Mathematik für Anwender I

Prof. Dr. Holger Brenner
Universität Osnabrück
Fachbereich Mathematik/Informatik

Wintersemester 2020-2021

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Skript gibt die Vorlesung Mathematik für Anwender I wieder, die ich im Wintersemester 2020/2021 an der Universität Osnabrück gehalten habe.

Der Text wurde auf Wikiversity geschrieben und steht unter der Creative-Commons-Attribution-ShareAlike 4.0 Lizenz. Die Bilder wurden von Commons übernommen und unterliegen den dortigen freien Lizenzen. In einem Anhang werden die einzelnen Bilder mit ihren Autoren und Lizenzen aufgeführt. Die CC-BY-SA 4.0 Lizenz ermöglicht es, dass das Skript in seinen Einzelteilen verwendet, verändert und weiterentwickelt werden darf.

Bei Markus Wageringel bedanke ich mich für die Durchführung des Übungsbetriebs, bei den Tutoren Jannik Heckmann, Fynn Pörtner, Nikola Tsarigradski für die Durchführung der Tutorien und die Korrekturen der abgegebenen Aufgaben. Bei Frau Marianne Gausmann bedanke ich mich für die Erstellung der Pdf-Files und bei den Studierenden für einzelne Korrekturen und Anregungen.

Holger Brenner

1. Vorlesung - Logik und Argumentation

Ungewöhnliche Zeiten erfordern ungewöhnliche Maßnahmen. Bei all dieser sozialen Distanz sehnt sich der Mensch nach Nähe und Wärme. Deshalb ist uns ein Vorlesungshund zugelaufen. Sie heißt Vorli.

> Wenn der Wind der Veränderung weht, bauen die einen Mauern und die anderen Windmühlen
>
> Chinesische Weisheit

1.1. **Mathematik für Anwender.**

Mathematik hat eine Vielzahl an Anwendungen. Sie hilft beispielsweise, für ein Publikum einer gewissen Größe einen geeigneten Raum zu finden, indem man die Anzahl der Personen mit der Anzahl der Sitzgelegenheiten vergleicht. Beide Mengen werden mit der Hilfe von natürlichen Zahlen erfasst und die Mathematik stellt Methoden zur Verfügung, zwei solche Zahlen miteinander zu vergleichen, auch ohne dass man mit den Leuten verschiedene Räume durchprobieren muss. Sie hilft, die Ausgaben und die Einnahmen einer Person in Balance zu halten, indem man beispielsweise aus dem Monatseinkommen berechnen kann, wie viel man pro Tag ausgeben darf.

Mathematik hat Anwendungen im technischen Bereich, in der Bildverarbeitung, der Medizin, bei Datenübermittlung und Datenspeicherung, beim Entwurf von Suchalgorithmen, bei logistischen Problemen.

Hier interessieren wir uns hauptsächlich für Anwendungen der Mathematik in anderen Wissenschaften. Mathematik wird in sehr vielen Wissenschaften angewendet, in den Naturwissenschaften wie Physik, Chemie, Biologie, in der

Informatik, als Statistik in Psychologie, Soziologie und Geschichte, als geometrisches Hilfsmittel in der Kartographie, in den Wirtschaftswissenschaften.

Dabei stellt die Mathematik eine Sprache bereit, mit der empirische Begebenheiten quantitativ beschrieben werden können, sie hilft bei der *Modellierung* (der *Theoriebildung*) von beobachtbaren Phänomen der Fachdisziplinen. Durch Techniken wie *Interpolation* und *Extrapolation* erlaubt sie Prognosen, beispielsweise in der Meteorologie oder über die zukünftige Entwicklung der Bevölkerung auf der Erde.

In diesen verschiedenen Bereichen wird eine Vielzahl an mathematischen Methoden angewendet, die sich in ihrer Komplexität stark unterscheiden, und zwar sowohl hinsichtlich ihrer innermathematischen Struktur als auch in Hinblick darauf, wie sie angewendet werden. Beispielsweise ist die Statistik eine komplexe mathematische Disziplin, wird aber in vielen Wissenschaften (aus gutem Grund) direkt und ohne tiefere Reflexion (als *black box*) angewendet, um etwa psychologische Tests zu beurteilen. Dagegen liegt in der (theoretischen) Physik eine so enge Beziehung zur Mathematik vor, dass die physikalischen Theorien ohne die Mathematik gar nicht existieren könnten, und ein Großteil der Mathematik ist selbst wiederum durch die Physik entstanden. Bei Differentialgleichungen kann man sich lediglich für ihre Numerik (konkrete approximierende Berechnungstechniken) interessieren oder aber für ihre Adäquatheit für ein bestimmtes Problem oder ihr qualitatives Lösungsverhalten. Es gibt also eine große Bandbreite, in welcher Tiefe und Substanz Mathematik in den Wissenschaften angewendet wird.

Für den überwiegenden Teil der mathematischen Anwendungen kann man aber sagen, dass ihr angemessener und verständnisvoller Einsatz eine substantielle mathematische Ausbildung voraussetzt und nicht erst im Kontext eines konkreten Problems gelernt werden kann. Es ist die Zielsetzung dieses Kurses, ein mathematisches Fundament zu legen, mit dem man in unterschiedlichen wissenschaftlichen Kontexten bestehen kann.

Diese Zielsetzung erklärt zu einem guten Teil den Aufbau und die Stoffauswahl für diesen Kurs. Es geht um eine solide Grundlegung für die Mathematik als solche, ihre Arbeitsweise, ihre Prinzipien, ihre Argumentationsschemata, ihre begriffliche Fundierung. Dagegen spielen konkrete Anwendungen, wie sie letztlich in den Einzelwissenschaften auftreten, eine geringere Rolle, allein schon deshalb, weil realistische Anwendungen typischerweise eine intimere Kenntnis der Einzelwissenschaften erfordert. Letztlich entscheiden auch die Einzelwissenschaften, was sie für ein realistisches Szenario und eine angemessene Modellierung halten. Die Mathematik stellt dazu Hilfsmittel bereit, auf die dann zurückgegriffen werden kann.

Es ist wohl zunächst ein Wort darüber angebracht, wie sich die schulische Mathematik und die Mathematik an einer Universität unterscheiden, und warum. Die kurze Antwort ist, dass an einer Universität Mathematik als

Wissenschaft betrieben wird. Von daher ist es sinnvoll, sich etwas allgemeiner zu fragen, was wissenschaftliches Arbeiten ausmacht. Eine wichtige Beobachtung ist, dass wissenschaftliche Aussagen begründet werden müssen. Betrachten wir, was eine Argumentation im wissenschaftlichen oder im mathematischen Kontext bedeutet.

1.2. **Mathematische Argumentation.**

In einer Argumentation versucht man, eine Behauptung mittels allgemein anerkannter Prinzipien zu begründen, als wahr (oder sinnvoll) zu erweisen. Grundsätzlich kann man mit sich selbst argumentieren, typischerweise gibt es ein Publikum, das man von der Behauptung überzeugen möchte. Argumentationen gibt es in den unterschiedlichsten Kontexten, in der Wissenschaft, in der Politik, in Beziehungen. Dabei gibt es kontextspezifische Prinzipien und Argumentationsmuster, im politischen Kontext beruft man sich gerne auf weitgehend anerkannte Grundsätze wie Menschenrechte, Grundgesetz, den Willen des Volkes, um daraus unter Berücksichtigung von Daten und Fakten eine politische Entscheidung herzuleiten. Die Erfahrung lehrt, dass dort die Argumente nicht so gut sind, um alle überzeugen zu können, und dass dort auch die Interessen von spezifischen Gruppen vertreten werden.

Auch in der mathematischen Argumentation versucht man, die Wahrheit von Behauptungen (oder die Korrektheit eines Rechenweges oder die Angemessenheit einer Modellierung) zu begründen. Die eingesetzten Mittel, die Argumentationsstrenge hängen auch da von der Zielgruppe, ihrem Vorwissen und ihrer Motivation, der Beziehung (Bindung, Vertrauen) zwischen der Person, die die Behauptung vertritt, und den Personen, die überzeugt werden sollen (beispielsweise Lehrer und Schüler), ab.

Die mathematische Argumentation im wissenschaftlichen Kontext verfügt in mehrfacher Hinsicht über gewisse Argumentationsstandards. Eine wissenschaftliche Argumentation zeichnet sich durch (insbesondere im mathematisch-naturwissenschaftlichen Kontext) folgende Punkte aus.

- Die starke Präsenz von Fachbegriffen, die definiert werden müssen und gemäß ihrer Definition eingesetzt werden.
- Die Existenz weniger benennbarer Grundprinzipien.[1]
- Der Einsatz von Logik zum Erschließen neuer Erkenntnisse.
- Die freie Verwendung von in der Wissenschaft bereits etabliertem Wissen.
- Die freie Zugänglichkeit und Überprüfbarkeit der Ergebnisse.[2]

[1] Über die selbst wiederum reflektiert wird und wo die Grenze zwischen Wissenschaft und Philosophie verläuft.

[2] Dies ist ein großer Unterschied zur Esoterik, wo das „Wissen“ nur unter ganz speziellen Bedingungen (Verschwiegenheit, Würdigkeit, ...) von Eingeweihten weitergegeben wird.

• Der Anspruch, dass die (Gültigkeit der) Erkenntnisse unabhängig von subjektiven Wünschen und Empfindungen[3] sind, dass sie zeitlos und kulturunabhängig sind.[4]

In der mathematischen Argumentation im wissenschaftlichen Kontext treten diese Punkte besonders deutlich hervor,[5] was sich insbesondere schon darin niederschlägt, dass es einen eigenen Begriff für das mathematische Argumentieren gibt: *Beweis*. Eine bewiesene mathematische Behauptung nennt man einen *Satz*.

• Die mathematischen Begriffe werden alle exakt und nur unter Verwendung von anderen mathematischen Begriffen definiert. Die Definitionen sind so angelegt, dass jedes sinnvolle mathematische Objekt entweder unter den Begriff fällt oder nicht, und zwar unabhängig davon, ob man das immer entscheiden kann.[6]

• Die Mathematik wird heute (seit ca. 130 Jahren) auf Mengen aufgebaut. Sie ist axiomatisch-logisch organisiert, aber realweltlich-anschaulich motiviert.

• Die Logik ist das Handwerkszeug der Mathematik. Es gibt (im Prinzip) eine vollständige Liste von erlaubten Schlussweisen der Aussagenlogik und der Prädikatenlogik.[7]

• Bewiesene mathematische Aussagen, also Sätze, werden weiterverwendet.[8] Für eine systematische Darstellung eines Teilgebietes der Mathematik (wie einer Vorlesung oder einem Buch) bedeutet dies, dass man die grundlegenden Sachen zuerst darstellt und darauf zunehmend komplexere Sachen aufbaut. Wenn ein zuvor bewiesener Satz dann irgendwo eingesetzt wird, wird über diesen Satz nicht nachgedacht, sondern nur, ob in der jetzigen Situation alle Voraussetzungen erfüllt sind, damit man den Satz anwenden kann.

• Mathematik wird in Zeitschriften und Büchern veröffentlicht, in Vorlesungen gelehrt, ist im Internet und in Bibliotheken zugänglich.[9]

---

[3] Das heißt keineswegs, dass die Erkenntnisse und ihre Entdeckungen nicht von Gefühlen begleitet würden. Im Gegenteil, Wissenschaft macht denen, die sie betreiben, ziemlich viel Spaß.

[4] Die Generierung von Wissen ist sehr stark zeit- und kulturabhängig.

[5] Dafür fehlt der Mathematik ein entscheidender Punkt der Naturwissenschaften, die Beobachtung, die Empirie, das Experiment. Deshalb wird die Mathematik oft nicht zu den Naturwissenschaften gerechnet. Aber auch die Zuordnung zu den Geisteswissenschaften ist schwierig, so spricht man von *Strukturwissenschaft*.

[6] Insbesondere sind beispielhafte Definitionen vom Typ etwas wie ... nicht zulässig.

[7] Dies ist Gegenstand der mathematischen Logik.

[8] Sie sind auch nicht patentierbar.

[9] Einschränkung: Dies gilt nicht unbedingt für sicherheitsrelevante kryptologische Forschung, die zum Teil an regierungsnahen Forschungsinstituten durchgeführt wird.

• Die Mathematik wird heute in einer erdumspannenden Gemeinschaft entwickelt.[10]

In einem Universitätsstudium sollen die Studierenden an eine Wissenschaft herangeführt werden, also ihre Grundbegriffe, ihren Aufbau, ihre Arbeitstechniken, ihre wichtigsten Ergebnissse und ihre historischen Meilensteine kennen lernen, sie sollen eine umfassende wissenschaftliche Kompetenz in dem gewählten Gebiet erreichen. Hier ergeben sich drei naheliegende Fragen: Ist Wissenschaft schwierig? Ist ein Studium schwierig? Ist dieser Kurs schwierig? Die grobe Antwort ist ja, ziemlich. Für den Kurs gilt wohl Folgendes: Wenn es darum geht, die Inhalte des Kurses vollumfänglich und tiefgreifend zu verstehen, alle Aufgaben selbständig lösen zu können und dabei den Überblick zu bewahren, so ist es schwierig und setzt eine große mathematische Begabung voraus. Wenn es aber darum geht, den Kurs „irgendwie“ zu bestehen, so liegen die Schwierigkeiten eher im organisatorischen Bereich: kontinuierlich und konsequent den Stoff bearbeiten, Leitthemen und typische Fragen erkennen, sich selbst motivieren, Gleichgesinnte finden, eigene Schwächen erkennen und adäquat darauf reagieren (z.B. merken, dass Strategien, die in der Schule ausgereicht haben, jetzt nicht mehr ausreichen).

1.3. **Aussagen.**

Oben haben wir schon von der tragenden Rolle von Aussagen und die sie verbindende Logik in den Wissenschaften und in der Mathematik gesprochen, dies wollen wir nun präzisieren.

Eine *Aussage* ist ein sprachliches Gebilde, das *wahr* oder *falsch* sein kann.[11] Es ist durchaus erlaubt, dass man nicht entscheiden kann, ob die Aussage wahr oder falsch ist, weil man dazu Zusatzinformationen benötigt. Wichtig ist allein, dass die Prädikate wahr und falsch sinnvolle Prädikate des Gebildes aufgrund seiner syntaktischen und semantischen Gestalt sind.

Die Bedingung der Bedeutungsklarheit wird von natürlich-sprachlichen Aussagen selten erfüllt. Nehmen wir z.B. den Satz

Dieses Pferd ist schnell.

Einerseits haben wir keine Information, um welches Pferd es sich handelt, von dem da die Rede ist, und die Gültigkeit der Aussage hängt vermutlich davon ab, welches Pferd gemeint ist. Andererseits ist die Bedeutung von „schnell“ nicht so fest umrissen, dass, selbst wenn es klar wäre, um welches Pferd es

---

[10] Wobei das Hauptgewicht nach wie vor auf den Industrieländern liegt. Die anderen Länder holen aber schnell auf. Die wichtigste mathematische Auszeichnung, die Fields-Medaille, ging 2014 an eine Iranerin, einen Brasilianer, einen Kanadier indischer Herkunft und einen Österreicher.

[11] Statt „wahr“ sagt man auch, dass die Aussage *gilt* oder dass sie *richtig* ist, statt „falsch“ auch, dass sie nicht gilt.

sich handelt, vermutlich Uneinigkeit herrscht, ob es als schnell gelten soll oder nicht. Weitere alltagssprachliche Aussagen sind

Marsmenschen sind grün.

Ich fresse einen Besen.

Heinz Ngolo und Mustafa Müller sind Freunde.

In der natürlichen Sprache besteht die Möglichkeit, durch Zusatzinformationen, Kontextbezug, intersubjektive Vereinbarungen und kommunikative Bedeutungsangleichungen eine Gesprächsituation zu erzeugen, in der man über die Gültigkeit von solchen nicht scharf definierten Aussagen weitgehende Einigkeit erzielen kann. In der Logik und in der Mathematik hingegen sind diese praktischen Notlösungen nicht erlaubt, sondern die Bedeutung einer Aussage soll allein aus der Bedeutung der in ihr verwendeten Begriffe erschließbar sein, wobei diese Begriffe zuvor klar und unmissverständlich definiert worden sein müssen. Einige mathematische Aussagen (egal ob wahr oder falsch) sind

$5 > 3$.

$5 < 3$.

5 ist eine natürliche Zahl.

Es ist $7 + 5 = 13$.

Primzahlen sind ungerade.

Wenn man diese Aussagen versteht, und insbesondere die in ihnen verwendeten Begriffe und Symbole kennt, so sieht man, dass es sich um Aussagen handelt, die entweder wahr oder falsch sind, und zwar unabhängig davon, ob der Leser weiß, ob sie wahr oder falsch sind. Ob ein sprachliches Gebilde eine Aussage ist hängt nicht vom Wissen, ob sie wahr oder falsch ist, oder vom Aufwand ab, mit dem man durch zusätzliches Nachforschen, durch Experimente oder durch logisch-mathematisches Überlegen entscheiden könnte, ob sie wahr oder falsch ist. Bei den folgenden Beispielen handelt es sich zwar um mathematische Objekte, aber nicht um Aussagen:

5

5+11

Die Menge der Primzahlen

$A \cap B$

Eine Summe von fünf Quadraten

$\int_a^b f(t)dt$.

Statt uns jetzt mit konkreten Aussagen auseinander zu setzen, nehmen wir im Folgenden den strukturellen Standpunkt ein, dass eine Aussage eine Aussagenvariable p ist, die einen der beiden *Wahrheitswerte* wahr oder falsch annehmen kann. Zunächst interessiert uns dann, wie sich diese Wahrheitsbelegungen bei einer Konstruktion von neuen Aussagen aus alten Aussagen verhalten.

1.4. **Verknüpfungen von Aussagen.**

Man kann aus verschiedenen Aussagen neue Aussagen bilden. Aus der Aussage

Ich fresse einen Besen

kann man die *negierte Aussage*

Ich fresse *nicht* einen Besen[12]

machen, und aus den beiden Aussagen

Marsmenschen sind grün

und

Ich fresse einen Besen

kann man beispielsweise die folgenden neuen Aussagen basteln.

Marsmenschen sind grün *und* ich fresse einen Besen

Marsmenschen sind grün *oder* ich fresse keinen Besen

Wenn Marsmenschen grün sind, *dann* fresse ich einen Besen

Wenn nicht gilt, dass Marsmenschen grün sind, dann fresse ich einen Besen

Wenn Marsmenschen grün sind, dann fresse ich keinen Besen

Wenn nicht gilt, dass Marsmenschen grün sind, dann fresse ich keinen Besen

[12]Die sicherste Art, zur *Negation* zu kommen, ist eine Konstruktion wie „es ist nicht der Fall, dass ...“ zu verwenden. Dies ist insbesondere beim anderen Beispielsatz zu bedenken, die Aussage „Marsmenschen sind nicht grün“ kann man so verstehen, dass alle Marsmenschen nicht-grün sind, oder, dass eben nicht alle Marsmenschen grün sind, es also Ausnahmen gibt. Siehe auch den Abschnitt über Quantoren weiter unten.

Marsmenschen sind *genau dann* grün, *wenn* ich einen Besen fresse

Hierbei werden die einzelnen Aussagen für sich genommen nicht verändert (bis auf gewisse grammatische Anpassungen), sondern lediglich in einen logischen Zusammenhang zueinander gebracht. Eine solche logische Verknüpfung ist dadurch gekennzeichnet, dass sich ihr Wahrheitsgehalt allein aus den Wahrheitsgehalten der beteiligten Aussagen und der Bedeutung der *grammatischen Konjunktionen* (aussagenlogisch spricht man von *Junktoren*) ergibt und keine weitere Information dafür erforderlich ist. Die Aussage

Marsmenschen sind grün und ich fresse keinen Besen

ist beispielsweise genau dann wahr, wenn sowohl Marsmenschen grün sind und ich keinen Besen fresse. Das ist jedenfalls die Bedeutung der logischen „und"-Verknüpfung. Eine inhaltliche Beziehung zwischen den beiden Teilaussagen ist nicht nötig.

Betrachten wir zum Vergleich eine Aussage wie

Die grünen Marsmenschen fressen Besen

Hier entsteht eine völlig neue Aussage, die lediglich einzelne Vokabeln oder Prädikate der vorgegebenen Aussagen verwendet, ihr Wahrheitsgehalt lässt sich aber keineswegs aus den Wahrheitsgehalten der vorgegebenen Aussagen erschließen.

Eine logische Verknüpfung von Aussagen liegt vor, wenn sich der Wahrheitsgehalt der Gesamtaussage aus den Wahrheitsgehalten der Teilaussagen ergibt. Die beteiligten Verknüpfungen legen dabei fest, wie sich die Wahrheitswerte der Gesamtaussage bestimmen lassen.

1.5. **Aussagenvariablen und Junktoren.**

Um sich die Abhängigkeiten von zusammengesetzten Aussagen allein von den einzelnen Wahrheitsgehalten der beteiligten Teilaussagen und den Junktoren, nicht aber von den konkreten Aussagen und ihren Bedeutungen klarer zu machen, ist es sinnvoll, mit *Aussagenvariablen* zu arbeiten und die Junktoren durch Symbole zu repräsentieren. Für Aussagen schreiben wir jetzt

$$p, q, \ldots ,$$

und wir interessieren und also nicht für den Gehalt von p, sondern lediglich für die möglichen Wahrheitswerte (oder *Belegungen*) von p, die wir mit w (wahr) oder f (falsch) bezeichnen (gelegentlich verwendet man auch die Wahrheitswerte 1 und 0). Bei der *Negation* werden einfach die Wahrheitswerte vertauscht, was man mit einer einfachen *Wahrheitstabelle* ausdrückt:

Negation

p	$\neg p$
w	f
f	w

Bei einer konkreten Aussage gibt es in der Regel mehrere sprachliche Möglichkeiten, die Negation zu formulieren. Um die Aussage „ich fresse einen Besen“ zu negieren, ist es egal, ob man sagt:

> Ich fresse nicht einen Besen.
>
> Ich fresse keinen Besen.
>
> Es ist nicht der Fall, dass ich einen Besen fresse.
>
> Es trifft nicht zu, dass ich einen Besen fresse.

Die Negation wirkt auf eine einzelne Aussage, man spricht von einem *einstelligen Operator*. Kommen wir nun zu *mehrstelligen Operatoren*, die von mindestens zwei Aussagen abhängen. Bei der Verknüpfung von zwei Aussagen gibt es insgesamt vier mögliche Kombinationen der Wahrheitswerte, so dass jede logische Verknüpfung dadurch festgelegt ist, wie sie diesen vier Kombinationen einen Wahrheitswert zuordnet. Daher gibt es insgesamt 16 logische Verknüpfungen, die wichtigsten sind die folgenden vier.

Die *Konjunktion* ist die *Und-Verknüpfung*. Sie ist genau dann wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind; sie ist also falsch, sobald nur eine der beteiligten Aussagen falsch ist. Die *Wahrheitstabelle* der Konjunktion sieht so aus.

Konjunktion

p	q	$p \wedge q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Die *Disjunktion* (oder *Alternation*) ist die einschließende *Oder-Verknüpfung*. Sie ist wahr sobald mindestens eine der Teilaussagen wahr ist, und insbesondere auch dann wahr, wenn beide Aussagen zugleich wahr sind. Sie ist nur in dem einzigen Fall falsch, dass beide Teilaussagen falsch sind. Offensichtlich sind bei einer Konjunktion und einer Disjunktion die beteiligten Teilaussagen gleichberechtigt.

Disjunktion

p	q	$p \vee q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Die *Implikation* ist die in der Mathematik wichtigste Verknüpfung. Mathematische Sätze haben fast immer die Gestalt einer (verschachtelten) Implikation. Beispiele sind (siehe Korollar 6.6 und Lemma 7.9)

> Wenn ein Polynom den Grad d besitzt, dann hat es höchstens d Nullstellen.

Wenn eine Folge konvergiert, dann ist sie beschränkt.

Der logische Gehalt einer Implikation ist, dass aus der Gültigkeit einer *Voraussetzung* die Gültigkeit einer *Konklusion* folgt.[13] Sie wird meistens durch „Wenn p wahr ist, dann ist auch q wahr" (oder kurz: Wenn p, dann q) ausgedrückt. Ihre Wahrheitsbedingung ist daher, dass wenn p mit wahr belegt ist, dann muss auch q mit wahr belegt sein. Dies ist erfüllt, wenn p falsch ist oder wenn q wahr ist.[14] Ihre Wahrheitstabelle ist daher

Implikation

p	q	$p \to q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Bei einer Implikation sind die beiden beteiligten Teilaussagen nicht gleichberechtigt, die Implikationen $p \to q$ und $q \to p$ sind verschiedene Aussagen. Eine Implikation hat also eine „Richtung".[15] Im allgemeinen Gebrauch und auch in der Mathematik werden Implikationen zumeist dann verwendet, wenn der Vordersatz der „Grund" für die Konklusion ist, wenn die Implikation also einen kausalen Zusammenhang ausdrückt. Diese Interpretation spielt aber im aussagenlogischen Kontext keine Rolle.

Wenn die beiden Implikationen $p \to q$ und $q \to p$ zugleich gelten, so wird das durch „genau dann ist p wahr, wenn q wahr ist" ausgedrückt. Man spricht von einer *Äquivalenz* der beiden Aussagen, die Wahrheitstabelle ist

[13] Genauer gesagt haben mathematische Sätze fast immer die Gestalt $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \to q$.

[14] An die Wahrheitsbelegung einer Implikation für den Fall, wo der Vordersatz falsch ist, muss man sich etwas gewöhnen. Der Punkt ist, dass wenn man eine Implikation $p \to q$ beweist, dass man dann p als wahr annimmt und davon ausgehend zeigen muss, dass auch q wahr ist. Der Fall, dass p falsch ist, kommt also in einem Implikationsbeweis gar nicht explizit vor. In diesem Fall gilt die Implikation, obwohl sie keine „Schlusskraft" besitzt. Nehmen wir als Beispiel die mathematische Aussage, dass wenn eine natürliche Zahl n durch vier teilbar ist, sie dann gerade ist. Dies ist eine wahre Aussage für alle natürlichen Zahlen, sie gilt insbesondere auch für alle Zahlen, die *nicht* durch vier teilbar sind. Es gibt auch jeweils für alle drei Wahrheitsbelegungen, die eine Implikation wahr machen, Beispiele von natürlichen Zahlen, die genau diese Wahrheitsbelegung repräsentieren, nicht aber für die vierte.

[15] Bei einer Implikation $p \to q$ sagt man auch, dass p eine *hinreichende Bedingung* für q und dass q eine *notwendige Bedingung* für p ist. Siehe dazu auch die Wahrheitstabelle zur Kontraposition weiter unten.

Äquivalenz

p	q	$p \leftrightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Beispiele für eine mathematische Äquivalenzaussage sind:

Eine natürliche Zahl n ist genau dann gerade, wenn sie im Zehnersystem auf $0, 2, 4, 6$ oder 8 endet.

Ein Dreieck ist genau dann rechtwinklig, wenn es eine Seite gibt, deren Quadrat gleich der Summe der beiden anderen Seitenquadrate ist.

Die Hinrichtung im zweiten Beispielsatz ist dabei der Satz des Pythagoras, die Rückrichtung gilt aber auch. Achtung: In gewissen Kontexten werden Äquivalenzen als Implikationen formuliert. Dies gilt beispielsweise für Belohnungen, Bestrafungen und auch in mathematische Definitionen. Wenn man sagt: „wenn du heute brav bist, dann gehen wir morgen in den Zoo", so meint man in aller Regel, dass man auch nur dann in den Zoo geht, wenn man brav ist. Mathematische Definitionen wie „eine Zahl heißt gerade, wenn sie ein Vielfaches der 2 ist", sind als genau dann, wenn zu verstehen.

Unter Verwendung der Negation kann man jede logische Verknüpfung durch die angeführten Verknüpfungen ausdrücken, wobei man noch nicht mal alle braucht. Z.B. kann man die Konjunktion (und ebenso die Implikation und die Äquivalenz) auf die Disjunktion zurückführen, die Wahrheitstabelle[16]

Konjunktion als Disjunktion

p	q	$\neg(\neg p \vee \neg q)$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

zeigt nämlich, dass die Wahrheitsfunktion von $\neg(\neg p \vee \neg q)$ mit der Wahrheitsfunktion von $p \wedge q$ übereinstimmt. Daher sind die beiden Ausdrücke logisch gleichwertig. Bei einem solchen nur leicht verschachtelten Ausdruck kann man die Wahrheitswerte noch einfach berechnen und damit die Wahrheitsgleichheit mit der Konjunktion feststellen. Bei komplizierteren (tiefer verschachtelten) Ausdrücken ist es sinnvoll, abhängig von den Belegungen der beteiligten Aussagenvariablen die Wahrheitswerte der Zwischenausdrücke zu berechnen. Im angegebenen Beispiel würde dies zur Tabelle

[16]Im Folgenden verwenden wir, um Klammern zu sparen, die Konvention, dass die Negation stärker bindet als alle mehrstelligen Junktoren, und dass die Konjunktion stärker bindet als die anderen zweistelligen Junktoren.

Konjunktion als Disjunktion

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$
w	w	f	f	f	w
w	f	f	w	w	f
f	w	w	f	w	f
f	f	w	w	w	f

führen. Natürlich kann man statt zwei auch beliebig viele Aussagenvariablen verwenden und daraus mit den Verknüpfungen neue Aussagen konstruieren. Die Wahrheitsbelegung der zusammengesetzten Aussagen lassen sich dann ebenfalls in entsprechend größeren Wahrheitstabellen darstellen.

1.6. **Tautologien.**

Bei Einzelaussagen und zusammengesetzten Aussagen ist jeder Wahrheitswert erlaubt, und die Wahrheitswerte bei den verknüpften Aussagen ergeben sich aus den Einzelbelegungen über die Wahrheitsregeln, die die Junktoren auszeichnen. Abhängig von den Belegungen können somit alle Aussagen wahr oder falsch sein. Besonders interessant sind aber solche Aussagen, die unabhängig von den Einzelbelegungen stets wahr sind. Solche Aussagen nennt man *Tautologien* (oder *allgemeingültig*). Sie sind für die Mathematik vor allem deshalb wichtig, weil sie erlaubten Schlussweisen entsprechen, wie sie in Beweisen häufig vorkommen. Wenn man beispielsweise schon die beiden Aussagen p und $p \rightarrow q$ bewiesen hat, wobei hier p und q für konkrete Aussagen stehen, so kann man daraus auf die Gültigkeit von q schließen. Die zugrunde liegende aussagenlogische Tautologie ist

$$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q\,.$$

Wie gesagt, eine Tautologie ist durch den konstanten Wahrheitswert wahr gekennzeichnet. Der Nachweis, dass eine gegebene Aussage eine Tautologie ist, verläuft am einfachsten über eine Wahrheitstabelle.

Ableitungsregel **(*Modus Ponens*)**

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

Doppelnegation

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$	$p \leftrightarrow \neg(\neg p)$
w	f	w	w
f	w	f	w

Tertium non datur

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
w	f	w
f	w	w

Die Regel *Tertium non datur* geht auf Aristoteles zurück und besagt, dass eine Aussage (entweder) wahr oder falsch ist und es keine dritte Möglichkeit gibt. Die obige Regel drückt formal gesehen nur aus, dass mindestens ein Wahrheitswert gelten muss, die Regel davor sagt, dass p wahr zugleich $\neg p$ wahr ausschließt, was man auch den *Satz vom Widerspruch* nennt (zusammenfassend spricht man auch vom *Bivalenzprinzip*). Die Gültigkeit dieser Regeln ist bei vielen umgangssprachlichen Aussagen fragwürdig, im Rahmen der Aussagenlogik und der Mathematik haben sie aber uneingeschränkt Gültigkeit, was wiederum damit zusammenhängt, dass in diesen Gebieten nur solche Aussagen erlaubt sind, denen ein eindeutiger Wahrheitswert zukommt. Als Beweisprinzip schlägt sich dieses logische Prinzip als *Beweis durch Fallunterscheidung* nieder, wobei die folgende Tautologie dieses Beweisprinzip noch deutlicher ausdrückt.

Fallunterscheidung

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg p \to q$	$((p \to q) \wedge (\neg p \to q))$	$((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q$
w	w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	w	f	w
f	w	w	w	w	w	w
f	f	w	w	f	f	w

Bei der Fallunterscheidung will man q beweisen, und man beweist es dann einerseits (Fall 1) unter der zusätzlichen Annahme p und andererseits (Fall 2) unter der zusätzlichen Annahme $\neg p$. Man muss dabei zweimal was machen, der Vorteil ist aber, dass die zusätzlichen Annahmen zusätzliche Methoden und Techniken erlauben.

Die *Kontraposition* wird häufig in Beweisen verwendet, ohne dass dies immer explizit gemacht wird. In einem Beweis nimmt man einen pragmatischen Standpunkt ein, und manchmal ist es einfacher, von $\neg q$ nach $\neg p$ zu gelangen als von p nach q.

Kontraposition

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \to \neg p$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
w	w	w	f	f	w	w
w	f	f	f	w	f	w
f	w	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w

Die *Widerspruchsregel* ist auch ein häufiges Argumentationsmuster. Man zeigt, dass aus einer Aussage p ein Widerspruch, oft von der Form $q \wedge \neg q$, folgt, und schließt daraus, dass p nicht gelten kann, also $\neg p$ gelten muss.

Widerspruchsregel

p	q	$p \to q$	$p \to \neg q$	$(p \to q) \wedge (p \to \neg q)$	$\neg p$	$(p \to q) \wedge (p \to \neg q) \to \neg p$
w	w	w	f	f	f	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

1. Arbeitsblatt

1.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 1.1. Welche der folgenden Aussagen sind wissenschaftliche Fakten? Zu welcher Wissenschaft gehören sie? Worauf beruht ihre Gültigkeit bzw. Nichtgültigkeit?

(1) Rauchen ist gesundheitsschädlich.
(2) Die Dinosaurier sind vor ca. 65 Millionen Jahren ausgestorben.
(3) Die Dinosaurier sind gar nicht ausgestorben.
(4) So etwas wie Dinosaurier hat es nie gegeben.
(5) Die Evangelien wurden nicht von Augenzeugen geschrieben.
(6) Die *abc*-Vermutung ist inzwischen ein Satz.
(7) Die *abc*-Vermutung ist immer noch eine Vermutung.
(8) Die Relativitätstheorie ist bestätigt.
(9) Es ist nicht möglich, Gold aus anderen Stoffen herzustellen.
(10) Die Welt wird bald untergehen.

Aufgabe 1.2. In der Vorlesung wurde ein vergleichsweise positives Bild von Wissenschaft angedeutet. Es gibt auch völlig andere Einschätzungen, wie in den folgenden Formulierungen zum Ausdruck kommt. Was ist Ihre Meinung?

(1) Wissenschaft ist in erster Linie ein Herrschaftsinstrument.
(2) Wissenschaft dient hauptsächlich zur abgedrehten Selbstbeschäftigung einer kleinen Elite.
(3) Wissenschaft ist ein modernes Märchen, ein sprachliches Konstrukt, ein diskursives Narrativ, das man ebenso dekonstruieren kann.
(4) Wissenschaft dient allein der Aufrechterhaltung des Patriarchats.
(5) Wissenschaft ist gegen Gott.
(6) Wissenschaft besteht aus einer willkürlichen Ansammlung von Aussagen, das Gegenteil ist stets genauso wahr.
(7) Die sogenannte Wissenschaft liefert nur ein sehr oberflächliches Bild. Wahre Erkenntnis erfordert das Einswerden mit der Welt.

Aufgabe 1.3. Warum ist Mathematik schwierig, obwohl darin doch alles logisch ist?

Aufgabe 1.4. Paraphrasiere die folgenden Aussagen als Wenn-dann-Aussagen.

(1) Was Hänschen nicht lernt, lernt Hans nimmermehr.
(2) Was der Bauer nicht kennt frisst er nicht.
(3) Sobald die Sonne scheint geht Lucy nach draußen.
(4) Ab 32 Punkten bekommt man eine 1.
(5) Mit dieser Einstellung sollten Sie nicht Lehrer werden.
(6) Was uns nicht umbringt macht uns härter.
(7) Früh übt sich, wer ein Meister werden will.
(8) Wer A sagt muss auch B sagen.
(9) Wer nicht kommt zur rechten Zeit, der muss sehn, was übrig bleibt.
(10) Wer selber ohne Sünde ist werfe den ersten Stein.

Aufgabe 1.5. Erstelle die Kontrapositionen zu den in Aufgabe 1.4 formulierten Aussagen. Vermeide dabei Doppelnegationen.

Aufgabe 1.6. Formalisere die Aussage „Wenn der Wind der Veränderung weht, bauen die einen Mauern und die anderen Windmühlen“ mit Aussagenvariablen und Junktoren.

Aufgabe 1.7. Folgende Implikationen stehen fest.

(1) Wenn Mustafa Müller lustige Grimassen macht, dann muss sich Heinz Ngolo den Bauch halten.
(2) Wenn er zu viele Gummibärchen isst, dann muss sich Heinz Ngolo den Bauch halten.
(3) Wenn er einen Ball gegen den Bauch bekommt, dann muss sich Heinz Ngolo den Bauch halten.

Im Moment muss sich Heinz Ngolo nicht den Bauch halten. Was kann man daraus schließen?

Aufgabe 1.8. Es gilt: Wenn keine Ferien sind und kein Wochenende ist und er nicht krank ist, dann muss Heinz Ngolo in die Schule. Heute muss Heinz Ngolo nicht in die Schule. Was kann man daraus schließen?

Aufgabe 1.9. Die folgenden Implikationen stehen fest.

(1) Genau dann freuen sich die Regenwürmer, wenn es regnet oder schneit.
(2) Genau dann freuen sich die Kinder, wenn die Sonne scheint oder es schneit.

Welche Schlussfolgerung kann man in den folgenden Fällen ziehen.

a) Die Kinder und die Regenwürmer freuen sich.

b) Die Kinder freuen sich und die Regenwürmer freuen sich nicht.

c) Die Kinder freuen sich nicht und die Regenwürmer freuen sich.

Aufgabe 1.10.*

Folgende Aussagen seien bekannt.

(1) Der frühe Vogel fängt den Wurm.
(2) Doro wird nicht von Lilly gefangen.
(3) Lilly ist ein Vogel oder ein Igel.
(4) Für Igel ist 5 Uhr am Morgen spät.
(5) Doro ist ein Wurm.
(6) Für Vögel ist 5 Uhr am Morgen früh.
(7) Lilly schläft bis 5 Uhr am Morgen und ist ab 5 Uhr unterwegs.

Beantworte folgende Fragen.

(1) Ist Lilly ein Vogel oder ein Igel?
(2) Ist sie ein frühes oder ein spätes Tier?
(3) Fängt der späte Igel den Wurm?

Aufgabe 1.11.*

Im Pokal spielt Bayern München gegen den TSV Wildberg. Der Trainer vom TSV Wildberg, Herr Tor Acker, sagt „Wir haben in dem Spiel nichts zu verlieren". Die Logiklehrerin von Wildberg, Frau Loki Schummele, sagt „Wenn die Wildberger in dem Spiel nichts zu verlieren haben, dann haben auch die Münchner in dem Spiel nichts zu gewinnen". Der Trainer von Bayern München, Herr Roland Rollrasen, sagt „Wir haben in dem Spiel etwas zu gewinnen".

(1) Ist die Aussage von Frau Schummele logisch korrekt?
(2) Es sei vorausgesetzt, dass die Aussage des Bayerntrainers wahr ist. Welche Folgerung kann man dann für die Aussage von Herrn Acker ziehen?

Aufgabe 1.12. Beweise mittels Wahrheitstabellen, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind.

(1) $\alpha \wedge \beta \longleftrightarrow \beta \wedge \alpha$.
(2) $\alpha \vee \beta \longleftrightarrow \beta \vee \alpha$.

Aufgabe 1.13. Beweise mittels Wahrheitstabellen, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind.

(1) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \longleftrightarrow \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.
(2) $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \longleftrightarrow \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$.

Aufgabe 1.14. Beweise mittels Wahrheitstabellen, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind.

(1) $(\alpha \wedge \alpha) \leftrightarrow \alpha$.
(2) $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$.
(3) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$.
(4) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$.
(5) $(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$.

Aufgabe 1.15. Man beweise mittels Wahrheitstabellen die *Regeln von de Morgan*, nämlich dass

$$\neg(\beta \vee \gamma) \leftrightarrow (\neg\beta \wedge \neg\gamma)$$

und

$$\neg(\beta \wedge \gamma) \leftrightarrow (\neg\beta \vee \neg\gamma)$$

Tautologien sind.

Aufgabe 1.16. Man beweise mittels Wahrheitstabellen die (verallgemeinerten) *Regeln von de Morgan*, nämlich dass

$$(\alpha \wedge \neg(\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \neg\beta) \wedge (\alpha \wedge \neg\gamma))$$

und

$$(\alpha \wedge \neg(\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\alpha \wedge \neg\gamma))$$

Tautologien sind.

Aufgabe 1.17.*

Zeige, dass der aussagenlogische Ausdruck

$$(r \rightarrow (p \wedge \neg q)) \rightarrow (\neg p \rightarrow (\neg r \vee q))$$

allgemeingültig ist

Aufgabe 1.18.*

Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

p	q	?
w	w	f
w	f	f
f	w	w
f	f	f

Aufgabe 1.19. Finde einen möglichst einfachen aussagenlogischen Ausdruck, der die folgende tabellarisch dargestellte Wahrheitsfunktion ergibt.

p	q	?
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	w

Aufgabe 1.20. In einer Höhle befinden sich im Innern am Ende des Ganges vier Personen. Sie haben eine Taschenlampe bei sich und der Gang ins Freie kann nur mit der Taschenlampe begangen werden. Dabei können höchstens zwei Leute gemeinsam durch den Gang gehen. Die Personen sind unterschiedlich geschickt, die erste Person benötigt eine Stunde, die zweite Person benötigt zwei Stunden, die dritte Person benötigt vier Stunden und die vierte Person benötigt fünf Stunden, um den Gang zu durchlaufen. Wenn zwei Personen gleichzeitig gehen, entscheidet die langsamere Person über die Geschwindigkeit.

(1) Die Batterie für die Taschenlampe reicht für genau 13 Stunden. Können alle vier die Höhle verlassen?
(2) Die Batterie für die Taschenlampe reicht für genau 12 Stunden. Können alle vier die Höhle verlassen?

Eine natürliche Zahl n heißt *gerade*, wenn man sie in der Form $n = 2k$ mit einer natürlichen Zahl k schreiben kann.

Eine natürliche Zahl heißt *ungerade*, wenn sie nicht gerade ist. Versuche die folgenden vertrauten Aussagen ausgehend von den Definitionen zu begründen. Was muss man dabei über das Dezimalsystem wissen?

Aufgabe 1.21. Zeige, dass eine natürliche Zahl n genau dann gerade ist, wenn ihre letzte Ziffer im Dezimalsystem gleich $0, 2, 4, 6$ oder 8 ist.

Aufgabe 1.22. Zeige, dass eine natürliche Zahl n genau dann ungerade ist, wenn ihre letzte Ziffer im Dezimalsystem gleich $1, 3, 5, 7$ oder 9 ist.

Aufgabe 1.23. Zeige, dass eine natürliche Zahl n genau dann ungerade ist, wenn man sie in der Form $n = 2k+1$ mit einer natürlichen Zahl k schreiben kann.

Aufgabe 1.24. Es sei n eine natürliche Zahl. Zeige mittels einer Fallunterscheidung, dass $n^2 - n$ stets gerade ist.

1.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 1.25. (4 Punkte)

Folgende Aussagen stehen fest.

(1) In den Sommerferien fahren wir nach Italien.
(2) In den Winterferien fahren wir nach Österreich.
(3) Wenn wir in Österreich sind, besuchen wir auch die Oma.
(4) Wenn wir nach Italien fahren, fahren wir durch die Schweiz oder durch Österreich.

Beantworte die folgenden Fragen.

a) Wir fahren nach Italien, aber nicht durch die Schweiz. Besuchen wir die Oma?

b) Es sind Sommerferien und wir fahren nicht durch die Schweiz. Besuchen wir die Oma?

c) Kann man die Aussage „Wenn wir die Oma nicht besuchen, dann sind keine Winterferien“ aus den Voraussetzungen erschließen?

d) Kann man die Aussage „In den Sommerferien und in den Winterferien besuchen wir die Oma“ aus den Voraussetzungen erschließen?

Aufgabe 1.26. (2 Punkte)

Bestimme den Wahrheitswert der Aussage

$$(((\neg(\neg(p))) \rightarrow (\neg(q))) \vee (\neg(r))) \leftrightarrow ((\neg(r)) \wedge (q)),$$

wenn p und r falsch sind und q wahr ist.

Aufgabe 1.27. (2 Punkte)

Beweise mittels Wahrheitstabellen, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind.

(1) $(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \longleftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$.
(2) $(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \longleftrightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$.

Aufgabe 1.28. (2 Punkte)

So stellt sich unser Künstler einen gutgelaunten Zombie vor.

Wir betrachten folgendes Zitat von Sven Walter aus dem Artikel „Zombies, Dualismus und Physikalismus“

(Zeitschrift für philosophische Forschung, Bd. 65, H. 2 (2011), pp. 241-254, https://www.jstor.org/stable/pdf/41346224.pdf).

¨(P_1) Zombies sind vorstellbar.

(P_2) Wenn Zombies vorstellbar sind, dann sind Zombies möglich.

(P_3) Wenn Zombies möglich sind, dann ist der Physikalismus falsch.

Also: Der Physikalismus ist falsch.¨

Formalisiere die hier verwendete aussagenlogische Schlussweise und zeige mit Hilfe von Wahrheitstabellen, dass sie eine Tautologie ist.

Aufgabe 1.29. (4 Punkte)

Die Räuberbande „Robin Hood“ besteht aus fünf Personen. Sie legt für ihr Diebesgut eine Schatztruhe an, die sie mit verschiedenen Schlössern sichern möchte, wobei die (mehrfachen) Schlüssel an die Mitglieder verteilt werden sollen. Dabei soll erreicht werden, dass je zwei Bandenmitglieder allein nicht an den Schatz kommen, dass aber je drei Bandenmitglieder die Truhe aufschließen können. Wie viele Schlösser braucht man dafür und wie müssen die Schlüssel verteilt werden?

Aufgabe 1.30. (3 (1+1+1) Punkte)

(1) Formuliere Rechenregeln für die Addition und die Multiplikation von geraden und ungeraden natürlichen Zahlen.

(2) Beweise die Rechenregeln mit den Endzifferbeschreibungen (siehe Aufgabe 1.21 und Aufgabe 1.22).
(3) Beweise die Rechenregeln mit den Gleichungsbeschreibungen (Definition und Aufgabe 1.23).

2. Vorlesung - Quantoren und Induktion

Vorli begleitet dich bei den Vorlesungen. Das hilft sehr, denn Vorli sorgt für eine gute Balance aus Energie und Entspannung.

> Schüler.
> Aufrichtig, möchte schon wieder fort:
> In diesen Mauern, diesen Hallen,
> Will es mir keineswegs gefallen.
> Es ist ein gar beschränkter Raum,
> Man sieht nichts Grünes, keinen Baum,
> Und in den Sälen, auf den Bänken,
> Vergeht mir Hören, Seh´n und Denken.
> Mephistopheles.
> Das kommt nur auf Gewohnheit an.
> So nimmt ein Kind der Mutter Brust
> Nicht gleich im Anfang willig an,
> Doch bald ernährt es sich mit Lust.
> So wird´s euch an der Weisheit Brüsten
> Mit jedem Tage mehr gelüsten.
>
> Goethe Faust I

2.1. **Quantoren.**

Betrachten wir nochmal die beiden Beispielaussagen

Marsmenschen sind grün

und

Ich fresse einen Besen,

und schauen uns die innere Struktur genauer an. In der ersten Aussage wird einer gewissen Art von Lebewesen eine Eigenschaft zugesprochen, so wie wenn man sagt, dass Geparden schnell sind oder dass Faultiere faul sind. Damit kann man meinen, dass Marsmenschen „im Normalfall“ oder „fast immer“ grün sind, oder aber im strengeren Sinn, dass wirklich alle Marsmenschen grün sind. In der Mathematik interessiert man sich für Aussagen, die ohne Ausnahmen gelten (wobei man allerdings in einer mathematischen Aussage die Ausnahmen auch explizit machen kann), so dass wir die Aussage im strengen Sinn verstehen wollen. Es handelt sich um eine sogenannte *Allaussage*. In ihr kommen zwei *Prädikate* (Eigenschaften, Attribute) vor, nämlich einerseits, ein Marsmensch zu sein, andererseits, grün zu sein. Ein Prädikat P ist etwas, was einem Objekt (grammatisch spricht man von einem Subjekt), einem Gegenstand, einem Element zukommen oder nicht zukommen kann. Ein Prädikat ist für sich genommen keine Aussage; aus einem Prädikat kann man aber grundsätzlich auf zwei verschiedene Arten eine Aussage machen, indem man nämlich einerseits (durch *einsetzen*) für ein konkretes Objekt a die Aussage

$$P(a)$$

bildet, die bedeutet, dass das Objekt a die Eigenschaft P besitzt, was wahr sein kann oder eben auch nicht. Andererseits kann man aus P durch *Quantifizierung* eine Aussage gewinnen. So kann man die Aussage bilden, dass alle[17] Objekte (typischerweise aus einer bestimmten Grundmenge) die Eigenschaft P haben, was wiederum wahr oder falsch sein kann. Das drückt man formallogisch durch

$$\forall x P(x)$$

aus. Das Symbol

$$\forall$$

ist eine abkürzende Schreibweise für „für alle“[18], oder „für jedes“ und besitzt ansonsten keine tiefere Bedeutung. Es wird *Allquantor* genannt. Die obige Marsmenschenaussage kann man als

$$\forall x (M(x) \to G(x))$$

[17] Andere Formulierungen sind: jedes, ein beliebiges, irgendein Objekt/Element aus der Grundmenge. Wenn die Grundmenge räumlich ist, so spricht man auch von überall, wenn sie zeitlich ist, so spricht man von immer, stets, ...

[18] Man kann mit einiger Berechtigung sagen, dass die Vokabeln „für alle“ und „es gibt“ die wichtigsten Formulierungen der Mathematik sind.

schreiben. Das bedeutet, dass für alle Objekte ohne weitere Einschränkung gilt: wenn es sich um einen Marsmenschen handelt (wenn also M zutrifft), dann ist er auch grün. Für jedes x steht in der großen Klammer eine Aussage in der Form einer Implikation, die eben besagt, dass wenn der Vordersatz wahr ist, dann auch der Nachsatz wahr sein muss.

Die zweite Beispielaussage kann bedeuten, dass ich genau einen Besen fresse oder aber mindestens einen Besen. Die Wortbedeutung des unbestimmten Artikels ist nicht eindeutig, in einer Aussage wie „eine Pflanze braucht Wasser“ bedeutet „eine“ sogar „alle“. In der Mathematik bedeutet es fast immer „mindestens einen“. Die Besenaussage kann man also paraphrasieren als

Es gibt einen Besen, den ich fresse.

Dies ist eine *Existenzaussage*.[19] Eine formallogische Repräsentierung ist

$$\exists x(B(x) \wedge F(x)),$$

wobei $B(x)$ bedeutet, dass das Objekt x ein Besen ist und wobei $F(x)$ bedeutet, dass ich dieses x fresse. Man könnte genauso gut

$$\exists x(F(x) \wedge B(x))$$

schreiben. Das Zeichen

$$\exists$$

wird „es gibt“ oder „es existiert“ gesprochen und wird der *Existenzquantor* (oder *Existenzoperator*) genannt.

Eine Allaussage behauptet, dass ein gewisses Prädikat allen Objekten (aus einer gewissen Grundmenge) zukommt. Wie alle Aussagen kann dies wahr oder falsch sein. Eine Allaussage ist genau dann falsch, wenn es mindestens ein Objekt (aus der Grundmenge) gibt, dem das Prädikat nicht zukommt. Daher sind die beiden Quantoren, also der Allquantor und der Existenzquantor, über die Negation eng miteinander verknüpft und lassen sich gegenseitig ersetzen, und zwar gelten die Regeln

$$\neg(\forall x P(x)) \text{ ist gleichbedeutend mit } \exists x(\neg P(x)),$$

$$\neg(\exists x P(x)) \text{ ist gleichbedeutend mit } \forall x(\neg P(x)),$$

$$\forall x P(x) \text{ ist gleichbedeutend mit } \neg(\exists x(\neg P(x)))$$

und

$$\exists x P(x) \text{ ist gleichbedeutend mit } \neg(\forall x(\neg P(x))).$$

[19]Neben „es gibt“ trifft man auf Formulierungen wie „es existiert“, „man findet“, „man kann finden“. Wenn die Existenz eines Objektes bekannt ist, so wird in einer mathematischen Argumentation häufig ein solches Element „hergenommen“, irgendwie bezeichnet und dann weiterverarbeitet.

Neben einstelligen Prädikaten wie $P(x)$ gibt es auch mehrstellige Prädikate der Form

$$P(x,y) \text{ oder } Q(x,y,z) \text{ etc. },$$

die eine Beziehung zwischen mehreren Objekten ausdrücken, wie z.B. „ist verwandt mit“, „ist größer als“, „sind Eltern von“ u.s.w. Entsprechend kann dann über die verschiedenen Variablen quantifiziert werden, d.h. man hat mit Ausdrücken der Form

$$\forall x(\exists y P(x,y)),\ \exists x(\forall y P(x,y)),\ \forall x(\exists y(\forall z Q(x,y,z))) \text{ usw.}$$

zu tun.

Die Variablenbezeichnung in einer quantifizierten Aussage ist grundsätzlich unwichtig, d.h. es ist egal, ob man $\forall a P(a)$ oder $\forall t P(t)$ schreibt. Man darf dabei aber nur Variablennamen (also Buchstaben) verwenden, die im gegenwärtigen Kontext nicht schon anderweitig verwendet sind.

Die Logik, die sich mit quantifizierten Aussagen auseinandersetzt, heißt *Prädikatenlogik* oder *Quantorenlogik*. Wir werden sie nicht systematisch entwickeln, da sie in der Mathematik als Mengentheorie auftritt. Statt $P(x)$, dass also ein Prädikat einem Objekt zukommt, schreiben wir $x \in P$, wobei dann P die Menge aller Objekte bezeichnet, die diese Eigenschaft haben. Mehrstellige Prädikate treten in der Mathematik als Relationen auf.

2.2. **Zahlen.**

Ohne weitere Begründung können wir sagen, dass sich die Mathematik auch mit Zahlen beschäftigt. Wir arbeiten mit den folgenden Mengen, deren Kenntnis wir voraussetzen.

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\},$$

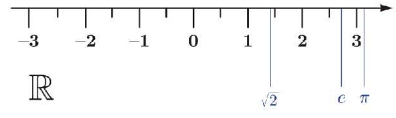
die Menge der *natürlichen Zahlen* (mit der 0).

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\},$$

die Menge der *ganzen Zahlen*,

$$\mathbb{Q} = \{a/b \mid a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\},$$

die Menge der *rationalen Zahlen* und die Menge der *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$.

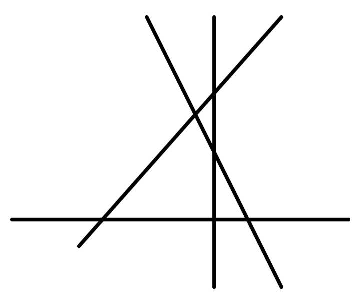


Diese Mengen sind mit den natürlichen Operationen wie Addition und Multiplikation versehen, an deren Eigenschaften wir bald erinnern werden. Die reellen Zahlen stellen wir uns als die Punkte einer Geraden vor, auf der sich auch die zuvor genannten Zahlenmengen befinden. Zugleich kann man $\mathbb{R}$ als die Menge aller (vor dem Komma endlichen, nach dem Komma eventuell unendlichen) Ziffernfolgen auffassen. Wir werden im Laufe der Vorlesung alle entscheidenden Eigenschaften der reellen Zahlen kennenlernen (die sogenannten *Axiome* der reellen Zahlen, aus denen man alle anderen Eigenschaften logisch herleiten kann) und dann auch diese vorläufigen Sichtweisen präzisieren.

2.3. **Induktion.**

Die natürlichen Zahlen sind dadurch ausgezeichnet, dass man jede natürliche Zahl ausgehend von der 0 durch den Zählprozess (das sukzessive Nachfolgernehmen) erreichen kann. Daher können mathematische Aussagen, die von natürlichen Zahlen abhängen, mit dem Beweisprinzip der *vollständigen Induktion* bewiesen werden. Das folgende Beispiel soll an dieses Argumentationsschema heranführen.

Beispiel 2.1. Wir betrachten in der Ebene E eine Konfiguration von n Geraden und fragen uns, was die maximale Anzahl an Schnittpunkten ist, die eine solche Konfiguration haben kann. Dabei ist es egal, ob wir uns die Ebene als einen $\mathbb{R}^2$ (eine kartesische Ebene mit Koordinaten) oder einfach elementargeometrisch vorstellen, wichtig ist im Moment allein, dass sich zwei Geraden in genau einem Punkt schneiden können oder aber parallel sein können. Wenn n klein ist, so findet man relativ schnell die Antwort.



n	0	1	2	3	4	5	n
$S(n)$	0	0	1	3	6	?	?

Doch schon bei etwas größerem n ($n = 5, 10, \ldots ?$) kann man ins Grübeln kommen, da man sich die Situation irgendwann nicht mehr präzise vorstellen kann. Aus einer präzisen Vorstellung wird eine Vorstellung von vielen Geraden mit vielen Schnittpunkten, woraus man aber keine exakte Anzahl der Schnittpunkte ablesen kann. Ein sinnvoller Ansatz zum Verständnis des Problems ist es, sich zu fragen, was eigentlich passiert, wenn eine neue Gerade hinzukommt, wenn also aus n Geraden $n+1$ Geraden werden. Angenommen, man weiß aus irgendeinem Grund, was die maximale Anzahl der Schnittpunkte bei n Geraden ist, im besten Fall hat man dafür eine Formel. Wenn man dann versteht, wie viele neue Schnittpunkte maximal bei der Hinzunahme von einer neuen Geraden hinzukommen, so weiß man, wie die Anzahl der maximalen Schnittpunkte von $n+1$ Geraden lautet.

Dieser Übergang ist in der Tat einfach zu verstehen. Die neue Gerade kann höchstens jede der n alten Geraden in genau einem Punkt schneiden, deshalb kommen höchstens n neue Schnittpunkte hinzu. Wenn man die neue Gerade so wählt, dass sie zu keiner der gegebenen Geraden parallel ist (was möglich ist, da es unendlich viele Richtungen gibt) und ferner so wählt, dass die neuen Schnittpunkte von den schon gegebenen Schnittpunkten der Konfiguration verschieden sind (was man erreichen kann, indem man die neue Gerade parallel verschiebt, um den alten Schnittpunkten auszuweichen), so erhält man genau n neue Schnittpunkte. Von daher ergibt sich die (vorläufige) Formel

$$S(n+1) \,=\, 1+2+3+\cdots+n-2+n-1+n$$

bzw.

$$S(n) \,=\, 1+2+3+\cdots+n-3+n-2+n-1,$$

also einfach die Summe der ersten $n-1$ natürlichen Zahlen.

Im vorstehenden Beispiel liegt eine Summe vor, wobei die Anzahl der Summanden selbst variieren kann. Für eine solche Situation ist das *Summenzeichen* sinnvoll. Für gegebene reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ bedeutet

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \,:=\, a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

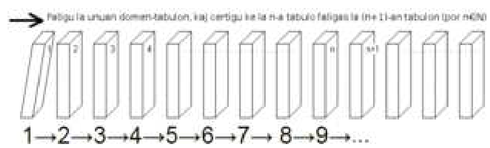
Dabei hängen im Allgemeinen die a_k in einer formelhaften Weise von k ab, beispielsweise ist im Beispiel $a_k = k$, es könnte aber auch etwas wie $a_k = 2k+1$ oder $a_k = k^2$ vorliegen. Der k-te Summand der Summe ist jedenfalls a_k, dabei nennt man k den *Index* des Summanden. Entsprechend ist das *Produktzeichen* definiert, nämlich durch

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \,:=\, a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n.$$

Beispiel 2.2. Wir möchten für die Summe der ersten n Zahlen, die die maximale Anzahl der Schnittpunkte in einer Konfiguration aus $n-1$ Geraden angibt, eine einfachere Formel angeben. Und zwar behaupten wir, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k \,=\, \frac{n(n+1)}{2}.$$

Für kleinere Zahlen n stimmt dies aus dem einfachen Grund, dass links und rechts dasselbe herauskommt. Um die Gleichung allgemein zu beweisen, überlegen wir uns, was links und rechts passiert, wenn wir das n um 1 erhöhen, so wie wir zuvor die Geradenkonfiguration um eine zusätzliche Gerade verkompliziert haben. Auf der linken Seite kommt einfach der zusätzliche Summand $n+1$ hinzu. Auf der rechten Seite haben wir den Übergang von $\frac{n(n+1)}{2}$ nach $\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$. Wenn wir zeigen können, dass die Differenz zwischen diesen beiden Brüchen ebenfalls $n+1$ ist, so verhält sich die rechte Seite genauso wie die linke Seite. Dann kann man so schließen: die Gleichung gilt für die kleinen n, etwa für $n = 1$. Durch den Differenzenvergleich gilt es auch für das nächste n, also für $n = 2$, durch den Differenzenvergleich gilt es für das nächste n, u.s.w. Da dieses Argument immer funktioniert, und da man jede natürliche Zahl irgendwann durch sukzessives Nachfolgernehmen erreicht, gilt die Formel für jede natürliche Zahl.



Eine Visualisierung des Induktionsprinzips. Wenn die Steine nah beieinander stehen und der erste umgestoßen wird, so fallen alle Steine um.

Die folgende Aussage begründet das Prinzip der vollständigen Induktion.

Satz 2.3. *Für jede natürliche Zahl n sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Es gelte*

(1) *$A(0)$ ist wahr.*
(2) *Für alle n gilt: wenn $A(n)$ gilt, so ist auch $A(n+1)$ wahr.*

Dann gilt $A(n)$ für alle n.

Beweis. Wegen der ersten Voraussetzung gilt $A(0)$. Wegen der zweiten Voraussetzung gilt auch $A(1)$. Deshalb gilt auch $A(2)$. Deshalb gilt auch $A(3)$. Da man so beliebig weitergehen kann und dabei jede natürliche Zahl erhält, gilt die Aussage $A(n)$ für jede natürliche Zahl n. $\square$

Der Nachweis von $A(0)$ heißt dabei der *Induktionsanfang* und der Schluss von $A(n)$ auf $A(n+1)$ heißt der *Induktionsschritt*. Innerhalb des Induktionsschrittes nennt man die Gültigkeit von $A(n)$ die *Induktionsvoraussetzung*. In manchen Situationen ist die Aussage $A(n)$ erst für $n \geq n_0$ für ein gewisses n_0 (definiert oder) wahr. Dann beweist man im Induktionsanfang die Aussage $A(n_0)$ und den Induktionsschluss führt man für $n \geq n_0$ durch.

Wir begründen nun die Gleichheit

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

mit dem Induktionsprinzip.

Beim Induktionsanfang ist $n = 1$, daher besteht die Summe links nur aus einem Summanden, nämlich der 1, und daher ist die Summe 1. Die rechte Seite ist $\frac{1\cdot 2}{2} = 1$, so dass die Formel für $n = 1$ stimmt.

Für den Induktionsschritt setzen wir voraus, dass die Formel für ein $n \geq 1$ gilt, und müssen zeigen, dass sie dann auch für $n+1$ gilt. Dabei ist n beliebig. Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

Dabei haben wir für die zweite Gleichheit die Induktionsvoraussetzung verwendet. Der zuletzt erhaltene Term ist die rechte Seite der Formel für $n+1$, also ist die Formel bewiesen.

2.4. **Primfaktorzerlegung.**

Als ein weiteres Beispiel für das Induktionsprinzip beweisen wir die Existenz einer Primfaktorzerlegung für natürliche Zahlen.

Definition 2.4. Eine natürliche Zahl $n \geq 2$ heißt eine *Primzahl*, wenn die einzigen natürlichen Teiler von ihr 1 und n sind.

Satz 2.5. *Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, besitzt eine Zerlegung in Primfaktoren.*

D.h. es gibt eine Darstellung

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r$$

mit Primzahlen p_i.

Beweis. Wir beweisen die Existenz durch Induktion über n, und zwar betrachten wir die Aussage $A(n)$, die besagt, dass jede natürliche Zahl m mit $2 \leq m \leq n$ eine Primfaktorzerlegung besitzt. Für $n = 2$ liegt eine Primzahl vor. Sei $n \geq 2$ und sei, als Induktionsvoraussetzung, angenommen, dass jede Zahl $m \leq n$ eine Primfaktorzerlegung besitzt. Es ist zu zeigen, dass dann auch jede Zahl $m \leq n+1$ eine Primfaktorzerlegung besitzt. Die einzig neue zu betrachtende Zahl ist $n+1$. Es ist also zu zeigen, dass wenn jede Zahl echt kleiner als $n+1$ eine Primfaktorzerlegung besitzt, dass dann auch $n+1$ eine Primfaktorzerlegung besitzt.

Wir betrachten also $n+1$. Im Beweis dieses Induktionsschrittes kommt ein weiteres wichtiges Argumentationsschema zum Tragen, nämlich *Beweis durch*

Fallunterscheidung. Dabei argumentiert man abhängig davon, ob eine zusätzliche Eigenschaft vorliegt oder nicht, in beiden Fällen muss man jeweils das nachweisen, was man zeigen will.

Hier macht man die Fallunterscheidung, ob $n+1$ eine Primzahl ist oder nicht. Wenn $n+1$ eine Primzahl ist, so liegt unmittelbar die Primfaktorzerlegung vor, die aus der Zahl selbst besteht. In diesem Fall wird also auf die Induktionsvoraussetzung gar nicht Bezug genommen.

Somit betrachten wir den Fall, wo $n+1$ keine Primzahl ist. Dies bedeutet, dass es eine nichttriviale Zerlegung $n+1 = ab$ mit kleineren Zahlen $a, b < n+1$ gibt. Für diese Zahlen a und b gibt es nach Induktionsvoraussetzung jeweils eine Zerlegung in Primfaktoren, und diese setzen sich zu einer Primfaktorzerlegung für $n+1$ zusammen. $\square$

Es gilt auch, dass die Primfaktorzerlegung eindeutig ist, dies haben wir aber nicht bewiesen. Man nennt diese Aussage den Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie.

Bemerkung 2.6. Eng verwandt mit der vollständigen Induktion ist das Prinzip der *rekursiven Definition.* Bei dieser möchte man für jede natürliche Zahl n einen mathematischen Ausdruck festlegen. Dies macht man, indem man für 0 einen Ausdruck explizit festlegt und beschreibt, wie der Ausdruck für $n+1$ aus dem Ausdruck für n berechnet werden soll. Letzteres nennt man die Rekursionsvorschrift. Der induktive Aufbau der natürlichen Zahlen stellt dabei sicher, dass durch diese rekursiven Festlegungen für jede natürliche Zahl ein eindeutiger Ausdruck festgelegt wird. Beispielsweise kann man einen Ausdruck $F(n)$ durch den Rukursionsanfang

$$F(0) := 7$$

und die Rekursionsvorschrift

$$F(n+1) := F(n) \cdot n - n^2 + 3$$

festlegen.

2. Arbeitsblatt

2.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 2.1. Negiere die Aussage „Alle Kinder essen in der Pause ein Butterbrot oder einen Apfel“ durch eine Existenzaussage.

Lucy Sonnenschein

Aufgabe 2.2.*

Wir betrachten den Satz „Lucy Sonnenschein tanzt auf allen Hochzeiten“. Negiere diesen Satz durch eine Existenzaussage.

Aufgabe 2.3. Man formalisiere die folgenden Aussagen, indem man geeignete Prädikate erklärt. Man gebe die Negation der Aussagen (umgangssprachlich und formal) an.

(1) Alle Vögel sind schon da.
(2) Alle Wege führen nach Rom.
(3) Faulheit ist aller Laster Anfang.
(4) Alle Menschen werden Brüder, wo dein sanfter Flügel weilt.

