面。B,B′同居AC邊之一方面。C,C′同居AB邊之一方面。他形不與焉。

18. 若此三角形爲彼三角形之極三角形。則彼三角形亦爲此三角形之極三角形。



命ABC爲任一弧三角形。A′B′C′爲其極三角形。則ABC亦爲A′B′C′之極三角形。

因B′爲AC之極。故AB′弧爲一象限。又C′爲AB之極。故AC′弧亦爲一象限。則A又爲B′C′之極。且與A′同在B′C′邊之一方面。因A與A′原同居BC邊之一方面。A′A當然小於一象限。今A爲B′C′之極。而AA′又小於一象限。故A與A′皆同居B′C′邊之一方面也。

依同理推之。B爲C′A′之極。且與B′同居C′A′邊之一方面。又C爲A′B′之極。且與C′同居A′B′邊之一方面。故ABC三角形爲A′B′C′三角形之極三角形。

19. 極三角形之邊與角。與原三角形之角與邊。互

爲補角。

如上節之圖。設 B′C′ 弧遇 AB 弧於 D。遇 AC 弧於 E。則 A 角即以 DE 弧量之。但 B′E 與 C′D 皆各爲一象限。即 DE 與 B′C′ 合爲一半圓。故 DE 與 B′C′ 所對之球心角互爲補角。換言之。即極三角形之 B′C′ 邊。與原三角形之 A 角。互爲補角。

依同理推之。極三角形之 C′A′ 邊。與原三角形之 B 角。極三角形之 A′B′ 邊。與原三角形之 C 角。皆互爲補角。若命 A, B, C, a, b, c, 爲原三角形之六項。A′, B′, C′, a', b', c', 爲極三角形之六項。則

$$A' = \pi - a \qquad B' = \pi - b \qquad C' = \pi - c$$

$$a' = \pi - A \qquad b' = \pi - B \qquad c' = \pi - C$$

或 $$A = \pi - a' \qquad B = \pi - b' \qquad C = \pi - c'$$

$$a = \pi - A' \qquad b = \pi - B' \qquad c = \pi - C'$$

20. 雙關原則　由上節觀之。凡定理之驗於原三角形之角與邊者。亦必驗於極三角形之角與邊。而極三角形之角與邊。爲原三角形邊與角之補角。故亦必驗於原三角形之邊與角。僅正負記號有時相反耳。此理名曰雙關原則。於考證公式時。將數數見之。

21. 弧三角形任兩邊之和皆大於第三邊。

第 13 節云。弧三角形與所對球心之三面立體角相

應。故其三邊即是立體角之三個面角。而三面立體角之任兩面角。皆大於第三面角。在幾何學中已証明。故弧三角形任兩邊之和。亦必大於第三邊。

準此定理。則弧三角形之任一邊。必大于餘兩邊之較。乃當然之理。

22. 弧三角形三邊之和。小於一圓周。

球心三面立體角之三個面角。既與弧三角形之三邊相應。而三面角之和。小於四直角。乃幾何學中之定理。故三邊之和。亦小於四直角。若以圓周法計算。則三邊之和小於一圓周。

23. 弧三角形三角之和。大於兩直角。小於六直角。

命A,B,C爲弧三形之三角。a', b', c',爲其極三角形之三邊。準雙關原則。

$$a'+b'+c'<2\pi$$

$$\text{因得}\ \pi-A+\pi-B+\pi-C<2\pi$$

$$\therefore\ A+B+C>\pi$$

依第14節之規定。弧三角形之各角。皆小於兩直角。故其總和必小於六直角。

24. 疊合相等與對稱相等　平面幾何學之証兩形相等。有用疊合法者。但球面上之幾何形。有時不能疊合。例如ABC爲原弧三角形。A″B″C″爲弧底三角形。

其六項固各各相等而對稱。然不可以疊合。蓋若將底弧三角形移至原三角形上。使一邊相合。則對角必分居此邊之兩方面。且位置相反。凡相等三角形之可以疊合者。曰疊合相等。不可以疊合者。曰對稱相等。

弧三角形之相等。不論疊合與對稱。苟同居一球之面。則其條件與平三角形同。即

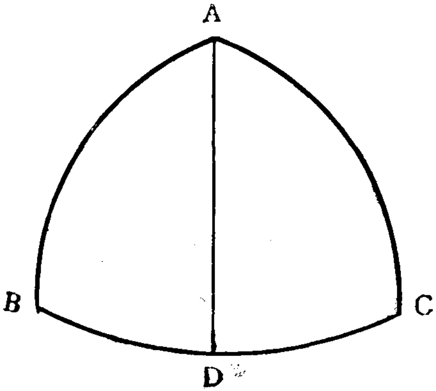
(1) 此形之兩邊與夾角。等於彼形之兩邊與夾角。

(2) 此形之三邊。等於彼形之三邊。

(3) 此形之兩角及一鄰邊。等於彼形之兩角及一鄰邊。

惟第(2)條之三邊。若推之於極三角形。則三角之彼此相等者。兩形亦能相合。此條件爲平三角形所無。而爲弧三角形所獨有也。

25. 等腰弧三角形之兩底角相等。



如圖。AB=AC。若D爲BC邊之中點。作AD大弧。則三角形ADB, ADC之三邊。皆各各相等而相反。即對稱相等。故$\angle B=\angle C$。

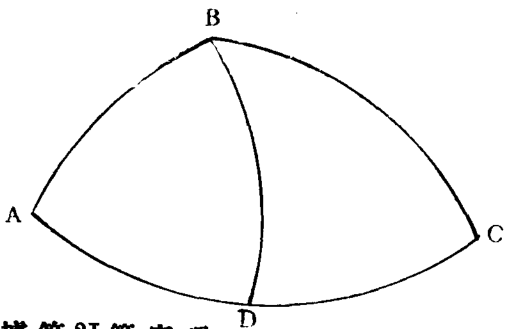
如AB, AC各爲一象限。則A爲BC之極。AB, AC,

皆直垂BC。卽B,C兩角皆爲直角。第15節所稱雙象三角形與雙直三角形。卽此種三角形也。

26. 弧三角形有兩角相等者。其對邊亦等。

準雙關原則。弧三角形有兩角相等者。其極三角形之兩邊必等。而準上節定理。極三角形之兩邊既等。則對角必等。再準雙關原則。極三角形之兩角既等。則原三角形之兩邊必等。

27. 弧三角形之大角必對大邊。



如圖。設∠ABC大於∠BAC。從B作BD弧。使∠ABD等於∠BAC。則BD邊等於AD邊。但據第21節定理。

$$BD + DC > BC$$

則 $AD + DC > BC$

或 $AC > BC$

28. 弧三角形之大邊必對大角。

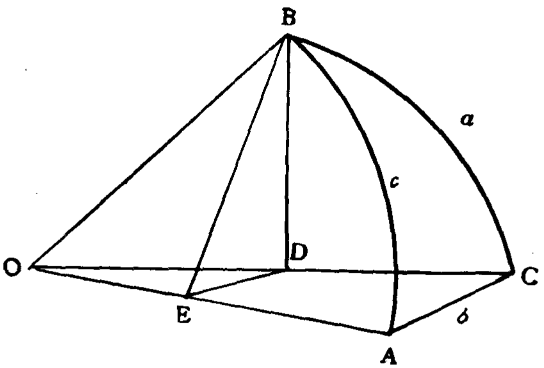
準雙關原則。若原弧三角形之 a 大於 b。則極三角形之 B' 必大於 A'。準上節定理。b' 必大於 a'。再準雙關原則。原三角形之A必大於B。

第三章

直弧三角形

29. 直弧三角形分一直角,兩直角,三直角,三種。三直角之三角形。別稱全直三角形。乃球面八分之一。其三邊皆為象限。此無須解者也。兩直角之三角形。別稱雙直三角形。其對邊皆為象限。第三角與第三邊度量相同。亦無須解者也。故所須解者。祇有一直角之三角形一種。本章專論此種直弧三角形邊與角之關係。

30. 基本公式　命ABC為直弧三角形。C為直角。今先假定除C角外。其餘五項皆各小於一直角。



作球心三面立體角O—ABC。自B作平面直垂半徑OA。則此面將遇立體角之三面於BE, ED, DB。

因BED面直垂OA。故∠OEB, OED皆為直角。而OAC面經過OE。故BED面亦直垂OAC面。但OEC面原直垂OAC面。故交線BD直垂OAC面。因得∠BDO, BDE

皆爲直角。是故 BOC 者 a 也。AOC 者 b 也。AOB 者 c 也 BED 者 A 也。今證各公式於下。半徑爲一。

$$\cos c = \text{OE} = \text{OD} \cos b,\ 又\ \text{OD} = \cos a$$

$$\therefore\ \cos c = \cos a \cos b \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\sin a = \text{BD} = \text{BE} \sin \text{A},\ 又\ \text{BE} = \sin c$$

$$\therefore\ \sin a = \sin c \sin \text{A} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

若從 A 作平面直垂半徑 OB。或將圖上所註 a, b, A, B 等字母互換位置。則 (2) 式即變爲

$$\sin b = \sin c \sin \text{B} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$\cos \text{A} = \frac{\text{DE}}{\text{BE}} = \frac{\text{OE} \tan b}{\text{OE} \tan c}$$

$$\therefore\ \cos \text{A} = \tan b \cot c \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

若令圖上註字互換位置。則得

$$\cos \text{B} = \tan a \cot c \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

$$\cos \text{A} = \frac{\text{DE}}{\text{BE}} = \frac{\text{OD} \sin b}{\sin c} = \cos a\ \frac{\sin b}{\sin c}$$

$$= \cos a\ \frac{\sin c \sin \text{B}}{\sin c}$$

$$\therefore\ \cos \text{A} = \cos a \sin \text{B} \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

換字得 $$\cos \text{B} = \cos b \sin \text{A} \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

$$\sin b = \frac{\text{DE}}{\text{OD}} = \frac{\text{BD} \cot \text{A}}{\text{OD}} = \tan a \cot \text{A}$$

$\therefore\quad \sin b = \tan a \cot \mathrm{A}$ ……………………(8)

同前得　$\sin a = \tan b \cot \mathrm{B}$ ……………………(9)

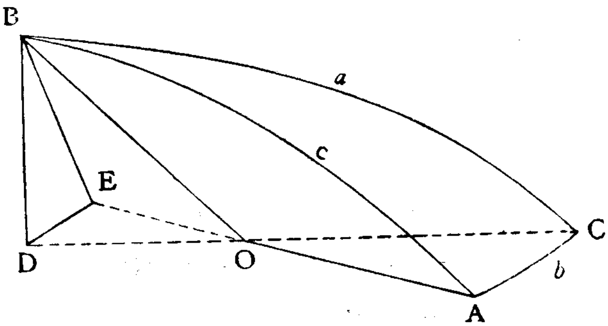
末將(6),(7)兩式之 $\cos a$ 與 $\cos b$ 代入(1)式。則

$$\cos c = \frac{\cos \mathrm{A}}{\sin \mathrm{B}} \cdot \frac{\cos \mathrm{B}}{\sin \mathrm{A}}$$

$\therefore\quad \cos c = \cot \mathrm{A} \cot \mathrm{B}$ ……………………(10)

31. 以上十個公式。足供解一切直弧三角形之用。惟爲取便初學。原繪之圖。係假定三角形之各項皆小於一直角。但公式之本體。確不因此種限制。而發生變化。今舉兩則於下。藉示一班。

(甲) 若 a 大於90°。則從B所作之垂面。不能遇OA,OC於線內。而遇兩線於線外。故



$$\begin{aligned}\cos c &= \cos \mathrm{BOA}\\ &= -\cos \mathrm{BOE}\\ &= -\mathrm{OE}\end{aligned}$$

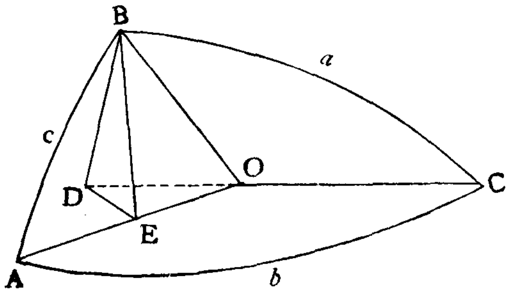
$$= -\mathrm{OD}\cos\mathrm{DOE}$$

$$= -\cos\mathrm{BOD}\cos\mathrm{AOC}$$

$$= -(-\cos\mathrm{BOC})\cos\mathrm{AOC}$$

$$= \cos a\cos b$$

(乙) 若 a, b 皆大於 90°。則從 B 所作之垂面。遇 OA於線內。遇 OC 於線外。故



$$\cos c = \cos\mathrm{BOA}$$

$$= \mathrm{OE}$$

$$= \mathrm{OD}\cos\mathrm{DOE}$$

$$= \cos\mathrm{BOD}\cos\mathrm{DOE}$$

$$= -\cos\mathrm{BOC}(-\cos\mathrm{AOC})$$

$$= \cos a\cos b$$

一式如此。他式亦然。學者可自證之。

32. 公式之討論　由公式(1)觀之。使cos c爲正數。即 c 小於 90°。則 cos a cos b 必爲正數。即 cos a, cos b 或同

爲正數。或同爲負數。亦卽 a, b 或同大於 $90°$。或同小於 $90°$。如 $\cos c$ 爲負數。則 $\cos a$ 或 $\cos b$ 必有一爲負數。卽 a 或 b 必有一大於 $90°$。因得一定理如下。

定理一　直弧三角形夾直角之兩邊。或同大於 $90°$。或同小於 $90°$。則對直角之邊必小於 $90°$。如一邊大於 $90°$。一邊小於 $90°$。則對直角之邊必大於 $90°$。

再由公式(6)與(7)觀之。幷改書如下。

$$\sin B = \frac{\cos A}{\cos a}, \quad \sin A = \frac{\cos B}{\cos b}$$

因 A, B 皆小於 $180°$。故 $\sin A, \sin B$ 皆爲正數。卽 $\cos A$ 與 $\cos a$ 必同號。$\cos B$ 與 $\cos b$ 必同號。亦卽 A 與 a, B 與 b, 或同大於 $90°$。或同小於 $90°$。亦得一定理如下。

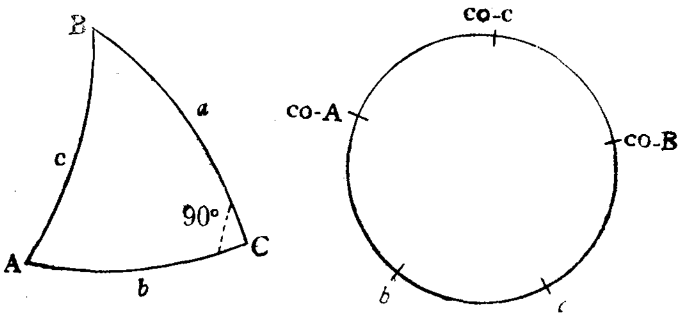
定理二　在直弧三角形內。斜角與對邊。必同大於 $90°$。或同小於 $90°$。

準以上兩定理。由已知兩邊之大於或小於 $90°$。可預知第三邊及兩角之大於或小於 $90°$。由已知兩角之大於或小於 $90°$。可預知三邊之大於或小於 $90°$。因而由已知一邊一隣角之大於或小於 $90°$。亦可預知餘邊餘角之大於或小於 $90°$。故此定理於解直弧三角形時。裨益不淺。宜熟記焉。

33. 納白爾氏定例　基本公式雖足包括一切。但有

十式之多。記憶或有不便。英人納白爾曾將此十式納於兩定例之中。後遂名之為納白爾氏定例。亦稱圓部定例。納氏生於1550年。卒於1617年。乃創造對數之第一人也。

弧三角形之三角與三邊。共有六項。但直弧三角形祇有五項。因直角不入公式故也。納氏取夾直角之兩邊 a 與 b。及餘三項之餘角。排列成環。使居一圓之周。此圓部定例之名所由立也。餘三項之餘角係以co—A, co—c, co—B表之有如下圖。



就圓周上之五部。任取一部為中部。則左右兩部為鄰部。餘兩部為對部。如以 a 為中部。則 b, co—B為鄰部。co—c, co—A為對部。其定例如下。

定例一　中部之正弦。等於鄰部正切之積。

定例二　中部之正弦。等於對部餘弦之積。

茲取公式(1)與(10)。以co—c為中部。證之於下。

$$\sin(\text{co}-c)=\cos a\cos b$$

卽 $$\cos c=\cos a\cos b$$

又 $$\sin(\text{co}-c)=\tan(\text{co}-\text{A})\tan(\text{co}-\text{B})$$

卽 $$\cos c=\cot\text{A}\cot\text{B}$$

34. 輔助公式 基本公式有用正弦餘弦函數者。但角之近於0°或180°時。其餘弦變動甚緩。近於90°時。其正弦變動又甚緩。例如由a,b求c。須用第(1)公式。由A,c求a。須用第(2)公式。倘c近於0°或180°。或a近於90°。則計算難期精密。故必須別立公式。以濟其窮。公式如下。

$$\tan^2\tfrac{1}{2}a=\frac{2\sin^2\frac{1}{2}a}{2\cos^2\frac{1}{2}a}$$

$$=\frac{1-\cos a}{1+\cos a}$$

$$=\frac{1-\dfrac{\cos\text{A}}{\sin\text{B}}}{1+\dfrac{\cos\text{A}}{\sin\text{B}}}$$

$$=\frac{\sin\text{B}-\cos\text{A}}{\sin\text{B}+\cos\text{A}}$$

$$=\frac{\sin\text{B}+\sin(\text{A}-90^\circ)}{\sin\text{B}-\sin(\text{A}-90^\circ)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B-90^\circ)\cos\frac{1}{2}(B-A+90^\circ)}{2\cos\frac{1}{2}(A+B-90^\circ)\sin\frac{1}{2}(B-A+90^\circ)}$$

$$=\tan\frac{1}{2}(A+B-90^\circ)\cot\frac{1}{2}(B-A+90^\circ)$$

$$=\tan\left[\frac{1}{2}(A+B)-45^\circ\right]\cot\left[\frac{1}{2}(B-A)+45^\circ\right]$$

$$=\tan\left[\frac{1}{2}(A+B)-45^\circ\right]\tan\left(90^\circ-\overline{\frac{1}{2}(B-A)+45^\circ}\right)$$

$$=\tan\left[\frac{1}{2}(A+B)-45^\circ\right]\tan\left[\frac{1}{2}(A-B)+45^\circ\right]\cdots(11)$$

$$\tan^2(45^\circ-\tfrac{1}{2}a)=\tan^2\tfrac{1}{2}(90^\circ-a)$$

$$=\frac{1-\cos(90^\circ-a)}{1+\cos(90^\circ-a)}$$

$$=\frac{1-\sin a}{1+\sin a}$$

$$=\frac{1-\dfrac{\tan b}{\tan B}}{1+\dfrac{\tan b}{\tan B}}$$

$$=\frac{\tan B-\tan b}{\tan B+\tan b}$$

$$=\frac{\sin B\cos b-\cos B\sin b}{\sin B\cos b+\cos B\sin b}$$

$$=\frac{\sin(B-b)}{\sin(B+b)}\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

$$\tan^2\tfrac{1}{2}b=\frac{1-\cos b}{1+\cos b}$$

$$=\frac{1-\dfrac{\cos c}{\cos a}}{1+\dfrac{\cos c}{\cos a}}$$

$$=\frac{\cos a-\cos c}{\cos a+\cos c}$$

$$=\frac{-2\sin\frac{1}{2}(a+c)\sin\frac{1}{2}(a-c)}{2\cos\frac{1}{2}(a+c)\cos\frac{1}{2}(a-c)}$$

$$=-\tan\tfrac{1}{2}(a+c)\tan\tfrac{1}{2}(a-c)$$

$$=\tan\tfrac{1}{2}(c+a)\tan\tfrac{1}{2}(c-a)\cdots\cdots\cdots(13)$$

$$\tan^2(45^\circ-\tfrac{1}{2}b)=\frac{1-\cos(90^\circ-b)}{1+\cos(90^\circ-b)}$$

$$=\frac{1-\sin b}{1+\sin b}$$

$$=\frac{1-\dfrac{\tan a}{\tan A}}{1+\dfrac{\tan a}{\tan A}}$$

$$=\frac{\tan A-\tan a}{\tan A+\tan a}$$

$$=\frac{\sin A\cos a-\cos A\sin a}{\sin A\cos a+\cos A\sin a}$$

$$=\frac{\sin(A-a)}{\sin(A+a)}\cdots\cdots\cdots(14)$$

$$\tan^2\tfrac{1}{2}c = \frac{1-\cos c}{1+\cos c}$$

$$= \frac{1-\dfrac{\cot A}{\tan B}}{1+\dfrac{\cot A}{\tan B}}$$

$$= \frac{\tan B-\cot A}{\tan B+\cot A}$$

$$= \frac{\sin A\sin B-\cos A\cos B}{\sin A\sin B+\cos A\cos B}$$

$$= \frac{-\cos(A+B)}{\cos(A-B)} \cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

$$\tan^2(45^\circ-\tfrac{1}{2}c) = \frac{1-\cos(90^\circ-c)}{1+\cos(90^\circ-c)}$$

$$= \frac{1-\sin c}{1+\sin c}$$

$$= \frac{1-\dfrac{\sin a}{\sin A}}{1+\dfrac{\sin a}{\sin A}}$$

$$= \frac{\sin A-\sin a}{\sin A+\sin a}$$

$$= \frac{2\cos\frac{1}{2}(A+a)\sin\frac{1}{2}(A-a)}{2\sin\frac{1}{2}(A+a)\cos\frac{1}{2}(A-a)}$$

$$= \tan\tfrac{1}{2}(A-a)\cot\tfrac{1}{2}(A+a) \cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

$$\tan^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}$$

$$= \frac{1 - \dfrac{\tan b}{\tan c}}{1 + \dfrac{\tan b}{\tan c}}$$

$$= \frac{\tan c - \tan b}{\tan c + \tan b}$$

$$= \frac{\sin c \cos b - \cos c \sin b}{\sin c \cos b + \cos c \sin b}$$

$$= \frac{\sin (c-b)}{\sin (c+b)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

$$\tan^2(45^\circ - \tfrac{1}{2} A) = \frac{1 - \cos (90^\circ - A)}{1 + \cos (90^\circ - A)}$$

$$= \frac{1 - \sin A}{1 + \sin A}$$

$$= \frac{1 - \dfrac{\sin a}{\sin c}}{1 + \dfrac{\sin a}{\sin c}}$$

$$= \frac{\sin c - \sin a}{\sin c + \sin a}$$

$$= \frac{2 \cos \frac{1}{2} (c+a) \sin \frac{1}{2} (c-a)}{2 \sin \frac{1}{2} (c+a) \cos \frac{1}{2} (c-a)}$$

$$= \tan \tfrac{1}{2} (c-a) \cot \tfrac{1}{2} (c+a) \quad \cdots\cdots\cdots (18)$$

$$\tan^2 \tfrac{1}{2}B = \frac{1-\cos B}{1+\cos B}$$

$$= \frac{1-\dfrac{\tan a}{\tan c}}{1+\dfrac{\tan a}{\tan c}}$$

$$= \frac{\tan c - \tan a}{\tan c + \tan a}$$

$$= \frac{\sin c \cos a - \cos c \sin a}{\sin c \cos a + \cos c \sin a}$$

$$= \frac{\sin(c-a)}{\sin(c+a)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

$$\tan^2(45° - \tfrac{1}{2}B) = \frac{1-\cos(90°-B)}{1+\cos(90°-B)}$$

$$= \frac{1-\sin B}{1+\sin B}$$

$$= \frac{1-\dfrac{\cos A}{\cos a}}{1+\dfrac{\cos A}{\cos a}}$$

$$= \frac{\cos a - \cos A}{\cos a + \cos A}$$

$$= \frac{-2\sin\frac{1}{2}(a+A)\sin\frac{1}{2}(a-A)}{2\cos\frac{1}{2}(a+A)\cos\frac{1}{2}(a-A)}$$

$$= -\tan\tfrac{1}{2}(a+A)\tan\tfrac{1}{2}(a-A)$$

$$= \tan\tfrac{1}{2}(A-a)\tan\tfrac{1}{2}(A+a) \quad \cdots\cdots (20)$$

習　題

1. 試用直弧三角形之基本公式。推論下列各題之結果。

(1) 設 $c=90°$　(3) 設 $b=90°$　(5) 設 $a=b$

(2) 設 $a=90°$　(4) 設 $c=a$　(6) 設 $A=90°$

(7) 設 $c=90°$, $a=90°$

(8) 設 $a=90°$, $b=90°$

2. 試用納白爾氏定例。覆証基本公式。

3. 若直弧三角形之五部。係用直角之對邊,兩斜角,及餘兩邊之餘角。則納白爾氏定例當何似。

4. 已知直弧三角形之 a, b, c; 或 A, B, c; 或 A, a, b: 則解此三角形當選用何公式。

5. 下列各題爲極三角形之三角。試求原三角形之三邊。

(1) $82°, 77°, 69°$　(3) $78°\ 30', 89°, 102°$

(2) $84\frac{1}{2}°, 81\frac{3}{4}°, 72\frac{1}{6}°$　(4) $83°\ 40', 48°\ 57', 103°\ 43'$