Aufgabe 2.4. Formuliere die folgenden einstelligen Prädikate innerhalb der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ allein mittels Gleichheit, Addition, Multiplikation und unter Verwendung von aussagenlogischen Junktoren und Quantoren.

(1) x ist ein Vielfaches von 10.
(2) x ist größer als 10.
(3) x ist kleiner als 10.
(4) x ist eine Quadratzahl.
(5) x ist keine Quadratzahl.
(6) x ist eine Primzahl.
(7) x ist keine Primzahl.
(8) x ist das Produkt von genau zwei verschiedenen Primzahlen.

Aufgabe 2.5.*

Wir betrachten die beiden Sätze „Für jeden Topf gibt es einen Deckel“ und „Es gibt einen Deckel für jeden Topf“, die man im alltäglichen Verständnis wohl als gleichbedeutend ansehen würde. Wenn man aber die beiden Aussagen streng prädikatenlogisch (quantorenlogisch) von vorne nach hinten abarbeitet, so ergeben sich zwei unterschiedliche Bedeutungen.

(1) Formuliere die beiden Aussagen durch zusätzliche Wörter so um, dass die unterschiedlichen Bedeutungen deutlich hervortreten.
(2) Es sei T die Menge der Töpfe und D die Menge der Deckel. Es sei P ein zweistelliges Prädikat derart, dass (für $x \in T$ und $y \in D$) $P(x, y)$ besagt, dass y auf x passt. Formuliere die beiden Aussagen allein mit geeigneten mathematischen Symbolen.
(3) Kann man aus der Aussage, dass es für jeden Topf einen Deckel gibt, logisch erschließen, dass es für jeden Deckel einen Topf gibt?
(4) Wie kann man erklären, dass die beiden Aussagen im alltäglichen Verständnis als gleichbedeutend interpretiert werden?

Aufgabe 2.6.*

Skizziere möglichst viele wesentlich verschiedene Konfigurationen von fünf Geraden in der Ebene, die sich insgesamt in vier Schnittpunkten treffen.

Aufgabe 2.7. Für $k = 1, \ldots, 8$ sei

$$a_k = 2^k - 5k.$$

Berechne

$$\sum_{k=1}^{8} a_k \, .$$

Aufgabe 2.8. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei

$$a_k = \frac{k}{2k+1}.$$

Berechne

$$\sum_{k=0}^{5} a_k \, .$$

Aufgabe 2.9.*

Wir betrachten die Wertetabelle

i	1	2	3	4	5	6	7	8
a_i	2	5	4	-1	3	5	-2	2

(1) Berechne $a_2 + a_5$.
(2) Berechne $\sum_{k=3}^{6} a_k$.
(3) Berechne $\prod_{i=0}^{3} a_{2i+1}$.
(4) Berechne $\sum_{i=4}^{5} a_i^2$.

Aufgabe 2.10. Beweise durch Induktion die folgende Formel.

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Aufgabe 2.11. Beweise durch Induktion die folgende Formel.

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Aufgabe 2.12. Beweise die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

ohne Induktion durch Betrachten der folgenden Tabelle

k	1	2	3	$\ldots$	$n-2$	$n-1$	n
$n+1-k$	n	$n-1$	$n-2$	$\ldots$	3	2	1

Aufgabe 2.13.*

Die offizielle Berechtigung für die Klausurteilnahme werde durch mindestens 200 Punkte im Übungsbetrieb erworben. Professor Knopfloch sagt, dass es aber auf einen Punkt mehr oder weniger nicht ankomme. Zeige durch eine geeignete Induktion, dass man mit jeder Punkteanzahl zur Klausur zugelassen wird.

Aufgabe 2.14. In der folgenden Argumentation wird durch Induktion bewiesen, dass alle Pferde die gleiche Farbe haben. „Es sei $A(n)$ die Aussage, dass je n Pferde stets untereinander die gleiche Farbe haben. Induktionsanfang: Wenn nur ein Pferd da ist, so hat dieses eine bestimmte Farbe und die Aussage ist richtig. Für den Induktionsschritt sei vorausgesetzt, dass je n Pferde stets untereinander die gleiche Farbe haben. Es seien jetzt $n+1$ Pferde gegeben. Wenn man eines herausnimmt, so weiß man nach der Induktionsvoraussetzung, dass die verbleibenden n Pferde untereinander die gleiche Farbe haben. Nimmt man ein anderes Pferd heraus, so haben die jetzt verbleibenden Pferde wiederum untereinander die gleiche Farbe. Also haben all diese $n+1$ Pferde überhaupt die gleiche Farbe“. Analysiere diese Argumentation.

Aufgabe 2.15. Eine natürliche Zahl heißt *besonders*, wenn sie eine für sie spezifische, benennbare Eigenschaft erfüllt. Die 0 ist als neutrales Element der Addition und die 1 ist als neutrales Element der Multiplikation besonders. Die 2 ist die erste Primzahl, die 3 ist die kleinste ungerade Primzahl, die 4 ist die erste echte Quadratzahl, die 5 ist die Anzahl der Finger einer Hand, die 6 ist die kleinste aus verschiedenen Faktoren zusammengesetzte Zahl, die 7 ist die Anzahl der Zwerge im Märchen, u.s.w., diese Zahlen sind also alle besonders. Gibt es eine Zahl, die nicht besonders ist? Gibt es eine kleinste Zahl, die nicht besonders ist?

Aufgabe 2.16. Zeige, dass mit der einzigen Ausnahme $n = 3$ die Beziehung

$$2^n \geq n^2$$

gilt.

Aufgabe 2.17.*

Zeige durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl

$$6^{n+2} + 7^{2n+1}$$

ein Vielfaches von 43 ist.

Aufgabe 2.18. Beweise durch Induktion die Abschätzung

$$1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n \leq n^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Aufgabe 2.19.*

Beweise durch Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_+$ die Formel

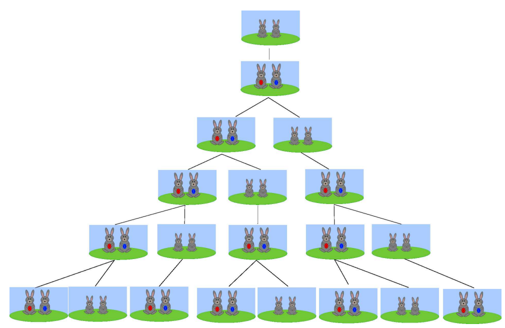
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

Aufgabe 2.20.*

Beweise durch Induktion, dass die Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen (beginnend bei 1) stets eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 2.21.*

Die Städte $S_1, \ldots, S_n$ seien untereinander durch Straßen verbunden und zwischen zwei Städten gibt es immer genau eine Straße. Wegen Bauarbeiten sind zur Zeit alle Straßen nur in eine Richtung befahrbar. Zeige, dass es trotzdem mindestens eine Stadt gibt, von der aus alle anderen Städte erreichbar sind.



Aufgabe 2.22. Kaninchen werden bekanntlich immer zur Monatsmitte geboren, die Tragzeit beträgt einen Monat und die Geschlechtsreife erreichen sie im Alter von zwei Monaten. Jeder Wurf besteht aus genau einem Paar, und alle leben ewig.

Wir starten im Monat 1 mit einem Paar, das einen Monat alt ist. Sei f_n die Anzahl der Kaninchenpaare im n-ten Monat, also $f_1 = 1$, $f_2 = 1$. Beweise durch Induktion die Rekursionsformel

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Diese Zahlfolge nennt man die Folge der *Fibonacci-Zahlen*. Wie viele der f_n Paare sind im n-ten Monat reproduktionsfähig?

Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* f_n ist rekursiv definiert durch

$$f_1 := 1\,, f_2 := 1 \text{ und } f_{n+2} := f_{n+1} + f_n\,.$$

Aufgabe 2.23. Bestimme die ersten zehn Fibonacci-Zahlen.

Aufgabe 2.24.*

Beweise durch Induktion die *Simpson-Formel* oder Simpson-Identität für die Fibonacci-Zahlen f_n. Sie besagt (für $n \geq 2$)

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

Gelegentlich werden wir auch Programmieraufgaben stellen, in denen es darum geht, mit Hilfe von Pseudocode einen Algorithmus zu beschreiben. Der Pseudocode muss präzise, logisch und allgemeinverständlich sein, es soll keine echte Programmiersprache verwendet werden. Was der Computer (die Maschine) kann, ist aufgabenabhängig und wird jeweils explizit angegeben.

Aufgabe 2.25.*

Man entwerfe ein Computer-Programm (Pseudocode), das zu einer vorgegebenen Zahl $n \geq 2$ entscheidet, ob n eine Primzahl ist oder nicht.

• Der Computer besitzt beliebig viele Speicher, die natürliche Zahlen enthalten können.

• Er kann einen Speicher leeren.

• Er kann einen Speicherinhalt um 1 erhöhen.

Er kann die Summe von zwei Speicherinhalten ausrechnen und in einen Speicher schreiben. Er kann Speicherinhalte miteinander vergleichen und abhängig davon zu einem bestimmten Befehl wechseln. Er kann Speicherinhalte ausdrucken und vorgegebene Texte ausdrucken. Es gibt einen Haltebefehl. Die Anfangskonfiguration sei

$$(n, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$$

mit $n \geq 2$. Das Programm soll „n ist eine Primzahl" oder „n ist keine Primzahl" ausdrucken und anschließend anhalten.

Aufgabe 2.26.*

Man entwerfe ein Computer-Programm (Pseudocode), das nacheinander die Fibonacci-Zahlen (also $f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8, f_7 = 13, ...$) ausdruckt.

• Der Computer besitzt beliebig viele Speicher, die natürliche Zahlen enthalten können.

• Er kann einen Speicherinhalt in einen Speicher schreiben.

• Er kann die Summe von zwei Speicherinhalten ausrechnen und in einen Speicher schreiben.

• Er kann Speicherinhalte ausdrucken und vorgegebene Texte ausdrucken.

• Es gibt einen Haltebefehl.

Die Anfangskonfiguration sei

$$(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots) .$$

Das Programm soll unendlich lange laufen und nacheinander „Die" n „-te Fibonacci-Zahl ist " f_n ausdrucken.

Aufgabe 2.27. Es sei $A(n)$ eine Aussage(nform), in die man eine natürliche Zahl einsetzen kann. Diskutiere den Unterschied zwischen den beiden Aussagen

$$(\forall n A(n)) \rightarrow (\forall n A(n+1)) \text{ und } \forall n (A(n) \rightarrow A(n+1))\,.$$

Was ist die mathematische Relevanz der beiden Aussagen?

Unter der *Collatz-Rekursion* (oder *Collatz-Vorschrift*) versteht man die folgende Vorschrift, aus einer natürlichen Zahl k eine neue Zahl zu konstruieren.

Wenn k gerade ist, so nehme man von k die Hälfte.

Wenn k ungerade ist, so multipliziere man k mit 3 und addiere dann 1 dazu.

Unter der *Collatz-Folge* zum Startwert m versteht man die Folge der Zahlen, die entsteht, wenn man auf m die Collatz-Rekursion anwendet.

Aufgabe 2.28. Berechne die Collatz-Folge zum Startwert 100 im Kopf, bis der Wert 1 erreicht ist.

Das Collatz-Problem ist die Frage, ob bei jedem Startglied die zugehörige Collatz-Folge irgendwann die 1 erreicht. Dies ist ein offenes Problem der Mathematik.

2.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 2.29. (2 Punkte)

Wir verstehen die Aussage „Igel haben Stacheln“ als „Jeder Igel besitzt mindestens einen Stachel“. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zur Negation dieser Aussage.

(1) Es gibt keinen Igel, der keine Stacheln besitzt.
(2) Alle Igel haben keine Stacheln.
(3) Es gibt einen Igel, der keinen Stachel besitzt.
(4) Es gibt einen Stachel, der zu keinem Igel gehört.
(5) Es gibt einen Igel ohne Stacheln.
(6) Es gibt viele Igel ohne Stacheln.
(7) Es existiert mindestens ein Igel, der mindestens einen Stachel besitzt.
(8) Es existiert mindestens ein Igel, der höchstens einen Stachel besitzt.
(9) Nicht jeder Igel hat mindestens einen Stachel.
(10) Stachelschweine haben auch Stacheln.

Aufgabe 2.30. (6 Punkte)

Es bedeute $F(x, y)$, dass x ein Freund von y ist. Wir betrachten den Satz „Alle Freunde von Paula (P) sind auch Freunde von Susanna (S)." Beantworte für jede der folgenden Formalisierungen, was sie umgangssprachlich bedeuten, ob sie wahr sind (hier gibt es einen gewissen Interpretationsspielraum) und ob sie den angegebenen Sachverhalt ausdrücken (die Quantoren beziehen sich dabei auf die Menge der Menschen).

(1)
$$\forall x \exists y F(x, y)\,,$$

(2)
$$\forall x F(P, x) \to \forall x F(S, x)\,,$$

(3)
$$\forall x \forall y (F(x, y) \to F(y, x))\,,$$

(4)
$$\forall x \forall y (F(x, y) \to F(x, y))\,,$$

(5)
$$\exists x \forall y F(x, y)\,,$$

(6)
$$\forall x (F(P, x) \to F(x, S))\,,$$

(7)
$$\forall x (\forall y (F(x, y) \to \forall z F(x, z)))\,,$$

(8)
$$\forall x F(x, P) \to \forall x F(x, S)\,,$$

(9)
$$\forall x (F(x, P) \to F(x, S))\,,$$

(10)
$$\forall x (\forall y F(x, y) \to F(x, x))\,,$$

(11)
$$\forall x F(x, x)\,,$$

(12)
$$\exists x \forall y (\neg F(x, y))\,.$$

Aufgabe 2.31. (3 Punkte)

Es sei $m \in \mathbb{N}$. Zeige durch Induktion die Gleichheit

$$(2m+1) \prod_{i=1}^{m} (2i-1)^2 \;=\; \prod_{k=1}^{m} (4k^2 - 1).$$

Aufgabe 2.32. (4 Punkte)

Eine n-Schokolade ist ein rechteckiges Raster, das durch $a-1$ Längsrillen und $b-1$ Querrillen in $n = a \cdot b$ ($a, b \in \mathbb{N}_+$) mundgerechte kleinere Rechtecke eingeteilt ist. Ein Teilungsschritt an einer Schokolade ist das vollständige Durchtrennen einer Schokolade längs einer Längs- oder Querrille. Eine vollständige Aufteilung einer Schokolade ist eine Folge von Teilungsschritten (an der Ausgangsschokolade oder an einer zuvor erhaltenen Zwischenschokolade), deren Endprodukt aus den einzelnen Mundgerechtecken besteht. Zeige durch Induktion, dass jede vollständige Aufteilung einer n-Schokolade aus genau $n-1$ Teilungsschritten besteht.

Aufgabe 2.33. (2 Punkte)

Beweise durch Induktion, dass die Folge der Fibonacci-Zahlen die Regelmäßigkeit

ungerade-ungerade-gerade

aufweist.

Aufgabe 2.34. (2 (1+1) Punkte)

(1) Bestimme die Glieder $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ der Collatz-Folge zum Startwert $a_0 = 152$.
(2) Berechne $\sum_{i=1}^{8} a_i$.

Aufgabe 2.35. (4 Punkte)

Man entwerfe ein Computer-Programm (Pseudocode), das zu einer vorgegebenen natürlichen Zahl $n \geq 1$ die zugehörige Collatz-Folge berechnet und anhält, wenn dabei die 1 erreicht wird.

• Der Computer besitzt beliebig viele Speicher, die natürliche Zahlen enthalten können.

• Er kann einen Speicher leeren.

• Er kann einen Speicherinhalt um 1 erhöhen.

• Er kann einen Speicherinhalt in einen Speicher schreiben.

• Er kann die Summe von zwei Speicherinhalten ausrechnen und in einen Speicher schreiben.

• Er kann Speicherinhalte miteinander vergleichen und abhängig davon zu einem bestimmten Befehl wechseln.

• Er kann Speicherinhalte ausdrucken und vorgegebene Texte ausdrucken.

• Es gibt einen Haltebefehl.

Die Anfangskonfiguration sei

$$(n, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots)\,.$$

Das Programm soll nacheinander die Collaz-Folge ausgehend von n berechnen und anhalten, wenn die 1 erreicht ist.

3. Vorlesung - Mengen und Abbildungen

Zu Beginn der Vorlesung ist sie schon da, kommt auf dich zu und begrüßt dich. Da macht gleich alles noch viel mehr Spaß!

3.1. **Mengen.**

Mathematische Strukturen, wie die bereits erwähnten Zahlen, werden als Mengen beschrieben. Eine *Menge* ist eine Ansammlung von wohlunterschiedenen Objekten, die die *Elemente* der Menge heißen. Mit „wohlunterschieden“ meint man, dass es klar ist, welche Objekte als gleich und welche als verschieden angesehen werden. Die *Zugehörigkeit* eines Elementes x zu einer Menge M wird durch

$$x \in M$$

ausgedrückt, die Nichtzugehörigkeit durch

$$x \notin M.$$

Für jedes Element(symbol) gilt stets genau eine dieser zwei Möglichkeiten. Beispielsweise ist $\frac{3}{7} \notin \mathbb{N}$ und $\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$. Für Mengen gilt das *Extensionalitätsprinzip*, d.h. eine Menge ist durch die in ihr enthaltenen Elemente eindeutig bestimmt, darüber hinaus bietet sie keine Information. Insbesondere stimmen zwei Mengen überein, wenn beide die gleichen Elemente enthalten.

Die Menge, die kein Element besitzt, heißt *leere Menge* und wird mit

$$\emptyset$$

bezeichnet.

Georg Cantor (1845-1918) ist der Schöpfer der Mengentheorie.

David Hilbert (1862-1943) nannte sie ein *Paradies*, aus dem die Mathematiker nie mehr vertrieben werden dürfen.

Eine Menge N heißt *Teilmenge* einer Menge M, wenn jedes Element aus N auch zu M gehört. Man schreibt dafür $N \subseteq M$ (manche schreiben dafür $N \subset M$). Man sagt dafür auch, dass eine *Inklusion* $N \subseteq M$ vorliegt. Für die erwähnten Zahlenmengen gelten die Inklusionen

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Die Teilmengenbeziehung $N \subseteq M$ ist eine Allaussage. Im Nachweis, dass $N \subseteq M$ ist, muss man zeigen, dass für ein beliebiges Element $x \in N$ ebenfalls die Beziehung $x \in M$ gilt. Dabei darf man lediglich die Eigenschaft $x \in N$ verwenden. Für uns werden Mengen hauptsächlich Zahlenmengen und daraus konstruierte Mengen sein. Eine Menge heißt *endlich*, wenn sie durch die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ „sinnvoll abgezählt“ werden kann. In diesem Fall nennt man n die *Anzahl* der Menge.

3.2. **Beschreibungsmöglichkeiten für Mengen.**

Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine Menge anzugeben. Die einfachste ist, die zu der Menge gehörenden Elemente aufzulisten, wobei es auf die Reihenfolge der Elemente nicht ankommt. Bei endlichen Mengen ist dies unproblematisch, bei unendlichen Mengen muss man ein „Bildungsgesetz“ für die Elemente angeben.

Die wichtigste Menge, die man zumeist als eine fortgesetzte Auflistung einführt, ist die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Hier wird eine bestimmte Zahlenmenge durch die Anfangsglieder von erlaubten Zifferfolgen angedeutet. Wichtig ist, dass mit $\mathbb{N}$ nicht eine Menge von bestimmten Ziffern gemeint ist, sondern die durch die Ziffern repräsentierten Zahlwerte. Eine natürliche Zahl hat viele Darstellungsarten, die Ziffernrepräsentation im Zehnersystem ist nur eine davon, wenn auch eine besonders übersichtliche.

Wir besprechen Mengenbeschreibung durch Eigenschaften. Es sei eine Menge M gegeben. In ihr gibt es gewisse Elemente, die gewisse Eigenschaften E (Prädikate) erfüllen können oder aber nicht. Zu einer Eigenschaft E gehört innerhalb von M die Teilmenge bestehend aus allen Elementen aus M, die diese Eigenschaft erfüllen. Man beschreibt eine durch eine Eigenschaft definierte Teilmenge meist als

$$\{x \in M \mid E(x)\} = \{x \in M \mid x \text{ besitzt die Eigenschaft } E\}.$$

Dies geht natürlich nur mit solchen Eigenschaften, für die die Aussage $E(x)$ eine wohldefinierte Bedeutung hat. Dieser Konstruktion entspricht in der Alltagssprache eine Formulierung mit einem Relativsatz, im Sinne von diejenigen Objekte, auf die die Eigenschaft E zutrifft. Wenn man eine solche Teilmenge einführt, so gibt man ihr häufig sofort einen Namen (in dem auf die Eigenschaft E Bezug genommen werden kann, aber nicht muss). Z.B. kann man einführen

$$G = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gerade}\},$$

$$U = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist ungerade}\},$$

$$Q = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine Quadratzahl}\}$$

$$\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine Primzahl}\}.$$

Für die Mengen in der Mathematik sind meist eine Vielzahl an mathematischen Eigenschaften relevant und daher gibt es meist auch eine Vielzahl an relevanten Teilmengen. Aber auch bei alltäglichen Mengen, wie etwa die Menge K der Studierenden in einem Kurs, gibt es viele wichtige Eigenschaften, die gewisse Teilmengen festlegen, wie etwa

$$O = \{x \in K \mid x \text{ kommt aus Osnabrück}\},$$

$$P = \{x \in K \mid x \text{ studiert im Nebenfach Physik}\},$$

$$D = \{x \in K \mid x \text{ hat im Dezember Geburtstag}\}.$$

Die Menge K ist dabei selbst durch eine Eigenschaft festgelegt, es ist ja

$$K = \{x \mid x \text{ ist Studierender in diesem Kurs}\}.$$

3.3. **Mengenoperationen.**

Es gibt mehrere Möglichkeiten, aus gegebenen Mengen neue Mengen zu bilden. Die wichtigsten sind die folgenden.[20]

• *Vereinigung*

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\},$$

• *Durchschnitt*

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\},$$

• *Differenzmenge*

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$

Diese Operationen ergeben nur dann einen Sinn, wenn die beteiligten Mengen als Teilmengen in einer gemeinsamen Grundmenge gegeben sind. Dies sichert, dass man über die gleichen Elemente spricht. Häufig wird diese Grundmenge nicht explizit angegeben, dann muss man sie aus dem Kontext erschließen. Ein Spezialfall der Differenzmenge bei einer gegebenen Grundmenge G ist das *Komplement* einer Teilmenge $A \subseteq G$, das durch

$$\complement A := G \setminus A = \{x \in G \mid x \notin A\}$$

definiert ist. Wenn zwei Mengen einen leeren Schnitt haben, also $A \cap B = \emptyset$ gilt, so nennen wir sie *disjunkt*.

3.4. **Produktmenge.**

Wir wollen die Rechenoperationen auf den oben erwähnten Zahlenmengen, insbesondere die Addition und die Multiplikation, mengentheoretisch erfassen. Bei der Addition (beispielsweise auf $\mathbb{N}$) wird zwei natürlichen Zahlen a und b eine weitere natürliche Zahl, nämlich $a + b$, zugeordnet. Die Menge der Paare nennt man Produktmenge und die Zuordnung führt zum Begriff der Abbildung.

Wir definieren.[21]

---

[20]Die Symbolik kann man sich so merken: Bei Vereinigung denke man an englisch union, das $\cup$ sieht aus wie ein u. Der Durchschnitt ist das $\cap$. Die entsprechenden logischen Operationen oder bzw. und haben die analoge eckige Form $\vee$ bzw. $\wedge$.

[21]Definitionen werden in der Mathematik zumeist als solche deutlich herausgestellt und bekommen eine Nummer, damit man auf sie einfach Bezug nehmen kann. Es wird eine Situation beschrieben, bei der die verwendeten Begriffe schon zuvor definiert worden sein mussten, und in dieser Situation wird einem neuen Konzept ein Name (eine Bezeichnung) gegeben. Dieser Name wird *kursiv* gesetzt. Man beachte, dass das Konzept auch ohne den neuen Namen formulierbar ist, der neue Name ist nur eine Abkürzung für das Konzept. Sehr häufig hängen die Begriffe von Eingaben ab, wie den beiden Mengen in dieser Definition. Bei der Namensgebung herrscht eine gewisse Willkür, so dass die Bedeutung der Bezeichnung im mathematischen Kontext sich allein aus der expliziten Definition, aber nicht aus der alltäglichen Wortbedeutung erschließen lässt.

Definition 3.1. Es seien zwei Mengen L und M gegeben. Dann nennt man die Menge

$$L \times M \; = \; \{(x, y) \mid x \in L,\, y \in M\}$$

die *Produktmenge* der beiden Mengen.

Die Elemente der Produktmenge nennt man *Paare* und schreibt (x, y). Dabei kommt es wesentlich auf die Reihenfolge an. Die Produktmenge besteht also aus allen Paarkombinationen, wo in der ersten *Komponenten* ein Element der ersten Menge und in der zweiten Komponenten ein Element der zweiten Menge steht. Zwei Paare sind genau dann gleich, wenn sie in beiden Komponenten gleich sind.

Wenn eine der beiden Mengen leer ist, so ist auch die Produktmenge leer. Wenn die beiden Mengen *endlich* sind, und es in der ersten Menge n Elemente und in der zweiten Menge k Elemente gibt, so gibt es in der Produktmenge $n \cdot k$ Elemente. Man kann auch für mehr als nur zwei Mengen die Produktmenge bilden.

Beispiel 3.2. Es sei V die Menge aller Vornamen (sagen wir der Vornamen, die in einer bestimmten Grundmenge an Personen wirklich vorkommen) und N die Menge aller Nachnamen. Dann ist

$$V \times N$$

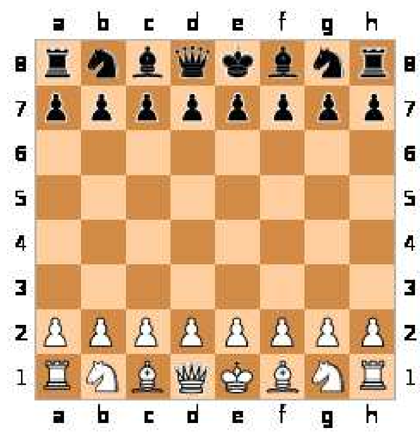
die Menge aller Namen. Elemente davon sind in Paarschreibweise beispielsweise (Heinz, Müller), (Petra, Müller) und (Lucy, Sonnenschein). Aus einem Namen lässt sich einfach der Vorname und der Nachname herauslesen, indem man entweder auf die erste oder auf die zweite Komponente des Namens schaut. Auch wenn alle Vornamen und Nachnamen für sich genommen vorkommen, so muss natürlich nicht jeder daraus gebastelte mögliche Name wirklich vorkommen. Bei der Produktmenge werden eben alle Kombinationsmöglichkeiten aus den beiden beteiligten Mengen genommen.

Bei einer Produktmenge können natürlich auch beide Mengen gleich sein. Dann ist es verlockend, die Reihenfolge zu verwechseln, und also besonders wichtig, darauf zu achten, dies nicht zu tun.

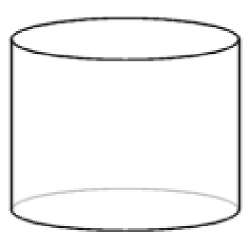
Beispiel 3.3. Ein Schachbrett (genauer: die Menge der Felder auf einem Schachbrett, auf denen eine Figur stehen kann) ist die Produktmenge

$$\{a, b, c, d, e, f, g, h\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Jedes Feld ist ein Paar, beispielsweise $(a, 1), (d, 4), (c, 7)$. Da die beteiligten Mengen verschieden sind, kann man statt der Paarschreibweise einfach $a1, d4, c7$ schreiben. Diese Notation ist der Ausgangspunkt für die Beschreibung von Stellungen und von ganzen Partien.



Die Produktmenge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stellt man sich als eine Ebene vor, man schreibt dafür auch $\mathbb{R}^2$. Die Produktmenge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kann man sich als eine Menge von Gitterpunkten vorstellen.



Ein Zylindermantel ist die Produktmenge aus einem Kreis und einer Strecke

Beispiel 3.4. Es sei S ein Kreis, worunter wir die Kreislinie verstehen, und I eine Strecke. Der Kreis ist eine Teilmenge einer Ebene E und die Strecke ist eine Teilmenge einer Geraden G, so dass für die Produktmenge die Beziehung

$$S \times I \subseteq E \times G$$

gilt. Die Produktmenge $E \times G$ stellt man sich als einen dreidimensionalen Raum vor, und darin ist die Produktmenge $S \times I$ ein Zylindermantel.

3.5. **Abbildungen.**

Ein physikalisches Teilchen bewege sich im Raum. Dieser Vorgang wird beschrieben, indem man zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ angibt, an welchem Ort $z(t) \in \mathbb{R}^3$ sich das Teilchen zu diesem Zeitpunkt befindet. Der Ablauf eines Computerprogramms, das insgesamt auf s Speicher Bezug nimmt, wird beschrieben, indem man zu jedem Rechenschritt (was der Abarbeitung einer Programmzeile entspricht, und zwar derjenigen Programmzeile, die bei diesem Rechenschritt aufgerufen wird) angibt, wie die Belegungen der Speicher nach der Ausführung des Befehls lautet. Einer Rechenschrittnummer n wird also das Belegungstupel

$$(b_1(n), \ldots, b_s(n)) \in \mathbb{N}^s$$

zugeordnet. Bei einer Wahl muss sich jeder Wähler für genau eine Partei (oder für das Nichtwählen) entscheiden. Der Temperaturverlauf auf der Erdoberfläche wird dadurch beschrieben, wenn man jedem Zeitpunkt und jedem Punkt der Erdoberfläche die Temperatur zuordnet. Solche und viele andere Situationen werden durch das Konzept einer Abbildung beschrieben.

Definition 3.5. Seien L und M Mengen. Eine *Abbildung* F von L nach M ist dadurch gegeben, dass jedem Element der Menge L genau ein Element der Menge M zugeordnet wird. Das zu $x \in L$ eindeutig bestimmte Element wird mit $F(x)$ bezeichnet. Die Abbildung drückt man als Ganzes häufig durch

$$F\colon L \longrightarrow M,\, x \longmapsto F(x),$$

aus.

Bei einer Abbildung $F\colon L \to M$ heißt L die *Definitionsmenge* (oder Definitionsbereich) der Abbildung und M die *Wertemenge* (oder *Wertevorrat* oder *Zielbereich*) der Abbildung. Zu einem Element $x \in L$ heißt das Element $F(x) \in M$ der *Wert* von F an der *Stelle* x. Statt Stelle sagt man auch häufig *Argument*.

Zwei Abbildungen $F\colon L_1 \to M_1$ und $G\colon L_2 \to M_2$ sind gleich, wenn die Definitionsmengen und die Wertemengen übereinstimmen und wenn für alle $x \in L_1 = L_2$ die Gleichheit $F(x) = G(x)$ in $M_1 = M_2$ gilt. Die Gleichheit von Abbildungen wird also zurückgeführt auf die Gleichheit von Elementen in einer Menge.

Abbildungen werden häufig auch *Funktionen* genannt. Wir werden den Begriff *Funktion* für solche Abbildungen reservieren, deren Wertemenge die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind.

Zu jeder Menge L nennt man die Abbildung

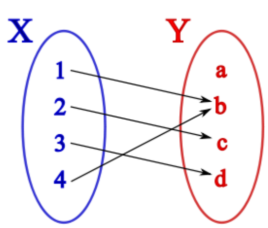
$$L \longrightarrow L,\, x \longmapsto x,$$

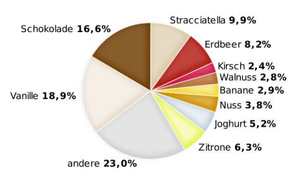
also die Abbildung, die jedes Element auf sich selbst schickt, die *Identität* (auf L). Sie wird mit Id_L bezeichnet. Zu einer weiteren Menge M und einem fixierten Element $c \in M$ nennt man die Abbildung

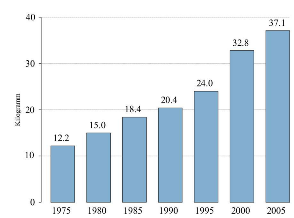
$$L \longrightarrow M,\, x \longmapsto c,$$

die also jedem Element $x \in L$ den *konstanten Wert* c zuordnet, die *konstante Abbildung* (mit dem Wert c). Sie wird häufig wieder mit c bezeichnet.[22]

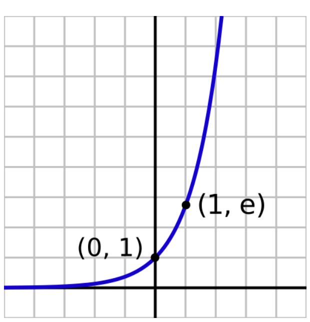
Für eine Abbildung gibt es mehrere Darstellungsmöglichkeiten, z.B. Wertetabelle, Balkendiagramm, Kuchendiagramm, Pfeildiagramm, den Graph der Abbildung. Dabei sind die Übergänge zwischen der formalen Definition einer Abbildung und den visuellen Realisierungen fließend. In der Mathematik wird eine Abbildung zumeist durch eine Abbildungsvorschrift beschrieben, die es erlaubt, die Werte der Abbildung zu berechnen. Solche Abbildungsvorschriften sind beispielsweise (jeweils von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$) $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3 - e^x + \sin(x)$, etc. In den Naturwissenschaften und Sozialwissenschaften sind *empirische Funktionen* wichtig, die reale Bewegungen oder Entwicklungen beschreiben, doch auch bei solchen Funktionen erhebt sich die Frage, ob man diese auch mathematisch gut beschreiben (approximieren) kann.





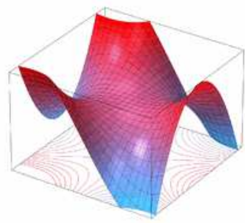


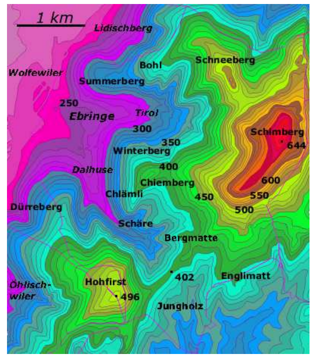
x	1	2	3	4	5	6
$\sigma(x)$	2	4	6	5	3	1

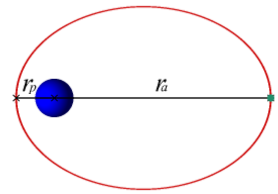


$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

[22]Von Hilbert stammt die etwas überraschende Aussage, die Kunst der Bezeichnung in der Mathematik besteht darin, unterschiedliche Sachen mit denselben Symbolen zu bezeichnen.







3.6. **Injektive und surjektive Abbildungen.**

Definition 3.6. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F\colon L \longrightarrow M,\, x \longmapsto F(x),$$

eine Abbildung. Dann heißt F *injektiv*, wenn für je zwei verschiedene Elemente $x, x' \in L$ auch $F(x)$ und $F(x')$ verschieden sind.

Beim Nachweis der Injektivität einer Abbildung geht man häufig so vor, dass man zu zwei gegebenen Elementen x und x' aus der Voraussetzung $F(x) = F(x')$ erschließt, dass $x = x'$ ist. Dies ist oft einfacher zu zeigen, als aus $x \neq x'$ auf $F(x) \neq F(x')$ zu schließen.

Definition 3.7. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F\colon L \longrightarrow M,\, x \longmapsto F(x),$$

eine Abbildung. Dann heißt F *surjektiv*, wenn es für jedes $y \in M$ mindestens ein Element $x \in L$ mit

$$F(x) = y$$

gibt.

Beispiel 3.8. Wir betrachten zu einem Fußballspiel die Abbildung, die jedem Tor, das die Mannschaft A erzielt hat, den zugehörigen Torschützen zuordnet. Es gebe keine Eigentore und keine Auswechslungen, die Tore von A werden mit $1, 2, \ldots, n$ durchnummeriert. Dann liegt eine Abbildung

$$\psi\colon \{1, \ldots, n\} \longrightarrow A = \{\text{Spieler 1, Spieler 2}, \ldots, \text{Spieler 11}\}$$

mit

$$\psi(i) = \text{ derjenige Spieler, der das } i\text{-te Tor geschossen hat.}$$

Die Injektivität von ψ bedeutet, dass jeder Spieler höchstens ein Tor geschossen hat, und die Surjektivität bedeutet, dass jeder Spieler mindestens ein Tor geschossen hat.

Beispiel 3.9. Es sei H die Menge aller (lebenden oder verstorbenen) Menschen. Wir untersuchen die Abbildung

$$\varphi\colon H \longrightarrow H,$$

die jedem Menschen seine (biologische) Mutter zuordnet. Dies ist eine wohldefinierte Abbildung, da jeder Mensch eine eindeutig bestimmte Mutter besitzt. Diese Abbildung ist nicht injektiv, da es ja verschiedene Menschen (Geschwister) gibt, die die gleiche Mutter haben. Sie ist auch nicht surjektiv, da nicht jeder Mensch Mutter von jemandem ist.

Beispiel 3.10. Die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2,$$

ist weder injektiv noch surjektiv. Sie ist nicht injektiv, da die verschiedenen Zahlen 2 und -2 beide auf 4 abgebildet werden. Sie ist nicht surjektiv, da nur nichtnegative Elemente erreicht werden (eine negative Zahl hat keine reelle Quadratwurzel). Die Abbildung

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2,$$

ist injektiv, aber nicht surjektiv. Die Injektivität folgt beispielsweise so: Wenn $x \neq y$ ist, so ist eine Zahl größer, sagen wir

$$x > y \geq 0.$$

Doch dann ist auch $x^2 > y^2$ und insbesondere $x^2 \neq y^2$. Die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^2,$$

ist nicht injektiv, aber surjektiv, da jede nichtnegative reelle Zahl eine Quadratwurzel besitzt. Die Abbildung

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^2,$$

ist injektiv und surjektiv.

Definition 3.11. Es seien M und L Mengen und es sei

$$F\colon M \longrightarrow L,\ x \longmapsto F(x),$$

eine Abbildung. Dann heißt F *bijektiv*, wenn F sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Bemerkung 3.12. Die Frage, ob eine Abbildung $F\colon L \to M$ die Eigenschaften injektiv oder surjektiv besitzt, kann man anhand der Gleichung

$$F(x) = y$$

(in den beiden Variablen x und y) erläutern. Die Surjektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ mindestens eine Lösung

$$x \in L$$

für diese Gleichung gibt, die Injektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ maximal eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt, und die Bijektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ genau eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt. Die Surjektivität entspricht also der Existenz von Lösungen, die Injektivität der Eindeutigkeit von Lösungen. Beide Fragestellungen durchziehen die Mathematik und können selbst wiederum häufig als die Surjektivität oder die Injektivität einer geeigneten Abbildung interpretiert werden.

Definition 3.13. Es sei $F\colon L \to M$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt die Abbildung

$$G\colon M \longrightarrow L,$$

die jedes Element $y \in M$ auf das eindeutig bestimmte Element $x \in L$ mit $F(x) = y$ abbildet, die *Umkehrabbildung* zu F.

Definition 3.14. Es seien L, M und N Mengen und

$$F\colon L \longrightarrow M,\, x \longmapsto F(x),$$

und

$$G\colon M \longrightarrow N,\, y \longmapsto G(y),$$

Abbildungen. Dann heißt die Abbildung

$$G \circ F\colon L \longrightarrow N,\, x \longmapsto G(F(x)),$$

die *Hintereinanderschaltung* der Abbildungen F und G.

Es gilt also

$$(G \circ F)(x) \,:=\, G(F(x)),$$

wobei die linke Seite durch die rechte Seite definiert wird. Wenn die beiden Abbildungen durch funktionale Ausdrücke gegeben sind, so wird die Hintereinanderschaltung dadurch realisiert, dass man den ersten Ausdruck anstelle der Variablen in den zweiten Ausdruck einsetzt (und nach Möglichkeit vereinfacht).

Lemma 3.15. *Es seien L, M, N und P Mengen und es seien*

$$F\colon L \longrightarrow M,\, x \longmapsto F(x),$$

$$G\colon M \longrightarrow N,\, y \longmapsto G(y),$$

und

$$H\colon N \longrightarrow P,\, z \longmapsto H(z),$$

Abbildungen. Dann ist

$$H \circ (G \circ F) \,=\, (H \circ G) \circ F.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 3.27. □

3. Arbeitsblatt

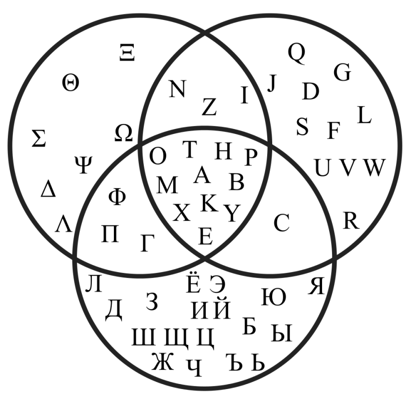
3.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 3.1. Bestimme für die Mengen

$$M = \{a, b, c, d, e\},\ N = \{a, c, e\},\ P = \{b\},\ R = \{b, d, e, f\}$$

die Mengen

(1) $M \cap N$,
(2) $M \cap N \cap P \cap R$,
(3) $M \cup R$,
(4) $(N \cup P) \cap R$,
(5) $N \setminus R$,
(6) $(M \cup P) \setminus (R \setminus N)$,
(7) $((P \cup R) \cap N) \cap R$,
(8) $(R \setminus P) \cap (M \setminus N)$.



Aufgabe 3.2. Es sei LA die Menge der Großbuchstaben des lateinischen Alphabets, GA die Menge der Großbuchstaben des griechischen Alphabets und RA die Menge der Großbuchstaben des russischen Alphabets. Bestimme die folgenden Mengen.

(1) $GA \setminus RA$.
(2) $(LA \cap GA) \cup (LA \cap RA)$.
(3) $RA \setminus (GA \cup RA)$.
(4) $RA \setminus (GA \cup LA)$.
(5) $(RA \setminus GA) \cap ((LA \cup GA) \setminus (GA \cap RA))$.

Aufgabe 3.3.*

Es seien A, B und C Mengen. Beweise die Identität

$$A \setminus (B \cap C) \,=\, (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Aufgabe 3.4. Es seien A, B und C drei Mengen. Man beweise die folgenden Identitäten.

(1) $A \cup \emptyset = A$,
(2) $A \cap \emptyset = \emptyset$,
(3) $A \cap B = B \cap A$,
(4) $A \cup B = B \cup A$,
(5) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
(6) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
(7) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
(8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
(9) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Aufgabe 3.5. Beweise die mengentheoretischen Fassungen einiger aristotelischer Syllogismen. Dabei bezeichnen A, B, C Mengen.

(1) Modus Barbara: Aus $B \subseteq A$ und $C \subseteq B$ folgt $C \subseteq A$.
(2) Modus Celarent: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \subseteq B$ folgt $C \cap A = \emptyset$.
(3) Modus Darii: Aus $B \subseteq A$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \cap A \neq \emptyset$.
(4) Modus Ferio: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \not\subseteq A$.
(5) Modus Baroco: Aus $B \subseteq A$ und $B \not\subseteq C$ folgt $A \not\subseteq C$.

Aufgabe 3.6. Gilt für die Vereinigung von Mengen die „Abziehregel“, d.h. kann man aus $A \cup C \,=\, B \cup C$ auf $A \,=\, B$ schließen?

Aufgabe 3.7.*

Es seien A, B, C Mengen. Zeige, dass die beiden folgenden Aussagen zueinander äquivalent sind.

(1) $A \,\subseteq\, B \cup C$.
(2) $A \setminus B \,\subseteq\, C$
(3) $A \setminus C \,\subseteq\, B$.

Aufgabe 3.8. Skizziere die Produktmenge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe 3.9. Beschreibe für je zwei (einschließlich dem Fall, dass das Produkt mit sich selbst genommen wird) der folgenden geometrischen Mengen die Produktmengen.

(1) Ein Geradenstück I.
(2) Eine Kreislinie K.
(3) Eine Kreisscheibe D.
(4) Eine Parabel P.

Welche Produktmengen lassen sich als eine Teilmenge im Raum realisieren, welche nicht?

Aufgabe 3.10. Skizziere die folgenden Teilmengen im $\mathbb{R}^2$.

(1) $\{(x, y) \mid x = 7 \text{ oder } y = 3\}$,
(2) $\{(x, y) \mid 7x \geq 3y \text{ und } 4x \leq y\}$,
(3) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 0\}$,
(4) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Aufgabe 3.11. (1) Skizziere die Menge

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - 7y = 3\right\}$$

und die Menge

$$N = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 5\right\}.$$

(2) Bestimme den Durchschnitt $M \cap N$ zeichnerisch und rechnerisch.

Es empfiehlt sich, die in den folgenden Aufgaben formulierten Mengenidentitäten zu veranschaulichen.

Aufgabe 3.12.*
Es seien M und N Mengen und seien $A \subseteq M$ und $B \subseteq N$ Teilmengen. Zeige die Gleichheit

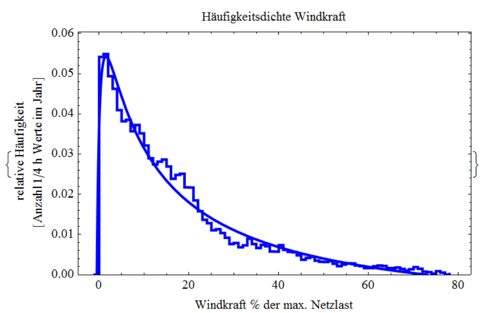
$$(A \times N) \cap (M \times B) \,=\, A \times B.$$

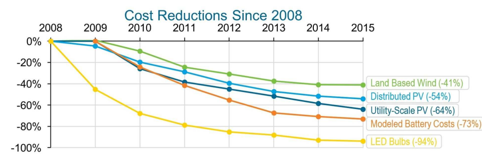
Aufgabe 3.13. Es seien M und N Mengen und seien $A_1, A_2 \subseteq M$ und $B_1, B_2 \subseteq N$ Teilmengen. Zeige die Gleichheit

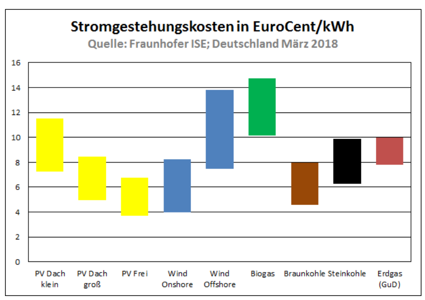
$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \,=\, (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

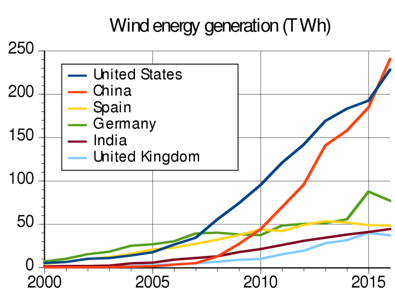
Aufgabe 3.14. Es sei P eine Menge von Personen und V die Menge der Vornamen von diesen Personen und N die Menge der Nachnamen von diesen Personen. Definiere natürliche Abbildungen von P nach V, nach N und nach $V \times N$ und untersuche sie in Hinblick auf die relevanten Abbildungsbegriffe.

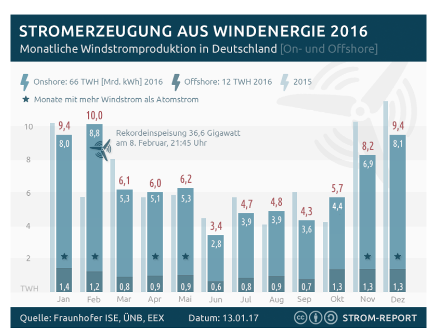
Aufgabe 3.15. Bestimme für die folgenden Diagramme, welche empirischen Abbildungen in ihnen dargestellt werden (sollen). Was sind jeweils die Definitionsmengen, die Wertemengen, mit welchen Einheiten wird gearbeitet? Wird (pro Bild) nur eine Abbildung dargestellt oder mehrere? Handelt es sich überhaupt um Abbildungen? Welche Informationen werden über die Abbildung hinaus gegeben? Werden die empirischen Abbildungen mathematisiert?











Aufgabe 3.16. Man gebe Beispiele für Abbildungen

$$\varphi, \psi \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

derart, dass φ injektiv, aber nicht surjektiv ist, und dass ψ surjektiv, aber nicht injektiv ist.

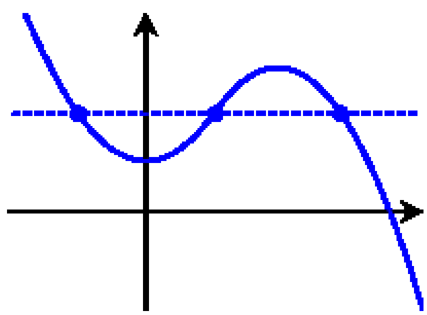
Aufgabe 3.17. Man beschreibe eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3.18. Untersuche für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^n,$$

auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 3.19. Wie sehen die Graphen der Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus, die Sie in der Schule kennengelernt haben?



Aufgabe 3.20. Woran erkennt man am Graphen einer Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

ob f injektiv bzw. surjektiv ist?

Aufgabe 3.21. Welche bijektiven Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder zwischen Teilmengen von $\mathbb{R}$) kennen Sie aus der Schule? Wie heißen die Umkehrabbildungen?

Aufgabe 3.22. Es seien L und M Mengen. Zeige, dass die Abbildung

$$\tau\colon L \times M \longrightarrow M \times L,\ (x, y) \longmapsto (y, x),$$

eine bijektive Abbildung zwischen den Produktmengen $L \times M$ und $M \times L$ festlegt.

Aufgabe 3.23. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F\colon L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Es sei

$$G\colon M \longrightarrow L$$

eine Abbildung, die $F \circ G = \mathrm{id}_M$ und $G \circ F = \mathrm{id}_L$ erfüllt. Zeige, dass dann G die Umkehrabbildung von F ist.

Aufgabe 3.24. Wir betrachten die Mengen

$$L = \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\ M = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$$

und

$$N = \{R,S,T,U,V,W,X,Y,Z\}$$

und die Abbildungen $\varphi\colon L \to M$ und $\psi\colon M \to N$, die durch die Wertetabellen

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	c	i	a	g	d	e	h	b

und

y	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$\psi(y)$	X	Z	Y	S	Z	S	T	W	U

gegeben sind.

(1) Erstelle eine Wertetabelle für $\psi \circ \varphi$.
(2) Sind die Abbildungen φ, ψ, $\psi \circ \varphi$ injektiv?
(3) Sind die Abbildungen φ, ψ, $\psi \circ \varphi$ surjektiv?

Aufgabe 3.25. Bestimme die Hintereinanderschaltungen $\varphi \circ \psi$ und $\psi \circ \varphi$ für die Abbildungen $\varphi, \psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$\varphi(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 5 \text{ und } \psi(x) = 2x^3 - x^2 + 6x - 1$$

definiert sind.

Aufgabe 3.26. (1) Kann eine konstante Abbildung bijektiv sein?
(2) Ist die Hintereinanderschaltung einer konstanten Abbildung mit einer beliebigen Abbildung (also die konstante Abbildung zuerst) konstant?
(3) Ist die Hintereinanderschaltung einer beliebigen Abbildung mit einer konstanten Abbildung (also die konstante Abbildung zuletzt) konstant?

Aufgabe 3.27.*

Es seien L, M, N und P Mengen und es seien

$$F\colon L \longrightarrow M,\ x \longmapsto F(x),$$

$$G\colon M \longrightarrow N,\ y \longmapsto G(y),$$

und

$$H\colon N \longrightarrow P,\ z \longmapsto H(z),$$

Abbildungen. Zeige, dass dann

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F$$

gilt.

Aufgabe 3.28.*

Es seien L, M und N Mengen und

$$F\colon L \longrightarrow M,\, x \longmapsto F(x),$$

und

$$G\colon M \longrightarrow N,\, y \longmapsto G(y),$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$G \circ F\colon L \longrightarrow N.$$

Zeige die folgenden Eigenschaften.

(1) Wenn F und G injektiv sind, so ist auch $G \circ F$ injektiv.
(2) Wenn F und G surjektiv sind, so ist auch $G \circ F$ surjektiv.
(3) Wenn F und G bijektiv sind, so ist auch $G \circ F$ bijektiv.

Aufgabe 3.29.*

Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f\colon L \longrightarrow N,\, x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv.

3.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 3.30. (4 Punkte)

Es seien A und B zwei Mengen. Zeige, dass die folgenden Aussagen zueinander äquivalent sind.

(1) $A \subseteq B$,
(2) $A \cap B = A$,
(3) $A \cup B = B$,
(4) $A \setminus B = \emptyset$,
(5) Es gibt eine Menge C mit $B = A \cup C$,
(6) Es gibt eine Menge D mit $A = B \cap D$.

Aufgabe 3.31. (2 Punkte)

Skizziere die folgenden Teilmengen im $\mathbb{R}^2$.

(1) $\{(x,y) \mid 2x = 5 \text{ und } y \geq 3\}$,
(2) $\{(x,y) \mid -3x \geq 2y \text{ und } 4x \leq -5y\}$,
(3) $\{(x,y) \mid y^2 - y + 1 \leq 4\}$,
(4) $\{(x,y) \mid xy = 0\}$.

Aufgabe 3.32. (3 Punkte)

Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f\colon\ L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, so ist auch g surjektiv.

Aufgabe 3.33. (4 Punkte)

Wir betrachten einen Computer, der nur zwei Speicher besitzt, in denen jeweils eine natürliche Zahl stehen kann. Zu Beginn eines jedes Programms (also einer Aneinanderreihung von Befehlen) lautet die Belegung $(0,0)$. Der Computer kann einen Speicher leeren, einen Speicher um 1 erhöhen, zu Befehlen springen (unbedingter Sprungbefehl) und die beiden Inhalte der Speicher der Größe nach miteinander vergleichen. Ferner kann es zu einem Befehl wechseln, wenn die Vergleichsbedingung erfüllt ist (bedingter Sprungbefehl). Schließlich gibt es einen Druckbefehl, bei dem das momentane Belegungspaar ausgedruckt wird. Schreibe ein Computerprogramm, das jedes Paar $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ genau einmal ausdruckt.

Aufgabe 3.34. (4 Punkte)

Bestimme die Hintereinanderschaltungen $\varphi \circ \psi$ und $\psi \circ \varphi$ für die Abbildungen $\varphi, \psi\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$\varphi(x) = x^3 + 2x + 1 \text{ und } \psi(x) = x^2 - 5$$

definiert sind.

Aufgabe 3.35. (3 Punkte)

Betrachte auf der Menge $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ die Abbildung

$$\varphi\colon\ M \longrightarrow M,\ x \longmapsto \varphi(x),$$

die durch die Wertetabelle

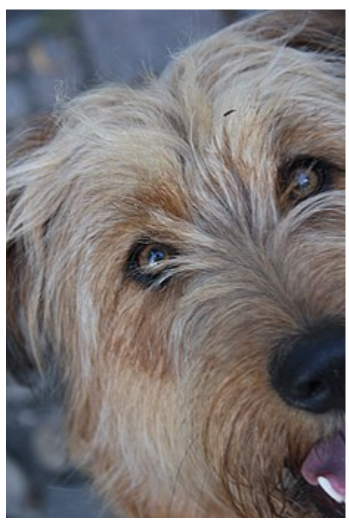
x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	2	5	6	1	4	3	7	7

gegeben ist. Berechne φ^{1003}, also die 1003-te Hintereinanderschaltung (oder *Iteration*) von φ mit sich selbst.

4. Vorlesung - Körper

Proof is the end product of a long interaction between creative imagination and critical reasoning. Without proof the program remains incomplete, but without the imaginative input it never gets started

Michael Atiyah



Vorli mag alle Menschen und achtet nicht auf Äußerlichkeiten. Ihr besonderes Talent ist aber, ...

4.1. **Verknüpfungen.**

Die Rechenoperationen Addition und Multiplikation innerhalb der reellen Zahlen fassen wir als eine Abbildung

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf, d.h. es wird dem Paar

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

die reelle Zahl $x+y$ (bzw. $x \cdot y$) zugeordnet. Eine solche Abbildung heißt eine Verknüpfung.

Definition 4.1. Eine *Verknüpfung* $\circ$ auf einer Menge M ist eine Abbildung

$$\circ\colon\ M \times M \longrightarrow M,\ (x,y) \longmapsto \circ(x,y) = x \circ y.$$

Der Definitionsbereich ist also die Produktmenge von M mit sich selbst und der Wertebereich ist ebenfalls M. Addition, Multiplikation und Subtraktion (auf $\mathbb{Z}$, auf $\mathbb{Q}$ oder auf $\mathbb{R}$) sind Verknüpfungen. Auf $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ ist die Division keine Verknüpfung, da sie nicht definiert ist, wenn die zweite Komponente gleich 0 ist (und schon gar nicht auf $\mathbb{Z}$). Allerdings ist die Division eine Verknüpfung auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. In dieser Vorlesung werden wir die algebraischen Eigenschaften der Addition und der Multiplikation auf den reellen Zahlen im Begriff des „Körpers“ zusammenfassen.

4.2. **Axiomatik.**

Die Mathematik ist durchzogen von Strukturen, die immer wieder in ähnlicher Weise auftreten. Beispielsweise besitzen die rationalen Zahlen und die reellen Zahlen sehr viele gemeinsame Eigenschaften, bezüglich gewisser Eigenschaften weichen sie aber voneinander ab. Diese Beobachtung ist die Grundlage für den *axiomatischen Aufbau der Mathematik*. Dabei fasst man verschiedene strukturelle Eigenschaften, die in einem bestimmten Kontext immer wieder auftauchen, in einen neuen Begriff zusammen. Das Ziel ist dabei, weitere Eigenschaften aus einigen wenigen Grundeigenschaften logisch zu erschließen. Man argumentiert dann nicht auf der Ebene vertrauter Beispiele, wie der reellen Zahlen, sondern logisch-deduktiv auf der Ebene der Eigenschaften. Der Gewinn ist dabei, dass man mathematische Schlüsse nur einmal auf der abstrakten Ebene der Eigenschaften durchführen muss und diese dann für alle Modelle gelten, die die jeweiligen Grundeigenschaften erfüllen, also unter den Begriff fallen. Zugleich erkennt man logische Abhängigkeiten und Hierarchien zwischen den Eigenschaften. Grundlegende Eigenschaften von mathematischen Strukturen werden als *Axiome* bezeichnet.

Im axiomatischen Zugang werden die Gesetzmäßigkeiten in den Mittelpunkt gestellt. Mathematische Objekte, die diese Gesetzmäßigkeiten erfüllen, sind dann Beispiele oder Modelle für diese Gesetzmäßigkeiten. Als Eigenschaften wählt man dabei vor allem solche Eigenschaften, die einerseits einfach zu formulieren sind und andererseits starke Folgerungen erlauben. Die Vorteile dieses Aufbaus sind die folgenden Punkte.

• Die mathematischen Objekte werden auf eine mengentheoretisch-logische Grundlage gestellt, man muss sich nicht auf die Anschauung stützen.

• Man weiß jederzeit, welche Argumentation, um eine Eigenschaft nachzuweisen, erlaubt ist und welche nicht, erlaubt ist nämlich nur das logische Erschließen der Eigenschaft aus den Axiomen heraus.

• Es werden wenige grundlegende Eigenschaften herausgearbeitet. Es entsteht eine Hierarchie zwischen fundamentalen Gesetzmäßigkeiten und abgeleiteten Eigenschaften.

Es werden strukturelle Ähnlichkeiten sichtbar, die von einem intuitiven Standpunkt her übersehen werden könnten. Viele Aussagen, die man aus Axiomen ableiten kann, benötigen gar nicht das volle Axiomensystem, sondern nur Teile davon. Man kann daher die Axiome gruppieren, und wenn man aus einer bestimmten Axiomengruppe eine Aussage ableiten kann, so gilt diese auch für alle mathematischen Gebilde, die diese Axiomengruppe erfüllen. Durch „Gegenbeispiele" kann man zeigen, dass gewisse Eigenschaften nicht aus anderen Eigenschaften folgen. Das Vorgehen ist sehr ökonomisch, da es Wiederholungen von Schlüssen vermeidet. Als Nachteile kann man die folgenden Punkte nennen.

• Großer begrifflicher Aufwand.

• Abstraktes, manchmal übertrieben formal oder unintuitiv scheinendes Vorgehen.

• Offensichtlich „triviale Eigenschaft" brauchen eine Begründung, wenn sie nicht explizit im Axiomensystem vorkommen.

4.3. **Körper.**

Wir werden nun die Eigenschaften der reellen Zahlen in einem axiomatischen Rahmen besprechen. Die Axiome für die reellen Zahlen gliedern sich in algebraische Axiome, Anordnungsaxiome und das Vollständigkeitsaxiom. Die algebraischen Axiome werden im Begriff des Körpers zusammengefasst. Unter algebraischen Eigenschaften versteht man solche Eigenschaften, die sich auf die Rechenoperationen, also die Addition, die Subtraktion, die Multiplikation und die Division, beziehen. Diese Operationen ordnen zwei Elementen der gegebenen Menge M, also beispielsweise zwei reellen Zahlen, ein weiteres Element der Menge zu, es handelt sich also um Verknüpfungen. Die folgende Definition nimmt nur auf zwei Verknüpfungen, Addition und Multiplikation, Bezug, Subtraktion und Division ergeben sich als abgeleitete Verknüpfungen.

Definition 4.2. Eine Menge K heißt ein *Körper*, wenn es zwei Verknüpfungen (genannt Addition und Multiplikation)

$$+ : K \times K \longrightarrow K \text{ und } \cdot : K \times K \longrightarrow K$$

und zwei verschiedene Elemente $0, 1 \in K$ gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllen.

(1) Axiome der Addition
   (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a+b)+c = a+(b+c)$.
   (b) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a + b = b + a$.

   (c) 0 ist das neutrale Element der Addition, d.h. für alle $a \in K$ ist $a + 0 = a$.
   (d) Existenz des Negativen: Zu jedem $a \in K$ gibt es ein Element $b \in K$ mit $a + b = 0$.
(2) Axiome der Multiplikation
   (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
   (b) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$.
   (c) 1 ist das neutrale Element der Multiplikation, d.h. für alle $a \in K$ ist $a \cdot 1 = a$.
   (d) Existenz des Inversen: Zu jedem $a \in K$ mit $a \neq 0$ gibt es ein Element $c \in K$ mit $a \cdot c = 1$.
(3) Distributivgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Dass all diese Axiome für die reellen Zahlen (und die rationalen Zahlen) mit den natürlichen Verknüpfungen gelten, ist aus der Schule bekannt.

In einem Körper gilt die *Klammerkonvention*, dass die Multiplikation stärker bindet als die Addition. Man kann daher $a \cdot b + c \cdot d$ statt $(a \cdot b) + (c \cdot d)$ schreiben. Zur weiteren Notationsvereinfachung wird das Produktzeichen häufig weggelassen. Die besonderen Elemente 0 und 1 in einem Körper werden als *Nullelement* und als *Einselement* bezeichnet. Nach der Definition müssen sie verschieden sein.

Die wichtigsten Beispiele für einen Körper sind für uns die rationalen Zahlen, die reellen Zahlen und die komplexen Zahlen, die wir in der nächsten Vorlesung kennenlernen werden.

Lemma 4.3. *In einem Körper K ist zu einem Element $x \in K$ das Element y mit $x + y = 0$ eindeutig bestimmt. Bei $x \neq 0$ ist auch das Element z mit $xz = 1$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei x vorgegeben und seien y und y' Elemente mit $x + y = 0 = x + y'$. Dann gilt

$$y = y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' = (x + y) + y' = 0 + y' = y'.$$

Insgesamt ist also $y = y'$. Für den zweiten Teil siehe Aufgabe 4.3. □

Zu einem Element $a \in K$ nennt man das nach diesem Lemma eindeutig bestimmte Element y mit $a + y = 0$ das *Negative* von a und bezeichnet es mit $-a$. Es ist $-(-a) = a$, da wegen $a + (-a) = 0$ das Element a gleich dem eindeutig bestimmten Negativen von $-a$ ist.

Statt $b + (-a)$ schreibt man abkürzend $b - a$ und spricht von der *Differenz*. Die Differenz ist also keine grundlegende Verknüpfung, sondern wird auf die Addition mit dem Negativen zurückgeführt.

Das zu $a \in K$, $a \neq 0$, nach diesem Lemma eindeutig bestimmte Element z mit $az = 1$ nennt man das *Inverse* von a und bezeichnet es mit a^{-1}.

Für $a, b \in K$, $b \neq 0$, schreibt man auch abkürzend

$$a/b := \frac{a}{b} = ab^{-1}.$$

Die beiden linken Ausdrücke sind also eine Abkürzung für den rechten Ausdruck.

Zu einem Körperelement $a \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ wird a^n als das n-fache Produkt von a mit sich selbst definiert, und bei $a \neq 0$ wird a^{-n} als $(a^{-1})^n$ interpretiert.

Ein „kurioser" Körper wird im folgenden Beispiel beschrieben. Dieser Körper mit zwei Elementen ist in der Informatik und der Kodierungstheorie wichtig, wird für uns aber keine große Rolle spielen. Er zeigt, dass es nicht für jeden Körper sinnvoll ist, seine Elemente auf der Zahlengeraden zu verorten.

Beispiel 4.4. Wir suchen nach einer Körperstruktur auf der Menge $\{0, 1\}$. Wenn 0 das neutrale Element einer Addition und 1 das neutrale Element einer Multiplikation sein soll, so ist dadurch schon alles festgelegt, da $1 + 1 = 0$ sein muss, da 1 ein inverses Element bezüglich der Addition besitzen muss, und da in jedem Körper nach Lemma 4.3 (1) $0 \cdot 0 = 0$ gelten muss. Die Operationstafeln sehen also wie folgt aus.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

und

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Durch etwas aufwändiges Nachrechnen stellt man fest, dass es sich in der Tat um einen Körper handelt.

Die folgenden Eigenschaften sind für den Körper der reellen Zahlen vertraut, wir beweisen sie aber allein aus den Axiomen eines Körpers, sie gelten daher für einen beliebigen Körper.

Lemma 4.5. *Es sei K ein Körper und seien $a, b, c, a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s$ Elemente aus K. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) $a0 = 0$ *(*Annullationsregel*).*

(2)
$$(-a)b = -ab = a(-b)$$
*(*Vorzeichenregel*).*

(3)
$$(-a)(-b) = ab.$$

(4)
$$a(b - c) = ab - ac$$

(5) *Aus* $a \cdot b = 0$ *folgt* $a = 0$ *oder* $b = 0$ *(*Nichtnullteilereigenschaft*).*
(6) $(\sum_{i=1}^{r} a_i)(\sum_{k=1}^{s} b_k) = \sum_{1 \leq i \leq r,\, 1 \leq k \leq s} a_i b_k$ *(*allgemeines Distributivgesetz*).*

Beweis. (1) Es ist $a0 = a(0+0) = a0 + a0$. Durch beidseitiges Abziehen (also Addition mit dem Negativen von $a0$) von $a0$ ergibt sich die Behauptung.
(2) Siehe Aufgabe 4.4.
(3) Siehe Aufgabe 4.4.
(4) Siehe Aufgabe 4.4.
(5) Nehmen wir an, dass a und b beide von 0 verschieden sind. Dann gibt es dazu inverse Elemente a^{-1} und b^{-1} und daher ist $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = 1$. Andererseits ist aber nach Voraussetzung $ab = 0$ und daher ist nach der Annullationsregel

$$(ab)\big(b^{-1}a^{-1}\big) = 0\big(b^{-1}a^{-1}\big) = 0,$$

so dass sich der Widerspruch $0 = 1$ ergibt.
(6) Dies folgt aus einer Doppelinduktion, siehe Aufgabe 4.22.

□

4.4. **Exkurs: Widerspruchsbeweise.**

Soeben haben wir einen Widerspruchsbeweis durchgeführt, dieses Argumentationsschema wollen wir kurz anhand von typischen Beispielen erläutern.

Bei einem *Widerspruchsbeweis* geht man folgendermaßen vor: Man möchte eine mathematische Aussage A beweisen. Man nimmt dann an, dass A nicht wahr ist, dass also die Negation von A wahr ist. Dann führt man eine mathematische Argumentation durch, die zu einem Widerspruch führt, typischerweise zu einer Aussage B, die sowohl gilt als auch nicht gilt. Da dies nicht sein kann, muss die Annahme falsch gewesen sein, und damit ist A bewiesen. Da die Argumentation mathematisch korrekt sein muss, bleibt als einzige Erklärung für den Widerspruch die Annahme übrig.

Wir geben zwei Hauptbeispiele für einen Widerspruchsbeweis.

Satz 4.6. *Es gibt keine rationale Zahl, deren Quadrat gleich* 2 *ist. D.h. die reelle Zahl* $\sqrt{2}$ *ist irrational.*

Beweis. Wir machen die Annahme, dass es eine rationale Zahl gibt, deren Quadrat gleich 2 ist, und führen das zu einem Widerspruch. Sei also angenommen, dass

$$x \in \mathbb{Q}$$

die Eigenschaft besitzt, dass

$$x^2 = 2$$

ist. Eine rationale Zahl hat die Beschreibung als ein Bruch, wobei Zähler und Nenner ganze Zahlen sind. Die rationale Zahl x können wir somit als

$$x = \frac{a}{b}$$

ansetzen. Ferner können wir annehmen (dieses Annehmen ist eine Vereinfachung der Situation und hat nichts mit der zum Widerspruch zu führenden Annahme zu tun), dass dieser Bruch gekürzt ist, dass also a und b keinen echten gemeinsamen Teiler haben. In der Tat brauchen wir lediglich, dass wir annehmen dürfen, dass zumindest eine Zahl, a oder b ungerade ist (wenn beide gerade sind, so können wir mit 2 kürzen, u.s.w.) Die Eigenschaft

$$x^2 = 2$$

bedeutet ausgeschrieben

$$x^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2.$$

Multiplikation mit b^2 ergibt die Gleichung

$$2b^2 = a^2$$

(dies ist eine Gleichung in $\mathbb{Z}$ bzw. sogar in $\mathbb{N}$). Diese Gleichung besagt, dass a^2 gerade ist, da ja a^2 ein Vielfaches der 2 ist. Daraus ergibt sich aber auch, dass a selbst gerade ist, da ja das Quadrat einer ungeraden Zahl wieder ungerade ist. Deshalb können wir den Ansatz

$$a = 2c$$

mit einer ganzen Zahl c machen. Dies setzen wir in die obige Gleichung ein und erhalten

$$2b^2 = (2c)^2 = 2^2c^2.$$

Wir können mit 2 kürzen und erhalten

$$b^2 = 2c^2.$$

Also ist auch b^2 und damit b selbst gerade. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass nicht sowohl a als auch b gerade sind. □

Der folgende Satz heißt *Satz von Euklid*.

Satz 4.7. *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Beweis. Angenommen, die Menge aller Primzahlen sei endlich, sagen wir $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$. Man betrachtet die Zahl

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_r + 1.$$

Diese Zahl ist durch keine der Primzahlen p_i teilbar, da bei Division von N durch p_i immer ein Rest 1 verbleibt. Damit sind die Primfaktoren von N, die es nach Satz 2.5 geben muss, nicht in der Ausgangsmenge enthalten - Widerspruch. □

4.5. **Der Binomische Lehrsatz.**

Definition 4.8. Zu einer natürlichen Zahl n nennt man die Zahl

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

die *Fakultät* von n (sprich n Fakultät).

Man setzt $0! = 1$.

Definition 4.9. Es seien k und n natürliche Zahlen mit $k \leq n$. Dann nennt man

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

den *Binomialkoeffizienten* „n über k“.

Diesen Bruch kann man auch als

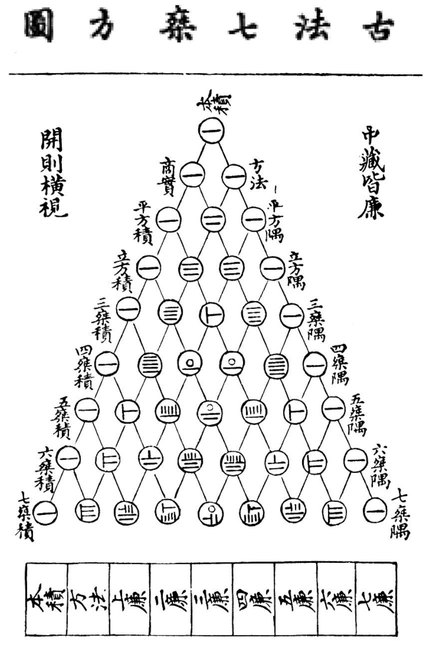
$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1}$$

schreiben, da die Faktoren aus $(n-k)!$ auch in $n!$ vorkommen und daher kürzbar sind. In dieser Darstellung stehen im Zähler und im Nenner gleich viele Faktoren. Gelegentlich ist es sinnvoll, auch negative k oder $k > n$ zuzulassen und in diesen Fällen die Binomialkoeffizienten gleich 0 zu setzen.

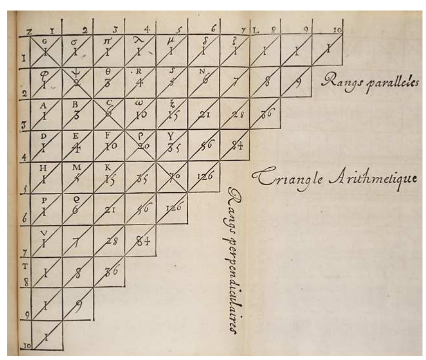
Von der Definition her ist es nicht sofort klar, dass es sich bei den Binomialkoeffizienten um natürliche Zahlen handelt. Dies folgt aus der folgenden Beziehung.

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1\\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1\\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1\\
1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1
\end{array}$$

Das *Dreieck der Binomialkoeffizienten* war in Indien und in Persien schon um 1000 bekannt,



in China heißt es *Yanghui-Dreieck* (nach Yang Hui (um 1238-1298)),



in Europa heißt es das *Pascalsche Dreieck* (nach Blaise Pascal (1623-1662)).

Lemma 4.10. *Die Binomialkoeffizienten erfüllen die rekursive Beziehung*[23]

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 4.13. □

Die folgende Formel bringt die Addition und die Multiplikation miteinander in Beziehung.

[23]Bei $k = 0$ ist $\binom{n}{k-1}$ als 0 zu interpretieren.

Satz 4.11. *Es seien a, b Elemente in einem Körper. Ferner sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} .$$

Beweis. Wir führen Induktion nach n. Für $n = 0$ steht einerseits $(a+b)^0 = 1$ und andererseits $a^0 b^0 = 1$.[24] Sei die Aussage bereits für n bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) \\
&= a\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) + b\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.12. Für den Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k}$$

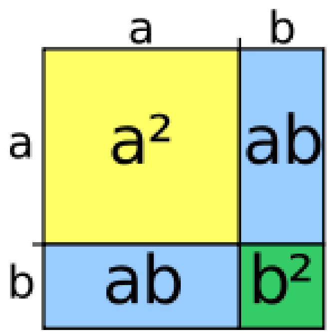
gibt es eine wichtige inhaltliche Interpretation. Er gibt die Anzahl der k-elementigen Teilmengen in einer n-elementigen Menge an. Z.B. gibt es in einer 49-elementigen Menge genau

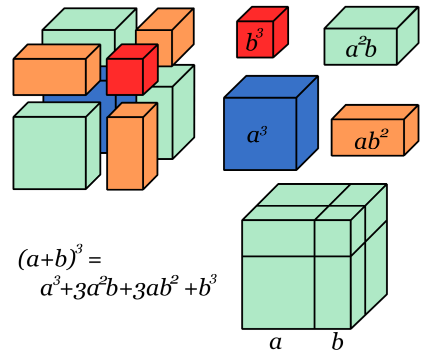
$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13983816$$

6-elementige Teilmengen. Der Kehrwert von dieser Zahl ist die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto sechs Richtige zu haben.

---

[24] Wenn einem diese Aussage merkwürdig vorkommt, da sie von der Festlegung $x^0 = 1$ abhängt, so kann man auch bei $n = 1$ anfangen. Dann hat man einerseits $(a+b)^1 = a+b$ und andererseits $a^1 b^0 + a^0 b^1 = a + b$.





4. Arbeitsblatt

4.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 4.1. Zeige, dass die Verknüpfung auf einer Geraden, die zwei Punkten ihren Mittelpunkt zuordnet, kommutativ, aber nicht assoziativ ist. Gibt es ein neutrales Element?

Aufgabe 4.2. Es sei M die Menge aller weiblichen Doppelvornamen (Bindestrichvornamen, wobei die einzelnen Teile einfache Vornamen sind, und jede Kombination erlaubt ist). Wir betrachten die Verknüpfung

$$M \times M \longrightarrow M,$$

die einem Doppelvornamenpaar $(A-B, C-D)$ den Doppelvornamen $A-D$ zuordnet.

(1) Was ist der Wert von (Lea-Marie, Klara-Sophie) unter dieser Verknüpfung?
(2) Ist die Verknüpfung kommutativ?
(3) Ist die Verknüpfung assoziativ?
(4) Besitzt die Verknüpfung ein neutrales Element?
(5) Ist die Verknüpfung surjektiv?
(6) Ist die Verknüpfung injektiv?

Aufgabe 4.3.*

Zeige, dass in einem Körper K zu jedem Element $x \neq 0$ das Element z mit $xz = 1$ eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 4.4. Es sei K ein Körper und seien a, b Elemente aus K. Zeige, dass die folgenden Vorzeichenregeln gelten.

(1)
$$(-a)b = -ab = a(-b).$$
(2)
$$(-a)(-b) = ab.$$
(3)
$$a(b-c) = ab - ac.$$

Aufgabe 4.5. Beschreibe und beweise Regeln für die Addition und die Multiplikation von geraden und ungeraden ganzen Zahlen. Man definiere auf der zweielementigen Menge
$$\{G, U\}$$
eine „Addition“ und eine „Multiplikation“, die diese Regeln „repräsentieren“.

Aufgabe 4.6. Es sei K ein Körper. Zeige, dass man jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Körperelement n_K zuordnen kann, so dass 0_K das Nullelement in K und 1_K das Einselement in K ist und so dass
$$(n+1)_K = n_K + 1_K$$
gilt. Zeige, dass diese Zuordnung die Eigenschaften
$$(n+m)_K = n_K + m_K \text{ und } (nm)_K = n_K \cdot m_K$$
besitzt.

Erweitere diese Zuordnung auf die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und zeige, dass die angeführten strukturellen Eigenschaften ebenfalls gelten.

Aufgabe 4.7. Es sei K ein Körper mit $2 \neq 0$. Zeige, dass für $f, g \in K$ die Beziehung
$$fg = \frac{1}{4}\big((f+g)^2 - (f-g)^2\big)$$
gilt.

Aufgabe 4.8. Es seien x, y, z, w Elemente in einem Körper, wobei z und w nicht null seien. Beweise die folgenden Bruchrechenregeln.

(1)
$$\frac{x}{1} = x,$$
(2)
$$\frac{1}{z} = z^{-1},$$
(3)
$$\frac{1}{-1} = -1,$$

(4)
$$\frac{0}{z} = 0,$$
(5)
$$\frac{z}{z} = 1,$$
(6)
$$\frac{x}{z} = \frac{xw}{zw},$$
(7)
$$\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw},$$
(8)
$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{xw + yz}{zw}.$$

Gilt die zu (8) analoge Formel, die entsteht, wenn man die Addition mit der Multiplikation vertauscht, also
$$(x - z) \cdot (y - w) = (x + w)(y + z) - (z + w)?$$
Zeige, dass die „beliebte Formel"
$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{x + y}{z + w}$$
nicht gilt.

Aufgabe 4.9. Es sei K ein Körper und seien $a, b \neq 0$ Elemente aus K. Beweise die folgenden Potenzgesetze für natürliche Exponenten $m, n \in \mathbb{N}$.

(1)
$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$
(2)
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$
(3)
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Aufgabe 4.10.*

Es sei K ein Körper und seien $a, b \neq 0$ Elemente aus K. Beweise die folgenden Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten $m, n \in \mathbb{Z}$. Dabei darf man die entsprechenden Gesetze für Exponenten aus $\mathbb{N}$ sowie die Tatsachen, dass das Inverse des Inversen wieder das Ausgangselement ist und dass das Inverse von u^k gleich $(u^{-1})^k$ ist, verwenden.

(1)
$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

(2)
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$
(3)
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Aufgabe 4.11. Berechne das Matrizenprodukt
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 4.12.*

a) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a, b, c \in \,]0, 1[$ mit
$$a^2 + b^2 = c^2 .$$
b) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a, b, c \in \,]0, 1[$ mit
$$a^2 + b^2 \neq c^2 .$$
c) Man gebe ein Beispiel für irrationale Zahlen $a, b \in \,]0, 1[$ und eine rationale Zahl $c \in \,]0, 1[$ mit
$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

Aufgabe 4.13.*

Zeige, dass die Binomialkoeffizienten die rekursive Beziehung
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$
erfüllen.

Aufgabe 4.14. Zeige, dass die Binomialkoeffizienten natürliche Zahlen sind.

Aufgabe 4.15. Beweise die Formel
$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Aufgabe 4.16.*

Beweise durch Induktion, dass für
$$n \geq 10$$
die Abschätzung
$$3^n \geq n^4$$
gilt.

Aufgabe 4.17.*

Franziska möchte mit ihrem Freund Heinz Schluss machen. Sie erwägt die folgenden drei Begründungen.

(1) „Du hast dich schon am ersten Tag voll daneben benommen. Seitdem ist es von jedem Tag zum nächsten Tag nur noch schlimmer geworden. Du wirst Dich also immer völlig daneben benehmen“.
(2) „Wenn ich mit Dir zusammenbleiben würde, so würde ich irgendwann als eine traurige, gelangweilte, vom Leben enttäuschte Person enden, das möchte ich aber auf gar keinen Fall“.
(3) „Also, wenn Du mich nicht liebst, will ich Dich sowieso nicht. Wenn Du mich aber liebst, so komme ich zu dem Schluss, dass Du dein Verhalten mit Deinen Gefühlen nicht zur Deckung bringen kannst. Dann bist Du also unreif und dann will ich Dich auch nicht“.

Welche mathematischen Beweisprinzipien spiegeln sich in den drei Begründungen wieder?

Aufgabe 4.18.*

(1) Löse das folgende Minisudoku
$$\begin{pmatrix} - & - & 2 & - \\ 3 & - & - & 4 \\ - & - & - & - \\ - & 4 & - & 1 \end{pmatrix}.$$
(2) Begründe, dass das Minisudoku aus (1) nur eine Lösung besitzt.
(3) Welche mathematischen Beweisverfahren finden sich als typische Argumentationsschemata beim Lösen eines Sudokus wieder?

Aufgabe 4.19. Nehmen Sie Stellung zur folgenden Aussage: „Das Prinzip „Beweis durch Widerspruch“ ist offenbar absurd. Wenn man alles annehmen darf, so kann man immer einen Widerspruch erzielen und somit alles beweisen“.

4.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 4.20. (2 Punkte)

Zeige, dass das Potenzieren auf den positiven natürlichen Zahlen, also die Zuordnung
$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ (a,b) \longmapsto a^b,$$
weder kommutativ noch assoziativ ist. Besitzt diese Verknüpfung ein neutrales Element?

Aufgabe 4.21. (2 Punkte)

Es sei a ein von 0 verschiedenes Element in einem Körper. Zeige, wie man a^{10} mit vier Multiplikationen berechnen kann.

Aufgabe 4.22. (5 Punkte)

Beweise das allgemeine Distributivgesetz für einen Körper.

Aufgabe 4.23. (3 Punkte)

Zeige, dass die „Rechenregel“

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

bei $a, c \in \mathbb{N}_+$ (und $b, d, b+d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) niemals gilt. Man gebe ein Beispiel mit $a, b, c, d, b+d \neq 0$, wo diese Regel gilt.

Aufgabe 4.24. (2 (1+1) Punkte)

Es sei $u \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{Q}$.

(1) Zeige, dass u genau dann irrational ist, wenn $u + v$ irrational ist.
(2) Sei zusätzlich $v \neq 0$. Zeige, dass u genau dann irrational ist, wenn $u \cdot v$ irrational ist.

Aufgabe 4.25. (3 Punkte)

Beweise die Formel

$$n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}.$$

5. Vorlesung - Komplexe Zahlen

> Wenn ich weiter geblickt habe, so deshalb, weil ich auf den Schultern von Riesen stehe
>
> Isaac Newton

... dass jeder und jede meint, dass Vorli ihn oder sie ganz besonders mag.

5.1. **Anordnungseigenschaften der reellen Zahlen.**

Bekanntlich kann man die reellen Zahlen mit einer Geraden identifizieren. Auf der Zahlengeraden liegen von zwei Punkten einer weiter rechts als der andere, was bedeutet, dass sein Wert größer ist. Wir besprechen nun diese Anordnungseigenschaften der reellen Zahlen.

Definition 5.1. Ein Körper K heißt *angeordneter Körper*, wenn es zwischen den Elementen von K eine Beziehung $>$ („größer als“) gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllt ($a \geq b$ bedeutet $a > b$ oder $a = b$).

(1) Für je zwei Elemente $a, b \in K$ gilt entweder $a > b$ oder $a = b$ oder $b > a$.
(2) Aus $a \geq b$ und $b \geq c$ folgt $a \geq c$ (für beliebige $a, b, c \in K$).
(3) Aus $a \geq b$ folgt $a + c \geq b + c$ (für beliebige $a, b, c \in K$).
(4) Aus $a \geq 0$ und $b \geq 0$ folgt $ab \geq 0$ (für beliebige $a, b \in K$).

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ als auch die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden mit den natürlichen Vergleichsordnungen einen angeordneten Körper. Im Zahlenstrahl bedeutet

$$a \geq b,$$

dass a mindestens so weit rechts wie b liegt. Die ersten beiden Eigenschaften drücken aus, dass auf K eine *totale* (oder *lineare*) *Ordnung* vorliegt; die in (2) beschriebene Eigenschaft heißt Transitivität.

Statt $a > b$ schreibt man auch $b < a$ („kleiner als“) und statt $a \geq b$ schreibt man auch $b \leq a$. Eine wichtige Beziehung in einem angeordneten Körper ist, dass $a \geq b$ äquivalent[25] zu $a - b \geq 0$ ist. Diese Äquivalenz ergibt

[25]Man sagt, dass zwei Aussagen A und B zueinander *äquivalent* sind, wenn die Aussage A genau dann wahr ist, wenn die Aussage B wahr ist. Dabei sind die beiden Aussagen

sich durch beidseitiges Addieren von $-b$ bzw. b aus dem dritten Axiom. Ein Element $a \in K$ in einem angeordneten Körper nennt man *positiv*, wenn $a > 0$ ist, und *negativ*, wenn $a < 0$ ist. Die 0 ist demnach weder positiv noch negativ, und jedes Element ist entweder positiv oder negativ oder gleich 0. Die Elemente a mit $a \geq 0$ nennt man dann einfach *nichtnegativ* und die Elemente a mit $a \leq 0$ *nichtpositiv*.

Lemma 5.2. *In einem angeordneten Körper gelten die folgenden Eigenschaften.*

(1) $1 \geq 0$.
(2) *Es ist* $a \geq 0$ *genau dann, wenn* $-a \leq 0$ *ist.*
(3) *Es ist* $a \geq b$ *genau dann, wenn* $a - b \geq 0$ *ist.*
(4) *Es ist* $a \geq b$ *genau dann, wenn* $-a \leq -b$ *ist.*
(5) *Aus* $a \geq b$ *und* $c \geq d$ *folgt* $a + c \geq b + d$.
(6) *Aus* $a \geq b$ *und* $c \geq 0$ *folgt* $ac \geq bc$.
(7) *Aus* $a \geq b$ *und* $c \leq 0$ *folgt* $ac \leq bc$.
(8) *Aus* $a \geq b \geq 0$ *und* $c \geq d \geq 0$ *folgt* $ac \geq bd$.
(9) *Aus* $a \geq 0$ *und* $b \leq 0$ *folgt* $ab \leq 0$.
(10) *Aus* $a \leq 0$ *und* $b \leq 0$ *folgt* $ab \geq 0$.

Beweis. Siehe Aufgabe 5.5. □

Lemma 5.3. *In einem angeordneten Körper gelten die folgenden Eigenschaften.*

(1) *Aus* $x > 0$ *folgt auch* $x^{-1} > 0$.
(2) *Aus* $x < 0$ *folgt auch* $x^{-1} < 0$.
(3) *Für* $x > 0$ *ist* $x \geq 1$ *genau dann, wenn* $x^{-1} \leq 1$ *ist.*
(4) *Aus* $x \geq y > 0$ *folgt* $x^{-1} \leq y^{-1}$.
(5) *Für positive Elemente* x, y *ist* $x \geq y$ *äquivalent zu* $\frac{x}{y} \geq 1$.

Beweis. Siehe Aufgabe 5.7, Aufgabe 5.33, Aufgabe 5.8, Aufgabe 5.9 und Aufgabe 5.10. □

Wir besprechen nun eine weitere Anordungseigenschaft der reellen Zahlen, das sogenannte *Archimedes-Axiom*. Um dieses formulieren zu können, müssen wir uns zunächst klar machen, dass in jedem Körper K jede natürliche Zahl n eine sinnvolle und eindeutige Interpretation hat. Dies ist nicht selbstverständlich, da ja in der Axiomatik eines Körpers zwar eine 0 und eine 1 vorkommt, aber keine $2, 3, \ldots$. Wir legen daher einfach über die Addition im Körper die Bedeutung dieser Zahlen fest, also

$$2 = 1 + 1,$$

häufig abhängig von gewissen Variablenbelegungen, und die Äquivalenz bedeutet dann, dass $A(x)$ genau dann wahr ist, wenn $B(x)$ wahr ist.

$3 = 2+1 = 1+1+1$, u.s.w. Dabei kann passieren, dass eine positive natürliche Zahl in einem Körper gleich 0 ist, im Körper mit zwei Elementen ist beispielsweise $0 = 2 = 4 = 6 = \ldots$ und $1 = 3 = 5 = 7 = \ldots$. Eine negative ganze Zahlen $-n$ kann man in jedem Körper als das Negative (im Körper) von n interpretieren. Damit können wir das noch ausstehende Axiom formulieren.

Archimedes (ca. 287 -212 v. C.)

Definition 5.4. Es sei K ein angeordneter Körper. Dann heißt K *archimedisch angeordnet*, wenn das folgende *Archimedische Axiom* gilt, d.h. wenn es zu jedem $x \in K$ eine natürliche Zahl n mit

$$n \geq x$$

gibt.

Die reellen Zahlen (ebenso die rationalen Zahlen) erfüllen das Archimedische Axiom, sie bilden also einen archimedisch angeordneten Körper. Die folgenden Folgerungen aus dem Archimedes-Axiom gelten also für die reellen Zahlen. Wir werden sie direkt nur für die reellen Zahlen selbst formulieren, da man sogar jeden archimedisch angeordneten Körper als Unterkörper der reellen Zahlen erhalten kann. In Aufgabe 6.22 wird ein angeordneter Körper beschrieben, der nicht archimedisch angeordnet ist.

Lemma 5.5. (1) *Zu $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx \geq y$.*
(2) *Zu $x > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n mit $\frac{1}{n} < x$.*
(3) *Zu zwei reellen Zahlen $x < y$ gibt es auch eine rationale Zahl n/k (mit $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}_+$) mit*

$$x < \frac{n}{k} < y.$$

Beweis. (1). Wir betrachten y/x. Aufgrund des Archimedes-Axioms gibt es ein n mit $n \geq y/x$. Da x positiv ist, gilt nach Lemma 5.2 (6) auch $nx \geq y$. Für (2) und (3) siehe Aufgabe 5.18. $\square$

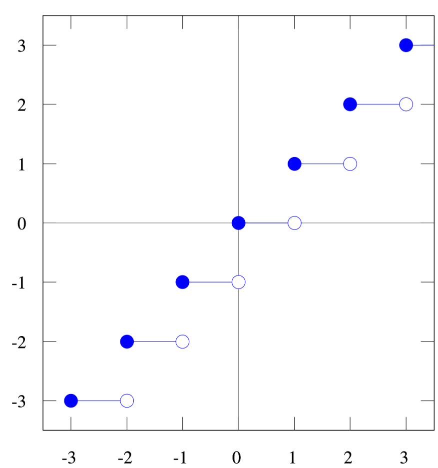
Definition 5.6. Für reelle Zahlen a, b, $a \le b$, nennt man

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a \text{ und } x \le b\}$ das *abgeschlossene Intervall*.
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a \text{ und } x < b\}$ das *offene Intervall*.
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a \text{ und } x \le b\}$ das *linksseitig offene Intervall*.
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a \text{ und } x < b\}$ das *rechtsseitig offene Intervall*.

Für das offene Intervall wird häufig auch (a, b) geschrieben. Die Zahlen a und b heißen die *Grenzen des Intervalls* (oder *Randpunkte* des Intervalls), genauer spricht man von *unterer* und *oberer Grenze*. Die Bezeichnung linksseitig und rechtsseitig bei den beiden letzten Intervallen (die man auch als *halboffen* bezeichnet) rühren von der üblichen Repräsentierung der reellen Zahlen als Zahlengerade her, bei der rechts die positiven Zahlen stehen. Manchmal werden auch Schreibweisen wie (a, ∞) verwendet. Dies bedeutet *nicht*, dass es in $\mathbb{R}$ ein Element ∞ gibt, sondern ist lediglich eine kurze Schreibweise für $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$. Ferner verwendet man Schreibweisen wie

$$\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}_-,\ \mathbb{R}_{\ge 0} = \mathbb{R}_+^0,\ \mathbb{R}_{\le 0} = \mathbb{R}_-^0$$

oder Ähnliches. Für die reellen Zahlen bilden die ganzzahligen Intervalle $[n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$, eine disjunkte *Überdeckung*. Deshalb ist die folgende Definition sinnvoll.



Definition 5.7. Zu einer reellen Zahl x ist die *Gaußklammer* $\lfloor x \rfloor$ durch

$$\lfloor x \rfloor = n, \text{ falls } x \in [n, n+1[\text{ und } n \in \mathbb{Z}\,,$$

definiert.

Die Anordnungseigenschaften erlauben es auch, von wachsenden und fallenden Funktionen zu sprechen.

Definition 5.8. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt f *wachsend*, wenn

$$f(x') \geq f(x) \text{ für alle } x, x' \in I \text{ mit } x' \geq x \text{ gilt},$$

streng wachsend, wenn

$$f(x') > f(x) \text{ für alle } x, x' \in I \text{ mit } x' > x \text{ gilt},$$

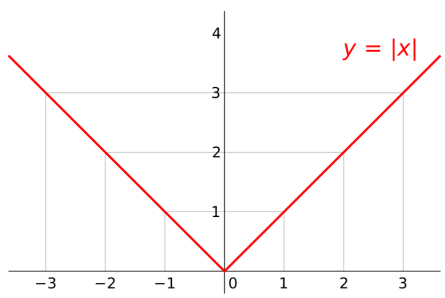
fallend, wenn

$$f(x') \leq f(x) \text{ für alle } x, x' \in I \text{ mit } x' \geq x \text{ gilt},$$

streng fallend, wenn

$$f(x') < f(x) \text{ für alle } x, x' \in I \text{ mit } x' > x \text{ gilt}.$$

5.2. **Der Betrag.**



Definition 5.9. Für eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist der *Betrag* folgendermaßen definiert.

$$|x| = \begin{cases} x\,, & \text{falls } x \geq 0\,, \\ -x, & \text{falls } x < 0\,. \end{cases}$$

Der Betrag ist also nie negativ und hat nur bei $x = 0$ den Wert 0, sonst ist er immer positiv. Die Gesamtabbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto |x|\,,$$

nennt man auch *Betragsfunktion*. Der Funktionsgraph setzt sich aus zwei Halbgeraden zusammen; eine solche Funktion nennt man auch *stückweise linear*.

Lemma 5.10. *Die reelle Betragsfunktion*

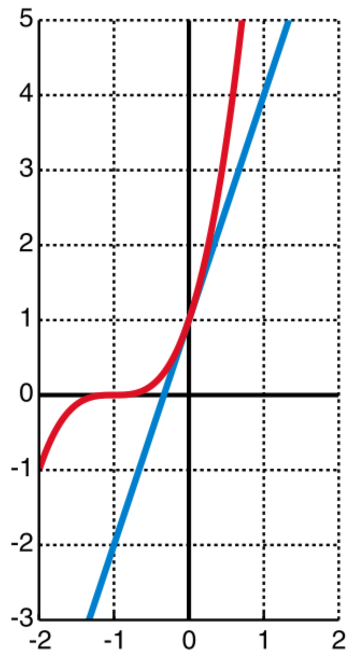
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto |x|\,,$$

erfüllt folgende Eigenschaften (dabei seien x, y beliebige reelle Zahlen).

(1) $|x| \geq 0$.
(2) $|x| = 0$ *genau dann, wenn* $x = 0$ *ist.*
(3) $|x| = |y|$ *genau dann, wenn* $x = y$ *oder* $x = -y$ *ist.*
(4) $|y - x| = |x - y|$.
(5) $|xy| = |x|\,|y|$.
(6) *Für* $x \neq 0$ *ist* $|x^{-1}| = |x|^{-1}$.
(7) *Es ist* $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(*Dreiecksungleichung für den Betrag*).*
(8) *Es ist* $|x + y| \geq |x| - |y|$.

Beweis. Siehe Aufgabe 5.20. □

5.3. **Bernoullische Ungleichung.**



Die Bernoullische Ungleichung für $n = 3$.

Die folgende Aussage heißt *Bernoulli-Ungleichung.*

Satz 5.11. *Für jede reelle Zahl* $x \geq -1$ *und eine natürliche Zahl* n *gilt die Abschätzung*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis. Wir führen Induktion über n. Bei $n = 0$ steht beidseitig 1, so dass die Aussage gilt. Sei nun die Aussage für n bereits bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n(1 + x) \\ &\geq (1 + nx)(1 + x) \\ &= 1 + (n + 1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)x, \end{aligned}$$

da Quadrate (und positive Vielfache davon) in einem angeordneten Körper nichtnegativ sind. □

5.4. **Die komplexen Zahlen.**

Wir führen nun ausgehend von den reellen Zahlen die komplexen Zahlen ein. Zwar haben wir noch nicht alle Eigenschaften der reellen Zahlen kennengelernt, insbesondere haben wir noch nicht die Vollständigkeit diskutiert, die $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet, doch ist dies für die Konstruktion von $\mathbb{C}$ unerheblich. Verwenden werden weiter unten, dass jede nichtnegative reelle Zahl eine eindeutige Quadratwurzel besitzt. Damit haben wir alle für die Anfängervorlesungen relevanten Zahlenbereiche zur Verfügung.

Definition 5.12. Die Menge

$$\mathbb{R}^2$$

mit $0 := (0,0)$ und $1 := (1,0)$, mit der komponentenweisen Addition und der durch

$$(a,b)\cdot(c,d) := (ac-bd, ad+bc)$$

definierten Multiplikation nennt man *Körper der komplexen Zahlen*. Er wird mit

$$\mathbb{C}$$

bezeichnet.

Die Addition ist also einfach die vektorielle Addition im $\mathbb{R}^2$, während die Multiplikation eine neuartige Verknüpfung ist, die zwar numerisch einfach durchführbar ist, an die man sich aber dennoch gewöhnen muss. Wir werden später noch eine geometrische Interpretation für die komplexe Multiplikation kennenlernen.

Lemma 5.13. *Die komplexen Zahlen bilden einen Körper.*

Beweis. Siehe Aufgabe 5.28. □

Wir lösen uns von der Paarschreibweise und schreiben

$$a + b\mathrm{i} \;:=\; (a,b).$$

Insbesondere ist $\mathrm{i} = (0,1)$, diese Zahl heißt *imaginäre Einheit*. Diese Zahl hat die wichtige Eigenschaft

$$\mathrm{i}^2 \;=\; -1.$$

Aus dieser Eigenschaft ergeben sich sämtliche algebraischen Eigenschaften der komplexen Zahlen durch die Körpergesetze. So kann man sich auch die obige Multiplikationsregel merken, es ist ja

$$(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i}) \;=\; ac+ad\mathrm{i}+b\mathrm{i}c+b\mathrm{i}d\mathrm{i} \;=\; ac+bd\mathrm{i}^2+(ad+bc)\mathrm{i} \;=\; ac-bd+(ad+bc)\mathrm{i}.$$

Wir fassen eine reelle Zahl a als die komplexe Zahl $a + 0\mathrm{i} = (a,0)$ auf. In diesem Sinne ist $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Es ist gleichgültig, ob man zwei reelle Zahlen als reelle Zahlen oder als komplexe Zahlen addiert oder multipliziert.

Definition 5.14. Zu einer komplexen Zahl

$$z = a + b\mathrm{i}$$

heißt

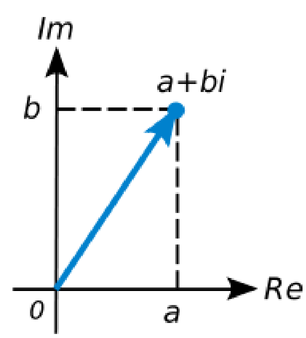
$$\mathrm{Re}\,(z) = a$$

der *Realteil* von z und

$$\mathrm{Im}\,(z) = b$$

heißt der *Imaginärteil* von z.

Man sollte sich allerdings die Menge der komplexen Zahlen nicht als etwas vorstellen, was weniger real als andere Zahlensysteme ist. Die Konstruktion der komplexen Zahlen aus den reellen Zahlen ist bei Weitem einfacher als die Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen. Allerdings war es historisch ein langer Prozess, bis die komplexen Zahlen als Zahlen anerkannt wurden; das Irreale daran ist, dass sie einen Körper bilden, der nicht angeordnet werden kann, und dass es sich daher scheinbar um keine Größen handelt, mit denen man sinnvollerweise etwas messen kann.



Man kann sich die komplexen Zahlen als die Punkte in einer Ebene vorstellen; für die additive Struktur gilt ja einfach $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. In diesem Zusammenhang spricht man von der *Gaussschen Zahlenebene*. Die horizontale Achse nennt man dann die *reelle Achse* und die vertikale Achse die *imaginäre Achse*.

Lemma 5.15. *Real- und Imaginärteil von komplexen Zahlen erfüllen folgende Eigenschaften (für z und w aus $\mathbb{C}$).*

(1) $z = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Im}\,(z)\mathrm{i}$.
(2) $\mathrm{Re}\,(z + w) = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Re}\,(w)$.
(3) $\mathrm{Im}\,(z + w) = \mathrm{Im}\,(z) + \mathrm{Im}\,(w)$.
(4) *Für $r \in \mathbb{R}$ ist*

$$\mathrm{Re}\,(rz) = r\,\mathrm{Re}\,(z) \text{ und } \mathrm{Im}\,(rz) = r\,\mathrm{Im}\,(z)\,.$$

(5) *Es ist $z = \mathrm{Re}\,(z)$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathrm{Im}\,(z) = 0$ ist.*

Beweis. Siehe Aufgabe 5.30. $\square$

Definition 5.16. Die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z = a + b\mathrm{i} \longmapsto \overline{z} := a - b\mathrm{i},$$

heißt *komplexe Konjugation.*

Zu z heißt $\overline{z}$ die *konjugiert-komplexe Zahl* von z. Geometrisch betrachtet ist die komplexe Konjugation zu $z \in \mathbb{C}$ einfach die Achsenspiegelung an der reellen Achse.

Lemma 5.17. *Für die komplexe Konjugation gelten die folgenden Rechenregeln (für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$).*

(1) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
(2) $\overline{-z} = -\overline{z}$.
(3) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
(4) *Für* $z \neq 0$ *ist* $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$.
(5) $\overline{\overline{z}} = z$.
(6) $\overline{z} = z$ *genau dann, wenn* $z \in \mathbb{R}$ *ist.*

Beweis. Siehe Aufgabe 5.37. $\square$

Das Quadrat d^2 einer reellen Zahl ist stets nichtnegativ, und die Summe von zwei nichtnegativen reellen Zahlen ist wieder nichtnegativ. Zu einer nichtnegativen reellen Zahl c gibt es eine eindeutige nichtnegative *Quadratwurzel* $\sqrt{c}$, siehe Aufgabe 8.9 (das werden wir später beweisen). Daher liefert folgende Definition eine wohldefinierte nichtnegative reelle Zahl.

Definition 5.18. Zu einer komplexen Zahl

$$z \,=\, a + b\mathrm{i}$$

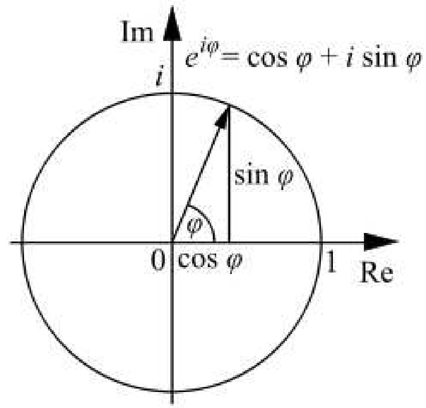
ist der *Betrag* durch

$$|z| \,=\, \sqrt{a^2 + b^2}$$

definiert.

Der Betrag einer komplexen Zahl z ist aufgrund des *Satzes des Pythagoras* der Abstand von z zum Nullpunkt $0 \,=\, (0,0)$. Insgesamt ist der Betrag eine Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\, z \longmapsto |z|\,.$$



Die Menge aller komplexen Zahlen mit einem bestimmten Betrag bilden einen Kreis mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und mit dem Betrag als Radius. Insbesondere bilden alle komplexen Zahlen mit dem Betrag 1 den *komplexen Einheitskreis*.

Lemma 5.19. *Für eine komplexe Zahl z gelten die folgenden Beziehungen.*

(1) $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$.
(2) $\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$.
(3) $\mathrm{Im}\,(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$.
(4) $\overline{z} = \mathrm{Re}\,(z) - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(z)$.
(5) *Für $z \neq 0$ ist $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 5.31. □

Lemma 5.20. *Für den Betrag von komplexen Zahlen gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Für reelles z stimmen reeller und komplexer Betrag überein.*
(2) *Es ist $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$ ist.*
(3) $|z| = |\overline{z}|$.
(4) $|zw| = |z|\,|w|$.
(5) *Für $z \neq 0$ ist $|1/z| = 1/\,|z|$.*
(6) $|\mathrm{Re}\,(z)|\,, |\mathrm{Im}\,(z)| \leq |z|$.
(7) $|z+w| \leq |z| + |w|$.

Beweis. Wir zeigen die Dreiecksungleichung, für die anderen Aussagen siehe Aufgabe 5.32. Zunächst gilt nach (6) für jede komplexe Zahl u die Abschätzung $\mathrm{Re}\,(u) \leq |u|$. Daher ist

$$\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) \;\leq\; |z|\,|w|\,,$$

und somit ist

$$|z+w|^2 \;=\; (z+w)(\overline{z}+\overline{w})$$

$$\begin{aligned}
&= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\
&= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) + |w|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2\,|z|\,|w| + |w|^2 \\
&= (|z| + |w|)^2.
\end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen ergibt sich die gewünschte Abschätzung. □

5. Arbeitsblatt

5.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 5.1.*

Bestimme, welche der beiden rationalen Zahlen p und q größer ist.

$$p = \frac{573}{-1234} \text{ und } q = \frac{-2007}{4322}.$$

Aufgabe 5.2.*

Es stehen zwei Gläser auf einem Tisch, wobei das eine mit Rotwein und das andere mit Weißwein gefüllt ist, und zwar gleichermaßen. Nun wird ein kleineres leeres Glas (ein Fingerhut oder ein Schnapsglas) in das Rotweinglas voll eingetaucht und der Inhalt in das Weißweinglas überführt und dort gleichmäßig vermischt (insbesondere gibt es Platz für diese Hinzugabe). Danach wird das kleinere Glas in das Weißweinglas voll eingetaucht und der Inhalt in das Rotweinglas überführt. Befindet sich zum Schluss im Rotweinglas mehr Rotwein als im Weißweinglas Weißwein?

Aufgabe 5.3.*

Eine Bahncard 25, mit der man ein Jahr lang 25 Prozent des Normalpreises einspart, kostet 62 Euro und eine Bahncard 50, mit der man ein Jahr lang 50 Prozent des Normalpreises einspart, kostet 255 Euro. Für welchen Jahresgesamtnormalpreis ist keine Bahncard, die Bahncard 25 oder die Bahncard 50 die günstigste Option?

Aufgabe 5.4.*

Zwei Fahrradfahrer, A und B, fahren auf ihren Fahrrädern eine Straße entlang. Fahrer A macht pro Minute 40 Pedalumdrehungen, hat eine Übersetzung von Pedal zu Hinterrad von 1 zu 6 und Reifen mit einem Radius von 39 Zentimetern. Fahrer B braucht für eine Pedaldrehung 2 Sekunden, hat eine Übersetzung von 1 zu 7 und Reifen mit einem Radius von 45 Zentimetern.

Wer fährt schneller?

Aufgabe 5.5. Zeige, dass in einem angeordneten Körper die folgenden Eigenschaften gelten.

(1) $1 \geq 0$.
(2) Es ist $a \geq 0$ genau dann, wenn $-a \leq 0$ ist.
(3) Es ist $a \geq b$ genau dann, wenn $a - b \geq 0$ ist.
(4) Es ist $a \geq b$ genau dann, wenn $-a \leq -b$ ist.
(5) Aus $a \geq b$ und $c \geq d$ folgt $a + c \geq b + d$.
(6) Aus $a \geq b$ und $c \geq 0$ folgt $ac \geq bc$.
(7) Aus $a \geq b$ und $c \leq 0$ folgt $ac \leq bc$.
(8) Aus $a \geq b \geq 0$ und $c \geq d \geq 0$ folgt $ac \geq bd$.
(9) Aus $a \geq 0$ und $b \leq 0$ folgt $ab \leq 0$.
(10) Aus $a \leq 0$ und $b \leq 0$ folgt $ab \geq 0$.

Aufgabe 5.6.*

Auf dem kürzlich entdeckten Planeten Trigeno lebt eine rechenbegabte Spezies. Sie verwenden wie wir die rationalen Zahlen mit „unserer“ Addition und Multiplikation. Sie verwenden ferner eine Art „Ordnung“ auf den rationalen Zahlen, die sie mit $\succeq$ bezeichnen. Diese trigenometrische Ordnung stimmt mit unserer Ordnung überein, wenn beide Zahlen $\neq 0$ sind. Dagegen gilt bei ihnen

$$0 \succeq x$$

für jede rationale Zahl x. Die renommierte Ethnomathematikerin Dr. Eisenbeis vermutet, dass dies damit in Zusammenhang steht, dass sie die 0 als heilig verehren.

Zeige, dass $\succeq$ die folgenden Eigenschaften erfüllt.

(1) Für je zwei Elemente $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt entweder $a \succ b$ oder $a = b$ oder $b \succ a$.
(2) Aus $a \succeq b$ und $b \succeq c$ folgt $a \succeq c$ (für beliebige $a, b, c \in \mathbb{Q}$).
(3) Aus $a \succeq 0$ und $b \succeq 0$ folgt $a + b \succeq 0$.
(4) Aus $a \succeq 0$ und $b \succeq 0$ folgt $ab \succeq 0$.

Welche Eigenschaft eines angeordneten Körpers erfüllt $(\mathbb{Q}, \succeq)$ nicht?

Aufgabe 5.7. Zeige, dass in einem angeordneten Körper die folgenden Eigenschaften gelten.

(1) Es ist $a^2 \geq 0$.
(2) Aus $a \geq b \geq 0$ folgt $a^n \geq b^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(3) Aus $a \geq 1$ folgt $a^n \geq a^m$ für ganze Zahlen $n \geq m$.

Aufgabe 5.8.*

Es sei K ein angeordneter Körper und $x > 0$. Zeige, dass auch das inverse Element x^{-1} positiv ist.

Aufgabe 5.9. Es sei K ein angeordneter Körper und $x \geq 1$. Zeige, dass für das inverse Element $x^{-1} \leq 1$ gilt.

Aufgabe 5.10. Es sei K ein angeordneter Körper und $x > y > 0$. Zeige, dass für die inversen Elemente $x^{-1} < y^{-1}$ gilt.

Aufgabe 5.11. Es sei K ein angeordneter Körper und seien x, y positive Elemente. Zeige, dass $x \geq y$ zu $\frac{x}{y} \geq 1$ äquivalent ist.

Aufgabe 5.12.*

Es sei K ein angeordneter Körper und $b \in K$, $b > 1$. Zeige, dass es dann Elemente $c, d > 1$ mit $b = cd$ gibt.

Aufgabe 5.13.*

Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass für $x \geq 3$ die Beziehung

$$x^2 + (x+1)^2 \geq (x+2)^2$$

gilt.

Aufgabe 5.14. Es seien $x < y$ reelle Zahlen. Zeige, dass für das arithmetische Mittel $\frac{x+y}{2}$ die Beziehung

$$x < \frac{x+y}{2} < y$$

gilt.

Aufgabe 5.15.*

Man entwerfe ein Computer-Programm (Pseudocode), das das arithmetische Mittel aus zwei vorgegebenen nichtnegativen rationalen Zahlen berechnet.

• Der Computer besitzt beliebig viele Speicher, die natürliche Zahlen enthalten können.

• Er kann die Summe von zwei Speicherinhalten ausrechnen und in einen weiteren Speicher schreiben.

• Er kann das Produkt von zwei Speicherinhalten ausrechnen und in einen weiteren Speicher schreiben.

• Er kann Speicherinhalte ausdrucken und vorgegebene Texte ausdrucken.

• Es gibt einen Haltebefehl.

Die Anfangskonfiguration sei

$$(a, b, c, d, 0, 0, 0, \ldots)$$

mit $b, d \neq 0$. Dabei sind a/b und c/d die rationalen Zahlen, von denen das arithmetische Mittel berechnet werden soll. Das Ergebnis soll ausgedruckt werden (in der Form Zähler Nenner) und anschließend soll das Programm anhalten.

Aufgabe 5.16. Man untersuche die Verknüpfung

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ (x, y) \longmapsto \max(x, y),$$

auf Assoziativität, Kommutativität, die Existenz von einem neutralen Element und die Existenz von inversen Elementen.

Aufgabe 5.17. Ein Bakterium möchte entlang des Äquators die Erde umrunden. Es ist ziemlich klein und schafft am Tag genau 2 Millimeter. Wie viele Tage braucht es für eine Erdumrundung?

Aufgabe 5.18. Wie viele Billionstel braucht man, um ein Milliardstel zu erreichen?

Aufgabe 5.19.*

Im Wald lebt ein Riese, der 8 Meter und 37 cm groß ist, sowie eine Kolonie von Zwergen, die eine Schulterhöhe von 3 cm haben und mit dem Kopf insgesamt 4 cm groß sind. Hals und Kopf des Riesen sind $1,23$ Meter hoch. Auf der Schulter des Riesen steht ein Zwerg. Wie viele Zwerge müssen aufeinander (auf den Schultern) stehen, damit der oberste Zwerg mit dem Zwerg auf dem Riesen zumindest gleichauf ist?

Aufgabe 5.20.*

Zeige, dass in einem archimedisch angeordneten Körper die folgenden Eigenschaften gelten.

(1) Zu jedem $x > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n mit $\frac{1}{n} < x$.

(2) Zu zwei Elementen $x < y$ gibt es eine rationale Zahl n/k (mit $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}_+$) mit
$$x < \frac{n}{k} < y.$$

Aufgabe 5.21. Berechne die Gaußklammer
$$\left\lfloor \frac{513}{21} \right\rfloor .$$

Aufgabe 5.22. Beweise die folgenden Eigenschaften für die Betragsfunktion
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto |x|\,,$$
(dabei seien x, y beliebige reelle Zahlen).

(1) $|x| \geq 0$.
(2) $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.
(3) $|x| = |y|$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$ ist.
(4) $|y - x| = |x - y|$.
(5) $|xy| = |x|\,|y|$.
(6) Für $x \neq 0$ ist $|x^{-1}| = |x|^{-1}$.
(7) Es ist $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*Dreiecksungleichung für den Betrag*).
(8) Es ist $|x + y| \geq |x| - |y|$.

Aufgabe 5.23. Es seien $x_1, \ldots, x_n$ reelle Zahlen. Zeige durch Induktion die Abschätzung
$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,.$$

Die Idee zu den folgenden Aufgaben stammt von

http://jwilson.coe.uga.edu/emt725/Challenge/Challenge.html,

siehe auch http://www.vier-zahlen.bplaced.net/raetsel.php.

Aufgabe 5.24. Wir betrachten die Abbildung
$$\Psi\colon\, \mathbb{N}^4 \longrightarrow \mathbb{N}^4,$$
die einem Vierertupel (a, b, c, d) das Vierertupel
$$(|b - a|\,, |c - b|\,, |d - c|\,, |a - d|)$$
zuordnet. Es bezeichne Ψ^n die n-fache Hintereinanderschaltung von Ψ.

(1) Berechne
$$\Psi(6, 5, 2, 8),\ \Psi^2(6, 5, 2, 8),\ \Psi^3(6, 5, 2, 8),\ \Psi^4(6, 5, 2, 8) \ldots,$$
bis das Ergebnis das Nulltupel $(0, 0, 0, 0)$ ist.

(2) Berechne

$$\Psi(1,10,100,1000),\ \Psi^2(1,10,100,1000),\ \Psi^3(1,10,100,1000),\ \Psi^4(1,10,100,1000)\ ...,$$

bis das Ergebnis das Nulltupel $(0,0,0,0)$ ist.

(3) Zeige $\Psi^4(0,0,n,0) = (0,0,0,0)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5.25. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi\colon \mathbb{N}^4 \longrightarrow \mathbb{N}^4,$$

die einem Vierertupel (a,b,c,d) das Vierertupel

$$(|b-a|, |c-b|, |d-c|, |a-d|)$$

zuordnet. Bestimme, ob Ψ injektiv und ob Ψ surjektiv ist.

Aufgabe 5.26.*

Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi\colon \mathbb{N}^4 \longrightarrow \mathbb{N}^4,$$

die einem Vierertupel (a,b,c,d) das Vierertupel

$$(|b-a|, |c-b|, |d-c|, |a-d|)$$

zuordnet. Zeige, dass sich bei jedem Starttupel (a,b,c,d) nach endlich vielen Iterationen dieser Abbildung stets das Nulltupel ergibt.

Aufgabe 5.27. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi\colon \mathbb{N}^4 \longrightarrow \mathbb{N}^4,$$

die einem Vierertupel (a,b,c,d) das Vierertupel

$$(|b-a|, |c-b|, |d-c|, |a-d|)$$

zuordnet. Man gebe ein Beispiel für ein Vierertupel (a,b,c,d) mit der Eigenschaft an, dass sämliche Iterationen $\Psi^n(a,b,c,d)$ für $n \leq 25$ nicht das Nulltupel liefern.

Überprüfe das Ergebnis auf http://www.vier-zahlen.bplaced.net/raetsel.php .

Wir werden später auch die Frage behandeln, wie es mit reellen Vierertupeln aussieht, siehe insbesondere Aufgabe 28.10.

Aufgabe 5.28. Es seien

$$f_1, \ldots, f_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen, die wachsend oder fallend seien, und sei $f = f_n \circ \cdots \circ f_1$ ihre Hintereinanderschaltung. Es sei k die Anzahl der fallenden Funktionen unter den f_i. Zeige, dass bei k gerade f wachsend und bei k ungerade f fallend ist.

Bei den Rechenaufgaben zu den komplexen Zahlen muss das Ergebnis immer in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit reellen Zahlen a, b angegeben werden, wobei diese so einfach wie möglich sein sollen.

Aufgabe 5.29. Berechne die folgenden Ausdrücke innerhalb der komplexen Zahlen.

(1) $(5 + 4\mathrm{i})(3 - 2\mathrm{i})$.
(2) $(2 + 3\mathrm{i})(2 - 4\mathrm{i}) + 3(1 - \mathrm{i})$.
(3) $(2\mathrm{i} + 3)^2$.
(4) i^{1011}.
(5) $(-2 + 5\mathrm{i})^{-1}$.
(6) $\frac{4-3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$.

Aufgabe 5.30.*

Zeige, dass die komplexen Zahlen einen Körper bilden.

Aufgabe 5.31. Zeige, dass $P = \mathbb{R}^2$ mit der komponentenweisen Addition und der komponentenweisen Multiplikation kein Körper ist.

Aufgabe 5.32.*

Beweise die folgenden Aussagen zu Real- und Imaginärteil von komplexen Zahlen.

(1) $z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)\mathrm{i}$.
(2) $\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w)$.
(3) $\operatorname{Im}(z + w) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w)$.
(4) Für $r \in \mathbb{R}$ ist

$$\operatorname{Re}(rz) = r \operatorname{Re}(z) \text{ und } \operatorname{Im}(rz) = r \operatorname{Im}(z).$$

(5) $z = \operatorname{Re}(z)$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn $\operatorname{Im}(z) = 0$ ist.

Aufgabe 5.33. Zeige, dass innerhalb der komplexen Zahlen folgende Rechenregeln gelten.

(1) $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$.
(2) Re $(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$.
(3) Im $(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$.
(4) $\overline{z} = \mathrm{Re}\,(z) - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(z)$.
(5) Für $z \neq 0$ ist $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Aufgabe 5.34. Zeige die folgenden Regeln für den Betrag von komplexen Zahlen.

(1) Für reelles z stimmen reeller und komplexer Betrag überein.
(2) Es ist $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$ ist.
(3) $|z| = |\overline{z}|$.
(4) $|zw| = |z|\,|w|$.
(5) Für $z \neq 0$ ist $|1/z| = 1/\,|z|$.
(6) $|\mathrm{Re}\,(z)|\,, |\mathrm{Im}\,(z)| \leq |z|$.

5.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 5.35. (2 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und $x < 0$. Zeige, dass auch das inverse Element x^{-1} negativ ist.

Aufgabe 5.36. (2 Punkte)

Zeige, dass eine streng wachsende Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

injektiv ist.

Aufgabe 5.37. (3 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi\colon \mathbb{Q}^4_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{Q}^4_{\geq 0},$$

die einem Vierertupel aus nichtnegativen rationalen Zahlen (a, b, c, d) das Vierertupel

$$(|b-a|\,, |c-b|\,, |d-c|\,, |a-d|)$$

zuordnet. Zeige, dass sich nach endlich vielen Iterationen dieser Abbildung stets das Nulltupel ergibt.

Tipp: Verwende Aufgabe 5.26.

Aufgabe 5.38. (3 Punkte)

Berechne die komplexen Zahlen

$$(1+\mathrm{i})^n$$

für $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Aufgabe 5.39. (3 Punkte)

Zeige, dass für die komplexe Konjugation die folgenden Rechenregeln gelten.

(1) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.
(2) $\overline{-z} = -\overline{z}$.
(3) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
(4) Für $z \neq 0$ ist $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$.
(5) $\overline{\overline{z}} = z$.
(6) $\overline{z} = z$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 5.40. (5 Punkte)

Berechne die Quadratwurzeln, die vierten Wurzeln und die achten Wurzeln von i.

Aufgabe 5.41. (3 Punkte)

Man finde alle drei komplexen Zahlen z, die die Bedingung

$$z^3 = 1$$

erfüllen.

6. Vorlesung - Polynome

In theory, 'theory' and 'praxis' are the same, in praxis they aren't

Vorli lässt sich gerne knuddeln. Dabei räkelt sie sich in alle Himmelsrichtungen und hinterher weiß niemand mehr, wo vorne und hinten ist.

6.1. **Polynome.**

Mathematische Abbildungen werden typischerweise durch einen mathematischen Ausdruck beschrieben, eine Funktionsvorschrift, die angibt, wie aus einer eingegebenen Zahl (Stelle, Argument) eine Zahl als Wert (Ergebnis) der Funktion zu berechnen ist. Wir besprechen nun die am einfachsten gebauten Funktionen, die Polynomfunktionen. Deren Definition erfordert nur die Kenntnis von Addition und Multiplikation in einem Körper.

Definition 6.1. Es sei K ein Körper. Ein Ausdruck der Form

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

mit $a_i \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ heißt *Polynom in einer Variablen* über K.

Dabei heißen die Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ die *Koeffizienten* des Polynoms. Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn sie in allen ihren Koeffizienten übereinstimmen. Die Polynome mit $a_i = 0$ für alle $i \geq 1$ heißen *konstante Polynome*, man schreibt sie einfach als a_0. Beim *Nullpolynom* sind überhaupt alle Koeffizienten gleich 0. Mit dem Summenzeichen kann man ein Polynom kurz als $\sum_{i=0}^{n} a_iX^i$ schreiben.

Definition 6.2. Der *Grad* eines von 0 verschiedenen Polynoms

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

mit $a_n \neq 0$ ist n.

Das Nullpolynom bekommt keinen Grad. Der Koeffizient a_n, der zum Grad n des Polynoms gehört, heißt *Leitkoeffizient* des Polynoms. Der Ausdruck a_nX^n heißt *Leitterm* des Polynoms.

Die Gesamtheit aller Polynome über einem Körper K heißt *Polynomring* über K, er wird mit $K[X]$ bezeichnet. Dabei nennt man X die *Variable* des Polynomrings.

Zwei Polynome

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i \text{ und } Q = \sum_{i=0}^{m} b_iX^i$$

werden komponentenweise miteinander addiert, d.h. die Koeffizienten der Summe $P+Q$ sind einfach die Summe der Koeffizienten der beiden Polynome. Bei $n > m$ sind die „fehlenden“ Koeffizienten von Q als 0 zu interpretieren. Diese Addition ist offenbar assoziativ und multiplikativ, das Nullpolynom ist das neutrale Element und das negative Polynom $-P$ erhält man, indem man jeden Koeffizienten von P negiert.

Zwei Polynome lassen sich auch miteinander multiplizieren, wobei man

$$X^n \cdot X^m := X^{n+m}$$

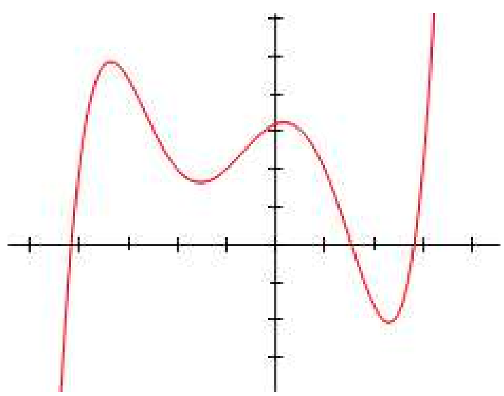
setzt und diese Multiplikationsregel „distributiv fortsetzt“, d.h. man multipliziert „alles mit allem“ und muss dann aufaddieren. Die Multiplikation ist also explizit durch folgende Regel gegeben:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j X^j\right) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \text{ mit } c_k = \sum_{r=0}^{k} a_r b_{k-r} .$$

Für den Grad gelten die beiden folgenden Regeln

- $$\operatorname{grad}(P+Q) \leq \max\{\operatorname{grad}(P), \operatorname{grad}(Q)\}.$$

- $$\operatorname{grad}(P \cdot Q) = \operatorname{grad}(P) + \operatorname{grad}(Q).$$



Der Graph einer Polynomfunktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ vom Grad 5.

In ein Polynom $P \in K[X]$ kann man ein Element $a \in K$ *einsetzen*, indem man die Variable X an jeder Stelle durch a ersetzt. Dies führt zu einer Abbildung

$$K \longrightarrow K,\; a \longmapsto P(a),$$

die die durch das Polynom definierte *Polynomfunktion* heißt.

Wenn P und Q Polynome sind, so kann man die Hintereinanderschaltung $P \circ Q$ einfach beschreiben: man muss in P überall die Variable X durch Q ersetzen (und alles ausmultiplizieren und aufaddieren). Das Ergebnis ist wieder ein Polynom. Man beachte, dass es dabei auf die Reihenfolge ankommt.

6.2. **Division mit Rest.**

Bei einem Polynom interessiert man sich für Nullstellen, Wachstumsverhalten, lokale Extrema und dergleichen. Für diese Fragestellungen ist die Division mit Rest wichtig.

Satz 6.3. *Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es seien $P, T \in K[X]$ Polynome mit $T \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $Q, R \in K[X]$ mit*

$$P = TQ + R \textit{ und mit } \operatorname{grad}(R) < \operatorname{grad}(T) \textit{ oder } R = 0\,.$$

Beweis. Wir beweisen die Existenzaussage durch Induktion über den Grad von P. Wenn der Grad von T größer als der Grad von P ist, so ist $Q = 0$ und $R = P$ eine Lösung, so dass wir dies nicht weiter betrachten müssen. Bei $\operatorname{grad}(P) = 0$ ist nach der Vorbemerkung auch $\operatorname{grad}(TP) = 0$, also ist T ein konstantes Polynom, und damit ist (da $T \neq 0$ und K ein Körper ist) $Q = P/T$ und $R = 0$ eine Lösung. Sei nun $\operatorname{grad}(P) = n$ und die Aussage für kleineren Grad schon bewiesen. Wir schreiben $P = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0$ und $T = b_kX^k + \cdots + b_1X + b_0$ mit $a_n, b_k \neq 0$, $k \leq n$. Dann gilt mit $H = \frac{a_n}{b_k}X^{n-k}$ die Beziehung

$$\begin{aligned}
P' &:= P - TH \\
&= 0X^n + \left(a_{n-1} - \frac{a_n}{b_k}b_{k-1}\right)X^{n-1} + \cdots \\
&\quad + \left(a_{n-k} - \frac{a_n}{b_k}b_0\right)X^{n-k} + a_{n-k-1}X^{n-k-1} + \cdots + a_0.
\end{aligned}$$

Dieses Polynom P' hat einen Grad kleiner als n und darauf können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden, d.h. es gibt Q' und R' mit

$$P' = TQ' + R' \text{ mit } \operatorname{grad}(R') < \operatorname{grad}(T) \text{ oder } R' = 0\,.$$

Daraus ergibt sich insgesamt

$$P = P' + TH = TQ' + TH + R' = T(Q' + H) + R',$$

so dass also $Q = Q' + H$ und $R = R'$ eine Lösung ist. Zur Eindeutigkeit sei $P = TQ + R = TQ' + R'$ mit den angegebenen Bedingungen. Dann ist $T(Q - Q') = R' - R$. Da die Differenz $R' - R$ einen Grad kleiner als $\operatorname{grad}(T)$ besitzt, ist aufgrund der Gradeigenschaften diese Gleichung nur bei $R = R'$ und $Q = Q'$ lösbar. □

Die Berechnung der Polynome Q und R heißt *Polynomdivision.* Das Polynom T ist genau dann ein Teiler von P, wenn bei der Division mit Rest von P durch T der Rest gleich 0 ist. Der Beweis des Satzes ist konstruktiv, d.h. es wird in ihm ein Verfahren beschrieben, mit der man die Division mit Rest berechnen kann. Dazu muss man die Rechenoperationen des Grundkörpers beherrschen. Wir geben dazu ein Beispiel.

Beispiel 6.4. Wir führen die Polynomdivision

$$P = 6X^3 + X + 1 \text{ durch } T = 3X^2 + 2X - 4$$

durch. Es wird also ein Polynom vom Grad 3 durch ein Polynom vom Grad 2 dividiert, d.h. dass der Quotient und auch der Rest (maximal) vom Grad 1 sind. Im ersten Schritt überlegt man, mit welchem Term man T multiplizieren muss, damit das Produkt mit P im Leitterm übereinstimmt. Das ist offenbar $2X$. Das Produkt ist

$$2X\left(3X^2+2X-4\right) \,=\, 6X^3+4X^2-8X.$$

Die Differenz von P zu diesem Produkt ist

$$6X^3+X+1-\left(6X^3+4X^2-8X\right) \,=\, -4X^2+9X+1.$$

Mit diesem Polynom, nennen wir es P', setzen wir die Division durch T fort. Um Übereinstimmung im Leitkoeffizienten zu erhalten, muss man T mit $\frac{-4}{3}$ multiplizieren. Dies ergibt

$$-\frac{4}{3}T \,=\, -\frac{4}{3}\left(3X^2+2X-4\right) \,=\, -4X^2-\frac{8}{3}X+\frac{16}{3}.$$

Die Differenz zu P' ist somit

$$-4X^2+9X+1-\left(-4X^2-\frac{8}{3}X+\frac{16}{3}\right) \,=\, \frac{35}{3}X-\frac{13}{3}.$$

Dies ist das Restpolynom und somit ist insgesamt

$$6X^3+X+1 \,=\, \left(3X^2+2X-4\right)\left(2X-\frac{4}{3}\right)+\frac{35}{3}X-\frac{13}{3}.$$

Lemma 6.5. *Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom und $a \in K$. Dann ist a genau dann eine Nullstelle von P, wenn P ein Vielfaches des linearen Polynoms*[26] *$X-a$ ist.*

Beweis. Wenn P ein Vielfaches von $X-a$ ist, so kann man

$$P \,=\, (X-a)Q$$

mit einem weiteren Polynom Q schreiben. Einsetzen ergibt

$$P(a) \,=\, (a-a)Q(a) \,=\, 0.$$

Im Allgemeinen gibt es aufgrund der Division mit Rest eine Darstellung

$$P \,=\, (X-a)Q+R,$$

wobei $R = 0$ oder aber den Grad 0 besitzt, also eine Konstante ist. Einsetzen ergibt

$$P(a) \,=\, R.$$

Wenn also $P(a) = 0$ ist, so muss der Rest $R = 0$ sein, und das bedeutet, dass $P = (X-a)Q$ ist. □

Korollar 6.6. *Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom ($\neq 0$) vom Grad d. Dann besitzt P maximal d Nullstellen.*

[26] $X-a$ heißt dann ein *Linearfaktor* des Polynoms P.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über d. Für $d = 0, 1$ ist die Aussage offensichtlich richtig. Sei also $d \geq 2$ und die Aussage sei für kleinere Grade bereits bewiesen. Sei a eine Nullstelle von P (falls P keine Nullstelle besitzt, sind wir direkt fertig), Dann ist $P = Q(X - a)$ nach Lemma 6.5 und Q hat den Grad $d - 1$, so dass wir auf Q die Induktionsvoraussetzung anwenden können. Das Polynom Q hat also maximal $d - 1$ Nullstellen. Für $b \in K$ gilt $P(b) = Q(b)(b - a)$. Dies kann nur dann 0 sein, wenn einer der Faktoren 0 ist, so dass eine Nullstelle von P gleich a ist oder aber eine Nullstelle von Q ist. Es gibt also maximal d Nullstellen von P. ☐

6.3. **Der Fundamentalsatz der Algebra.**

Es gilt der folgende *Fundamentalsatz der Algebra*, den wir hier ohne Beweis erwähnen, und der die Wichtigkeit der komplexen Zahlen unterstreicht.

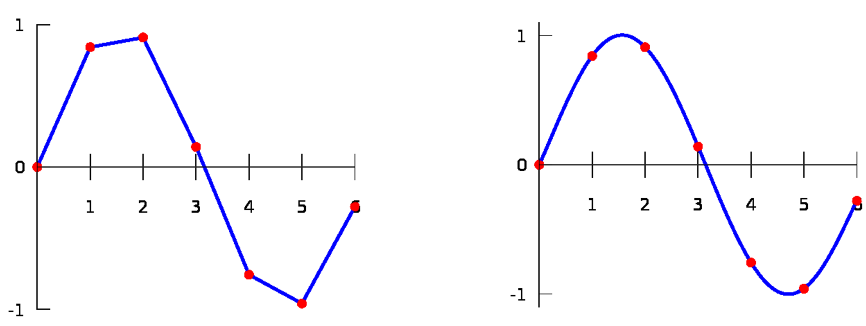
Satz 6.7. *Jedes nichtkonstante Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ über den komplexen Zahlen besitzt eine Nullstelle.*

Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt, dass jedes von 0 verschiedene Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ in Linearfaktoren zerfällt, d.h. man kann

$$P = c(X - z_1)(X - z_2) \cdot (X - z_n)$$

mit eindeutig bestimmten komplexen Zahlen $z_1, \ldots, z_n$ schreiben (wobei Wiederholungen erlaubt sind).

6.4. **Der Interpolationssatz.**



Eine stückweise lineare und eine polynomiale Interpolation.