(5) $96°\ 37'\ 40'', 82°\ 29'\ 30'', 68°\ 47'$

(6) $43°\ 29'\ 37'', 93°\ 22'\ 53'', 87°\ 36'\ 29''$

6. 下列各題爲極三角形之三邊。試求原三角形之三角。

(1) 68° 42′ 39″, 93° 48′ 7″, 89° 38′ 14″

(2) 78° 47′ 29″, 106° 36′ 42″, 一象限

(3) 111° 29′ 43″, 一象限, 一象限

(4) 一象限, 半象限, 四分三之一象限

7. 弧三角形之三角爲70.5°, 80.7°, 101.6°, 試求極三角形之三邊。

8. 弧三角形之三邊爲40.72°, 90°, 127.83°, 試求極三角形之三角。

9. 弧三角形之三邊。向以度分秒計。如已知球之半徑。試逓求長度之法。

10. 設球之半徑四尺。問35°, 74° 25′, 112° 49′ 53″ 等弧各長若干尺。

第四章

直弧三角形解法

35. 解直弧三角形者。由已知之兩部。運用基本公式。求所餘之三部也。例如已知 a, b 兩邊。則用

公式 (1)　$\cos c = \cos a \cos b$　求 c

公式 (8)　$\tan A = \tan a \csc b$　求 A

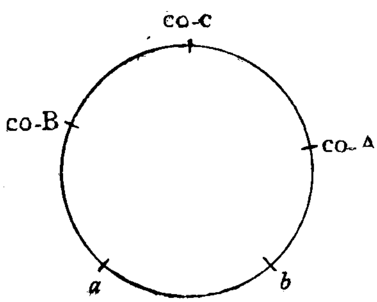
公式 (9)　$\tan B = \tan b \csc a$　求 B

凡計算難免錯誤。故必須有法考驗之。此題所求者爲 A, B, c。既求得之後。宜用公式 (10)

$$\cos c = \cot A \cot B$$

驗其合否。苟 $\cot A \cot B$ 確與 $\cos c$ 相等。記號亦同。則所求得之數必無錯誤。

倘不能熟記公式。可用納白爾氏定例求之。先將五部書下如圖。



因所知者爲 a, b 故以 co—c 爲中部以 a, b 爲對部。得 $\sin$ (co—c)$=\cos a \cos b$ 卽 $\cos c = \cos a \cos b$

次以 a 爲中部。

以 b, co—B 爲鄰部。得

$$\sin a=\tan b \tan (co—B) \text{ 即 } \tan B=\tan b \csc a$$

又次以 b 爲中部。以 a, co—A 爲鄰部。得

$$\sin b=\tan a \tan (co—A) \text{ 即 } \tan A=\tan a \csc b$$

考驗則以 co—c 爲中部。co—A, co—B 爲鄰部。得

$$\sin (co—c)= \tan(co—A)\tan(co—B) \text{ 則 } \cos c=\cot A \cot B$$

弧三角形之邊與角有時大於90°。而九十度以上之餘弦,正切,餘切,皆爲負數。凡負數之對數。宜書 n 於對數之後以識之。負因數之次數逢偶者。其積爲正數。即 n 兩見或四見時,應相消。逢奇者。其積爲負數即 n 一見三見時,應保留。又三角函數之小於一者。其對數應爲負數。而對數表則載正數。故於對數之後。須書 —10 以明眞數之爲小數。但對數表既恆載正數。則以正對數求眞數。猶如以負對數求眞數也。故 —10 亦可免書。藉省篇幅。

直弧三角形之五部爲三邊兩角。今爲取便引用。名夾直角之兩邊爲邊。名對直角之邊爲弦。名相連之邊或角爲鄰邊或鄰角。

36. 已知兩邊　此類解法。即上節所舉之例。乃由 a, b 求 A, B, c 也。今演一題於下。并說明小角對數表之用法。

例題 直弧三角形之 $a=0°\ 13'\ 27''$, $b=0°\ 21'\ 34''$, 試解之。

$\log\cos a = 10.00000$	$\log\tan a = 7.59216$
$\log\cos b = \underline{9.99999}$	$\log\csc b = \underline{2.20261}$
$\log\cos c = 9.99999$	$\log\tan A = 9.79477$
$\therefore\ c = 0°\ 17'$ 至 $0°\ 28'$	$\therefore\ A = 31°\ 56'\ 23''$
$\log\tan b = 7.79740$	考驗
$\log\csc a = \underline{2.40785}$	$\log\cot A = 10.20523$
$\log\tan B = 10.20525$	$\log\cot B = \underline{9.79475}$
$\therefore\ B = 58°\ 3'\ 41''$	$\log\cos c = 9.99998$

凡角之有度分秒者。其函數之對數。自以七位小數之對數較爲精密。若用五位小數之對數。則近於0°之正弦,正切,餘切,對數。及近於90°之餘弦,正切,餘切,對數。必須另法推算。方不失之太疎。上草係用商務印書館出版之蓋氏對數表。按普通比例方法計算。但 $\log\cos c = 9.99999$ 在 $0°\ 17'$ 至 $0°\ 28'$ 之間。因而 c 之眞値無法求得。又角之小於三度者。其正弦,正切,之對數。皆變動甚速。不能按比例計算。因而所得之A,B兩角。亦不眞確。他種對數表有特製小角對數表者。蓋氏則附於眞數對數表之下。取便查用。算法如下。

若命 θ 爲 n 秒之圓周量。則因一秒之圓周量。約等

於一秒之正弦。倘 n 為數不大。則必

$$\theta = n \sin 1''$$

$$故 \log \frac{\sin \theta}{\theta} = \log \frac{\sin n''}{n \sin 1''}$$

$$= \log \sin n'' - \log n - \log \sin 1''$$

$$\therefore \quad \log \sin n'' = \log n + \left(\log \frac{\sin \theta}{\theta} + \log \sin 1''\right)$$

若命 $$\log \frac{\sin \theta}{\theta} + \log \sin 1'' = S$$

則 $$\log \sin n'' = \log n + S$$

又 $$\log \tan n'' = \log n + \left(\log \frac{\tan \theta}{\theta} + \log \text{isn } 1''\right)$$

若命 $$\log \frac{\tan \theta}{\theta} + \log \sin 1'' = T$$

則 $$\log \tan n'' = \log n + T$$

蓋氏小角對數表之下。附有應用公式。故凡三度以下之正弦,正切,餘切,對數。及九十七度以上之餘弦,正切,餘切,對數。皆可精密查用也。茲取上設之例題,先用小角對數表。查取 $\log \tan a$, $\log \csc a$, $\log \tan b$, $\log \csc b$ 求 A, B 之值。次用

$$\tan c = \tan a \sec B$$

或 $$\tan c = \tan b \sec A$$

求c。惟因c之眞值不大。仍須用小角對數表算之。演草如下。試比而觀之。當知精粗有間也。

$$\begin{array}{ll}
\log\tan a = 7.59245 & \log\tan b = 7.79751 \\
\log\csc b = \underline{2.20250} & \log\csc a = \underline{2.40756} \\
\log\tan A = 9.79495 & \log\tan B = 10.20507 \\
\quad\therefore\ A = 31°57'\ 0'' & \quad\therefore\ B = 58°\ 3'\ 4'' \\
\log\tan a = 7.59245 & \qquad\text{考驗} \\
\log\sec B = \underline{10.27641} & \log\cot A = 10.20505 \\
\log\tan c = 7.86886 & \log\cot B = \underline{9.79493} \\
\quad\therefore\ c = 0°\,25'\,25'' & \log\cos c = 9.99998
\end{array}$$

末按c之值。查$\log\cos$得9.99999。此末一數字之差。乃是進位關係。可勿計也。

習　題

試解下列各直弧三角形;—

1. $a = 36°\ 27'$, $b = 43°\ 32'\ 31''$
2. $a = 80°\ 40'$, $b = 32°\ 40'$
3. $a = 50°$, $b = 36°\ 54'\ 49''$
4. $a = 120°\ 10'$, $b = 150°\ 59'\ 44''$
5. $a = 22°\ 15'\ 7''$, $b = 51°\ 53'$
6. $a = 14°\ 16'\ 35''$, $b = 19°\ 17'$

7. $a=32^\circ\ 9'\ 17''$, $b=32^\circ\ 41'$

8. $a=132^\circ\ 14'\ 12''$, $b=79^\circ\ 13'\ 38''$

9. $a=2^\circ\ 0'\ 55''$, $b=0^\circ\ 27'\ 10''$

10. $a=20^\circ\ 20'\ 20''$, $b=15^\circ\ 16'\ 50''$

11. 問赤道上東經四十度之點。距第一經線上北緯四十度之點。共有若干度。

12. 英國格林維基在第一經線上 $51^\circ\ 28'\ 38''$ N。設由此點作大圓弧。直達赤道上西經二十五度之點。試求此弧與赤道之交角。

13. 設從格林維基至赤道上 150° E 之點。作大圓弧。問此弧與第一經線交角若干度。

14. 問自赤道上經度 0° 點至經 48° W, 緯 30° N 點。其距弧有若干度。

15. 球面上有直弧三角形。半徑六寸。其 $a=45^\circ, b=70^\circ$ 問 c 邊長若干寸。如半徑爲二英尺。(每尺十二寸)而 a, b 各 75°。則 c 邊又長若干英寸。

16. 如地球半徑爲4000英里。問從赤道上 70° W 至第一經線上 60° N 有若干英里。

17. 若從第一經線上 60°N, 至至赤道上 60°W, 作大圓弧。問此弧與第一經線及赤道各成何角。

18. 準上題。如地球半徑爲4000英里。問此弧長若干

英里。

37. 已知一邊及弦　即由a, c求A, B, b也。應用公式爲

$$\cos b=\cos c\sec a$$

$$\sin A=\sin a\csc c$$

$$\cos B=\tan a\cot c$$

考驗可用.　$\cos B=\cos b\sin A$

若b或B近於0°或180°。則餘弦之變動甚緩。因而得數不能精密。宜改用下列公式。幷用小角對數表算之。

$$\tan^2\tfrac{1}{2}b=\tan\tfrac{1}{2}(c-a)\tan\tfrac{1}{2}(c+a)$$

$$\tan^2\tfrac{1}{2}B=\sin(c-a)\csc(c+a)$$

若A近於90°。亦須改用下之公式算之。

$$\tan^2(45^\circ-\tfrac{1}{2}A)=\tan\tfrac{1}{2}(c-a)\cot\tfrac{1}{2}(c+a)$$

又sin A之A或小於90°或大於90°。皆爲正數而無表示。故宜視a之小於或大於90°而定。因準定理二。斜角與其對邊必同大於或同小於90°也。

如已知者爲b與c。可將原公式中之a與b, A與B互相調換。即得應用之公式。

例題　直弧三角形之$a=155°30'15''$, $c=155°29'36''$, 試解之。

$\log\cos c = 9.95900\,n$	$\log\sin a = 9.61766$
$\therefore \log\sec a = \underline{10.04096\,n}$	$\log\csc c = \underline{10.38215}$
$\therefore \log\cos b = 9.99996$	$\log\sin A = 9.99981$
$\therefore\ b = 0°\ 44'$至$0°42'$	$\therefore\ A = 91°\ 43'$至$91°\ 41'$
$\therefore \log\tan a = 9.65862\,n$	考驗
$\therefore \log\cot c = \underline{10.34116\,n}$	$\log\cos b = 9.99996$
$\therefore \log\cos B = 9.99978$	$\log\sin A = \underline{9.99981}$
$\therefore\ B = 1°\ 49'$至$1°\ 50'$	$\log\cos B = 9.99977$

上草係用普通方法計算。因A, B, b 皆無法查取精密分秒數，故須改取輔助公式。用小角對數表覆算之演草如下。

$$c = 155°\ 29'\ 36''$$
$$a = \underline{155\ \ 30\ \ 15}$$
$$\therefore c-a = -\ 0\ \ 0\ \ 39$$
$$c+a = 310\ \ 59\ \ 51$$
$$\tfrac{1}{2}(c-a) = -\ 0\ \ 0\ \ 19.5$$
$$\tfrac{1}{2}(c+a) = 155\ \ 29\ \ 55.5$$

$\log\tan\frac{1}{2}(c-a) = 5.97560n$	$\log\sin(c-a) = 6.27663n$
$\log\tan\frac{1}{2}(c+a) = \underline{9.65873n}$	$\log\csc(c+a) = \underline{0.12220n}$
$\log\tan^2\frac{1}{2}b = 2\,\underline{\vert 5.63433}$	$\log\tan^2\frac{1}{2}B = 2\,\underline{\vert 6.39883}$
$\log\tan\frac{1}{2}b = 7.81716$	$\log\tan\frac{1}{2}B = 8.19941$

$\frac{1}{2}b = 0^\circ\ 22'\ 33''.9$　　　　$\frac{1}{2}B = 0^\circ\ 54'\ 24''.4$

$\therefore\ b = 0\ \ 45\ \ \ 8$　　　　$\therefore\ B = 1\ \ 48\ \ 49$

$$\log\tan\tfrac{1}{2}(c-a) = \ \ 5.97560\ n$$

$$\log\cot\tfrac{1}{2}(c+a) = \ \ \underline{0.34127\ n}$$

$$\log\tan^2(45^\circ-\tfrac{1}{2}A) = 2\,|\,\underline{6.31687}$$

$$\log\tan(45^\circ-\tfrac{1}{2}A) = \ \ 8.15844$$

$$45^\circ-\tfrac{1}{2}A = \ \ 0^\circ\ 49'\ 30''.6$$

$$\tfrac{1}{2}A = \ \ 44\ \ 10\ \ 29.4$$

$$\therefore\ A = (88\ \ 20\ \ 59)$$

$$= \ \ 91\ \ 39\ \ \ 1$$

習　題

試解下列各直弧三角形:—

1. $c=54^\circ\ 20'$,　　$a=\ 36^\circ\ 27'$
2. $c=87^\circ\ 11'\ 40''$,　　$a=\ 86^\circ\ 40'$
3. $c=59^\circ\ \ 4'\ 26''$,　　$a=\ 50^\circ$
4. $c=63^\circ\ 55'\ 43''$,　　$a=120^\circ\ 10'$
5. $c=55^\circ\ \ 9'\ 32''$,　　$a=\ 22^\circ\ 15'\ \ 7''$
6. $c=44^\circ\ 33'\ 17''$,　　$b=\ 32^\circ\ \ 9'\ 17''$
7. $c=97^\circ\ 13'\ \ 4''$,　　$b=132^\circ\ 14'\ 12''$
8. $c=69^\circ\ 25'\ 11''$,　　$b=\ 50^\circ$

9. $c=2°\ 3'\ 56''$,　$b=2°\ 0'\ 55''$

10. $c=90°$,　$b=90°$

11. 赤道上62° 30′ W之點。距第一經線上某點。恰爲八十五度。求此點之緯度。

試就直弧三角形之性質。証明下列兩式:—

12. $\cos^2 A \sin^2 c=\sin(c+a)\sin(c-a)$

13. $\tan a \cos c=\sin b \cot B$

14. 設從直弧三角形之直角C。作大圓弧p直垂對弦。幷分爲兩段。近a者曰m近b者曰n, 試證

(1) $\tan^2 a=\tan c \tan m$

(2) $\sin^2 p=\tan m \tan n$

38. 已知一邊及其對角　即由a, A求b, c, B也。應用公式爲

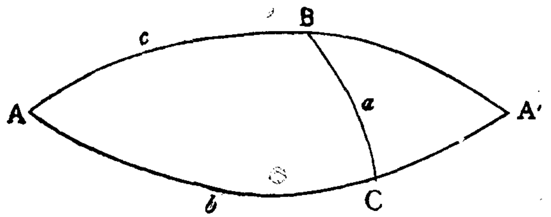
$$\sin b=\tan a \cot A$$

$$\sin c=\sin a \csc A$$

$$\sin B=\sec a \cos A$$

考驗可用　$\sin b=\sin c \sin B$

準定理二。斜角與對邊同大於或同小於90°之理。上式之右邊必皆爲正數。則左邊亦皆爲正數。但b, c, B可大於90°。亦可小於90°。因AB, AC若各引長成瓜瓣形ABA′C。則$\angle A=\angle A'$。而以A, a爲條件之弧三角形。可



爲原三角形ABC。亦可爲鱗餘三角形A′BC。因而b, c, B各有二値。是爲兩意。凡解此類三角形。須注意於各部之分配。因B, b須同大於或同小於90°。若a, b同大於或同小於90°。則c必小於90°。倘一大於一小於90°。則c必大於90°。此即定理一之理也。

倘b, c, B有近於90°者，則查取對數表。難得精密分秒數。須改用下列之式覆算之。

$$\tan^2(45°-\tfrac{1}{2}b)=\sin(A-a)\csc(A+a)$$

$$\tan^2(45°-\tfrac{1}{2}c)=\tan\tfrac{1}{2}(A-a)\cot\tfrac{1}{2}(A+a)$$

$$\tan^2(45°-\tfrac{1}{2}B)=\tan\tfrac{1}{2}(A-a)\tan\tfrac{1}{2}(A+a)$$

如已知者爲b與B, 可將原公式中之a與b, A與B互相調換。即得應用之公式。

例題 直弧三角形之$A=89°\,14'\,5''$, $a=89°\,0'\,12''$試解之。

$\log\tan a=11.75953$	$\log\sin a=9.99993$
$\log\cot A=8.12572$	$\log\csc A=0.00004$
$\log\sin b=9.88525$	$\log\sin c=9.99997$

$\therefore b = 50^\circ\ 9'\ 24''$　　　$\therefore c = 89^\circ\ 17'$ 至 $89^\circ\ 23'$

$\log\sec a = 11.75960$

$\log\cos A = \underline{8.12568}$

$\log\sin B = 9.88528$

$\therefore B = 50^\circ\ 9'\ 42''$

考驗

$\log\sin c = 9.99997$

$\log\sin B = \underline{9.88528}$

$\log\sin b = 9.88525$

上草 c 之眞值不能確定。宜改用輔助公式覆算之。

$$\begin{aligned}
A &= 89^\circ\ 14'\ \ 5'' \\
a &= \underline{89\ \ \ 0\ \ 12} \\
\tfrac{1}{2}(A-a) &= 0\ \ \ 6\ \ 56.5 \\
\tfrac{1}{2}(A+a) &= 89\ \ \ 7\ \ \ 8.5 \\
\log\tan\tfrac{1}{2}(A-a) &= 7.30520 \\
\log\cot\tfrac{1}{2}(A+a) &= \underline{8.18687} \\
\log\tan^2(45^\circ-\tfrac{1}{2}c) &= 2\,\underline{|15.49207} \\
\log\tan\ (45^\circ-\tfrac{1}{2}c) &= 7.74604 \\
\therefore 45^\circ-\tfrac{1}{2}c &= 0^\circ\ 19'\ \ 9'' \\
\tfrac{1}{2}c &= 44\ \ 40\ \ 51 \\
c &= 89\ \ 21\ \ 42
\end{aligned}$$

若 b 原取 $129^\circ\ 50'\ 36''$，則 B 須取 $129^\circ\ 50'\ 18''$。而 c 必取 $90^\circ\ 38'\ 18''$。因 a, b 一小於 90°，一大於 90°。故準定理一，c 必大於 90° 也。

習　題

試解下列各直弧三角形:—

1. $a = 50°$, $A = 63° 15' 13''$
2. $a = 36° 27'$, $A = 46° 59' 43''$
3. $a = 86° 40'$, $A = 88° 11' 58''$
4. $a = 120° 10'$, $A = 105° 44' 21''$
5. $a = 115° 30'$, $A = 110° 10' 10''$
6. $a = 122° 30'$, $A = 120° 20' 20''$
7. $b = 22° 15' 7''$, $B = 27° 28' 38''$
8. $b = 14° 16' 35''$, $B = 37° 36' 49''$
9. $b = 32° 9' 17''$, $B = 49° 20' 16''$
10. $b = 77° 21' 50''$, $B = 40° 40' 40''$
11. $b = 77° 21' 50''$, $B = 83° 56' 40''$
12. $b = 132° 14' 12''$, $B = 131° 43' 50''$

試就直弧三角形之性質。証明下列各等式:—

13. $\sin^2 A = \cos^2 B + \sin^2 a \sin^2 B$
14. $\sin(b+c) = 2\cos^2 \frac{1}{2}A \cos b \sin c$
15. $\sin(c-b) = 2\sin^2 \frac{1}{2}A \cos b \sin c$

39. 已知一邊及一鄰角　即由 a, B 求 b c, A 也。應用公式爲

$$\tan b = \sin a \tan B$$

$$\tan c = \tan a \sec B$$

$$\cos A = \cos a \sin B$$

考驗可用 $\cos A = \tan b \cot c$

如A近於0°或180°。宜先求b,c。次用下之公式求A。得數較爲準確。

$$\tan A = \tan a \csc b$$

如已知者爲b與A。可將原公式中之a與b, A與B互相調換。即得應用之公式。

40. 已知弦及一斜角 即由c, A求a,b, B也。應用公式爲

$$\sin a = \sin c \sin A$$

$$\tan b = \tan c \cos A$$

$$\cot B = \cos c \tan A$$

考驗可用 $\sin a = \tan b \cot B$

上式$\sin a$之a或大於或小於90°。須視A之原値而定。因準定理二，a與A乃同大或同小於90°也。

如a近於90°。可先求b, B。次用下之公式求a。

$$\tan^2(45° - \tfrac{1}{2}a) = \sin(B - b)\csc(B + b)$$

如已知者爲c與B。可將原公式中之a與b, A與B,互相調換。即得應用之公式。

41. 已知兩角 即由 A, B 求 a, b, c 也。應用公式爲

$$\cos a = \cos A \csc B$$

$$\cos b = \cos B \csc A$$

$$\cos c = \cot A \cot B$$

考驗可用 $\cos c = \cos a \cos b$

如 a, b, c 有近於 0° 或 180° 者。可用下列公式。先求 a 與 c。

$$\tan^2 \tfrac{1}{2} a = \tan\left[\tfrac{1}{2}(A+B) - 45°\right] \tan\left[\tfrac{1}{2}(A-B) + 45°\right]$$

$$\tan^2 \tfrac{1}{2} c = -\cos(A+B)\sec(A-B)$$

既得 a, c，再就已知之 A, B。可由公式(3), (4), (8), (9)擇一用之。則得 b 之準值。

習 題

試解下列各直弧三角形：—

1. $a = 54° 30'$, $B = 35° 30'$
2. $a = 92° 47' 32''$, $B = 50° 2' 1''$
3. $a = 20° 20' 20''$, $B = 38° 10' 10''$
4. $b = 50°$, $A = 63° 25' 4''$
5. $b = 50°$, $A = 120° 3' 50''$
6. $c = 91° 47' 40''$. $A = 92° 8' 23''$
7. $c = 25° 14' 38''$, $A = 54° 35' 17''$

8. $c = 59° 51' 21''$, $A = 70° 17' 35''$

9. $c = 112° 48'$, $B = 56° 11' 56''$

10. $c = 2° 0' 56''$, $B = 77° 20' 28''$

11. $A = 92° 8' 23''$, $B = 50° 2' 1''$

12. $A = 77° 20' 28''$, $B = 12° 40'$

13. $A = 54° 35' 17''$, $B = 38° 10' 10''$

14. $B = 63° 25' 4''$, $A = 54° 54' 42''$

15. $B = 120° 3' 50''$, $A = 56° 11' 56''$

雜題一

試解下列各直弧三角形:—

1. $a = 37° 48' 12''$, $b = 59° 44' 16''$

2. $c = 98° 14' 24''$, $A = 55° 32' 45''$

3. $b = 87° 32' 40''$, $B = 88° 37' 22''$

4. $a = 42° 18' 45''$, $A = 46° 15' 25''$

5. $c = 47° 57' 15''$, $b = 137° 3' 48''$

6. $A = 47° 54' 21''$, $B = 61° 50' 28''$

7. $B = 60°$, $a = 20° 54' 18''.5$

8. $A = 66° 7' 20''$, $b = 48° 39' 16''$

9. $B = 127° 9' 40''$, $c = 109° 36' 18''$

10. $c = 37° 40' 20''$, $a = 37° 40' 12''$

試就直弧三角形之性質。証明下列各等式:—

11. $\sin^2 \frac{1}{2}c = \sin^2 \frac{1}{2}a \cos^2 \frac{1}{2}b + \cos^2 \frac{1}{2}a \sin^2 \frac{1}{2}b$

12. $\sin a \tan \frac{1}{2}A - \sin b \tan \frac{1}{2}B = \sin (a-b)$

13. $\sin (c-a) = \sin b \cos a \tan \frac{1}{2} B$

14. $\sin^2 a + \sin^2 b - \sin^2 c = \sin^2 a \sin^2 b$

15. $\cos^2 A + \cos^2 c - \cos^2 a = \cos^2 A \cos^2 c$

16. $\sin^2 A \cos^2 c = \sin (A-a) \sin (A+a)$

17. ABC爲弧三角形。C爲直角。若 $\cos A = \cos^2 a$, 又A不等於一直角。試証 $b+c$ 之等於 $\frac{1}{2}\pi$ 或等於 $\frac{3}{2}\pi$。應視 b 與 c 之同小於或同大於 $\frac{1}{2}\pi$。

18. 從直弧三角形之直角頂C。作 α, β 兩大圓弧一直垂對邊。一達對邊之中點。試証

$$\sin^2 \frac{1}{2}c \,(1+\sin^2\alpha) = \sin^2 \beta$$

19. C爲弧三角形之直角。D爲對邊AB之中點。試証

$$4 \cos^2 \frac{1}{2}c \sin^2 CD = \sin^2 a + \sin^2 b$$

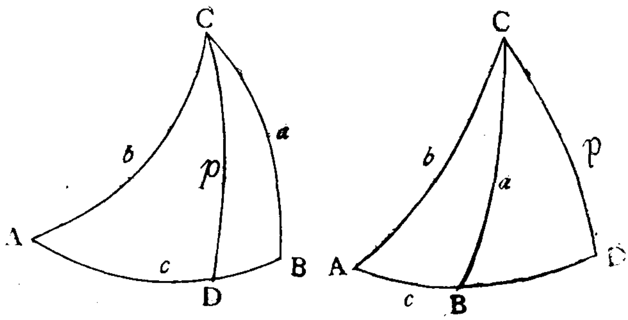
20. ABC爲直弧三角形。從直角C作 δ 大圓弧。直垂對邊AB。試証

$$\cot \delta = \sqrt{(\cot^2 a + \cot^2 b)}$$

第五章

斜弧三角形

42. 正弦定則 ABC爲斜弧三角形。自任一角頂C作垂弧p。遇對邊於D。或在AB之內。或在其外。



則準直弧三角形之基本公式。得

$$\sin p=\sin a \sin B$$

$$\sin p=\sin b \sin A$$

$$\therefore \sin a \sin B=\sin b \sin A$$

或 $$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}$$

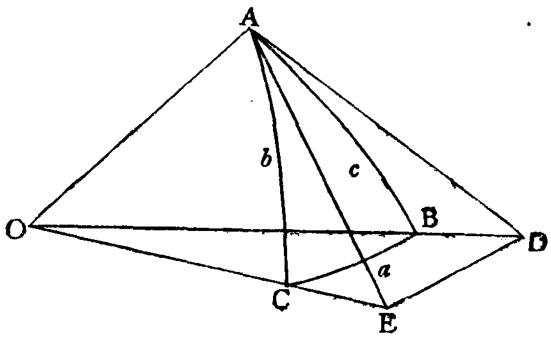
若從A角作垂弧。則得

$$\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

因得　$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

是爲正弦定則。其文曰。弧三角形邊之正弦。與對角之正弦。成等比例。

43. 邊之餘弦定則　餘弦定則。亦可倣照正弦定則証法。將斜弧三角形。分爲兩個直弧三角形。用其基本公式推論之。但因此爲斜弧三角形之基本公式。故宜從根本上立法。如圖。ABC 爲弧三角形。O 爲球心。從