Der folgende Satz heißt *Interpolationssatz* und beschreibt die Interpolation von vorgegebenen Funktionswerten durch Polynome. Wenn ein Funktionswert an einer Stelle vorgegeben wird, so legt dies ein konstantes Polynom fest, zwei Funktionswerte an zwei Stellen legen ein lineares Polynom fest (eine Gerade), drei Funktionswerte an drei Stellen legen ein quadratisches Polynom fest, u.s.w.

Satz 6.8. *Es sei K ein Körper und es seien n verschiedene Elemente $a_1, \ldots, a_n \in K$ und n Elemente $b_1, \ldots, b_n \in K$ gegeben. Dann gibt es ein eindeutiges*

Polynom $P \in K[X]$ vom Grad $\leq n-1$ derart, dass $P(a_i) = b_i$ für alle i ist.

Beweis. Wir beweisen die Existenz und betrachten zuerst die Situation, wo $b_j = 0$ ist für alle $j \neq i$. Dann ist

$$(X-a_1)\cdots(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})\cdots(X-a_n)$$

ein Polynom vom Grad $n-1$, das an den Stellen $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ den Wert 0 hat. Das Polynom

$$\frac{b_i}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}(X-a_1)\cdots(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})\cdots(X-a_n)$$

hat an diesen Stellen ebenfalls eine Nullstelle, zusätzlich aber noch bei a_i den Wert b_i. Nennen wir dieses Polynom P_i. Dann ist

$$P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

das gesuchte Polynom. An der Stelle a_i gilt ja

$$P_j(a_i) = 0$$

für $j \neq i$ und $P_i(a_i) = b_i$.

Die Eindeutigkeit folgt aus Korollar 6.6. □

Bemerkung 6.9. Wenn die Daten $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ gegeben sind, so findet man das interpolierende Polynom P vom Grad $\leq n-1$, das es nach Satz 6.8 geben muss, folgendermaßen: Man macht den Ansatz

$$P = c_0 + c_1X + c_2X^2 + \cdots + c_{n-2}X^{n-2} + c_{n-1}X^{n-1}$$

und versucht die unbekannten Koeffizienten $c_0, \ldots, c_{n-1}$ zu bestimmen. Jeder Interpolationspunkt (a_i, b_i) führt zu einer linearen Gleichung

$$c_0 + c_1a_i + c_2a_i^2 + \cdots + c_{n-2}a_i^{n-2} + c_{n-1}a_i^{n-1} = b_i$$

über K. Das entstehende lineare Gleichungssystem besitzt genau eine Lösung $(c_0, \ldots, c_{n-1})$, die das Polynom festlegt.

Lineare Gleichungssysteme werden wir erst später systematisch behandeln, das Eliminationsverfahren oder ein anderes Lösungsverfahren sollte aber aus der Schule bekannt sein.

6.5. **Rationale Funktionen.**

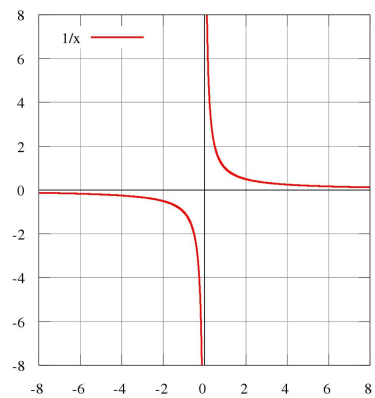
Im Polynomring $K[X]$ kann man addieren und multiplizieren, es handelt sich aber nicht um einen Körper, da man von 0 verschiedene Polynome nicht invertieren kann. Beispielsweise besitzt X kein Inverses, im Polynomring gibt es kein Element X^{-1}. Man kann aber mit Hilfe von formal-rationalen Funktionen einen Körper konstruieren. Dazu definiert man

$$K(X) := \left\{ \frac{P}{Q} \mid P, Q \in K[X],\, Q \neq 0 \right\},$$

wobei man zwei Brüche $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P'}{Q'}$ miteinander identifiziert, wenn

$$PQ' = P'Q$$

ist. Auf diese Weise entsteht der *Körper der rationalen Funktionen* (über K).



Man kann auch Brüche P/Q von Polynomen als Funktionen auffassen, die außerhalb der Nullstellen des Nenners definiert sind. Das Beispiel zeigt den Graphen der rationalen Funktion $1/X$.

Diese Brüche kann man wiederum als sinnvolle Funktionen auffassen, allerdings nicht auf ganz K. Der Definitionsbereich besteht vielmehr aus dem Komplement der Nullstellen des Nennerpolynoms.

Definition 6.10. Zu zwei Polynomen $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q \neq 0$, heißt die Funktion

$$D \longrightarrow \mathbb{R},\, z \longmapsto \frac{P(z)}{Q(z)},$$

wobei D das Komplement der Nullstellen von Q ist, eine *rationale Funktion.*

6. Arbeitsblatt

6.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 6.1. Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt

$$((4+\mathrm{i})X^2 - 3X + 9\mathrm{i}) \cdot ((-3+7\mathrm{i})X^2 + (2+2\mathrm{i})X - 1 + 6\mathrm{i})\,.$$

Aufgabe 6.2.*

Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass der Grad folgende Eigenschaften erfüllt.

(1) $\operatorname{grad}(P+Q) \leq \max\{\operatorname{grad}(P), \operatorname{grad}(Q)\}$,
(2) $\operatorname{grad}(P \cdot Q) = \operatorname{grad}(P) + \operatorname{grad}(Q)$.

Aufgabe 6.3. Zeige, dass in einem Polynomring über einem Körper K gilt: Wenn $P, Q \in K[X]$ beide ungleich 0 sind, so ist auch $PQ \neq 0$.

Aufgabe 6.4.*

Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $a \in K$. Zeige, dass die Einsetzungsabbildung, also die Zuordnung

$$\psi\colon\ K[X] \longrightarrow K,\ P \longmapsto P(a),$$

folgende Eigenschaften erfüllt (dabei seien $P, Q \in K[X]$).

(1) $(P+Q)(a) = P(a) + Q(a)$.
(2) $(P \cdot Q)(a) = P(a) \cdot Q(a)$.
(3) $1(a) = 1$.

Aufgabe 6.5. Setze in das Polynom $2X^4 + X^3 - 3X^2 + X + 5$ die Zahl $\sqrt{2}$ ein.

Aufgabe 6.6.*

Zeige, dass

$$z = \sqrt[3]{-1+\sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1-\sqrt{2}}$$

eine Nullstelle des Polynoms

$$X^3 + 3X + 2$$

ist.

Aufgabe 6.7. Berechne das Ergebnis, wenn man im Polynom

$$2X^3 - 5X^2 - 4X + 7$$

die Variable X durch die komplexe Zahl $2 - 5\mathrm{i}$ ersetzt.

Aufgabe 6.8. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung (also das Einsetzen eines Polynoms in ein weiteres) von zwei Polynomen wieder ein Polynom ist.

Aufgabe 6.9.*

Es sei

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

ein reelles Polynom mit $a_n > 0$. Man gebe in Abhängigkeit von den Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ eine Schranke b derart an, dass

$$P(x) > 0$$

für alle $x \geq b$ gilt.

Aufgabe 6.10. Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Wie lautet das Ergebnis der Division mit Rest, wenn man ein Polynom P durch X^m teilt?

Aufgabe 6.11. Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „P durch T" für die beiden Polynome $P = 3X^4 + 7X^2 - 2X + 5$ und $T = 2X^2 + 3X - 1$ durch.

Aufgabe 6.12. Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass jedes Polynom $P \in K[X]$, $P \neq 0$, eine Produktzerlegung

$$P = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k} \cdot Q$$

mit $\mu_j \geq 1$ und einem nullstellenfreien Polynom Q besitzt, wobei die auftretenden verschiedenen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und die zugehörigen Exponenten $\mu_1, \ldots, \mu_k$ bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind.

Die Exponenten μ_i heißen dabei die *Nullstellenordnung* der Nullstelle λ_i im Polynom.

Aufgabe 6.13.*

Es seien P und Q verschiedene normierte Polynome vom Grad d über einem Körper K. Wie viele Schnittpunkte besitzen die beiden Graphen maximal?

Aufgabe 6.14. Es sei $F \in \mathbb{C}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass F in Linearfaktoren zerfällt.

Aufgabe 6.15. Bestimme die kleinste reelle Zahl, für die die Bernoullische Ungleichung zum Exponenten $n = 3$ gilt.

Aufgabe 6.16. Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und sei $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von P. Zeige, dass dann auch die konjugiert-komplexe Zahl $\overline{z}$ eine Nullstelle von P ist.

Aufgabe 6.17.*
Man finde ein Polynom
$$f = a + bX + cX^2$$
mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.
$$f(-1) = 2,\ f(1) = 0,\ f(3) = 5\,.$$

Aufgabe 6.18. Man finde ein Polynom
$$f = a + bX + cX^2 + dX^3$$
mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.
$$f(0) = 1,\ f(1) = 2,\ f(2) = 0,\ f(-1) = 1\,.$$

Aufgabe 6.19. Es sei K ein angeordneter Körper und $R = K[X]$ der Polynomring über K. Sei
$$P = \{F \in K[X] \mid \text{Der Leitkoeffizient von } F \text{ ist positiv}\}.$$
Zeige, dass P die drei folgenden Eigenschaften besitzt.

(1) Entweder ist $F \in P$ oder $-F \in P$ oder $F = 0$.
(2) Aus $F, G \in P$ folgt $F + G \in P$.
(3) Aus $F, G \in P$ folgt $F \cdot G \in P$.

Aufgabe 6.20. Es sei $K[X]$ der Polynomring über einem Körper K. Zeige, dass die Menge
$$\left\{\frac{P}{Q} \mid P, Q \in K[X],\, Q \neq 0\right\},$$
wobei zwei Brüche $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P'}{Q'}$ genau dann als gleich gelten, wenn $PQ' = P'Q$ ist, mit einer geeigneten Addition und Multiplikation ein Körper ist.

Aufgabe 6.21. Berechne in $\mathbb{Q}(X)$ die folgenden Ausdrücke.

(1) Das Produkt
$$\frac{2X^3 - 5X^2 + X - 1}{X^2 - 2X + 6} \cdot \frac{X^2 + 3}{5X^3 - 4X^2 - 7}\,.$$
(2) Die Summe
$$\frac{4X^3 - X^2 + 6X - 2}{X^2 - 4X - 3} + \frac{X^2 - 3}{3X^2 + 5}\,.$$
(3) Das Inverse von
$$\frac{6X^3 - 9X^2 + 5X - 1}{X^4 - 4X^3 + 3X^2 - 8X - 3}\,.$$

Aufgabe 6.22. Skizziere die Graphen der folgenden rationalen Funktionen

$$f = g/h\colon\ U \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei U jeweils das Komplement der Nullstellenmenge des Nennerpolynoms h sei.

(1) $1/x$,
(2) $1/x^2$,
(3) $1/(x^2+1)$,
(4) $x/(x^2+1)$,
(5) $x^2/(x^2+1)$,
(6) $x^3/(x^2+1)$,
(7) $(x-2)(x+2)(x+4)/(x-1)x(x+1)$.

Aufgabe 6.23. Es sei K ein angeordneter Körper, $K[X]$ der Polynomring und

$$Q = K(X)$$

der Körper der rationalen Funktionen über K. Zeige unter Verwendung von Aufgabe 6.19, dass man Q zu einem angeordneten Körper machen kann, der *nicht* archimedisch angeordnet ist.

Aufgabe 6.24.*

Sei x eine reelle Zahl, $x \neq 1$. Beweise für $n \in \mathbb{N}$ durch Induktion die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

Aufgabe 6.25. Berechne die Hintereinanderschaltungen $f \circ g$ und $g \circ f$ der beiden rationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2-4x+3}{x-2} \text{ und } g(x) = \frac{x+1}{x^2-4}\,.$$

Aufgabe 6.26. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung von zwei rationalen Funktionen wieder rational ist.

6.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 6.27. (3 Punkte)

Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt

$$\big((4+\mathrm{i})X^3 - \mathrm{i}X^2 + 2X + 3 + 2\mathrm{i}\big) \cdot \big((2-\mathrm{i})X^3 + (3-5\mathrm{i})X^2 + (2+\mathrm{i})X + 1 + 5\mathrm{i}\big).$$

Aufgabe 6.28. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „P durch T" für die beiden Polynome $P = 5X^4 - 6X^3 + \frac{3}{5}X^2 - \frac{1}{2}X + 5$ und $T = \frac{1}{7}X^2 + \frac{3}{7}X - 1$ durch.

Aufgabe 6.29. (4 Punkte)

Führe in $\mathbb{C}[X]$ die Division mit Rest „P durch T" für die beiden Polynome $P = (5+\mathrm{i})X^4 + \mathrm{i}X^2 + (3-2\mathrm{i})X - 1$ und $T = X^2 + \mathrm{i}X + 3 - \mathrm{i}$ durch.

Aufgabe 6.30. (2 Punkte)

Beweise die Formel

$$X^u + 1 \,=\, (X+1)\big(X^{u-1} - X^{u-2} + X^{u-3} - \cdots + X^2 - X + 1\big)$$

für u ungerade.

Aufgabe 6.31. (4 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeige, dass man P als ein Produkt von reellen Polynomen vom Grad 1 oder 2 schreiben kann.

Aufgabe 6.32. (4 Punkte)

Man finde ein Polynom f vom Grad ≤ 3, für welches

$$f(0) = -1,\ f(-1) = -3,\ f(1) = 7,\ f(2) = 21$$

gilt.

7. Vorlesung - Approximation und Konvergenz

Dies ist Dr. Ines Eisenbeis. Sie ist für die wissenschaftliche Begleitung des Projektes Vorlesungshund verantwortlich. Ihre Arbeitshypothesen sind: 1) Studierende gehen lieber zur Vorlesung, 2) Außenseiter werden aus ihrer Isolation geholt, 3) Auffälligkeiten reduzieren sich, 4) Positive Sozialkontakte werden gefördert, 5) Profs werden mehr beachtet.

7.1. **Approximation.**

Ein grundlegender Gedanke der Mathematik ist der der *Approximation*, der in unterschiedlichen Kontexten auftritt und sowohl für die Mathematik als Hilfswissenschaft für die empirischen Wissenschaften als auch für den Aufbau der Mathematik selbst, insbesondere der Analysis, entscheidend ist.

Das erste Beispiel dazu ist das *Messen*, beispielsweise der Länge einer Strecke oder der Dauer eines Zeitabschnittes. Abhängig vom Kontext und der Zielsetzung gibt es sehr unterschiedliche Vorstellungen davon, was eine genaue Messung ist, und die gewünschte Genauigkeit hat eine Auswirkung auf das zu wählende Messinstrument.

Das Ergebnis einer Messung wird, bezogen auf eine physikalische Einheit, durch einen *Dezimalbruch* angegeben, also eine abbrechende „Kommazahl", und die Anzahl der Nachkommaziffern gibt Aufschluss über die behauptete Genauigkeit. Zur Angabe von Messergebnissen braucht man also weder irrationale Zahlen noch rationale Zahlen, deren periodische Ziffernentwicklung nicht abbricht.

Betrachten wir die Meteorologie. Aus Messungen an verschiedenen Messstationen wird versucht, das Wetter der folgenden Tage mit mathematischen Modellen (und Computersimulation) zu berechnen. Hier wird man, um bessere Prognosen machen zu können, im Allgemeinen mehr Messstationen brauchen (wobei man irgendwann aufgrund von anderen Fehlerquellen mit zusätzlichen Messstationen die Prognosen nicht mehr optimieren kann).

Kommen wir zu innermathematischen Approximationen. Eine Strecke kann man zumindest ideell in n gleichlange Teile unterteilen und man kann sich für die Länge der Teilstücke interessieren, oder man kann sich für die Länge der Diagonalen in einem Einheitsquadrat interessieren. Die Länge dieser Strecken könnte man prinzipiell auch messen, doch bietet die Mathematik bessere Beschreibungen dieser Längen an, indem sie beliebige rationale Zahlen und irrationale Zahlen (wie hier $\sqrt{2}$) zur Verfügung stellt. Die Bestimmung einer guten Approximation erfolgt dann innermathematisch. Betrachten wir den Bruch $q = \frac{3}{7}$. Eine Approximation dieser Zahl mit einer Genauigkeit von neun Nachkommastellen ist durch

$$0,428571428 < \frac{3}{7} < 0,428571429$$

gegeben. Die beiden Dezimalbrüche links und rechts sind also Approximationen (Abschätzungen) des wahren Bruches $\frac{3}{7}$ mit einem Fehler, der kleiner als $\frac{1}{10^9}$ ist. Dies ist eine typische Taschenrechnergenauigkeit, je nach Zielsetzung möchte man eine deutliche größere Genauigkeit (einen kleineren Fehler) haben. Die Rechnung in diesem Beispiel beruht auf dem Divisionsalgorithmus, den man beliebig weit durchführen kann, um beliebige Fehlergenauigkeiten zu erreichen (dass man wegen der auftretenden Periodizität irgendwann nur noch die weiteren Ziffern ablesen und nicht mehr rechnen muss, ist ein zusätzlicher Aspekt). Die Angabe einer Dezimalbruchapproximation einer gegebenen Zahl nennt man auch eine *Rundung*.

Sowohl in der empirischen als auch in der innermathematischen Situation gilt das folgende Approximationsprinzip.

Approximationsprinzip: Es gibt keine allgemeingültige Güte für eine Approximation. Ein gutes Approximationsverfahren ist keine einzelne Approximation, sondern eine Methode, mit der man zu jeder gewünschten Güte (Fehler, Toleranz, Genauigkeit, Abweichung) bei entsprechendem Aufwand eine Approximation finden kann, die diese vorgegebene Güte erreicht.

Mit diesem Prinzip im Hinterkopf werden viele Begriffe wie *konvergente Folge* und *Stetigkeit*, deren präzise Formulierungen ziemlich kompliziert aussehen, verständlich.

Approximationen treten auch in dem Sinne auf, dass man empirische Funktionen, von denen ein endliches Datensampling bekannt ist, durch mathematisch möglichst einfache Funktionen beschreiben möchte. Ein Beispiel dazu ist der Interpolationssatz. Später werden wir die Taylorformel kennenlernen, die eine Funktion in einer kleinen Umgebung eines einzelnen Punktes besonders gut durch ein Polynom approximiert. Auch hier gilt wieder das Appproximationsprinzip in der Form, dass man, um die Funktion zunehmend besser zu approximieren zu können, den Grad der Polynome zunehmend höher wählen muss.

Wie gut eine Approximation ist, zeigt sich oft erst dann, wenn man mit den Approximationen rechnen soll. Man möchte beispielsweise wissen, welche Abschätzung man für den Flächeninhalt eines Rechtecks hat, wenn man

Abschätzungen für seine Seitenlängen hat. Und zwar fragt man sich, welchen Fehler man für die Seitenlängen erlauben darf, damit der Fehler des Flächeninhalts noch innerhalb einer gewünschten Toleranz bleibt.

Wir werden uns nun als Beispiel mit Quadratwurzeln beschäftigen und wie man diese approximieren kann, und zwar, wie man sie als den Limes einer Folge erhalten kann. Wir haben in der vierten Vorlesung gesehen, dass es keine einfachere Beschreibung für Quadratwurzeln aus Primzahlen gibt, da diese im Allgemeinen irrational sind.

7.2. **Reelle Zahlenfolgen.**

Heron von Alexandria (1. Jahrhundert n.C.)

Wir beginnen mit einem motivierenden Beispiel.

Beispiel 7.1. Wir wollen die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl „berechnen“, sagen wir von 5. Eine solche Zahl x mit der Eigenschaft $x^2 = 5$ gibt es nicht innerhalb der rationalen Zahlen, wie aus der eindeutigen Primfaktorzerlegung folgt. Wenn $x \in R$ ein solches Element ist, so hat auch $-x$ diese Eigenschaft. Mehr als zwei Lösungen kann es aber nach Korollar 6.6 nicht geben, so dass wir nur nach der positiven Lösung suchen müssen.

Obwohl es innerhalb der rationalen Zahlen keine Lösung für die Gleichung $x^2 = 5$ gibt, so gibt es doch beliebig gute Approximationen innerhalb der rationalen Zahlen dafür. Beliebig gut heißt dabei, dass der Fehler (oder die Abweichung) unter jede gewünschte positive Schranke gedrückt werden kann. Das klassische Verfahren, um eine Quadratwurzel beliebig anzunähern, ist das *Heron-Verfahren*, das man auch *babylonisches Wurzelziehen* nennt. Dies ist ein *iteratives Verfahren*, d.h., die nächste Approximation wird aus den vorausgehenden Approximationen berechnet. Beginnen wir mit $a := x_0 := 2$ als erster Näherung. Wegen

$$x_0^2 = 2^2 = 4 < 5$$

ist x_0 zu klein, d.h. es ist $x_0 < x$. Aus $a^2 < 5$ (mit a positiv) folgt zunächst $5/a^2 > 1$ und daraus $(5/a)^2 > 5$, d.h. $5/a > \sqrt{5}$. Man hat also die Abschätzungen

$$a < \sqrt{5} < 5/a,$$

wobei rechts eine rationale Zahl steht, wenn links eine rationale Zahl steht. Eine solche Abschätzung vermittelt offenbar eine quantitative Vorstellung darüber, wo $\sqrt{5}$ liegt. Die Differenz $5/a - a$ ist ein Maß für die Güte der Approximation.

Beim Startwert 2 ergibt sich, dass die Quadratwurzel von $\sqrt{5}$ zwischen 2 und 5/2 liegt. Man nimmt nun das arithmetische Mittel der beiden Intervallgrenzen, also

$$x_1 := \frac{2 + \frac{5}{2}}{2} = \frac{9}{4}.$$

Wegen $\left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16} > 5$ ist dieser Wert zu groß und daher liegt $\sqrt{5}$ im Intervall $[5 \cdot \frac{4}{9}, \frac{9}{4}]$. Von diesen Intervallgrenzen nimmt man erneut das arithmetische Mittel und setzt

$$x_2 := \frac{5 \cdot \frac{4}{9} + \frac{9}{4}}{2} = \frac{161}{72}$$

als nächste Approximation. So fortfahrend erhält man eine immer besser werdende Approximation von $\sqrt{5}$.

Allgemein ergibt sich das folgende Heron-Verfahren.

Beispiel 7.2. Beim *Heron-Verfahren* zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt{c}$ einer positiven Zahl c geht man iterativ wie folgt vor. Man startet mit einem beliebigen positiven Startwert x_0 und berechnet davon das arithmetische Mittel aus x_0 und $\frac{c}{x_0}$. Dieses Mittel nennt man x_1. Es gilt

$$\begin{aligned} x_1^2 - c &= \left(\frac{x_0 + \frac{c}{x_0}}{2}\right)^2 - c \\ &= \frac{x_0^2 + 2c + \frac{c^2}{x_0^2}}{4} - c \\ &= \frac{x_0^2 - 2c + \frac{c^2}{x_0^2}}{4} \\ &= \left(\frac{x_0 - \frac{c}{x_0}}{2}\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

D.h. dass x_1 mindestens so groß wie $\sqrt{c}$ ist. Auf x_1 wendet man iterativ das gleiche Verfahren an und erhält so x_2 usw. Die rekursive Definition von x_{n+1} lautet also

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{c}{x_n}}{2}.$$

Nach Konstruktion weiß man, dass $\sqrt{c}$ in jedem Intervall $[c/x_n, x_n]$ (für $n \geq 1$) liegt, da aus $x_n^2 \geq c$ direkt $\left(\frac{c}{x_n}\right)^2 = \frac{c^2}{x_n^2} \leq \frac{c^2}{c} = c$ folgt. Bei jedem

Schritt gilt

$$[\frac{c}{x_{n+1}}, x_{n+1}] \subseteq [\frac{c}{x_n}, x_n],$$

d.h. das Nachfolgerintervall liegt innerhalb des Vorgängerintervalls. Dabei wird bei jedem Schritt die Intervalllänge mindestens halbiert.

Das eben beschriebene Verfahren liefert also zu jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl, die eine durch eine gewisse algebraische Eigenschaft charakterisierte Zahl beliebig gut approximiert. Bei vielen technischen Anwendungen genügt es, gewisse Zahlen nur hinreichend genau zu kennen, wobei allerdings die benötigte Güte der Approximation von der technischen Zielsetzung abhängt. Es gibt im Allgemeinen keine Güte, die für jede vorstellbare Anwendung ausreicht, so dass es wichtig ist zu wissen, wie man eine gute Approximation durch eine bessere Approximation ersetzen kann und wie viele Schritte man machen muss, um eine gewünschte Approximation zu erreichen. Dies führt zu den Begriffen Folge und Konvergenz.

Definition 7.3. Eine *reelle Folge* ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R},\, n \longmapsto x_n.$$

Eine Folge wird zumeist als $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, oder einfach nur kurz als $(x_n)_n$ geschrieben. Die oben zu einem Startglied x_0 rekursiv definierten Zahlen zur Berechnung von $\sqrt{c}$ sind ein Beispiel für eine Folge. Manchmal sind Folgen nicht für alle natürlichen Zahlen definiert, sondern nur für alle natürlichen Zahlen $\geq N$. Alle Begriffe und Aussagen lassen sich dann sinngemäß auch auf diese Situation übertragen.

Definition 7.4. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und es sei $x \in \mathbb{R}$. Man sagt, dass die Folge gegen x *konvergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem positiven $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

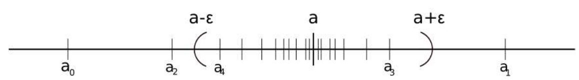
gilt. In diesem Fall heißt x der *Grenzwert* oder der *Limes* der Folge. Dafür schreibt man auch

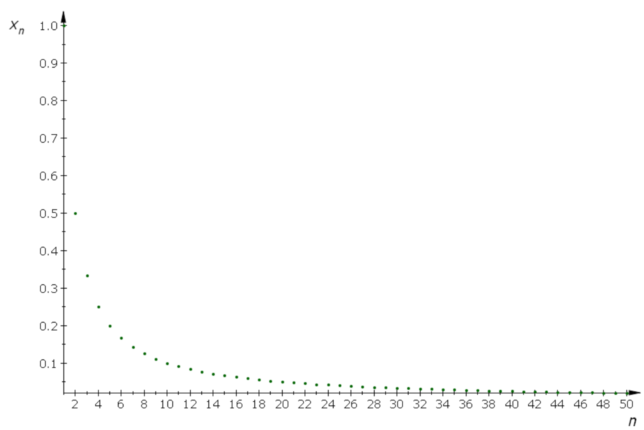
$$\lim_{n\to\infty} x_n := x.$$

Wenn die Folge einen Grenzwert besitzt, so sagt man auch, dass sie *konvergiert* (ohne Bezug auf einen Grenzwert.), andernfalls, dass sie *divergiert*.

Man sollte sich dabei das vorgegebene ϵ als eine kleine, aber positive Zahl vorstellen, die eine gewünschte *Zielgenauigkeit* (oder erlaubten Fehler) ausdrückt. Die natürliche Zahl n_0 ist dann die *Aufwandszahl*, die beschreibt, wie weit man gehen muss, um die gewünschte Zielgenauigkeit zu erreichen, und zwar so zu erreichen, dass alle ab n_0 folgenden Glieder innerhalb dieser Zielgenauigkeit bleiben. Konvergenz bedeutet demnach, dass man jede gewünschte Genauigkeit bei hinreichend großem Aufwand auch erreichen kann. Je kleiner der Fehler, also je besser die Approximation sein soll, desto höher ist im Allgemeinen der Aufwand. Statt mit beliebigen positiven reellen Zahlen ϵ kann man auch mit den *Stammbrüchen*, also den rationalen Zahlen $\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}_+$, arbeiten, siehe Aufgabe 7.7, oder mit den inversen Zehnerpotenzen $\frac{1}{10^\ell}$, $\ell \in \mathbb{N}$.

Zu einem $\epsilon > 0$ und einer reellen Zahl x nennt man das Intervall $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ auch die ϵ-*Umgebung* von x. Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt *Nullfolge*.





Beispiel 7.5. Eine *konstante Folge* $x_n := c$ ist stets konvergent mit dem Grenzwert c. Dies folgt direkt daraus, dass man für jedes $\epsilon > 0$ als Aufwandszahl $n_0 = 0$ nehmen kann. Es ist ja

$$|x_n - c| = |c - c| = |0| = 0 < \epsilon$$

für alle n.

Die Folge

$$x_n = \frac{1}{n}$$

ist konvergent mit dem Grenzwert 0. Sei dazu ein beliebiges positives ϵ vorgegeben. Aufgrund des Archimedes Axioms gibt es ein n_0 mit $\frac{1}{n_0} \leq \epsilon$. Insgesamt gilt damit für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$x_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \epsilon.$$

Beispiel 7.6. Wir betrachten die Folge

$$x_n = 0,33\ldots 33$$

mit genau n Nachkommaziffern und behaupten, dass diese Folge gegen $1/3$ konvergiert. Dazu müssen wir $\left|0,33\ldots33 - \frac{1}{3}\right|$ bestimmen, und dafür müssen wir uns an die Bedeutung von Dezimalbrüchen erinnern. Es ist

$$x_n = 0,33\ldots33 = \frac{33\ldots33}{10^n} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} 3\cdot 10^j}{10^n}$$

und somit ist

$$\begin{aligned}\left|0,33\ldots33 - \frac{1}{3}\right| &= \left|\frac{\sum_{j=0}^{n-1} 3\cdot 10^j}{10^n} - \frac{1}{3}\right| \\ &= \left|\frac{3\cdot\left(\sum_{j=0}^{n-1} 3\cdot 10^j\right) - 10^n}{3\cdot 10^n}\right| \\ &= \left|\frac{\left(\sum_{j=0}^{n-1} 9\cdot 10^j\right) - 10^n}{3\cdot 10^n}\right| \\ &= \left|\frac{-1}{3\cdot 10^n}\right| \\ &= \frac{1}{3\cdot 10^n}.\end{aligned}$$

Wenn nun ein positives ϵ vorgegeben ist, so ist für n hinreichend groß dieser letzte Term $\leq \epsilon$.

Lemma 7.7. *Eine reelle Folge besitzt maximal einen Grenzwert.*

Beweis. Nehmen wir an, dass es zwei verschiedene Grenzwerte x, y, $x \neq y$, gibt. Dann ist $d := |x-y| > 0$. Wir betrachten $\epsilon := d/3 > 0$. Wegen der Konvergenz gegen x gibt es ein n_0 mit

$$|x_n - x| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0$$

und wegen der Konvergenz gegen y gibt es ein n_0' mit

$$|x_n - y| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0'\,.$$

Beide Bedingungen gelten dann gleichermaßen für $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$. Sei n mindestens so groß wie dieses Maximum. Dann ergibt sich aufgrund der Dreiecksungleichung der Widerspruch

$$d = |x-y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| \leq \epsilon + \epsilon = 2d/3.$$

□

7.3. **Beschränktheit.**

Definition 7.8. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ der reellen Zahlen heißt *beschränkt*, wenn es reelle Zahlen $s \leq S$ mit $M \subseteq [s, S]$ gibt.

Man nennt S dann auch eine *obere Schranke* von M und s eine *untere Schranke* von M. Diese Begriffe werden auch für Folgen angewendet, und zwar für die Bildmenge $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Für die Folge $1/n$, $n \in \mathbb{N}_+$, ist 1 eine obere Schranke und 0 eine untere Schranke.

Lemma 7.9. *Eine konvergente reelle Folge ist beschränkt.*

Beweis. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die konvergente Folge mit dem Limes $x \in \mathbb{R}$ und es sei ein $\epsilon > 0$ gewählt. Aufgrund der Konvergenz gibt es ein n_0 derart, dass

$$|x_n - x| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \,.$$

Dann ist insbesondere

$$|x_n| \leq |x| + |x - x_n| \leq |x| + \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \,.$$

Unterhalb von n_0 gibt es nur endlich viele Zahlen, so dass das Maximum

$$B := \max_{n<n_0}\{|x_n| \,,\, |x| + \epsilon\}$$

wohldefiniert ist. Daher ist B eine obere Schranke und $-B$ eine untere Schranke für $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. □

Es ist einfach, beschränkte, aber nicht konvergente Folgen anzugeben.

Beispiel 7.10. Die *alternierende Folge*

$$x_n := (-1)^n$$

ist beschränkt, aber nicht konvergent. Die Beschränktheit folgt direkt aus $x_n \in [-1, 1]$ für alle n. Konvergenz liegt aber nicht vor. Wäre nämlich $x \geq 0$ der Grenzwert, so gilt für positives $\epsilon < 1$ und jedes ungerade n die Beziehung

$$|x_n - x| = |-1 - x| = 1 + x \geq 1 > \epsilon,$$

so dass es Folgenwerte außerhalb dieser ϵ-Umgebung gibt. Analog kann man einen negativ angenommen Grenzwert zum Widerspruch führen.

7.4. **Das Quetschkriterium.**

Lemma 7.11. *Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist* $\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n$.

Beweis. Siehe Aufgabe 7.14. □

Die folgende Aussage heißt *Quetschkriterium*.

Lemma 7.12. *Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen. Es gelte*

$$x_n \leq y_n \leq z_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Dann konvergiert auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a.

Beweis. Siehe Aufgabe 7.15. □

7. Arbeitsblatt

7.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 7.1.*

Für die Zahl 1000000π soll eine rationale Approximation gefunden werden, die vom wahren Wert um höchstens $\frac{1}{1000}$-stel abweicht. Wie gut muss eine Approximation für π sein, dass man daraus eine solche gewünschte Approximation erhalten kann?

Aufgabe 7.2. Was hat die Din-Norm für Papier mit Wurzeln zu tun?

Aufgabe 7.3. Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von 5 zum Startwert $x_0 = 2$.

Aufgabe 7.4.*

Führe die ersten drei Schritte des babylonischen Wurzelziehens zu $b = 7$ mit dem Startwert $x_0 = 3$ durch (es sollen also die Approximationen x_1, x_2, x_3 für $\sqrt{7}$ berechnet werden; diese Zahlen müssen als gekürzte Brüche angegeben werden).

Aufgabe 7.5. Es sei $c \in \mathbb{R}_+$ eine positive reelle Zahl und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{c}$ mit dem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Sei $u \in \mathbb{R}_+$, $d = c \cdot u^2$, $y_0 = ux_0$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{d}$ mit dem Startwert y_0. Zeige

$$y_n = ux_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 7.6. Bestimme für die Folge

$$x_n := \frac{2}{3n+5}$$

und

$$\epsilon = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \ldots,$$

ab welchem (minimalen) n die Abschätzung

$$x_n \leq \epsilon$$

gilt.

Aufgabe 7.7. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeige, dass die Folge genau dann gegen x konvergiert, wenn es für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung $|x_n - x| \leq \frac{1}{k}$ gilt.

Aufgabe 7.8.*

Negiere die Aussage, dass eine Folge x_n in einem angeordneten Körper gegen x konvergiert, durch Umwandlung der Quantoren.

Aufgabe 7.9. Untersuche die durch

$$x_n = \frac{1}{n^2}$$

gegebene Folge ($n \geq 1$) auf Konvergenz.

Aufgabe 7.10. Jemand sagt zur Folge $x_n := \frac{n}{2n}$. „Der Zähler und der Nenner gehen hier beide gegen unendlich. Doch der Nenner geht deutlich schneller gegen unendlich, deshalb konvergiert die Folge gegen 0“. Beurteile diese Argumentation.

Aufgabe 7.11. Man untersuche ob die folgenden Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt sind oder nicht.

(1) $\mathbb{N}$,
(2) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{-3}{7}, \frac{-4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{13}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$,
(3) $]-5, 2]$,
(4) $\left\{\frac{1}{n} | \, n \in \mathbb{N}_+\right\}$,
(5) $\left\{\frac{1}{n} | \, n \in \mathbb{N}_+\right\} \cup \{0\}$,
(6) $\mathbb{Q}_-$,
(7) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$,
(8) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \geq 4\}$,
(9) $\{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 7.12. Es sei $x > 1$ eine reelle Zahl. Zeige, dass die Folge $x_n := x^n$ nicht beschränkt ist.

Aufgabe 7.13.*

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Nullfolge und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge. Zeige, dass dann auch die Produktfolge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 7.14.*

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente reelle Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann $\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n$ gilt.

Aufgabe 7.15.*

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei reelle Folgen. Es gelte $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a konvergiert.

Aufgabe 7.16. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit Grenzwert x. Zeige, dass dann auch die Folge

$$(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert, und zwar gegen $|x|$.

Aufgabe 7.17.*

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ eine Primzahl ist}, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

definiert.

(1) Bestimme x_{117} und x_{127}.
(2) Konvergiert die Folge in $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 7.18. Beweise durch Induktion die *Binet-Formel* für die Fibonacci-Zahlen. Diese besagt, dass

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

gilt ($n \geq 1$).

7.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 7.19. (3 Punkte)

Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von 7 zum Startwert $x_0 = 2$.

Aufgabe 7.20. (5 Punkte)

Man entwerfe ein Computer-Programm (Pseudocode) zur Berechnung von rationalen Approximationen der Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl mittels der Heron-Folge.

• Der Computer besitzt beliebig viele Speicher, die natürliche Zahlen enthalten können.

• Der Computer kann natürliche Zahlen miteinander vergleichen (und abhängig vom Vergleichsergebnis zu Befehlen springen).

• Er kann die Summe von zwei Speicherinhalten ausrechnen und in einen weiteren Speicher schreiben.

• Er kann das Produkt von zwei Speicherinhalten ausrechnen und in einen weiteren Speicher schreiben.

• Er kann Speicherinhalte ausdrucken und vorgegebene Texte ausdrucken.

• Es gibt einen Haltebefehl.

Die Anfangskonfiguration sei

$$(a, b, c, d, e, 0, 0, \ldots)$$

mit $b, c, e \neq 0$. Dabei ist a/b die Zahl, von der die Quadratwurzel berechnet werden soll, $x_0 = c$ ist das Startglied und d/e ist die gewünschte Genauigkeit. Das Programm soll die Heron-Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ausrechnen und ausdrucken (und zwar wird der Zähler und der Nenner hintereinander ausgedruckt) und es soll anhalten, wenn das zuletzt ausgedruckte Folgenglied x_n die Eigenschaft

$$\left| x_n^2 - \frac{a}{b} \right| \leq \frac{d}{e}$$

erfüllt.

Achtung! Alle Operationen sind innerhalb von $\mathbb{N}$ auszuführen!

Aufgabe 7.21. (3 Punkte)

Bestimme für die Folge

$$x_n := \frac{2n+1}{3n-4}$$

und

$$\epsilon = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000},$$

ab welchem (minimalen) n die Abschätzung

$$\left| x_n - \frac{2}{3} \right| \leq \epsilon$$

gilt.

Aufgabe 7.22. (6 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Folge mit Grenzwert x. Zeige, dass dann auch die durch

$$y_n := \frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{n+1}$$

definierte Folge gegen x konvergiert.

Tipp: reduziere zuerst auf $x = 0$.

Aufgabe 7.23. (4 Punkte)

Zeige, dass die reelle Folge

$$\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

gegen 0 konvergiert.

Tipp: Finde eine geeignete Abschätzung für 2^n mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes.

Aufgabe 7.24. (5 Punkte)

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen und sei die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $z_{2n-1} := x_n$ und $z_{2n} := y_n$. Zeige, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert konvergieren.

8. Vorlesung - Vollständigkeit

Als Alternative wurde über ein Vorlesungslama ...

8.1. **Rechenregeln für Folgen.**

Lemma 8.1. *Es seien* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente Folgen. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Folge* $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent und es gilt*
$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right).$$
(2) *Die Folge* $(x_n\cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent und es gilt*
$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right).$$
(3) *Für* $c\in\mathbb{R}$ *gilt*
$$\lim_{n\to\infty} cx_n = c\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big).$$
(4) *Es sei* $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ *und* $x_n \neq 0$ *für alle* $n\in\mathbb{N}$. *Dann ist* $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ebenfalls konvergent mit*
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}.$$
(5) *Es sei* $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ *und* $x_n \neq 0$ *für alle* $n\in\mathbb{N}$. *Dann ist* $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ebenfalls konvergent mit*
$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} y_n}{x}.$$

Beweis. (1). Es seien x bzw. y die Grenzwerte der beiden Folgen. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Konvergenz der ersten Folge gibt es zu
$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$$
ein n_0 derart, dass für alle $n\geq n_0$ die Abschätzung
$$|x_n - x| \leq \epsilon'$$
gilt. Ebenso gibt es wegen der Konvergenz der zweiten Folge zu $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$ ein n_0' derart, dass für alle $n \geq n_0'$ die Abschätzung
$$|y_n - y| \leq \epsilon'$$
gilt. Sei
$$N = \max(n_0, n_0').$$
Dann gilt für alle $n\geq N$ (unter Verwendung der Dreiecksungleichung) die Abschätzung
$$\begin{aligned} |x_n+y_n-(x+y)| &= |x_n+y_n-x-y| \\ &= |x_n-x+y_n-y| \\ &\leq |x_n-x|+|y_n-y| \\ &\leq \epsilon'+\epsilon' \end{aligned}$$

$$= \epsilon.$$

(2). Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Lemma 7.9 insbesondere beschränkt und daher existiert ein $D > 0$ mit $|x_n| \leq D$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ und $y := \lim_{n\to\infty} y_n$. Wir setzen $C := \max\{D, |y|\}$. Aufgrund der Konvergenz gibt es natürliche Zahlen N_1 und N_2 mit

$$|x_n - x| \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_1 \text{ und } |y_n - y| \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_2\,.$$

Diese Abschätzungen gelten dann auch für alle $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$. Für diese Zahlen gilt daher

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \\ &\leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \\ &= |x_n|\,|y_n - y| + |y|\,|x_n - x| \\ &\leq C\frac{\epsilon}{2C} + C\frac{\epsilon}{2C} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Für die anderen Teile siehe Aufgabe 8.1, Aufgabe 8.2 und Aufgabe 8.3. □

Wir beschreiben eine typische Anwendung des vorstehenden Satzes.

Beispiel 8.2. Wir betrachten die durch

$$x_n = \frac{-5n^3 + 6n^2 - n + 8}{11n^3 + 7n^2 + 3n - 1}$$

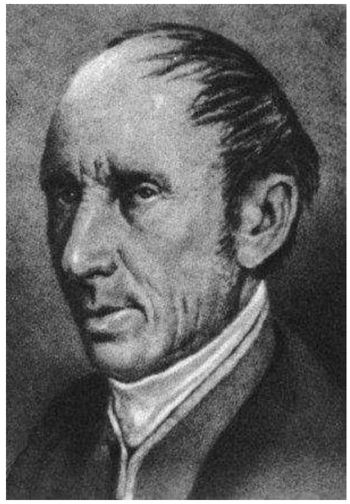
definierte Folge und wollen wissen, ob und gegebenenfalls wogegen sie konvergiert. Man kann Lemma 8.1 nicht unmittelbar anwenden, da weder der Zähler noch der Nenner konvergiert. Allerdings kann man den folgenden Trick anwenden, man schreibt

$$x_n = \frac{-5n^3 + 6n^2 - n + 8}{11n^3 + 7n^2 + 3n - 1} = \frac{(-5n^3 + 6n^2 - n + 8)\frac{1}{n^3}}{(11n^3 + 7n^2 + 3n - 1)\frac{1}{n^3}} = \frac{-5 + \frac{6}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{8}{n^3}}{11 + \frac{7}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}}.$$

In dieser Form sind die Zähler- und die Nennerfolge konvergent, und zwar gegen -5 bzw. 11, und daher konvergiert die Folge gegen $-\frac{5}{11}$.

8.2. **Cauchy-Folgen.**

Ein Problem des Konvergenzbegriffes ist, dass zur Formulierung der Grenzwert verwendet wird, den man unter Umständen noch gar nicht kennt. Wenn man beispielsweise die durch das babylonische Wurzelziehen konstruierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (sagen wir zur Berechnung von $\sqrt{5}$) mit einem rationalen Startwert betrachtet, so ist dies eine Folge aus rationalen Zahlen. Wenn wir diese Folge in $\mathbb{R}$ betrachten, wo $\sqrt{5}$ existiert, so ist die Folge konvergent. Innerhalb der rationalen Zahlen ist sie aber definitiv nicht konvergent. Es ist wünschenswert, allein innerhalb der rationalen Zahlen den Sachverhalt formulieren zu können, dass die Folgenglieder beliebig nahe zusammenrücken, auch wenn man nicht sagen kann, dass die Folgenglieder einem Grenzwert beliebig nahe zustreben. Dazu dient der Begriff der Cauchy-Folge.



Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Definition 8.3. Eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$

gilt.

Satz 8.4. *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir wenden die Konvergenzeigenschaft auf $\epsilon/2$ an. Daher gibt es ein n_0 mit

$$|x_n - x| \leq \epsilon/2 \text{ für alle } n \geq n_0 .$$

Für beliebige $n, m \geq n_0$ gilt dann aufgrund der Dreiecksungleichung

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Also liegt eine Cauchy-Folge vor. □

Definition 8.5. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zu jeder streng wachsenden Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $i \mapsto n_i$, heißt die Folge

$$i \mapsto x_{n_i}$$

eine *Teilfolge* der Folge.

Definition 8.6. Die reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *wachsend*, wenn $x_{n+1} \geq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, und *streng wachsend*, wenn $x_{n+1} > x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *fallend*, wenn $x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, und *streng fallend*, wenn $x_{n+1} < x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

Als gemeinsamen Begriff für (streng) wachsende oder (streng) fallende Folgen verwendet man die Bezeichnung (streng) *monotone Folgen.*

Lemma 8.7. *Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende, nach oben beschränkte reelle Folge. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Es sei $b \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke, also $x_n \leq b$ für alle Folgenglieder x_n. Wir nehmen an, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für jedes n_0 Indizes $n > m \geq n_0$ mit $x_n - x_m \geq \epsilon$ gibt (wir können die Betragstriche weglassen). Wegen der Monotonie gibt es dann auch zu jedem n_0 ein $n > n_0$ mit $x_n - x_{n_0} \geq \epsilon$. Wir können daher induktiv eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen definieren durch

$$n_1 > n_0 \text{ so, dass } x_{n_1} - x_{n_0} \geq \epsilon \,,$$

$$n_2 > n_1 \text{ so, dass } x_{n_2} - x_{n_1} \geq \epsilon \,,$$

etc. Andererseits gibt es aufgrund des Archimedesaxioms ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$k\epsilon > b - x_{n_0}.$$

Die Summe der ersten k Differenzen der Teilfolge x_{n_j}, $j \in \mathbb{N}$, ergibt

$$\begin{aligned} x_{n_k} - x_{n_0} &= \left(x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\right) + \left(x_{n_{k-1}} - x_{n_{k-2}}\right) + \cdots \\ &\quad + (x_{n_2} - x_{n_1}) + (x_{n_1} - x_{n_0}) \\ &\geq k\epsilon \\ &> b - x_{n_0}. \end{aligned}$$

Dies impliziert $x_{n_k} > b$ im Widerspruch zur Voraussetzung, dass b eine obere Schranke der Folge ist. □

8.3. **Die Vollständigkeit der reellen Zahlen.**

Innerhalb der rationalen Zahlen gibt es Cauchy-Folgen, die nicht konvergieren, beispielsweise die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{5}$. Man kann sagen, dass eine nichtkonvergente Cauchy-Folge eine Lücke entdeckt und adressiert. Innerhalb der reellen Zahlen werden diese Lücken aufgefüllt.

Definition 8.8. Ein angeordneter Körper K heißt *vollständig* oder *vollständig angeordnet*, wenn jede Cauchy-Folge in K konvergiert (also in K einen Grenzwert besitzt).

Die rationalen Zahlen sind nicht vollständig. Die Vollständigkeit fordern wir für die reellen Zahlen als das letzte Axiom.

Axiom 8.9. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind ein vollständiger archimedisch angeordneter Körper.

Damit haben wir alle Axiome der reellen Zahlen zusammengetragen: die Körperaxiome, die Anordnungsaxiome und das Vollständigkeitsaxiom. Diese Eigenschaften legen die reellen Zahlen eindeutig fest, d.h. wenn es zwei Modelle $\mathbb{R}_1$ und $\mathbb{R}_2$ gibt, die beide für sich genommen diese Axiome erfüllen, so kann man eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}_1$ nach $\mathbb{R}_2$ angeben, der alle mathematischen Strukturen erhält (sowas nennt man einen „Isomorphismus“).

Die Existenz der reellen Zahlen ist nicht trivial. Vom naiven Standpunkt her kann man, und das haben wir bisher getan und werden wir auch weiterhin tun, die Vorstellung einer „kontinuierlichen Zahlengerade“ zugrunde legen, und dies als Existenznachweis akzeptieren. In einer strengeren mengentheoretischen Begründung der Existenz geht man von $\mathbb{Q}$ aus und konstruiert die reellen Zahlen als die Menge der Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ mit einer geeigneten Identifizierung.

8.4. **Folgerungen aus der Vollständigkeit.**

Korollar 8.10. *Eine beschränkte und monotone Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist die Folge wachsend und nach oben beschränkt oder fallend und nach unten beschränkt. Nach Lemma 8.7 liegt eine Cauchy-Folge vor, und diese konvergiert in $\mathbb{R}$. ☐

Diese Aussage ist auch die Grundlage dafür, dass die Dezimalentwicklung stets eine (eindeutige) reelle Zahl definiert. Eine (unendliche) Dezimalentwicklung

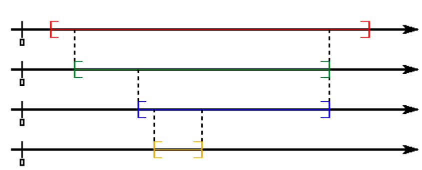
$$a, a_{-1}a_{-2}a_{-3}\ldots$$

mit $a \in \mathbb{N}$ (wir beschränken uns auf nichtnegative Zahlen) und $a_{-n} \in \{0, \ldots, 9\}$ ist nämlich die Folge der rationalen Zahlen

$$x_0 := a,\ x_1 := a + a_{-1} \cdot \frac{1}{10},\ x_2 := a + a_{-1} \cdot \frac{1}{10} + a_{-2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2, \text{ etc.}$$

Diese ist offenbar monoton wachsend. Sie ist ferner nach oben beschränkt, beispielsweise durch $a+1$, so dass dadurch in der Tat eine Cauchy-Folge und somit eine reelle Zahl definiert wird.

8.5. **Intervallschachtelungen.**



Definition 8.11. Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen

$$I_n = [a_n, b_n],\ n \in \mathbb{N},$$

in $\mathbb{R}$ heißt eine *Intervallschachtelung*, wenn $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist und wenn die Folge der Intervalllängen, also

$$(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

gegen 0 konvergiert.

Satz 8.12. *Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Dann besteht der Durchschnitt*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$. Eine reelle Intervallschachtelung bestimmt also genau eine reelle Zahl.

Beweis. Siehe Aufgabe 8.20. $\square$

Satz 8.13. *Zu jeder nichtnegativen reellen Zahl $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und jedem $k \in \mathbb{N}_+$ gibt es eine eindeutige nichtnegative reelle Zahl x mit*

$$x^k = c.$$

Beweis. Wir definieren rekursiv eine Intervallschachtelung $[a_n, b_n]$, und zwar setzen wir

$$a_0 = 0$$

und b_0 eine beliebige reelle Zahl mit $b_0^k \geq c$. Es seien die Intervallgrenzen bis zum Index n bereits definiert, die Intervalle seien ineinander enthalten und es gelte dabei

$$a_n^k \leq c \leq b_n^k.$$

Wir setzen

$$a_{n+1} := \begin{cases} \frac{a_n+b_n}{2}, \text{ falls } \left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^k \leq c\,, \\ a_n \text{ sonst,} \end{cases}$$

und

$$b_{n+1} := \begin{cases} \frac{a_n+b_n}{2}, \text{ falls } \left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^k > c\,, \\ b_n \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dadurch wird eine Grenze beibehalten und die andere Grenze wird durch das arithmetische Mittel der beiden Vorgängergrenzen ersetzt. Insbesondere gelten die angegebenen Eigenschaften für alle Intervalle und es liegt eine Intervallschachtelung vor. Es sei x die durch diese Intervallschachtelung gemäß Satz 8.12 festgelegte reelle Zahl. Nach Aufgabe 8.21 gilt

$$x = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Damit ist nach Lemma 8.1 (2)

$$x^k = \lim_{n\to\infty} a_n^k = \lim_{n\to\infty} b_n^k.$$

Wegen der Konstruktion der Intervallgrenzen ist dies nach Lemma 7.11 sowohl $\leq c$ als auch $\geq c$, also ist $x^k = c$. $\square$

Diese eindeutig bestimmte Zahl wird mit $\sqrt[k]{c}$ oder mit $c^{1/k}$ bezeichnet.

8.6. **Bestimmte Divergenz.**

Definition 8.14. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt *bestimmt divergent* gegen $+\infty$, wenn es zu jedem $s \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n \geq s \text{ für alle } n \geq N$$

gibt.

Sie heißt *bestimmt divergent* gegen $-\infty$, wenn es zu jedem $s \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n \leq s \text{ für alle } n \geq N$$

gibt.

8. Arbeitsblatt

8.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 8.1. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle konvergente Folge und $c \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Folge $(c \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$$

ist.

Aufgabe 8.2.*

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle konvergente Folge mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$. Zeige, dass $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$$

ist.

Aufgabe 8.3. Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle konvergente Folgen. Es sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent ist mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} y_n}{x}.$$

Aufgabe 8.4. Sei $k \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Folge $\left(\frac{1}{n^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 8.5.*

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{3}$ mit dem Startwert $x_0 = 1$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{\frac{1}{3}}$ mit dem Startwert $y_0 = 1$.

(1) Berechne x_1 und x_2.
(2) Berechne y_1 und y_2.
(3) Berechne $x_0 \cdot y_0$, $x_1 \cdot y_1$ und $x_2 \cdot y_2$.
(4) Konvergiert die Produktfolge $z_n = x_n \cdot y_n$ innerhalb der rationalen Zahlen?

Aufgabe 8.6.*

Es sei $a \in \mathbb{R}$. Zu einem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ sei eine reelle Folge rekursiv durch

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a}{2}$$

definiert. Zeige die folgenden Aussagen.

(a) Bei $x_0 > a$ ist $x_n > a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge ist streng fallend.

(b) Bei $x_0 = a$ ist die Folge konstant.

(c) Bei $x_0 < a$ ist $x_n < a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge ist streng wachsend.

(d) Die Folge konvergiert.

(e) Der Grenzwert ist a.

Aufgabe 8.7. Entscheide, ob die Folge

$$x_n = \frac{6n^3 + 3n^2 - 4n + 5}{7n^3 - 6n^2 - 2}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 8.8. Es seien $P = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ und $Q = \sum_{i=0}^{e} b_i x^i$ Polynome mit $a_d, b_e \neq 0$. Man bestimme in Abhängigkeit von d und e, ob die durch

$$z_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$$

(für n hinreichend groß) definierte Folge konvergiert oder nicht, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 8.9. Sei $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nichtnegative reelle Zahl und $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass die rekursiv definierte Folge mit

$$x_{n+1} := \frac{x_n + a/x_n}{2}$$

gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Aufgabe 8.10. Man gebe ein Beispiel für eine reelle Folge, die nicht konvergiert, aber eine konvergente Teilfolge enthält.

Aufgabe 8.11.*

Zu jeder natürlichen Zahl k sei eine Nullfolge y_k gegeben, das n-te Folgenglied der k-ten Folge sei mit y_{kn} bezeichnet. Ist die Folge z_n, deren n-tes Folgenglied durch

$$z_n = \sum_{k=1}^{n} y_{kn}$$

gegeben ist, ebenfalls eine Nullfolge?

Kann man in der vorstehenden Aufgabe Lemma 8.1 (1) anwenden?

Aufgabe 8.12.*

Zu jeder natürlichen Zahl k sei eine Nullfolge y_k gegeben, das n-te Folgenglied der k-ten Folge sei mit y_{kn} bezeichnet. Ist die Folge z_n, deren n-tes Folgenglied durch

$$z_n = \prod_{k=1}^{n} y_{kn}$$

gegeben ist, ebenfalls eine Nullfolge?

Kann man in der vorstehenden Aufgabe Lemma 8.1 (3) anwenden?

Aufgabe 8.13. Diskutiere das *Cauchyprinzip der Approximation*: Wenn sich bei einem Approximationsverfahren die Approximationen nicht mehr spürbar verbessern, obwohl man den Aufwand ständig erhöht, so liegt das vermutlich daran, dass man der Wahrheit sehr nahe ist. Betrachte mathematische und nichtmathematische Beispiele und Gegenbeispiele.

Aufgabe 8.14. Man gebe ein Beispiel für eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, die (in $\mathbb{Q}$) nicht konvergiert.

Aufgabe 8.15.*

Wir betrachten die Folge, die durch die Folgenglieder

$$x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}$$

gegeben ist. Zeige, dass dies eine Nullfolge ist.

Aufgabe 8.16. Zeige, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$ konvergiert.

Aufgabe 8.17. Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen und

$$x_n = \frac{f_n}{f_{n-1}}.$$

Zeige, dass diese Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert und dass der Grenzwert x die Bedingung

$$x = 1 + x^{-1}$$

erfüllt. Berechne daraus x.

Tipp: Zeige zuerst mit Hilfe der Simpson-Formel, dass man mit diesen Brüchen eine Intervallschachtelung basteln kann.

Zu zwei nichtnegativen reellen Zahlen x und y heißt

$$\sqrt{x \cdot y}$$

das *geometrische Mittel*.

Aufgabe 8.18.*

Es seien x und y zwei nichtnegative reelle Zahlen. Zeige, dass das arithmetische Mittel der beiden Zahlen mindestens so groß wie ihr geometrisches Mittel ist.

Aufgabe 8.19.*

Sei $b \geq 1$ eine reelle Zahl. Wir betrachten die reelle Folge

$$x_n := b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$$

($n \in \mathbb{N}_+$).

(1) Zeige, dass die Folge monoton fallend ist.
(2) Zeige, dass sämtliche Folgenglieder ≥ 1 sind.
(3) Zeige, dass die Folge gegen 1 konvergiert ist.

Aufgabe 8.20.*

Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Zeige, dass der Durchschnitt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ besteht.

Aufgabe 8.21. Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $x_n \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass diese Folge gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl konvergiert.

Aufgabe 8.22.*

Man gebe ein Beispiel für eine Folge von abgeschlossenen Intervallen ($n \in \mathbb{N}_+$)

$$I_n = [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$$

derart an, dass $b_n - a_n$ eine Nullfolge ist, dass $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} I_n$ aus einem einzigen Punkt besteht, wo aber keine Intervallschachtelung vorliegt.

Aufgabe 8.23.*

Zeige unter Verwendung der Bernoullischen Ungleichung, dass die Folge

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

wachsend ist.

Mit einem ähnlichen Argument kann man zeigen, dass die Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ fallend ist und dass durch $[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}]$ eine Intervallschachtelung gegeben ist. Die dadurch festgelegte reelle Zahl ist die eulersche Zahl e. Wir werden im Laufe des Kurses noch eine weitere Beschreibung für diese Zahl kennenlernen.

Aufgabe 8.24. Sei $x > 1$ eine reelle Zahl. Zeige, dass die Folge x^n, $n \in \mathbb{N}$, bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.

Aufgabe 8.25. Es sei x eine reelle Zahl mit $|x| < 1$. Zeige, dass die Folge $x_n := x^n$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 8.26. Man gebe ein Beispiel einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, für die es sowohl eine bestimmt gegen $+\infty$ als auch eine bestimmt gegen $-\infty$ divergente Teilfolge gibt.

Aufgabe 8.27. Untersuche die durch

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

gegebene Folge ($n \geq 1$) auf Konvergenz.

Aufgabe 8.28. Zeige, dass die Folge $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen ∞ ist.

Aufgabe 8.29. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Folge genau dann bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist, wenn $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

8.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 8.30. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der durch

$$x_n = \frac{7n^3 - 3n^2 + 2n - 11}{13n^3 - 5n + 4}$$

definierten Folge.

Aufgabe 8.31. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der durch

$$x_n = \frac{2n + 5\sqrt{n} + 7}{-5n + 3\sqrt{n} - 4}$$

definierten reellen Folge.

Aufgabe 8.32. (3 Punkte)

Man gebe Beispiele für konvergente reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, und mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ derart, dass die Folge

$$\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(1) gegen 0 konvergiert,
(2) gegen 1 konvergiert,
(3) divergiert.

Aufgabe 8.33. (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

konvergiert, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 8.34. (5 Punkte)

Untersuche die durch

$$x_n = \frac{\sqrt{n}^n}{n!}$$

gegebene Folge auf Konvergenz.

Aufgabe 8.35. (4 Punkte)

Es sei $x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine konvergente Folge mit dem Grenzwert x. Zeige, dass die Folge $\sqrt{x_n}$ gegen $\sqrt{x}$ konvergiert.

Aufgabe 8.36. (4 Punkte)

Es seien $b > a > 0$ positive reelle Zahlen. Wir definieren rekursiv zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $x_0 = a$, $y_0 = b$ und durch

$$x_{n+1} = \text{ geometrisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n\,,$$

$$y_{n+1} = \text{ arithmetisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n\,.$$

Zeige, dass $[x_n, y_n]$ eine Intervallschachtelung ist.

9. Vorlesung - Reihen

> Kultur ist Reichtum an Problemen.
>
> Egon Friedell

9.1. **Reihen.**

Wir haben in der letzten Vorlesung gesagt, dass man eine Dezimalentwicklung, also eine (unendliche) Ziffernfolge mit Ziffern zwischen 0 und 9 als eine wachsende Folge von rationalen Zahlen auffassen kann. Dabei hat die n-te Nachkommastelle z_{-n} die Bedeutung, dass $z_{-n} \cdot 10^{-n}$ zur vorhergehenden Approximation hinzu zu addieren ist. Die Ziffernfolge gibt also in Verbindung mit den inversen Zehnerpotenzen die Differenz der Folgenglieder an, und die Folgenglieder ergeben sich durch Aufsummieren dieser Differenzen. Diese Sichtweise führt zum Begriff der Reihe.

Definition 9.1. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen. Unter der *Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ versteht man die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der *Partialsummen*

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Falls die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so sagt man, dass die *Reihe konvergiert.* In diesem Fall schreibt man für den Grenzwert ebenfalls

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

und nennt ihn die *Summe* der Reihe.

Alle Begriffe für Folgen übertragen sich auf Reihen, indem man eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ als Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ auffasst. Wie schon bei Folgen kann es sein, dass die Summation nicht bei $k = 0$, sondern bei einer anderen Zahl beginnt.

Beispiel 9.2. Wir wollen die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

berechnen, wozu wir zuerst eine Formel für die n-te Partialsumme angeben. Es ist

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Diese Folge konvergiert gegen 1, so dass die Reihe konvergiert und ihre Summe gleich 1 ist.

Lemma 9.3. *Es seien*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

konvergente Reihen von reellen Zahlen mit den Summen s und t. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_k := a_k + b_k$ ist ebenfalls konvergent mit der Summe $s + t$.*
(2) *Für $r \in \mathbb{R}$ ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ mit $d_k := ra_k$ konvergent mit der Summe rs.*

Beweis. Siehe Aufgabe 9.8. □

Lemma 9.4. *Es sei*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

eine Reihe von reellen Zahlen. Dann ist die Reihe genau dann konvergent, wenn das folgende Cauchy-Kriterium *erfüllt ist: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein n_0 derart, dass für alle*

$$n \geq m \geq n_0$$

die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \epsilon$$

gilt.

Beweis. Siehe Aufgabe 9.9. □

Lemma 9.5. *Es sei*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

eine konvergente Reihe von reellen Zahlen. Dann ist

$$\lim_{k \to \infty} a_k = 0.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 9.4. □

Nikolaus von Oresme (1330-1382) bewies, dass die harmonische Reihe divergiert.

Es ist also eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe, dass die Reihenglieder eine Nullfolge bilden. Diese Bedingung ist nicht hinreichend, wie die *harmonische Reihe* zeigt.

Beispiel 9.6. Die *harmonische Reihe* ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Es geht also um die „unendliche Summe“ der Stammbrüche

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\dots.$$

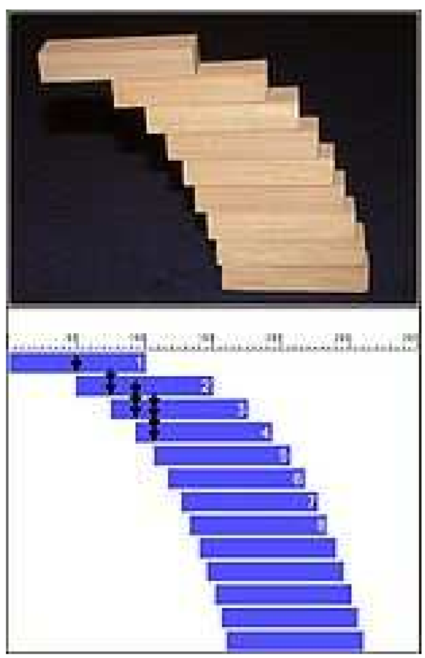
Diese Reihe divergiert: Für die 2^n Zahlen $k=2^n+1,\dots,2^{n+1}$ ist

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k}\geq\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\frac{1}{2^{n+1}}=2^n\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}.$$

Daher ist

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k}=1+\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}}\frac{1}{k}\right)\geq 1+(n+1)\frac{1}{2}.$$

Damit ist die Folge der Partialsummen unbeschränkt und kann nach Lemma 7.9 nicht konvergent sein.



Aus der Divergenz der harmonischen Reihe folgt, dass man einen beliebig weiten Überhang mit gleichförmigen Bauklötzen bauen kann.

Die folgende Aussage heißt *Leibnizkriterium für alternierende Reihen.*

Satz 9.7. *Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine fallende Nullfolge von nichtnegativen reellen Zahlen. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x_k$.*

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

9.2. **Absolute Konvergenz.**

Definition 9.8. Eine Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

von reellen Zahlen heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

Satz 9.9. *Eine absolut konvergente Reihe von reellen Zahlen konvergiert.*

Beweis. Es sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir wenden das Cauchy-Kriterium an. Aufgrund der absoluten Konvergenz gibt es ein n_0 derart, dass für alle $n \geq m \geq n_0$ die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| = \sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \epsilon$$

gilt. Daher ist

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| \leq \epsilon,$$

was die Konvergenz bedeutet. □

Beispiel 9.10. Eine konvergente Reihe muss nicht absolut konvergieren, d.h. Satz 9.9 lässt sich nicht umkehren. Aufgrund des Leibnizkriteriums konvergiert die *alternierende harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots ,$$

und zwar ist ihr Grenzwert $\ln 2$, was wir hier aber nicht beweisen. Die zugehörige absolute Reihe ist aber die harmonische Reihe, die nach Beispiel 9.6 divergiert.

Die folgende Aussage heißt das *Majorantenkriterium.*

Satz 9.11. *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *eine konvergente Reihe von reellen Zahlen und* $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *eine Folge reeller Zahlen mit* $|a_k| \leq b_k$ *für alle* k. *Dann ist die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

absolut konvergent.

Beweis. Das folgt direkt aus dem Cauchy-Kriterium. □

Beispiel 9.12. Wir wollen bestimmen, ob die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

konvergiert oder nicht. Dazu ziehen wir das Majorantenkriterium und Beispiel 9.2 heran, wo wir die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ gezeigt haben. Für $k \geq 2$ ist

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} .$$

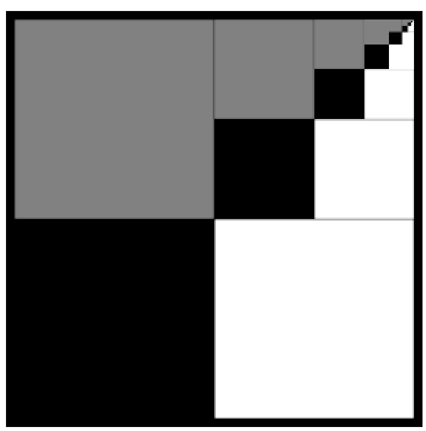
Daher konvergiert $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ und somit auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Über den Wert der Summe ist damit noch nichts gesagt. Mit deutlich aufwändigeren Methoden kann man zeigen, dass diese Summe gleich $\frac{\pi^2}{6}$ ist.