A 作 AB 弧之切線。遇 OB 於 D。又作 AC 弧之切線。遇 OC 於 E。連 DE。則 DAE 角即三角形之 A 角。EOD 角即 a 邊。

由三角形 ADE, ODE, 可得

$$DE^2=AD^2+AE^2-2\,AD\cdot AE\cdot\cos A$$

$$DE^2=OD^2+OE^2-2\,OD\cdot OE\cdot\cos a$$

又三角形 OAD, OAE, 皆直三角形。故

$$OD^2=OA^2+AD^2$$

$$OE^2=OA^2+AE^2$$

代入上式。幷相減。得

$$O=2\,OA^2+2\,AD\cdot AE\cdot\cos A-2\,OD\cdot OE\cdot\cos a$$

$$\therefore\ \cos a=\frac{OA}{OE}\cdot\frac{OA}{OD}+\frac{AE}{OE}\cdot\frac{AD}{OD}\cos A$$

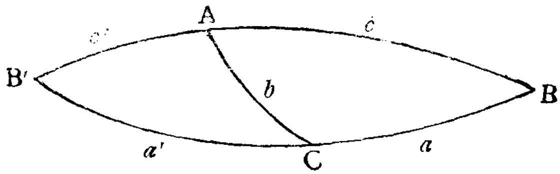
即 $\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$

若從B, C作切線。用同法推論之。可得 $\cos b$, $\cos c$ 各等式。今併書於下。

$$\left.\begin{aligned}\cos a&=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A\\ \cos b&=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B\\ \cos c&=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

44. 上節所繪之圖。係假定AB, AC兩弧皆小於一象限。因從A所作之切線。皆認爲能遇OB, OC也。但公式之爲式。幷不因此限制而有所變更。今取夾A角之一邊或每邊。皆大於一象限。或等於一象限。分論於下。

(1) 設AB邊大於一象限。可引長BA, BC, 使相遇於B′成瓜瓣形。並命$AB'=c'$, $CB'=a'$, 則AB′C三角形之AB′, AC兩邊。皆各小於一象限。依上節之所証。得

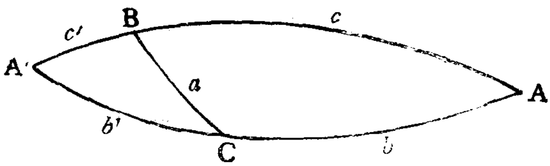


$$\cos a'=\cos b\cos c'+\sin b\sin c'\cos B'AC$$

但 $a'=\pi-a$, $c'=\pi-c$, $B'AC=\pi-A$,代入式中。並變更其記號。仍得

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$

(2)　設 AB, AC 皆大於一象限。引長 AB, AC 使遇於 A'。並命 $A'B=c'$, $A'C=b'$, 則 A'BC 三角形。亦與上節之假定相合。因得



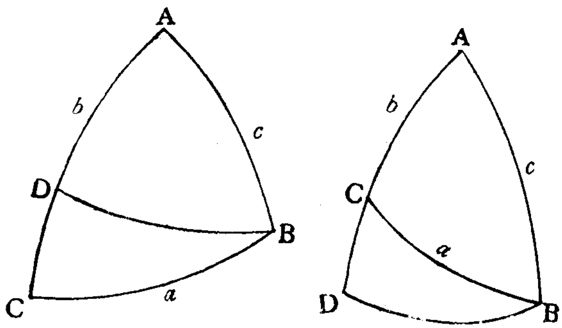
$$\cos a=\cos b'\cos c'+\sin b'\sin c'\cos A'$$

但 $b'=\pi-b$, $c'=\pi-c$, $A'=A$, 故

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$

(3)　設 AB 等於一象限。可從 AC 或 AC 之引長。截取 AD 等於一象限。並作 BD。若 BD 又等於一象限。則 B 爲 AC 弧之極。因得 $a=\frac{1}{2}\pi$, $A=\frac{1}{2}\pi$,而原公式遂化爲 $0=0$。

若BD不等於一象限。則由三角形BDC。可得



$$\cos a = \cos CD \cos BD + \sin CD \sin BD \cos CDB$$

但 $\cos CDB = 0$, $\cos CD = \cos(\frac{1}{2}\pi \sim b) = \sin b$, $\cos BD = \cos A$

$$\therefore \cos a = \sin b \cos A$$

此卽 $c = \frac{1}{2}\pi$ 時。公式(22)之變象也。

(4) 設AB, AC各等於一象限。則A爲BC弧之極。則 $A = a$。而 b, c 旣各等 $\frac{1}{2}\pi$。則其cos各等於0。其sin各等於1。卽原公式變爲

$$\cos a = \cos A$$

45. 角之餘弦定則　公式(22)既驗於任一弧三角形。亦必驗於極三角形。卽

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'$$

但極三角形之邊與角。與原三角形之角與邊。互爲補角。卽

$$\cos(\pi-A)=\cos(\pi-B)\cos(\pi-C)$$
$$+\sin(\pi-B)\sin(\pi-C)\cos(\pi-a)$$

因得角之餘弦定則三式如下。

$$\left.\begin{aligned}\cos A&=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a\\ \cos B&=-\cos C\cos A+\sin C\sin A\cos b\\ \cos C&=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(23)$$

46. 半角公式　公式(22)之稱爲基本公式者。因多數公式皆可由之蛻化也。半角公式即其蛻化之一。依基本公式

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$

得
$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

$$\therefore\quad 1-\cos A=\frac{\sin b\sin c+\cos b\cos c-\cos a}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\sin b\sin c}$$

則
$$2\sin^2\tfrac{1}{2}A=\frac{-2\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(b-c-a)}{\sin b\sin c}$$

或
$$\sin^2\tfrac{1}{2}A=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b\sin c}$$

又
$$1+\cos A=\frac{\sin b\sin c-\cos b\cos c+\cos a}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{\cos a-\cos(b+c)}{\sin b\sin c}$$

則　　$$2\cos^2\tfrac{1}{2}A=\frac{-2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a-b-c)}{\sin b\sin c}$$

或　　$$\cos^2\tfrac{1}{2}A=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b\sin c}$$

若命 s 爲三角形之半周邊。即

$$\tfrac{1}{2}(a+b+c)=s$$

則　$$\tfrac{1}{2}(b+c-a)=s-a$$

$$\tfrac{1}{2}(a-b+c)=s-b$$

$$\tfrac{1}{2}(a+b-c)=s-c$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad \sin\tfrac{1}{2}A&=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\\ \cos\tfrac{1}{2}A&=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\\ \text{相除得}\quad \tan\tfrac{1}{2}A&=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

以上係取公式(22)之第一式蛻化而成。若取第二第三兩式。用同法蛻化之。可得下之公式。

$$\left.\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}B&=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}}\\ \cos\tfrac{1}{2}B&=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c}}\\ \tan\tfrac{1}{2}B&=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-b)}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}C&=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}\\ \cos\tfrac{1}{2}C&=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}}\\ \tan\tfrac{1}{2}C&=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s\sin(s-c)}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

根號之前。向記正負雙號。惟以上各式祇能專用正號。因依第14節之規定。弧三角形之邊與角。皆各小於百八十度。半之。各小於九十度。故正弦餘弦正切皆爲正數也。

47. 半邊公式　此類公式。可由公式(23)倣照上節証法。蛻化而成。今爲避免重複。改由極三角形。用雙關原則証之如下。

命S爲三角之半和。即 $S=\frac{1}{2}(A+B+C)$。則

$$s'=\tfrac{1}{2}(a'+b'+c')=\tfrac{1}{2}(3\pi-\overline{A+B+C})=\tfrac{3}{2}\pi-S$$

$$s'-a'=\tfrac{3}{2}\pi-S-(\pi-A)=\tfrac{1}{2}\pi-S+A=\tfrac{1}{2}\pi-(S-A)$$

$$s'-b'=\tfrac{3}{2}\pi-S-(\pi-B)=\tfrac{1}{2}\pi-S+B=\tfrac{1}{2}\pi-(S-B)$$

$$s'-c'=\tfrac{3}{2}\pi-S-(\pi-C)=\tfrac{1}{2}\pi-S+C=\tfrac{1}{2}\pi-(S-C)$$

又　$\frac{1}{2}A'=\frac{1}{2}(\pi-a)=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}a$

故　$\sin s'=-\cos S$

$$\sin(s'-a')=\cos(S-A)$$

$$\sin(s'-b')=\cos(S-B)$$

$$\sin(s'-c')=\cos(S-C)$$

又 $$\sin\tfrac{1}{2}A'=\cos\tfrac{1}{2}a$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A'=\sin\tfrac{1}{2}a$$

將以上各值代入極三角形之公式。卽得

$$\left.\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}a&=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}}\\ \cos\tfrac{1}{2}a&=\sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}}\\ \tan\tfrac{1}{2}a&=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(27)$$

一邊如此。他邊亦然。故 b,c 兩邊之公式。可逕書如下。

$$\left.\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}b&=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-B)}{\sin A\sin C}}\\ \cos\tfrac{1}{2}b&=\sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-C)}{\sin A\sin C}}\\ \tan\tfrac{1}{2}b&=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-B)}{\cos(S-A)\cos(S-C)}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(28)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}c&=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-C)}{\sin A\sin B}}\\ \cos\tfrac{1}{2}c&=\sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)}{\sin A\sin B}}\\ \tan\tfrac{1}{2}c&=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-C)}{\cos(S-A)\cos(S-B)}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(29)$$

以上各公式之根號前。亦皆用正號。理由與半角公

式同。又各根號內之數皆爲正數。故其根亦皆爲實根。何以知其然也。因弧三角形三角之和。大於兩直角。小於六直角。則 S 必大於一直角。小於三直角。故 $\cos S$ 爲負數。即 $-\cos S$ 恒爲正數。又弧三角形之任一邊。皆小於餘兩邊之和。而極三角形之三邊。爲原三角形三角之補角。則 $\pi-A$ 小於 $\pi-B+\pi-C$。故 $B+C-A$ 小於 π。則 $S-A$ 必小於 $\frac{1}{2}\pi$。故 $\cos(S-A)$ 必爲正數。同理。$\cos(S-B)$, $\cos(S-C)$ 亦皆爲正數。故根號內之數皆爲正數。

48. 公式(22)又可用証下之公式。因

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$$

又 $$\sin c=\sin a\frac{\sin C}{\sin A}$$

$$\therefore\ \cos a=(\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C)\cos b+\frac{\sin a\sin b\cos A\sin C}{\sin A}$$

或 $$\cos a\,(1-\cos^2 b)=\sin a\sin b\cos b\cos C$$
$$+\sin a\sin b\cot A\sin C$$

改書 $1-\cos^2 b$ 爲 $\sin^2 b$。並以 $\sin a\sin b$ 通除兩邊。得

$$\cot a\sin b=\cos b\cos C+\sin C\cot A$$

若取 $\cos a$ 式與 $\sin a=\sin c\dfrac{\sin A}{\sin C}$ 代入 $\cos c$ 式中。並用 $\sin b\sin c$ 通除兩邊。則得

$$\cot c\sin b=\cos b\cos A+\sin A\cot C$$

再取公式(22)之他兩式。照上法演之。又可得兩式。即將公式(22)之三式。兩兩取之。可共得六式如下。

$$\left.\begin{aligned}\cot a\sin b&=\cos b\cos C+\sin C\cot A\\ \cot b\sin c&=\cos c\cos A+\sin A\cot B\\ \cot c\sin a&=\cos a\cos B+\sin B\cot C\\ \cot c\sin b&=\cos b\cos A+\sin A\cot C\\ \cot b\sin a&=\cos a\cos C+\sin C\cot B\\ \cot a\sin c&=\cos c\cos B+\sin B\cot A\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(30)$$

細閱以上公式。各式皆含兩邊兩角。其支配方法。皆兩邊及其夾角並他一角。或兩角及其居間之邊並他一邊。若將兩邊所夾之角。或兩角居間之邊。名為夾角夾邊。他一邊或一角名為他邊他角。則下列歌訣。亦頗能補益記憶。

他角餘切,夾角正弦;
他邊餘切,夾邊正弦;
各各乘積,由後減先;
夾邊夾角,餘弦等焉。

49. 由公式(30)又可蛻化更為有用之公式。因原式中含有兩個餘切。若以正弦次第乘之。則每式可化成兩式。例如取第一式。先以 $\sin a$ 乘之。得

$$\cos a\sin b=\sin a\cos b\cos C+\sin a\sin C\frac{\cos A}{\sin A}$$

但 $\dfrac{\sin a \sin C}{\sin A}=\sin c$。代入并移項。得

$$\sin c \cos A=\sin b \cos a-\cos b \sin a \cos C$$

又以 sin A 乘之。得

$$\frac{\sin A \cos a \sin b}{\sin a}=\cos b \sin A \cos C+\sin C \cos A$$

但 $\dfrac{\sin A \sin b}{\sin a}=\sin B$。代入上式。得

$$\sin B \cos a=\sin C \cos A+\cos C \sin A \cos b$$

若將 (30) 之六式。一一按照上法化之。可共得十二式如下。

$$\left.\begin{aligned}
\sin a \cos B&=\sin c \cos b-\cos c \sin b \cos A\\
\sin b \cos C&=\sin a \cos c-\cos a \sin c \cos B\\
\sin c \cos A&=\sin b \cos a-\cos b \sin a \cos C\\
\sin a \cos C&=\sin b \cos c-\cos b \sin c \cos A\\
\sin b \cos A&=\sin c \cos a-\cos c \sin a \cos B\\
\sin c \cos B&=\sin a \cos b-\cos a \sin b \cos C
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(31)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin A \cos b&=\sin C \cos B+\cos C \sin B \cos a\\
\sin B \cos c&=\sin A \cos C+\cos A \sin C \cos b\\
\sin C \cos a&=\sin B \cos A+\cos B \sin A \cos c\\
\sin A \cos c&=\sin B \cos C+\cos B \sin C \cos a\\
\sin B \cos a&=\sin C \cos A+\cos C \sin A \cos b\\
\sin C \cos b&=\sin A \cos B+\cos A \sin B \cos c
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(32)$$

50. 以上各公式。皆由公式 (22) 蛻化而出。卽正弦定則之公式。亦可由 (22) 證之。因

$$\cos\ A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

$$\therefore\quad \sin^2 A=1-\left(\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}\right)^2$$

$$=\frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c)-(\cos a-\cos b\cos c)^2}{\sin^2 b\sin^2 c}$$

$$=\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 b\sin^2 c}$$

$$\therefore\quad \sin A=\frac{\sqrt{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}}{\sin b\sin c}$$

細閱上式。右邊根號內之數。應爲不變之數。若兩邊各以 $\sin a$ 除之。則得

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sqrt{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c)}}{\sin a\sin b\sin c}$$

而 $\sin B$, $\sin C$ 之等式若以 $\sin b$, $\sin c$ 除之。亦得此式。

$$故\quad \frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

51. 由上節觀之。$\sin A$ 旣等於

$$\frac{\sqrt{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c)}}{\sin b\sin c}$$

而 sin A 又等於 $2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ 則

$$\sin A=\frac{2}{\sin b\sin c}\left\{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

若命 $n^2=\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)$

則　$4n^2=1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c$

又依公式(27), (28), (29), 應得

$$\sin a=\frac{2}{\sin B\sin C}\left\{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

而據上節公式。若取極三角形而轉變之應得

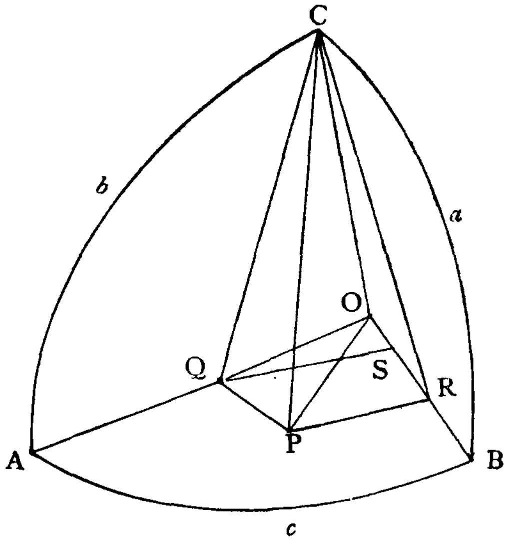
$$\sin a=\frac{\sqrt{(1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C-2\cos A\cos B\cos C)}}{\sin B\sin C}$$

若命 $N^2=-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)$

則　$4N^2=1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C-2\cos A\cos B\cos C$

n 各式係一七七八年尤拉所立。N 各式係一七八二年勒格棱所立。n 與 N 乃球面三角學常用之代號。比國利也矢大學紐堡敎授謂宜有專名。以便引用。因名 n 爲弧三角形邊之範式 norm。名 N 爲角之範式。

52. 美國天算家沙烏烈取公式(21), (22), (31), 各一式。爲解一般三角形應用之公式。其幾何證法如下。



ABC 為弧三角形。O 為球心。作 OA, OB, OC 諸半徑。

命 P 為 C 在 AOB 面上之投影

Q, R 為 C 在 OA, OB 線上之投影

S 為 Q 在 OB 線上之投影

則 $OR=OS+SR=OS+QP\sin c$ ……………………………… (a)

$RP=SQ-QP\cos c$ ……………………………… (b)

$QC\sin A=PC=RC\sin B$ ……………………………… (c)

但 $OR=\cos a$, $OS=OQ\cos c=\cos b\cos c$

$RC=\sin a$, $QP=QC\cos A=\sin b\cos A$

$OQ=\cos b$, $RP=RC\cos B=\sin a\cos B$

$QC = \sin b$, $SQ = OQ \sin c = \cos b \sin c$

將以上各值代入 (a), (b), (c), 即得

$$\left.\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A\\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A\\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(33)$$

乃沙氏於所著球面與應用天文學中最通用之公式也。

53. 納白爾類似式　此式係納白爾氏發明。一六一四年所發表者。其證法如下。

準正弦定則 $\dfrac{\sin A}{\sin a} = \dfrac{\sin B}{\sin b} = m \cdots\cdots\cdots\cdots(a)$

則　$\sin A + \sin B = m(\sin a + \sin b) \cdots\cdots\cdots\cdots(b)$

$\sin A - \sin B = m(\sin a - \sin b) \cdots\cdots\cdots\cdots(c)$

又據公式 (23).

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B \cos C &= \sin B \sin C \cos a\\ &= m \sin b \sin C \cos a \cdots\cdots\cdots\cdots(d)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos B + \cos A \cos C &= \sin A \sin C \cos b\\ &= m \sin a \sin C \cos b \cdots\cdots\cdots\cdots(e)\end{aligned}$$

(d), (e) 相加得 $(\cos A + \cos B)(1 + \cos C) = m \sin C \sin(a + b) \cdots\cdots(f)$

以 (f) 除 (b) 得

$$\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\frac{\sin a+\sin b}{\sin(a+b)}\times\frac{1+\cos C}{\sin C}$$

或 $$\frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)}{2\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a+b)}\times\frac{2\cos^2\frac{1}{2}C}{2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}$$

則 $$\tan\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C\text{········}(34)$$

若以 (f) 除 (c)。並用同法轉之。則得

$$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C\text{········}(35)$$

若將 (34), (35) 施於極三角形。依雙關原則。可得下之兩式。

$$\tan\frac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{1}{2}c\text{············}(36)$$

$$\tan\frac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{1}{2}c\text{············}(37)$$

以上 (34), (35), (36), (37) 四式。稱爲納白爾類似式。第一式中之 $\cos\frac{1}{2}(a-b)$ 與 $\cot\frac{1}{2}C$ 當然皆爲正數。故 $\tan\frac{1}{2}(A+B)$ 與 $\cos\frac{1}{2}(a+b)$ 必同號。其相對情形如下。

若 $a+b<180°$, 則 $\frac{1}{2}(a+b)<90°$, 即 $\cos\frac{1}{2}(a+b)>0$, 而 $\tan\frac{1}{2}(A+B)$ 若大於 0, 則 $\frac{1}{2}(A+B)<90°$, 即 $A+B<180°$。

若 $a+b>180°$, 則 $\cos\frac{1}{2}(a+b)$ 爲負數而 $\tan\frac{1}{2}(A+B)$

若爲負數,則$\frac{1}{2}(A+B)>90°$,卽$A+B>180°$。

若$a+b=180°$,則$\cos\frac{1}{2}(a+b)=0$,而$\tan\frac{1}{2}(A+B)=\infty$,故$\frac{1}{2}(A+B)=90°$,或$A+B=180°$。

反之。若從第三式照上法推之。將見$a+b$之小於,大於,或等於180°。亦視$A+B$之小於,大於,或等於180°。因得一定理如下。

定理　弧三角形任兩邊之和,或小於或大於或等於180°。應視對角之和,或小於或大於或等於180°。

54. 戈斯方程式或德闌布類似式　依平面三角學之和角公式。可得

$$\cos\frac{1}{2}(A+B)=\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B-\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B$$

若將公式(24),(25)各値代入。則得

$$\cos\frac{1}{2}(A+B)=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\times\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c}}$$

$$-\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\times\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}}$$

$$=\frac{\sin s}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}$$

$$-\frac{\sin(s-c)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}$$

$$=\frac{\sin s-\sin(s-c)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}$$

但 $\sin s-\sin(s-c)=2\cos\frac{1}{2}(2s-c)\sin\frac{1}{2}c$

$$=2\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}c$$

$$\sin c=2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c$$

$$\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}=\sin\frac{1}{2}\mathrm{C}$$

將以上各值代入。卽得

$$\cos\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\frac{2\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}c}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}\sin\frac{1}{2}\mathrm{C}$$

或 $\cos\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}\mathrm{C}$

若取公式 $\sin\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})$, $\cos\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})$, $\sin\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})$, 仍照上法演之。可又得三式。連前共爲四式如下

$$\left.\begin{aligned}\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})\cos\tfrac{1}{2}c&=\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{C}\\\sin\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})\cos\tfrac{1}{2}c&=\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}\mathrm{C}\\\cos\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})\sin\tfrac{1}{2}c&=\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{C}\\\sin\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})\sin\tfrac{1}{2}c&=\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}\mathrm{C}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(38)$$

以上四式。或屬之戈斯。或屬之德蘭布。因二氏發表此式。約先後同時也。屬之戈斯者。多稱爲戈斯方程式。屬之德蘭布者。多稱爲德蘭布類似式。

55. **賴特類似式** 一八七二年德國賴特博士。由戈斯方程式蛻化其他四式。於解特種三角形。頗稱便利。今述之於下。

戈斯方程式之第四式。可書如

$$\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}$$

$$\frac{\sin(90^\circ-\frac{1}{2}C)}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}$$

$$\frac{\sin(90^\circ-\frac{1}{2}C)-\sin\frac{1}{2}c}{\sin(90^\circ-\frac{1}{2}C)+\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)-\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)+\sin\frac{1}{2}(a-b)}$$

$$\frac{2\cos[45^\circ-\frac{1}{4}(C-c)]\sin[45^\circ-\frac{1}{4}(C+c)]}{2\sin[45^\circ-\frac{1}{4}(C-c)]\cos[45^\circ-\frac{1}{4}(C+c)]}=\frac{2\cos\frac{1}{4}(A-B+a-b)\sin\frac{1}{4}(A-B-a+b)}{2\sin\frac{1}{4}(A-B+a-b)\cos\frac{1}{4}(A-B-a+b)}$$

$$\cot[45^\circ-\tfrac{1}{4}(C-c)]\tan[45^\circ-\tfrac{1}{4}(C+c)]=\cot\tfrac{1}{4}(\overline{A+a}-\overline{B+b})\tan\tfrac{1}{4}(\overline{A-a}-\overline{B-b})$$

若命 $A+a=4s$, $B+b=4s'$, $C+c=4s''$,

$A-a=4d$, $B-b=4d'$, $C-c=4d''$,

則上式化為

$$\cot(45^\circ-d'')\tan(45^\circ-s'')=\cot(s-s')\tan(d-d')\cdots\cdots\cdots(a)$$

若取戈斯方程式之第一式。用同法化之。可得

$$\tan(45^\circ-d'')\tan(45^\circ-s'')=\tan(s+s')\tan(d+d')\cdots\cdots\cdots(b)$$

又戈斯方程式之第二式。可書如

$$\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}$$

$$=\frac{\cos[90^\circ-\frac{1}{2}(A+B)]}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}C-\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}C+\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\cos[90^\circ-\frac{1}{2}(A+B)]-\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos[90^\circ-\frac{1}{2}(A+B)]+\cos\frac{1}{2}(a-b)}$$

$$\frac{-2\sin\frac{1}{4}(C+c)\sin\frac{1}{4}(C-c)}{2\cos\frac{1}{4}(C+c)\cos\frac{1}{4}(C-c)}=\frac{-2\sin[45^\circ-\frac{1}{4}(A+B+a-b)]\sin[45^\circ-\frac{1}{4}(A+B-a+b)]}{2\cos[45^\circ-\frac{1}{4}(A+B+a-b)]\cos[45^\circ-\frac{1}{4}(A+B-a+b)]}$$

$$\tan\tfrac{1}{4}(C+c)\tan\tfrac{1}{4}(C-c)=\tan[45^\circ-\tfrac{1}{4}(\overline{A+a}+\overline{B-b})]\tan[45^\circ-\tfrac{1}{4}(\overline{A-a}+\overline{B+b})]$$