9.3. **Die geometrische Reihe und das Quotientenkriterium.**

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ heißt *geometrische Reihe* zu $x \in \mathbb{R}$, es geht also um die Summe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots .$$

Die Konvergenz hängt wesentlich vom Betrag von x ab.



Dieses Bild veranschaulicht das Verhalten der geometrischen Reihe zu $x = \frac{1}{4}$. Die Grundseite des Quadrates sei 2, dann passt die geometrische Reihe dreimal in dieses Quadrat rein. Der jeweilige Flächeninhalt der drei Reihen ist $\frac{4}{3}$.

Satz 9.13. *Für alle reellen Zahlen x mit $|x| < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ absolut und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Beweis. Für jedes x und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt die Beziehung

$$(x-1)\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) = x^{n+1} - 1$$

und daher gilt für die Partialsummen die Beziehung (bei $x \neq 1$)

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

Für $n \to \infty$ und $|x| < 1$ konvergiert dies wegen Lemma 8.1 und Aufgabe 8.22 gegen $\frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$. □

Die folgende Aussage heißt *Quotientenkriterium.*

Satz 9.14. *Es sei*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

eine Reihe von reellen Zahlen. Es gebe eine reelle Zahl q mit $0 \leq q < 1$ und ein k_0 mit

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$$

für alle $k \geq k_0$ (insbesondere sei $a_k \neq 0$ für $k \geq k_0$). Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

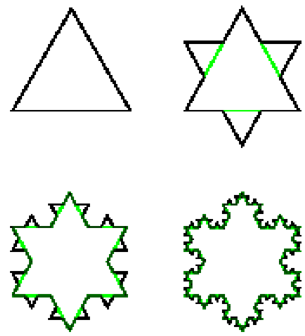
Beweis. Die Konvergenz[27] ändert sich nicht, wenn man endlich viele Glieder ändert. Daher können wir $k_0 = 0$ annehmen. Ferner können wir annehmen, dass alle a_k nichtnegative reelle Zahlen sind. Es ist

$$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdots \frac{a_1}{a_0} \cdot a_0 \leq a_0 \cdot q^k.$$

Somit folgt die Konvergenz aus dem Majorantenkriterium und der Konvergenz der geometrischen Reihe. □

Beispiel 9.15. Unter den *Kochschen Schneeflocken* versteht man die Folge K_n der folgendermaßen rekursiv definierten ebenen Figuren: Die Ausgangsfigur K_0 ist ein gleichseitiges Dreieck. Die Figur K_{n+1} entsteht aus K_n, indem man in jeder Begrenzungskante von K_n das mittlere Drittel durch die beiden Schenkel eines darauf aufgesetzten nach außen gerichteten gleichmäßigen Dreiecks ersetzt.

[27] Wohl aber die Summe.



Es sei A_n der Flächeninhalt und L_n die Länge des Randes der n-ten Kochschen Schneeflocke. Wir wollen zeigen, dass die Folge A_n konvergiert und die Folge L_n bestimmt gegen ∞ divergiert.

Die Anzahl der Kanten von K_n ist $3 \cdot 4^n$, da bei jedem Unterteilungsschritt eine Kante durch vier Kanten ersetzt wird, deren Länge $1/3$ der Länge der Vorgängerkante ist. Es sei r die Seitenlänge des gleichseitigen Ausgangsdreiecks. Dann besteht K_n aus $3 \cdot 4^n$ Kanten der Länge $r\left(\frac{1}{3}\right)^n$ und die Gesamtlänge der Kanten von K_n ist gleich

$$L_n = 3 \cdot 4^n r \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3r\left(\frac{4}{3}\right)^n .$$

Wegen $\left(\frac{4}{3}\right) > 1$ divergiert dies gegen ∞.

Beim Übergang von K_n nach K_{n+1} kommt für jede Kante ein neues Dreieck mit gedrittelter Seitenlänge hinzu. Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge s ist $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$ (Grundseite mal Höhe durch 2). Im Schritt von K_n nach K_{n+1} kommen somit $3 \cdot 4^n$ Dreiecke mit dem Flächeninhalt $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{2(n+1)} r^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}$ hinzu. Daher ist der Gesamtflächeninhalt von K_n gleich

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3}}{4}r^2\left(1 + 3\frac{1}{9} + 12\left(\frac{1}{9}\right)^2 + 48\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \cdots + 3 \cdot 4^{n-1}\left(\frac{1}{9}\right)^n\right) \\ = \; & \frac{\sqrt{3}}{4}r^2\left(1 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^1 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^3 + \cdots + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right). \end{aligned}$$

Wenn wir hinten die erste 1 und den Faktor $\frac{3}{4}$ ignorieren, was die Konvergenzeigenschaft nicht ändert, so steht in der Klammer die Partialsumme einer geometrischen Reihe zu $\frac{4}{9}$, welche konvergiert.

9. Arbeitsblatt

9.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 9.1. Zeige $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 9.2.*

Es sei

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(1) Finde das kleinste n mit

$$x_n \geq 2.$$

(2) Finde das kleinste n mit

$$x_n \geq 2{,}5.$$

Aufgabe 9.3.*

Karl möchte mit seinem programmierbaren Taschenrechner den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ annähernd berechnen. Die Anzeige des Rechners besitzt 8 Nachkommastellen. Der Rechner schafft pro Sekunde eine Addition (also ein Reihenglied wird zur bisherigen Summe draufaddiert) der Reihe und zeigt das neue Ergebnis direkt an. Karl hat richtig programmiert und denkt sich folgende Strategie aus: „Wenn die Anzeige eine ganze Stunde lang immer das gleiche anzeigt, so wird das wohl ziemlich nah am Ergebnis sein, so dass ich das als eine gute Annäherung nehmen kann. Der Rechner soll dann aufhören“.

(1) Was ist ungefähr das letzte Reihenglied, das aufaddiert wird?
(2) Was ist von der Strategie zu halten?

Aufgabe 9.4. Zeige, dass die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+2}$$

divergieren.

Aufgabe 9.5. Seien $a, b \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{ak+b}$$

divergiert.

Aufgabe 9.6. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

divergiert.

Aufgabe 9.7.*

Zeige die Abschätzung

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 3\sqrt{n}.$$

Aufgabe 9.8. Es seien

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

konvergente Reihen von reellen Zahlen mit den Summen s und t. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_k = a_k + b_k$ ist ebenfalls konvergent mit der Summe $s + t$.
(2) Für $r \in \mathbb{R}$ ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ mit $d_k = ra_k$ konvergent mit der Summe rs.

Aufgabe 9.9.*

Beweise das Cauchy-Kriterium für Reihen reeller Zahlen.

Aufgabe 9.10. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine reelle Reihe mit $a_k \geq 0$ für alle k. Zeige, dass die Reihe genau dann konvergent ist, wenn sie nach oben beschränkt ist.

Aufgabe 9.11. Man gebe ein Beispiel für eine reelle Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, die (als Folge von Partialsummen) beschränkt ist, aber nicht konvergiert.

Aufgabe 9.12. Sei $k \geq 2$. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

konvergiert.

Aufgabe 9.13. Beweise das folgende *Minorantenkriterium.*

Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei Reihen von nichtnegativen reellen Zahlen. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sei divergent und es gelte $a_k \geq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Aufgabe 9.14.*

Entscheide, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

konvergiert.

Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine reelle Reihe. Eine *Umordnung* dieser Reihe ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ mit $b_k = a_{\sigma(k)}$ zu einer bijektiven Abbildung $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Bei einer Umordnung einer Reihe kommen zwar genau die gleichen Summanden vor, es ändert sich aber die Folge der Partialsummen und damit eventuell auch das Konvergenzverhalten.

Aufgabe 9.15. Zeige, dass bei einer reellen Folge die Änderung von endlich vielen Folgengliedern weder die Konvergenz noch den Grenzwert ändert, und dass bei Reihen die Änderung von endlich vielen Reihengliedern zwar die Konvergenz nicht ändert, wohl aber die Summe.

Aufgabe 9.16. In einer Studenten-WG bereitet Studi 1 Kaffee zu, und füllt die Menge x_1 Kaffee in den Kaffeefilter. Dies sieht entsetzt Studi 2 und sagt: „Willst Du, dass wir alle schon total wach werden?“ und nimmt die Kaffeemenge $x_2 < x_1$ wieder aus dem Filter heraus. Danach kommt Studi 3 und sagt: „Bin ich hier in einer Weicheier-WG gelandet?“ und kippt wieder eine Kaffeemenge $x_3 < x_2$ dazu. So geht es unendlich weiter, wobei sich Kaffeeherausnehmer und Kaffeenachfüller abwechseln. Wie kann man charakterisieren, ob die Kaffeemenge im Filter konvergiert?

Aufgabe 9.17. Nachdem der Kaffee am Vortag für die Befürworter eines starken Kaffees zu schwach geworden ist, entwickeln sie eine neue Strategie: Sie wollen etwas früher aufstehen, so dass am Tagesanfang und zwischen je zwei Kaffeereduzierern immer zwei Kaffeeauffüller zum Zuge kommen. Dabei bleibt die interne Reihenfolge der beiden Lager als auch die hinzuzufügende bzw. wegzunehmende Kaffeemenge einer Person unverändert. Können sie mit dieser Strategie den Kaffee stärker machen, beispielsweise bei $x_n = \frac{1}{n}$?

Aufgabe 9.18.*

Wir betrachten die alternierende Reihe der Stammbrüche $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ mit

$$x_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n},$$

also

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \cdots,$$

die bekanntlich konvergiert.

a) Zeige, dass die umgeordnete Reihe

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \cdots,$$

konvergiert.

b) Man gebe eine Umordnung der Reihe an, die divergiert.

Aufgabe 9.19. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente reelle Reihe. Zeige, dass dann auch jede Umordnung der Reihe gegen den gleichen Grenzwert konvergiert.

Aufgabe 9.20. Berechne die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \dots .$$

Aufgabe 9.21.*

Berechne die Summe

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n .$$

Aufgabe 9.22. Zwei Personen, A und B, sitzen in der Kneipe. A will nach Hause gehen, aber B will noch ein Bier trinken. „Na gut, dann trinken wir eben noch ein Bier, das ist aber das allerletzte“ sagt A. Danach möchte B immer noch Bier, aber da das vorhergehende Bier definitiv das letzte war, einigen sie sich auf ein allerletztes halbes Bier. Danach trinken sie noch ein allerletztes Viertelbier, danach noch ein allerletztes Achtelbier, u.s.w. Wie viel „allerletztes Bier“ trinken sie insgesamt?

Aufgabe 9.23. Zeige $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{5^n} = \frac{45}{14}$.

Aufgabe 9.24.*

Sei $z \in \mathbb{R}$, $|z| < 1$. Bestimme und beweise eine Formel für die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \,.$$

Aufgabe 9.25.*

Es sei $\sum_{n=0}^{n} a_n$ eine reelle Reihe mit $a_n \neq 0$ für alle n. Die Folge der Quotienten

$$x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

konvergiere gegen eine reelle Zahl x mit $-1 < x < 1$. Zeige unter Verwendung des Quotientenkriteriums, dass die Reihe konvergiert.

Aufgabe 9.26. Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3-n^2-n+2}$,
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n^2-\sqrt{n}+1}$,
(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$.

9.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 9.27. (4 Punkte)

Untersuche die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+7}{n^3 - 4n^2 + 3n - 5}$$

auf Konvergenz.

Aufgabe 9.28. (3 Punkte)

Berechne die Summe

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n .$$

Aufgabe 9.29. (4 Punkte)

Es sei $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$. Eine *Ziffernfolge*, die durch

$$z_i \in \{0, 1, \ldots, g-1\} \text{ für } i \in \mathbb{Z},\ i \leq k \,,$$

(wobei $k \in \mathbb{N}$ ist) gegeben ist, definiert eine reelle Reihe[28]

$$\sum_{i=k}^{-\infty} z_i g^i \,.$$

Zeige, dass eine solche Reihe gegen eine eindeutig bestimmte nichtnegative reelle Zahl konvergiert.

Aufgabe 9.30. (4 Punkte)

In einen Klärteich mit einem Fassungsvermögen von $2000\,\mathrm{m}^3$ werden zu Beginn eines jeden Tages $200\,\mathrm{m}^3$ Wasser eingelassen, das einen bestimmten Schadstoff in einer Volumen-Konzentration von $10\,\%$ enthält und vollständig mit dem vorhandenen Wasser vermischt. Im Laufe eines Tages reduziert sich durch biologische Reaktion die vorhandene Schadstoffmenge jeweils um $20\,\%$. Gegen Ende eines Tages werden dann $200\,\mathrm{m}^3$ Wasser aus dem Klärteich abgepumpt. Welche Schadstoffkonzentration (in Prozent) stellt sich auf Dauer bei dem abgepumptem Wasser ein, wenn ganz am Anfang der Teich mit $1800\,\mathrm{m}^3$ klarem Wasser gefüllt war?

Aufgabe 9.31. (4 Punkte)

Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

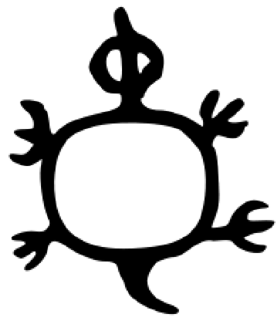
konvergiert.

Aufgabe 9.32. (5 Punkte)

Die Situation im Schildkröten-Paradoxon von Zenon von Elea ist folgendermaßen: Eine langsame Schildkröte (mit der Kriechgeschwindigkeit $v > 0$) hat einen Vorsprung $s > 0$ gegenüber dem schnelleren Achilles (mit der Geschwindigkeit $w > v$ und dem Startpunkt 0). Sie starten gleichzeitig. Achilles kann die Schildkröte nicht einholen: Wenn er beim Ausgangspunkt der Schildkröte $s_0 = s$ ankommt, so ist die Schildkröte nicht mehr dort, sondern ein Stück weiter, sagen wir an der Stelle $s_1 > s_0$. Wenn Achilles an der Stelle s_1 ankommt, so ist die Schildkröte wieder ein Stück weiter, an der Stelle $s_2 > s_1$, u.s.w.

Berechne die Folgenglieder s_n, die zugehörigen Zeitpunkte t_n, sowie die jeweiligen Grenzwerte. Vergleiche diese Grenzwerte mit den direkt berechneten Überholungsdaten.

[28] Hier läuft also der Index in die umgekehrte Richtung.



10. Vorlesung - Stetigkeit

10.1. **Stetige Funktionen.**

Den Abstand zwischen zwei reellen Zahlen x und x' bezeichnen wir mit $d(x, x') := |x - x'|$.

Bei einer Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

kann man sich fragen, inwiefern der Abstand in der Wertemenge durch den Abstand in der Definitionsmenge kontrollierbar ist. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $y = f(x)$ der Bildpunkt. Man möchte, dass für Punkte x', die „nahe“ an x sind, auch die Bildpunkte $f(x')$ „nahe“ an $f(x)$ sind. Schon lineare Funktionen mit unterschiedlichen Steigungen zeigen, dass die „Nähe“ im Bildbereich nicht mit der „Nähe“ im Definitionsbereich direkt verglichen weden kann. Die Zielsetzung ist vielmehr (im Sinne des in der siebten Vorlesung erwähnten Approximationsprinzip), dass zu einer gewünschten Genauigkeit im Bildbereich überhaupt eine Ausgangsgenauigkeit gefunden werden kann, die sichert, dass die Funktionswerte innerhalb der gewünschten Genauigkeit beieinander liegen.

Um diese intuitive Vorstellung zu präzisieren, sei ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dieses ϵ repräsentiert eine „gewünschte Zielgenauigkeit“. Die Frage ist dann, ob man ein $\delta > 0$ finden kann (eine „Startgenauigkeit“) mit der Eigenschaft, dass für alle x' mit $d(x, x') \leq \delta$ die Beziehung $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ gilt. Dies führt zum Begriff der stetigen Abbildung.

Definition 10.1. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge,

$$f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion und $x \in D$. Man sagt, dass f *stetig* im Punkt x ist, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart gibt, dass für alle $x' \in D$ mit $|x - x'| \leq \delta$ die Abschätzung $|f(x) - f(x')| \leq \epsilon$ gilt. Man sagt, dass f *stetig* ist, wenn sie in jedem Punkt $x \in D$ stetig ist.

Bei D sollte man an den Definitionsbereich der Funktion denken. Typische Situationen sind, dass D ganz $\mathbb{R}$ ist, oder ein Intervall, oder $\mathbb{R}$ ohne endlich viele Punkte und Ähnliches. Statt mit den reellen Zahlen ϵ und δ kann man genauso gut mit Stammbrüchen $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{m}$ arbeiten.

Beispiel 10.2. Eine konstante Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto c,$$

ist stetig. Zu jedem vorgegebenen ϵ kann man hier ein beliebiges δ wählen, da ja ohnehin

$$d(f(x), f(x')) \,=\, d(c,c) \,=\, 0 \,\leq\, \epsilon$$

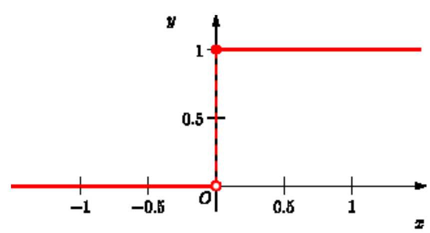
gilt.

Die Identität

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x,$$

ist ebenfalls stetig. Zu jedem vorgegebenen ϵ kann man hier $\delta = \epsilon$ wählen, was zu der Tautologie führt: Wenn $d(x,x') \leq \delta = \epsilon$, so ist

$$d(f(x), f(x')) \,=\, d(x,x') \,\leq\, \epsilon.$$



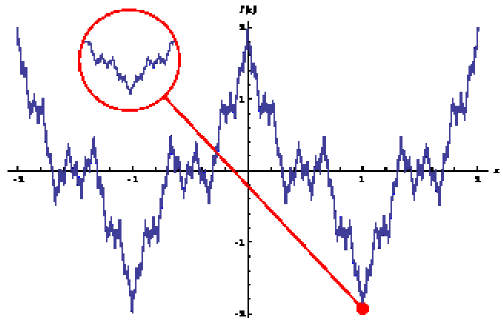
Beispiel 10.3. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0\,, \\ 1, & \text{falls } x \geq 0\,. \end{cases}$$

Diese Funktion ist im Nullpunkt 0 nicht stetig. Für $\epsilon = \frac{1}{2}$ und jedes beliebige positive δ gibt es nämlich negative Zahlen x' mit $d(0,x') \,=\, |x'| \,\leq\, \delta$. Für diese ist aber $d(f(0), f(x')) \,=\, d(1,0) \,=\, 1 \,\not\leq\, \frac{1}{2}$.



Nicht jede stetige Funktion kann man zeichnen, auch nicht nach beliebiger Vergrößerung. Gezeigt wird eine Approximation einer Weierstraß-Funktion, die stetig ist, aber nirgendwo differenzierbar. Bei einer stetigen Funktion kann man zwar die Größe der Schwankungen im Bildbereich durch Einschränkungen im Definitionsbereich kontrollieren, die Anzahl der Schwankungen (die Anzahl der Richtungswechsel des Graphen) kann man aber nicht kontrollieren.

Die folgende Aussage bringt die Stetigkeit mit konvergenten Folgen in Verbindung.

Lemma 10.4. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge,*

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion und $x \in D$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *f ist stetig im Punkt x.*
(2) *Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ist auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit dem Grenzwert $f(x)$.*

Beweis. Sei (1) erfüllt und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D, die gegen x konvergiert. Wir müssen zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

ist. Dazu sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen (1) gibt es ein $\delta > 0$ mit der angegebenen Abschätzungseigenschaft und wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x gibt es eine natürliche Zahl n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$d(x_n, x) \leq \delta$$

gilt. Nach der Wahl von δ ist dann

$$d(f(x_n), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 ,$$

so dass die Bildfolge gegen $f(x)$ konvergiert. Sei (2) erfüllt. Wir nehmen an, dass f nicht stetig ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für alle $\delta > 0$ Elemente $z \in D$ gibt, deren Abstand zu x maximal gleich δ ist, deren Wert $f(z)$ unter der Abbildung aber zu $f(x)$ einen Abstand besitzt, der größer als

ϵ ist. Dies gilt dann insbesondere für die Stammbrüche $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}_+$. D.h. für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_+$ gibt es ein $x_n \in D$ mit

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \text{ und mit } d(f(x_n), f(x)) > \epsilon\,.$$

Diese so konstruierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x, aber die Bildfolge konvergiert nicht gegen $f(x)$, da der Abstand der Bildfolgenglieder zu $f(x)$ zumindest ϵ ist. Dies ist ein Widerspruch zu (2). □

10.2. **Rechenregeln für stetige Funktionen.**

Lemma 10.5. *Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $E \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen und*

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Wenn f in $x \in D$ und g in $f(x)$ stetig sind, so ist auch die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ in x stetig.*
(2) *Wenn f und g stetig sind, so ist auch $g \circ f$ stetig.*

Beweis. Die Aussage (1) ergibt sich direkt aus der Folgencharakterisierung der Stetigkeit. Daraus folgt auch (2). □

Lemma 10.6. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und seien*

$$f, g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen. Dann sind auch die Funktionen

$$f+g\colon D \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x)+g(x),$$

$$f-g\colon D \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x)-g(x),$$

$$f\cdot g\colon D \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x)\cdot g(x),$$

stetig. Für eine Teilmenge $U \subseteq D$, auf der g keine Nullstelle besitzt, ist auch die Funktion

$$f/g\colon U \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x)/g(x),$$

stetig.

Beweis. Dies ergibt sich aus der Folgencharakterisierung der Stetigkeit und Lemma 8.1. □

Korollar 10.7. *Polynomfunktionen*

$$P\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto P(x),$$

sind stetig.

Beweis. Aufgrund von Beispiel 10.2 und Lemma 10.6 sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Potenzen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^n,$$

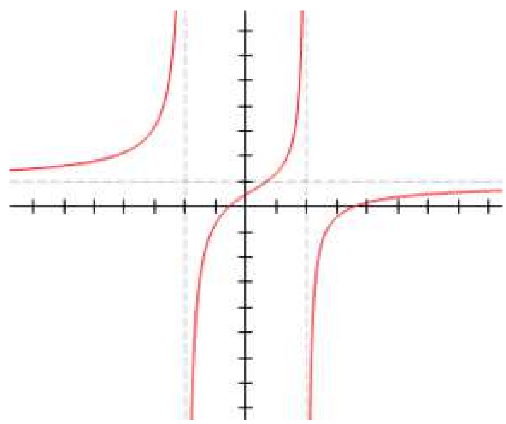
stetig. Daher sind auch für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Funktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto ax^n,$$

stetig und wiederum aufgrund von Lemma 10.6 sind auch alle Funktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

stetig. □



Rationale Funktionen sind auf ihrer Definitionsmenge stetig.

Korollar 10.8. *Es seien $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ Polynome und es sei*

$$U := \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}.$$

Dann ist die rationale Funktion

$$U \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)},$$

stetig.

Beweis. Dies folgt aus Korollar 10.7 und Lemma 10.6. □

10.3. **Grenzwerte von Funktionen.**

Funktionen sind häufig in bestimmten Punkten nicht definiert, beispielsweise, weil die verwendeten Funktionsterme nicht definiert sind. Es macht aber einen Unterschied, ob nur die gewählte Funktionsvorschrift in diesem Punkt nicht definiert ist, es aber eine sinnvolle (stetige) Fortsetzung gibt, oder ob die Funktion selbst prinzipiell nicht sinnvoll fortsetzbar ist (weil sie beispielsweise einen Pol oder ein chaotischeres Verhalten besitzt). Die folgende Begriffsbildung wird vor allem für die Definition der Differenzierbarkeit wichtig werden (besitzen die Differenzenquotienten einen sinnvollen Limes, der dann der Differentialquotient heißt).

Definition 10.9. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei $a \in \mathbb{R}$ ein Punkt. Es sei

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt $b \in \mathbb{R}$ *Grenzwert* (oder *Limes*) von f in a, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in T, die gegen a konvergiert, auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen b konvergiert. In diesem Fall schreibt man

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Dieser Begriff ist eigentlich nur dann sinnvoll, wenn es überhaupt Folgen in T gibt, die gegen a konvergieren. Eine typische Situation ist die folgende: Es sei I ein Intervall, $a \in I$ sei ein Punkt darin und es sei $T = I \setminus \{a\}$. Die Funktion sei auf T, aber nicht im Punkt a definiert, und es geht um die Frage, inwiefern man f zu einer sinnvollen Funktion $\tilde{f}$ auf ganz I fortsetzen kann. Dabei soll $\tilde{f}(a)$ durch f bestimmt sein.

Lemma 10.10. *Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei $a \in \mathbb{R}$ ein Punkt. Es seien $f\colon T \to \mathbb{R}$ und $g\colon T \to \mathbb{R}$ Funktionen derart, dass die Grenzwerte $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to a} g(x)$ existieren. Dann gelten folgende Beziehungen.*

(1) *Die Summe $f+g$ besitzt einen Grenzwert in a, und zwar ist*
$$\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\,.$$
(2) *Das Produkt $f \cdot g$ besitzt einen Grenzwert in a, und zwar ist*
$$\lim_{x\to a} (f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)\,.$$
(3) *Es sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in T$ und $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$. Dann besitzt der Quotient f/g einen Grenzwert in a, und zwar ist*
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\,.$$

Beweis. Dies ergibt sich direkt aus Lemma 8.1. □

Lemma 10.11. *Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei $a \in \mathbb{R}$ ein Punkt. Es sei $f\colon T \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $b \in \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *Es ist*
$$\lim_{x\to a} f(x) = b\,.$$
(2) *Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x \in T$ mit $d(x,a) \leq \delta$ die Abschätzung $d(f(x),b) \leq \epsilon$ gilt.*

Beweis. Siehe Aufgabe 10.24. □

Für eine stetige Funktion $f\colon T \to \mathbb{R}$ folgt daraus, dass sie sich zu einer stetigen Funktion $\tilde{f}\colon T \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ (durch $\tilde{f}(a) = b$) genau dann fortsetzen lässt, wenn der Limes von f in a gleich b ist.

10. Arbeitsblatt

10.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 10.1. Zeige, dass eine lineare Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto ax,$$

stetig ist.

Aufgabe 10.2. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$ ein Punkt. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) f ist stetig in a.
(2) Zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}_+$ derart, dass aus
$$|x-a| \leq \frac{1}{m}$$
die Abschätzung
$$|f(x)-f(a)| \leq \frac{1}{n}$$
folgt.
(3) Zu jedem $s \in \mathbb{N}$ gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ derart, dass aus
$$|x-a| \leq \frac{1}{10^r}$$
die Abschätzung
$$|f(x)-f(a)| \leq \frac{1}{10^s}$$
folgt.

Aufgabe 10.3. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto |x|\,,$$

stetig ist.

Aufgabe 10.4. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\, x \longmapsto \sqrt{x},$$

stetig ist.

Aufgabe 10.5. Bauer Ernst möchte ein quadratisches Melonenfeld anlegen. Das Feld sollte 100 Quadratmeter groß sein, er findet aber jede Größe zwischen 99 und 101 Quadratmetern noch akzeptabel. Welcher Fehler ist ungefähr für die Seitenlänge erlaubt, damit das entstehende Quadrat innerhalb der vorgegebenen Toleranz liegt?

Aufgabe 10.6.*

Es sei

$$f(x) = 2x^3 - 4x + 5.$$

Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die folgende Beziehung gilt: Wenn

$$|x - 3| \leq \frac{1}{800},$$

dann ist

$$|f(x) - f(3)| \leq \frac{1}{10}.$$

Aufgabe 10.7. Bestimme für die Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 6$$

im Punkt $a = 1$ für $\epsilon = \frac{1}{10}$ ein explizites $\delta > 0$ derart, dass aus

$$d(x, a) \leq \delta$$

die Abschätzung

$$d(f(x), f(a)) \leq \epsilon$$

folgt.

Aufgabe 10.8. Sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $x \in T$ ein Punkt mit $f(x) > 0$. Zeige, dass dann auch $f(y) > 0$ für alle $y \in T$ aus einem nichtleeren offenen Intervall $]x - \delta, x + \delta[$ gilt.

Aufgabe 10.9.**
Es sei $a \in \mathbb{R}$ und seien
$$f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
stetige Funktionen mit
$$f(a) > g(a).$$
Zeige, dass es ein $\delta > 0$ derart gibt, dass
$$f(x) > g(x)$$
für alle $x \in [a - \delta, a + \delta]$ gilt.

Aufgabe 10.10.**
Es sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Die Funktion f ist durch ihre Werte auf $\mathbb{Q}$ eindeutig festgelegt.
(2) Der Funktionswert $f(a)$ ist durch die Funktionswerte $f(x)$, $x \neq a$, festgelegt.
(3) Wenn für alle $x < a$ die Abschätzung
$$f(x) \leq c$$
gilt, so gilt auch
$$f(a) \leq c.$$

Aufgabe 10.11. Es seien $a < b < c$ reelle Zahlen und es seien
$$g \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
und
$$h \colon [b, c] \longrightarrow \mathbb{R}$$
stetige Funktionen mit $g(b) = h(b)$. Zeige, dass dann die Funktion
$$f \colon [a, c] \longrightarrow \mathbb{R}$$
mit
$$f(t) = g(t) \text{ für } t \leq b \text{ und } f(t) = h(t) \text{ für } t > b$$
ebenfalls stetig ist.

Aufgabe 10.12. Es sei
$$f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine stetige Funktion. Zeige, dass es eine stetige Fortsetzung
$$\tilde{f} \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
von f gibt.

Aufgabe 10.13. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine endliche Teilmenge und

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass f stetig ist.

Aufgabe 10.14. Zeige, dass es eine stetige Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart gibt, dass f auf jedem Intervall der Form $[0, \delta]$ mit $\delta > 0$ sowohl positive als auch negative Werte annimmt.

Ist eine solche Funktion „zeichenbar"? Siehe auch Aufgabe 16.23.

Aufgabe 10.15. Berechne den Grenzwert der Folge

$$x_n = 5\left(\frac{2n+1}{n}\right)^3 - 4\left(\frac{2n+1}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{2n+1}{n}\right) - 3$$

für $n \to \infty$.

Aufgabe 10.16.*

Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

nur im Nullpunkt stetig ist.

Aufgabe 10.17. Bestimme den Grenzwert der Folge

$$x_n = \sqrt{\frac{7n^2 - 4}{3n^2 - 5n + 2}},\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Aufgabe 10.18. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv durch $x_0 = 1$ und

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}$$

definiert. Zeige, dass diese Folge konvergiert und berechne den Grenzwert.

Aufgabe 10.19. Beweise direkt die Rechenregeln aus Lemma 10.6 (ohne Bezug auf das Folgenkriterium).

Aufgabe 10.20. Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{2x^7 - 3x\,|6x^3 - 11|}{|3x-5| + |4x^3 - 5x + 1|},$$

stetig ist.

Aufgabe 10.21. Man gebe ein Beispiel für eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und eine absolut konvergente reelle Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0$ derart, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f(a_k)$ nicht konvergiert.

Aufgabe 10.22.*

Es sei $a \in \mathbb{R}$ und seien $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Dabei seien g und h stetig im Punkt a und es gelte $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass auch f in a stetig ist.

Aufgabe 10.23. Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{x-1}{x^2-1}$$

im Punkt $a = 1$.

Aufgabe 10.24. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei $a \in \mathbb{R}$ ein Punkt. Es sei $f\colon T \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $b \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Es ist
$$\lim_{x \to a} f(x) = b\,.$$
(2) Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x \in T$ mit $d(x,a) \leq \delta$ die Abschätzung $d(f(x), b) \leq \epsilon$ gilt.

Aufgabe 10.25. Es sei

$$T = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

die Menge der Stammbrüche und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Es sei $b \in \mathbb{R}$ und $D = T \cup \{0\}$. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) Die Folge konvergiert gegen b.
(2) Die Funktion
$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$
mit
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = x_n$$
besitzt den Grenzwert $\lim_{x \to 0} f(x) = b$.

(3) Die Funktion

$$\tilde{f} \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\tilde{f}\left(\frac{1}{n}\right) = x_n$$

und $\tilde{f}(0) = b$ ist stetig.

10.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 10.26. (3 Punkte)

Bestimme für die Funktion

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 2$$

im Punkt $a = 3$ für $\epsilon = \frac{1}{100}$ ein explizites $\delta > 0$ derart, dass aus

$$d(x, a) \leq \delta$$

die Abschätzung

$$d(f(x), f(a)) \leq \epsilon$$

folgt.

Aufgabe 10.27. (2 Punkte)

Bestimme, für welche Punkte $x \in \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x \leq -1\,, \\ x^2 \text{ für } -1 < x < 2\,, \\ -2x + 7 \text{ für } x \geq 2\,, \end{cases}$$

definierte Funktion stetig ist.

Aufgabe 10.28. (3 Punkte)

Zeige, dass die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ falls } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 \text{ sonst}\,, \end{cases}$$

in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 10.29. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der durch

$$b_n = 2a_n^4 - 6a_n^3 + a_n^2 - 5a_n + 3\,,$$

definierten Folge, wobei

$$a_n = \frac{3n^3 - 5n^2 + 7}{4n^3 + 2n - 1}$$

ist.

Aufgabe 10.30. (4 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

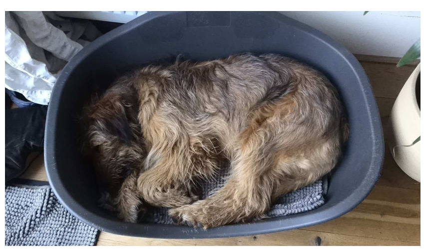
$$\frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{x^3 - x^2 + x + 3}$$

im Punkt $a = -1$.

11. Vorlesung - Zwischenwertsatz

Kunst gibt nicht das
Sichtbare wieder, sondern
Kunst macht sichtbar

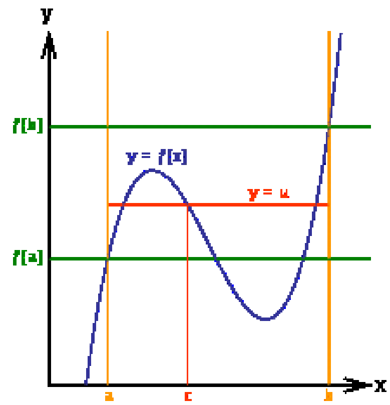
Paul Klee



So gerne Vorli als Vorlesungshund arbeitet, hinterher ist sie doch ganz schön ausgepowert von all der Energie, die sie zum Fließen gebracht hat. Da braucht sie erstmal ein Nickerchen um zu regenerieren.

11.1. **Der Zwischenwertsatz.**

Wir interessieren uns dafür, was unter einer stetigen Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit einem Intervall $[a, b]$ passiert. Die Werte $f(a)$ und $f(b)$ gehören natürlich zum Bild. Der Zwischenwertsatz besagt, dass alle Zahlen zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ebenfalls zum Bild des Intervalls gehören.



Satz 11.1. *Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es sei $u \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = u$.*

Beweis. Wir beschränken uns auf die Situation $f(a) \leq u \leq f(b)$ und zeigen die Existenz von einem solchen c mit Hilfe einer Intervallhalbierung. Dazu setzt man $a_0 := a$ und $b_0 := b$, betrachtet die Intervallmitte $c_0 := \frac{a_0+b_0}{2}$ und berechnet

$$f(c_0)\,.$$

Bei $f(c_0) \leq u$ setzt man

$$a_1 := c_0 \text{ und } b_1 := b_0$$

und bei $f(c_0) > u$ setzt man

$$a_1 := a_0 \text{ und } b_1 := c_0\,.$$

In jedem Fall hat das neue Intervall $[a_1, b_1]$ die halbe Länge des Ausgangsintervalls und liegt in diesem. Da es wieder die Voraussetzung $f(a_1) \leq u \leq f(b_1)$ erfüllt, können wir darauf das gleiche Verfahren anwenden und gelangen so rekursiv zu einer Intervallschachtelung. Sei c die durch diese Intervallschachtelung definierte reelle Zahl. Für die unteren Intervallgrenzen gilt $f(a_n) \leq u$ und das überträgt sich wegen der Stetigkeit nach dem Folgenkriterium auf den Grenzwert c, also $f(c) \leq u$. Für die oberen Intervallgrenzen gilt $f(b_n) \geq u$ und das überträgt sich ebenfalls auf c, also $f(c) \geq u$. Also ist $f(c) = u$. $\square$

Die in diesem Beweis beschriebene Methode ist konstruktiv und kann zu einem expliziten Verfahren ausgebaut werden.

Korollar 11.2. *Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) \leq 0$ und $f(b) \geq 0$. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x \leq b$ und mit $f(x) = 0$, d.h. f besitzt eine Nullstelle zwischen a und b.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 11.1. $\square$

Verfahren 11.3. Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) \leq 0$ und $f(b) \geq 0$. Dann besitzt die Funktion aufgrund des Zwischenwertsatzes eine Nullstelle in diesem Intervall. Diese kann man wie im Beweis des Zwischenwertsatzes beschrieben durch eine *Intervallhalbierung* $[a_n, b_n]$ finden. Dabei setzt man $a_0 = a$ und $b_0 = b$, die weiteren Intervallgrenzen werden induktiv derart definiert, dass $f(a_n) \leq 0$ und $f(b_n) \geq 0$ gilt. Man setzt $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ und berechnet $f(x_n)$. Bei $f(x_n) \leq 0$ setzt man

$$a_{n+1} := x_n \text{ und } b_{n+1} := b_n$$

und bei $f(x_n) > 0$ setzt man

$$a_{n+1} := a_n \text{ und } b_{n+1} := x_n\,.$$

In jedem Fall hat das neue Intervall $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ die halbe Länge des Vorgängerintervalls und es liegt eine Intervallhalbierung vor. Die durch die Intervallschachtelung definierte reelle Zahl x ist eine Nullstelle der Funktion.

Beispiel 11.4. Wir wollen eine Nullstelle des Polynoms

$$f(x) = x^3 - 4x + 2$$

mit Hilfe von Verfahren 11.3 approximieren. Es ist $f(1) = -1$ und $f(2) = 2$, es muss also nach Korollar 11.2 eine Nullstelle im Intervall $[1,2]$ geben. Wir berechnen den Funktionswert an der Intervallmitte $\frac{3}{2}$ und erhalten

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8} - 4 \cdot \frac{3}{2} + 2 = \frac{27-48+16}{8} = \frac{-5}{8} < 0.$$

Wir müssen also mit dem rechten Teilintervall $[\frac{3}{2}, 2]$ weitermachen. Dessen Intervallmitte ist $\frac{7}{4}$. Der Funktionswert an dieser Stelle ist

$$f\left(\frac{7}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^3 - 4 \cdot \frac{7}{4} + 2 = \frac{343}{64} - 5 = \frac{343-320}{64} = \frac{23}{64} > 0.$$

Jetzt müssen wir mit dem linken Teilintervall $[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}]$ weitermachen, dessen Mitte ist $\frac{13}{8}$. Der Funktionswert an dieser Stelle ist

$$\begin{aligned} f\left(\frac{13}{8}\right) &= \left(\frac{13}{8}\right)^3 - 4 \cdot \frac{13}{8} + 2 \\ &= \frac{2197}{512} - \frac{13}{2} + 2 \\ &= \frac{2197-3328+1024}{512} \\ &= \frac{-107}{512} < 0. \end{aligned}$$

Somit wissen wir, dass es eine Nullstelle zwischen $\frac{13}{8}$ und $\frac{7}{4} = \frac{14}{8}$ gibt.

Bemerkung 11.5. Die Existenz von beliebigen Wurzeln aus nichtnegativen reellen Zahlen folgt aus dem Zwischenwertsatz, da die stetige Funktion $X^k - c$ zu $c \geq 0$ sowohl negative als auch positive Werte annimmt und daher auch eine Nullstelle haben muss. Der Beweis zu Satz 8.13 beruht auf dem Verfahren des Zwischenwertsatzes, ohne dass explizit auf die Stetigkeit Bezug genommen wird.

Beispiel 11.6. Ein regelmäßiger quadratischer Tisch mit vier Beinen A, B, C, D steht auf einem unebenen, aber stufenfreien Untergrund. Im Moment steht er auf den Beinen A, B, C und das Bein D ragt in die Höhe (wenn man B, C in ihrer Position belässt und D auf den Boden drückt, würde A versinken). Wir behaupten, dass man den Tisch durch eine (maximal Viertel)-Drehung um die eigene Achse (sagen wir gegen den Uhrzeigersinn) in eine Position bringen kann, wo er auf allen vier Beinen steht (wobei der Tisch nicht unbedingt genau horizontal stehen muss). Dazu betrachten wir die Funktion, die einem Drehwinkel (zwischen 0 und 90 Grad) die Höhe des Beines D über dem Grund zuordnet, wenn die drei übrigen Beine auf dem Boden stehen (würden). Dabei kann diese Höhe auch negativ werden (was sich bei einem sandigen Untergrund praktisch realisieren lässt; sonst denke man sich dies „virtuell“). Bei 0 Grad ist die Höhe positiv. Bei 90 Grad erhält man eine Situation, die symmetrisch zur Ausgangssposition ist, wobei aber nach wie vor die Beine A, B, C auf dem Boden sein sollen. Wegen der in der Klammer formulierten Beobachtung muss die Höhe von D negativ sein. Die Funktion hat also auf dem Intervall sowohl positive als auch negative Werte. Da sie wegen der Stufenfreiheit stetig ist, besitzt sie nach dem Zwischenwertsatz auch eine Nullstelle.

11.2. **Stetige bijektive Funktionen und ihre Umkehrfunktion.**

Für eine bijektive stetige Funktion auf einem reellen Intervall ist die Umkehrabbildung wieder stetig. Dies ist keineswegs selbstverständlich.

Satz 11.7. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, streng wachsende Funktion. Dann ist das Bild

$$J := f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$$

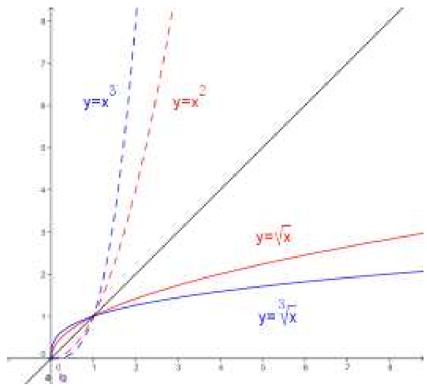
ebenfalls ein Intervall, und die Umkehrabbildung

$$f^{-1}\colon J \longrightarrow I$$

ist ebenfalls stetig.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

11.3. **Wurzelfunktionen.**



Satz 11.8. *Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Für n ungerade ist die Potenzfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^n,$$

stetig, streng wachsend, bijektiv und die Umkehrfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^{1/n},$$

ist streng wachsend und stetig. Für n gerade ist die Potenzfunktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^n,$$

stetig, streng wachsend, bijektiv und die Umkehrfunktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^{1/n},$$

ist streng wachsend und stetig.

Beweis. Die Stetigkeit ergibt sich aus Korollar 10.7. Das strenge Wachstum für $x \geq 0$ folgt aus der allgemeinen binomischen Formel. Für ungerades n folgt das strenge Wachstum für $x < 0$ aus der Beziehung $x^n = -(-x)^n$ und dem Verhalten im positiven Bereich. Daraus ergibt sich die Injektivität. Für $x \geq 1$ ist $x^n \geq x$, woraus die Unbeschränktheit des Bildes nach oben folgt. Bei n ungerade folgt ebenso die Unbeschränktheit des Bildes nach unten. Aufgrund des Zwischenwertsatzes ist das Bild daher $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Somit sind die angegebenen Potenzfunktionen surjektiv und die Umkehrfunktionen existieren. Die Stetigkeit der Umkehrfunktionen folgt aus Satz 11.7. $\square$

Beispiel 11.9. Die Schallgeschwindigkeit auf der Erde ist abhängig von der Temperatur. Wenn man mit der absoluten Temperatur T (gemessen in Kelvin) arbeitet, so gilt die Beziehung

$$v = 20,06\sqrt{T}\,,$$

wobei die Schallgeschwindigkeit in m/s gemessen wird. Für $T = 300K$ ist also die Schallgeschwindigkeit ungefähr gleich $347,5m/s$.

11.4. **Der Satz von Bolzano-Weierstraß.**

Karl Weierstraß (1815-1897)

Die folgende Aussage heißt *Satz von Bolzano-Weierstraß.*

Satz 11.10. *Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge von reellen Zahlen. Dann besitzt die Folge eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei durch

$$a_0 \, \leq \, x_n \, \leq \, b_0$$

beschränkt. Wir definieren zuerst induktiv eine Intervallhalbierung derart, dass in den Intervallen unendlich viele Folgenglieder liegen. Das Startintervall ist $I_0 := [a_0, b_0]$. Sei das k-te Intervall I_k bereits konstruiert. Wir betrachten die beiden Hälften

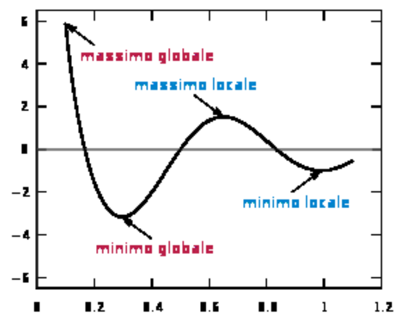
$$[a_k, \frac{a_k + b_k}{2}] \text{ und } [\frac{a_k + b_k}{2}, b_k] \, .$$

In mindestens einer der Hälften liegen unendlich viele Folgenglieder, und wir wählen als Intervall I_{k+1} eine Hälfte mit unendlich vielen Gliedern. Da sich bei diesem Verfahren die Intervalllängen mit jedem Schritt halbieren, liegt eine Intervallschachtelung vor. Als Teilfolge wählen wir nun ein beliebiges Element

$$x_{n_k} \, \in \, I_k$$

mit $n_k \, > \, n_{k-1}$. Dies ist möglich, da es in diesen Intervallen unendlich viele Folgenglieder gibt. Diese Teilfolge konvergiert nach Aufgabe 8.21 gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl x. $\square$

11.5. **Minima und Maxima.**



Definition 11.11. Es sei M eine Menge und

$$f\colon\, M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f in einem Punkt $x \in M$ das *Maximum* annimmt, wenn

$$f(x) \geq f(x') \text{ für alle } x' \in M \text{ gilt}\,,$$

und dass f das *Minimum* annimmt, wenn

$$f(x) \leq f(x') \text{ für alle } x' \in M \text{ gilt}\,.$$

Die gemeinsame Bezeichnung für ein Maximum oder ein Minimum ist *Extremum*. In der vorstehenden Definition spricht man auch von dem *globalen Maximum*, da darin Bezug auf sämtliche Elemente der Definitionsmenge genommen wird. Interessiert man sich nur für das Verhalten in einer offenen, eventuell kleinen Umgebung, so gelangt man zum Begriff des lokalen Maximums.

Definition 11.12. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei

$$f\colon\, D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f in einem Punkt $x \in D$ ein *lokales Maximum* besitzt, wenn es ein $\epsilon > 0$ derart gibt, dass für alle $x' \in D$ mit $|x - x'| \leq \epsilon$ die Abschätzung

$$f(x) \,\geq\, f(x')$$

gilt. Man sagt, dass f in $x \in D$ ein *lokales Minimum* besitzt, wenn es ein $\epsilon > 0$ derart gibt, dass für alle $x' \in D$ mit $|x - x'| \leq \epsilon$ die Abschätzung

$$f(x) \,\leq\, f(x')$$

gilt.

Wenn $f(x) > f(x')$ für alle $x' \neq x$ gilt, so spricht man von einem *isolierten Maximum*.

Satz 11.13. *Sei* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ *ein abgeschlossenes beschränktes Intervall und sei*

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $x \in [a,b]$ *mit*

$$f(x) \geq f(x') \text{ für alle } x' \in [a,b]\,.$$

D.h., dass die Funktion ihr Maximum (und ihr Minimum) annimmt.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Mit der Differentialrechnung werden wir bald schlagkräftige Methoden kennenlernen, um Minima und Maxima zu bestimmen.

11. Arbeitsblatt

11.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 11.1. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die genau zwei Werte annimmt.

Aufgabe 11.2. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, die nur endlich viele Werte annimmt. Zeige, dass f konstant ist.

Aufgabe 11.3.*

Gibt es eine reelle Zahl, die in ihrer dritten Potenz, vermindert um das Vierfache ihrer zweiten Potenz, gleich der Quadratwurzel von 42 ist?

Aufgabe 11.4. Finde für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^2 + x - 1,$$

eine Nullstelle im Intervall $[0,1]$ mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode mit einem Fehler von maximal $1/100$.

Aufgabe 11.5. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^3 + 4x^2 - x + 3.$$

Bestimme, ausgehend vom Intervall $[-5,-4]$, mit der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall der Länge $1/8$, in dem eine Nullstelle von f liegen muss.

Aufgabe 11.6.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^3 - 4x + 2.$$

Bestimme, ausgehend vom Intervall $[1, 2]$, mit der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall der Länge $1/8$, in dem eine Nullstelle von f liegen muss.

Aufgabe 11.7. Gegeben sei die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{(x-1)^3}.$$

Zeige mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass f jeden Wert $c \neq 0$ an mindestens zwei Stellen annimmt.

Aufgabe 11.8. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es sei x „nahe" an einer Nullstelle von f. Ist dann $f(x)$ nahe bei 0?

Aufgabe 11.9.*

Fridolin sagt:

„Irgendwas kann am Zwischenwertsatz nicht stimmen. Für die stetige Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \frac{1}{x},$$

gilt $f(-1) = -1$ und $f(1) = 1$. Nach dem Zwischenwertsatz müsste es also eine Nullstelle zwischen -1 und 1 geben, also eine Zahl $x \in [-1, 1]$ mit $f(x) = 0$. Es ist doch aber stets $\frac{1}{x} \neq 0$."

Wo liegt der Fehler in dieser Argumentation?

Aufgabe 11.10.*

Es sei $z \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) Es gibt ein Polynom $P \in \mathbb{R}[X]$, $P \neq 0$, mit ganzzahligen Koeffizienten und mit $P(z) = 0$.
(2) Es gibt ein Polynom $Q \in \mathbb{Q}[X]$, $Q \neq 0$, mit $Q(z) = 0$.
(3) Es gibt ein normiertes Polynom $R \in \mathbb{Q}[X]$ mit $R(z) = 0$.

Aufgabe 11.11.*

Es seien

$$f, g\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$ und $f(b) \leq g(b)$. Zeige, dass es einen Punkt $c \in [a, b]$ mit $f(c) = g(c)$ gibt.

Die nächsten Aufgaben verwenden den folgenden Begriff.

Es sei M eine Menge und

$$f\colon M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Ein Element $x \in M$ mit $f(x) = x$ heißt *Fixpunkt* der Abbildung.

Aufgabe 11.12. Bestimme die Fixpunkte der Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2.$$

Aufgabe 11.13. Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom vom Grad $d \geq 1$, $P \neq X$. Zeige, dass P maximal d Fixpunkte besitzt.

Aufgabe 11.14. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es gebe $x, y \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \leq x$$

und

$$f(y) \geq y.$$

Zeige, dass f einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 11.15. Zeige, dass das Bild eines abgeschlossenen Intervalls unter einer stetigen Funktion nicht abgeschlossen sein muss.

Aufgabe 11.16. Zeige, dass das Bild eines offenen Intervalls unter einer stetigen Funktion nicht offen sein muss.

Aufgabe 11.17. Zeige, dass das Bild eines beschränkten Intervalls unter einer stetigen Funktion nicht beschränkt sein muss.

Aufgabe 11.18. Es sei I ein reelles Intervall und

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R},$$

eine stetige, injektive Funktion. Zeige, dass f streng wachsend oder streng fallend ist.

Aufgabe 11.19. Zeige, dass durch
$$f(x) = \frac{x}{|x|+1}$$
eine stetige, streng wachsende, bijektive Abbildung
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$$
gegeben wird, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.

Aufgabe 11.20.*

(1) Skizziere die Graphen der Funktionen
$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x-1,$$
und
$$g\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{x},$$
(2) Bestimme die Schnittpunkte der beiden Graphen.

Aufgabe 11.21. Zeige, dass es zu jeder reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ eine stetige Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
derart gibt, dass a die einzige Nullstelle von f ist.

Aufgabe 11.22. Zeige, dass es zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine stetige Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
derart gibt, dass x die einzige Nullstelle von f ist und dass für jede rationale Zahl q auch $f(q)$ rational ist.

Aufgabe 11.23. Zeige, dass es zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine streng wachsende stetige Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
derart gibt, dass x die einzige Nullstelle von f ist und dass für jede rationale Zahl q auch $f(q)$ rational ist.

Aufgabe 11.24. Es sei
$$f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1[$$
eine stetige Funktion. Zeige, dass f nicht surjektiv ist.

Aufgabe 11.25. Man gebe ein Beispiel eines beschränkten Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ und einer stetigen Funktion

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass das Bild von f beschränkt ist, die Funktion aber kein Maximum annimmt.

Aufgabe 11.26. Es sei

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion auf einem reellen Intervall. Die Funktion habe in den Punkten $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, lokale Maxima. Zeige, dass die Funktion zwischen x_1 und x_2 mindestens ein lokales Minimum besitzt.

Aufgabe 11.27. Bestimme direkt, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Potenzfunktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^n,$$

ein Extremum im Nullpunkt besitzen.

11.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 11.28. (5 Punkte)

Finde für die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^3 - 3x + 1,$$

eine Nullstelle im Intervall $[0, 1]$ mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode mit einem Fehler von maximal $1/200$.

Aufgabe 11.29. (3 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass das Bild von f sowohl nach oben als auch nach unten unbeschränkt ist. Zeige, dass f surjektiv ist.

Aufgabe 11.30. (4 Punkte)

Zeige, dass ein reelles Polynom von ungeradem Grad mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

Aufgabe 11.31. (5 Punkte)

Man entwerfe ein Computer-Programm (Pseudocode), das eine reelle Nullstelle zu einem Polynom $dX^3 + cX^2 + bX + a$ vom Grad 3 bis auf eine vorgegebene Genauigkeit von $e > 0$ berechnet.

• Der Computer besitzt beliebig viele Speicher, die nichtnegative reelle Zahlen enthalten können.

• Er kann einen Speicherinhalt in einen weiteren Speicher schreiben.

• Er kann einen Speicherinhalt halbieren und in einen weiteren Speicher schreiben.

• Er kann die Summe von zwei Speicherinhalten ausrechnen und in einen weiteren Speicher schreiben.

• Er kann das Produkt von zwei Speicherinhalten ausrechnen und in einen weiteren Speicher schreiben.

• Er kann Speicherinhalte der Größe nach vergleichen und davon abhängig zu Programmzeilen springen.

• Er kann Speicherinhalte und vorgegebene Texte ausdrucken.

• Es gibt einen Haltebefehl.

Die Anfangskonfiguration sei

$$(a, b, c, d, e, 1, 0, 0, \ldots)$$

mit $a, b, c \geq 0$ und $d, e > 0$ (die Koeffizienten des Polynoms, die gewünschte Genauigkeit e und die 1 stehen also in den ersten Speichern). Das Programm soll die Intervallgrenzen für eine Nullstelle mit der gewünschten Genauigkeit in einem Antwortsatz ausdrucken und anschließend anhalten.

Achtung: Die Hauptschwierigkeit liegt darin, dass das Polynom auf $\mathbb{R}_+$ wegen der Bedingung an die Koeffizienten keine Nullstelle besitzt, es muss also eine Nullstelle im negativen Bereich gefunden werden. Die Speicher erlauben aber keine negativen Zahlen. Man muss also negative Zahlen durch nichtnegative Zahlen emulieren/simulieren.

Aufgabe 11.32. (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon\ [a, b] \longrightarrow [a, b]$$

eine stetige Funktion des Intervalls $[a, b]$ in sich. Zeige, dass f einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 11.33. (2 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$x_n = \sqrt[3]{\frac{27n^3 + 13n^2 + n}{8n^3 - 7n + 10}},\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Warum wurde diese Aufgabe nicht schon auf Blatt 10 gestellt?

Aufgabe 11.34. (2 Punkte)

Bestimme das Minimum der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2 + 3x - 5.$$

12. Vorlesung - Exponentialfunktion

Heute war es besonders anstrengend, Vorli muss noch mehr schlafen. Ein gesunder Schlaf ist für alle Beteiligten wichtig.

12.1. **Potenzreihen.**

Definition 12.1. Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen und x eine weitere reelle Zahl. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

die *Potenzreihe* in x zu den Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bei Potenzreihen ist es wichtig, dass man x variieren kann und dass die Potenzreihe in einem *Konvergenzintervall* eine Funktion in x darstellt. Jedes Polynom ist eine Potenzreihe, bei der allerdings alle Koeffizienten ab einem bestimmten Glied gleich 0 sind. In diesem Fall hat man kein Konvergenzproblem.

Eine wichtige Potenzreihe haben wir schon in der 9ten Vorlesung kennengelernt, nämlich die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (hier sind alle Koeffizienten gleich 1), die für $|x| < 1$ konvergiert und dort die Funktion $1/(1-x)$ darstellt. Eine weitere besonders wichtige Potenzreihe ist die *Exponentialreihe*, die für jede reelle Zahl konvergiert und zur *reellen Exponentialfunktion* führt. Ihre Umkehrfunktion ist der *natürliche Logarithmus*.

Das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe wird durch den folgenden Satz beschrieben.

Satz 12.2. *Es sei*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

eine Potenzreihe und es gebe ein $x_0 \neq 0$ derart, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ konvergiere. Dann gibt es ein positives R (wobei $R = \infty$ erlaubt ist) derart, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < R$ die Reihe absolut konvergiert. Auf einem solchen (offenen) Konvergenzintervall stellt die Potenzreihe $f(x)$ eine stetige Funktion dar.

Beweis. Der Beweis beruht auf einer systematischen Untersuchung für Potenzreihen und dem Limes von Funktionenfolgen. Wir werden ihn nicht durchführen. ☐

Wenn zwei Funktionen durch Potenzreihen gegeben sind, so wird ihre Summe einfach durch die (koeffizientenweise definierte) Summe der Potenzreihen beschrieben. Es ist keineswegs selbstverständlich, durch welche Potenzreihe ihr Produkt beschrieben werden kann. Die Antwort gibt das Cauchy-Produkt von Reihen.

Definition 12.3. Zu zwei Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ reeller Zahlen heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{ mit } c_k := \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

das *Cauchy-Produkt* der beiden Reihen.

Auch für die folgende Aussage geben wir keinen Beweis.

Lemma 12.4. *Es seien*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \textit{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

zwei absolut konvergente Reihen reeller Zahlen. Dann ist auch das Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ *absolut konvergent und für die Summe gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

Dies hat die Auswirkung, dass das Produkt von Potenzreihen durch eine Potenzreihe gegeben ist, deren Koeffizienten sich wie bei der Multiplikation von Polynomen ergeben, siehe Aufgabe 12.3.

12.2. **Die Exponentialreihe und die Exponentialfunktion.**

Wir besprechen ene weitere wichtige Potenzreihe, nämlich die Exponentialreihe, und die durch sie dargestellte Exponentialfunktion.

Definition 12.5. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

die *Exponentialreihe* in x.

Dies ist also die Reihe

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \ldots .$$

Satz 12.6. *Für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *ist die Exponentialreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

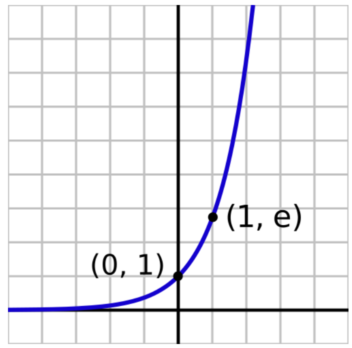
absolut konvergent.

Beweis. Für $x = 0$ ist die Aussage richtig. Andernfalls betrachten wir den Quotienten

$$\left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| = \frac{|x|}{n+1}.$$

Dies ist für $n \geq 2\,|x|$ kleiner als $1/2$. Aus dem Quotientenkriterium folgt daher die Konvergenz. □

Aufgrund dieser Eigenschaft können wir die reelle Exponentialfunktion definieren.



Der Graph der reellen Exponentialfunktion

Definition 12.7. Die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \exp x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

heißt (reelle) *Exponentialfunktion*.

Die folgende Aussage heißt die *Funktionalgleichung der Exponentialfunktion*.

Satz 12.8. *Für reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y.$$

Beweis. Das Cauchy-Produkt der beiden Exponentialreihen ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit $c_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \frac{y^{n-i}}{(n-i)!}$. Diese Reihe ist nach Lemma 12.4 absolut konvergent und der Grenzwert ist das Produkt der beiden Grenzwerte. Andererseits ist der n-te Summand der Exponentialreihe von $x+y$ gleich

$$\frac{(x+y)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = c_n,$$

so dass die beiden Seiten übereinstimmen. □

Korollar 12.9. *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \exp x,$$

besitzt folgende Eigenschaften.

(1) *Es ist* $\exp 0 = 1$.
(2) *Für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $\exp(-x) = (\exp x)^{-1}$. *Insbesondere ist* $\exp x \neq 0$.
(3) *Für ganze Zahlen* $n \in \mathbb{Z}$ *ist* $\exp n = (\exp 1)^n$.
(4) *Für jedes* x *ist* $\exp x \in \mathbb{R}_+$.
(5) *Für* $x > 0$ *ist* $\exp x > 1$ *und für* $x < 0$ *ist* $\exp x < 1$.
(6) *Die reelle Exponentialfunktion ist streng wachsend.*

Beweis. (1) folgt direkt aus der Definition. (2) folgt aus

$$\exp x \cdot \exp(-x) \,=\, \exp(x-x) \,=\, \exp 0 \,=\, 1$$

aufgrund von Satz 12.8. (3) folgt für $n \in \mathbb{N}$ aus Satz 12.8 durch Induktion, und daraus wegen (2) auch für negatives n. (4). Die Nichtnegativität ergibt sich aus

$$\exp x \,=\, \exp\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) \,=\, \exp\frac{x}{2}\cdot\exp\frac{x}{2} \,=\, \left(\exp\frac{x}{2}\right)^2 \,\geq\, 0.$$

(5). Für reelles x ist $\exp x \cdot \exp(-x) = 1$, so dass nach (4) ein Faktor ≥ 1 sein muss und der andere Faktor ≤ 1. Für $x > 0$ ist

$$\exp x \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \,=\, 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots \,>\, 1,$$

da ja hinten nur positive Zahlen hinzuaddiert werden. (6). Für reelle $y > x$ ist $y - x > 0$ und daher nach (5) $\exp(y-x) > 1$, also

$$\exp y \,=\, \exp(y-x+x) \,=\, \exp(y-x)\cdot\exp x \,>\, \exp x.$$

$\square$

Mit der Exponentialreihe definieren wir die *eulersche Zahl*.

Definition 12.10. Die reelle Zahl

$$e \,:=\, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

heißt *eulersche Zahl*.

Es ist also $e \,=\, \exp 1$. Diese Zahl hat den Wert

$$e \,=\, 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots \,\cong\, 2,71....$$

Bemerkung 12.11. Für die eulersche Zahl gilt

$$e \,=\, \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

so dass e auch als Grenzwert dieser Folge eingeführt werden kann. Die Konvergenz bei der Exponentialreihe ist aber deutlich schneller.

Statt $\exp x$ werden wir in Zukunft auch e^x schreiben. Diese Schreibweise ist für $x \in \mathbb{Z}$ mit der üblichen Potenzschreibweise im Sinne der vierten Vorlesung wegen Korollar 12.9 (3) verträglich. Für die Verträglichkeit mit der Wurzelschreibweise (bei rationalen Exponenten) siehe Bemerkung 12.17 und Aufgabe 12.19.

Satz 12.12. *Die reelle Exponentialfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \exp x,$$

ist stetig und stiftet eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ *und* $\mathbb{R}_+$.

Beweis. Die Stetigkeit folgt aus Satz 12.2, da die Exponentialfunktion ja über eine Potenzreihe definiert ist. Nach Korollar 12.9 (4) liegt das Bild in $\mathbb{R}_+$ und ist nach dem Zwischenwertsatz ein Intervall. Die Unbeschränktheit des Bildes folgt aus Korollar 12.9 (3), woraus wegen Korollar 12.9 (2) folgt, dass auch beliebig kleine positive reelle Zahlen zum Bild gehören. Daher ist das Bild gleich $\mathbb{R}_+$. Die Injektivität ergibt sich aus Korollar 12.9 (6) in Verbindung mit Aufgabe 5.36. □

12.3. **Logarithmen.**

Definition 12.13. Der *natürliche Logarithmus*

$$\ln\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \ln x,$$

ist als die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion definiert.

Satz 12.14. *Der natürliche Logarithmus*

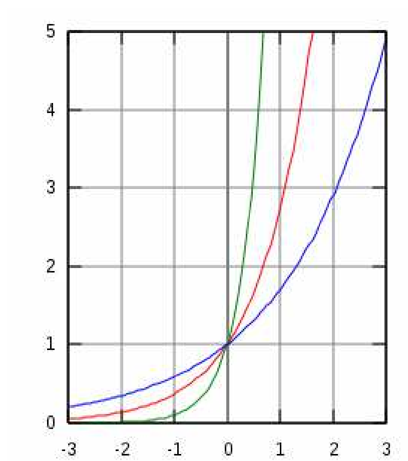
$$\ln\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \ln x,$$

ist eine stetige, streng wachsende Funktion, die eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}$ stiftet. Dabei gilt

$$\ln(x \cdot y) \,=\, \ln x + \ln y$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. Dies folgt aus Satz 12.12, Satz 11.7, Satz 12.8 und Korollar 12.9 (6). □



Die Exponentialfunktionen für verschiedene Basen

Definition 12.15. Zu einer positiven reellen Zahl $b > 0$ definiert man die *Exponentialfunktion zur Basis b* als

$$b^x \,:=\, \exp(x \ln b).$$

Satz 12.16. *Es sei b eine positive reelle Zahl.Dann besitzt die Exponentialfunktion*

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto b^x,$$

folgende Eigenschaften.

(1) *Es ist $b^{x+x'} = b^x \cdot b^{x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.*
(2) *Es ist $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$.*
(3) *Für $b > 1$ und $x > 0$ ist $b^x > 1$.*
(4) *Für $b < 1$ und $x > 0$ ist $b^x < 1$.*
(5) *Für $b > 1$ ist f streng wachsend.*
(6) *Für $b < 1$ ist f streng fallend.*
(7) *Es ist $(b^x)^{x'} = b^{x \cdot x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.*
(8) *Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 12.9. □

Bemerkung 12.17. Die Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$ zur Basis $a > 0$ kann man auch anders einführen. Für natürliche Zahlen $n \geq 0$ nimmt man das n-fache Produkt von a mit sich selbst, also a^n, als Definition. Für eine negative ganze Zahl x setzt man $a^x := (a^{-x})^{-1}$. Für eine positive rationale Zahl $x = r/s$ setzt man

$$a^x := \sqrt[s]{a^r},$$

wobei man natürlich die Unabhängigkeit von der gewählten Bruchdarstellung beweisen muss. Für eine negative rationale Zahl arbeitet man wieder mit Inversen. Für eine beliebige reelle Zahl x schließlich nimmt man eine Folge q_n von rationalen Zahlen, die gegen x konvergiert, und definiert

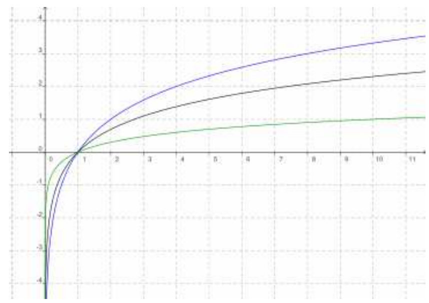
$$a^x := \lim_{n \to \infty} a^{q_n}.$$

Hierzu muss man zeigen, dass diese Limiten existieren und unabhängig von der gewählten rationalen Folge sind. Für den Übergang von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$ ist der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit entscheidend.

Definition 12.18. Zu einer positiven reellen Zahl $b > 0$, $b \neq 0$, wird der *Logarithmus zur Basis b* von $x \in \mathbb{R}_+$ durch

$$\log_b x := \frac{\ln x}{\ln b}$$

definiert.



Logarithmen zu verschiedenen Basen

Satz 12.19. *Die Logarithmen zur Basis b erfüllen die folgenden Rechenregeln.*

(1) *Es ist* $\log_b(b^x) = x$ *und* $b^{\log_b(y)} = y$, *das heißt der Logarithmus zur Basis b ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion zur Basis b.*
(2) *Es gilt* $\log_b(y \cdot z) = \log_b y + \log_b z$.
(3) *Es gilt* $\log_b y^u = u \cdot \log_b y$ *für* $u \in \mathbb{R}$.
(4) *Es gilt*
$$\log_a y = \log_a \left(b^{\log_b y}\right) = \log_b y \cdot \log_a b.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 12.27. □

12. Arbeitsblatt

12.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 12.1. Berechne die ersten fünf Glieder des Cauchy-Produkts der beiden konvergenten Reihen
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Aufgabe 12.2. Man mache sich klar, dass die Partialsummen des Cauchy-Produkts von zwei Reihen nicht das Produkt der Partialsummen der beiden Reihen sind.

Aufgabe 12.3. Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ zwei absolut konvergente Potenzreihen in $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass das Cauchy-Produkt der beiden Reihen durch
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ mit } c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$
gegeben ist.

Aufgabe 12.4. Sei $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$. Bestimme (in Abhängigkeit von x) die Summen der beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1} .$$

Aufgabe 12.5. Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe. Bestimme die Koeffizienten c_i zu den Potenzen x^0, x^1, x^2, x^3, x^4 in der dritten Potenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^3 .$$

Aufgabe 12.6.*

Wir betrachten das Polynom

$$P = 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3.$$

(1) Berechne die Werte von P an den Stellen $-2, -1, 0, 1, 2$.
(2) Skizziere den Graphen von P auf dem Intervall $[-2, 2]$. Gibt es einen Bezug zur Exponentialfunktion e^x?
(3) Bestimme eine Nullstelle von P innerhalb von $[-2, 2]$ mit einem Fehler von maximal $\frac{1}{4}$.

Aufgabe 12.7. Berechne von Hand die ersten vier Nachkommastellen im Zehnersystem von

$$\exp 1 .$$

Aufgabe 12.8. Zeige die folgenden Abschätzungen.

a)

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!},$$

b)

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Aufgabe 12.9. Es sei b eine positive reelle Zahl. Zeige, dass die Exponentialfunktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto b^x,$$

folgende Eigenschaften besitzt.

(1) Es ist $b^{x+x'} = b^x \cdot b^{x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.
(2) Es ist $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$.
(3) Für $b > 1$ und $x > 0$ ist $b^x > 1$.
(4) Für $b < 1$ und $x > 0$ ist $b^x < 1$.
(5) Für $b > 1$ ist f streng wachsend.
(6) Für $b < 1$ ist f streng fallend.
(7) Es ist $(b^x)^{x'} = b^{x \cdot x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.
(8) Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.

Aufgabe 12.10.*

Es sei b eine positive reelle Zahl. Zeige, dass die Exponentialfunktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto b^x,$$

stetig ist.

Aufgabe 12.11. Es sei b eine positive reelle Zahl. Zeige, dass die Exponentialfunktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto b^x,$$

bei $b > 1$ streng wachsend und bei $b < 1$ streng fallend ist.

Aufgabe 12.12.*

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion $\neq 0$, die die Gleichung

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeige, dass f eine Exponentialfunktion ist, d.h. dass es ein $b > 0$ mit $f(x) = b^x$ gibt.

Aufgabe 12.13. Zeige, dass eine Exponentialfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto b^x,$$

aus einem arithmetischen Mittel ein geometrisches Mittel macht.

Aufgabe 12.14.*

Es sei

$$f(x) = a^x$$

eine Exponentialfunktion mit $a \neq 1$. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ definiert die Gerade durch die beiden Punkte $(x, f(x))$ und $(x+1, f(x+1))$ einen Schnittpunkt mit der x-Achse, den wir mit $s(x)$ bezeichnen. Zeige

$$s(x+1) = s(x) + 1.$$

Skizziere die Situation.

Aufgabe 12.15. Man gebe ein Beispiel einer stetigen, streng wachsenden Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

mit $f(0) = 1$ und mit $f(x+1) = 2f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, die von 2^x verschieden ist.

Aufgabe 12.16.*

Zeige, dass die Hintereinanderschaltung von zwei Exponentialfunktionen keine Exponentialfunktion sein muss.

Aufgabe 12.17.*

Es sei $u \in \mathbb{R}$ fixiert. Zeige, dass die Potenzfunktion

$$f \colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^u,$$

stetig ist.

Aufgabe 12.18. Es sei b eine positive reelle Zahl und $q = n/m \in \mathbb{Q}$. Zeige, dass die durch

$$b^q := (b^n)^{1/m}$$

definierte Zahl unabhängig von der Bruchdarstellung für q ist.

Aufgabe 12.19. Es sei $a > 0$ und $q = \frac{r}{s}$ eine rationale Zahl. Zeige, dass die Schreibweise

$$a^q = \sqrt[s]{a^r}$$

mit der Definition

$$a^q = \exp(q \ln a)$$

verträglich ist.

Aufgabe 12.20.*

Berechne

$$2^{\frac{9}{10}}$$

bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10}$.

Aufgabe 12.21. Berechne

$$5^{\frac{3}{7}}$$

bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10}$.

Aufgabe 12.22.*

Vergleiche die beiden Zahlen

$$\sqrt{3}^{-\frac{9}{4}} \text{ und } \sqrt{3}^{-\sqrt{5}}.$$

Aufgabe 12.23. Vergleiche die drei Zahlen

$$2^{\sqrt{3}},\ 4,\ 3^{\sqrt{2}}.$$

Aufgabe 12.24. Seien $b, d > 0$. Zeige

$$\lim_{b \to 0} b^d = 0.$$

Aufgabe 12.25. Sei $b > 0$. Zeige

$$\lim_{d \to 0} b^d = 1.$$

Aufgabe 12.26.*

Entscheide, ob die reelle Folge

$$x_n = \frac{5n^{\frac{3}{2}} + 4n^{\frac{4}{3}} + n}{7n^{\frac{5}{3}} + 6n^{\frac{3}{2}}}$$

(mit $n \geq 1$) in $\mathbb{R}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 12.27. Zeige, dass die Logarithmen zur Basis b die folgenden Rechenregeln erfüllen.

(1) Es ist $\log_b(b^x) = x$ und $b^{\log_b(y)} = y$, das heißt der Logarithmus zur Basis b ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion zur Basis b.
(2) Es gilt $\log_b(y \cdot z) = \log_b y + \log_b z$
(3) Es gilt $\log_b y^u = u \cdot \log_b y$ für $u \in \mathbb{R}$.
(4) Es gilt
$$\log_a y = \log_a\left(b^{\log_b y}\right) = \log_b y \cdot \log_a b.$$

12.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 12.28. (4 Punkte)

Berechne e^3 mit Hilfe der Exponentialreihe bis auf einen Fehler von $\frac{1}{1000}$.

Die Restgliedabschätzung aus Aufgabe 12.31 darf verwendet werden.

Aufgabe 12.29. (3 Punkte)

Berechne die Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_5$ der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, die das Cauchy-Produkt der geometrischen Reihe mit der Exponentialreihe ist.

Aufgabe 12.30. (4 Punkte)

Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe. Bestimme die Koeffizienten zu den Potenzen $x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5$ in der vierten Potenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^4 .$$

Aufgabe 12.31. (5 Punkte)

Für $N \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ sei

$$R_{N+1}(x) = \exp x - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

das *Restglied* der Exponentialreihe. Zeige, dass für $|x| \leq 1 + \frac{1}{2}N$ die *Restgliedabschätzung*

$$|R_{N+1}(x)| \leq \frac{2}{(N+1)!} |x|^{N+1}$$

gilt.

Aufgabe 12.32. (4 Punkte)

Zeige, dass die durch die Exponentialreihe definierte reelle Exponentialfunktion die Eigenschaft besitzt, dass für jedes $d \in \mathbb{N}$ die Folge

$$\left(\frac{\exp n}{n^d} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.[29]

[29]Man sagt daher, dass die Exponentialfunktion *schneller wächst* als jede Polynomfunktion.

Aufgabe 12.33. (2 Punkte)

Zu Beginn des Studiums ist Professor Knopfloch doppelt so schlau wie die Studenten. Innerhalb eines Studienjahres werden die Studenten um 10% schlauer. Leider baut der Professor ab und verliert pro Jahr 10% seiner Schlauheit.

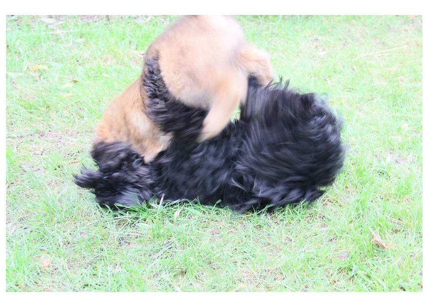
(1) Zeige, dass nach drei Studienjahren der Professor immer noch schlauer als die Studenten ist.
(2) Zeige, dass nach vier Studienjahren die Studenten den Professor an Schlauheit übertreffen.

Aufgabe 12.34. (2 Punkte)

Eine Währungsgemeinschaft habe eine Inflation von jährlich 2%. Nach welchem Zeitraum (in Jahren und Tagen) haben sich die Preise verdoppelt?

13. Vorlesung - Trigonometrie

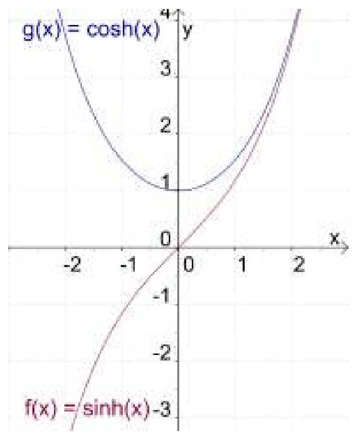
> If you don't know how to fix it, please stop breaking it
>
> Severn Suzuki



In ihrer Freizeit tobt Vorli gerne mit dem Nachbarshund Jurek rum. Der arbeitet auch als Vorlesungshund, allerdings bei den Juristen. Vorli stellt sich das unglaublich langweilig vor.

In dieser Vorlesung führen wir weitere wichtige Funktionen über ihre Potenzreihen ein.

13.1. **Die Hyperbelfunktionen.**



Der Verlauf der Hyperbelfunktionen

Definition 13.1. Die für $x \in \mathbb{R}$ durch

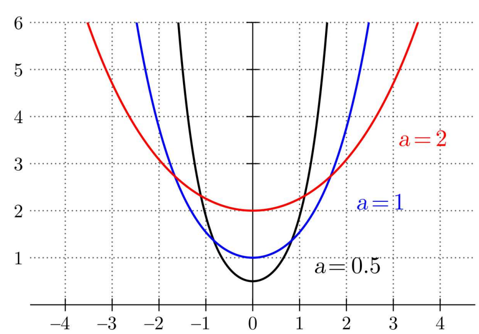
$$\sinh x := \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

definierte Funktion heißt *Sinus hyperbolicus*.

Definition 13.2. Die für $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\cosh x := \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

definierte Funktion heißt *Kosinus hyperbolicus*.



Der Kosinus hyperbolicus $a \cosh x/a$ (mit Parameter a) beschreibt eine sogenannte *Kettenlinie*, das ist diejenige Kurve, die ein durchhängendes Seil einnimmt.

Lemma 13.3. *Die Funktionen Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus besitzen die folgenden Eigenschaften.*

(1)

$$\cosh x + \sinh x = e^x$$

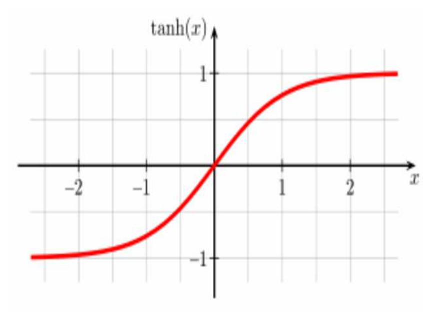
(2)
$$\cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

(3)
$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1\,.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 13.1. □

Lemma 13.4. *Die Funktion Sinus hyperbolicus ist streng wachsend und die Funktion Kosinus hyperbolicus ist auf* $\mathbb{R}_{\leq 0}$ *streng fallend und auf* $\mathbb{R}_{\geq 0}$ *streng wachsend.*

Beweis. Siehe Aufgabe 13.3 und Aufgabe 13.29. □



Definition 13.5. Die durch
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$
definierte Funktion heißt *Tangens hyperbolicus*.

Definition 13.6. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit
$$f(x) = f(-x)$$
gilt.

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit
$$f(x) = -f(-x)$$
gilt.

Der Kosinus hyperbolicus ist eine gerade und der Sinus hyperbolicus ist eine ungerade Funktion.

13.2. **Der Kreis und die trigonometrischen Funktionen.**

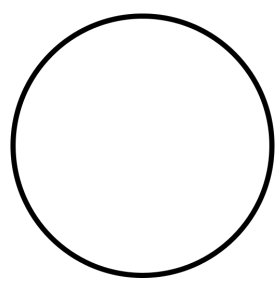
Im $\mathbb{R}^2$ ist der Abstand zwischen zwei Punkten $P, Q \in \mathbb{R}^2$ eine positive reelle Zahl (bzw. gleich 0, falls die Punkte zusammenfallen). Wenn die beiden Punkte in Koordinaten gegeben sind, also $P = (x_1, y_1)$ und $Q = (x_2, y_2)$, so ist der Abstand gleich

$$d(P, Q) \, = \, \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Diese Gleichung beruht auf dem Satz des Pythagoras. Speziell besitzt jeder Punkt $P = (x, y)$ zum Nullpunkt $(0, 0)$ den Abstand

$$\sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Weil die Koordinaten reelle Zahlen sind, sind auch die Abstände reelle Zahlen. Wenn ein Punkt M und eine positive reelle Zahl r fixiert sind, so nennt man die Menge aller Punkte der Ebene, die zu M den Abstand r besitzen, den Kreis um M mit Radius r. In Koordinaten sieht die Definition folgendermaßen aus.



Definition 13.7. Es sei $M = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}_+$. Dann nennt man die Menge

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\right\}$$

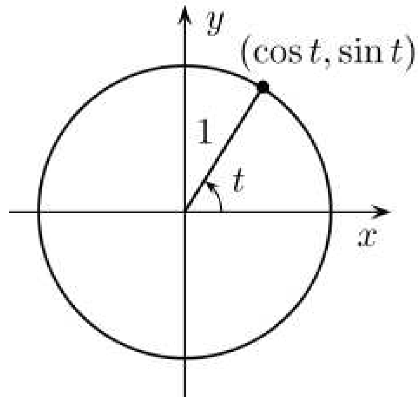
den *Kreis* (oder die *Kreislinie* oder die 1-*Sphäre*) mit dem *Mittelpunkt* M und dem *Radius* r.

Von Kreislinie spricht man, um zu betonen, dass man nicht den Vollkreis (die Kreisscheibe) meint, sondern nur den Rand. Alle Kreise sind wesensgleich, es kommt für die wichtigsten Eigenschaften des Kreises nicht auf den Mittelpunkt und nicht auf den Radius an. Von daher ist der Einheitskreis der einfachste Kreis, der alle Kreise repräsentiert.

Definition 13.8. Die Menge

$$E \, := \, \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$

heißt der *Einheitskreis*.



Der Einheitskreis besitzt dem Radius 1 und den Mittelpunkt $0 = (0,0)$. Die trigonometrischen Funktionen *Sinus* und *Kosinus* werden in einem naiven Zugang am Einheitskreis definiert. Ein „Winkel“ α am Nullpunkt (und von der positiven „x-Achse“ aus „gegen den Uhrzeigersinn“ gemessen.) definiert eine vom Nullpunkt ausgehende „Halbgerade“ (oder „Strahl“). Da diese einen eindeutigen Durchstoßungspunkt $P(\alpha) = (x, y)$ mit der Einheitskreislinie besitzt, definiert der Winkel auch einen eindeutigen Punkt auf dem Einheitskreis. Dessen Koordinaten sind nach Definition gleich

$$P(\alpha) \,=\, (\cos\alpha, \sin\alpha),$$

d.h. die x-Koordinate wird durch den Kosinus und die y-Koordinate wird durch den Sinus angegeben. Dadurch sind einige wichtige Eigenschaften direkt klar:

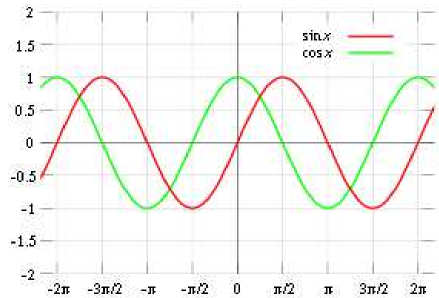
(1) Es gilt
$$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 \,=\, 1.$$
(2) Es ist $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$.
(3) Wenn der Winkel β eine Vierteldrehung bezeichnet, so ist $\cos\beta = 0$ und $\sin\beta = 1$.
(4) Es ist $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ und $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$. Dabei bezeichnet $-\alpha$ den durch den gegenläufigen Strahl definierten Winkel.[30]
(5) Die Werte von Sinus und Kosinus wiederholen sich nach einer Volldrehung.

Diese Definition ist zwar intuitiv klar, sie ist aber in verschiedener Hinsicht unbefriedigend.

(1) Es ist nicht klar, wie der Winkel zu messen ist.
(2) Es gibt keinen analytischen „berechenbaren“ Ausdruck, wie zu einem gegebenen Winkel die Werte von Kosinus und Sinus berechnet werden müssen.

[30]Dieser Winkel ist $\alpha + \pi$ im Bogenmaß.

(3) Damit fehlt die Grundlage, um Gesetzmäßigkeiten dieser Funktionen zu beweisen.



Die Graphen von Kosinus und Sinus. Der qualitative Verlauf ist von der naiven Definition her klar. Mit der unten folgenden analytischen Definition über Reihen kann man die Funktionswerte beliebig genau ausrechnen. Für viele wichtige qualitative Eigenschaften wie die Periodizität mit der Periodenlänge 2π muss man aber die analytische Definition genauer studieren.

Mit diesen Defiziten hängt auch zusammen, dass wir noch keine präzise Definition für die Kreiszahl π haben. Diese ist bekanntlich gleich dem Kreisinhalt des Einheitskreises und gleich der Hälfte des Kreisumfanges. Doch sind sowohl der „Flächeninhalt ebener berandeter Gebiete“ als auch die „Länge von gebogenen Kurven“ problematische Begriffe. Von daher ist es in der höheren Mathematik sinnvoll, die Kreisfunktionen über ihre Potenzreihen einzuführen und nach und nach zu beweisen, dass sie die gewünschten Eigenschaften erfüllen. Sodann kann man auch die Kreiszahl π über Eigenschaften dieser Funktionen einführen und letztlich den Winkel als Länge des zugehörigen Kreisbogens einführen, nachdem diese Länge exakt definiert wird (was wir erst im zweiten Semester tun).

Wir besprechen einige wichtige Anwendungen der trigonometrischen Funktionen wie Polarkoordinaten, wobei wir die Winkel naiv verstehen und die trigonometrischen Funktionen als geometrisch definiert betrachten.

13.3. **Polar- und Zylinderkoordinaten.**

Beispiel 13.9. Ein Winkel α und eine positive reelle Zahl r definieren einen eindeutigen Punkt

$$P = (x, y) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha) = r(\cos\alpha, \sin\alpha)$$

in der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$. Dabei bedeutet r den Abstand des Punktes P vom Nullpunkt $(0, 0)$ und $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ bedeutet den Durchstoßungspunkt der durch P definierten Halbgeraden mit dem Einheitskreis. Jeder Punkt $P = (x, y) \neq 0$ besitzt eine eindeutige Darstellung mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und mit einem Winkel α, der je nach dem gewählten Winkelmaß geeignet zu wählen ist, also beispielsweise aus $[0, 2\pi[$ ist (der Nullpunkt wird durch $r = 0$ und einen beliebigen Winkel repräsentiert). Die Komponenten (r, α) heißen die *Polarkoordinaten* von P.

Beispiel 13.10. Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, kann man eindeutig schreiben als

$$z = r(\cos\alpha, \sin\alpha) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha) = r\cos\alpha + (r\sin\alpha)\mathrm{i}$$

mit einer eindeutig bestimmten positiven reellen Zahl r, nämlich dem Abstand von z zum Nullpunkt (also $r = |z|$) und einem eindeutig bestimmten Winkel α zwischen 0 (einschließlich) und 360 Grad (ausschließlich), der ausgehend von der positiven reellen Achse gegen den Uhrzeigersinn gemessen wird. Man spricht von *Polarkoordinaten* für die komplexen Zahlen.

Polarkoordinaten der reellen Zahlenebene und für komplexe Zahlen unterscheiden sich nicht. Allerdings erlauben Polarkoordinaten eine Neuinterpretation der Multiplikation von komplexen Zahlen: Wegen

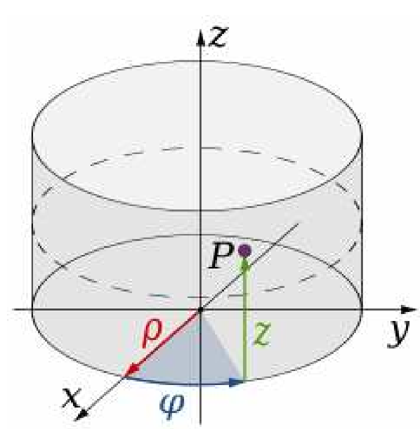
$$\begin{aligned} & (r\cos\alpha + \mathrm{i}r\sin\alpha)\cdot(s\cos\beta + \mathrm{i}s\sin\beta) \\ = \; & rs(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \mathrm{i}rs(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) \\ = \; & rs(\cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)) \end{aligned}$$

(dabei wurden im letzten Schritt die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus verwendet) multipliziert man zwei komplexe Zahlen, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Winkel addiert.

Diese Neuinterpretation der Multiplikation von komplexen Zahlen führt auch zu einem neuen Verständnis der Wurzeln aus komplexen Zahlen, die es aufgrund des Fundamentalsatzes der Algebra geben muss. Wenn $z = r\cos\alpha + r\mathrm{i}\sin\alpha$ ist, so ergibt sich, dass

$$w = \sqrt[n]{r}\cos\frac{\alpha}{n} + \sqrt[n]{r}\mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{n}$$

eine n-te Wurzel von z ist. D.h. man muss für den Betrag der komplexen Zahl die reelle n-te Wurzel nehmen und den Winkel durch n teilen.



Beispiel 13.11. Eine räumliche Variante von Beispiel 13.9 wird durch *Zylinderkoordinaten* gegeben. Ein Tripel $(r, \alpha, z) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ wird dabei auf die kartesischen Koordinaten

$$(x, y, z) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha, z)$$

abgebildet.

13.4. **Die trigonometrischen Reihen.**

Wir besprechen nun den analytischen Zugang zu den trigonometrischen Funktionen.

Definition 13.12. Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

die *Kosinusreihe* und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

die *Sinusreihe* zu x.

Durch Vergleich mit der Exponentialreihe ergibt sich sofort, dass diese beiden Reihen für jedes x absolut konvergieren. Die zugehörigen Funktionen

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \text{ und } \sin x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

heißen *Sinus* und *Kosinus*. Beide Funktionen stehen unmittelbar in Zusammenhang mit der Exponentialfunktion, wobei man allerdings die komplexen Zahlen braucht, um diesen Zusammenhang zu erkennen. Der Hintergrund ist, dass man in Potenzreihen stets auch komplexe Zahlen einsetzen kann (der Konvergenzbereich ist dann nicht ein reelles Konvergenzintervall, sondern eine Kreisscheibe). Für die Exponentialreihe und $z = \mathrm{i}x$ (wobei x reell oder komplex sein kann) ist (wir verwenden Rechenregeln für Potenzreihen, die wir für komplexe Zahlen nicht behandelt haben)

$$\begin{aligned}
\exp(\mathrm{i}x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0,\, k \text{ gerade}}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^k}{k!} + \sum_{k=0,\, k \text{ ungerade}}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^k}{k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{i}(-1)^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

$$= \quad \cos x + \mathrm{i} \sin x.$$

Mit dieser Beziehung zwischen komplexer Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen (die die *eulersche Formel* heißt) lassen sich viele Eigenschaften der letzteren besonders einfach beweisen. Prominente Spezialfälle dieser Beziehung sind

$$e^{\pi \mathrm{i}} = -1$$

und

$$e^{2\pi \mathrm{i}} = 1.$$

Aufgrund von Satz 12.2 sind Sinus und Kosinus stetige Funktionen. Weitere wichtige Eigenschaften werden in der folgenden Aussage zusammengefasst.

Satz 13.13. *Die Funktionen*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \cos x,$$

und

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sin x,$$

besitzen für $x, y \in \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften.

(1) *Es ist* $\cos 0 = 1$ *und* $\sin 0 = 0$.
(2) *Es ist* $\cos(-x) = \cos x$ *und* $\sin(-x) = -\sin x$.
(3) *Es gelten die Additionstheoreme*

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y\,.$$

und

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y\,.$$

(4) *Es gilt*

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1\,.$$

Beweis. (1) und (2) folgen direkt aus der Definition der Reihen. (3). Der $2n$-te Summand (also derjenige Term, der sich auf die Potenz mit Exponenten $2n$ bezieht) in der Kosinusreihe (die Koeffizienten zu x^i, i ungerade, sind 0) von $x+y$ ist

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n (x+y)^{2n}}{(2n)!} &= \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} x^i y^{2n-i} \\ &= (-1)^n \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{i!(2n-i)!} x^i y^{2n-i} \\ &= (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \frac{x^{2j} y^{2n-2j}}{(2j)!(2n-2j)!} \\ &\quad + (-1)^n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{2j+1} y^{2n-2j-1}}{(2j+1)!(2n-2j-1)!}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzen Schritt die Indexmenge in gerade und ungerade Zahlen aufgeteilt haben.

Der $2n$-te Summand im Cauchy-Produkt von $\cos x$ und $\cos y$ ist

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j(-1)^{n-j}}{(2j)!(2(n-j))!} x^{2j} y^{2(n-j)} \quad = \quad (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \frac{x^{2j} y^{2(n-j)}}{(2j)!(2(n-j))!}$$

und der $2n$-te Summand im Cauchy-Produkt von $\sin x$ und $\sin y$ ist

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j(-1)^{n-1-j}}{(2j+1)!(2(n-1-j)+1)!} x^{2j+1} y^{2(n-j)+1} \\ = \quad & (-1)^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{2j+1} y^{2(n-1-j)+1}}{(2j+1)!(2(n-1-j)+1)!} . \end{aligned}$$

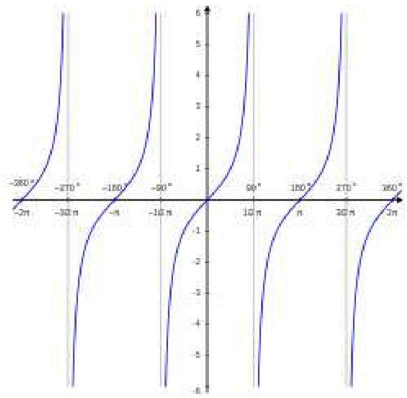
Daher stimmen die beiden Seiten des Additionstheorems im geraden Fall überein. Bei einem ungeraden Index ist die linke Seite gleich 0. Da in der Kosinusreihe nur gerade Exponenten vorkommen, kommen im Cauchy-Produkt der beiden Kosinusreihen nur Exponenten der Form $x^i y^j$ mit i, j gerade vor. Da in der Sinusreihe nur ungerade Exponenten vorkommen, kommen im Cauchy-Produkt der beiden Sinusreihen nur Exponenten der Form $x^i y^j$ mit $i + j$ gerade vor. Deshalb kommen Ausdrücke der Form $x^i y^j$ mit $i + j$ ungerade weder links noch rechts vor. Das Additionstheorem für den Sinus folgt ähnlich. (4). Aus dem Additionstheorem für den Kosinus angewendet auf $y := -x$ und aufgrund von (2) ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 &= \cos 0 \\ &= \cos(x - x) \\ &= \cos x \cdot \cos(-x) - \sin x \cdot \sin(-x) \\ &= \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x . \end{aligned}$$

□

Die letzte Aussage im vorstehenden Satz besagt, dass das Paar $(\cos x, \sin x)$ ein Punkt auf dem *Einheitskreis* $\{(u, v) \mid u^2 + v^2 = 1\}$ ist. Wir werden später sehen, dass sich jeder Punkt des Einheitskreises als $(\cos x, \sin x)$ schreiben lässt, wobei man x als Winkel interpretieren kann. Dabei tritt die Periode 2π auf, wobei wir die *Kreiszahl* π eben über die trigonometrischen Funktionen einführen werden.

In der folgenden Definition für Tangens und Kotangens verwenden wir in der Formulierung der Definitionsbereiche bereits die Zahl π.



Definition 13.14. Die Funktion

$$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

heißt *Tangens* und die Funktion

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

heißt *Kotangens*.

13. Arbeitsblatt

13.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 13.1. Zeige die folgenden Eigenschaften von Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus

(1)
$$\cosh x + \sinh x = e^x .$$

(2)
$$\cosh x - \sinh x = e^{-x} .$$

(3)
$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1 .$$

Aufgabe 13.2. Zeige, dass in der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ des Kosinus hyperbolicus die Koeffizienten c_n für ungerades n gleich 0 sind.

Aufgabe 13.3. Zeige, dass der Sinus hyperbolicus auf $\mathbb{R}$ streng wachsend ist.

Aufgabe 13.4. Beweise die Additionstheoreme für die Hyperbelfunktionen, also

a)
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y.$$

b)
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$$

Aufgabe 13.5. Zeige, dass der Tangens hyperbolicus die Abschätzungen

$$-1 \leq \tanh x \leq 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

erfüllt.

Aufgabe 13.6. Es sei $P = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom. Zeige, dass P genau dann eine ungerade Funktion definiert, wenn $a_k = 0$ für alle geraden Indizes ist.

Aufgabe 13.7. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Woran erkennt man am Graphen von f, ob f eine gerade Funktion ist?

Aufgabe 13.8. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Woran erkennt man am Graphen von f, ob f eine ungerade Funktion ist?

Aufgabe 13.9. Zeige, dass die Summe von zwei geraden Funktionen wieder gerade und die Summe von zwei ungeraden Funktionen wieder ungerade ist. Kann man etwas über die Summe von einer geraden Funktion mit einer ungeraden Funktion aussagen?

Aufgabe 13.10. Zeige, dass das Produkt von zwei geraden Funktionen wieder gerade, das Produkt von zwei ungeraden Funktionen gerade und das Produkt von einer geraden und einer ungeraden Funktion ungerade ist.

Aufgabe 13.11. Zeige, dass es genau eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, die sowohl gerade als auch ungerade ist.

Aufgabe 13.12. Zeige, dass man jede stetige Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

als $f = g + h$ mit einer stetigen geraden Funktion g und einer stetigen ungeraden Funktion h schreiben kann.

Aufgabe 13.13. Welche Punkte kennen Sie auf dem rationalen Einheitskreis

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x^2+y^2=1\right\}?$$

Aufgabe 13.14. Beschreibe die obere Hälfte des Einheitskreises und die untere Hälfte des Einheitskreises als den Graphen einer Funktion.

Aufgabe 13.15. Wir betrachten den rationalen Einheitskreis

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x^2+y^2=1\right\}$$

und die Gerade

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x+y=0\right\}.$$

(1) Bestimme die Schnittpunkte $E \cap G$.
(2) Wie sieht es aus, wenn man statt $\mathbb{Q}$ die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nimmt?
(3) Kann man einen Kreis erst dann verstehen, wenn man die reellen Zahlen verstanden hat?
(4) Welche Beziehung besteht zum Zwischenwertsatz?

Aufgabe 13.16. Bestimme die Koordinaten der beiden Schnittpunkte der Geraden G und des Kreises K, wobei G durch die Gleichung $2y-3x+1 = 0$ und K durch den Mittelpunkt $(2,2)$ und den Radius 5 gegeben ist.

Aufgabe 13.17.*

Bestimme die Schnittpunkte des Einheitskreises mit der Geraden, die durch die beiden Punkte $(-1,1)$ und $(4,-2)$ verläuft.

Aufgabe 13.18.*

Berechne die Schnittpunkte der beiden Kreise K_1 und K_2, wobei K_1 den Mittelpunkt $(3,4)$ und den Radius 6 und K_2 den Mittelpunkt $(-8,1)$ und den Radius 7 besitzt.

Aufgabe 13.19. Es seien $a,b,r \in \mathbb{R}$, $r>0$, und sei

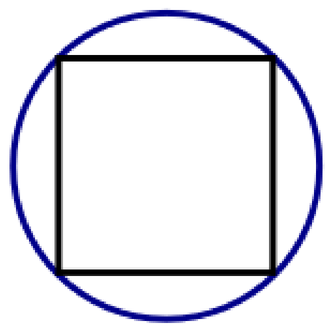
$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2+(y-b)^2=r^2\right\}$$

der *Kreis* mit dem *Mittelpunkt* $M=(a,b)$ und dem *Radius* r. Es sei G eine *Gerade* in $\mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft, dass es auf G mindestens einen Punkt P gibt mit $d(M,P) \leq r$. Zeige, dass $K \cap G \neq \emptyset$ ist.

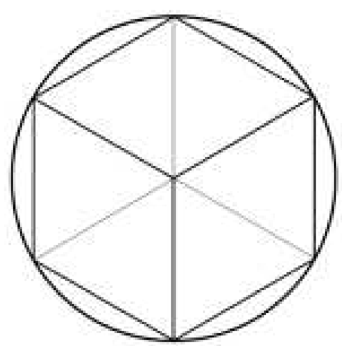
Aufgabe 13.20.*

Wir betrachten einen Kreis (mit Radius 1) und darin eingeschriebene regelmäßige n-Ecke.

(1) In den Kreis sei ein Quadrat eingeschrieben. Bestimme dessen Flächeninhalt und dessen Umfang.



(2) In den Kreis sei ein regelmäßiges 6-Eck eingeschrieben. Bestimme dessen Flächeninhalt und dessen Umfang.



(3) Der Flächeninhalt eines eingeschriebenen regelmäßigen n-Ecks ist eine Approximation für den Flächeninhalt des Kreises und der Umfang eines solchen n-Ecks ist eine Approximation für den Umfang des Kreises. Welche Approximationen sind besser?

Aufgabe 13.21.*

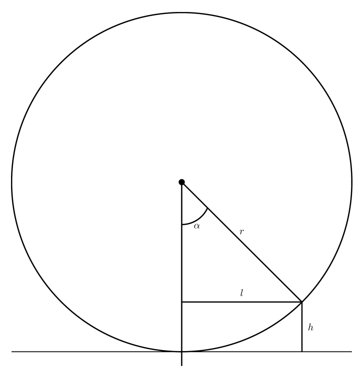
Beweise elementargeometrisch den *Sinussatz*, also die Aussage, dass in einem Dreieck die Gleichheiten

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

gelten, wobei a, b, c die Seitenlängen gegenüber den Ecken mit den Winkeln α, β, γ sind.

Aufgabe 13.22. Wir betrachten eine Uhr mit Minuten- und Sekundenzeiger, die sich beide kontinuierlich bewegen. Bestimme eine Formel, die aus der Winkelstellung des Minutenzeigers die Winkelstellung des Sekundenzeigers (jeweils ausgehend von der 12-Uhr-Stellung im Uhrzeigersinn gemessen) berechnet.

Aufgabe 13.23.*



Frau Dr. Eisenbeis möchte für ihre Neffen Richy und Franky eine Fahrrad-Sprungrampe basteln. Die Steigung soll entlang eines Kreissegmentes der Länge (alle Angaben in Meter) $\ell = 1,2$ verlaufen und eine Sprunghöhe von $h = 0,2$ erreichen (siehe Bild). Welche (implizite) Bedingung muss der Winkel α erfüllen (die Bedingung muss so sein, dass sie mit einer Intervallhalbierung gelöst werden könnte, diese muss aber nicht durchgeführt werden)?

Aufgabe 13.24. Bestimme die Koeffizienten bis zu z^6 in der Produktreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ aus der Sinusreihe und der Kosinusreihe.

Aufgabe 13.25. Berechne

$$\left(1 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{24}X^4\right)^2 + \left(X - \frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{120}X^5\right)^2 .$$

Was fällt dabei auf und wie kann man es erklären?

Aufgabe 13.26. Zeige $-1 \leq \sin x \leq 1$ und $-1 \leq \cos x \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 13.27.*

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$\frac{\sin n}{n},\ n \in \mathbb{N}_+ .$$

Aufgabe 13.28.*

Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

konvergiert.

13.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 13.29. (3 Punkte)

Zeige, dass der Kosinus hyperbolicus auf $\mathbb{R}_{\leq 0}$ streng fallend und auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ streng wachsend ist.

Aufgabe 13.30. (3 Punkte)

Bestimme die Koordinaten der beiden Schnittpunkte der Geraden G und des Kreises K, wobei G durch die Gleichung $3y - 4x + 2 = 0$ und K durch den Mittelpunkt $(2, 5)$ und den Radius 7 gegeben ist.

Aufgabe 13.31. (6 Punkte)

Wir betrachten den Einheitskreis, also

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

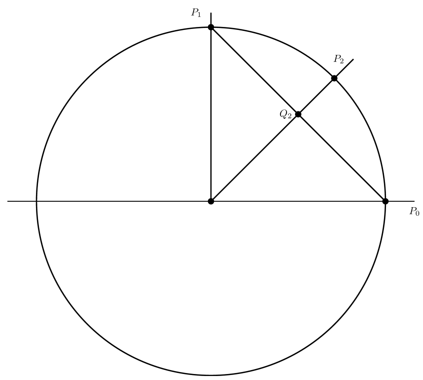
Wir setzen $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und definieren rekursiv die Folge P_n (in der Ebene) durch

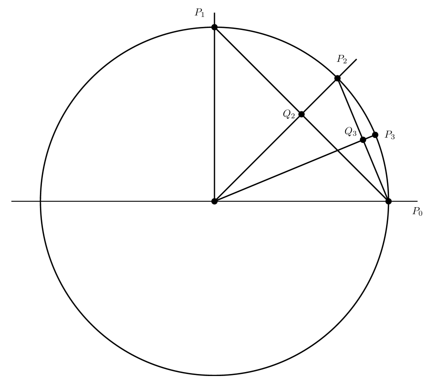
$$Q_n = \frac{1}{2}(P_0 + P_{n-1})$$

(d.h. Q_n ist der Halbierungspunkt der Strecke zwischen P_0 und P_{n-1}) und P_n ist der Durchstoßungspunkt der Halbgeraden durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und Q_n mit dem Kreisbogen. Wir betrachten die Längen $d_n = d(P_0, P_n)$ als eine Approximation der Länge des Kreisbogens zwischen P_0 und P_n und somit

$$x_n = 2^n d_n$$

als eine Approximation der Länge des halben Kreisbogens (also von π). Da in der Berechnung der Punkte P_n und der Längen d_n Quadratwurzeln (Satz des Pythagoras) auftreten, können diese nur mit einem bestimmten Fehler durch rationale Zahlen approximiert werden.





Man entwerfe ein Computer-Programm (Pseudocode), das eine Folge y_n von Approximationen ($n \geq 1$) für x_n berechnet und ausdruckt. Bei der Berechnung von y_n sollen alle Quadratwurzeln, die in die Berechnung von x_n irgendwo eingehen, mit n Schritten mit dem Heronverfahren zum Startwert 1 berechnet werden. Das Programm soll also zunehmend bessere Approximationen für die vorhergehenden Hilfspunkte verwenden, die Berechnung von y_n erfordert, dass man stets neue, bessere Approximationen für $P_2, \ldots, P_n$ bestimmt.

• Der Computer besitzt beliebig viele Speicher, die rationale Zahlen enthalten können.

• Die natürlichen Zahlen liegen in einer Datenbank bereit (diese müssen also nicht erzeugt werden).

• Er kann einen Speicherinhalt in einen weiteren Speicher schreiben.

• Er kann die rationalen Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division durch eine Zahl $\neq 0$) ausführen und das Ergebnis in einen weiteren Speicher schreiben.

• Er kann Speicherinhalte der Größe nach vergleichen und davon abhängig zu Programmzeilen springen.

• Er kann Speicherinhalte und vorgegebene Texte ausdrucken.

Das Programm soll unendlich laufen und die Approximationen $y_1, y_2, y_3, ...$ ausgeben.

(Es ist $y_1 = 3$ und $y_2 = \frac{58540996}{19126309} = 3,060757619...$. Es wird nicht behauptet, dass die Folge y_n wirklich gegen π konvergiert).

Aufgabe 13.32. (5 Punkte)

Beweise das Additionstheorem

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

für den Sinus unter Bezug auf die definierenden Potenzreihen.

Aufgabe 13.33. (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$x_n := \frac{5\sin^3 n - 6n^4 + 13n^2 + (\sin n)(\cos(n^2))}{7n^4 - 5n^3 + n^2 \sin^2(n^3) - \cos n}$$

in $\mathbb{R}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 13.34. (5 Punkte)

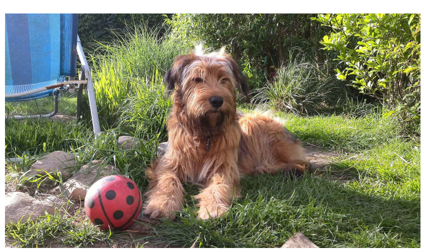
Es seien n komplexe Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ in der Kreisscheibe B mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 1, also in $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, gegeben. Zeige, dass es einen Punkt $w \in B$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i - w| \geq n$$

gibt.

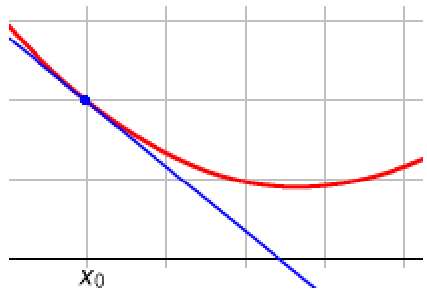
14. Vorlesung - Differenzierbarkeit

> Aus so krummem Holze, als woraus der Mensch gemacht ist, kann nichts ganz Gerades gezimmert werden.
>
> Immanuel Kant



Auch mit dem Ball spielt sie gern.

14.1. **Differenzierbarkeit.**



In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge ist. Wir wollen erklären, wann eine solche Funktion in einem Punkt $a \in D$ differenzierbar ist. Die intuitive Idee ist dabei, für einen weiteren Punkt $x \in D$ die *Sekante* durch die beiden Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$ des Funktionsgraphen zu ziehen und dann „x gegen a laufen zu lassen“. Wenn sich dieser Grenzwertprozess sinnvoll durchführen lässt, so wird aus den Sekanten eine Tangente. Dieser Grenzwertprozess wird über den Begriff des Grenzwertes einer Funktion präzise gefasst, den wir im Anschluss an die Stetigkeit eingeführt haben.

Definition 14.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Punkt und

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zu $x \in D$, $x \neq a$, heißt die Zahl

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

der *Differenzenquotient* von f zu a und x.

Der Differenzenquotient ist die Steigung der Sekante am Graph durch die beiden Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$. Für $x = a$ ist dieser Quotient *nicht* definiert. Allerdings kann ein sinnvoller Limes für $x \to a$ existieren. Dieser repräsentiert dann die Steigung der *Tangente* an f im Punkt $(a, f(a))$ (oder an der Stelle a).

Definition 14.2. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Punkt und

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *differenzierbar* in a ist, wenn der Limes

$$\lim_{x \in D \setminus \{a\},\, x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Im Fall der Existenz heißt dieser Limes der *Differentialquotient* oder die *Ableitung* von f in a, geschrieben

$$f'(a)\,.$$

Die Ableitung in einem Punkt a ist, falls sie existiert, ein Element in $\mathbb{R}$. Häufig nimmt man die Differenz $h := x - a$ als Parameter für den Limes des Differenzenquotienten, und lässt h gegen 0 gehen, d.h. man betrachtet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,.$$

Die Bedingung $x \in D \setminus \{a\}$ wird dann zu $a + h \in D$, $h \neq 0$. Wenn die Funktion f einen eindimensionalen Bewegungsvorgang beschreibt, also eine von der Zeit abhängige Bewegung auf einer Strecke, so ist der Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ die (effektive) Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen den Zeitpunkten a und x und $f'(a)$ ist die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt a.

Beispiel 14.3. Es seien $s, c \in \mathbb{R}$ und sei

$$\alpha\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto sx + c,$$

eine affin-lineare Funktion. Zur Bestimmung der Ableitung in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$ betrachtet man

$$\frac{(sx+c) - (sa+c)}{x-a} = \frac{s(x-a)}{x-a} = s.$$

Dies ist konstant gleich s, so dass der Limes für x gegen a existiert und gleich s ist. Die Ableitung in jedem Punkt existiert demnach und ist gleich s. Die *Steigung* der affin-linearen Funktion ist also die Ableitung.

Beispiel 14.4. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^2.$$

Der Differenzenquotient zu a und $a + h$ ist

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{2ah + h^2}{h} \\ &= 2a + h. \end{aligned}$$

Der Limes davon für h gegen 0 ist $2a$. Die Ableitung von f in a ist daher $f'(a) = 2a$.

14.2. **Lineare Approximierbarkeit.**

Wir besprechen eine zur Differenzierbarkeit äquivalente Eigenschaft, die lineare Approximierbarkeit. Diese Formulierung ist in dreifacher Hinsicht wichtig: Sie erlaubt vergleichsweise einfache Beweise für Rechenregeln für differenzierbare Funktionen, sie liefert ein Modell für Approximierbarkeit durch Polynome von höherem Grad (quadratische Approximation, Taylor-Entwicklung) und sie erlaubt eine Verallgemeinerung auf die höherdimensionale Situation (im zweiten Semester).

Satz 14.5. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann ist f in a genau dann differenzierbar, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ und eine Funktion

$$r\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt mit r stetig in a und $r(a) = 0$ und mit

$$f(x) = f(a) + s \cdot (x-a) + r(x)(x-a).$$

Beweis. Wenn f differenzierbar ist, so setzen wir $s := f'(a)$. Für die Funktion r muss notwendigerweise

$$r(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - s \text{ für } x \neq a\,, \\ 0 \text{ für } x = a\,, \end{cases}$$

gelten, um die Bedingungen zu erfüllen. Aufgrund der Differenzierbarkeit existiert der Limes

$$\lim_{x \to a,\, x \in D \setminus \{a\}} r(x) = \lim_{x \to a,\, x \in D \setminus \{a\}} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - s \right),$$

und hat den Wert 0. Dies bedeutet, dass r in a stetig ist. Wenn umgekehrt s und r mit den angegebenen Eigenschaften existieren, so gilt für $x \neq a$ die Beziehung

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = s + r(x)\,.$$

Da r stetig in a ist, muss auch der Limes links für $x \to a$ existieren. □

Die in diesem Satz formulierte Eigenschaft, die zur Differenzierbarkeit äquivalent ist, nennt man auch die *lineare Approximierbarkeit*. Die affin-lineare Funktion

$$D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(a) + f'(a)(x-a),$$

heißt dabei die *affin-lineare Approximation*. Die durch $f(a)$ gegebene konstante Funktion kann man als konstante Approximation ansehen.

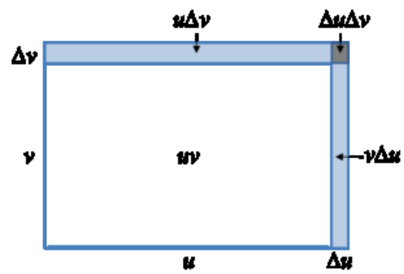
Korollar 14.6. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die im Punkt a differenzierbar sei. Dann ist f stetig in a.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 14.5. □

14.3. **Rechenregeln für differenzierbare Funktionen.**



Eine Veranschaulichung der Produktregel: Der Zuwachs eines Flächeninhalts entspricht der Summe der beiden Produkte aus Seitenlänge und Seitenlängezuwachs. Für den infinitesimalen Zuwachs ist das Produkt der beiden Seitenlängenzuwächse irrelevant.

Lemma 14.7. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f, g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei Funktionen, die in a differenzierbar seien. Dann gelten folgende Differenzierbarkeitsregeln.

(1) *Die Summe $f+g$ ist differenzierbar in a mit*
$$(f+g)'(a) \;=\; f'(a)+g'(a).$$
(2) *Das Produkt $f \cdot g$ ist differenzierbar in a mit*
$$(f \cdot g)'(a) \;=\; f'(a)g(a)+f(a)g'(a).$$
(3) *Für $c \in \mathbb{R}$ ist auch cf in a differenzierbar mit*
$$(cf)'(a) \;=\; cf'(a).$$
(4) *Wenn g keine Nullstelle in a besitzt, so ist $1/g$ differenzierbar in a mit*
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) \;=\; \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}.$$
(5) *Wenn g keine Nullstelle in a besitzt, so ist f/g differenzierbar in a mit*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) \;=\; \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Beweis. (1). Wir schreiben f bzw. g mit den in Satz 14.5 formulierten Objekten, also
$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)$$
und
$$g(x) = g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)\,.$$

Summieren ergibt

$$f(x) + g(x) = f(a) + g(a) + (s + \tilde{s})(x - a) + (r + \tilde{r})(x)(x - a)\,.$$

Dabei ist die Summe $r + \tilde{r}$ wieder stetig in a mit dem Wert 0. (2). Wir gehen wieder von

$$f(x) \;=\; f(a) + s(x - a) + r(x)(x - a)$$

und

$$g(x) \;=\; g(a) + \tilde{s}(x - a) + \tilde{r}(x)(x - a)$$

aus und multiplizieren die beiden Gleichungen. Dies führt zu

$$\begin{aligned} f(x)g(x) \;&=\; (f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a))(g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)) \\ &=\; f(a)g(a) + (sg(a) + \tilde{s}f(a))(x-a) \\ &\quad\; +(f(a)\tilde{r}(x) + g(a)r(x) + s\tilde{s}(x-a) \\ &\quad\; +s\tilde{r}(x)(x-a) + \tilde{s}r(x)(x-a) + r(x)\tilde{r}(x)(x-a))(x-a). \end{aligned}$$

Aufgrund von Lemma 10.10 für Limiten ist die aus der letzten Zeile ablesbare Funktion stetig mit dem Wert 0 für $x = a$. (3) folgt aus (2), da eine konstante Funktion differenzierbar ist mit Ableitung 0. (4). Es ist

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} \;=\; \frac{-1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Da g nach Korollar 14.6 stetig in a ist, konvergiert für $x \to a$ der linke Faktor gegen $-\frac{1}{g(a)^2}$ und wegen der Differenzierbarkeit von g in a konvergiert der rechte Faktor gegen $g'(a)$. (5) folgt aus (2) und (4). □

Diese Rechenregeln heißen *Summenregel*, *Produktregel*, *Quotientenregel*. Die folgende Aussage heißt *Kettenregel*.

Satz 14.8. *Es seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen und seien*

$$f\colon\; D \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$g\colon\; E \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Es sei f in a differenzierbar und g sei in $b := f(a)$ differenzierbar. Dann ist auch die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f\colon\; D \longrightarrow \mathbb{R}$$

in a differenzierbar mit der Ableitung

$$(g \circ f)'(a) \;=\; g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Beweis. Aufgrund von Satz 14.5 kann man

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + r(x)(x - a)$$

und

$$g(y) = g(f(a)) + g'(f(a))(y - f(a)) + s(y)(y - f(a))$$

schreiben. Daher ergibt sich

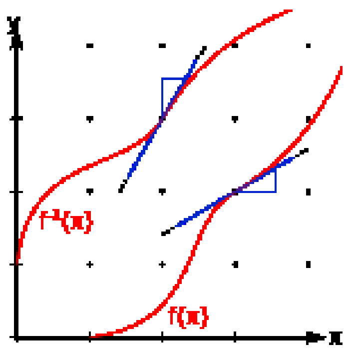
$$g(f(x)) \;\;=\;\; g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + s(f(x))(f(x) - f(a))$$

$$\begin{aligned} &= g(f(a)) + g'(f(a))(f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)) \\ &\quad + s(f(x))(f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)(x-a) \\ &\quad + (g'(f(a))r(x) + s(f(x))(f'(a) + r(x)))(x-a). \end{aligned}$$

Die hier ablesbare Restfunktion

$$t(x) := g'(f(a))r(x) + s(f(x))(f'(a) + r(x))$$

ist stetig in a mit dem Wert 0. □



Eine Veranschaulichung für die Ableitung der Umkehrfunktion. Die Umkehrfunktion besitzt den an der Hauptdiagonalen gespiegelten Graphen und die Tangente wird mitgespiegelt.

Satz 14.9. *Es seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und sei*

$$f\colon D \longrightarrow E \subseteq \mathbb{R}$$

eine bijektive stetige Funktion mit der Umkehrfunktion

$$f^{-1}\colon E \longrightarrow D.$$

Es sei f in $a \in D$ differenzierbar mit $f'(a) \neq 0$. Dann ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} in $b := f(a)$ differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Beweis. Wir betrachten den Differenzenquotienten

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - a}{y - b}$$

und müssen zeigen, dass der Limes für $y \to b$ existiert und den behaupteten Wert annimmt. Sei dazu $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $E \setminus \{b\}$, die gegen b konvergiert. Nach Satz 11.7 ist f^{-1} stetig. Daher konvergiert auch die Folge mit den Gliedern $x_n := f^{-1}(y_n)$ gegen a. Wegen der Bijektivität ist $x_n \neq a$ für alle n. Damit ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - a}{y_n - b} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\right)^{-1},$$

wobei die rechte Seite nach Voraussetzung existiert und die zweite Gleichheit auf Lemma 8.1 (5) beruht. $\square$

Beispiel 14.10. Die Funktion

$$f^{-1}\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto \sqrt{x},$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^2$ (eingeschränkt auf $\mathbb{R}_+$). Deren Ableitung in einem Punkt a ist $f'(a) = 2a$. Nach Satz 14.9 gilt daher für

$$b \in \mathbb{R}_+$$

die Beziehung

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{2\sqrt{b}} = \frac{1}{2}b^{-\frac{1}{2}}.$$

Im Nullpunkt ist f^{-1} nicht differenzierbar.

Die Funktion

$$f^{-1}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^{\frac{1}{3}},$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^3$ Deren Ableitung in a ist $f'(a) = 3a^2$, dies ist für $a \neq 0$ von 0 verschieden. Nach Satz 14.9 ist für $b \neq 0$ somit

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{3\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2} = \frac{1}{3}b^{-\frac{2}{3}}.$$

Im Nullpunkt ist f^{-1} nicht differenzierbar.

14.4. **Die Ableitungsfunktion.**

Bisher haben wir nur von der Differenzierbarkeit einer Funktion in einem Punkt gesprochen. Jetzt lösen wir uns von dieser punktweisen Betrachtung.

Definition 14.11. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *differenzierbar* ist, wenn für jeden Punkt $a \in I$ die Ableitung $f'(a)$ von f in a existiert. Die Abbildung

$$f'\colon I \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f'(x),$$

heißt die *Ableitung* (oder *Ableitungsfunktion*) von f.

14. Arbeitsblatt

14.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 14.1. Skizziere das Steigungsdreieck und die Sekante zur Funktion

$$f(x) = x^2 - 3x + 5$$

in den Punkten 1 und 3

Aufgabe 14.2.*
Bestimme direkt (ohne Verwendung von Ableitungsregeln) die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3,$$

in einem beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 14.3. Zeige, dass die reelle Betragsfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto |x|\,,$$

im Nullpunkt nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 14.4. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade Funktion, die im Punkt x differenzierbar sei. Zeige, dass f auch im Punkt $-x$ differenzierbar ist und dass die Beziehung

$$f'(-x) \,=\, -f'(x)$$

gilt.

Die folgende Aufgabe löse man sowohl direkt als auch mittels der Ableitungsregeln.

Aufgabe 14.5. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^n,$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 14.6. Zeige, dass ein Polynom $P \in \mathbb{R}[X]$ genau dann einen Grad $\leq d$ besitzt (oder $P = 0$ ist), wenn die $(d+1)$-te Ableitung von P das Nullpolynom ist.

Aufgabe 14.7. Bestimme zu einem Polynom

$$f(x) \,=\, a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

die lineare Approximation (einschließlich der Restfunktion $r(x)$) im Nullpunkt.

Aufgabe 14.8. Zeige über eine Betrachtung von Funktionslimiten, dass eine in einem Punkt $a \in D$ differenzierbare Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ in diesem Punkt insbesondere stetig ist.

Aufgabe 14.9.*

Beweise die Produktregel für differenzierbare Funktionen über die Funktionslimiten für die Differenzenquotienten.

Aufgabe 14.10. Zeige, dass die Exponentialfunktion $\exp x$ in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimme die Ableitung.

Man verwende die Definition über den Funktionslimes der Differenzenquotienten. Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion hilft.

Aufgabe 14.11. Bestimme zur Exponentialfunktion $\exp x$ die lineare Approximation (einschließlich der Restfunktion $r(x)$) im Nullpunkt.

Aufgabe 14.12. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^n$$

für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 14.13. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \frac{x^2+1}{x^3}.$$

Aufgabe 14.14. Zeige, dass die Ableitung einer rationalen Funktion wieder eine rationale Funktion ist.

Aufgabe 14.15.*

Es seien

$$g, h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

differenzierbare Funktionen und

$$f(x) := \frac{g(x)}{h(x)^n}$$

mit $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass man die Ableitung von f als einen Bruch mit $h^{n+1}(x)$ im Nenner schreiben kann.

Aufgabe 14.16.*

Es seien

$$g_1, g_2, \ldots, g_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

differenzierbare Funktionen. Beweise durch Induktion über n die Beziehung

$$\left(\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n}\right)' = \frac{-1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \cdot \left(\frac{g_1'}{g_1} + \frac{g_2'}{g_2} + \cdots + \frac{g_n'}{g_n}\right).$$

Aufgabe 14.17. Es sei $f(x) = x^3 + 4x^2 - 1$ und $g(y) = y^2 - y + 2$. Bestimme die Ableitung der Hintereinanderschaltung $h(x) = g(f(x))$ direkt und mittels der Kettenregel.

Aufgabe 14.18.*

Es sei $f(x) = \frac{x^2-3}{x+2}$ und $g(y) = \frac{y+4}{y^2-5}$. Wir betrachten die Hintereinanderschaltung $h(x) := g(f(x))$.

(1) Berechne h (das Ergebnis muss als eine rationale Funktion vorliegen).
(2) Berechne die Ableitung von h mit Hilfe von Teil 1.
(3) Berechne die Ableitung von h mit Hilfe der Kettenregel.

Aufgabe 14.19.*

Es seien

$$f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen und sei

$$h(x) = (g(f(x)))^2 f(g(x)) .$$

a) Drücke die Ableitung h' mit den Ableitungen von f und g aus.

b) Sei nun

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ und } g(x) = x + 2 .$$

Berechne $h'(x)$ auf zwei verschiedene Arten, einerseits über $h(x)$ und andererseits über die Formel aus Teil a).

Aufgabe 14.20. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f \colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = x^{\frac{1}{n}},$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_+$.

Aufgabe 14.21.*

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine bijektive differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und der Umkehrfunktion f^{-1}. Was ist an folgendem „Beweis“ für die Ableitung der Umkehrfunktion nicht korrekt?

Es ist

$$(f \circ f^{-1})(y) = y.$$

Mit der Kettenregel erhalten wir durch beidseitiges Ableiten die Gleichung

$$(f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) = 1.$$

Also ist

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{(f'(f^{-1}(y))}.$$

Aufgabe 14.22.*

Man gebe ein Beispiel einer stetigen, nicht differenzierbaren Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft, dass die Funktion $x \mapsto f(|x|)$ differenzierbar ist.

14.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 14.23. (2 Punkte)

Bestimme die affin-lineare Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

deren Graph durch die beiden Punkte $(-2, 3)$ und $(5, -7)$ verläuft.

Aufgabe 14.24. (2 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade differenzierbare Funktion. Zeige, dass die Ableitung f' gerade ist.

Aufgabe 14.25. (3 Punkte)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und seien

$$f_i\colon D \longrightarrow \mathbb{R},\, i = 1, \ldots, n,$$

differenzierbare Funktionen. Beweise die Formel

$$\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \cdot \prod_{j=1, j\neq i}^{n} f_j.$$

Aufgabe 14.26. (4 Punkte)

Bestimme die Tangenten an den Graphen zur Funktion $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, die parallel zu $y = x$ sind.

Aufgabe 14.27. (3 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x + 2},$$

wobei D die Menge sei, auf der das Nennerpolynom nicht verschwindet.

Aufgabe 14.28. (7 (2+2+3) Punkte)

Es sei $f(x) = \frac{x^2+5x-2}{x+1}$ und $g(y) = \frac{y-2}{y^2+3}$ und es sei $h(x) := g(f(x))$ die Hintereinanderschaltung.

(1) Berechne h (das Ergebnis muss als eine rationale Funktion vorliegen).
(2) Berechne die Ableitung von h mit Hilfe von Teil 1.
(3) Berechne die Ableitung von h mit Hilfe der Kettenregel.

15. Vorlesung - Mittelwertsatz

Das Leben ist schön. Von einfach war nie die Rede.

Schon in jungen Jahren zeigte Vorli ihre soziale Ader, indem sie Kuscheltiere um sich versammelte.

15.1. **Höhere Ableitungen.**

Die Ableitung f' einer (in jedem Punkt) differenzierbaren Funktion nennt man häufig auch die *erste Ableitung* von f. Unter der nullten Ableitung versteht man die Funktion selbst. Höhere Ableitungen werden rekursiv definiert.

Definition 15.1. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei

$$f\colon\, I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Die Funktion f heißt n-mal *differenzierbar*, wenn sie $(n-1)$-mal differenzierbar ist und die $(n-1)$-te Ableitung, also $f^{(n-1)}$, differenzierbar ist. Die Ableitung

$$f^{(n)}(x) \,:=\, (f^{(n-1)})'(x)$$

nennt man dann die n-te *Ableitung* von f.

Die zweite Ableitung schreibt man auch als f'', die dritte Ableitung als f'''. Wenn eine Funktion n-mal differenzierbar ist, so sagt man auch, dass die Ableitungen bis zur n-ten *Ordnung* existieren. Eine Funktion f heißt *unendlich oft differenzierbar*, wenn sie n-mal differenzierbar für jedes n ist.

Eine differenzierbare Funktion ist nach Korollar 14.6 stetig, allerdings muss die Ableitung keineswegs stetig sein. Daher ist der folgende Begriff nicht überflüssig.

Definition 15.2. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$f\colon\, I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *stetig differenzierbar* ist, wenn f differenzierbar ist und die Ableitung f' stetig ist.

Eine Funktion heißt n-mal stetig differenzierbar, wenn sie n-mal differenzierbar ist und die n-te Ableitung stetig ist.

15.2. **Extrema von Funktionen.**

Wir untersuchen jetzt mit Mitteln der Differentialrechnung, wann eine differenzierbare Funktion

$$f\colon\, I \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, (lokale) Extrema besitzt und wie ihr Wachstumsverhalten aussieht.

Satz 15.3. *Es sei*

$$f\colon\,]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die in $c \in\,]a,b[$ ein lokales Extremum besitze und dort differenzierbar sei. Dann ist $f'(c) \,=\, 0$.

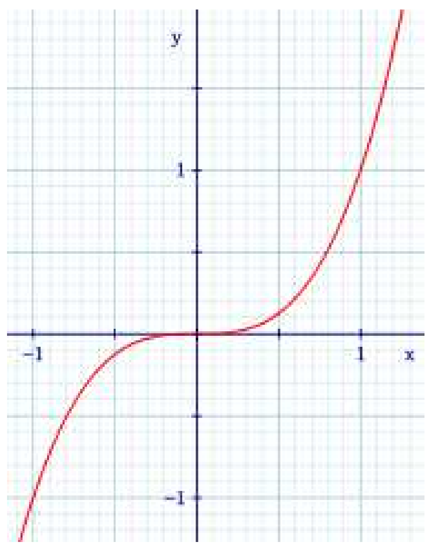
Beweis. Wir können annehmen, dass f ein lokales Maximum in c besitzt. Es gibt also ein $\epsilon > 0$ mit $f(x) \leq f(c)$ für alle $x \in [c-\epsilon, c+\epsilon]$. Es sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $c - \epsilon \leq s_n < c$, die gegen c („von unten“) konvergiere. Dann ist $s_n - c < 0$ und $f(s_n) - f(c) \leq 0$ und somit ist der Differenzenquotient

$$\frac{f(s_n) - f(c)}{s_n - c} \geq 0,$$

was sich dann nach Lemma 7.11 auf den Limes, also den Differentialquotienten, überträgt. Also ist $f'(c) \geq 0$. Für eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c+\epsilon \geq t_n > c$ gilt andererseits

$$\frac{f(t_n) - f(c)}{t_n - c} \leq 0.$$

Daher ist auch $f'(c) \leq 0$ und somit ist insgesamt $f'(c) = 0$. $\square$



Man beachte, dass das Verschwinden der Ableitung nur ein notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Extremums ist. Das einfachste Beispiel für dieses Phänomen ist die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, die streng wachsend ist, deren Ableitung aber im Nullpunkt verschwindet.

15.3. **Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung.**

Der folgende Satz heißt *Satz von Rolle.*

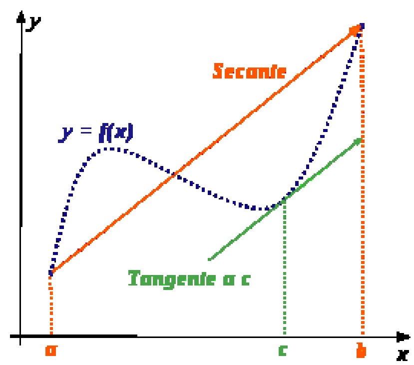
Satz 15.4. *Sei $a < b$ und sei*

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, auf $]a,b[$ differenzierbare Funktion mit $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $c \in \,]a,b[$ mit

$$f'(c) = 0.$$

Beweis. Wenn f konstant ist, so ist die Aussage richtig. Sei also f nicht konstant. Dann gibt es ein $x \in \,]a,b[$ mit $f(x) \neq f(a) = f(b)$. Sagen wir, dass $f(x)$ größer als dieser Wert ist. Aufgrund von Satz 11.13 gibt es ein $c \in [a,b]$, wo die Funktion ihr Maximum annimmt, und dieser Punkt kann kein Randpunkt sein. Für dieses c ist dann $f'(c) = 0$ nach Satz 15.3. $\square$



Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt anschaulich gesprochen, dass es zu einer Sekante eine parallele Tangente gibt.