即 $$\tan s''\tan d''=\tan(45^\circ-s-d')\tan(45^\circ-d-s')\cdots\cdots(c)$$

若取戈斯方程式之第三式。用同法化之。可得

$$\cot s''\tan d''=\cot(45^\circ-d+s')\tan(45^\circ-s+d')\cdots\cdots(d)$$

以 (a) 乘 (b) 得

$$\tan^2(45^\circ-s'')=\cot(s-s')\tan(s+s')\tan(d-d')\tan(d+d')\cdots(39)$$

以 (a) 除 (b) 得

$$\tan^2(45^\circ-d'')=\tan(s-s')\tan(s+s')\cot(d-d')\tan(d+d')\cdots(40)$$

以 (d) 乘 (c) 得

$$\tan^2 d''=\tan(45^\circ-s-d')\tan(45^\circ-s+d')$$
$$\times\tan(45^\circ-d-s')\tan(45^\circ+d-s')\cdots\cdots(41)$$

以 (d) 除 (c) 得

$$\tan^2 s''=\tan(45^\circ-s-d')\tan(45^\circ+s-d')$$
$$\times\tan(45^\circ-d-s')\tan(45^\circ-d+s')\cdots\cdots(42)$$

以上 (39), (40), (41), (42) 四式。名曰賴特類似式。

習題

1. 試就正弦定理公式。討論下列各題:—

(1) A=90° (2) B=90° (3) C=90°

(4) $a=90°$　(5) $A=B=90°$　(6) $a=b=90°$

(7) $a=A=90°$　(8) $a=b=A=B=90°$　(9) $A=B=C=90°$

2.　試就邊之餘弦定則公式。討論下列各題:—

(1) $A=90°$　(3) $A=B=90°$

(2) $B=90°$　(4) $A=B=C=90°$

3.　試就角之餘弦定則公式。討論下列各題:—

(1) $A=0°$　(3) $A=90°$

(2) $A=180°$　(4) $A=B=90°$

4.　試証下列兩等式:—

(1) $1-\cos a=1-\cos(b-c)+\sin b\sin c\ \text{vers}\ A$

(2) $\text{vers}\ A=[1+\cos(B+C)]\left[1+\dfrac{\sin B\sin C\ \text{vers}\ a}{1+\cos(B+C)}\right]$

5.　在斜弧三角形內。若 $A=a$,試証 B 與 b 或相等,或互為補角。C 與 c 亦如之。

6.　問何時極三角形與原三角形可合而為一。

7.　此三角形之兩邊。與彼三角形之兩邊。各各相等。但所夾之角大小不同。則大角所對之邊。長於小角所對之邊。試用餘弦定則証明之。

8.　若 D 為弧三角形 AB 邊之中點。試証

$$\cos AC+\cos BC=2\cos\tfrac{1}{2}AB\cos CD$$

9.　等邊三角形有下列之性質。試証之。

$$2\cos\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}A=1$$

10. 試就等邊三角形。証明 $\tan^2\frac{1}{2}a=1-2\cos A$, 並推論此三角形邊與角之限度。

11. AB, CD 兩象限弧。相交於 E。試証

$$\cos AEC=\cos AC\cos BD-\cos BC\cos AD$$

12. 若弧三角形之 $b+c=\pi$, 試証

$$\sin 2B+\sin 2C=0$$

13. 有弧三角形 ABC, 通過 AB, BC 之中點,作大圓弧 DE, 若 P 為 DE 之極, 並作 PB, PD, PE, PC 諸大圓弧, 試證 BPC 角等於 DPE 角之兩倍。

14. A,B,C 為弧三角形之三角。a,b,c 為其對邊。試證

$$\sin b\sin c+\cos b\cos c\cos A=\sin B\sin C-\cos B\cos C\cos a$$

15. 若從弧三角形之角頂 A,B,C,作 θ,ϕ,ψ 諸弧。直垂對邊。試證

$$\sin a\sin\theta=\sin b\sin\phi=\sin c\sin\psi$$

$$=\sqrt{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c)}$$

16. 若 θ,ϕ,ψ 為弧三角形三角之平分線。試證

$$\cot\theta\cos\tfrac{1}{2}A+\cot\phi\cos\tfrac{1}{2}B+\cot\psi\cos\tfrac{1}{2}C$$

$$=\cot a+\cot b+\cot c$$

17. 兩海口東西對望。其公同緯度為 l, 以度分秒計經度差為 2λ, 以圓周量計。若命 r 為地球半徑。試證

船之循大圓弧航行於其間者,較之循緯綫東西行者,可省

$$2r\left[\lambda\cos l-\sin^{-1}(\sin\lambda\cos l)\right]$$

18. 船循大圓弧行,經過 A,B,C 三點,距離相同。其緯度爲 l_1, l_2, l_3。若命 s 爲其距離,r 爲地球半徑。試證

$$s=r\cos^{-1}\frac{\sin\frac{1}{2}(l_1+l_2)\cos\frac{1}{2}(l_1-l_3)}{\sin l_2}$$

並求其經度差。亦以 l_1, l_2, l_3, 計之。

19. 小圓二,各與大圓切。小圓之半徑爲 ρ, ρ',兩極距爲 δ,切點之距離爲 r。試證

$$\sin^2\frac{1}{2}r=\frac{\sin^2\frac{1}{2}\delta-\sin^2\frac{1}{2}(\rho-\rho')}{\cos\rho\cos\rho'}$$

20. 有弧三角形 ABC。從 B 至 AC 之中點,從 C 至 AB 之中點,作 m_b, m_c, 諸大圓弧。若 $m_b=m_c$, 試證 $b=c$, 或

$$\sin^2\frac{1}{2}a=\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c+\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c$$

第六章

斜弧三角形解法

56. 斜弧三角形解法向分六類。即

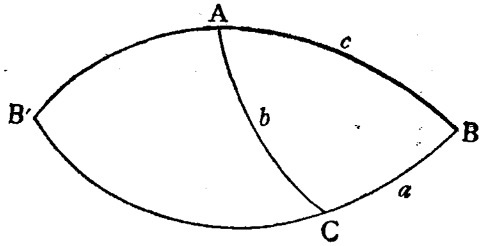
1. 已知三邊
2. 已知三角
3. 已知兩邊及夾角
4. 已知兩角及夾邊
5. 已知兩邊及對角之一
6. 已知兩角及對邊之一

倘邊與角有特別情形時。亦可用直弧三角形解法馭之。玆舉三則如下.

(1) 若三角形有一邊爲象限者。則其極三角形必爲直弧三角形。故可用直弧三角形解法。先解極三角形。各取其補角。即得原三角形之全解。

(2) 若三角形有兩邊相等,或兩角相等。則此三角形爲等腰弧三角形。可從角頂作弧至對邊之中點。分原三角形爲兩個直弧三角形。只須解其一形。分別倍之。亦得原三角形之全解。

(3) 若三角形有兩邊或兩角互爲補角。即 $b+c=\pi$, 或 $B+C=\pi$, 可引長BA,BC使相遇於B′,成瓜瓣形。則瓣



餘三角形AB′C則為等腰弧三角形。以上段之法馭之。可得原三角形之全解。

57. 已知三邊　即由a,b,c求A,B,C也。當然用半角公式解之。半角公式分正弦餘弦正切三式。選用某式。雖無限制。但從變動徐疾上觀之。似以用正切公式較為穩妥。因正切變動始終迅速。而正弦餘弦皆各有所偏重也。若A,B,C三角同時並求。則用正切公式。尤為便利。可命

$$\tan r=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}} \quad\cdots\cdots\cdots(43)$$

因A之正切公式。其分母有$\sin(s-a)$因數。用除上式。卽得正切公式。B, C兩式亦然。故原公式變為

$$\left.\begin{aligned}\tan\tfrac{1}{2}A&=\frac{\tan r}{\sin(s-a)}\\ \tan\tfrac{1}{2}B&=\frac{\tan r}{\sin(s-b)}\\ \tan\tfrac{1}{2}C&=\frac{\tan r}{\sin(s-c)}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(44)$$

考驗可用正弦定則公式覆按之。

例題　三角形之 $a=124°\ 12'\ 31''$, $b=54°\ 18'\ 16''$, $c=97°\ 12'\ 25''$, 試解之

$$
\begin{aligned}
a &= 124°\ 12'\ 31'' \\
b &= 54\ \ 18\ \ 16 \\
c &= 97\ \ 12\ \ 25 \\
2s &= 275\ \ 43\ \ 12 \\
s &= 137\ \ 51\ \ 36 \\
s-a &= 13\ \ 39\ \ 5 \\
s-b &= 83\ \ 33\ \ 20 \\
s-c &= 40\ \ 39\ \ 11
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\log\sin(s-a)= & 9.37293 & \log\tan\frac{1}{2}A= & 10.30577 \\
\log\sin(s-b)= & 9.90725 & \log\tan\frac{1}{2}B= & 9.68145 \\
\log\sin(s-c)= & \underline{9.81390} & \log\tan\frac{1}{2}C= & \underline{9.86480} \\
 & 9.18408 & \frac{1}{2}A= & 63°\ 41'\ 3''.8 \\
\log\sin s = & \underline{9.82669} & \frac{1}{2}B= & 25\ \ 39\ \ 5.6 \\
\log\tan^2 r = & 2\,|\,\underline{9.35739} & \frac{1}{2}C= & \underline{36\ \ 13\ \ 20} \\
\log\tan r = & 9.67870 & A= & 127\ \ 22\ \ 8 \\
 & & B= & 51\ \ 18\ \ 11 \\
 & & C= & 72\ \ 26\ \ 40
\end{array}
$$

考　驗

$\log\sin a=9.91750$　$\log\sin b=9.90962$　$\log\sin c=9.99656$

$\log\sin A=\underline{9.90023}$　$\log\sin B=\underline{9.89235}$　$\log\sin C=\underline{9.97929}$

0.01727　0.01727　0.01727

注意　此項三角形。倘所設之數。適合第21,22兩節之定理。必能成立。且無兩意。

習　題

試解下列各弧三角形:—

1. $a=120°$, $b=60°$, $c=110°$
2. $a=50$, $b=115$, $c=130$
3. $a=130$, $b=110$, $c=85$
4. $a=20$, $b=60$, $c=70$
5. $a=30$, $b=50$, $c=80$
6. $a=55$, $b=100$, $c=125$
7. $a=120\ 55'\ 35''$, $b=59\ 4'\ 25''$, $c=106\ 10'\ 22''$
8. $a=50\ 12\ 4$, $b=116\ 44\ 48$, $c=129\ 11\ 42$
9. $a=131\ 35\ 4$, $b=108\ 30\ 14$, $c=84\ 46\ 34$
10. $a=20\ 16\ 38$, $b=56\ 19\ 40$, $c=66\ 20\ 44$

58.　已知三角　即由A, B, C求a, b, c也。應用公式當然為半邊公式。倘三邊同時並求。可命

$$\cot R=\sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}{-\cos S}}\cdots\cdots(45)$$

則原半邊公式。全化爲

$$\left.\begin{aligned}\cot\tfrac{1}{2}a&=\frac{\cot R}{\cos(S-A)}\\ \cot\tfrac{1}{2}b&=\frac{\cot R}{\cos(S-B)}\\ \cot\tfrac{1}{2}c&=\frac{\cot R}{\cot(S-C)}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(46)$$

考驗亦用正弦定則公式。此項三角形亦無兩意。但所設之數。亦有時不能成立耳。

又 $-\cos S$ 恒爲正數。前已言之矣。故演算時。於 $\log \cos S$ 之後。不必附記負號。免致顧此失彼。因 $\cos S$ 雖爲負數。$-\cos S$ 則爲正數也。

習題

試解下列各弧三角形:—

1.	$A=120°$,	$B=112°$,	$C=85°$
2.	$A=60$,	$B=80$,	$C=60$
3.	$A=100$,	$B=55$,	$C=92$
4.	$A=5$,	$B=39$,	$C=150$
5.	$A=100$,	$B=105$,	$C=110$

6.	A= 59° 55′ 10″,	B= 85° 36′ 50″,	C= 59° 55′ 10″
7.	A=102 14 12,	B= 54 32 24,	C= 89 5 46
8.	A= 4 23 35,	B= 8 28 20,	C=172 17 56
9.	A= 71 27 30,	B= 16 29 30,	C=140 18 50
10.	A=121 10 10,	B= 68 42 30,	C= 21 17 30

58. 已知兩邊及夾角　卽由 a, b, C 求 A, B, c 也。最適用之公式。爲納白爾類似式。卽

$$\tan\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}C$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}C$$

既得 $\frac{1}{2}(A+B)$, 與 $\frac{1}{2}(A-B)$, 加減之。卽得 A 與 B。

求 c 可用正弦定則公式算之。惟 $\sin c$ 含有兩意。雖其值可依據第28節之定理。酌量決定。但大角大邊亦有時發生疑義。似不如用戈斯方程式之

$$\cos\tfrac{1}{2}c=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\sin\tfrac{1}{2}C$$

較爲簡便。且無兩意之猶豫。考驗用正弦定則公式。玆演一題於下。

例題　弧三角形之 $a=68°\ 20'\ 25''$, $b=52°\ 18'\ 15''$,

$C=117°\ 12', 20''$，試解之。

$$a=68°\ 20'\ 25''$$
$$b=52\ \ 18\ \ 15$$
$$\tfrac{1}{2}(a-b)=\ 8\ \ 1\ \ 5$$
$$\tfrac{1}{2}(a+b)=60\ \ 19\ \ 20$$
$$\tfrac{1}{2}C=58\ \ 36\ \ 10$$

$\log\cos\frac{1}{2}(a-b)$	$=9.29574$	$\log\sin\frac{1}{2}(a-b)$	$=9.14453$
$\operatorname{colog}\cos\frac{1}{2}(a+b)$	$=10.30529$	$\operatorname{colog}\sin\frac{1}{2}(a+b)$	$=10.06107$
$\log\cot\frac{1}{2}C$	$=9.78557$	$\log\cot\frac{1}{2}C$	$=9.78557$
$\log\tan\frac{1}{2}(A+B)$	$=10.08660$	$\log\tan\frac{1}{2}(A-B)$	$=8.99117$

$$\tfrac{1}{2}(A+B)=50°\ 40'\ 30''$$
$$\tfrac{1}{2}(A-B)=\ 5\ \ 35\ \ 47$$
$$A=56\ \ 16\ \ 17$$
$$B=45\ \ 4\ \ 43$$

$$\log\cos\tfrac{1}{2}(a+b)=9.69471$$
$$\operatorname{colog}\cos\tfrac{1}{2}(A+B)=10.19810$$
$$\log\sin\tfrac{1}{2}C=9.93124$$
$$\log\cos\tfrac{1}{2}c=9.82405$$
$$\tfrac{1}{2}c=48°\ 10'\ 21''.4$$
$$c=96\ \ 20\ \ 43$$

考　驗

$\log\sin a=9.96820$　$\log\sin b=9.89832$　$\log\sin c=9.99733$

$\log\sin A=\underline{9.91995}$　$\log\sin B=\underline{9.85008}$　$\log\sin C=\underline{9.94909}$

10.04825　10.04824　10.04824

59. 專求c邊　上節之求c。須先求A與B。若專求c。自應採用邊之餘弦定則公式。

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$$

所求得之c亦無兩意。惟此式須用加減對數表計算。若用普通對數表。可命

$$\tan\theta=\tan b\cos C$$

則
$$\begin{aligned}\cos c&=\cos b\,(\cos a+\sin a\tan b\cos C)\\&=\cos b\,(\cos a+\sin a\tan\theta)\\&=\frac{\cos b}{\cos\theta}(\cos a\cos\theta+\sin a\sin\theta)\\&=\frac{\cos b\cos(a-\theta)}{\cos\theta}\quad\cdots\cdots(47)\end{aligned}$$

茲仍取上節例題演之於下。

$\log\tan b=10.11194$　$\log\cos b=9.78638$

$\log\cos C=\underline{9.66009n}$　$\log\cos(a-\theta)=9.19188$

$\log\tan\theta=9.77203n$　$\operatorname{colog}\cos\theta=\underline{10.06571n}$

$\theta=149°\ 23'\ 29''$　$\log\cos c=9.04343n$

$a=68\ \ 20\ \ 25$　$c=96°\ 20'\ 43''$

$a-\theta=-81\ \ 3\ \ 4$

60. 專求A角或B角　專求A角者。可選用公式(30)之第一式。專求B角者。可選用第五式。但兩式皆不適於對數計算。故宜改之如下。

第一式　$\sin C \cot A = \cot a \sin b - \cos b \cos C$

$$\therefore \quad \cot A = \frac{1}{\sin C}(\cot a \sin b - \cos b \cos C)$$

$$= \frac{\cos C}{\sin C}\left[\frac{\sin b \cot a}{\cos C} - \cos b\right]$$

若命　$\cot \theta = \dfrac{\cot a}{\cos C}$

則　$\cot A = \cot C(\sin b \cot \theta - \cos b)$

$$= \frac{\cot C}{\sin \theta}(\sin b \cos \theta - \cos b \sin \theta)$$

$$= \frac{\cot C}{\sin \theta}\sin(b-\theta) \cdots\cdots(48)$$

第五式可倣照上法命

$$\cot \theta = \frac{\cot b}{\cos C}$$

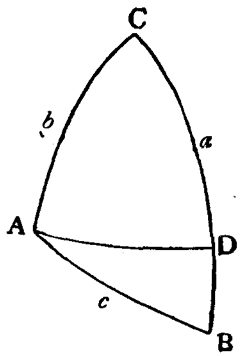
則　$\cot B = \dfrac{\cot C}{\sin \theta}\sin(a-\theta) \cdots\cdots(49)$

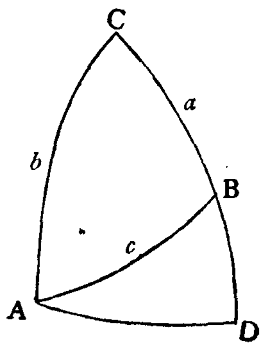
茲仍取前節例題演一式如下。

$\log \cot a =$	9.59893	$\theta =$	$130°\ 58'\ 46''$
$\operatorname{colog} \cos C =$	$\underline{10.33991n}$	$b =$	$\underline{52\ \ 18\ \ 15}$
$\log \cot \theta =$	$9.93885n$	$b-\theta =$	$281\ \ 19\ \ 29$

$$\log\cot C = 9.71100n$$
$$\log\csc\theta = 10.12209$$
$$\log\sin(b-\theta) = \underline{9.99146n}$$
$$\log\cot A = 9.82455$$
$$A = 56^\circ\ 16'\ 16''$$

61. 上兩節之立法。可用幾何法說明之。如下圖。ABC爲弧三角形。自A作垂弧AD。遇對邊BC於D。或在BC弧之內。或在其外。分原三角形爲兩個直弧三角形。垂弧遇於BC內者。兩直弧三角形之和。即爲原三角形。遇於BC外者。其較卽爲原三角形。故嘗稱爲和較直弧三角形。





由三角形ADC,準基本公式得

$$\tan CD = \tan b \cos C$$

則DB弧可由a加減得之。又

$$\cos b = \cos CD \cos AD \text{ 或 } \cos AD = \frac{\cos b}{\cos CD}$$

又由三角形ADB,得

$$\cos c = \cos AD \cos DB$$

$$= \frac{\cos b}{\cos CD} \cdot \cos DB$$

$$= \frac{\cos b}{\cos CD} \cdot \cos (a - CD)$$

此據左圖而言也。試取與第(47)公式比較。可見原設之 θ 角。卽 CD 弧也。若從右圖觀之。因 DB=CD－ a。而 $\cos(\theta - a) = \cos(\overline{-\theta - a}) = \cos(a - \theta)$,故可以通用。

次由三角形 ADC,準基本公式得

$$\tan AD = \tan C \sin CD$$

又由三角形 ADB,得

$$\tan AD = \tan ABD \sin DB$$

$$\therefore \tan ABD \sin DB = \tan C \sin CD$$

或
$$\cot ABD = \frac{\cot C}{\sin CD} \sin DB$$

$$= \frac{\cot C}{\sin CD} \sin (a - CD)$$

取與第(49)公式比較。亦見原設之 θ 角。卽 CD弧也。若從 B 作垂弧。並可得第(48)公式之幾何解。

習　題

試解下列各弧三角形:—

1. $a=88°\ 12'\ 20''$, $b=124°\ 7'\ 17''$, $C=50°\ 2'\ 1''$

2. $a=120\ 55\ 35$, $b=88\ 12\ 20$, $C=47\ 42\ 1$

3. $b=63\ 15\ 12$, $c=47\ 42\ 1$, $A=59\ 4\ 25$

4. $b=69\ 25\ 11$, $c=109\ 46\ 19$, $A=54\ 54\ 42$

5. $c=88\ 30\ 16$, $a=125\ 45\ 27$, $B=49\ 15\ 38$

6. $c=121\ 45\ 33$, $a=92\ 15\ 44$, $B=48\ 30\ 55$

7. 三角形之兩邊爲 $90°$ 與 $12°$,夾角爲 $85°$,問第三邊長若干度。

8. 三角形之 a 邊長 $63°\ 30'$,b 邊長 $89°\ 15'$,C 角廣 $52°\ 45'$,問 A 角廣若干度。

9. 三角形之 a 邊長 $72°\ 15'$,b 邊長 $93°\ 45'$,C 角廣 $63°\ 30'$,問 B 角廣若干度。

10. 試將專求 a 邊,B 角,C 角;b 邊,A 角,C 角;各公式書出。

62. 已知兩角及夾邊　即由 A, B, c 求 a, b, C 也。應用公式爲納白爾類似式之第三第四兩式。即

$$\tan\tfrac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\tan\tfrac{1}{2}c$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\tan\tfrac{1}{2}c$$

及戈斯方程式之

$$\sin\tfrac{1}{2}C=\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cos\tfrac{1}{2}c$$

如專求C。可採用角之餘弦定則公式

$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c$$

改用對數計算。可命

$$\cot\phi=\tan B\cos c$$

則 $$\cos C=\frac{\cos B}{\sin\phi}\sin(A-\phi)\cdots\cdots(50)$$

如專求a或b。可採公式(30)之第二,第六,兩式。或用幾何法之和較直弧三角形。均可得其解。即

命 $$\cot\phi=\frac{\cot A}{\cos c}$$

則 $$\cot a=\frac{\cot c}{\sin\phi}\sin(B+\phi)\cdots\cdots(51)$$

或命 $$\cot\phi=\frac{\cot B}{\cos c}$$

則 $$\cot b=\frac{\cot c}{\sin\phi}\sin(A+\phi)\cdots\cdots(52)$$

以上諸式皆無兩意。可徑照式布算。

習　題

試解下列各弧三角形:—

1. $A=39°\ 35'\ 51''$, $B=60°\ 46'\ 23''$, $c=132°\ 33'\ 38''$
2. $A=34\ 20\ 42$, $B=54\ 37\ 52$, $c=107\ 11\ 4$
3. $B=46\ 51\ 6$, $C=61\ 26\ 40$, $a=103\ 50\ 16$
4. $B=78\ 7\ 34$, $C=30\ 26\ 8$, $a=100\ 29\ 20$
5. $C=36\ 3\ 9$, $A=36\ 3\ 9$, $b=71\ 3\ 46$
6. $C=78\ 18\ 28$, $A=78\ 18\ 28$, $b=82\ 3\ 16$
7. 三角形之 $B=36°\ 31'\ 44''$, $C=121°\ 17'\ 44''$, $a=161°\ 9'\ 52''$, 試求 b。
8. 三角形之 $C=125°\ 8'\ 46''$, $A=82°\ 53'\ 36''$, $b=126°\ 58'\ 10''$, 試求 a。
9. 三角形之 $B=152°\ 21'\ 47''$, $C=88°\ 1'\ 39''$, $a=77\ 31'$, 試求 A。
10. 三角形之 $C=127°\ 38'\ 22''$, $A=106°\ 48'\ 22''$, $b=54°\ 36'$, 試求 B。

63. 已知兩邊及對角之一　卽由 a, b, A 求 B, C, c 也。宜先用正弦定則公式之

$$\sin B=\frac{\sin b}{\sin a}\sin A$$

求B。次用納白爾類似式之

$$\tan \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(a-b)}{\sin \tfrac{1}{2}(a+b)} \cot \tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$\tan \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(A+B)}{\sin \tfrac{1}{2}(A-B)} \tan \tfrac{1}{2}(a-b)$$

求C與c。惟B係由正弦求得。含有兩意。宜用第27,28兩節之定理。視b大於a,或小於a,而定其值。倘B之兩值皆大於A,或皆小於A。則此三角形有兩解。如只有一值合於上舉之定理。則此三角形只有一解。如$\sin B$大於一。則此三角形不能有解。故此項三角形有兩解,一解,及無解三法。其詳將於兩意總論節下續論之。

又B之近於90者。宜將公式改變之。俾臻精密。即

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A$$

$$\sin a \cos(90°-B) = \sin b \cos(90°-A)$$

$$\sin a\left[1-2\sin^2 \tfrac{1}{2}(90°-B)\right] = \sin b\left[1-2\sin^2 \tfrac{1}{2}(90°-A)\right]$$

$$\sin a - 2\sin a \sin^2(45°-\tfrac{1}{2}B) = \sin b - 2\sin b \sin^2(45°-\tfrac{1}{2}A)$$

$$\begin{aligned}2\sin a \sin^2(45°-\tfrac{1}{2}B) &= \sin a - \sin b + 2\sin b \sin^2(45°-\tfrac{1}{2}A)\\ &= 2\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\\ &\quad + 2\sin b \sin^2(45°-\tfrac{1}{2}A)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sin a \sin^2(45°-\tfrac{1}{2}B) &= \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\\ &\quad + \sin b \sin^2(45°-\tfrac{1}{2}A) \cdots\cdots\cdots (53)\end{aligned}$$

例題　三角形之$a=28°\,9'\,28''$，$b=57°\,41'\,56''$，$A=33°\,54'\,2''$，試解之。

$$\log\sin b = 9.92699$$
$$\log\sin A = 9.74645$$
$$\log\csc a = \underline{10.32615}$$
$$\log\sin B = 9.99959$$