Der folgende Satz, der direkt aus dem Satz von Rolle folgt, heißt *Mittelwertsatz der Differentialrechnung.*

Satz 15.5. *Sei $a < b$ und sei*

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, auf $]a,b[$ differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $c \in \,]a,b[$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Beweis. Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto g(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Diese Funktion ist ebenfalls stetig und in $]a,b[$ differenzierbar. Ferner ist $g(a) = f(a)$ und

$$g(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a).$$

Daher erfüllt g die Voraussetzungen von Satz 15.4 und somit gibt es ein $c \in \,]a,b[$ mit $g'(c) = 0$. Aufgrund der Ableitungsregeln gilt also

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

$\square$

Korollar 15.6. *Sei*

$$f\colon\ ]a,b[\ \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) = 0$ *für alle* $x \in\ ]a,b[$*. Dann ist* f *konstant.*

Beweis. Wenn f nicht konstant ist, so gibt es $x < x'$ mit $f(x) \neq f(x')$. Dann gibt es aufgrund von Satz 15.5 ein c, $x < c < x'$, mit $f'(c) = \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \neq 0$, ein Widerspruch zur Voraussetzung. □

Satz 15.7. *Es sei* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein offenes Intervall und*

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Die Funktion* f *ist genau dann auf* I *wachsend (bzw. fallend), wenn* $f'(x) \geq 0$ *(bzw.* $f'(x) \leq 0$*) für alle* $x \in I$ *ist.*
(2) *Wenn* $f'(x) \geq 0$ *für alle* $x \in I$ *ist und* f' *nur endlich viele Nullstellen besitzt, so ist* f *streng wachsend.*
(3) *Wenn* $f'(x) \leq 0$ *für alle* $x \in I$ *ist und* f' *nur endlich viele Nullstellen besitzt, so ist* f *streng fallend.*

Beweis. (1). Es genügt, die Aussagen für wachsende Funktionen zu beweisen. Wenn f wachsend ist, und $x \in I$ ist, so gilt für den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

für jedes h mit $x+h \in I$. Diese Abschätzung gilt dann auch für den Grenzwert, und dieser ist $f'(x)$. Sei umgekehrt die Ableitung ≥ 0. Nehmen wir an, dass es zwei Punkte $x < x'$ in I mit $f(x) > f(x')$ gibt. Aufgrund des Mittelwertsatzes gibt es dann ein c mit $x < c < x'$ mit

$$f'(c) = \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} < 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. (2). Es sei nun $f'(x) > 0$ mit nur endlich vielen Ausnahmen. Angenommen es wäre $f(x) = f(x')$ für zwei Punkte $x < x'$. Da f nach dem ersten Teil wachsend ist, ist f auf dem Intervall $[x,x']$ konstant. Somit ist $f' = 0$ auf diesem gesamten Intervall, ein Widerspruch dazu, dass f' nur endlich viele Nullstellen besitzt. □

Korollar 15.8. *Eine reelle Polynomfunktion*

$$f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad $d \geq 1$ *besitzt maximal* $d-1$ *lokale Extrema, und die reellen Zahlen lassen sich in maximal* d *Intervalle unterteilen, auf denen abwechselnd* f *streng wachsend oder streng fallend ist.*

Beweis. Siehe Aufgabe 15.13. □

15.4. **Der zweite Mittelwertsatz und die Regel von l'Hospital.**

Die folgende Aussage heißt auch *zweiter Mittelwertsatz.*

Satz 15.9. *Es sei $b > a$ und seien*

$$f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige, auf $]a,b[$ differenzierbare Funktionen mit

$$g'(x) \neq 0$$

für alle $x \in \,]a,b[$. Dann ist $g(b) \neq g(a)$ und es gibt ein $c \in \,]a,b[$ mit

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Beweis. Die Aussage

$$g(a) \neq g(b)$$

folgt aus Satz 15.4. Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x).$$

Es ist

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(a) \\ &= \frac{f(a)g(b) - f(a)g(a) - f(b)g(a) + f(a)g(a)}{g(b)-g(a)} \\ &= \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b)-g(a)} \\ &= \frac{f(b)g(b) - f(b)g(a) - f(b)g(b) + f(a)g(b)}{g(b)-g(a)} \\ &= f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(b) \\ &= h(b). \end{aligned}$$

Also ist $h(a) = h(b)$ und Satz 15.4 liefert die Existenz eines $c \in \,]a,b[$ mit

$$h'(c) = 0.$$

Umstellen ergibt die Behauptung. $\square$

L'Hospital (1661-1704)

Zur Berechnung von Grenzwerten einer Funktion, die als Quotient gegeben ist, ist die folgende *Regel von l'Hospital* hilfreich.

Korollar 15.10. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a \in I$ ein Punkt. Es seien*

$$f, g \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen, die auf $I \setminus \{a\}$ differenzierbar seien mit $f(a) = g(a) = 0$ und mit $g'(x) \neq 0$ für $x \neq a$. Es sei vorausgesetzt, dass der Grenzwert

$$w := \lim_{x \in I \setminus \{a\},\, x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert. Dann existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{x \in I \setminus \{a\},\, x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}\,,$$

und sein Wert ist ebenfalls w.

Beweis. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $I \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert. Zu jedem x_n gibt es nach Satz 15.9, angewandt auf $I_n := [x_n, a]$ bzw. $[a, x_n]$, ein c_n (im Innern[31] von I_n) mit

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert ebenfalls gegen a, so dass nach Voraussetzung die rechte Seite gegen $\frac{f'(a)}{g'(a)} = w$ konvergiert. Daher konvergiert auch die linke Seite gegen w, und wegen $f(a) = g(a) = 0$ bedeutet das, dass $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ gegen w konvergiert. □

[31] Unter dem *Innern* eines reellen Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ versteht man das Intervall ohne die Intervallgrenzen.

Beispiel 15.11. Die beiden Polynome

$$3x^2 - 5x - 2 \text{ und } x^3 - 4x^2 + x + 6$$

haben beide für $x = 2$ eine Nullstelle. Es ist also nicht von vornherein klar, ob der Limes

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$$

existiert und welchen Wert er besitzt. Aufgrund der Regel von l'Hospital kann man den Grenzwert über die Ableitungen bestimmen, und das ergibt

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^3 - 4x^2 + x + 6} = \lim_{x \to 2} \frac{6x - 5}{3x^2 - 8x + 1} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}.$$

15. Arbeitsblatt

15.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 15.1. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x\,|x|\,,$$

differenzierbar ist, aber nicht zweimal differenzierbar.

Aufgabe 15.2. Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom, $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass P genau dann ein Vielfaches von $(X-a)^n$ ist, wenn a eine Nullstelle sämtlicher Ableitungen $P, P', P'', \ldots, P^{(n-1)}$ ist.

Aufgabe 15.3. Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die durch

$$f(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor, \text{ falls } \lfloor x \rfloor \text{ gerade}, \\ \lfloor x \rfloor - x + 1, \text{ falls } \lfloor x \rfloor \text{ ungerade}, \end{cases}$$

definiert ist. Untersuche f in Hinblick auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Extrema.

Aufgabe 15.4.*

Gibt es eine reelle Zahl, die in ihrer vierten Potenz, vermindert um das Doppelte ihrer dritten Potenz, gleich dem Negativen der Quadratwurzel von 42 ist?

Aufgabe 15.5.*

Bestimme die lokalen und die globalen Extrema der Funktion

$$f\colon [-2,5] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1.$$

Aufgabe 15.6. Bestimme die lokalen und die globalen Extrema der Funktion

$$f\colon [-4,4] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 6x - 3.$$

Aufgabe 15.7. Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 4x^3 + 3x^2 - x + 2.$$

Finde die Punkte $a \in [-3,3]$ derart, dass die Steigung der Funktion in a gleich der Durchschnittssteigung zwischen -3 und 3 ist.

Aufgabe 15.8. Die Stadt $S = (0,0)$ soll mit den beiden Städten $T = (a,b)$ und $U = (a,-b)$ mit $a \geq 0, b > 0$ durch Schienen verbunden werden. Dabei sollen die Schienen zunächst entlang der x-Achse verlaufen und sich dann in die beiden Richtungen verzweigen. Bestimme den Verzweigungspunkt, wenn möglichst wenig Schienen verlegt werden sollen.

Aufgabe 15.9. An einen geradlinigen Fluss soll ein rechteckiges Areal der Fläche $1000m^2$ angelegt werden, dessen eine Seite der Fluss ist. Für die drei anderen Seiten braucht man einen Zaun. Mit welcher Zaunlänge kann man minimal auskommen?

Aufgabe 15.10. Es seien

$$f,g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen. Es sei $a \in \mathbb{R}$ ein Punkt und es gelte

$$f(a) = g(a) \text{ und } f'(x) = g'(x) \text{ für alle } x\,.$$

Zeige, dass

$$f(x) = g(x) \text{ für alle } x \text{ gilt}\,.$$

Aufgabe 15.11.*

Es seien

$$f,g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Es gelte

$$f(a) \geq g(a) \text{ und } f'(x) \geq g'(x) \text{ für alle } x \geq a\,.$$

Zeige, dass

$$f(x) \geq g(x) \text{ für alle } x \geq a \text{ gilt}\,.$$

Aufgabe 15.12.*

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion, die mit der Diagonalen zwei Schnittpunkte $P \neq Q$ besitze. Zeige, dass der Graph der Ableitung f' einen Schnittpunkt mit der durch $y = 1$ definierten Geraden besitzt.

Aufgabe 15.13.*

Zeige, dass eine reelle Polynomfunktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad $d \geq 1$ maximal $d - 1$ lokale Extrema besitzt, und die reellen Zahlen sich in maximal d Intervalle unterteilen lassen, auf denen abwechselnd f streng wachsend oder streng fallend ist.

Aufgabe 15.14. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und

$$F\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine rationale Funktion. Zeige, dass F genau dann ein Polynom ist, wenn es eine höhere Ableitung mit $F^{(n)} = 0$ gibt.

Aufgabe 15.15.*

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine n-fach stetig differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass die n-te Ableitung überall positiv ist. Zeige, dass f maximal n Nullstellen besitzt.

Aufgabe 15.16. Diskutiere den Funktionsverlauf der rationalen Funktion

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \frac{2x - 3}{5x^2 - 3x + 4},$$

hinsichtlich Definitionsbereich, Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

Aufgabe 15.17.*

Es sei

$$f(x) = x^3 + x - 1.$$

a) Zeige, dass die Funktion f im reellen Intervall $[0, 1]$ genau eine Nullstelle besitzt.

b) Berechne die erste Nachkommastelle im Zehnersystem dieser Nullstelle.

c) Man gebe eine rationale Zahl $q \in [0, 1]$ derart an, dass $|f(q)| \leq \frac{1}{10}$ ist.

Aufgabe 15.18. Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine auf einem offenen Intervall definierte stetig differenzierbare Funktion und sei $a \in I$ ein Punkt mit $f'(a) \neq 0$. Zeige, dass es offene Intervalle $J \subseteq I$ mit $a \in J$ und $J' \subseteq \mathbb{R}$ derart gibt, dass die eingeschränkte Funktion $f\colon J \to J'$ bijektiv ist.

Aufgabe 15.19. Begründe den Mittelwertsatz der Differentialrechnung aus dem zweiten Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Aufgabe 15.20.*

Bestimme den Grenzwert von

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x + 1}$$

im Punkt 1, und zwar

a) mittels Polynomdivision,

b) mittels der Regel von l'Hospital.

Aufgabe 15.21. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$$

mittels Polynomdivision (vergleiche Beispiel 15.11).

Aufgabe 15.22. Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x + 4}{x^2 + x}$$

im Punkt -1.

Aufgabe 15.23. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{1 - x}}{\sqrt[3]{1 - x^2}}\,.$$

15.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 15.24. (5 Punkte)

Aus einem Blatt Papier der Seitenlängen 20 cm und 30 cm soll eine Schachtel (ohne Deckel) mit möglichst großem Volumen gebastelt werden, indem ringsherum ein Rand hochgefaltet wird (die überlappenden Eckränder werden verklebt). Mit welcher Randbreite (=Schachtelhöhe) erreicht man das maximale Volumen?

Aufgabe 15.25. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der rationalen Funktion

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 4},$$

hinsichtlich Definitionsbereich, Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

Aufgabe 15.26. (5 Punkte)

Zeige, dass eine nichtkonstante rationale Funktion der Form

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

(mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a, c \neq 0$), keine lokalen Extrema besitzt.

Aufgabe 15.27. (4 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion vom Grad $d \geq 1$. Es sei m die Anzahl der lokalen Maxima von f und n die Anzahl der lokalen Minima von f. Zeige, dass bei d ungerade $m = n$ und bei d gerade $|m - n| = 1$ ist.

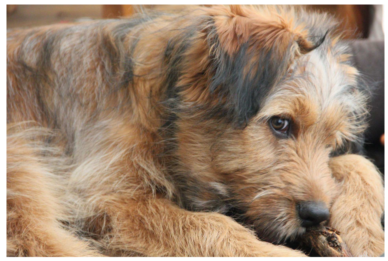
Aufgabe 15.28. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4}{2x^3 - x^2 - 4x + 3}$$

im Punkt 1.

16. Vorlesung - Die Zahl π



Vorli mag so ziemlich alles. Nur Handies findet sie blöd. Sie sind definitiv nix zum Fressen. Aber auch nix zum Spielen, da sie ablenken, ohne zu zerstreuen.

16.1. **Ableitung von Potenzreihen.**

Viele wichtige Funktionen wie die Exponentialfunktion oder die trigonometrischen Funktionen werden durch eine Potenzreihe dargestellt. Der folgende Satz zeigt, dass diese Funktionen differenzierbar sind und ihre Ableitung durch diejenige Potenzreihe dargestellt wird, die sich durch gliedweises Ableiten ergibt.

Satz 16.1. *Es sei*

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine Potenzreihe, die auf dem offenen Intervall $]-r, r[$ *konvergiere und dort die Funktion* $f\colon\ ]-r, r[\to \mathbb{R}$ *darstellt. Dann ist auch die formal abgeleitete Potenzreihe*

$$\tilde{g}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

auf $]-r, r[$ *konvergent. Die Funktion* f *ist in jedem Punkt dieses Intervalls differenzierbar mit*

$$f'(x) = \tilde{g}(x).$$

Beweis. Der Beweis erfordert ein genaues Studium von Potenzreihen. □

Im Satz haben wir g für die Potenzreihe und f für die dadurch festgelegte Funktion geschrieben, um die Rollen deutlicher zu machen. Von nun an ist diese Unterscheidung nicht mehr nötig.

Korollar 16.2. *Eine durch eine Potenzreihe gegebene Funktion ist auf ihrem Konvergenzintervall unendlich oft differenzierbar.*

Beweis. Dies ergibt sich direkt aus Satz 16.1. □

Satz 16.3. *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \exp x,$$

ist differenzierbar mit

$$\exp'(x) \,=\, \exp x.$$

Beweis. Aufgrund von Satz 16.1 ist

$$\begin{aligned}
\exp'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= \exp x.
\end{aligned}$$

$\square$

Satz 16.4. *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto a^x,$$

zur Basis $a > 0$ ist differenzierbar mit

$$(a^x)' \,=\, (\ln a)a^x.$$

Beweis. Nach Definition 12.15 ist

$$a^x \,=\, \exp\left(x \,\ln a\right).$$

Die Ableitung nach x ist aufgrund von Satz 16.3 unter Verwendung der Kettenregel gleich

$$(a^x)' \,=\, \left(\exp\left(x \,\ln a\right)\right)' \,=\, (\ln a) \exp'(x \,\ln a) \,=\, (\ln a) \exp\left(x \,\ln a\right) \,=\, (\ln a)a^x.$$

$\square$

Bemerkung 16.5. Bei einer reellen Exponentialfunktion

$$y(x) \,=\, a^x$$

gilt nach Satz 16.4 die Beziehung

$$y' \,=\, (\ln a)y,$$

es besteht also eine proportionaler Zusammenhang zwischen der Funktion y und ihrer Ableitung y' mit dem Proportionalitätsfaktor $\ln a$. Dies gilt auch dann, wenn a^x mit einer Konstanten multipliziert wird. Wenn man unter y

eine von der Zeit x abhängige Größe versteht, so beschreibt $y'(x)$ das momentane Wachstum zu einem Zeitpunkt. Die Gleichung $y' = (\ln a)y$ bedeutet dann, dass das momentane Wachstum in jedem Zeitpunkt proportional zur momentanen Größe ist. Ein solches Wachstum (bzw. Schrumpfung bei $a < 1$ bzw. $\ln a < 0$) kommt in der Natur bei einer Population dann vor, wenn es keine nennenswerte Nahrungskonkurrenz und vernachlässigbare Sterberaten gibt (die Anzahl der Mäuse ist dann proportional zur Anzahl der geborenen Mäuse). Eine Bedingung der Form

$$y' = by$$

ist ein Beispiel für eine *Differentialgleichung*. Dies ist eine Gleichung für eine Funktion, die Bedingungen an die Ableitung der Funktion ausdrückt. Eine Lösung einer solchen Differentialgleichung ist eine differenzierbare Funktion, die diese Ableitungsbedingung erfüllt. Die Lösungen der zuletzt formulierten Differentialgleichung sind die Funktionen

$$y(x) = ce^{bx}.$$

Wir werden uns im zweiten Semester mit Differentialgleichungen intensiv beschäftigen.

Korollar 16.6. *Die Ableitung des natürlichen Logarithmus*

$$\ln\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \ln x,$$

ist

$$\ln'\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

Beweis. Da der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, können wir Satz 14.9 anwenden und erhalten mit Satz 16.3

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}.$$

□

Korollar 16.7. *Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion*

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto x^\alpha,$$

differenzierbar und ihre Ableitung ist

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Beweis. Nach Definition 12.15 ist

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln x).$$

Die Ableitung nach x ist aufgrund von Satz 16.3 und Korollar 16.6 unter Verwendung der Kettenregel gleich

$$(x^\alpha)' = (\exp(\alpha \ln x))' = \frac{\alpha}{x} \cdot \exp(\alpha \ln x) = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

□

Satz 16.8. *Die Sinusfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sin x,$$

ist differenzierbar mit

$$\sin'(x) = \cos x$$

und die Kosinusfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \cos x,$$

ist differenzierbar mit

$$\cos'(x) = -\sin x.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 16.4. □

Satz 16.9. *Die Tangensfunktion*

$$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \tan x,$$

ist differenzierbar mit

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

und die Kotangensfunktion

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \cot x,$$

ist differenzierbar mit

$$\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Beweis. Aufgrund der Quotientenregel, Satz 16.8 und der Kreisgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\ &= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Das Argument für die Ableitung des Kotangens ist entsprechend. □

16.2. **Die Zahl π.**

Die Zahl π ist der Flächeninhalt bzw. der halbe Kreisumfang eines Kreises mit Radius 1. Um darauf eine präzise Definition dieser Zahl aufzubauen müsste man zuerst die Maßtheorie (bzw. die Länge von „krummen Kurven“) entwickeln. Auch die trigonometrischen Funktionen haben eine intuitive Interpretation am Einheitskreis, doch auch diese setzt das Konzept der Bogenlänge voraus. Ein alternativer Zugang ist es, die Zahl π über analytische Eigenschaften der durch ihre Potenzreihen definierten Funktionen Sinus und Kosinus zu definieren und dann erst nach und nach die Beziehung zum Kreis herzustellen.

Lemma 16.10. *Die Kosinusfunktion besitzt im reellen Intervall* $[0,2]$ *genau eine Nullstelle.*

Beweis. Wir betrachten die Kosinusreihe

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Für $x = 0$ ist $\cos 0 = 1$. Für $x = 2$ kann man geschickt klammern und erhält

$$\begin{aligned} \cos 2 &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \ldots \\ &= 1 - \frac{2^2}{2!}\left(1 - \frac{4}{3 \cdot 4}\right) - \frac{2^6}{6!}\left(1 - \frac{4}{7 \cdot 8}\right) - \ldots \\ &= 1 - 2(2/3) - \ldots \\ &\leq -1/3. \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also mindestens eine Nullstelle im angegebenen Intervall. Zum Beweis der Eindeutigkeit betrachten wir die Ableitung des Kosinus, diese ist nach Satz 16.8

$$\cos' x = -\sin x.$$

Es genügt zu zeigen, dass der Sinus im Intervall $]0,2[$ positiv ist, denn dann ist das Negative davon stets negativ und der Kosinus ist dann nach Satz 15.7 im angegebenen Intervall streng fallend, so dass es nur eine Nullstelle gibt. Für $x \in]0,2]$ gilt

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \\ &= x\left(1 - \frac{x^2}{3!}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\right) + \ldots \\ &\geq x\left(1 - \frac{4}{3!}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{4}{6 \cdot 7}\right) + \ldots \\ &\geq x/3 \\ &> 0. \end{aligned}$$

□

Definition 16.11. Es sei s die eindeutig bestimmte reelle Nullstelle der Kosinusfunktion auf dem Intervall $[0,2]$. Die *Kreiszahl* π ist durch

$$\pi := 2s$$

definiert.

Satz 16.12. *Die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion erfüllen in* $\mathbb{R}$ *folgende* Periodizitätseigenschaften.

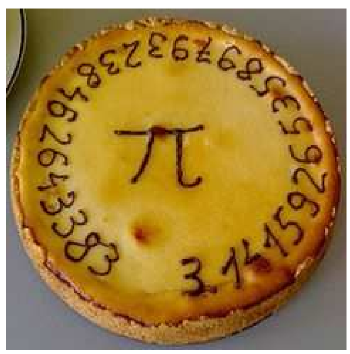
(1) *Es ist* $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ *und* $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.
(2) *Es ist* $\cos(x + \pi) = -\cos x$ *und* $\sin(x + \pi) = -\sin x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

(3) *Es ist* $\cos(x+\pi/2) = -\sin x$ *und* $\sin(x+\pi/2) = \cos x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.
(4) *Es ist* $\cos 0 = 1$, $\cos \pi/2 = 0$, $\cos \pi = -1$, $\cos 3\pi/2 = 0$ *und* $\cos 2\pi = 1$.
(5) *Es ist* $\sin 0 = 0$, $\sin \pi/2 = 1$, $\sin \pi = 0$, $\sin 3\pi/2 = -1$ *und* $\sin 2\pi = 0$.

Beweis. Aufgrund der Kreisgleichung

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

ist $\left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^2 = 1$, also ist $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ wegen der Überlegung im Beweis zu Lemma 16.10. Daraus folgen mit den Additionstheoremen die in (3) angegebenen Beziehungen zwischen Sinus und Kosinus. Es genügt daher, die Aussagen für den Kosinus zu beweisen. Alle Aussagen folgen dann aus der Definition von π und aus (3). $\square$



Eine rationale Approximation der Zahl π auf einem π-Pie.

Definition 16.13. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *periodisch* mit *Periode* $L > 0$, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = f(x+L)$$

gilt.

Die beiden trigonometrischen Funktionen sind also periodische Funktionen mit der Periodenlänge 2π.

16.3. **Die inversen trigonometrischen Funktionen.**

Korollar 16.14. *Die reelle Sinusfunktion induziert eine bijektive, streng wachsende Funktion*

$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1,1],$$

und die reelle Kosinusfunktion induziert eine bijektive streng fallende Funktion

$$[0,\pi] \longrightarrow [-1,1].$$

Beweis. Siehe Aufgabe 16.12. □

Korollar 16.15. *Die reelle Tangensfunktion induziert eine bijektive, streng wachsende Funktion*

$$]-\pi/2,\pi/2[\longrightarrow \mathbb{R},$$

und die reelle Kotangensfunktion induziert eine bijektive streng fallende Funktion

$$[0,\pi]\longrightarrow \mathbb{R}.$$

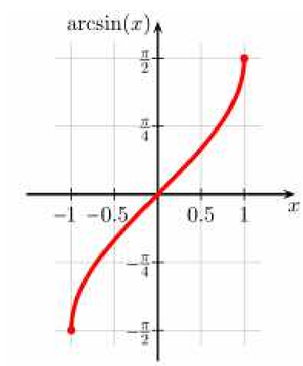
Beweis. Siehe Aufgabe 16.13. □

Aufgrund der Bijektivität von Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens auf geeigneten Intervallen gibt es die folgenden Umkehrfunktionen.

Definition 16.16. Die Umkehrfunktion der reellen Sinusfunktion ist

$$[-1,1]\longrightarrow [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\ x\longmapsto \arcsin x,$$

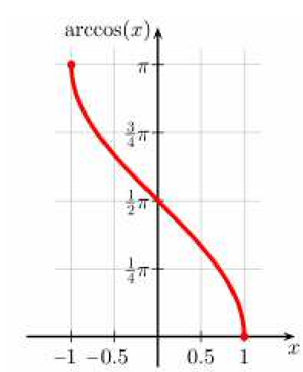
und heißt *Arkussinus*.



Definition 16.17. Die Umkehrfunktion der reellen Kosinusfunktion ist

$$[-1,1]\longrightarrow [0,\pi],\ x\longmapsto \arccos x,$$

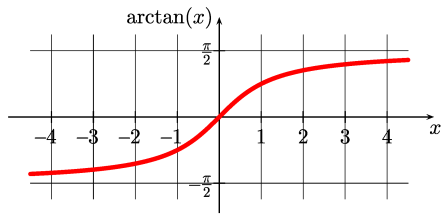
und heißt *Arkuskosinus*.



Definition 16.18. Die Umkehrfunktion der reellen Tangensfunktion ist

$$\mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \; x \longmapsto \arctan x,$$

und heißt *Arkustangens*.

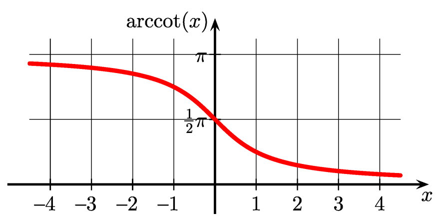


Der Arkustangens

Definition 16.19. Die Umkehrfunktion der reellen Kotangensfunktion ist

$$\mathbb{R} \longrightarrow]0, \pi[, \; x \longmapsto \operatorname{arccot} x,$$

und heißt *Arkuskotangens*.



Der Arkuskotangens

Satz 16.20. *Die inversen trigonometrischen Funktionen besitzen die folgenden Ableitungen.*

(1)
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(2)
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(3)
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

(4)
$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Beweis. Für den Arkustangens gilt beispielsweise

$$\begin{aligned}
(\arctan x)' &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}} \\
&= \frac{1}{\frac{\cos^2(\arctan x)+\sin^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)}} \\
&= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} \\
&= \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

□

16. Arbeitsblatt

16.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 16.1. Bestimme die Ableitungen von Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus.

Aufgabe 16.2. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^2 \cdot \exp\left(x^3 - 4x\right).$$

Aufgabe 16.3. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

eine differenzierbare Funktion mit den Eigenschaften

$$f' = f \text{ und } f(0) = 1\,.$$

Zeige, dass $f(x) = \exp x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 16.4.*

Bestimme die Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion über ihre Potenzreihen (Satz 16.1).

Aufgabe 16.5. Bestimme die 1034871-te Ableitung der Sinusfunktion.

Aufgabe 16.6. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \sin(\cos x)\,.$$

Aufgabe 16.7. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto (\sin x)(\cos x).$$

Aufgabe 16.8. Bestimme für $n \in \mathbb{N}$ die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto (\sin x)^n.$$

Aufgabe 16.9. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ eine konvergente Potenzreihe. Bestimme die Ableitungen $f^{(k)}(a)$.

Aufgabe 16.10.*

Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \frac{e^x}{x^2+1},$$

streng wachsend ist.

Aufgabe 16.11.*

Zeige, dass die Sinus- bzw. die Kosinusfunktion die folgenden Werte besitzt.

a)

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b)

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

c)

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aufgabe 16.12. Zeige, dass die reelle Sinusfunktion eine bijektive, streng wachsende Funktion

$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert, und dass die reelle Kosinusfunktion eine bijektive, streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert.

Aufgabe 16.13. Zeige, dass die reelle Tangensfunktion eine bijektive, streng wachsende Funktion

$$]-\pi/2, \pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}$$

und die reelle Kotangensfunktion eine bijektive streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

induziert.

Aufgabe 16.14. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine periodische Funktion und

$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine beliebige Funktion.

a) Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ wieder periodisch ist.

b) Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $f \circ g$ nicht periodisch sein muss.

Aufgabe 16.15. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige periodische Funktion. Zeige, dass f beschränkt ist.

Aufgabe 16.16. Bestimme die Ableitungen von Arkussinus und Arkuskosinus.

Aufgabe 16.17.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x}.$$

a) Zeige, dass f eine stetige Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}$ definiert.

b) Bestimme das Urbild u von 0 unter f sowie $f'(u)$ und $(f^{-1})'(0)$. Fertige eine grobe Skizze für die Umkehrfunktion f^{-1} an.

Aufgabe 16.18.*

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto f(x) = \pi^x + x^e.$$

Aufgabe 16.19.*
Wir betrachten die Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$
a) Untersuche das Monotonieverhalten dieser Funktion.

b) Zeige, dass diese Funktion injektiv ist.

c) Bestimme das Bild von f.

d) Man gebe die Umkehrfunktion auf dem Bild zu dieser Funktion an.

e) Skizziere den Funktionsgraphen von f.

Aufgabe 16.20.*
Betrachte die Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = (2x+3)e^{-x^2}.$$
Bestimme die Nullstellen und die lokalen (globalen) Extrema von f. Fertige eine grobe Skizze für den Funktionsverlauf an.

Aufgabe 16.21. Diskutiere den Funktionsverlauf von
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = e^{-2x} - 2e^{-x}.$$
Bestimme insbesondere das Monotonieverhalten, Extrema von f, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und ebenso für die Ableitung f'.

Aufgabe 16.22. Skizziere die Funktion
$$g\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \sin\frac{1}{x}.$$

Aufgabe 16.23. Zeige, dass die durch
$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0\,, \\ 0 \text{ sonst}\,, \end{cases}$$
definierte Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
stetig ist. Ist der Graph dieser Funktion „zeichenbar“?

Aufgabe 16.24. Bestimme für die folgenden Funktionen, ob der Funktionslimes existiert und welchen Wert er gegebenenfalls annimmt.

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$,
(2) $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2}{x}$,

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2}$,
(4) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x}$.

Aufgabe 16.25. Bestimme für die folgenden Funktionen, ob der Funktionslimes für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \to 0$, existiert und welchen Wert er gegebenenfalls annimmt.

(1) $\sin \frac{1}{x}$,
(2) $x \cdot \sin \frac{1}{x}$,
(3) $\frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{x}$.

Aufgabe 16.26.*

Zu einem Startwert $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ sei eine Folge rekursiv durch

$$x_{n+1} := \sin x_n$$

definiert. Entscheide, ob $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 16.27. Zeige, dass die Folge

$$x_n := \sin n$$

nicht konvergiert.

16.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 16.28. (3 Punkte)

Bestimme die linearen Funktionen, die tangential zur Exponentialfunktion sind.

Aufgabe 16.29. (2 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^x.$$

Aufgabe 16.30. (4 Punkte)

Es seien

$$f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

periodische Funktionen mit den Periodenlängen L_1 bzw. L_2. Der Quotient L_1/L_2 sei eine rationale Zahl. Zeige, dass auch $f_1 + f_2$ eine periodische Funktion ist.

Die folgende Aufgabe soll ohne Bezug auf die zweite Ableitung gelöst werden.

Aufgabe 16.31. (4 Punkte)

Bestimme die Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \sin x + \cos x.$$

Aufgabe 16.32. (5 Punkte)

Wir möchten $\pi/2$ möglichst genau als kleinste Nullstelle des Kosinus mit Hilfe der Kosinusreihe

$$\cos x \,=\, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

und der Intervallhalbierung des Zwischenwertsatzes (im Sinne von Verfahren 11.3) bestimmen. Dabei haben wir das Problem, dass der Kosinus numerisch nicht exakt berechnet werden kann, da er ja unendlich viele Summanden besitzt. Deshalb verwenden wir die Idee, als n-te Approximation y_n für $\pi/2$ die untere Intervallgrenze der n-ten Intervallhalbierung (des Ausgangsintervalls $[1,2]$) für die Nullstelle der abgeschnittenen Kosinusreihe $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ zu verwenden (man macht also eine zunehmend feinere Intervallschachtelung einer zunehmend besseren Approximation der Kosinusfunktion)

Man entwerfe ein Computer-Programm (Pseudocode), das die Folgenglieder y_n berechnet und nacheinander ausdruckt.

• Der Computer besitzt beliebig viele Speicher, die rationale Zahlen enthalten können.

• Die natürlichen Zahlen liegen in einer Datenbank bereit (diese müssen also nicht erzeugt werden).

• Er kann einen Speicherinhalt in einen weiteren Speicher schreiben.

• Er kann die rationalen Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division durch eine Zahl $\neq 0$) ausführen und das Ergebnis in einen weiteren Speicher schreiben.

• Er kann Speicherinhalte der Größe nach vergleichen und davon abhängig zu Programmzeilen springen.

• Er kann Speicherinhalte und vorgegebene Texte ausdrucken.

(Wir behaupten nicht, dass diese Methode eine gegen $\pi/2$ konvergente Folge liefert).

Aufgabe 16.33. (2 Punkte)

Bestimme den Grenzwert $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

17. Vorlesung - Taylor-Reihe

So sah Vorli als Welpe aus.

Aus großer Macht folgt große Verantwortung

Ben Parker

17.1. **Die Taylor-Formel.**

Brook Taylor (1685-1731)

Bisher haben wir nur Potenzreihen der Form $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ betrachtet; die Variable x darf jetzt auch durch die „verschobene Variable“ $x - a$ ersetzt werden, um das lokale Verhalten im *Entwicklungspunkt* a beschreiben zu können. Konvergenz bedeutet in diesem Fall, dass es ein $\epsilon > 0$ derart gibt, dass für

$$x \in]a - \epsilon, a + \epsilon[$$

die Reihe konvergiert. In dieser Situation ist die durch die Potenzreihe dargestellte Funktion wieder differenzierbar und die Ableitung wird durch die summmandenweise genommene Ableitung wie in Satz 16.1 beschrieben. Zu einer konvergenten Potenzreihe

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

bilden die Teilpolynome $\sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$ polynomiale Approximationen für die Funktion f im Punkt a. Ferner ist f in a beliebig oft differenzierbar und die Ableitungen im Punkt a lassen sich direkt aus der Potenzreihe ablesen, und zwar ist

$$f^{(n)}(a) = n! c_n .$$

Wir fragen uns nun umgekehrt, inwiefern man aus den höheren Ableitungen einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion approximierende Polynome (oder eine Potenzreihe) erhalten kann. Dies ist der Inhalt der *Taylor-Entwicklung.*

Definition 17.1. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall,

$$f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine n-mal differenzierbare Funktion und $a \in I$. Dann heißt

$$T_{a,n}(f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

das *Taylor-Polynom vom Grad*[32] n zu f im Entwicklungspunkt a.

Es ist also

$$T_{a,0}(f)(x) := f(a)$$

die konstante Approximation,

$$T_{a,1}(f)(x) := f(a) + f'(a)(x-a)$$

die lineare Approximation, wie sie im Konzept der linearen Approximierbarkeit vorkommt,

$$T_{a,2}(f)(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

die quadratische Approximation,

$$T_{a,3}(f)(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3$$

die Approximation vom Grad 3, u.s.w. Das Taylor-Polynom zum Grad n ist dasjenige (eindeutig bestimmte) Polynom vom Grad $\leq n$, das mit f an der Stelle a bis zur n-ten Ableitung übereinstimmt.

[32] Oder genauer das Taylor-Polynom vom Grad $\leq n$. Wenn die n-te Ableitung in a null ist, so besitzt das n-te Taylor-Polynom einen Grad kleiner als n.

Satz 17.2. *Es sei I ein reelles Intervall,*

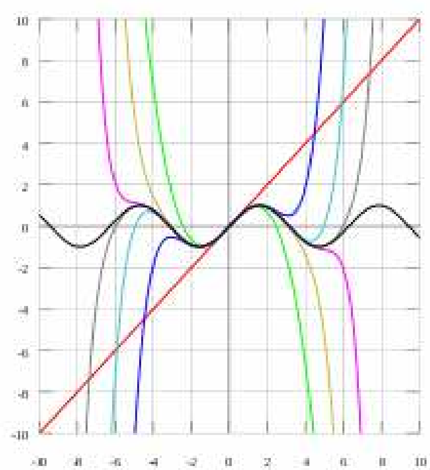
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion und $a \in I$ ein innerer Punkt des Intervalls. Dann gibt es zu jedem Punkt $x \in I$ ein $c \in I$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Dabei kann c zwischen a und x gewählt werden.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □



Die reelle Sinusfunktion zusammen mit verschiedenen approximierenden Taylorpolynomen (von ungeradem Grad).

Korollar 17.3. *Es sei I ein beschränktes abgeschlossenes Intervall,*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, $a \in I$ ein innerer Punkt und $B := \max\left(\left|f^{(n+1)}(c)\right|, c \in I\right)$. Dann gilt zwischen $f(x)$ und dem n-ten Taylor-Polynom die Fehlerabschätzung

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \frac{B}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}.$$

Beweis. Die Zahl B existiert aufgrund von Satz 11.13, da nach Voraussetzung die $(n+1)$-te Ableitung $f^{(n+1)}$ stetig auf dem kompakten Intervall I ist. Die Aussage folgt somit direkt aus Satz 17.2. □

17.2. **Kriterien für Extrema.**

In der fünfzehnten Vorlesung haben wir gesehen, dass es eine notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums einer differenzierbaren Funktion ist, dass die Ableitung an der in Frage stehenden Stelle gleich 0 ist. Wir formulieren nun ein wichtiges hinreichendes Kriterium, das auf die höheren Ableitungen Bezug nimmt.

Satz 17.4. *Es sei I ein reelles Intervall,*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, und $a \in I$ ein innerer Punkt des Intervalls. Es gelte

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0 \text{ und } f^{(n+1)}(a) \neq 0\,.$$

Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Wenn n gerade ist, so besitzt f in a kein lokales Extremum.*
(2) *Sei n ungerade. Bei $f^{(n+1)}(a) > 0$ besitzt f in a ein isoliertes Minimum.*
(3) *Sei n ungerade. Bei $f^{(n+1)}(a) < 0$ besitzt f in a ein isoliertes Maximum.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen wird die Taylor-Formel zu

$$f(x) - f(a) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

mit c (abhängig von x) zwischen a und x. Je nachdem, ob $f^{(n+1)}(a) > 0$ oder $f^{(n+1)}(a) < 0$ ist, gilt auch (wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der $(n+1)$-ten Ableitung) $f^{(n+1)}(x) > 0$ bzw. $f^{(n+1)}(x) < 0$ für $x \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$ für ein geeignetes $\epsilon > 0$. Für diese x ist auch $c \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$, so dass das Vorzeichen von $f^{(n+1)}(c)$ vom Vorzeichen von $f^{(n+1)}(a)$ abhängt. Bei n gerade ist $n+1$ ungerade und daher wechselt $(x-a)^{n+1}$ das Vorzeichen bei $x = a$ (bei $x < a$ ist das Vorzeichen negativ und bei $x > a$ ist es positiv). Da das Vorzeichen von $f^{(n+1)}(c)$ sich nicht ändert, ändert sich das Vorzeichen von $f(x) - f(a)$. Das bedeutet, dass kein Extremum vorliegen kann. Sei nun n ungerade. Dann ist $n+1$ gerade, so dass $(x-a)^{n+1} > 0$ für alle $x \neq a$ in der Umgebung ist. Das bedeutet in der Umgebung bei $f^{(n+1)}(a) > 0$, dass $f(x) > f(a)$ ist und in a ein isoliertes Minimum vorliegt, und bei $f^{(n+1)}(a) < 0$, dass $f(x) < f(a)$ ist und in a ein isoliertes Maximum vorliegt. □

Ein Spezialfall davon ist, dass bei $f'(a) = 0$ und $f''(a) > 0$ ein isoliertes Minimum und bei $f'(a) = 0$ und $f''(a) < 0$ ein isoliertes Maximum vorliegt.

17.3. **Die Taylor-Reihe.**

Definition 17.5. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall,

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine unendlich oft differenzierbare Funktion und $a \in I$. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die *Taylor-Reihe* zu f im Entwicklungspunkt a.

Satz 17.6. *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ eine Potenzreihe, die auf dem Intervall $]-r,r[$ konvergiere, und es sei*

$$f\colon\ ]-r,r[\longrightarrow \mathbb{R}$$

die dadurch definierte Funktion. Dann ist f unendlich oft differenzierbar und die Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt 0 stimmt mit der vorgegebenen Potenzreihe überein.

Beweis. Die unendliche Differenzierbarkeit folgt direkt aus Satz 16.1 durch Induktion. Daher existiert die Taylor-Reihe insbesondere im Punkt 0. Es ist also lediglich noch zu zeigen, dass die n-te Ableitung von f in 0 den Wert $c_n n!$ besitzt. Dies folgt aber ebenfalls aus Satz 16.1. $\square$

Beispiel 17.7. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x),$$

mit

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0\,, \\ e^{-\frac{1}{x}}, & \text{falls } x > 0\,. \end{cases}$$

Wir behaupten, dass diese Funktion unendlich oft differenzierbar ist, was nur im Nullpunkt nicht offensichtlich ist. Man zeigt zunächst durch Induktion, dass sämtliche Ableitungen von $e^{-\frac{1}{x}}$ (und der rechtsseitige Differenzenquotient im Nullpunkt) die Form $p\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ mit gewissen Polynomen $p \in \mathbb{R}[Z]$ besitzen und dass davon der Limes für $x \to 0$, $x > 0$ stets 0 ist (siehe Aufgabe 17.18 und Aufgabe 17.19.). Daher ist der (rechtsseitige) Limes für alle Ableitungen gleich 0 und existiert. Alle Ableitungen am Nullpunkt haben also den Wert 0 und daher ist die Taylor-Reihe im Nullpunkt die Nullreihe. Die Funktion f ist aber in keiner Umgebung des Nullpunktes die Nullfunktion, da $e^{-\frac{1}{x}} > 0$ ist.

17.4. **Potenzreihenansatz.**

Die Taylor-Reihe einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion liefert häufig eine gute Approximation für die Funktion. Definitionsgemäß muss man zur Berechnung der Taylor-Reihe die Funktion ableiten. Für „implizit“ gegebene Funktionen kann man sie aber auch direkt bestimmen, was wir hier anhand typischer Beispiele demonstrieren (*Potenzreihenansatz*). Als Faustregel gilt dabei, dass man lediglich die n-ten Ableitungen der die Funktion definierenden Daten kennen muss, um das n-te Taylor-Polynom der Funktion zu bestimmen. Wir verzichten weitgehend auf Konvergenzüberlegungen. Wenn aber die Daten durch Potenzreihen gegeben sind, so konvergieren die im Folgenden beschriebenen Taylor-Reihen auf einem gewissen Intervall und stellen eine Funktion dar.

Bemerkung 17.8. Es seien

$$f\colon I \longrightarrow J$$

und

$$g\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen, für die die Taylor-Polynome in den Entwicklungspunkten $a \in I$ und $b := f(a) \in J$ bis zum Grad n bekannt seien (insbesondere seien also diese Funktionen bis zur Ordnung n differenzierbar). Dann ist die hintereinandergeschaltete Funktion

$$g \circ f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

bis zur Ordnung n differenzierbar. Das zugehörige Taylor-Polynom lässt sich direkt berechnen: Sei dazu $S = \sum_{i=0}^{n} c_i(x-a)^i$ das Taylor-Polynom zu f und $T = \sum_{j=0}^{n} d_j(y-b)^j$ das Taylor-Polynom zu g. Dann stimmt das Taylor-Polynom von $g \circ f$ bis zum Grad n mit dem Polynom $T \circ S$ bis zum Grad n überein (das Polynom $T \circ S$ hat im Allgemeinen einen Grad $> n$. Man denke an $f(x) = x^2$ und $g(y) = y^2$ und $n = 2$). D.h. man muss in T überall y durch S ersetzen, durch Umsortieren ein Polynom in $x - a$ erhalten und davon die Monome vom Grad $\geq n+1$ weglassen (diese Monome muss man also nicht ausrechnen).

Bemerkung 17.9. Es sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine n-fach differenzierbare Funktion, für die das Taylor-Polynom im Entwicklungspunkt $a \in I$ bis zum Grad n bekannt sei und für die $f(a) \neq 0$ sei. Dann ist die Funktion $1/f$ auf einem offenen Intervall um a definiert und nach Lemma 14.7 (4) differenzierbar in a. Aufgrund von Satz 9.13 gilt (für $|x| < 1$)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

bzw.

$$\frac{1}{x} = \sum_{i=0}^{\infty} (1-x)^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (x-1)^i$$

d.h. für die Funktion $\frac{1}{x}$ ist die Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt 1 bekannt. Wir ersetzen f durch $h = \frac{1}{f(a)} f$, so dass $h(a) = 1$ gilt. Dann kann man die Funktion $1/h$ als die Verknüpfung von h mit der Funktion $\frac{1}{x}$ schreiben. Daher erhält man wegen Bemerkung 17.8 das Taylor-Polynom bis zum Grad n von $1/h$, indem man in $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(x-1)^i$ das Taylor-Polynom (bis zum Grad n) von h im Entwicklungspunkt a einsetzt und beim Grad n abschneidet. Das Taylor-Polynom von $1/f$ erhält man, indem man durch $f(a)$ teilt.

Beispiel 17.10. Wir möchten die Taylor-Reihe bis zum Grad 6 von $\frac{1}{\cos x}$ im Entwicklungspunkt 0 gemäß Bemerkung 17.9 bestimmen. Nach Definition 13.12 ist

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\ &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \ldots \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 \ldots .\end{aligned}$$

Zur Berechnung des Taylor-Polynoms bis zum Grad 6 braucht man nur die angeführte Entwicklung des Kosinus bis zum Grad 6. Das Taylorpolynom bis zum Grad 6 von $1/\cos x$ im Nullpunkt ist somit

$$\begin{aligned}& 1 - \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6\right) + \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6\right)^2 \\ & -\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6\right)^3 \\ = \; & 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6 + \cdots + \frac{1}{8}x^6 + \ldots \\ = \; & 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \ldots .\end{aligned}$$

Dabei wurden nur die für den Grad 6 relevanten Monome ausgerechnet. Das gesuchte Taylorpolynom ist also

$$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 .$$

Bemerkung 17.11. Es sei

$$f\colon I \longrightarrow J$$

(I, J seien reelle Intervalle) eine bijektive, n-mal differenzierbare Funktion, und in einem festen Punkt $a \in I$ gelte $f'(a) \neq 0$. Nach Satz 14.9 ist die Umkehrfunktion

$$g = f^{-1}\colon J \longrightarrow I$$

ebenfalls differenzierbar. Die Taylorreihe bis zum Grad n der Umkehrfunktion g kann man aus der Taylorreihe S bis zum Grad n von f berechnen. Man macht dazu ausgehend von $f \circ g = \mathrm{Id}$ den Ansatz

$$S \circ T \overset{!}{=} x.$$

Dabei steht rechts die Taylor-Reihe der Identität, und links muss man das zu bestimmende Polynom T mit unbestimmten Koeffizienten ansetzen und in das Polynom S einsetzen (die Gleichung kann nicht als eine polynomiale

Identität gelten, sondern nur, wenn man Terme vom Grad $\geq n+1$ ignoriert). Der Einfachheit halber sei $a = 0$ und $f(a) = 0$. Es sei $S = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ (mit $a_1 \neq 0$) vorgegeben und $T = b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$ gesucht. Dies führt zur Gesamtbedingung

$$\begin{aligned} x &= S \circ T \\ &= a_1T + a_2T^2 + \cdots + a_nT^n \\ &= a_1(b_1x + \cdots + b_nx^n) + a_2(b_1x + \cdots + b_nx^n)^2 + \\ & \quad \cdots + a_n(b_1x + \cdots + b_nx^n)^n. \end{aligned}$$

Damit erhält man die Einzelbedingungen (durch Koeffizientenvergleich zu jedem Grad $\leq n$)

$$1 = a_1b_1,$$
$$0 = a_1b_2 + a_2b_1^2,$$
$$0 = a_1b_3 + 2a_2b_1b_2 + a_3b_1^3,$$

aus denen man sukzessive die Koeffizienten $b_1, b_2, b_3, \ldots$ berechnen kann.

17. Arbeitsblatt

17.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 17.1. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 3 der rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 5}{x - 2}$$

im Entwicklungspunkt 0.

Aufgabe 17.2. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 4 der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \sin x \cos x,$$

im Nullpunkt.

Aufgabe 17.3. Bestimme sämtliche Taylor-Polynome der Funktion

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$

im Entwicklungspunkt $a = 3$.

Aufgabe 17.4. Bestimme das Polynom

$$f(z) = z^3 + 3z^2 - 7z - 4.$$

in der neuen Variablen $z - 2$ (also das umentwickelte Polynom) auf zwei verschiedene Arten, nämlich

a) direkt durch Einsetzen,

b) über das Taylor-Polynom im Entwicklungspunkt 2.

Aufgabe 17.5. Bestimme die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion für einen beliebigen Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 17.6.*

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sin x}$$

im Reellen.

a) Bestimme den Definitionsbereich von f.

b) Skizziere f für x zwischen -2π und 2π.

c) Bestimme die ersten drei Ableitungen von f.

d) Bestimme das Taylor-Polynom der Ordnung 3 von f im Punkt $\frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 17.7. Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ im Punkt $a = 3$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 3 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Aufgabe 17.8.*

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 3 zur Funktion

$$f(x) = x \cdot \sin x$$

im Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 17.9.*

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $a = 2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 2 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Aufgabe 17.10. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Vergleiche die polynomiale Interpolation zu $n+1$ gegebenen Punkten und die Taylor-Polynome vom Grad n zu einem Punkt.

Aufgabe 17.11. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine im Punkt a n-fach differenzierbare Funktion. Zeige, dass das n-te Taylor-Polynom zu f im Punkt a, geschrieben in der verschobenen Variablen $x - a$, gleich dem n-ten Taylor-Polynom der Funktion $g(x) = f(x+a)$ im Nullpunkt (geschrieben in der Variablen x) ist.

Aufgabe 17.12. Man mache sich klar, dass man zu einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das n-te Taylor-Polynom von f im Entwicklungspunkt b nicht aus dem n-ten Taylor-Polynom in einem Entwicklungspunkt a bestimmen kann.

Aufgabe 17.13. Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynome n-ten Grades und es seien $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ Punkte und $n_1, \ldots, n_k \geq 1$ natürliche Zahlen mit

$$\sum_{j=1}^{k} n_j > n.$$

Die Ableitungen von f und g in den Punkten a_j sollen bis einschließlich zur $(n_j - 1)$-ten Ableitung übereinstimmen. Zeige $f = g$.

Man mache sich zuerst die Aussage bei $k = 1$ und $n_1 = n + 1$ und bei $k = n + 1$ und $n_j = 1$ für alle j klar.

Aufgabe 17.14. Es sei $f(x) := \frac{x^2-x+5}{x^2+3}$. Bestimme ein Polynom h vom Grad ≤ 3, das in den beiden Punkten $x = 0$ und $x = 1$ die gleichen linearen Approximationen wie f besitzt.

Aufgabe 17.15.*

Es sei $f(x) = \sin x$. Bestimme Polynome P, Q, R vom Grad ≤ 3, die jeweils folgende Bedingungen erfüllen.

(a) P stimmt mit f an den Stellen $-\pi, 0, \pi$ überein.

(b) Q stimmt mit f in 0 und in π bis zur ersten Ableitung überein.

(c) R stimmt mit f in $\pi/2$ bis zur dritten Ableitung überein.

Aufgabe 17.16.*

Wir betrachten die Funktion

$$F(x) = x^4 - x^3.$$

(1) Bestimme die Nullstellen der Funktion.
(2) Bestimme, in welchen Abschnitten die Funktion positiv bzw. negativ ist.
(3) Bestimme die Extrema der Funktion.

Aufgabe 17.17.*

Bestimme die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t) = t^2 e^{-t}.$$

Aufgabe 17.18. Es sei $p \in \mathbb{R}[Y]$ ein Polynom und

$$g\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto g(x) = p\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zeige, dass die Ableitung $g'(x)$ ebenfalls von der Form

$$g'(x) \,=\, q\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

mit einem weiteren Polynom q ist.

Aufgabe 17.19. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}$ die Eigenschaft

$$\lim_{x \in \mathbb{R}_+,\, x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) \,=\, 0$$

besitzt.

Aufgabe 17.20. Bestimme das Taylor-Polynom der dritten Ordnung zur Funktion $\frac{1}{x^2+1}$ im Nullpunkt mit dem in Bemerkung 17.9 beschriebenen Potenzreihenansatz.

Aufgabe 17.21.*

Es sei

$$f(x) \,=\, -3x + x^3.$$

Wegen

$$f'(x) \,=\, -3 + 3x^2$$

ist diese Funktion auf dem offen Intervall $]-1,1[$ streng fallend und damit injektiv (mit dem Bildintervall $]-2,2[$). Dabei ist $f(0) \,=\, 0$. Es sei

$$g(y) \,=\, \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^k$$

die Umkehrfunktion, die wir als eine Potenzreihe ansetzen. Bestimme aus der Bedingung

$$(g(f(x)) \,=\, x$$

die Koeffizienten b_0, b_1, b_2, b_3, b_4.

Aufgabe 17.22. Bestimme das Taylor-Polynom bis zur vierten Ordnung der Umkehrfunktion des Sinus im Punkt 0 mit dem in Bemerkung 11.17 beschriebenen Potenzreihenansatz.

17.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 17.23. (4 Punkte)

Bestimme die Taylor-Polynome im Entwicklungspunkt 0 bis zum Grad 4 der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sin(\cos x) + x^3 \exp\left(x^2\right).$$

Aufgabe 17.24. (5 Punkte)

Es sei $f(x) := \frac{x^2+2x+1}{x^2+5}$. Bestimme ein Polynom h vom Grad ≤ 3, das in den beiden Punkten $x = 0$ und $x = -1$ die gleichen linearen Approximationen wie f besitzt.

Aufgabe 17.25. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der Funktion

$$f\colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = (\sin x)(\cos x),$$

hinsichtlich Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraphen.

Aufgabe 17.26. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der Funktion

$$f\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \sin^3 x - \frac{1}{4}\sin x,$$

hinsichtlich Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraphen.

Aufgabe 17.27. (4 Punkte)

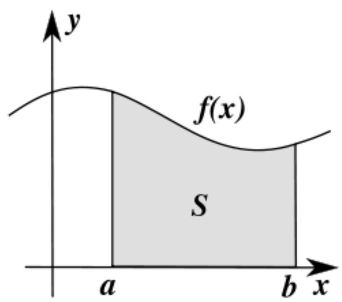
Bestimme das Taylor-Polynom bis zur vierten Ordnung des natürlichen Logarithmus im Punkt 1 mit dem in Bemerkung 11.17 beschriebenen Potenzreihenansatz aus der Potenzreihe der Exponentialfunktion.

Aufgabe 17.28. (6 Punkte)

Zu $n \geq 3$ sei A_n der Flächeninhalt eines in den Einheitskreis eingeschriebenen gleichmäßigen n-Eckes. Zeige $A_n \leq A_{n+1}$.

18. Vorlesung - Integrierbarkeit

Da der Wurf ziemlich groß war, und Vorli als letzte geboren wurde, bekam sie wenig Milch ab. Die prallen Zitzen waren immer schon von den Geschwistern besetzt. Eine Zeitlang stand es kritisch um sie und sie musste von Hand aufgezogen werden.

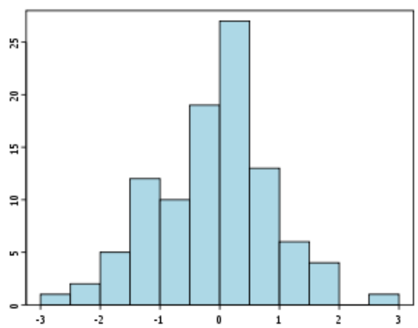


In den folgenden Vorlesungen beschäftigen wir uns mit der *Integrationstheorie*, d.h. wir wollen den Flächeninhalt derjenigen Fläche, die durch einen Funktionsgraphen einer Funktion (dem *Integranden*)

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

und der x-Achse begrenzt wird, systematisch studieren und berechnen. Zugleich ergibt sich ein direkter Zusammenhang zum Auffinden von *Stammfunktionen* von f, das sind Funktionen, deren Ableitung f ist. Der Flächeninhalt ist kein unproblematischer Begriff, der erst im Rahmen der *Maßtheorie* grundlegend behandelt wird. Dennoch handelt es sich um einen intuitiv leicht zugänglichen Begriff, von dem wir hier nur einige wenige naheliegende Grundtatsachen verwenden. Sie dienen hier auch nirgendwo der Argumentation, sondern lediglich der Motivation. Ausgangspunkt ist, dass der Flächeninhalt eines Rechtecks mit gegebenen Seitenlängen einfach das Produkt der beiden Seitenlängen ist, und dass der Flächeninhalt einer Fläche, die man mit Rechtecken „ausschöpfen“ kann, als der Limes der Summe der beteiligten Rechtecksinhalte erhalten werden kann. Beim *Riemannschen Integral*, das zumindest für stetige Funktionen eine befriedigende Theorie liefert, beschränkt man sich auf solche Rechtecke, die parallel zum Koordinatensystem liegen, deren Breite (Grundseite auf der x-Achse) beliebig variieren darf und deren Höhe in Beziehung zu den Funktionswerten über der Grundseite steht. Dadurch werden die Funktionen durch sogenannte *Treppenfunktionen* approximiert.

18.1. **Treppenfunktionen.**



Eine Treppenfunktion. Im statistischen Kontext spricht man von Histogrammen oder von Säulendiagrammen.

Definition 18.1. Sei I ein reelles Intervall mit den Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$. Dann heißt eine Funktion

$$t\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine *Treppenfunktion*, wenn es eine Unterteilung

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

von I derart gibt, dass t auf jedem offenen Teilintervall $]a_{i-1}, a_i[$ konstant ist.

Diese Definition stellt also keine Bedingung an den Wert der Funktion an den Unterteilungspunkten. Das Intervall $]a_{i-1}, a_i[$ nennt man i-tes Teilintervall, und $a_i - a_{i-1}$ heißt Länge dieses Teilintervalls. Wenn die Länge der Teilintervalle konstant ist, so spricht man von einer *äquidistanten Unterteilung*.

Definition 18.2. Sei I ein reelles Intervall mit den Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$ und sei

$$t\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Treppenfunktion zur Unterteilung $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ und den Werten t_i, $i = 1, \ldots, n$. Dann heißt

$$T := \sum_{i=1}^{n} t_i(a_i - a_{i-1})$$

das *Treppenintegral* von t auf I.

Das Treppenintegral wird auch mit $\int_a^b t(x)\,dx$ bezeichnet. Bei einer äquidistanten Unterteilung mit der Teilintervalllänge $\frac{b-a}{n}$ ist das Treppenintegral gleich $\frac{b-a}{n}(\sum_{i=1}^n t_i)$. Das Treppenintegral ist nicht von der gewählten Unterteilung abhängig, bezüglich der eine Treppenfunktion vorliegt (man kann also die Unterteilung verfeinern).

Definition 18.3. Sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt eine Treppenfunktion

$$t\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine *obere Treppenfunktion* zu f, wenn $t(x) \geq f(x)$[33] für alle $x \in I$ ist. Eine Treppenfunktion

$$s\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt eine *untere Treppenfunktion* zu f, wenn $s(x) \leq f(x)$ für alle $x \in I$ ist.

Eine obere (untere) Treppenfunktion zu f gibt es genau dann, wenn f nach oben (nach unten) beschränkt ist.

Definition 18.4. Sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zu jeder oberen Treppenfunktion

$$t\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

von f zur Unterteilung a_i, $i = 0, \ldots, n$, und den Werten t_i, $i = 1, \ldots, n$, heißt das Treppenintegral

$$T := \sum_{i=1}^n t_i(a_i - a_{i-1})$$

ein *oberes Treppenintegral* (oder eine *Obersumme*) von f auf I.

Definition 18.5. Sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zu jeder unteren Treppenfunktion

$$s\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

von f zur Unterteilung a_i, $i = 0, \ldots, n$, und den Werten s_i, $i = 1, \ldots, n$, heißt

$$S := \sum_{i=1}^n s_i(a_i - a_{i-1})$$

ein *unteres Treppenintegral* (oder eine *Untersumme*) von f auf I.

[33]Dafür schreibt man auch $t \geq f$.

Verschiedene obere (untere) Treppenfunktionen liefern natürlich verschiedene Obersummen (Untersummen). Für die weiteren Integrationskonzepte brauchen wir zwei Begriffe, die sich auf beliebige reelle Teilmengen beziehen.

Definition 18.6. Zu einer nichleeren Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt eine obere Schranke T von M das *Supremum* von M, wenn $T \leq S$ für alle oberen Schranken S von M gilt.

Definition 18.7. Zu einer nichleeren Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt eine untere Schranke t von M das *Infimum* von M, wenn $t \geq s$ für alle unteren Schranken s von M gilt.

Die Existenz von Infimum und Supremum ergibt sich aus der Vollständigkeit der reellen Zahlen.

Satz 18.8. *Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen besitzt ein Supremum in* $\mathbb{R}$.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Definition 18.9. Sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine nach oben beschränkte Funktion. Dann heißt das Infimum von sämtlichen Obersummen von oberen Treppenfunktionen von f das *Oberintegral* von f.

Definition 18.10. Sei I ein beschränktes Intervall und sei

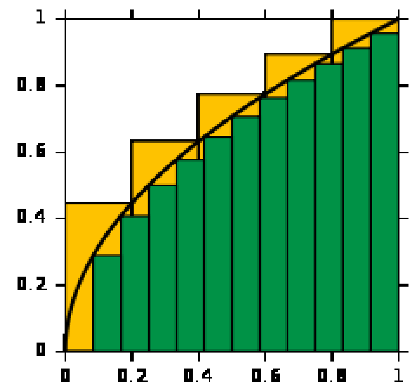
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine nach unten beschränkte Funktion. Dann heißt das Supremum von sämtlichen Untersummen von unteren Treppenfunktionen von f das *Unterintegral* von f.

Die Beschränkung nach unten stellt sicher, dass es überhaupt eine untere Treppenfunktion gibt und damit die Menge der Untersummen nicht leer ist. Unter dieser Bedingung allein muss nicht unbedingt die Menge der Untersummen ein Supremum besitzen. Für (beidseitig) beschränkte Funktionen existiert hingegen stets das Ober- und das Unterintegral. Bei einer gegebenen Unterteilung gibt es eine kleinste obere (größte untere) Treppenfunktion, die durch die Suprema (Infima) der Funktion auf den Teilintervallen festgelegt ist (bei stetigen Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen sind das Maxima bzw. Minima). Für das Integral muss man aber Treppenfunktionen zu sämtlichen Unterteilungen berücksichtigen.

18.2. **Riemann-integrierbare Funktionen.**

Im Folgenden sprechen wir manchmal von einem kompakten Intervall, das ist ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall, also von der Form $I = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.



Eine untere und eine obere Treppenfunktion. Der grüne Flächeninhalt ist eine Untersumme und der gelbe Flächeninhalt (teilweise verdeckt) ist eine Obersumme.

Definition 18.11. Sei I ein kompaktes Intervall und sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt f *Riemann-integrierbar*, wenn Ober- und Unterintegral von f existieren und übereinstimmen.

Historisch korrekter ist es, von *Darboux-integrierbar* zu sprechen.

Definition 18.12. Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall. Zu einer Riemann-integrierbaren Funktion

$$f\colon I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto f(t),$$

heißt das Oberintegral (das nach Definition mit dem Unterintegral übereinstimmt) das *bestimmte Integral* von f über I. Es wird mit

$$\int_a^b f(t)\, dt \text{ oder mit } \int_I f(t)\, dt$$

bezeichnet.

Das Berechnen von solchen Integralen nennt man *integrieren*. Man sollte sich keine allzu großen Gedanken über das Symbol dt machen. Darin wird ausgedrückt, bezüglich welcher Variablen die Funktion zu integrieren ist. Es kommt dabei aber nicht auf den Namen der Variablen an, d.h. es ist

$$\int_a^b f(t)\, dt \;=\; \int_a^b f(x)\, dx.$$

Lemma 18.13. *Sei I ein kompaktes Intervall und sei*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es gebe eine Folge von unteren Treppenfunktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n \leq f$ und eine Folge von oberen Treppenfunktionen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \geq f$. Es sei vorausgesetzt, dass die beiden zugehörigen Folgen der Treppenintegrale konvergieren und dass ihr Grenzwert übereinstimmt. Dann ist f Riemann-integrierbar, und das bestimmte Integral ist gleich diesem Grenzwert, also

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty}\int_a^b t_n(x)\,dx$$

Beweis. Siehe Aufgabe 18.10. □

Beispiel 18.14. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon\, [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto t^2,$$

die bekanntlich in diesem Intervall streng wachsend ist. Für ein Teilintervall $[a,b] \subseteq [0,1]$ ist daher $f(a)$ das Minimum und $f(b)$ das Maximum der Funktion über diesem Teilintervall. Sei n eine positive natürliche Zahl. Wir unterteilen das Intervall $[0,1]$ in die n gleichlangen Teilintervalle

$$\left[i\frac{1}{n},(i+1)\frac{1}{n}\right], i = 0,\ldots,n-1,$$

der Länge $\frac{1}{n}$. Das Treppenintegral zu der zugehörigen unteren Treppenfunktionen ist

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\left(i\frac{1}{n}\right)^2 \;=\; \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 \;=\; \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right) \;=\; \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

(siehe Aufgabe 2.10 für die Formel für die Summe der Quadrate). Da die beiden Folgen $(1/2n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(1/6n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergieren, ist der Limes für $n \to \infty$ von diesen Treppenintegralen gleich $\frac{1}{3}$. Das Treppenintegral zu der zugehörigen oberen Treppenfunktionen ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\left((i+1)\frac{1}{n}\right)^2 &= \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)^2\\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n} j^2\\ &= \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right)\\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.\end{aligned}$$

Der Limes davon ist wieder $\frac{1}{3}$. Da beide Limiten übereinstimmen, müssen nach Lemma 18.13 überhaupt das Ober- und das Unterintegral übereinstimmen, so dass die Funktion Riemann-integrierbar ist und das bestimmte Integral

$$\int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3}$$

ist.

Lemma 18.15. *Sei $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall und sei*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *Die Funktion f ist Riemann-integrierbar.*
(2) *Es gibt eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n\ b$ derart, dass die einzelnen Einschränkungen $f_i := f|_{[a_{i-1},a_i]}$ Riemann-integrierbar sind.*
(3) *Für jede Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n\ b$ sind die Einschränkungen $f_i := f|_{[a_{i-1},a_i]}$ Riemann-integrierbar.*

In dieser Situation gilt

$$\int_a^b f(t)\, dt = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(t)\, dt.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 18.12. □

Definition 18.16. Sei I ein reelles Intervall und sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt f *Riemann-integrierbar*, wenn die Einschränkung von f auf jedes kompakte Intervall $[a,b] \subseteq I$ Riemann-integrierbar ist.

Aufgrund des obigen Lemmas stimmen für ein kompaktes Intervall $[a,b]$ die beiden Definitionen überein. Die Integrierbarkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bedeutet nicht, dass $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$ eine Bedeutung hat bzw. existieren muss.

18.3. **Riemann-Integrierbarkeit stetiger Funktionen.**

Satz 18.17. *Es sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann ist f Riemann-integrierbar.

Beweis. Wir werden den Beweis, der auf dem Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit beruht, nicht durchführen. □

Lemma 18.18. *Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und es seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Ist $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in I$, so ist*
$$\begin{aligned} m(b-a) &\leq \int_a^b f(t)\, dt \\ &\leq M(b-a). \end{aligned}$$
(2) *Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$, so ist $\int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b g(t)\, dt$.*
(3) *Die Summe $f+g$ ist Riemann-integrierbar und es ist*
$$\int_a^b (f+g)(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt + \int_a^b g(t)\, dt.$$
(4) *Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\int_a^b (cf)(t)\, dt = c \int_a^b f(t)\, dt$.*
(5) *Die Funktionen* $\max(f, g)$ *und* $\min(f, g)$ *sind Riemann-integrierbar.*
(6) *Die Funktion $|f|$ ist Riemann-integrierbar.*
(7) *Das Produkt fg ist Riemann-integrierbar.*

Beweis. Für (1) bis (4) siehe Aufgabe 18.13. Für (5) siehe Aufgabe 18.15. (6) folgt direkt aus (5) wegen $|f| = \max(f, -f,)$. Für (7) siehe Aufgabe 18.16. □

18. Arbeitsblatt

18.1. Übungsaufgaben.

Gar nicht mehr lange! Wir wünschen schon jetzt frohe Weihnachten!

Aufgabe 18.1. Bestimme das Treppenintegral über $[-3, +4]$ zur Treppenfunktion, die durch

$$f(t) = \begin{cases} 5, \text{ falls } -3 \leq t \leq -2\,, \\ -3, \text{ falls } -2 < t \leq -1\,, \\ \frac{3}{7}, \text{ falls } -1 < t < -\frac{1}{2}\,, \\ 13, \text{ falls } t = -\frac{1}{2}\,, \\ \pi, \text{ falls } -\frac{1}{2} < t < e\,, \\ 0, \text{ falls } e \leq t \leq 3\,, \\ 1, \text{ falls } 3 < t \leq 4\,, \end{cases}$$

gegeben ist.

Aufgabe 18.2.*

a) Unterteile das Intervall $[-4, 5]$ in sechs gleichgroße Teilintervalle.

b) Bestimme das Treppenintegral derjenigen Treppenfunktion auf $[-4, 5]$, die auf der in a) konstruierten Unterteilung abwechselnd die Werte 2 und -1 annimmt.

Aufgabe 18.3. Man gebe ein Beispiel für eine Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ an, die nur endlich viele Werte annimmt, aber keine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 18.4. Es seien

$$f, g\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei Treppenfunktionen. Zeige, dass dann auch

(1) $f + g$,
(2) $f \cdot g$,
(3) $\max(f, g)$,
(4) $\min(f, g)$,

Treppenfunktionen sind.