由上之對數。無法查取眞確度數。乃改用新公式演算如下。

$$\begin{array}{lll}
a = 28°\ 9'\ 28'' & & \\
b = \underline{57\ 41\ 56} & & A = 33°\ 54'\ 2'' \\
\tfrac{1}{2}(a+b) = 42\ 55\ 42 & & \tfrac{1}{2}A = 16\ 57\ 1 \\
\tfrac{1}{2}(a-b) = -14\ 46\ 14 & & (45°-\tfrac{1}{2}A) = 28\ 2\ 59 \\
\log\cos\tfrac{1}{2}(a+b) = 9.86464 & & \log\sin b = 9.92698 \\
\log\sin\tfrac{1}{2}(a-b) = \underline{9.40645n} & & \log\sin^2(45°-\tfrac{1}{2}A) = \underline{9.34463} \\
\log(1) = 9.27109n & & \log(2) = 9.27161
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
(1) & = -.18668 \\
(2) & = \underline{.18690} \\
(1)+(2) & = .00022 \\
\log\{(1)+(2)\} & = 6.34242 \\
\log\csc a & = \underline{10.32615} \\
\log\sin^2(45°-\tfrac{1}{2}B) & = 2\,)\underline{16.66857}
\end{array}$$

$$\log \sin (45^\circ - \tfrac{1}{2}B) = 8.33428$$
$$45^\circ - \tfrac{1}{2}B = 1^\circ\ 14'\ 14''$$
$$\tfrac{1}{2}B = 43\ \ 45\ \ 46$$
$$B = 87\ \ 31\ \ 32 \quad B_1$$
$$\text{或} = 92\ \ 28\ \ 28 \quad B_2$$

B之値有二。今以B_1, B_2名之。其值皆大於A。故此項三角形有兩解。分演於下。

a	28° 9′ 28″	
b	57 41 59	
$\frac{1}{2}(a+b)$	42 55 28	
$\frac{1}{2}(a-b)$	—14 46 14	
A	33° 54′ 2″	33° 54′ 2″
B	87 31 32	92 28 28
$\frac{1}{2}(A+B)$	60 42 47	63 11 15
$\frac{1}{2}(A-B)$	—26 48 45	—29 17 13
$\log \sin \frac{1}{2}(a-b)$	9.40645n	9.40645n
$\log \csc \frac{1}{2}(a+b)$	10.16680	10.16680
$\log \cot \frac{1}{2}(A-B)$	10.29636n	10.25114n
$\log \tan \frac{1}{2}C$	9.86961	9.82439
$\frac{1}{2}C$	36° 31′ 31″	33° 43′ 9″
C	73 3 2	67 26 18

$\log \sin \frac{1}{2}(A+B)$	9.94061	9.95061
$\log \csc \frac{1}{2}(A-B)$	10.34575n	10.31053n
$\log \tan \frac{1}{2}(a-b)$	9.42105n	9.42105n
$\log \tan \frac{1}{2} c$	9.70741	9.68219
$\frac{1}{2} c$	27° 0′ 46″	25° 41′ 24″
c	54 1 32	51 22 48

考　驗

$\log \sin a$	9.67385	9.67385
$\log \sin A$	9.74645	9.74645
	9.92740	9.92740
$\log \sin b$	9.92698	9.92698
$\log \sin B$	9.99959	9.99959
	9.92739	9.92739
$\log \sin c$	9.90810	9.89282
$\log \sin C$	9.98071	9.96543
	9.92739	9.92739

64. 賴特氏解法　賴氏類似式。前已詳述之矣。都凡四式。於解兩意三角形。最稱便利。因上節所求之B既有兩值。則合已知之三項。可成兩個三角形。第一三角形之C_1與c_1可用

$$\tan^2(45°-s'')=\cot(s-s')\tan(s+s')\tan(d-d')\tan(d+d')$$

$$\tan^2(45°-d'')=\tan(s-s')\tan(s+s')\cot(d-d')\tan(d+d')$$

兩式求之。第二三角形之 C_2 與 c_2。可用第三第四兩式求之。惟第二三角形之 B 爲 $180°-B$ 與原設之條件不合。故宜改之如下。

命 $180°-B+b=4s'$

$180°-B-b=4d'$

則 $45°-\frac{1}{4}(B-b)=s'$

$45°-\frac{1}{4}(B+b)=d'$

卽 $45°-d'=s'$

$45°-s'=d'$

代入原第三第四兩式。幷命 d'' 爲 d''_0, s'' 爲 s''_0 以示別。則得

$$\tan^2 d_0''=\tan(s'-s)\tan(45°-s+\overline{45°-s'})\tan(d'-d)\tan(d'+d)$$

$$=\tan(s-s')\cot(s+s')\tan(d-d')\tan(d+d') \quad \cdots\cdots(54)$$

$$\tan^2 s_0''=\tan(s'-s)\tan(s'+s)\tan(d'-d)\tan(45°-d+\overline{45°-d'})$$

$$=\tan(s-s')\tan(s+s')\tan(d-d')\cot(d+d') \quad \cdots\cdots(55)$$

茲將應用公式彙錄於下。藉覘此法之優點。幷將原設例題。用賴氏之法演之。以資比較。

$$\tan^2(45°-s'')=\cot(s-s')\tan(s+s')\tan(d-d')\tan(d+d')$$

$$\tan^2(45°-d'')=\tan(s-s')\tan(s+s')\cot(d-d')\tan(d+d')$$

$$\tan^2 s_0'' = \tan(s-s')\tan(s+s')\tan(d-d')\cot(d+d')$$

$$\tan^2 d_0'' = \tan(s-s')\cot(s+s')\tan(d-d')\tan(d+d')$$

A	33°	54′	2″	B	87°	31′	32″
a	28	9	28	b	57	41	56
s	15	30	52·5	s'	36	18	22
d	1	26	8·5	d'	7	27	24

$s-s'$	−20°	47′	30″
$s+s'$	51	49	14
$d-d'$	− 6	1	16
$d+d'$	8	53	32

log cot $(s-s')$	10·42056n	log tan $(s-s')$	9·57944n
log tan $(s+s')$	10·10439	log tan $(s+s')$	10·10439
log tan $(d-d')$	9·02315n	log tan $(d-d')$	9·02315n
log tan $(d+d')$	9·19439	log cot $(d+d')$	10·80561
log tan²$(45°-s'')$	18·74249	log tan² s_0''	19·51259
log tan $(45°-s'')$	9·371245	log tan s_0''	9·756295

log tan $(s-s')$	9·57944n	log tan $(s-s')$	9·57944n
log tan $(s+s')$	10·10439	log cot $(s+s')$	9·89561
log cot $(d-d')$	10·97685n	log tan $(d-d')$	9·02315n
log tan $(d+d')$	9·19439	log tan $(d+d')$	9·19439
log tan²$(45°-d'')$	19·85507	log tan² d_0''	17·69259

$\log\tan(45°-d'')$	9·927535			$\log\tan d_0''$	8·846295		
$45°-s''$	13°	13′	47″				
$45-d''$	40	14	31				
s''	31	46	13	s_0''	29°	42′	25″
d''	4	45	26	d_0''	4	0	55
$\frac{1}{2}(C_1+c_1)=2s''$	63	32	26	$\frac{1}{2}(C_2+c_2)=2s_0''$	59	24	50
$\frac{1}{2}(C_1-c_1)=2d''$	9	30	58	$\frac{1}{2}(C_2-c_2)=2d_0''$	8	1	50
C_1	73	3	24	C_2	67	26	40
c_1	54	1	28	c_2	51	23	0

65. 上兩節例題得數之不密合。非納白爾類似式，與賴特類似式，有疎密之分。乃由五位對數删節太多所致。而尤以第一法求B所用之新公式。爲致誤之最大原因。此式之右邊爲兩項相加。而本題之兩項適正負相反。且數值略等。相減之後。僅餘·00022。故所求得之B不能精密。玆用七位對數表。將兩法覆演之。藉示精密之程度。

求B角

a	28°	9′	28″				
b	57	41	56	A	33°	54′	2
$\frac{1}{2}(a+b)$	42	55	42	$\frac{1}{2}$A	16	57	1
$\frac{1}{2}(a-b)$	−14	46	14	$45°-\frac{1}{2}$A	28	2	59

$\log\cos\frac{1}{2}(a+b)$	9.864 6334	$\log\sin b$	9.926 9859
$\log\sin\frac{1}{2}(a-b)$	9.406 4531n	$\log\sin^2(45°-\frac{1}{2}A)$	9.343 6347
$\log(1)$	9.271 0865n	$\log(2)$	9.271 6206

(1)	—.1866752
(2)	.1869049
(1)+(2)	.0002297
$\log\{(1)+(2)\}$	6.361 1610
$\log\csc a$	10.326 1490
$\log\sin^2(45°-\frac{1}{2}B)$	16.688 3100
$\log\sin(45°-\frac{1}{2}B)$	8.343 6550
$45°-\frac{1}{2}B$	1° 15′ 51.″1
$\frac{1}{2}B$	43 44 8.9
B	87° 28′ 17″.8 或92° 31′ 42.″2

納白爾氏解法

A	33° 54′ 2″	33° 54′ 2″
B	87 28 17.8	92 31 42.2
$\frac{1}{2}(A+B)$	60 41 0.9	63 12 52.1
$\frac{1}{2}(A-B)$	—26 47 7.9	—29 18 50.1
$\log\sin\frac{1}{2}(a-b)$	9.406 4531n	9.406 4631n
$\log\csc\frac{1}{2}(a+b)$	10.166 8000	10.166 8000
$\log\cot\frac{1}{2}(A-B)$	10.296 8640n	10.250 6555n
$\log\tan\frac{1}{2}C$	9.870 1171	9.823 9086

$\frac{1}{2}$C	36° 33′ 26.″3	33° 41′ 24.″2
C	73 6 52.6	67 22 48.4
$\log\sin\frac{1}{2}(A+B)$	9.940 4918	9.950 7053
$\log\csc\frac{1}{2}(A-B)$	10.346 1587n	10.310 1637n
$\log\tan\frac{1}{2}(a-b)$	9.421 0471n	9.421 0471n
$\log\tan\frac{1}{2}c$	9.707 6976	9.681 9161
$\frac{1}{2}c$	27° 1′ 42.″2	25° 40′ 32.″7
c	54 3 24.4	51 21 5.4

賴特氏解法

A	33° 24′ 2″	B	87° 28′ 17.″8
a	28 9 28	b	57 41 56
s	15 30 52.5	s'	36 17 33.45
d	1 26 8.5	d'	7 26 35.45

$s-s'$	−20° 46′ 40.″95
$s+s'$	51 48 25. 95
$d-d'$	−6 0 26. 95
$d+d'$	8 52 43. 95

$\log\cot(s-s')$	10.420 8731n	$\log\tan(s-s')$	9.579 1269n
$\log\tan(s+s')$	10.104 1805	$\log\tan(s+s')$	10.104 1805
$\log\tan(d-d')$	9.022 1657n	$\log\tan(d-d')$	9.022 1657n
$\log\tan(d+d')$	9.193 7313	$\log\cot(d+d')$	10.806 2687
$\log\tan^2(45°-s'')$	18.740 9506	$\log\tan^2 s_0''$	19.511 7418
$\log\tan(45°-s'')$	9.370 4753	$\log\tan s_0''$	9.755 8709

$\log\tan(s-s')$	9.579 1269n	$\log\tan(s-s')$	9.579 1269n
$\log\tan(s+s')$	10.104 1805	$\log\cot(s+s')$	9.895 8195
$\log\cot(d-d')$	10.977 8343n	$\log\tan(d-d')$	9.022 1657n
$\log\tan(d+d')$	9.193 7313	$\log\tan(d+d')$	9.193 7313
$\log\tan^2(45^\circ-d'')$	19.854 8730	$\log\tan^2 d_0''$	17.690 8434
$\log\tan(45^\circ-d'')$	9.927 4365	$\log\tan d_0''$	8.845 4217
$45^\circ-s''$	13° 12′ 25.″75		
$45^\circ-d''$	40 14 7. 80		
s''	31 47 34.25	s_0''	29° 40′ 58″ .49
d''	4 45 52.20	d_0''	4 0 25 .70
$\frac{1}{2}(C_1+c_1)=2s''$	63 35 8.5	$\frac{1}{2}(C_2+c_2)=2s^{0''}$	59 21 57 .0
$\frac{1}{2}(C_1-c_1)=2d''$	9 31 44.4	$\frac{1}{2}(C_2-c_2)=2d_0''$	8 0 51 .5
C_1	73 6 52.9	C_2	67 22 48 .5
c_1	54 3 24.1	c_2	51 21 5 .5

以上兩法之得數。相差在十分秒之一,二之間。於此可見兩氏立法之精。而七位對數密於五位對數多多矣。

習　題

試解下列各弧三角形。1. 至 6. 用納白爾氏解法。7. 至 12. 用賴特氏解法:—

1.	$a=75°$,	$b=110°$,	$A=85°$
2.	$a=73\ 49'\ 38''$,	$b=120\ 53'\ 35''$,	$B=116\ 42'\ 30''$
3.	$b=80$,	$c=115$,	$B=95$
4.	$b=69\ 12\ 40$,	$c=50\ 45\ 20$,	$C=44\ 22\ 10$
5.	$c=95$,	$a=120$,	$C=97$
6.	$c=31\ 9\ 16$,	$a=30\ 52\ 37$,	$A=87\ 34\ 12$
7.	$a=79\ 0\ 54$,	$b=82\ 17\ 4$,	$A=82\ 9\ 26$
8.	$a=138\ 4\ 0$,	$b=109\ 41\ 0$,	$B=120\ 15\ 57$
9.	$b=150\ 57\ 5$,	$c=134\ 15\ 54$,	$B=144\ 22\ 42$
10.	$b=70\ 40\ 0$,	$c=40\ 20\ 0$,	$C=40\ 0\ 0$
11.	$c=90\ 0\ 0$,	$a=127\ 17\ 51$,	$C=109\ 40\ 20$
12.	$c=60\ 4\ 54$,	$a=135\ 49\ 20$,	$A=129\ 5\ 28$

66. 已知兩角及對邊之一　卽由 A, B, a 求 b, c, C 也。此項三角形解法。與由 a, b, A 求 B, C, c 者。大致相似。卽先求 b 邊。次求 C 與 c。

求 b 亦用正弦定則公式

$$\sin b=\frac{\sin B\sin a}{\sin A}$$

倘 b 近於 $90°$。由 $\sin b$ 無法查取準確度數。則改用下之公式求之。

$$\sin B\sin^2(45°-\tfrac{1}{2}b)=\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(A-B)$$
$$+\sin B\sin^2(45°-\tfrac{1}{2}a)\cdots\cdots(56)$$

若b之兩值同大於或同小於a。則此三角形亦有兩意。宜分別解之。

求C與c。亦用納白爾類似式，或賴特類似式。惟上節所改之賴特類似式。不適用於本節三角形。因上節之兩意在B。而本節之兩意在b也。宜將上節公式先施於極三角形。用雙關原則。轉為本節三角形之公式。即命

$$180^\circ-a+180^\circ-A=4s,\qquad 180^\circ-b+180^\circ-B=4s',$$

$$180^\circ-c+180^\circ-C=4s''$$

$$180^\circ-a-180^\circ+A=4d,\qquad 180^\circ-b-180^\circ+B=4d',$$

$$180^\circ-c-180^\circ+C=4d''$$

則原式中之s, s', s''均須以$90^\circ-s, 90^\circ-s', 90^\circ-s''$代之。故上節之公式化為

$$\left.\begin{aligned}
\tan^2(s''-45^\circ)&=\cot(s-s')\tan(s+s')\tan(d-d')\tan(d+d')\\
\tan^2(45^\circ-d'')&=\tan(s-s')\tan(s+s')\cot(d-d')\tan(d+d')\\
\tan^2(90^\circ-s_o'')&=\tan(s-s')\tan(s+s')\tan(d-d')\cot(d+d')\\
\tan^2 d_o''\quad&=\tan(s-s')\cot(s+s')\tan(d-d')\tan(d+d')
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(57)$$

方為本節三角形解法應用之公式。

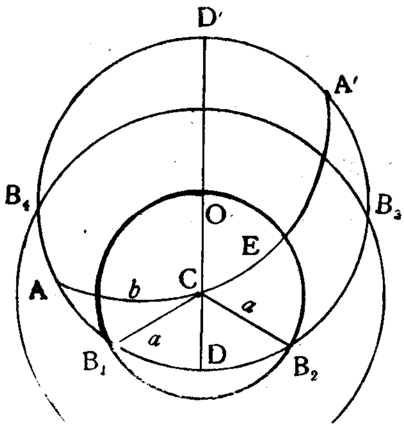
習　題

試解下列各弧三角形。1. 至 5. 用納白爾氏解法。6.

至 10. 用賴特氏解法：—

1.	A=108° 40′,	B=134° 20′,	a=145° 36′
2.	B=116,	C= 80,	c= 84
3.	A=132,	B=140,	b=127
4.	A=133 50,	B= 66 30,	a= 81 10
5.	A= 62,	C=102,	a= 64 30
6.	B= 22 20,	C=146 40,	c=138 20
7.	A= 61 40,	C=140 20,	c=150 20
8.	B= 73,	C= 81 20,	b=122 40
9.	B= 36 20,	C= 46 30,	b= 42 12
10.	A=110 10,	B=133 18,	a=147 6

67.　兩意總論　第63節所論之三角形。即由兩邊及對角之一，而求全解者。嘗含有兩意。今將詳論已知數之性質。俾一覽之下。即可預知此三角形將有兩解，或一解，或無解。



研究此項三角形。最好用幾何圖形表示之。因已知者爲 $a, b,$ A。可

先繪一大圓ADA′D′，爲A角之一邊。在圓周上任擇一點A，爲角之頂。次繪大圓 AEA′。使與前圓所交之角等於A。並由周上截AC弧等於b。則A與C爲三角形之兩角頂。其第三角頂B當然居ADA′D′圓周之上。今所欲知者。乃其準確之地位耳。

B與C居間之弧，卽是a邊。若以C爲中心，a爲弧輻，作一小圓。則B必居小圓之周。而B亦必居大圓ADA′D′之周。故B必居大圓小圓之交點。

若小圓不與大圓遇。則三角形不能成立。但小圓不遇大圓之理。必其半徑小於C點至大圓周之最近距。或大於最遠距。而C點之最近最遠距。乃通過C點及ADA′D′之極O之大圓周DCOD′。若C居O與D之間。則CD爲最近距。CD′爲最遠距。而DCOD′旣通過ADA′D′之極。必垂其周。卽在D與D′之角皆爲直角。故由三角形ACD，可得$\sin CD=\sin b \sin A$。而$\sin CD'$亦等於$\sin b \sin A$。若a小於最近距，或大於最遠距。卽凡$\sin a<\sin b \sin A$，此三角形皆不能成立。卽無解也。

若小圓遇大圓於$B_1, B_2, \cdots\cdots$等點。則三角形$AB_1C, AB_2C, \cdots\cdots$或能成立。或不能成立。須視$AB_1, AB_2, \cdots\cdots$等弧或大於或小於半圓周。因準第14節之規定。三角形之各邊。皆各小於兩直角也。如上圖。若A爲銳角。居AEA′, ADA′兩弧之間。則B必居ADA′弧上。故B_1, B_2, 皆適合第14節之規定。即此三角形有兩解。若A爲鈍角。居AEA′,AD′A′兩弧之間。則B必居AD′A′弧上。故只有B_4能適合第14節之規定。B_3居AD′A′弧之外。大於半圓周。即此三角形只有一解。

若B點與A點合。則三角形消滅。或與A′點合。則三角形成爲瓜瓣形。皆不能有解。若B與D合。即A爲銳角時,a等於CD。或與D′合。即A爲鈍角時,a等於CD′。則各有一解。若小圓與大圓合。即C居於O。a等於一象限。則此三角形無定解。亦可云無量數之解。

準以上各圖說。則此項三角形之有解無解,或一解兩解。可由圖一覽得之。茲將上圖再爲擴充。即以C爲中心,a之各值爲弧輻,作諸小圓。並以1,2,3,4,5,6,7,8,9名之。以備引用。凡言a大於或等於或小於CD者。皆謂$\sin a$大於或等於或小於$\sin b \sin A$也。但對於CD′。則大小兩字相反。

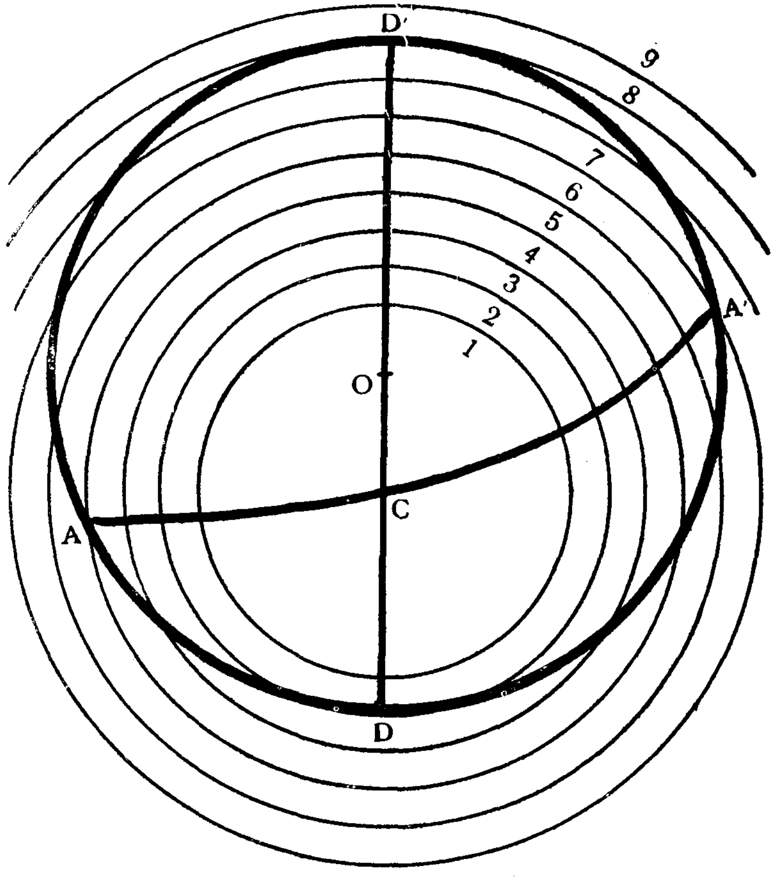
(甲)　命$b<90°$

(1)　若$A<90°$。則B之位置。必限於ADA′弧上。故

1　$a<CD$……無解

2　$a=CD$……一解

3　$a>CD$且$<b$……兩解



4　$a=b$……………………………………一解

5　$a>b$ 且 $<180°-b$……………………………一解

6　$a=180°-b$………………………………無解

7　$a>180°-b$………………………………無解

8　同　上…………………………………同上

9　同　上……………………………………………………同　上

(2)　若 A=90°。則 A 移居 D。CD $=b$。故 B 之位置。或在 DA′D′ 半周。或在 DAD′ 半周。但不能同居兩旁。因位置左右對稱。只能認作一個三角形。

1　$a<b$……………………………………………………無解

2　$a=b$……………………………………………………無解

3　$a>b$ 且 $<180°-b$………………………………………一解

4　同　上……………………………………………………同上

5　同　上……………………………………………………同上

6　同　上……………………………………………………同上

7　同　上……………………………………………………同上

8　$a=180°-b$………………………………………………無解

9　$a>180°-b$………………………………………………無解

(3)　若 A>90°。則 B 之位置。必在 AD′A′ 半周上。故

1　$a<b$……………………………………………………無解

2　同　上……………………………………………………同上

3　同　上……………………………………………………同上

4　$a=b$……………………………………………………無解

5　$a>b$ 且 $<180°-b$………………………………………一解

6　$a=180°-b$………………………………………………一解

7　$a>180°-b$ 且 $<CD'$……………………………………兩解

8 $a=CD'$……………………………………一解

9 $a>CD'$……………………………………無解

(乙) 命 $b=90°$。在圖形上。CA 弧應等於 CA′ 弧。大圓之標以 4, 5, 6 者。應合而為一。A 如為銳角，應等於 CD。如為鈍角，應等於 CD′。

(1) 若 $A<90°$, 則

1 $a<A$ ……………………………………無解

2 $a=A$ ……………………………………一解

3 $a>A$ 且 $<90°$ ……………………………兩解

4, 5, 6 $a=90°$ ……………………………無解

7, 8, 9 $a>90°$ ……………………………無解

(2) 若 $A=90°$。則 C 與 O 合。大圓之標以 2,3,4,5,6,7,8 者。皆與 ADA′D′ 圓周合。故

1 $a<90°$……………………………………無解

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 $a=90°$ ……………無定解

9 $a>90°$……………………………………無解

(3) 若 $A>90°$, 則

1, 2, 3 $a<90°$ ……………………………無解

4, 5, 6 $a=90°$ ……………………………無解

7 $a<A$ 且 $>90°$……………………………兩解

8 $a=A$ ……………………………………一解

9　$a>A$ ……………………………………無解

(丙)　命 $b>90°$。則 A′ 爲 A 角之頂。A′C 爲 b 邊。故此項三角形。洽爲(甲)類三角形之瓣餘三角形。

(1)　若 $A<90°$, 則

1　$a<CD$ ……………………………………無解

2　$a=CD$ ……………………………………一解

3　$a>CD$ 且 $<180°-b$ ……………………………………兩解

4　$a=180°-b$ ……………………………………一解

5　$a>180°-b$ 且 $<b$ ……………………………………一解

6　$a=b$ ……………………………………無解

7, 8, 9　$a>b$ ……………………………………無解

(2)　若 $A=90°$, 則

1　$a<180°-b$ ……………………………………無解

2　$a=180°-b$ ……………………………………無解

3, 4, 5, 6, 7　$a>180°-b$ 且 $<b$ ……………………………………一解

8　$a=b$ ……………………………………無解

9　$a>b$ ……………………………………無解

(3)　若 $A>90°$, 則

1, 2, 3　$a<180°-b$ ……………………………………無解

4　$a=180°-b$ ……………………………………無解

5　$a>180°-b$ 且 $<b$ ……………………………………一解

6　$a=b$ ………………………………………………一解

7　$a>b$ 且 $<\mathrm{CD}'$ ………………………………………兩解

8　$a=\mathrm{CD}'$ ………………………………………………一解

9　$a>\mathrm{CD}'$ ………………………………………………無解

68. 提要　玆將上節所得結果。彙爲簡表於下。俾便檢查。

$$
b<90^\circ\begin{cases}
A<90^\circ\begin{cases}
a=\text{或}>180^\circ-b,\ \sin a<\sin b\sin A & \text{無解}\\
a=b,>b\text{且}<180^\circ-b,\sin a=\sin b\sin A & \text{一解}\\
a<b\text{ 且}\sin a>\sin b\sin A & \text{兩解}
\end{cases}\\
A=90^\circ\begin{cases}
a<\text{或}=b,\ =\text{或}>180^\circ-b & \text{無解}\\
a>b\text{且}<180^\circ-b & \text{一解}
\end{cases}\\
A>90^\circ\begin{cases}
a<\text{或}=b,\sin a<\sin b\sin A & \text{無解}\\
a=180^\circ-b,>b\text{且}<180^\circ-b,\sin a=\sin b\sin A & \text{一解}\\
a>180^\circ-b\text{且}\sin a>\sin b\sin A & \text{兩解}
\end{cases}
\end{cases}
$$

$$
b=90^\circ\begin{cases}
A<90^\circ\begin{cases}
a<A,=\text{或}>90^\circ & \text{無解}\\
a=A & \text{一解}\\
a>A\text{且}<90^\circ & \text{兩解}
\end{cases}\\
A=90^\circ\begin{cases}
a<\text{或}>90^\circ & \text{無解}\\
a=90^\circ & \text{無定解}
\end{cases}\\
A>90^\circ\begin{cases}
a>A,<\text{或}=90^\circ & \text{無解}\\
a=A & \text{一解}\\
a<A\text{且}>90^\circ & \text{兩解}
\end{cases}
\end{cases}
$$

$$
b>90^\circ\begin{cases}
A<90^\circ\begin{cases}
a=\text{或}>b,\ \sin a<\sin b\sin A & \text{無解}\\
a=180^\circ-b,\ <b\text{且}>180^\circ-b,\ \sin a=\sin b\sin A & \text{一解}\\
a<180^\circ-b\text{且}\sin a>\sin b\sin A & \text{兩解}
\end{cases}\\
A=90^\circ\begin{cases}
a=\text{或}>b,\ <\text{或}=180^\circ-b & \text{無解}\\
a<b\text{且}>180^\circ-b & \text{一解}
\end{cases}\\
A>90^\circ\begin{cases}
a<\text{或}=180^\circ-b,\ \sin a<\sin b\sin A & \text{無解}\\
a=b,\ <b\text{且}>180^\circ-b,\ \sin a=\sin b\sin A & \text{一解}\\
a>b\text{且}\sin a>\sin b\sin A & \text{兩解}
\end{cases}
\end{cases}
$$

96. 續論　第66節所論之三角形。卽由兩角,及對邊之一,而求全解者。亦含有兩意。但凡三角形之有解無解,或一解兩解。其極三角形亦如之。故由兩邊及對角之極三角形。可用雙關原則。轉求兩角及對邊之一之原三角形。玆本此意。作第66節三角形之簡表於下。以備檢查之用。

$$
B<90^\circ\begin{cases}
a<90^\circ\begin{cases}
A=\text{或}>180^\circ-B,\ \sin A<\sin B\sin a & \text{無解}\\
A=B,\ >B\text{且}<180^\circ-B,\ \sin A=\sin B\sin a & \text{一解}\\
A<B\text{且}\sin A>\sin B\sin a & \text{兩解}
\end{cases}\\
a=90^\circ\begin{cases}
A<\text{或}=B,\ =\text{或}>180^\circ-B & \text{無解}\\
A>B\text{且}<180^\circ-B & \text{一解}
\end{cases}\\
a>90^\circ\begin{cases}
A<\text{或}=B,\ \sin A<\sin B\sin a & \text{無解}\\
A=180^\circ-B,\ >B\text{且}<180^\circ-B,\ \sin A=\sin B\sin a & \text{一解}\\
A>180^\circ-B\text{且}\sin A>\sin B\sin a & \text{兩解}
\end{cases}
\end{cases}
$$

$$
B=90^\circ\begin{cases}
a<90^\circ\begin{cases}
A<a,=\text{或}>90^\circ & \text{無解}\\
A=a & \text{一解}\\
A>a\text{且}<90^\circ & \text{兩解}
\end{cases}\\
a=90^\circ\begin{cases}
A<\text{或}>90^\circ & \text{無解}\\
A=90^\circ & \text{無定解}
\end{cases}\\
a>90^\circ\begin{cases}
A>a,<\text{或}=90^\circ & \text{無解}\\
A=a & \text{一解}\\
A<a\text{且}>90^\circ & \text{兩解}
\end{cases}
\end{cases}
$$

$$
B>90^\circ\begin{cases}
a<90^\circ\begin{cases}
A=\text{或}>B,\ \sin A<\sin B\sin a & \text{無解}\\
A=180^\circ-B,<B\text{且}>180^\circ-B,\sin A=\sin B\sin a & \text{一解}\\
A<180^\circ-B\text{ 且 }\sin A>\sin B\sin a & \text{兩解}
\end{cases}\\
a=90^\circ\begin{cases}
A=\text{或}>B,<\text{或}=180^\circ-B & \text{無解}\\
A<B\text{且}>180^\circ-B & \text{一解}
\end{cases}\\
a>90^\circ\begin{cases}
A<\text{或}=180^\circ-B,\ \sin A<\sin B\sin a & \text{無解}\\
A=B,<B\text{且}>180^\circ-B,\ \sin A=\sin B\sin a & \text{一解}\\
A>B\text{且}\sin A>\sin B\sin a & \text{兩解}
\end{cases}
\end{cases}
$$

雜題二

1. 試先證 $\tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}B=\sin(s-c)/\sin s$。次解下列兩三角形:—

(1) 已知一邊,一接角,及他兩邊之和。

(2) 已知兩角及周邊。

2. 已知三角形之一邊,一接角,及他兩角之和,試

求其解法。

3. 若已知兩角之和,及兩角所對之邊。問此三角形應如何解之。

4. 設三角形兩邊之和,等於半圓周。試求夾角頂至對邊中點之距弧。

5. 已知三角形之三邊。若有一邊等於$\frac{\pi}{2}$。試求各角。

6. 三角形之c邊爲象限弧。若從C作大圓弧δ直垂此邊。試證

$$\cos^2\delta=\cos^2 a+\cos^2 b$$

7. 三角形之一邊分作四等分。若命各分所對之頂角爲$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$,試證

$$\sin(\theta_1+\theta_2)\sin\theta_2\sin\theta_4=\sin(\theta_3+\theta_4)\sin\theta_1\sin\theta_3$$

8. 若三角形有A=B=2C之情形。試證

$$8\sin\left(a+\frac{c}{2}\right)\sin^2\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}=\sin^3 a$$

9. 某三角形之A角,等於B角,又等於C角之兩倍。試證

$$8\sin^2\tfrac{1}{2}C(\cos s+\sin\tfrac{1}{2}C)\cos\tfrac{1}{2}c=\cos a$$

10. ABC爲等腰弧三角形。若平分AB, AC,兩腰於D與E。試證

$$\sin\frac{DE}{2}=\frac{1}{2}\sin\frac{BC}{2}\sec\frac{AC}{2}$$

11. 三角形之由 a, b, A 求解者。多含有兩意。若命 c_1, c_2, 爲第三邊之兩值。試證

$$\tan\frac{1}{2}c_1\tan\frac{1}{2}c_2=\tan\frac{1}{2}(b-a)\tan\frac{1}{2}(b+a)$$

12. 從球面上一點P,作大圓弧PAB,遇小圓周於A與B。試證自P至小圓周各半弧分正切之積,爲不變之數。若從P作小圓之切弧PC。試再證此半弧正切之平方,等於各半弧分正切之積。

13. 有三角形ABC。從各角頂向對邊作垂弧AD, BE, CF, 相交於O。試證

$$(1)\quad \frac{\tan AD}{\tan OD}=1+\frac{\cos A}{\cos B\cos C}$$

$$(2)\quad \frac{\tan BE}{\tan OE}=1+\frac{\cos B}{\cos A\cos C}$$

$$(3)\quad \frac{\tan CF}{\tan OF}=1+\frac{\cos C}{\cos A\cos B}$$

14. 有球面四邊形ABCD。引長兩對邊,使交於E與F。作EG, EH, FL, FM諸弧,直垂對角綫AC, BD。試證

$$\frac{\sin EG}{\sin EH}=\frac{\sin FL}{\sin FM}$$

15. 球面上有四邊形ABCD。引長AB, DC, 兩對邊

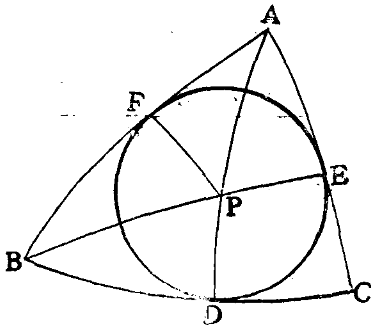
使交於P; BC, AD兩對邊使交於Q。又AC, BD兩對角綫相交於R。試證

$$\sin AB \sin CD \cos P - \sin AD \sin BC \cos Q = \sin AC \sin BD \cos R$$

第七章

內切圓與外接圓

70. 內切圓　三角形內之小圓與三邊相切者。謂之內切圓。如下圖。ABC為三角形。平分A, B兩角之弧



相遇於P。由P作PD, PE, PF諸弧直垂各邊。則三角形PEA, PFA, 有E, F兩角為直角。A頂兩角相等。AP為公邊。故兩形相等。又三角形PFB, PDB亦相等。因得PE=PF=PD。

若從P, C兩點間作大圓弧。則三角形PCD, PCE有D, E兩角為直角。PC為公邊。PD等於PE。故兩形相等。卽PC亦平分C角。

然則三角之平分線，相遇於公點P。而由此點所作各垂線又復相等。故以P為中心，PD, PE, 或PF為弧

幅,作小圓。必切各邊。卽三角形之內切圓也。

今命內切圓之弧幅爲r。因 AE=AF, BF=BD, CD=CE,則BC+AF爲半周邊。卽半邊公式之s也。故AF=$s-a$。

由△APF,得 tan PF=tan PAF sin AF

卽 $\tan r=\tan\frac{1}{2}A\sin(s-a)$ ……(58)

但 $\tan\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}$

$$\therefore\quad \tan r=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}\times\sin(s-a)$$

$$=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$$

然則第57節所設之r角。卽內切圓之弧幅也。但第51節又設

$$n^2=\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)$$

故 tan r 之簡式爲 $\tan r=\frac{n}{\sin s}$ ……(59)

又 $\sin(s-a)=\frac{\tan r\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}A}$

$$=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\times\frac{1}{\sin\frac{1}{2}A}$$

$$=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}\times\frac{\sin a}{\sin\frac{1}{2}A}$$

$$=\frac{\sin a\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A}$$

$$\therefore \quad \tan r = \frac{\sin\frac{1}{2}A \sin a \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}A}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}\sin a \quad \cdots\cdots\cdots (60)$$

但依第51節公式

$$\sin a = \frac{2}{\sin B \sin C}\sqrt{-\cos S \cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}$$

$$= \frac{2}{2\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}B \cdot 2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}N$$

$$\therefore \quad \tan r = \frac{N}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C} \quad \cdots\cdots\cdots (61)$$

又 $4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C = 2\cos\frac{1}{2}A \cdot 2\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C$

$$= 2\cos\frac{1}{2}A\left[\cos\frac{1}{2}(B+C)+\cos\frac{1}{2}(C-B)\right]$$

$$= 2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(B+C)+2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(C-B)$$

$$= \cos\left(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}C\right)+\cos\left(\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{2}A\right)$$

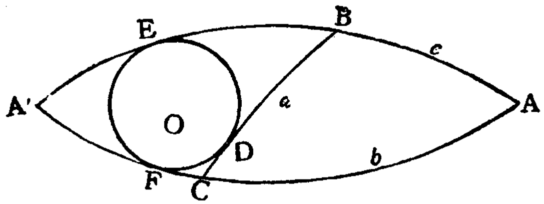
$$+\cos\left(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{2}B\right)+\cos\left(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{2}C\right)$$

$$= \cos S+\cos(S-A)+\cos(S-B)+\cos(S-C)$$

$$\therefore \quad \cot r = \frac{1}{2N}\left[\cos S+\cos(S-A)+\cos(S-B)+\cos(S-C)\right] \cdots (62)$$

以上(58), (59), (60), (61), (62), 皆爲求內切圓弧幅之公式。可見凡已知三邊及一角,或三角及一邊,乃至僅知三邊或三角,皆可求其弧幅也。

71. 傍切圓　三角形外之小圓,外切一邊,及內切餘兩邊之引長者。謂之傍切圓。如下圖。ABC 爲三角形。



引長 AB, AC 兩邊。作小圓 O。切 BC 於 D。切 AB, AC 兩引長邊於 E 與 F。則小圓 DEF 卽原三角形之傍切圓。

AB, AC 兩邊引長。相遇於 A′。成瓜瓣形。則 A′BC 爲瓣餘三角形。故此小圓對於 ABC 爲傍切圓。對於 A′BC 則爲內切圓。可適用上節所立各公式。以求其弧幅。惟瓣餘三角形之 A′ 角。雖等於 A 角。其 A′BC 角則等於 $\pi-B$, A′CB 角等於 $\pi-C$。又 BC 邊雖等於 a, A′B 邊則等於 $\pi-c$, A′C 邊等於 $\pi-b$。將以上各值代入原公式。並以 r_1 表傍切圓之弧幅。則

$$\tan r_1=\tan\tfrac{1}{2}A\sin s \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (63)$$

$$\tan r_1=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin(s-a)}}\sqrt{\frac{\sin(s-a)}{\sin(s-a)}}$$

$$=\frac{n}{\sin(s-a)} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (64)$$

$$\tan r_1=\frac{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}\sin a \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (65)$$

$$\tan r_1=\frac{\sqrt{\{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)\}}}{2\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}$$

$$=\frac{N}{2\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}\cdots\cdots(66)$$

$$\cot r_1=\frac{1}{2N}\{-\cos S-\cos(S-A)+\cos(S-B)+\cos(S-C)\}\cdots(67)$$

72. 本書第十六節云。由每個弧三角形可作三個聯餘三角形。然則每個三角形皆有三個傍切圓。上節所論之傍切圓。乃外切 a 邊者。若命外切 b 邊之弧幅爲 r_2, 外切 c 邊之弧幅爲 r_3, 則細察 $\tan r_1$ 各公式之字母。分別調換。可得 $\tan r_2$, $\tan r_3$ 各公式如下。

$$\tan r_2=\tan\tfrac{1}{2}B\sin s\cdots\cdots(68)$$

$$\tan r_2=\frac{n}{\sin(s-b)}\cdots\cdots(69)$$

$$\tan r_2=\frac{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}B}\sin b\cdots\cdots(70)$$

$$\tan r_2=\frac{N}{2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}\cdots\cdots(71)$$

$$\cot r_2=\frac{1}{2N}\{-\cos S+\cos(S-A)-\cos(S-B)+\cos(S-C)\}\cdots(72)$$

$$\tan r_3=\tan\tfrac{1}{2}C\sin s\cdots\cdots(73)$$

$$\tan r_3=\frac{n}{\sin(s-c)}\cdots\cdots(74)$$

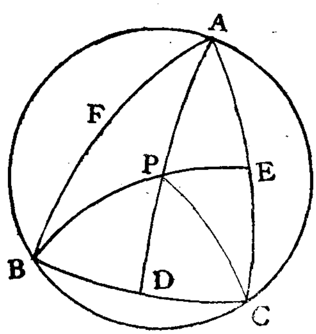
$$\tan r_3 = \frac{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C}\sin c \quad\cdots\cdots(75)$$

$$\tan r_3 = \frac{N}{2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C} \quad\cdots\cdots(76)$$

$$\cot r_3 = \frac{1}{2N}\{-\cos S+\cos(S-A)+\cos(S-B)-\cos(S-C)\}\cdots(77)$$

原三角形,及其三個瓣餘三角形,嘗稱爲聯合三角形.故原三角形之諸傍切圓,皆爲瓣餘三角形之內切圓.而原三角形之內切圓,又爲瓣餘三角形之傍切圓。卽原三角形之內切圓與傍切圓,皆爲聯合三角形之內切圓。

73. 外接圓 三角形外之小圓,通過三角之頂點者.謂之外接圓。如下圖。ABC爲三角形。平分CB, CA兩



邊於D與E。從D, E作垂弧相遇於P。連PA, PB, PC諸弧。則三角形PEA, PEC, 有EA, EC兩邊相等。PE爲公

邊。E 點兩角爲直角。故兩形相等。又三角形 PDB, PDC 亦相等。因得 PA=PC=PB。

若平分 AB 於 F。則三角形 PFA, PFB, 有 AF, AP, PF 等於 BF, BP, PF。故兩形相等。卽PF 直垂 AB,

然則三邊之中點垂線,相遇於公點 P。距各角頂等遠。故以 P 爲中心, PA, PB 或 PC 爲弧輻,作小圓。必通過諸角頂。卽三角形之外接圓也。

今命外接圓之弧輻爲 R。因$\angle$PBC$=\angle$PCB, $\angle$PCA $=\angle$PAC, $\angle$PAB $=\angle$PBA, 故$\angle$PCB $+$A $=\frac{1}{2}$(A+B+C)=S, 則$\angle$PCB=S－A。

由 $\triangle$ PCD, 得　$\tan CD=\tan CP\cos PCD$

卽　$\tan\frac{1}{2}a=\tan R\cos(S-A)$

故　$$\tan R=\frac{\tan\frac{1}{2}a}{\cos(S-A)}\qquad\cdots\cdots(78)$$

但　$\tan\frac{1}{2}a=\sqrt{\dfrac{-\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}}$,

故　$$\tan R=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}}\times\frac{1}{\cos(S-A)}$$

$$=\sqrt{\left\{\frac{-\cos S}{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}\right\}}$$

$$=\frac{-\cos S}{\sqrt{\{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)\}}}$$

然則第58節所設之 R 角。卽外接圓之弧輻也。又

$$N=\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}$$

故 tan R 之簡式爲

$$\tan R=-\frac{\cos S}{N}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(79)$$

又 $\cos(S-A)=\dfrac{\tan\frac{1}{2}a}{\tan R}$

$$=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}}\sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}{-\cos S}}$$

$$\times\sqrt{\frac{\sin B\sin C}{\sin A\sin B\sin A\sin C}}\times\sin A$$

$$=\frac{\sqrt{\dfrac{\cos(S-A)\cos(S-C)}{\sin A\sin C}}\sqrt{\dfrac{\cos(S-A)\cos(S-B)}{\sin A\sin B}}}{\sqrt{\dfrac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}}}\times\sin A$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a}\sin A$$

$$\therefore\quad\tan R=\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}a}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\sin A}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin A\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(80)$$

又 $\sin A=\dfrac{2}{\sin b\sin c}\sqrt{[\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)]}$

$$=\frac{2n}{2\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}b\cdot 2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}$$

$$\therefore\ \tan R=\frac{2\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}b.\ 2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}{2n}\times\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{n}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(81)$$

又 $4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c=2\sin\frac{1}{2}a\ .\ 2\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c$

$$=2\sin\tfrac{1}{2}a\left[\cos\tfrac{1}{2}(b-c)-\cos\tfrac{1}{2}(b+c)\right]$$

$$=2\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}(b-c)-2\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}(b+c)$$

$$=\sin\frac{a+b-c}{2}+\sin\frac{a-b+c}{2}-\sin\frac{b+c+a}{2}+\sin\frac{b+c-a}{2}$$

$$=\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)-\sin s$$

$$\therefore\ \tan R=\frac{1}{2n}\left[\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)-\sin s\right]\cdots\ (82)$$

74. 凡引長弧三角形之兩邊。可成一個瓣餘三角形。而每個三角形有三個瓣餘三角形。故各瓣餘三角形之外接圓。可用上節公式求之。惟因各瓣餘三角形之邊與角。與原三角形邊與角之關係不同。故宜分別規定。免滋誤會。今名引長AB, AC兩邊所成瓣餘三角形之外接圓弧幅爲R_1,引長BA, BC兩邊者爲R_2,引長CA,CB兩邊者爲R_3,則由上節公式。可推得以下各公式。

$$\tan R_1=\frac{\tan\frac{1}{2}a}{-\cos S}\cdots\cdots\cdots\cdots(83)$$

$$\tan R_1=\sqrt{\left\{\frac{\cos(S-A)}{-\cos S\cos(S-B)\cos(S-C)}\right\}}$$

$$=\frac{\cos(S-A)}{N}\cdots\cdots\cdots\cdots(84)$$

$$\tan R_1 = \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin A \sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}c} \cdots\cdots (85)$$

$$\tan R_1 = \frac{2\sin\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}c}{\sqrt{[\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)]}}$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}c}{n} \cdots\cdots (86)$$

$$\tan R_1 = \frac{1}{2n}[\sin s - \sin(s-a) + \sin(s-b) + \sin(s-c)] \cdots (87)$$

$$\tan R_2 = \frac{\tan\frac{1}{2}b}{-\cos S} \cdots\cdots (88)$$

$$\tan R_2 = \frac{\cos(S-B)}{N} \cdots\cdots (89)$$

$$\tan R_2 = \frac{\sin\frac{1}{2}b}{\sin B \sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}c} \cdots\cdots (90)$$

$$\tan R_2 = \frac{2\sin\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}c}{n} \cdots\cdots (91)$$

$$\tan R_2 = \frac{1}{2n}[\sin s + \sin(s-a) - \sin(s-b) + \sin(s-c)] \cdots (92)$$

$$\tan R_3 = \frac{\tan\frac{1}{2}c}{-\cos S} \cdots\cdots (93)$$

$$\tan R_3 = \frac{\cos(S-C)}{N} \cdots\cdots (94)$$

$$\tan R_3 = \frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin C \sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b} \cdots\cdots (95)$$

$$\tan R_3 = \frac{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}{n} \quad\cdots\cdots(96)$$

$$\tan R_3 = \frac{1}{2n}\{\sin s+\sin(s-a)+\sin(s-b)-\sin(s-c)\}\cdots(97)$$

75. 第70節論內切圓。已證明PD, PE, PF諸垂線皆相等。今若引長DP至A′。使DA′等於一象限。則A′爲BC之極。引長EP至B′。使EB′等於一象限,則B′爲AC之極。引長FP至C′。使FC′等於一象限。則C′爲AB之極。卽A′B′C′爲原三角形之極三角。而PA′=PB′=PC′。則P又爲極三角形外接圓之中心。卽原三角形之內切圓,與極三角形之外接圓,爲同心圓。其弧幅互爲餘角。

又第18節云。此形若爲彼形之極三角形。則彼形亦爲此形之極三角形。上段已證明原三角形之內切圓,與極三角形之外接圓,爲同心圓。今若先求極三角形內切圓之中心。亦可證明此心卽爲原三角形外接圓之中心。其弧幅亦互爲餘角。

習　題

試證下列各等式(1. 至 11.):—

1. $(\cot r + \tan R)^2 = \frac{1}{4n^2}(\sin a+\sin b+\sin c)^2-1$

2. $(\cot r_1 - \tan R)^2 = \frac{1}{4n^2}(\sin b+\sin c-\sin a)^2-1$

3. $\tan r_1 \tan r_2 \tan r_3 = \tan r \sin^2 s$

4. $\tan R_1 \tan R_2 \tan R_3 = \tan R \sec^2 S$

5. $\csc^2 r = \cot(s-b)\cot(s-c) + \cot(s-c)\cot(s-a) + \cot(s-a)\cot(s-b)$.

6. $\csc^2 r_1 = \cot(s-b)\cot(s-c) - \cot s \cot(s-b) - \cot s \cot(s-c)$.

7. $\tan R = \frac{1}{2}(\cot r_1 + \cot r_2 + \cot r_3 - \cot r)$

8. $\cot r = \frac{1}{2}(\tan R_1 + \tan R_2 + \tan R_3 - \tan R)$

9. $\tan R + \cot r = \tan R_1 + \cot r_1 = \tan R_2 + \cot r_2$

$$= \tan R_3 + \cot r_3$$

$$= \frac{1}{2}(\cot r + \cot r_1 + \cot r_2 + \cot r_3)$$

10. $\tan^2 R + \tan^2 R_1 + \tan^2 R_2 + \tan^2 R_3$

$$= \cot^2 r + \cot^2 r_1 + \cot^2 r_2 + \cot^2 r_3$$

11. $\dfrac{\tan r_1 + \tan r_2 + \tan r_3 - \tan r}{\cot r_1 + \cot r_2 + \cot r_3 - \cot r} = \frac{1}{2}(1 + \cos a + \cos b + \cos c)$

12. 試就等邊弧三角形，證明 $\tan R = 2 \tan r$。

13. 有等邊弧三角形ABC，其外接圓之極為P。若Q為三角形內之任一點。試證

$$\cos QA + \cos QB + \cos QC = 3 \cos PA \cos PQ$$

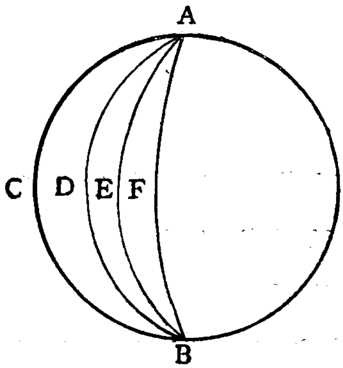
14. 試求弧三角形內切圓與外接圓之極距。

15. 試求弧三角形外接圓與傍切圓之極距。

第八章

面積與弧膾

76. 瓜瓣形之面積　瓜瓣形爲球面兩大圓所割之界。若各大圓經過同一之兩極。則各瓜瓣形面積之和。則爲球之全表面。而球之全表面得視爲一個瓜瓣



形。其夾角爲三百六十度者。故瓜瓣形之大小,與角之廣狹,成等比例。如圖。ACB 爲球體。今經過 A,B 兩極,作大圓 ACB, ADB, ...。則瓜瓣形 ACBDA 之比全表面。等於CAD 角之比 360° 若命 A 爲 CAD 角之圓周量。則

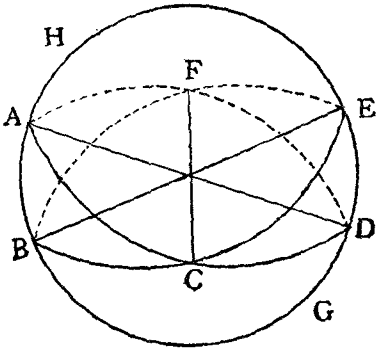
$$\frac{\text{瓜瓣形面積}}{\text{球體全表面}}=\frac{A}{2\pi}$$

若再命 r 爲球之半徑。則

$$\text{瓜瓣形面積}=\frac{A}{2\pi}\times 4\pi r^2$$

$$=2Ar^2 \qquad\qquad (98)$$

77. 三角形之面積　若將三角形之三邊引長成



三個瓜瓣形。則三角形之面積。可以瓜瓣形之面積計之。如圖。ABC 為弧三角形。引長各邊使兩兩相遇。成瓜瓣形 ABGDCA, BCEHAB, CAFBC。但 D 為 A 之底點。E 為 B 之底點。C 為 F 之底點。則三角形 FAB 與 CDE, 互為底弧三角形。乃對稱相等。故瓜瓣形 CAFBC, 等於三角形 ABC 與 CDE 之和。若命 A, B, C 為三角形三角之圓周量。則

$$\begin{aligned}
&\text{三角形}ABC+BGDC &&=\text{瓜瓣形}ABGDCA=2Ar^2\\
&\text{三角形}ABC+AHEC &&=\text{瓜瓣形}BCEHAB=2Br^2\\
&\text{三角形}ABC+\text{三角形}CDE &&=\text{瓜瓣形}CAFBC=2Cr^2
\end{aligned}$$

相加,並合併其形,得

$$2\times\text{三角形}ABC+\text{半球面}=2(A+B+C)r^2$$

故

$$\begin{aligned}
\text{三角形}ABC&=(A+B+C)r^2-\pi r^2\\
&=(A+B+C-\pi)r^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (99)
\end{aligned}$$

78. 弧贘　上節之$A+B+C-\pi$，乃三角形三角之和，所多於兩直角者。名曰三角形之弧贘。兩直角者平面三角形諸內角之和。然則球面三角形諸內角之和，所多於平面三角形諸內角之和。即謂之弧贘。亦即名之所由立也。嘗以E表之。故上節之公式，可書如

$$\text{三角形面積}=\mathrm{E}r^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(100)$$

但原設A, B, C諸角係以烈典計數。而普通計算多用度分秒。故(100)須改如下式。方便計算。即命T爲三角形之面積。則

$$\mathrm{T}=\frac{\mathrm{E}^\circ\pi r^2}{180} \cdots\cdots\cdots\cdots(101)$$

上式可書如　$\mathrm{T}=\frac{\mathrm{E}^\circ}{720}\times 4\pi r^2$

或　$\frac{\mathrm{T}}{4\pi r^2}=\frac{\mathrm{E}^\circ}{720}$

即弧三角形面積。比球之全表面。等於弧贘比八直角。

又　$\text{三角形面積}=\mathrm{E}r^2$

$\text{瓜瓣形面積}=2\mathrm{A}r^2$

即弧三角形之面積。可等於瓜瓣形之面積，以弧贘之半爲角者。

以上兩則。爲關於弧三角形面積之定理。宜熟記之。

總觀以上各式。皆非先知弧贘不可。弧贘雖可由三

角之和減兩直角而得。但必須先解三角形。方能確知三角。則莫如直接求弧膌。較爲簡便。以下兩定理。乃專論直接求弧膌之法。

79. 喀約利氏定理 此定理爲十二世紀喀約利氏所發明。其證法如下。

$$\sin\tfrac{1}{2}E=\sin\tfrac{1}{2}(A+B+C-\pi)$$

$$=\sin\left[\tfrac{1}{2}(A+B)-\tfrac{1}{2}(\pi-C)\right]$$

$$=\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(\pi-C)-\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(\pi-C)$$

$$=\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}C-\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}C$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}\sin\tfrac{1}{2}C-\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}\cos\tfrac{1}{2}C$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}\left[\cos\tfrac{1}{2}(a-b)-\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\right]$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\sin C\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}\quad\cdots\cdots\cdots(1(2)$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}\times\frac{2}{\sin a\sin b}\sqrt{\left[\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\right]}$$

$$=\frac{\sqrt{\left[\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\right]}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

從簡可書如

$$\sin\tfrac{1}{2}E=\frac{n}{2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(103)$$

80. 雷里耶氏定理　此定理係十八世紀雷里耶氏所發明。其證法如下。

$$\tan\tfrac{1}{4}E=\frac{\sin\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)}{\cos\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)}$$

$$=\frac{2\sin\tfrac{1}{4}(A+B-\pi+C)\cos\tfrac{1}{4}(A+B+\pi-C)}{2\cos\tfrac{1}{4}(A+B-\pi+C)\cos\tfrac{1}{4}(A+B+\pi-C)}$$

$$=\frac{\sin\tfrac{1}{2}(A+B)-\sin\tfrac{1}{2}(\pi-C)}{\cos\tfrac{1}{2}(A+B)+\cos\tfrac{1}{2}(\pi-C)}$$

$$=\frac{\sin\tfrac{1}{2}(A+B)-\cos\tfrac{1}{2}C}{\cos\tfrac{1}{2}(A+B)+\sin\tfrac{1}{2}C}$$

$$=\frac{\dfrac{\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C}{\cos\tfrac{1}{2}c}-\cos\tfrac{1}{2}C}{\dfrac{\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}C}{\cos\tfrac{1}{2}c}+\sin\tfrac{1}{2}C}$$

$$=\frac{\cos\tfrac{1}{2}(a-b)-\cos\tfrac{1}{2}c}{\cos\tfrac{1}{2}(a+b)+\cos\tfrac{1}{2}c}\times\frac{\cos\tfrac{1}{2}C}{\sin\tfrac{1}{2}C}$$

$$=\frac{2\sin\tfrac{1}{4}(a-b+c)\sin\tfrac{1}{4}(b+c-a)}{2\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c)\cos\tfrac{1}{4}(a+b-c)}\cot\tfrac{1}{2}C$$

$$=\frac{\sin\tfrac{1}{2}(s-b)\sin\tfrac{1}{2}(s-a)}{\cos\tfrac{1}{2}s\cos\tfrac{1}{2}(s-c)}\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin(s-a)\sin(s-b)}}$$

$$=\sqrt{\left\{\frac{\sin^2\tfrac{1}{2}(s-b)\sin^2\tfrac{1}{2}(s-a)}{\cos^2\tfrac{1}{2}s\cos^2\tfrac{1}{2}(s-c)}\times\frac{2\sin\tfrac{1}{2}s\cos\tfrac{1}{2}s.2\sin\tfrac{1}{2}(s-c)\cos\tfrac{1}{2}(s-c)}{2\sin\tfrac{1}{2}(s-a)\cos\tfrac{1}{2}(s-a).2\sin\tfrac{1}{2}(s-b)\cos\tfrac{1}{2}(s-b)}\right\}}$$

$$=\sqrt{\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}s\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)}{\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s-a)\cos\frac{1}{2}(s-b)\cos\frac{1}{2}(s-c)}\right\}}$$

$$=\sqrt{\left[\tan\frac{1}{2}s\tan\frac{1}{2}(s-a)\tan\frac{1}{2}(s-b)\tan\frac{1}{2}(s-c)\right]}\cdots\cdots(104)$$

81. 關於E之各公式　略約利氏定理,雷里耶氏定理,爲求E之本法。尙有其他各法。玆彙錄於下。以備引用。

(1) $\cos\frac{1}{2}E=\left[\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C\right]\sec\frac{1}{2}c\cdots\cdots(105)$

證:$\cos\frac{1}{2}E=\cos\left[\frac{1}{2}(A+B)-\frac{1}{2}(\pi-C)\right]$

$$=\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(\pi-C)+\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(\pi-C)$$

$$=\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}C+\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}C$$

$$=\left[\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C+\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos^2\frac{1}{2}C\right]\sec\frac{1}{2}c$$

$$=\left[(\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b-\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b)\sin^2\frac{1}{2}C\right.$$

$$\left.+(\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b)\cos^2\frac{1}{2}C\right]\sec\frac{1}{2}c$$

$$=\left[\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b(\sin^2\frac{1}{2}C+\cos^2\frac{1}{2}C)\right.$$

$$\left.+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b(\cos^2\frac{1}{2}C-\sin^2\frac{1}{2}C)\right]\sec\frac{1}{2}c$$

$$=\left[\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C\right]\sec\frac{1}{2}c$$

(2) $\tan\frac{1}{2}E=\dfrac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C}\cdots\cdots(106)$

準公式(102)得

$$\sin\frac{1}{2}E=\sin C\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sec\frac{1}{2}c$$

以(105)式除之。即得(106)式。

(3) $$\sin^2\tfrac{1}{4}E=\frac{\sin\frac{1}{2}s\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\cdots\cdots(107)$$

證：$\cos\frac{1}{2}E=\left[\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C\right]\sec\frac{1}{2}c$

$$=\frac{4\cos^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b+4\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}b\cos C}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{(1+\cos a)(1+\cos b)+\sin a\sin b\cos C}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\cdots\cdots(108)$$

$$=\frac{1+2\cos^2\frac{1}{2}a-1+2\cos^2\frac{1}{2}b-1+2\cos^2\frac{1}{2}c-1}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\cdots\cdots(109)$$

以 $1-2\sin^2\frac{1}{4}E$ 代 $\cos\frac{1}{2}E$ 得

$$2\sin^2\tfrac{1}{4}E=1-\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{1-\cos^2\frac{1}{2}a-\cos^2\frac{1}{2}b-\cos^2\frac{1}{2}c+2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

則 $$\sin^2\tfrac{1}{4}E=\frac{\sin\frac{1}{2}s\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

(4) $\cos^2\frac{1}{4}E=\dfrac{\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s-a)\cos\frac{1}{2}(s-b)\cos\frac{1}{2}(s-c)}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$ ....(110)

證：以 $2\cos^2\frac{1}{4}E-1$ 代 $\cos\frac{1}{2}E$ 於上式得

$$2\cos^2\tfrac{1}{4}E=1+\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c+\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c+2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c-1+\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b-\cos^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{(\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\cos\frac{1}{2}c)^2-(1-\cos^2\frac{1}{2}a)\,(1-\cos^2\frac{1}{2}b)}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{(\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\cos\frac{1}{2}c)^2-\sin^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}b}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=(\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b+\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b+\cos\tfrac{1}{2}c)$$
$$\times(\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b-\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b+\cos\tfrac{1}{2}c)$$
$$\div 2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c$$

$$=\frac{[\cos\frac{1}{2}(a-b)+\cos\frac{1}{2}c][\cos\frac{1}{2}(a+b)+\cos\frac{1}{2}c]}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{2\cos\frac{1}{4}(a-b+c)\cos\frac{1}{4}(c-a+b)2\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\,\mathrm{sos}\frac{1}{2}c}$$

即 $\cos^2\frac{1}{4}E=\dfrac{\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s-a)\cos\frac{1}{2}(s-b)\cos\frac{1}{2}(s-c)}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$

以(110)除(107)，即得雷里耶氏定理。

82. 若將以上各公式施於辦餘三角形 ABC'。可又得一種新公式。今以 A', B', C', a', b', c', 名辦餘三角形之角與邊。則

$$A'=\pi-A \qquad B'=\pi-B \qquad C'=C$$

$$a'=\pi-a \qquad b'=\pi-b \qquad c'=c$$

$$s'=\pi-(s-c) \qquad s'-b'=s-a$$

$$s'-a'=s-b \qquad s'-c'=\pi-s$$

$$n'=n$$

$$E'=2C-E$$

故 (103) 至 (110) 各公式又可化為下式:—

$$\sin\left(C-\tfrac{1}{2}E\right)=\frac{n}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} \quad \cdots\cdots(111)$$

$$\sin\left(C-\tfrac{1}{2}E\right)=\sin C\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\sec\tfrac{1}{2}c \quad \cdots\cdots(112)$$

$$\cos\left(C-\tfrac{1}{2}E\right)=\left(\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b+\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos C\right)\sec\tfrac{1}{2}c \quad \cdots\cdots(113)$$

$$\tan\left(C-\tfrac{1}{2}E\right)=\frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin C}{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b+\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos C} \quad \cdots\cdots(114)$$

$$\sin^2\left(\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{4}E\right)=\frac{\cos\frac{1}{2}s\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-b)\cos\frac{1}{2}(s-c)}{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} \quad \cdots\cdots(115)$$

$$\cos^2\left(\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{4}E\right)=\frac{\sin\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s-a)\cos\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)}{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} \quad \cdots\cdots(116)$$

$$\tan^2\left(\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{4}E\right)=\cot\tfrac{1}{2}s\tan\tfrac{1}{2}(s-a)\tan\tfrac{1}{2}(s-b)\cot\tfrac{1}{2}(s-c) \quad \cdots\cdots(117)$$

83. 例題　求弧三角形之面積。首在求其弧體。關於 E 之公式。本章論之詳矣。惟各有所偏。或角度有限

制。過與不及。由函數皆無法查取精密度數。或因數太多。查取對數。手續較繁。故未可一概引用。玆分三類述之於下。

(1) 已知三角者　此爲最簡之一類。祇須用公式(99),(100),或(101),即可求其面積。(99),(100)係專用於角之以烈典計者。若以度數計。則(101)乃其唯一之公式也。其式爲

$$T=\frac{E^\circ\pi r^2}{180}$$

題一　弧三角形之 $A=93^\circ\,30'\,10''$,$B=32^\circ\,35'\,30''$,$C=88^\circ\,25'$,球之半徑爲五十寸。試求三角形之面積。

$$\begin{array}{rlrl}
A= & 93^\circ30'10'' & \log E & =1.53795 \\
B= & 32\ 35\ 30 & \log\pi & =0.49715 \\
C= & 88\ 25\ \ 0 & \log r^2 & =3.39794 \\
-\pi= & -\underline{180\ \ 0\ \ 0} & \text{colog}180 & =\underline{7.74473} \\
E= & 34\ 30\ 40 & \log T & =3.17777 \\
= & 34.511 & &
\end{array}$$

$$\therefore T=\underline{\underline{1505.8}}\text{方寸}$$

(2) 已知三邊者　喀約利氏與雷里耶氏兩定理,以及公式(107),(110),均可用。以雷氏之法爲最精密,且最簡便。其式爲

$$\tan\tfrac{1}{4}E=\sqrt{\left(\tan\tfrac{1}{2}s\tan\tfrac{1}{2}(s-a)\tan\tfrac{1}{2}(s-b)\tan\tfrac{1}{2}(s-c)\right)}$$

題二　三角形之$a=69°\ 15'\ 6''$, $b=120°\ 42'\ 47''$, $c=159°\ 18'\ 33''$，試求其面積。

$$
\begin{array}{rl}
a= & 69°\ 15'\ \ 6'' \\
b= & 120\ \ 42\ \ 47 \\
c= & \underline{159\ \ 18\ \ 33} \\
2\,| & \underline{349\ \ 16\ \ 26}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
s=174\ 38\ 13, & \frac{1}{2}s=87°19'\ 6''.5, & \log\tan= & 11.32943 \\
s-a=105\ 23\ \ 7, & \frac{1}{2}(s-a)=52\ 41\ 33.5, & \log\tan= & 10.11804 \\
s-b=\ 53\ 55\ 26, & \frac{1}{2}(s-b)=26\ 57\ 43, & \log\tan= & 9.70645 \\
s-c=\ 15\ 19\ 40, & \frac{1}{2}(s-c)=\ 7\ 39\ 50, & \log\tan= & \underline{9.12893} \\
\frac{1}{4}E=\ 54\ 10\ \ 5 & & \log\tan^2\frac{1}{4}E=2\,| & \underline{0.28285} \\
E=216\ 40\ 20=216°.672 & & \log\tan\frac{1}{4}E= & 0.14142
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\log E= & 2.33580 \\
\log\pi= & 0.49715 \\
\text{colog}\,180= & \underline{7.74473} \\
\log T= & 0.57768 \\
\therefore T= & \underline{\underline{3.7816r^2}}
\end{array}
$$

(3)　已知兩邊及夾角者　適用之公式爲 (106)，其式爲

$$\tan\tfrac{1}{2}E=\frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C}$$

但分母爲兩數相加。如用普通對數計算。可命

$$\tan\varphi = \tan\tfrac{1}{2}a\cos C \qquad (118)$$

則原公式變爲

$$\tan\tfrac{1}{2}E = \frac{\sin\frac{1}{2}b\tan C\sin\varphi}{\cos(\varphi - \frac{1}{2}b)} \qquad (119)$$

題三　弧三角形之 $a = 33°\ 1'\ 45''$, $b = 155°\ 5'\ 18''$, $C = 110°\ 10'$, 試求其弧牘。

$\log\tan\frac{1}{2}a = 9.47201$		$\log\sin\frac{1}{2}b$	$= 9.98966$
$\log\cos C = 9.53751n$		$\log\tan C$	$= 10.43502n$
$\log\tan\varphi = 9.00952n$		$\log\sin\varphi$	$= 9.00725$
		$\log\sec(\varphi - \frac{1}{2}b)$	$= 10.93826n$
$\varphi = 174°\ 9'\ 49''4$		$\log\tan\frac{1}{2}E$	$= 10.37019$
$\frac{1}{2}b = 77\ \ 32\ \ 39.0$		$\frac{1}{2}E$	$= 66°54'25''.7$
$\varphi - \frac{1}{2}b = 96\ \ 37\ \ 10.4$		E	$= 133\ 48\ 51$

餘如已知兩角及夾邊,兩邊及對角之一,兩角及對邊之一,各法。因無公式可用。宜按第六章各法。先解三角形。次再用公式(99),(100)或(101),求其面積。

習　題

試求下列各弧三角形之面積(1至10):—

1. $A = 127°\ 22'\ 28''$, $B = 131°\ 45'\ 27''$, $C = 100°\ 52'\ 16''$.
2. $a = 128\ 42\ 56$, $b = 107\ 13\ 48$, $c = 88\ 37\ 51$

3. $b=44^\circ\,27'\,40''$, $c=15^\circ\,22'\,44''$, $A=107^\circ\,42'\,27''$

4. $c=114\ 27\ 57$, $A=78\ 42\ 33$, $B=127\ 13\ 7$

5. $b=67\ 15\ 42$, $A=84\ 55\ 8$, $C=96\ 18\ 49$

6. $a=76\ 14\ 47$, $b=82\ 40\ 15$, $A=60\ 22\ 44$

7. $A=80\ 12\ 35$, $B=77\ 38\ 22$, $a=76\ 42\ 28$

8. $b=72\ 19\ 38$, $c=54\ 58\ 52$, $B=77\ 15\ 14$

9. $B=127\ 16\ 4$, $C=42\ 34\ 19$, $b=54\ 47\ 55$

10. $a=116\ 19\ 45$, $A=160\ 42\ 24$, $C=171\ 27\ 15$

11. 若等邊弧三角形之面積。等於全球面四分之一。試求其角與邊。

12. 若 $a=b=\frac{1}{3}\pi, c=\frac{1}{2}\pi$,試證 $E=\cos^{-1}\frac{7}{9}$

13. 若弧三角形之C角爲直角,試證

(1) $\sin\frac{1}{2}E=\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sec\frac{1}{2}c$

(2) $\cos\frac{1}{2}E=\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sec\frac{1}{2}c$

14. 有弧三角形ABC,若C爲直角,試證

$$\frac{\sin^2 c}{\cos c}\cos E=\frac{\sin^2 a}{\cos a}+\frac{\sin^2 b}{\cos b}$$

15. 直弧三角形之C爲直角者,若 $a=b$,試證

$$\tan E=\frac{\sin^2 a}{2\cos a}$$

16. 凡直弧三角形諸內角之和。皆小於四直角。試證之。

17. 有弧三角形ABC,若 $\cos C=-\tan\frac{1}{2}a\tan\frac{1}{2}b$,試證

$$C=A+B$$

18. 若三角形諸內角之和等於四直角。試證

$$\cos^2\tfrac{1}{2}a+\cos^2\tfrac{1}{2}b+\cos^2\tfrac{1}{2}c=1$$

19. 若A,B,C 爲弧三角形之三角。A′, B′, C′ 爲對邊之中點。試證

$$\cos\tfrac{1}{2}E=\frac{\cos A'B'}{\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\cos B'C'}{\cos\frac{1}{2}a}=\frac{\cos C'A'}{\cos\frac{1}{2}b}$$

20. 試證

$$\sin s=\frac{\left[\sin\frac{1}{2}E\sin\left(A-\frac{1}{2}E\right)\sin\left(B-\frac{1}{2}E\right)\sin\left(C-\frac{1}{2}E\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}$$

第九章

天文學上之應用

84. 球面三角學之應用。以在天文學上爲最多。如球面天文學,應用天文學,航海天文學。其主要算法,多惟球面三角學是賴。惟欲知以上諸學之概要。須先明天球上各系之坐標。

澄清之夜。四無雲煙。靜坐仰觀。覺得在天恒星祇有大小之分。並無遠近之別。一若天如覆盌。形似半球。觀者居於中心。諸星附於球面。若坐觀稍久。並察得東方新星繼續出見於地平之上。西方舊星漸入沒於地平之下。因疑天空不獨爲球體。且載諸星向西旋轉。而北方諸星有永不入地平之下。亦有居其所爾視如不動者。並可略知球軸之向。依近世天學進步。確知天非圓球。亦不旋轉。其視若旋轉者。乃地球自轉所致。但因取便計算。仍認天空爲一大球。名曰天球。其大無限。可以旋轉。地球居中。其所旋轉之軸。兩端曰極。在北者曰北極。在南者曰南極。夫天球旋轉旣由地球自轉所致。則北極與南極即地軸穿天之點也。

欲定諸星在天之位。須先立坐標爲起算之元。天球上可用爲坐標軸者厥有三圈。一曰黃道。即地球軌道

面所遇天球之大圈。亦可云日行於天之道也。二曰赤道。即地球赤道面所遇天球之大圈。亦可云南北極之中腰也。三曰地平。海平面所遇天球之大圈。亦可云水與天相接之視界也。是爲三系。今銓釋各系名詞於下。

地平系

85. 地平 從觀測者之立足點。作地球之切面。所割天球之大圈。名曰地平線。簡曰地平。切面名曰地平面。亦稱海平面。

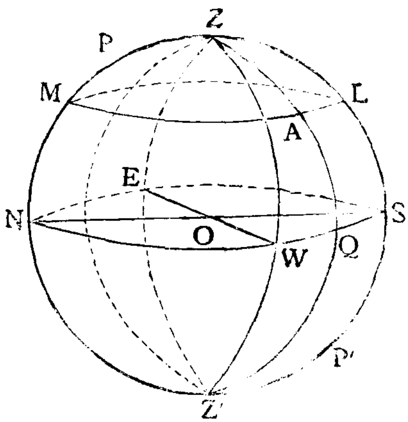
86. 視地平 海面或地面與天球相遇之圈。由人目所見者。名曰視地平。人目有高低。地面有起伏。即其所見之海面或地面有遠近。故視地平乃與地平平行之小圈。而非大圈。人目愈高。視地平愈下俯。須加海平差。方得眞地平。

87. 天頂,天底 地平既爲天球上之大圈。必有兩極。在上者曰天頂。在下者曰天底。故天頂爲吾人當頭之點。亦即地平上最高之點。

88. 地平經圈 通過天頂天底之大圈。名曰地平經圈。此圈之面當然直垂地平面。故西文名曰直垂圈。地平經圈向正南正北者。別名子午圈,或子午線。所遇地平線之兩點。曰正南點,正北點。向正東正西者。別名卯酉線。所遇地平線之兩點。曰正東點,正西點。子午線

與卯酉線當然十字相交於天頂。所遇地平線之四點。爲地平之四方。

89. 地平緯圈　與地平平行之小圈。名曰地平緯圈。凡居此圈之諸星。出其地平之高度皆相等。故西文名等高圈。



如圖。O爲觀測者之地位。NESW爲地平。Z爲天頂。Z'爲天底。ZLSZ'NM, ZAQZ', ZWZ'E皆爲直垂圈。但前者通過北極P,與南極P'。別名子午線。S, N爲正南點,正北點。後者與子午線直交。別名卯酉線。E,W爲正東點,正西點。居間之圈乃通過恒星A之直垂圈。LAM則爲等高圈。

90. 地平經緯度　凡定一星在地平上之位置。須先知其經緯度。地平經度爲地平線上之弧度。亦即天

頂上兩經圈之夾角。有起自正南點者。有起自正北點者。有西行周天三百六十度者。有東西行各百八十度,以正負立別者。各國記法不同。地平緯度爲地平經圈上之弧度。起地平至天頂。凡九十度。地平經度又稱爲偏角。恒以A表之。地平緯度又稱爲高弧,恒以h表之。而從正東點或正西點起算之偏角。又別稱正東距,或正西距。從天頂起算之高弧。又別稱天頂距。故正東距或正西距者。偏角之餘角也。天頂距者。高弧之餘角也。天頂距恒以ζ表之。

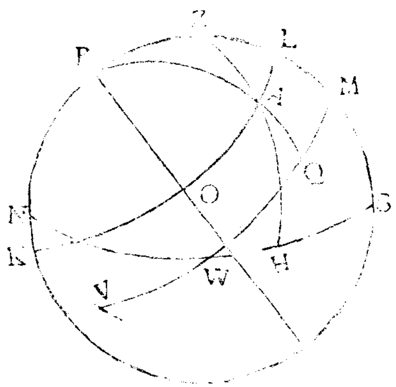
如上圖。A爲天體。SQ弧或SZQ角爲A之偏角。WQ弧爲正西距。QA弧爲A之高弧。ZA弧爲天頂距。

赤道系

91。赤道 居天球南北極之間。以兩極爲極之大圈。名曰赤道。夫天球旋轉。乃由地球自轉所致。其兩極爲地軸穿天之點。故其赤道即地球赤道面所割天球之大圈。

92. 赤道經圈,時圈 通過兩極之大圈,直垂赤道者。名曰赤道經圈。但天球向西旋轉。凡經過某星之經圈。逐漸向西移動。其經過太陽之經圈。並爲時刻之表示。每西行十五度。約歷一小時。故赤道經圈嘗俗爲時圈。以紀其實。

93. 赤道緯圈,日圈　與赤道平行之小圈。名曰赤道緯圈。因天球載諸星向西旋轉。每日一周。凡經過某星之緯圈。即是星旋轉一周所行之道。故對事立名。赤道緯圈嘗稱爲日圈。



如圖。P爲北極。VQ爲赤道。交地平於正東正西點。A爲天體所在之位。PQ爲通過A點之赤道經圈,卽時圈。KL爲通過A點之赤道緯圈,卽日圈。

94. 赤經　赤道上之弧度。名曰赤道經度。簡曰赤經。恆以α表之。起算之端。有自春分點東行,周天三百六十度者。有自子午線西行,周天三百六十度者。但後者別名時角。下節當續論之。春分點爲太陽由南而北所經過赤道之點。亦卽黃道與赤道之交點。太陽由北而南所經過之赤道點。則名秋分點。

95. 時角　時角者。子午線與通過某天體之時圈，在北極上所夾之角也。恒以 t 表之。從子午線起算。西行三百六十度。但時角恒以時分秒計。因天球向西旋轉。每十五度爲一時。故天體從子午線西轉。每轉十五度。其時角卽爲一時。吾人記時，係以太陽爲標準。故太陽之時角。卽是太陽時。

96. 赤緯　赤道經圈上之弧度。卽時圈上之弧度。名曰赤道緯度。簡曰赤緯。恒以 δ 表之。從赤道起算。向北者爲正。向南者爲負。但從北極起算之赤緯。別名北極距。無正負之分。

如上圖。V 爲春分點。VQ 爲 A 之赤經。MQ 弧或 MPQ 角爲 A 之時角。QA 爲 A 之赤緯。PA 爲北極距。

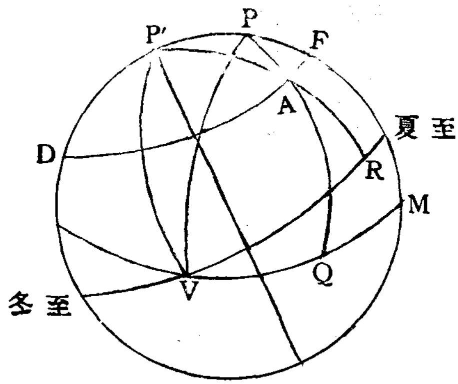
黃道系

97. 黃道　日行於天之道。謂之黃道。但太陽行天。乃由地球公轉所致。故黃道者實卽地球軌道面所割天球之大圈也。凡月與行星在天之道。皆離此道不遠。故古人專用黃道爲唯一之坐標系。自鐘表創興以後始以赤道系代之。

黃道之兩極。名曰黃極。在北者曰黃北極。在南者黃南極。

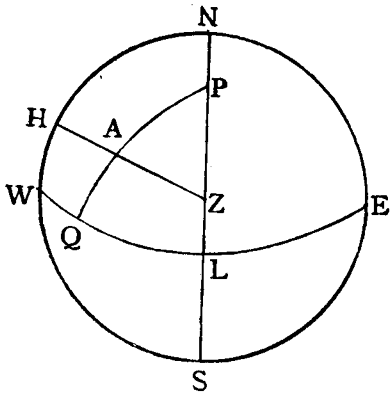
98. 黃經，黃緯　通過黃極之大圈。直垂黃道者。曰

黃道經圈。黃道上之弧度。謂之黃道經度,簡曰黃經。恆以λ代之。黃道經圈上之弧度。謂之黃道緯度。簡曰黃緯。恆以β代之。黃經亦從春分點起算。東行周天三百六十度。故黃經者。通過春分點與某星兩經圈。在黃極所夾之角。亦卽黃道上自春分點東至經圈之弧度。黃緯自黃道起算。以北爲正。南爲負。



如圖。P爲赤北極。VQ爲赤道。P′爲黃北極。VR爲黃道。V爲春分點。卽黃赤兩道之交點。P′PM爲二至線。PV爲赤道系之二分線。P′V爲黃系之二分線。A爲天體。P′R爲通過A之黃道經圈。DF爲通過A之黃道緯圈。VQ,QA爲A之赤經赤緯。VR,RA爲A之黃經黃緯。RVQ角爲黃赤兩道之交角。卽P′與P之距弧。名曰黃赤大距。恆以ε表之。

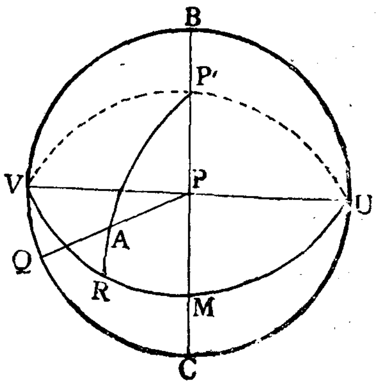
99. 天文三角形　若取第93節之圖。自天頂Z向下俯視。則得地平面上之投影。有如下圖。Z爲天頂。NWSE爲地平。ZH爲通過A之直垂圈。P爲北極。WQE爲赤道。PQ爲通過A之時。



△ZPA嘗稱爲天文三角形。因HA爲高弧。ZA爲天頂距。QA爲赤緯。PA爲北極距。LZ爲地方緯度。PZ爲餘緯度。SZH爲偏角。PZA爲180° − A。ZPA爲時角。故此三角形之三邊與兩角。實包含地平與赤道兩系之坐標也。

又若取第98節之圖。自北極P向下俯視。則得赤道面上之投影。有如下圖。P爲赤北極。VCUB爲赤道。PQ爲通過A之時圈。P′爲黃北極。VRU爲黃道。P′R爲通過A之黃道經圈。BC爲二至線。若V爲春分點。U

為秋分點。則 VPU 為赤道系之二分線。VP′U 為黃道系之二分線。



$\triangle PP'A$ 亦稱為天文三角形。因 QA 為赤緯。即 $PA=90°-\delta$。RA 為黃緯。即 $P'A=90°-\beta$。CM 為黃赤大距。即 $PP'=\varepsilon$。VQ 為赤經。即 $\angle F'PA=90°+\alpha$。VR 為黃經。即 $\angle PP'A=90°-\lambda$。故此三角形之三邊與兩角。實包含黃道赤道兩系之坐標也。

以上兩種三角形。含有各系之坐標。故凡已知此系之坐標。可選用弧三角形適宜之公式。推算他系之坐標。例如已知某天體之高弧與偏角。可推算其赤緯與時角。或已知某天體之赤經赤緯。可推算其黃經黃緯。因事屬天學範圍。茲不備述。

100.　舉例　測定地方時刻與緯度。為天文學上

最普通之工作。茲各舉一例於下。俾略知測算之概要。

例一　中華民國十九年五月十六日下午約四時四十分。在北平測得太陽高弧爲27° 41′ 29″. 4。斯時太陽赤緯爲18° 53′ 47″. 8 N。試求觀測時之準確視時。北平緯度爲39° 54′ 23″ N。

此題所知者。爲太陽天頂距。卽上節第一圖之ZA弧。北極距卽PA弧。及北平餘緯度卽PZ弧。所求者爲時角,卽ZPA角。乃由三邊求解之三角形也。可用半角公式求之。欲求計算上之準確。宜用公式(24)之正切式。卽

$$\tan\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}$$

可命　$A=ZPA=t,\qquad a=ZA=\zeta$

$$b=PZ=90^\circ-\varphi$$

$$c=PA=90^\circ-\delta$$

則

$$s=\tfrac{1}{2}(a+b+c)=90^\circ+\tfrac{1}{2}[\zeta-(\varphi+\delta)]$$

$$s-a=\tfrac{1}{2}(b+c-a)=90-\tfrac{1}{2}[\zeta+(\varphi+\delta)]$$

$$s-b=\tfrac{1}{2}(a+c-b)=\tfrac{1}{2}[\zeta+(\varphi-\delta)]$$

$$s-c=\tfrac{1}{2}(a+b-c)=\tfrac{1}{2}[\zeta-(\varphi-\delta)]$$

卽原公式化爲

$$\tan\tfrac{1}{2}t=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}[\zeta+(\varphi-\delta)]\sin\frac{1}{2}[\zeta-(\varphi-\delta)]}{\cos\frac{1}{2}[\zeta-(\varphi+\delta)]\cos\frac{1}{2}[\zeta+(\varphi+\delta)]}}\quad\cdots\cdots(120)$$

乃演算如下:-

ζ	=	62° 18′ 30″.6			
φ	=	39 51 23. 0			
δ	=+	18 53 47. 8			
$\varphi-\delta$	=	21 0 35. 2			
$\varphi+\delta$	=	58 48 10. 8			
$\zeta-(\varphi-\delta)$	=	41 17 55. 4			
$\zeta+(\varphi-\delta)$	=	8 19 5. 8			
$\zeta-(\varphi+\delta)$	=	3 30 19. 8			
$\zeta+(\varphi+\delta)$	=	121 6 41. 4			
$\frac{1}{2}[\zeta-(\varphi-\delta)]$	=	20 38 57. 7	log sin	=	9.53734
$\frac{1}{2}[\zeta+(\varphi-\delta)]$	=	41 39 32. 9	log sin	=	9.82263
$\frac{1}{2}[\zeta-(\varphi+\delta)]$	=	1 45 9. 9	log sec	=	10.00020
$\frac{1}{2}[\zeta+(\varphi+\delta)]$	=	60 33 20. 7	log sec	=	10.30841

$$\log \tan^2\tfrac{1}{2}t = 2)\,19.67858$$

$$\log \tan \tfrac{1}{2}t = 9.83929$$

$$\tfrac{1}{2}t = 34°37'58''$$

$$t = 69\ 15\ 56$$

太陽時角者。即太陽視時也。以15除之。得四時三十七分三秒七。爲觀測時之準確太陽視時。

例二　中華民國十九年五月二十五日下午。在北

平地方。當太陽視時一時二分三十五秒之頃。測得太陽高弧爲 66° 39′ 31″。其時太陽赤緯爲 20° 46′ 8″.3 N。試求北平緯度。

此題所知者爲 t, γ, δ，所求者爲 ϕ。宜取公式(22)之第一式。仍照上題支配。可得式如下:—

$$\cos\gamma = \sin\delta\ \sin\phi + \cos\delta\ \cos\phi\ \cos t$$

改用對數計算。可命

$$\tan F = \cot\delta\ \cos t \qquad\qquad (121)$$

則
$$\cos\gamma = \sin\delta\ (\sin\phi + \tan F\cos\phi)$$

$$= \frac{\sin\delta}{\cos F}(\sin\phi\ \cos F + \cos\phi\ \sin F)$$

$$= \frac{\sin\delta}{\cos F}\sin(\phi + F)$$

$$\therefore\ \sin(\phi + F) = \frac{\cos F\cos\gamma}{\sin\delta} \qquad\qquad (122)$$

乃演算如下:—

$t = 15°\ 38'\ 45''.0$

$\gamma = 23\ \ 20\ \ 29.\ 0$

$\delta = 20\ \ 46\ \ \ 8.\ 3\mathrm{N}$

$\log\cot\delta = 10.42108$

$\log\cos t = \underline{\ 9.98360}$

$\log\tan F = 10.40468$

$\log\cos F = 9.56401$

$\log\cos\gamma = 9.96292$

$\log\csc\delta = \underline{10.45026}$

$\log\sin(\phi + F) = 9.97719$

$\phi + F = 108°24'30''.0$

$F = \underline{68\ 30\ 13.0}$

$\therefore\ \phi = 39\ 54\ 17.0$

第十章

測地學上之應用

101. 弧三角學之見用於測地學者。在測定地球之形狀與體量,及地面上一部分之圖形。皆先定一基線。爲測算之本。此基線係在平坦之地面上。選一直線。長可五公里。略如鐵道之路基。先以土方砌之。次以水平平之。旣成之後。乃用各種測器。測其長度。是項測器。皆遇熱則漲。遇寒則縮。宜同時兼測溫度。考訂其誤差。如是實測多次。務使結果前後密合。此測定基線之大略也。

基線旣定。乃在所測區域之內。選定若干點。名曰測站。樹立標誌。就基線兩端之所能見者。用地平儀測其距角。又在各測站就所能見者。亦各測其距角。如是本區域之內。分成若干三角形。名曰三角網。是項三角形皆球面三角形。可用弧三角法。依據基線之長度與測角。展轉推算各三角形邊之長度。但各邊之長度皆甚小。以英美度法言。地面上長六十英里之線。對地心之角僅有一度。而一般三角形之邊長尙不及此。故用普通方法推算。恒難精密。且甚費事。近世測量家多採用勒切多氏定理。玆略述於下。

102. 勒例多氏定理　若弧三角形之三邊。遠小於球半徑。則弧三角形之各角。比與弧三角形三邊同長度之平面三角形之相當角。大三分弧臍之一。

名弧三角形之三角爲A, B, C。三邊爲a, b, c。球半徑爲r。若命α, β, γ爲三邊之長度。則$\frac{\alpha}{r}, \frac{\beta}{r}, \frac{\gamma}{r}$卽爲$a, b, c$之圓周量。準邊之餘弦定則。得

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

又準正弦餘弦之展開式。得

$$\sin a=\frac{\alpha}{r}-\frac{\alpha^3}{6r^3}+\frac{\alpha^5}{120r^5}\cdots\cdots$$

$$\cos a=1-\frac{\alpha^2}{2r^2}+\frac{\alpha^4}{24r^4}\cdots\cdots$$

但因弧三角形之三邊。遠小於球半徑。故$\frac{\alpha}{r}$之爲分數。其値甚微。凡r之冪在四次以上者。可酌量略去。因得

$$\cos A=\frac{1-\frac{\alpha^2}{2r^2}+\frac{\alpha^4}{24r^4}-\left(1-\frac{\beta^2}{2r^2}+\frac{\beta^4}{24r^4}\right)\left(1-\frac{\gamma^2}{2r^2}+\frac{\gamma^4}{24r^4}\right)}{\left(\frac{\beta}{r}-\frac{\beta^3}{6r^3}\right)\left(\frac{\gamma}{r}-\frac{\gamma^3}{6r^3}\right)}$$

$$=\frac{1-\frac{\alpha^2}{2r^2}+\frac{\alpha^4}{24r^4}-1+\frac{\beta^2}{2r^2}-\frac{\beta^4}{24r^4}+\frac{\gamma^2}{2r^2}-\frac{\beta^2\gamma^2}{4r^4}-\frac{\gamma^4}{24r^4}}{\frac{\beta\gamma}{r^2}-\frac{\beta^3\gamma}{6r^4}-\frac{\beta\gamma^3}{6r^4}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2r^2}(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)+\frac{1}{24r^4}(\alpha^4-\beta^4-\gamma^4-6\beta^2\gamma^2)}{\frac{\beta\gamma}{r^2}\left(1-\frac{\beta^2+\gamma^2}{6r^2}\right)}$$

$$=\frac{1}{2r^2}\left\{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2+\frac{1}{12r^2}(\alpha^4-\beta^4-\gamma^4-6\beta^2\gamma^2)\right\}\times\frac{1+\frac{\beta^2+\gamma^2}{6r^2}}{\frac{\beta\gamma}{r^2}\left\{1-\left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{6r^2}\right)^2\right\}}$$

$$=\frac{1}{2\beta\gamma}\left\{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2+\frac{1}{12r^2}(\alpha^4-\beta^4-\gamma^4-6\beta^2\gamma^2)\right\}\left\{1+\frac{\beta^2+\gamma^2}{6r^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\beta\gamma}\left\{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2+\frac{1}{12r^2}(\alpha^4-\beta^4-\gamma^4-6\beta^2\gamma^2)\right.$$

$$\left.+\frac{\beta^4+\beta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^4-\alpha^2\gamma^2}{6r^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\beta\gamma}\left\{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2+\frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\gamma^2-2\beta^2\gamma^2}{12r^2}\right\}$$

$$=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}-\frac{2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}{24\beta\gamma r^2}$$

今命A′, B′, C′爲與弧三角形三邊同長度之平面三角形之三角。卽其邊爲α, β, γ。則準平面三角形之餘弦定則公式。可得

$$\cos A'=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$$

而$2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4$

$$=4\beta^2\gamma^2-(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2)$$

$$=4\beta^2\gamma^2-(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2$$

$$=4\beta^2\gamma^2-4\beta^2\gamma^2\cos^2 A'$$

$$=4\beta^2\gamma^2\sin^2 A'$$

故上式可化爲

$$\cos A = \cos A' - \frac{4\beta^2\gamma^2\sin^2 A'}{24\beta\gamma r^2}$$

$$= \cos A' - \frac{\beta\gamma\sin^2 A'}{6r^2}$$

$\frac{1}{2}\beta\gamma\sin A'$ 者平三角形之面積也。今以 S' 表之。又 A 與 A' 兩角相差甚微。可命 $A=A'+\theta$。則

$$\cos A=\cos A'\cos\theta-\sin A'\sin\theta$$

但因 θ 爲值甚微。可命

$$\cos\theta=1, \qquad \sin\theta=\theta,$$

則
$$\cos A=\cos A'-\theta\sin A'$$

卽
$$\cos A'-\theta\sin A'=\cos A'-\frac{S'}{3r^2}\sin A'$$

$$\therefore \quad \theta=\frac{S'}{3r^2}$$

故
$$A=A'+\frac{S'}{3r^2}$$

同理可証
$$B=B'+\frac{S'}{3r^2}$$

$$C=C'+\frac{S'}{3r^2}$$

相加得
$$A+B+C=A'+B'+C'+\frac{S'}{r^2}$$

$$=\pi+\frac{S'}{r^2}$$

或
$$A+B+C-\pi=\frac{S'}{r^2}$$

卽 $\frac{S'}{r^2}$ 實等於弧贘也。因得本定理之全式如下。

$$A=A'+\tfrac{1}{3}E,\quad B=B'+\tfrac{1}{3}E,\quad C=C'+\tfrac{1}{3}E \cdots\cdots\cdots(123)$$

103. 上節已証明$S'/r^2=E$，卽 $S'=Er^2$。而弧三角形之面積亦等於Er^2。見第78節。若命S表弧三角形之面積。則S與S′相等矣。但S之等於Er^2。乃根據眞確　理。推闡而成。S′之等於Er^2。乃由逐次删節所致。故二者貌似相等。而實則不等。但所差甚微。可以勿計。

104. **羅伊定例**　採用勒氏定理。首在求弧贘。而求弧贘必須先知平三角形之面積。但面積係以平方尺計。求得之後。須以 r^2 除之。得弧贘之烈典數。再以206265乘之。方得弧贘之秒數。而r^2與206265皆爲不變之數。故可定爲常數。以備隨時取用。英國羅伊大將曾本此意。另立一法。後遂稱爲羅伊定例。其法如下。

命n爲弧贘內之秒數。s爲平三角形面積內之平方尺數。r爲地球半徑內之尺數。若E爲弧贘內之烈典數。則

$$s=Er^2$$

而

$$E=\frac{u\pi}{180.60.60}$$

$$=\frac{n}{206265}$$

故

$$s=\frac{nr^2}{206265}$$

據近世精密觀測。地面上一度之平均長度。爲英尺365155尺。

$$\text{即}\qquad \frac{\pi r}{180}=365155$$

$$\text{或}\qquad r=\frac{180\times 365155}{\pi}$$

$$\therefore\qquad s=n\times\left(\frac{180\times 365155}{\pi}\right)^2\times\frac{1}{206265}$$

$$\text{或}\qquad \log s=\log n+\log\frac{(180\times 365155)^2}{\pi^2\times 206265}$$

$$=\log n+9.3267742$$

$$\therefore\qquad \log n=\log s-9.3267742 \qquad (124)$$

凡野外測量。多用英尺計數。故算得三角形之面積。亦多以英方尺計數。取其對數。減9.3267742。得弧賸之對數。查取眞數。即得弧賸之秒數。

105. **弧三角形之近似解法** 勒仞多氏定理。係利用平面三角形解法。轉求球面三角形之全解。因平面三角形之解法較易故也。球面三角形解法凡分六類。除已知三角之一類。不能利用平面三角形解法外。餘皆可用勒氏定理解之。茲將解法分節詳述於下。

欲驗弧三角形之精密解法與近似解法之差別。宜先用精密方法。解一三角形。以資比較。設弧三角形之三邊爲

$\alpha=98765$ 英尺

$\beta=87654$,, ,,

$\gamma=76543$,, ,,

則準圓周與中心角之比例。可得

$a=0° 16' 13''.707$

$b=0\ \ 14\ \ 24.165$

$c=0\ \ 12\ \ 34.624$

又準第57節解法。即得

$A=73° 36' 18''.30$

$B=58\ \ 21\ \ 56.78$

$C=48\ \ \ 1\ \ 46.30$

106. 已知三邊者　若已知弧三角形之三邊爲

$\alpha=98765$ 英尺

$\beta=87654$,, ,,

$\gamma=76543$,, ,,

則用平三角之公式

$$r=\sqrt{\frac{(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)}{s}},$$

$$\tan\tfrac{1}{2}A'=\frac{r}{s-\alpha},\ \tan\tfrac{1}{2}B'=\frac{r}{s-\beta},\ \tan\tfrac{1}{2}C'=\frac{r}{s-\gamma}$$

求得　$A'=73° 36' 17''.56$

$B'=58\ \ 21\ \ 56.\ 54$

$C'=48\ \ \ 1\ \ 45.\ 88$

次用平三角形面積公式

$$S'=\sqrt{s(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)}$$

求得面積內平方尺數之對數爲

$$\log s = 9.507\ 6189$$

準公式(122)　減常數 $=9.326\ 7742$

得　$\log n = 0.180\ 8446$

$$\therefore\ E = 1''.516$$

$$\therefore\ A=73^\circ\ 36'\ 17''.56+0''.51=73^\circ\ 36'\ 18''.07$$

$$B=58\ \ 21\ \ 56.54+0.51=58\ \ 21\ \ 57.05$$

$$C=48\ \ 1\ \ 45.88+0.51=48\ \ 1\ \ 46.39$$

107. 已知兩邊及夾角者　若已知弧三角形之

$\alpha=98765$ 英尺

$\beta=87654$,, ,,

$C=48^\circ\ 1'\ 46''.30$

則先借C角。用平三角形面積公式

$$S'=\tfrac{1}{2}\alpha\beta\sin C'$$

求得面積內平方尺數之對數爲

$$\log s = 9.507\ 6197$$

減常數 $=9.326\ 7742$

$$\log n = 0.180\ 8455$$

$$\therefore\ E = 1''.517$$

$$\therefore\ C'=48^\circ\ 1'\ 46''.30-0''.51=48^\circ\ 1'\ 45''.79$$

次用平三角之公式

$$\tan\tfrac{1}{2}(A'-B')=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\cot\frac{C'}{2}$$

求得 $A'=73^\circ\ 36'\ 17''.64$

$B'=58\ \ 21\ \ 56.56$

$\therefore\quad A=73^\circ\ 36'\ 17''.64+0''.51=73^\circ\ 36'\ 18''.15$

$B=58\ \ 21\ \ 56.56+0.51=58\ \ 21\ \ 57.07$

末用平三角之正弦定則。求得

$\gamma=76452.95$ 英尺

108.　已知兩角及夾邊者　若已知弧三角形之

$A=73^\circ\ 36'\ 18''.30$

$B=58\ \ 21\ \ 56.78$

$\gamma=76543$ 英尺

則先借A, B兩角。用平三角形面積公式

$$S'=\frac{\gamma^2\sin A'\sin B'}{2\sin(A'+B')}$$

求得面積內平方尺數之對數為

$\log s=9.507\ 6215$

減常數 $=9.326\ 7742$

$\log n=0.180\ 8473$

$\therefore\quad E=1''.517$

$\therefore\quad A'=73^\circ\ 36'\ 18''.30-0''.51=73^\circ\ 36'\ 17''.79$

$$B'=58^\circ\ 21'\ 56''.78-0''.51=58^\circ\ 21'\ 56''.27$$

而 $C'=\qquad\qquad=48\quad 1\quad 45.94$

故 $C=48\quad 1\quad 45.94+0.51=48\quad 1\quad 46.45$

次用平三角之正弦定則。求得

$$\alpha=98764.84\text{ 英尺}$$

$$\beta=87653.84\text{ ,, ,,}$$

109. 已知兩邊及對角之一者 若已知弧三角形之

$$\alpha=98765\text{ 英尺}$$

$$\beta=87654\text{ ,, ,,}$$

$$A=72^\circ\ 36'\ 18''.30$$

則先借A角。用平三角之正弦定則。求得

$$B'=58^\circ\ 21'\ 56''.82$$

仍借A角。用平三角形面積公式

$$S'=\tfrac{1}{2}\alpha\beta\sin(A+B')$$

求得面積內平方尺數之對數爲

$$\log s=9.507\ 6170$$

$$\text{減常數}=\underline{9.326\ 7742}$$

$$\log n=0.180\ 8428$$

$$\therefore\ E=1''.517$$

$$\therefore\ A'=73^\circ\ 36'\ 18''.30-0''.51=73^\circ\ 36'\ 17''.79$$

既得A′之準値。可仍用正弦定則。求B′之準値。得

$$B'=58°\ 21'\ 56''.59$$

$$\therefore\quad B=58°\ 21'\ 56''.59+0''.51=58°\ 21'\ 57''.10$$

而　$C'=180°-(73°36'17''.79+58°21'56''.59)=48°1'45''.62$

故　$C=48°\ 1'\ 45''.62+0''.51=48°\ 1'\ 46''.13$

末用正弦定則。求得

$$\gamma=76542.89\ \text{英尺}$$

110.　已知兩角及對邊之一者　若已知弧三角形之

$$A=73°\ 36'\ 18''.30$$

$$B=58\quad 21\quad 56.78$$

$$\alpha=98765\ \text{英尺}$$

則先借A, B兩角求C′。即$C'=180°-(A+B)$。次用平三角形面積公式

$$S'=\frac{\alpha^2\sin B\sin C'}{2\sin A}$$

求得面積內平方尺數之對數爲

$$\log s=9.507\ 6169$$

$$\text{減常數}=\underline{9.326\ 7742}$$

$$\log n=0.180\ 8427$$

$$\therefore\quad E=1''.517$$

$$\therefore\quad A'=73°\ 36'\ 18''.30-0''.51=73°\ 36'\ 17''.79$$

$$B'=58^\circ\ 21'\ 56''.78-0''.51=58^\circ\ 21'\ 56''.27$$

而 $C'=\qquad\qquad\qquad\qquad =48\quad 1\quad 45.94$

故 $C=48\quad 1\quad 45.94+0.51=48\quad 1\quad 46.45$

末用平三角之正弦定則。求得

$\beta=87653.92$ 英尺

$\gamma=76543.00$,, ,,