Aufgabe 18.5. Es sei

$$f\colon [a, b] \longrightarrow [c, d]$$

eine Treppenfunktion und

$$g\colon [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ ebenfalls eine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 18.6. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f\colon [a,b] \longrightarrow [c,d]$$

und einer Treppenfunktion

$$g\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ keine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 18.7. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^1 t\,dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 18.8. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_1^2 t^3\,dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 18.9.*

Zeige (ohne Stammfunktionen zu verwenden)

$$\int_0^1 e^x dx \,=\, e-1.$$

Aufgabe 18.10. Sei $I=[a,b]$ ein kompaktes Intervall und sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es gebe eine Folge von Treppenfunktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n \leq f$ und eine Folge von Treppenfunktionen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \geq f$. Es sei vorausgesetzt, dass die beiden zugehörigen Folgen der Treppenintegrale konvergieren und dass ihre Grenzwerte übereinstimmen. Zeige, dass dann f Riemann-integrierbar ist und dass

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)\,dx \,=\, \int_a^b f(x)\,dx \,=\, \lim_{n\to\infty}\int_a^b t_n(x)\,dx$$

gilt.

Aufgabe 18.11.*

Es sei I ein beschränktes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine nach unten beschränkte stetige Funktion. Es sei vorausgesetzt, dass das Supremum über alle Treppenintegrale zu äquidistanten unteren Treppenfunktionen existiert. Zeige, dass dann auch das Supremum zu allen Treppenintegralen zu unteren Treppenfunktionen (also das Unterintegral) existiert und mit dem zuerst genannten Supremum übereinstimmt.

Aufgabe 18.12. Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Die Funktion f ist Riemann-integrierbar.
(2) Es gibt eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n\ b$ derart, dass die einzelnen Einschränkungen $f_i := f|_{[a_{i-1},a_i]}$ Riemann-integrierbar sind.
(3) Für jede Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n\ b$ sind die Einschränkungen $f_i := f|_{[a_{i-1},a_i]}$ Riemann-integrierbar.

Aufgabe 18.13. Es sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und es seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Ist $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in I$, so ist $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$.
(2) Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$, so ist $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.
(3) Es ist $\int_a^b f(t) + g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.
(4) Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\int_a^b (cf)(t)\,dt = c\int_a^b f(t)\,dt$.

Aufgabe 18.14. Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeige, dass

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\ dt$$

gilt.

Aufgabe 18.15.*

Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und es seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Zeige, dass auch $\max(f, g)$ Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 18.16. Es sei $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall und es seien $f,g\colon I \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Zeige, dass auch fg Riemann-integrierbar ist.

18.2. **Die Weihnachtsaufgabe für die ganze Familie.**

Aufgabe 18.17. Welches Bildungsgesetz liegt der Folge

$$1,\ 11,\ 21,\ 1211,\ 111221,\ 312211,\ \ldots$$

zugrunde?

(Es wird behauptet, dass diese Aufgabe für Grundschulkinder sehr einfach und für Mathematiker sehr schwierig ist.)

18.3. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 18.18. (2 Punkte)

Es seien

$$f,g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei Treppenfunktionen. Zeige, dass dann auch $f+g$ eine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 18.19. (4 Punkte)

Bestimme das bestimmte Integral

$$\int_a^b t^2\, dt$$

in Abhängigkeit von a und b explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 18.20. (4 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral

$$\int_{-2}^7 -t^3 + 3t^2 - 2t + 5\, dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 18.21. (3 Punkte)

Zeige, dass für die Funktion

$$]0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{x},$$

weder das Unterintegral noch das Oberintegral existiert.

Aufgabe 18.22. (6 Punkte)

Zeige, dass für die Funktion

$$]0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}},$$

das Unterintegral existiert, aber nicht das Oberintegral.

Tipp: Verwende Aufgabe 9.7.

Aufgabe 18.23. (5 Punkte)

Sei I ein kompaktes Intervall und sei

$$f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine monotone Funktion. Zeige, dass f Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 18.24. (4 Punkte)

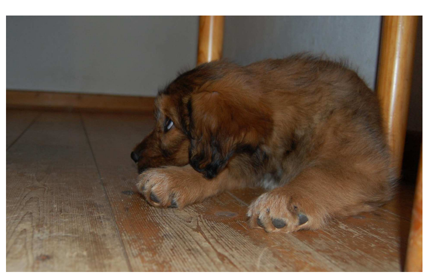
Wir betrachten die Abbildung

$$f \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},$$

die dem Bildungsgesetz aus Aufgabe 18.17 entspricht.

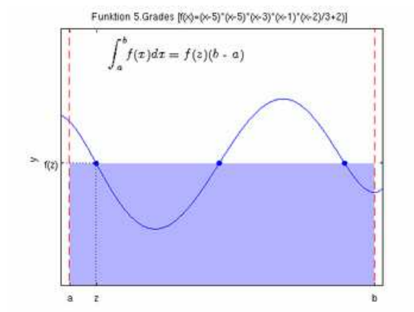
(1) Ist f wachsend?
(2) Ist f surjektiv?
(3) Ist f injektiv?
(4) Besitzt f einen Fixpunkt?

19. Vorlesung - Hauptsatz



Zuerst war sie kurz etwas beleidigt über ihre unvorteilhaften Startbedingungen.

19.1. **Der Mittelwertsatz der Integralrechnung.**



Zu einer Riemann-integrierbaren Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ kann man

$$\frac{\int_a^b f(t)\,dt}{b-a}$$

als die Durchschnittshöhe der Funktion ansehen, da dieser Wert mit der Länge $b-a$ des Grundintervalls multipliziert den Flächeninhalt unterhalb des Graphen zu f ergibt. Der *Mittelwertsatz der Integralrechnung* besagt, dass für eine stetige Funktion dieser *Durchschnittswert* (oder *Mittelwert*) von der Funktion auch angenommen wird.

Satz 19.1. *Sei* $[a,b]$ *ein kompaktes Intervall und sei*

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $c \in [a,b]$ *mit*

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; f(c)(b-a).$$

Beweis. Über dem kompakten Intervall ist die Funktion f nach oben und nach unten beschränkt, es seien m und M das Minimum bzw. das Maximum der Funktion, die aufgrund von Satz 11.13 angenommen werden. Dann ist insbesondere $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a,b]$ und

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a).$$

Daher ist $\int_a^b f(t)\,dt = d(b-a)$ mit einem $d \in [m,M]$ und aufgrund des Zwischenwertsatzes gibt es ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = d$. $\square$

19.2. **Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung.**

Es ist geschickt auch Integralgrenzen zuzulassen, bei denen die untere Integralgrenze die obere Intervallgrenze und die obere Integralgrenze die untere

Intervallgrenze ist. Dazu definieren wir für $a < b$ und eine integrierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\int_b^a f(t)\,dt := -\int_a^b f(t)\,dt.$$

Definition 19.2. Sei I ein reelles Intervall und sei

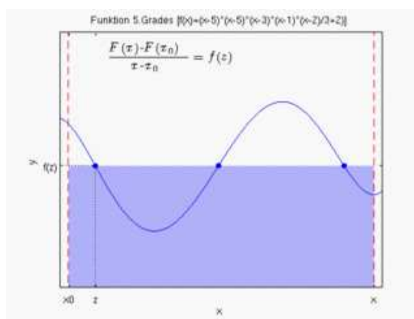
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Riemann-integrierbare Funktion und $a \in I$. Dann heißt die Funktion

$$I \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt,$$

die *Integralfunktion* zu f zum Startpunkt a.

Man spricht auch von der *Flächenfunktion* oder einem *unbestimmten Integral.*



Das x im Satz ist das x_0 in der Animation, und $x+h$ im Satz ist das wandernde x in der Animation. Der wandernde Punkt z in der Animation ist ein Punkt, wie er im Mittelwertsatz der Integralrechnung auftritt.

Die folgende Aussage heißt *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung.*

Satz 19.3. *Es sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $a \in I$ und es sei

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

die zugehörige Integralfunktion. Dann ist F differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = f(x)$$

für alle $x \in I$.

Beweis. Es sei x fixiert. Der Differenzenquotient ist

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Wir müssen zeigen, dass für $h \to 0$ der Limes existiert und gleich $f(x)$ ist. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es zu jedem h ein[34] $c_h \in [x, x+h]$ mit

$$f(c_h) \cdot h = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

und damit ist

$$f(c_h) = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}.$$

Für $h \to 0$ konvergiert c_h gegen x und wegen der Stetigkeit von f konvergiert $f(c_h)$ gegen $f(x)$. $\square$

19.3. **Stammfunktionen.**

Definition 19.4. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Eine Funktion

$$F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *Stammfunktion* zu f, wenn F auf I differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

Den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung kann man zusammen mit Satz 18.17 als einen Existenzsatz für Stammfunktionen interpretieren.

Korollar 19.5. *Es sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann besitzt f eine Stammfunktion.

Beweis. Es sei $a \in I$ ein beliebiger Punkt. Aufgrund von Satz 18.17 existiert das Riemann-Integral

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

und aufgrund des Hauptsatzes ist $F'(x) = f(x)$, d.h. F ist eine Stammfunktion von f. $\square$

Lemma 19.6. *Sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

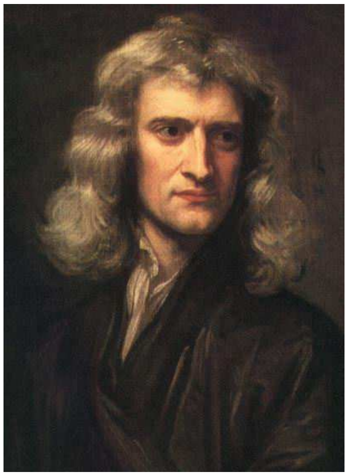
eine Funktion. Es seien F und G zwei Stammfunktionen von f. Dann ist $F - G$ eine konstante Funktion.

Beweis. Es ist

$$(F - G)' = F' - G' = f - f = 0.$$

Daher ist nach Korollar 15.6 die Differenz $F - G$ konstant. $\square$

[34]Bei h positiv. Bei h negativ ist $c_h \in [x+h, x]$. In jedem Fall liegt es in $[x-|h|, x+|h|]$.



Isaac Newton (1643-1727)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Die folgende Aussage ist ebenfalls eine Version des Hauptsatzes, der darin ausgedrückte Zusammenhang heißt auch *Newton-Leibniz-Formel*.

Korollar 19.7. *Es sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, für die F eine Stammfunktion sei. Dann gilt für $a, b \in I$ die Gleichheit

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; F(b) - F(a).$$

Beweis. Aufgrund von Satz 18.17 existiert das Integral. Mit der Integralfunktion

$$G(x) \;:=\; \int_a^x f(t)\,dt$$

gilt die Beziehung

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; G(b) \;=\; G(b) - G(a).$$

Aufgrund von Satz 19.3 ist G differenzierbar mit

$$G'(x) \;=\; f(x),$$

d.h. G ist eine Stammfunktion von f. Wegen Lemma 19.6 ist $F(x) \;=\; G(x) + c$. Daher ist

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; G(b) - G(a) \;=\; F(b) - c - F(a) + c \;=\; F(b) - F(a).$$

□

Da eine Stammfunktion nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, schreibt man manchmal

$$\int f(t)\,dt \;=\; F + c,$$

und nennt c eine *Integrationskonstante*. In gewissen Situationen, insbesondere im Zusammenhang mit *Differentialgleichungen*, wird diese Konstante durch zusätzliche Bedingungen festgelegt.

Notation 19.8. Es sei I ein reelles Intervall und $F\colon I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu $f\colon I \to \mathbb{R}$. Es seien $a, b \in I$. Dann setzt man

$$F|_a^b \;:=\; F(b) - F(a) \;=\; \int_a^b f(t)\,dt.$$

Diese Notation wird hauptsächlich bei Rechnungen verwendet, vor allem beim Ermitteln von bestimmten Integralen.

Mit den früher bestimmten Ableitungen von differenzierbaren Funktionen erhält man sofort eine Liste von Stammfunktionen zu einigen wichtigen Funktionen. In der nächsten Vorlesung werden wir weitere Regeln zum Auffinden von Stammfunktionen kennenlernen, die auf Ableitungsregeln beruhen. Im Allgemeinen ist das Auffinden von Stammfunktionen schwierig.

Die Stammfunktion zu x^a, wobei $x \in \mathbb{R}_+$ und $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$, ist, ist $\frac{1}{a+1}x^{a+1}$.

Beispiel 19.9. Zwischen zwei (punktförmig gedachten) Massen M und m bestehe der Abstand R_0. Aufgrund der Gravitation besitzt dieses System eine gewisse Lageenergie. Wie ändert sich die Lageenergie, wenn die beiden Massen auf einen Abstand von $R_1 \geq R_0$ auseinander gezogen werden?

Die aufzubringende Energie ist Anziehungskraft mal Weg, wobei die Anziehungskraft allerdings selbst vom Abstand der Massen abhängt. Nach dem Gravitationsgesetz ist die Kraft beim Abstand r gleich

$$F(r) \;=\; \gamma \frac{Mm}{r^2},$$

wobei γ die Gravitationkonstante bezeichnet. Daher ist die Energie (oder Arbeit), die man aufbringen muss, um den Abstand von R_0 auf R_1 zu erhöhen, gleich

$$\begin{aligned} E &= \int_{R_0}^{R_1} \gamma \frac{Mm}{r^2}\,dr \\ &= \gamma Mm \int_{R_0}^{R_1} \frac{1}{r^2}\,dr \\ &= \gamma Mm \left(-\frac{1}{r}|_{R_0}^{R_1} \right) \\ &= \gamma Mm \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} \right). \end{aligned}$$

Damit kann man der Differenz der Lageenergien zum Abstand R_0 bzw. R_1 einen sinnvollen Wert zuweisen, nicht aber den Lageenergien selbst.

Die Stammfunktion der Funktion $\frac{1}{x}$ ist der natürliche Logarithmus.

Die Stammfunktion der Exponentialfunktion ist die Exponentialfunktion selbst.

Die Stammfunktion von $\sin x$ ist $-\cos x$, die Stammfunktion von $\cos x$ ist $\sin x$.

Die Stammfunktion von $\frac{1}{1+x^2}$ ist $\arctan x$ nach Satz 16.20 (3).

Die Stammfunktion von $\frac{1}{1-x^2}$ (für $x \in]-1,1[$) ist $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, es ist ja

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}\right)' &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(1+x)(1-x)} \\ &= \frac{1}{(1-x^2)}.\end{aligned}$$

Achtung! Integrationsregeln sind nur anwendbar auf Funktionen, die im gesamten Intervall definiert sind. Z.B. gilt *nicht*

$$\int_{-a}^{a}\frac{dt}{t^2}\,d = -\frac{1}{x}\Big|_{-a}^{a} = -\frac{1}{a}-\frac{1}{a} = -\frac{2}{a},$$

da hier über eine Definitionslücke hinweg integriert wird.

Beispiel 19.10. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ t\longmapsto f(t),$$

mit

$$f(t) := \begin{cases}0 \text{ für } t=0,\\ \frac{1}{t}\sin\frac{1}{t^2} \text{ für } t\neq 0\,.\end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht Riemann-integrierbar, da sie weder nach oben noch nach unten beschränkt ist. Es existieren also weder untere noch obere Treppenfunktionen für f. Trotzdem besitzt f eine Stammfunktion. Dazu betrachten wir die Funktion

$$H(t) := \begin{cases}0 \text{ für } t=0,\\ \frac{t^2}{2}\cos\frac{1}{t^2} \text{ für } t\neq 0\,.\end{cases}$$

Diese Funktion ist differenzierbar. Für $t\neq 0$ ergibt sich die Ableitung

$$H'(t) = t\cos\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}\sin\frac{1}{t^2}.$$

Für $t = 0$ ist der Differenzenquotient gleich

$$\frac{\frac{h^2}{2}\cos\frac{1}{h^2}}{h} = \frac{h}{2}\cos\frac{1}{h^2}.$$

Für $h \mapsto 0$ existiert der Grenzwert und ist gleich 0, so dass H überall differenzierbar ist (aber nicht stetig differenzierbar). Der erste Summand in H' ist stetig und besitzt daher nach Korollar 19.5 eine Stammfunktion G. Daher ist $H - G$ eine Stammfunktion von f. Dies ergibt sich für $t \neq 0$ aus der expliziten Ableitung und für $t = 0$ aus

$$H'(0) - G'(0) = 0 - 0 = 0.$$

19.4. **Stammfunktionen zu Potenzreihen.**

Wir erinnern daran, dass die Ableitung einer konvergenten Potenzreihe gliedweise gewonnen werden kann.

Lemma 19.11. *Es sei $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine auf $]-r, r[$ konvergente Potenzreihe. Dann ist die Potenzreihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

ebenfalls auf $]-r, r[$ konvergent und stellt dort eine Stammfunktion für f dar.

Beweis. Der Beweis beruht auf der Theorie der Potenzreihen. □

Mit dieser Aussage kann man manchmal die Taylor-Polynome (bzw. die Taylor-Reihe) einer Funktion bestimmen, indem man die Taylor-Polynome der Ableitung verwendet. Wir geben dazu ein typisches Beispiel.

Beispiel 19.12. Wir wollen die Taylor-Reihe des natürlichen Logarithmus im Entwicklungspunkt 1 bestimmen. Die Ableitung des natürlichen Logarithmus ist nach Korollar 16.6 gleich $1/x$. Diese Funktion besitzt nach Satz 9.13 die Potenzreihenentwicklung

$$\frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k$$

im Entwicklungspunkt 1 (die für $|x-1| < 1$ konvergiert). Daher besitzt nach Lemma 19.11 der natürliche Logarithmus die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k .$$

Mit $z = x - 1$ ist dies die Reihe

$$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \ldots .$$

19. Arbeitsblatt

19.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 19.1. Lucy Sonnenschein fährt fünf Stunden lang Fahrrad. In den ersten zwei Stunden schafft sie 30 km und in den folgenden drei Stunden schafft sie auch 30 km. Was ist insgesamt ihre Durchschnittsgeschwindigkeit?

Aufgabe 19.2.*

Beweise den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für differenzierbare Funktionen

$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

und ein kompaktes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (es muss nicht gezeigt werden, dass die Durchschnittsgeschwindigkeit im Innern des Intervalls angenommen wird).

Aufgabe 19.3. Bestimme die zweite Ableitung der Funktion

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{t^5 - t^3 + 2t}\, dt.$$

Aufgabe 19.4. Ein Körper werde zum Zeitpunkt 0 losgelassen und falle luftwiderstandsfrei aus einer gewissen Höhe unter der (konstanten) Schwerkraft der Erde nach unten. Berechne die Geschwindigkeit $v(t)$ und die zurückgelegte Strecke $s(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t. Nach welcher Zeit hat der Körper 100 Meter zurückgelegt?

Aufgabe 19.5. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, eine stetige Funktion und $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$. Zeige, dass $F(x-a)$ eine Stammfunktion zu $f(x-a)$ ist.

Aufgabe 19.6. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, eine stetige Funktion und $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$. Zeige, dass $-F(-x)$ eine Stammfunktion zu $f(-x)$ ist.

Aufgabe 19.7. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, eine stetige Funktion und $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$. Zeige, dass $F(x) + cx$ eine Stammfunktion zu $f(x) + c$ ist.

Aufgabe 19.8. Bestimme eine Stammfunktion zu

$$f(x) = 4x^2 - 3x + 2,$$

die an der Stelle 3 den Wert 5 besitzt.

Aufgabe 19.9. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_{-1}^{4} 3x^2 - 5x + 6\,dx\,.$$

Aufgabe 19.10. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_{2}^{5} \frac{x^2 + 3x - 6}{x - 1}\,dx\,.$$

Aufgabe 19.11.*

Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die durch die beiden Graphen zu $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 19.12. Es sei a die minimale positive Zahl mit $\sin a = \cos a$. Berechne den Flächeninhalt derjenigen Fläche, die durch den Graphen des Kosinus und den Graphen des Sinus oberhalb von $[0, a]$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 19.13.*

Bestimme den Durchschnittswert der Quadratwurzel $\sqrt{x}$ für $x \in [1, 4]$. Vergleiche diesen Wert mit der Wurzel des arithmetischen Mittels von 1 und 4 und mit dem arithmetischen Mittel der Wurzel von 1 und der Wurzel von 4.

Aufgabe 19.14.*

Eine Person will ein einstündiges Sonnenbad nehmen. Die Intensität der Sonneneinstrahlung werde im Zeitintervall $[6, 22]$ (in Stunden) durch die Funktion

$$f\colon [6, 22] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t) = -t^3 + 27t^2 - 120t,$$

beschrieben. Bestimme den Startzeitpunkt des Sonnenbades, so dass die Gesamtsonnenausbeute maximal wird.

Aufgabe 19.15.*
Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ die Abschätzung

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq \ln 2$$

gilt. Tipp: Betrachte die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ auf dem Intervall $]0, 1]$.

Aufgabe 19.16. Es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige, dass die Funktion

$$h(x) = \int_0^{g(x)} f(t)\, dt$$

differenzierbar ist und bestimme ihre Ableitung.

Aufgabe 19.17. Es sei $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Betrachte die durch

$$a_n := \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(t)\, dt$$

definierte Folge. Entscheide, ob diese Folge konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 19.18. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe mit $a_n \in [0, 1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeige, dass dann die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{a_n} f(x) dx$$

absolut konvergent ist.

Aufgabe 19.19. Sei f eine Riemann-integrierbare Funktion auf $[a, b]$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Man zeige: Ist f stetig in einem Punkt $c \in [a, b]$ mit $f(c) > 0$, dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx > 0\,.$$

Aufgabe 19.20. Man zeige, dass die Gleichung

$$\int_0^x e^{t^2} dt = 1$$

eine einzige Lösung $x \in [0, 1]$ besitzt.

Aufgabe 19.21. Seien

$$f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen mit der Eigenschaft

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx\,.$$

Beweise, dass es ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = g(c)$ gibt.

Aufgabe 19.22.*

Sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

für jede stetige Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Zeige $f = 0$.

19.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 19.23. (3 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral $\int_0^8 f(t)\,dt$, wobei die Funktion f durch

$$f(t) = \begin{cases} t+1, \text{ falls } 0 \le t \le 2\,, \\ t^2 - 6t + 11, \text{ falls } 2 < t \le 5\,, \\ 6, \text{ falls } 5 < t \le 6\,, \\ -2t + 18\,, \text{ falls } 6 < t \le 8\,, \end{cases}$$

gegeben ist.

Aufgabe 19.24. (3 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral

$$\int_1^7 \frac{x^3 - 2x^2 - x + 5}{x+1}\,dx\,.$$

Aufgabe 19.25. (2 Punkte)

Bestimme den Flächeninhalt unterhalb[35] des Graphen der Sinusfunktion zwischen 0 und π.

[35]Gemeint ist hier der Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse.

Aufgabe 19.26. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,.$$

Aufgabe 19.27. (4 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die durch die Graphen der beiden Funktionen f und g mit

$$f(x) = x^2 \text{ und } g(x) = -2x^2 + 3x + 4$$

eingeschlossen wird.

Aufgabe 19.28. (3 Punkte)

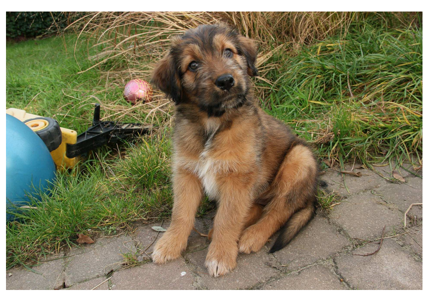
Es seien

$$f,g\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen und es sei $g(t) \geq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Zeige, dass es dann ein $s \in [a,b]$ gibt mit

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(s)\int_a^b g(t)\,dt\,.$$

20. Vorlesung - Integrationsregeln



Doch dann hat sie das Beste daraus gemacht. Vermutlich hängt ihre Zugänglichkeit und Menschenbezogenheit auch mit ihren frühen Erfahrungen zusammen.

Nicht allein in Rechnungssachen Soll der Mensch sich Mühe machen; Sondern auch der Weisheit Lehren Muß man mit Vergnügen hören.

Wilhelm Busch, Max und Moritz

Wir besprechen nun die wesentlichen Rechenregeln, mit denen man Stammfunktionen finden bzw. bestimmte Integrale berechnen kann. Sie beruhen auf Ableitungsregeln.

20.1. **Partielle Integration.**

Satz 20.1. *Es seien*

$$f, g\colon\ [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt \;=\; fg|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt.$$

Beweis. Aufgrund der Produktregel ist fg eine Stammfunktion von $fg' + f'g$. Daher ist

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt + \int_a^b f'(t)g(t)\,dt \;=\; \int_a^b (fg' + f'g)(t)\,dt \;=\; fg|_a^b.$$

□

Bei der partiellen Integration sind insbesondere zwei Dinge zu beachten. Erstens liegt die zu integrierende Funktion im Allgemeinen nicht in der Form fg' vor, sondern einfach als Produkt uv (wenn kein Produkt vorliegt, so kommt man mit dieser Regel sowieso nicht weiter, wobei allerdings die triviale Produktzerlegung $1u$ manchmal helfen kann). Dann muss man einen Faktor integrieren und den anderen differenzieren. Wenn V eine Stammfunktion von v ist, so lautet die Formel

$$\int uv = uV - \int u'V\,.$$

Zweitens führt partielle Integration nur dann zum Ziel, wenn das Integral rechts, also $\int_a^b f'(t)g(t)\,dt$, integriert werden kann.

Beispiel 20.2. Wir bestimmen eine Stammfunktion des natürlichen Logarithmus $\ln x$ mittels partieller Integration, wobei wir $\ln x = 1 \cdot \ln x$ schreiben und die konstante Funktion 1 integrieren und den Logarithmus ableiten. Damit ist

$$\int_a^b \ln x\,dx \;=\; (x\cdot\ln x)|_a^b - \int_a^b x\cdot\frac{1}{x}\,dx \;=\; (x\cdot\ln x)|_a^b - \int_a^b 1\,dx \;=\; (x\cdot\ln x)|_a^b - x|_a^b.$$

Eine Stammfunktion ist also $x \cdot \ln x - x$.

Beispiel 20.3. Eine Stammfunktion der Sinusfunktion $\sin x$ ist $-\cos x$. Um Stammfunktionen zu $\sin^n x$ zu finden, verwenden wir partielle Integration, um eine rekursive Beziehung zu kleineren Potenzen zu erhalten. Um dies präzise zu machen, arbeiten wir mit Intervallgrenzen, und zwar sollen die

Stammfunktionen von 0 ausgehen, also für 0 den Wert 0 besitzen. Für $n \geq 2$ ist mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_0^x \sin^n t\,dt &= \int_0^x \sin^{n-2} t \cdot \sin^2 t\,dt \\ &= \int_0^x \sin^{n-2} t \cdot \left(1-\cos^2 t\right) dt \\ &= \int_0^x \sin^{n-2} t\,dt - \int_0^x \left(\sin^{n-2} t \cos t\right) \cos t\,dt \\ &= \int_0^x \sin^{n-2} t\,dt - \frac{\sin^{n-1} t}{n-1} \cos t|_0^x - \frac{1}{n-1}\left(\int_0^x \sin^n t\,dt\right).\end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit $n-1$ und Umstellen erhält man

$$n\int_0^x \sin^n t\,dt = (n-1)\int_0^x \sin^{n-2} t\,dt - \sin^{n-1} x \cos x.$$

Speziell ergibt sich für $n = 2$

$$\int_0^x \sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x).$$

20.2. **Integration der Umkehrfunktion.**

Satz 20.4. *Es sei $f\colon [a,b] \to [c,d]$ eine bijektive differenzierbare Funktion und es sei F eine Stammfunktion von f. Dann ist*

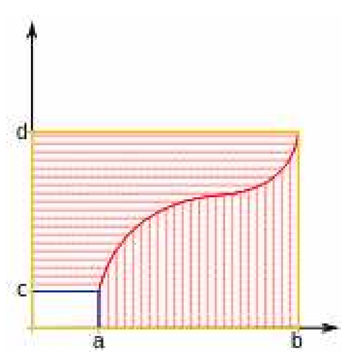
$$G(y) := yf^{-1}(y) - F\left(f^{-1}(y)\right)$$

eine Stammfunktion der Umkehrfunktion f^{-1}.

Beweis. Ableiten unter Verwendung von Lemma 14.7 und Satz 14.8 ergibt

$$\begin{aligned}\left(yf^{-1}(y) - F\left(f^{-1}(y)\right)\right)' &= f^{-1}(y) + y\frac{1}{f'(f^{-1}(y))} - f\left(f^{-1}(y)\right)\frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \\ &= f^{-1}(y).\end{aligned}$$

$\square$



Funktionsgraph mit Umkehrfunktion und Flächen zur Berechnung eines Integrals der Umkehrfunktion.

Diese Aussage besitzt einen einfachen geometrischen Hintergrund. Wenn $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$ eine streng wachsende stetige Funktion ist (und daher eine Bijektion zwischen $[a,b]$ und $[f(a),f(b)]$ induziert), so besteht zwischen den beteiligten Flächeninhalten der Zusammenhang

$$\int_a^b f(s)\,ds + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt = bf(b) - af(a)$$

bzw.

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(s)\,ds\,.$$

Für die Stammfunktion G von f^{-1} mit dem Startpunkt $f(a)$ gilt daher, wenn F die Stammfunktion zu f bezeichnet, die Beziehung

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_{f(a)}^{y} f^{-1}(t)\,dt \\ &= \int_{f(a)}^{f(f^{-1}(y))} f^{-1}(t)\,dt \\ &= f^{-1}(y)f(f^{-1}(y)) - af(a) - \int_a^{f^{-1}(y)} f(s)\,ds \\ &= yf^{-1}(y) - af(a) - F(f^{-1}(y)) + F(a) \\ &= yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y)) - af(a) + F(a), \end{aligned}$$

wobei $-af(a) + F(a)$ eine Integrationskonstante ist.

Beispiel 20.5. Wir berechnen eine Stammfunktion von $\arctan x$ unter Verwendung von Satz 20.4. Eine Stammfunktion des Tangens ist

$$\int \tan t\,dt \;=\; -\ln(\cos x).$$

Also ist

$$x \cdot \arctan x + \ln(\cos(\arctan x))$$

eine Stammfunktion von $\arctan x$.

20.3. **Die Substitutionsregel.**

Satz 20.6. *Es sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f\colon\; I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei

$$g\colon\; [a,b] \longrightarrow I$$

stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt \;=\; \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)\,ds.$$

Beweis. Wegen der Stetigkeit von f und der vorausgesetzten stetigen Differenzierbarkeit von g existieren beide Integrale. Es sei F eine Stammfunktion von f, die aufgrund von Korollar 19.5 existiert. Nach der Kettenregel hat die zusammengesetzte Funktion

$$t \mapsto F(g(t)) = (F \circ g)(t)$$

die Ableitung $F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$. Daher gilt insgesamt

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = (F \circ g)|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = F|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)\,ds.$$

□

Beispiel 20.7. Typische Beispiele, wo man sofort erkennen kann, dass man die Substitutionsregel anwenden kann, sind beispielsweise

$$\int g^n g'$$

mit der Stammfunktion

$$\frac{1}{n+1} g^{n+1}$$

oder

$$\int \frac{g'}{g}$$

mit der Stammfunktion

$$\ln g\,.$$

Häufig liegt ein bestimmtes Integral nicht in einer Form vor, dass man die vorstehende Regel direkt anwenden könnte. Häufiger kommt die folgende umgekehrte Variante zum Zug.

Korollar 20.8. *Es sei*

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion und es sei

$$\varphi\colon [c,d] \longrightarrow [a,b],\ s \longmapsto \varphi(s),$$

eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)\,ds$$

Beweis. Nach Satz 20.6 ist

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds = \int_{\varphi(\varphi^{-1}(a))}^{\varphi\left(\varphi^{-1}(b)\right)} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

□

Bemerkung 20.9. Die Substitution wird folgendermaßen angewendet: Es soll das Integral

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

berechnet werden. Man muss dann eine Idee haben, dass durch die Substitution

$$t = \varphi(s)$$

das Integral einfacher wird (und zwar unter Berücksichtigung der Ableitung $\varphi'(t)$ und unter der Bedingung, dass die Umkehrfunktion φ^{-1} berechenbar ist). Mit $c = \varphi^{-1}(a)$ und $d = \varphi^{-1}(b)$ liegt insgesamt die Situation

$$[c,d] \xrightarrow{\varphi} [a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

vor. In vielen Fällen kommt man mit gewissen Standardsubstitutionen weiter.

Bei einer Substitution werden drei Operationen durchgeführt.

(1) Ersetze $f(t)$ durch $f(\varphi(s))$.
(2) Ersetze dt durch $\varphi'(s)ds$.
(3) Ersetze die Integrationsgrenzen a und b durch $\varphi^{-1}(a)$ und $\varphi^{-1}(b)$.

Für den zweiten Schritt empfiehlt sich die Merkregel

$$dt = d\varphi(s) = \varphi'(s)ds,$$

der man im Rahmen der Theorie der „Differentialformen“ auch eine inhaltliche Bedeutung geben kann.

Beispiel 20.10. Die obere Kreislinie des Einheitskreises ist die Punktmenge

$$\left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1,\ -1 \leq x \leq 1,\ y \geq 0\right\}.$$

Zu gegebenem x, $-1 \leq x \leq 1$, gibt es genau ein y, das diese Bedingung erfüllt, nämlich $y = \sqrt{1-x^2}$. Daher ist der Flächeninhalt der oberen Einheitskreishälfte gleich der Fläche unter dem Graphen der Funktion $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ über dem Intervall $[-1,1]$, also gleich

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx\,.$$

Mit der Substitution

$$x = \cos t \text{ bzw. } t = \arccos x$$

(wobei $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ bijektiv ist), erhält man

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{\arccos a}^{\arccos b} \sqrt{1-\cos^2 t}(-\sin t)\,dt \\
&= -\int_{\arccos a}^{\arccos b} \sin^2 t\,dt \\
&= \frac{1}{2}(\sin t \cos t - t)|_{\arccos a}^{\arccos b}.
\end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\frac{1}{2}(x \cdot \sin(\arccos x) - \arccos x) \;=\; \frac{1}{2}\Big(x \cdot \sqrt{1-x^2} - \arccos x\Big)$$

eine Stammfunktion zu $\sqrt{1-x^2}$. Daher ist

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx \;=\; \frac{1}{2}(\sin 0 + \sin \pi + \pi) \;=\; \pi/2.$$

Beispiel 20.11. Wir bestimmen eine Stammfunktion von $\sqrt{x^2-1}$ unter Verwendung der Hyperbelfunktionen $\sinh t$ und $\cosh t$, für die die Beziehung $\cosh^2 t - \sinh^2 t \;=\; 1$ gilt. Die Substitution

$$x = \cosh t \text{ mit } dx = \sinh t dt$$

liefert[36]

$$\int_a^b \sqrt{x^2-1}\, dx \;=\; \int_{\operatorname{arcosh} a}^{\operatorname{arcosh} b} \sqrt{\cosh^2 t - 1} \cdot \sinh t\, dt \;=\; \int_{\operatorname{arcosh} a}^{\operatorname{arcosh} b} \sinh^2 t\, dt.$$

Eine Stammfunktion des Sinus hyperbolicus im Quadrat ergibt sich aus

$$\sinh^2 t \;=\; \left(\frac{1}{2}\big(e^t - e^{-t}\big)\right)^2 \;=\; \frac{1}{4}\big(e^{2t} + e^{-2t} - 2\big).$$

Daher ist

$$\int \sinh^2 u\, du \;=\; \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2u} - \frac{1}{2}e^{-2u} - 2u\right) \;=\; \frac{1}{4}\sinh 2u - \frac{1}{2}u$$

und somit

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx \;=\; \frac{1}{4}\sinh(2 \operatorname{arcosh} x) - \frac{1}{2} \operatorname{arcosh} x\,.$$

Aufgrund des Additionstheorems für Sinus hyperbolicus ist

$$\sinh 2u \;=\; 2 \sinh u \cosh u$$

und daher kann man diese Stammfunktion auch als

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\sinh(\operatorname{arcosh} x)\cosh(\operatorname{arcosh} x) - \operatorname{arcosh} x) \\ = \;& \frac{1}{2}\left(\sqrt{\cosh(\operatorname{arcosh} x)^2 - 1} \cdot x - \operatorname{arcosh} x\right) \\ = \;& \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2-1} \cdot x - \operatorname{arcosh} x\right) \end{aligned}$$

schreiben.

Beispiel 20.12. Wir wollen eine Stammfunktion für die Funktion

$$f(x) \;=\; \frac{x^2}{(x\cos x - \sin x)^2}$$

[36]Die Umkehrfunktion des Kosinus hyperbolicus heißt *Areakosinus hyperbolicus* und wird mit $\operatorname{arcosh} x$ bezeichnet.

bestimmen. Als Vorüberlegung berechnen wir die Ableitung von

$$\frac{1}{x\cos x - \sin x}.$$

Diese ist

$$-\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{(x\cos x - \sin x)^2} = \frac{x\sin x}{(x\cos x - \sin x)^2}.$$

Wir schreiben daher f als ein Produkt $f(x) = \frac{x\sin x}{(x\cos x - \sin x)^2} \cdot \frac{x}{\sin x}$ und wenden darauf partielle Integration an, wobei wir den ersten Faktor integrieren und den zweiten Faktor ableiten. Die Ableitung des zweiten Faktors ist

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \frac{1}{x\cos x - \sin x} \cdot \frac{x}{\sin x} \\ &\quad - \int \frac{1}{x\cos x - \sin x} \cdot \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}\,dx \\ &= \frac{1}{x\cos x - \sin x} \cdot \frac{x}{\sin x} + \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx \\ &= \frac{1}{x\cos x - \sin x} \cdot \frac{x}{\sin x} - \cot x.\end{aligned}$$

20. Arbeitsblatt

20.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 20.1. Zeige

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

In den folgenden Aufgaben, bei denen es um die Bestimmung von Stammfunktionen geht, ist jeweils ein geeigneter Definitionsbereich zu wählen.

Aufgabe 20.2.*

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\tan x\,.$$

Aufgabe 20.3. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$x^n \cdot \ln x\,.$$

Aufgabe 20.4. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$e^{\sqrt{x}}\,.$$

Aufgabe 20.5. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{x^3}{\sqrt[5]{x^4+2}}\,.$$

Aufgabe 20.6. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,.$$

Aufgabe 20.7. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1+3\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt{x-2}}\,.$$

Aufgabe 20.8.*

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$(\ln(1+\sin x))\cdot \sin x\,.$$

Aufgabe 20.9. Bestimme, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$a \longmapsto \int_{-1}^{2} at^2 - a^2 t\, dt$$

ein Maximum oder ein Minimum besitzt.

Aufgabe 20.10. Nach neuesten Studien zur Aufnahmefähigkeit von durchschnittlichen Studierenden wird die Aufmerksamkeitskurve am Tag durch

$$[8,18] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = -x^2 + 25x - 100,$$

beschrieben. Dabei ist x die Zeit in Stunden und $y = f(x)$ ist die Aufnahmefähigkeit in Mikrocreditpoints pro Sekunde. Wann muss man eine ein einhalb stündige Vorlesung ansetzen, damit die Gesamtaufnahme optimal ist? Wie viele Mikrocreditpoints werden dann in dieser Vorlesung aufgenommen?

Aufgabe 20.11. Es sei I ein reelles Intervall und es sei

$$f\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion mit der Stammfunktion F. Es sei G eine Stammfunktion von F und es seien $b, c \in \mathbb{R}$. Bestimme eine Stammfunktion der Funktion

$$(bt+c)\cdot f(t)$$

Aufgabe 20.12. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Bestimme eine Stammfunktion der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto x^{1/n},$$

unter Verwendung der Stammfunktion von x^n und Satz 20.4.

Aufgabe 20.13. Bestimme eine Stammfunktion des natürlichen Logarithmus unter Verwendung der Stammfunktion seiner Umkehrfunktion.

Aufgabe 20.14. Es sei

$$f\colon\; [a,b] \longrightarrow [c,d]$$

eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion. Man beweise die Formel für die Stammfunktion der Umkehrfunktion, indem man für das Integral

$$\int_a^b f^{-1}(y)dy$$

die Substitution $y = f(x)$ durchführt und anschließend partiell integriert.

Aufgabe 20.15. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 \, dx \,.$$

Aufgabe 20.16.*

Begründe den Zusammenhang

$$\int_1^{ab} \frac{1}{x} dx \;=\; \int_1^a \frac{1}{x} dx + \int_1^b \frac{1}{x} dx$$

für $a,b \in \mathbb{R}_+$ allein mit der Hilfe von Integrationsregeln.

Aufgabe 20.17.*

Berechne durch geeignete Substitutionen eine Stammfunktion zu

$$\sqrt{3x^2 + 5x - 4}\,.$$

Aufgabe 20.18.*

Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f\colon\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 2x^3 + 3e^x - \sin x,$$

über $[-1,0]$.

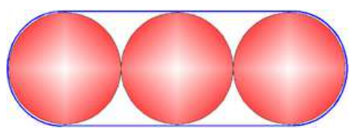
Aufgabe 20.19.*

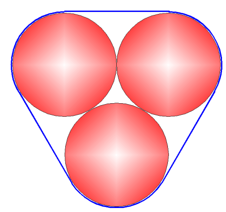
Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x+3} - e^{-x},$$

über $[1,4]$.

Aufgabe 20.20. Bestimme die Flächeninhalte der beiden rechts skizzierten, durch die blauen Kurven umrandeten Gebiete.





20.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 20.21. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$x^3 \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x\,.$$

Aufgabe 20.22. (2 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\arcsin x\,.$$

Aufgabe 20.23. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\sin(\ln x)\,.$$

Aufgabe 20.24. (4 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$e^x \cdot \frac{x^2+1}{(x+1)^2}\,.$$

Tipp: Man schreibe das Zählerpolynom unter Verwendung des Nennerpolynoms.

Aufgabe 20.25. (4 Punkte)

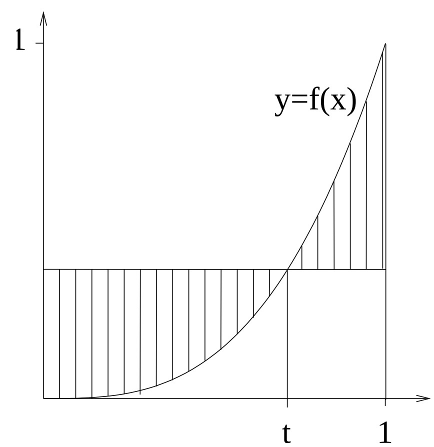
Es sei I ein reelles Intervall und es sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion mit der Stammfunktion F. Es sei G eine Stammfunktion von F und H eine Stammfunktion von G. Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimme eine Stammfunktion der Funktion

$$(at^2 + bt + c) \cdot f(t)$$

Aufgabe 20.26. (5 Punkte)



Es sei

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) > 0$ für alle $x > 0$. Für welche Punkte $t \in [0,1]$ besitzt der Flächeninhalt der schraffierten Fläche ein lokales Extremum? Handelt es sich dabei um ein Minimum oder um ein Maximum?

21. Vorlesung - Lineare Gleichungssysteme

Dies ist nochmal Dr. Ines Eisenbeis. Ihre zweite These lautet: Es kommt nicht auf die Hunderasse, sondern stets auf den individuellen Hund an, ob er für den Einsatz als Vorlesungshund geeignet ist.

> Verwandle große Schwierigkeiten in kleine und kleine in gar keine
>
> Chinesische Weisheit

Die Vorlesungen der nächsten Wochen beschäftigen sich mit *linearer Algebra*. Dabei wird stets ein Körper K zugrunde gelegt, wobei man dabei grundsätzlich an die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ denken kann. Da es aber zunächst bei Fragen der linearen Algebra nur auf die algebraischen Eigenschaften von $\mathbb{R}$ ankommt, kann man genauso gut an die rationalen Zahlen denken. Ab der Eigenwerttheorie werden dann auch analytische Eigenschaften wie die Existenz von Wurzeln bedeutsam.

21.1. **Lineare Gleichungssysteme.**

Im Kontext der Polynominterpolationen sind wir schon linearen Gleichungssystemen begegnet. Wir beschreiben drei weitere einführende Beispiele, einem alltäglichen, einem geometrischen und einem physikalischen, die alle zu einem linearen Gleichungssystem führen.

Beispiel 21.1. An einem Stand auf dem Weihnachtsmarkt gibt es drei verschiedene Glühweintöpfe. Alle drei beinhalten die Zutaten Zimt, Gewürznelken, Rotwein und Zucker, allerdings mit unterschiedlichen Anteilen. Die Zusammensetzung der einzelnen Glühweine ist

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}, \, G_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}, \, G_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Jeder Glühwein wird also repräsentiert durch ein Vierertupel, deren einzelne Einträge für die Anteile an den Zutaten stehen. Die Menge aller (möglichen) Glühweine bilden einen Vektorraum (diesen Begriff werden wir in der nächsten Vorlesung einführen), und die drei konkreten Glühweine sind drei Vektoren in diesem Raum.

Nehmen wir an, dass keiner dieser drei Glühweine genau den gewünschten Geschmack trifft und dass der Wunschglühwein die Zusammensetzung

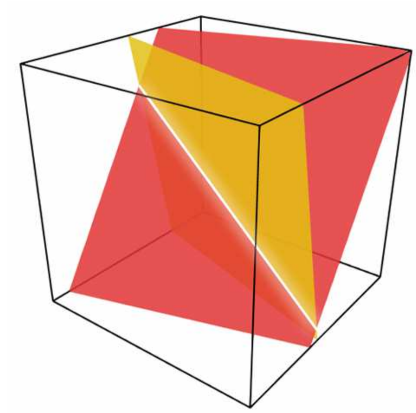
$$W = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

hat. Gibt es eine Möglichkeit, den Wunschglühwein durch Zusammenschütten der vorgegebenen Glühweine zu erhalten? Gibt es also Zahlen[37] $a, b, c \in \mathbb{Q}$ derart, dass

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gilt. Hinter dieser einen vektoriellen Gleichung liegen vier einzelne Gleichungen in den „Variablen“ a, b, c, wobei die Gleichungen sich aus den Zeilen ergeben. Wann gibt es eine solche Lösung, wann keine, wann mehrere? Das sind typische Fragen der linearen Algebra.

[37]Sinnvoll interpretierbar sind in diesem Beispiel nur positive Zahlen, da man schwerlich aus einem Glühweingemisch die einzelnen verwendeten Glühweinsorten wieder herausziehen kann. In der linearen Algebra spielt sich aber alles über einem Körper ab, so dass wir auch negative Zahlen zulassen.



Zwei Ebenen im Raum, die sich in einer Geraden schneiden.

Beispiel 21.2. Im $\mathbb{R}^3$ seien zwei Ebenen

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - 2y - 3z = 5 \right\}$$

und

$$F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 5y + 2z = 1 \right\}$$

gegeben.[38] Wie kann man die Schnittgerade $G = E \cap F$ beschreiben? Ein Punkt $P = (x, y, z)$ liegt genau dann auf der Schnittgerade, wenn er die beiden *Ebenengleichungen* erfüllt; es muss also sowohl

$$4x - 2y - 3z = 5 \text{ als auch } 3x - 5y + 2z = 1$$

gelten. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit 3 und ziehen davon das 4-fache der zweiten Gleichung ab und erhalten

$$14y - 17z = 11.$$

Wenn man $y = 0$ setzt, so muss $z = -\frac{11}{17}$ und $x = \frac{13}{17}$ sein. D.h. der Punkt $P = \left(\frac{13}{17}, 0, -\frac{11}{17}\right)$ gehört zu G. Ebenso findet man, indem man $z = 0$ setzt, den Punkt $Q = \left(\frac{23}{14}, \frac{11}{14}, 0\right)$. Damit ist die Schnittgerade die Verbindungsgerade dieser Punkte, also

$$G = \left\{ \left(\frac{13}{17}, 0, -\frac{11}{17}\right) + t\left(\frac{209}{238}, \frac{11}{14}, \frac{11}{17}\right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

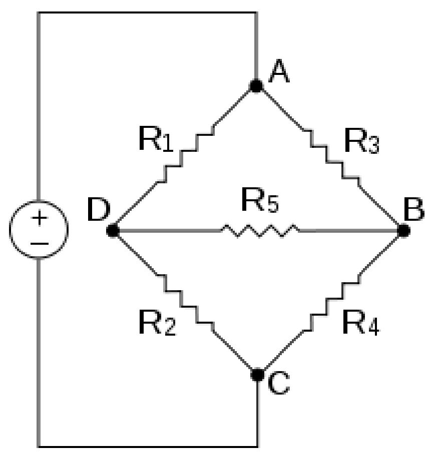
Beispiel 21.3. Ein elektrisches Netzwerk (ein Gleichstrom-Netzwerk) besteht aus mehreren miteinander verbundenen Drähten, die in diesem Zusammenhang die Kanten des Netzwerks genannt werden. In jeder Kante K_j liegt ein bestimmter (vom Material und der Kantenlänge abhängigen) Widerstand R_j vor. Die Verbindungspunkte P_n, in denen die Kanten zusammenlaufen, nennt man die Knoten des Netzwerks. Wenn an das Netzwerk (bzw. gewisse Kanten davon) eine Spannung angelegt wird, so fließt in jeder Kante ein bestimmter Strom I_j. Es ist sinnvoll, für jede Kante eine Richtung zu fixieren,

[38] An dieser Stelle diskutieren wir nicht, dass solche Gleichungen Ebenen beschreiben. Die Lösungsmengen sind „verschobene Untervektorräume der Dimension zwei“.

um die Fließrichtung des Stromes in dieser Kante unterscheiden zu können (wenn der Strom in die entgegengesetze Richtung fließt, so bekommt er ein negatives Vorzeichen). Man spricht von gerichteten Kanten. In einem Knotenpunkt des Netzwerks fließen die Ströme der verschiedenen anliegenden Kanten zusammen, ihre Summe muss 0 ergeben. Entlang einer Kante K_j kommt es zu einem Spannungsabfall U_j, der durch das Ohmsche Gesetz

$$U_j \;=\; R_j \cdot I_j$$

beschrieben wird.



Unter einer Masche (oder einem Zykel) des Netzwerks versteht man eine geschlossene gerichtete Verbindung von Kanten. Für eine solche Masche ist die Gesamtspannung 0, es sei denn, es wird „von außen“ eine Spannung angelegt.

Wir listen diese *Kirchhoffschen Regeln* nochmal auf.

(1) In jedem Knoten ist die Summe der (ein- und abfließenden) Ströme gleich 0.
(2) In jeder Masche ist die Summe der Spannungen gleich 0.
(3) Wenn in einer Masche eine Spannung V angelegt wird, so ist die Summe der Spannungen gleich V.

Aus „physikalischen Gründen“ ist zu erwarten, dass bei einer angelegten Spannung in jeder Kante ein wohlbestimmter Strom fließt. In der Tat lässt sich dieser aus den genannten Gesetzmäßigkeiten berechnen, indem man diese in ein lineares Gleichungssystem übersetzt und dieses löst.

In dem durch das Bild angegebenen Beispiel seien die Kanten $K_1, \ldots, K_5$ (mit den Widerständen $R_1, \ldots, R_5$) von links nach rechts gerichtet, und die Verbindungskante K_0 von A nach C (an die die Spannung V angelegt sei), sei von unten nach oben gerichtet. Die vier Knotenpunkte und die drei Maschen (A, D, B), (D, B, C) und (A, D, C) führen auf das lineare Gleichungssystem

(einfließende Ströme gehen negativ und abfließende Ströme positiv ein; für die Maschen wählt man eine „Kreisrichtung“, im Beispiel nehmen wir den Uhrzeigersinn, und führen die gleichorientierten Spannungen positiv an)

$$
\begin{array}{cccccccc}
I_0 & +I_1 & & -I_3 & & & = & 0 \\
 & & & I_3 & +I_4 & +I_5 & = & 0 \\
-I_0 & & +I_2 & & -I_4 & & = & 0 \\
 & -I_1 & -I_2 & & & -I_5 & = & 0 \\
 & R_1I_1 & & +R_3I_3 & & -R_5I_5 & = & 0 \\
 & & -R_2I_2 & & -R_4I_4 & +R_5I_5 & = & 0 \\
 & -R_1I_1 & +R_2I_2 & & & & = & -V\,.
\end{array}
$$

Dabei sind die R_j und V vorgegebene Zahlen und die I_j sind gesucht.

Wir geben nun die Definition eines homogenen und eines inhomogenen linearen Gleichungssystems über einem Körper zu einer Variablenmenge.

Definition 21.4. Es sei K ein Körper und $a_{ij} \in K$ für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$. Dann nennt man

$$
\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0
\end{array}
$$

ein (homogenes) *lineares Gleichungssystem* in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Ein Tupel $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in K^n$ heißt *Lösung des linearen Gleichungssystems*, wenn $\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$ ist.

Wenn $(c_1, \ldots, c_m) \in K^m$ beliebig[39] ist, so heißt

$$
\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m
\end{array}
$$

ein *inhomogenes lineares Gleichungssystem* und ein Tupel $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in K^n$ heißt *Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems*, wenn

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}\zeta_j = c_i$$

für alle i ist.

Die Menge aller Lösungen eines linearen Gleichungssystems heißt die *Lösungsmenge*. Im homogenen Fall spricht man auch vom *Lösungsraum*, da es sich in der Tat, wie wir in der nächsten Vorlesung sehen werden, um einen Vektorraum handelt.

[39]Ein solcher Vektor heißt manchmal ein *Störvektor* des Systems.

Ein homogenes lineares Gleichungssystem besitzt immer die sogenannte *triviale Lösung* $0 = (0, \ldots, 0)$. Ein inhomogenes Gleichungssystem braucht nicht unbedingt eine Lösung haben. Zu einem inhomogenen linearen Gleichungssystem heißt das homogene System, das entsteht, wenn man den Störvektor durch den Nullvektor 0 ersetzt, das *zugehörige homogene System*.

Die folgende Situation beschreibt die abstrakte Version von Beispiel 21.1.

Beispiel 21.5. Es sei K ein Körper und $m \in \mathbb{N}$. Im K^m seien n Vektoren (oder m-Tupel)

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

gegeben und sei

$$w = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

ein weiterer Vektor. Wir wollen wissen, wann sich w als „Linearkombination" der v_j darstellen lässt. Es geht also um die Frage, ob es n Elemente $s_1, \ldots, s_n \in K$ gibt mit der Eigenschaft

$$s_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + s_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} .$$

Die Gleichheit von Vektoren bedeutet, dass Übereinstimmung in jeder Komponenten vorliegen muss, so dass dies zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccc} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \cdots + a_{1n}s_n & = & c_1 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \cdots + a_{2n}s_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \cdots + a_{mn}s_n & = & c_m \end{array}$$

führt.

21.2. **Das Lösen von linearen Gleichungssystemen.**

Lineare Gleichungssysteme werden mit dem *Eliminationsverfahren* gelöst, bei dem nach und nach Variablen eliminiert werden und schließlich ein besonders einfaches äquivalentes Gleichungssystem entsteht, das direkt gelöst werden kann (bzw. von dem gezeigt werden kann, dass es keine Lösung besitzt). Bei kleinen Systemen können auch das Einsetzungsverfahren oder das Gleichsetzungsverfahren sinnvoll sein.

Definition 21.6. Es sei K ein Körper und seien zwei (inhomogene) lineare Gleichungssysteme zur gleichen Variablenmenge gegeben. Die Systeme heißen *äquivalent*, wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen.

Lemma 21.7. *Es sei K ein Körper und*

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{matrix}$$

ein inhomogenes lineares Gleichungssystem über K. Dann führen die folgenden Manipulationen an diesem Gleichungssystem zu einem äquivalenten Gleichungssystem.

(1) *Das Vertauschen von zwei Gleichungen.*
(2) *Die Multiplikation einer Gleichung mit einem Skalar $s \neq 0$.*
(3) *Das einfache Weglassen einer Gleichung, die doppelt vorkommt.*
(4) *Das Verdoppeln einer Gleichung (im Sinne von eine Gleichung zweimal hinschreiben).*
(5) *Das Weglassen oder Hinzufügen einer Nullzeile(einer Nullgleichung).*
(6) *Das Ersetzen einer Gleichung H durch diejenige Gleichung, die entsteht, wenn man zu H eine andere Gleichung G des Systems addiert.*

Beweis. Die meisten Aussagen sind direkt klar. (2) ergibt sich einfach daraus, dass wenn

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i = c$$

gilt, dass dann auch

$$\sum_{i=1}^{n} (sa_i) \xi_i = sc$$

für jedes $s \in K$ gilt. Bei $s \neq 0$ kann man diesen Übergang durch Multiplikation mit s^{-1} rückgängig machen.

(6). Es sei G die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = c$$

und H die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = d.$$

Wenn ein Tupel $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in K^n$ die beiden Gleichungen erfüllt, so erfüllt es auch die Gleichung $H' = G+H$. Und wenn das Tupel die beiden Gleichungen G und H' erfüllt, so auch die Gleichung G und $H = H' - G$. $\square$

Für die praktische Lösung eines linearen Gleichungssystems sind die beiden Manipulationen (2) und (6) am wichtigsten, wobei man in aller Regel diese beiden Schritte kombiniert und eine Gleichung H durch eine Gleichung der Form $H + \lambda G$ (mit $G \neq H$) ersetzt. Dabei wird $\lambda \in K$ so gewählt, dass die neue Gleichung eine Variable weniger besitzt als die alte. Man spricht von *Elimination einer Variablen*. Diese Elimination wird nicht nur für eine Zeile durchgeführt, sondern für alle Zeilen mit der Ausnahme von einer (geeignet gewählten) „Arbeitszeile“ G und mit einer fixierten „Arbeitsvariablen“. Das folgende *Eliminationslemma* beschreibt diesen Rechenschritt.

Lemma 21.8. *Es sei K ein Körper und S ein (inhomogenes) lineares Gleichungssystem über K in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Es sei x eine Variable, die in mindestens einer Gleichung G mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten a vorkommt. Dann lässt sich jede von G verschiedene[40] Gleichung H durch eine Gleichung H' ersetzen, in der x nicht mehr vorkommt, und zwar so, dass das neue Gleichungssystem S', das aus G und den Gleichungen H' besteht, äquivalent zum Ausgangssystem S ist.*

Beweis. Durch Umnummerieren kann man $x = x_1$ erreichen. Es sei G die Gleichung

$$ax_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i x_i \,=\, b$$

(mit $a \neq 0$) und H die Gleichung

$$cx_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i x_i \,=\, d.$$

Dann hat die Gleichung

$$H' \,=\, H - \frac{c}{a} G$$

die Gestalt

$$\sum_{i=2}^{n} \left(c_i - \frac{c}{a} a_i \right) x_i \,=\, d - \frac{c}{a} b,$$

in der x_1 nicht mehr vorkommt. Wegen $H = H' + \frac{c}{a} G$ sind die Gleichungssysteme äquivalent. □

[40]Mit verschieden ist hier gemeint, dass die beiden Gleichungen einen unterschiedlichen Index im System haben. Es ist also sogar der Fall erlaubt, dass G und H dieselbe, aber doppelt aufgeführte Gleichung ist.

Satz 21.9. *Jedes (inhomogene) lineare Gleichungssystem über einem Körper K lässt sich durch die in Lemma 21.7 beschriebenen elementaren Umformungen und durch das Weglassen von überflüssigen Gleichungen in ein äquivalentes lineares Gleichungssystem der Stufenform*

$$\begin{array}{cccccccccc}
b_{1s_1}x_{s_1} & +b_{1s_1+1}x_{s_1+1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & +b_{1n}x_n & = & d_1 \\
0 & \ldots & 0 & b_{2s_2}x_{s_2} & \ldots & \ldots & \ldots & +b_{2n}x_n & = & d_2 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & b_{ms_m}x_{s_m} & \ldots & +b_{mn}x_n & = & d_m \\
(0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & = & d_{m+1})
\end{array}$$

überführen, bei dem alle Startkoeffizienten $b_{1s_1}, b_{2s_2}, \ldots, b_{ms_m}$ von 0 verschieden sind. Dabei ist bei $d_{m+1} = 0$ die letzte Zeile überflüssig und bei $d_{m+1} \neq 0$ besitzt das System keine Lösung.

Beweis. Dies folgt direkt aus dem Eliminationslemma, mit dem man sukzessive Variablen eliminiert. Man wendet es auf die erste (in der gegebenen Reihenfolge) Variable (diese sei x_{s_1}) an, die in mindestens einer Gleichung mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten auftaucht. Diese Eliminationsschritte wendet man solange an, solange das im Eliminationsschritt entstehende variablenreduzierte Gleichungssystem (also ohne die vorhergehenden Arbeitsgleichungen) noch mindestens zwei Gleichungen mit von 0 verschiedenen Koeffizienten erhält. Wenn dabei Gleichungen in der Form der letzten Gleichung übrig bleiben, und diese nicht alle die Nullgleichung sind, so besitzt das System keine Lösung. □

Lemma 21.10. *Es sei ein inhomogenes lineares Gleichungssystem über einem Körper K in Dreiecksgestalt*

$$\begin{array}{cccccccc}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \ldots & +a_{1m}x_m & \ldots & +a_{1n}x_n & = & c_1 \\
0 & a_{22}x_2 & \ldots & \ldots & \ldots & +a_{2n}x_n & = & c_2 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & a_{mm}x_m & \ldots & +a_{mn}x_n & = & c_m
\end{array}$$

mit $m \leq n$ gegeben, wobei vorne die Diagonalelemente alle ungleich 0 seien. Dann stehen die Lösungen $(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ in Bijektion zu den Tupeln $(x_{m+1}, \ldots, x_n) \in K^{n-m}$. D.h. die hinteren $n-m$ Einträge sind frei wählbar und legen eine eindeutige Lösung fest, und jede Lösung wird dabei erfasst.

Beweis. Dies ist klar, da bei gegebenem $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ die Zeilen von unten nach oben sukzessive die anderen Variablen eindeutig festlegen. □

Bei $m = n$ gibt es keine freien Variablen und das Gleichungssystem besitzt genau eine Lösung.

Beispiel 21.11. Wir wollen das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccc} 2x & +5y & +2z & & -v & = & 3 \\ 3x & -4y & & +u & +2v & = & 1 \\ 4x & & -2z & +2u & & = & 7 \end{array}$$

über $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{Q}$) lösen. Wir eliminieren zuerst x, indem wir die erste Zeile I beibehalten, die zweite Zeile II durch $II - \frac{3}{2}I$ und die dritte Zeile III durch $III - 2I$ ersetzen. Das ergibt

$$\begin{array}{cccccccc} 2x & +5y & +2z & & -v & = & 3 \\ & -\frac{23}{2}y & -3z & +u & +\frac{7}{2}v & = & \frac{-7}{2} \\ & -10y & -6z & +2u & +2v & = & 1\,. \end{array}$$

Wir könnten jetzt aus der (neuen) dritten Zeile mit Hilfe der zweiten Zeile y eliminieren. Wegen der Brüche eliminieren wir aber lieber z (dies eliminiert gleichzeitig u). Wir belassen also die erste und zweite Zeile und ersetzen die dritte Zeile III durch $III - 2II$. Dies ergibt, wobei wir das System in einer neuen Reihenfolge[41] aufschreiben, das System

$$\begin{array}{cccccccc} 2x & +2z & & +5y & -v & = & 3 \\ & -3z & +u & -\frac{23}{2}y & +\frac{7}{2}v & = & \frac{-7}{2} \\ & & & 13y & -5v & = & 8\,. \end{array}$$

Wir können uns nun v beliebig (oder „frei“) vorgeben. Die dritte Zeile legt dann y eindeutig fest, es muss nämlich

$$y = \frac{8}{13} + \frac{5}{13}v$$

gelten. In der zweiten Gleichung können wir wieder u beliebig vorgeben, was dann z eindeutig festlegt, nämlich

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{3}\left(-\frac{7}{2} - u - \frac{7}{2}v + \frac{23}{2}\left(\frac{8}{13} + \frac{5}{13}v\right)\right) \\ &= -\frac{1}{3}\left(-\frac{7}{2} - u - \frac{7}{2}v + \frac{92}{13} + \frac{115}{26}v\right) \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{93}{26} - u + \frac{12}{13}v\right) \\ &= -\frac{31}{26} + \frac{1}{3}u - \frac{4}{13}v. \end{aligned}$$

Die erste Zeile legt dann x fest, nämlich

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(3 - 2z - 5y + v) \\ &= \frac{1}{2}\left(3 - 2\left(-\frac{31}{26} + \frac{1}{3}u - \frac{4}{13}v\right) - 5\left(\frac{8}{13} + \frac{5}{13}v\right) + v\right) \end{aligned}$$

[41] Eine solche Umstellung ist ungefährlich, wenn man den Namen der Variablen mitschleppt. Wenn man dagegen das System in Matrizenschreibweise aufführt, also die Variablennamen einfach weglässt, so muss man sich diese Spaltenvertauschungen merken.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\left(\frac{30}{13} - \frac{2}{3}u - \frac{4}{13}v\right) \\ &= \frac{15}{13} - \frac{1}{3}u - \frac{2}{13}v. \end{aligned}$$

Daher kann man die Gesamtlösungsmenge als

$$\left\{\left(\frac{15}{13} - \frac{1}{3}u - \frac{2}{13}v, \frac{8}{13} + \frac{5}{13}v, -\frac{31}{26} + \frac{1}{3}u - \frac{4}{13}v, u, v\right) \mid u, v \in \mathbb{R}\right\}$$

schreiben. Eine besonders einfache Lösung ergibt sich, wenn man die freien Variablen u und v gleich 0 setzt. Dies führt auf die spezielle Lösung

$$(x, y, z, u, v) = \left(\frac{15}{13}, \frac{8}{13}, -\frac{31}{26}, 0, 0\right).$$

In der allgemeinen Lösung kann man u und v als Koeffizienten rausziehen und dann die Lösungsmenge auch als

$$\left\{\left(\frac{15}{13}, \frac{8}{13}, -\frac{31}{26}, 0, 0\right) + u\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1, 0\right) + v\left(-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{4}{13}, 0, 1\right) \mid u, v \in \mathbb{R}\right\}$$

schreiben. Dabei ist

$$\left\{u\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1, 0\right) + v\left(-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{4}{13}, 0, 1\right) \mid u, v \in \mathbb{R}\right\}$$

eine Beschreibung der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems.

Bemerkung 21.12. Unter einem *linearen Ungleichungssystem* über den rationalen Zahlen oder den reellen Zahlen versteht man ein System der Form

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \star & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & \star & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \star & c_m, \end{array}$$

wobei $\star$ gleich $\leq$ oder $\geq$ ist. Die Lösungsmenge ist deutlich schwieriger zu beschreiben als im Gleichungsfall. Eine Eliminierung von Variablen ist im Allgemeinen nicht möglich.

21. Arbeitsblatt

21.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 21.1. In einer Familie leben M, P, S und T. Dabei ist M dreimal so alt wie S und T zusammen, M ist älter als P und S ist älter als T, wobei der Altersunterschied von S zu T doppelt so groß wie der von M zu P ist. Ferner ist P siebenmal so alt wie T und die Summe aller Familienmitglieder ist so alt wie die Großmutter väterlicherseits, nämlich 83.

a) Stelle ein lineares Gleichungssystem auf, das die beschriebenen Verhältnisse ausdrückt.

b) Löse dieses Gleichungssystem.

Aufgabe 21.2.*

Kevin zahlt für einen Winterblumenstrauß mit 3 Schneeglöckchen und 4 Mistelzweigen 2,50 € und Jennifer zahlt für einen Strauß aus 5 Schneeglöckchen und 2 Mistelzweigen 2,30 €. Wie viel kostet ein Strauß mit einem Schneeglöckchen und 11 Mistelzweigen?

Aufgabe 21.3. Zeige, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lcl} -4x+6y & = & 0 \\ 5x+8y & = & 0 \end{array}$$

nur die triviale Lösung $(0,0)$ besitzt.

Aufgabe 21.4. Wir betrachten eine Uhr mit Stunden- und Minutenzeiger. Es ist jetzt 6 Uhr, so dass die beiden Zeiger direkt gegenüber stehen. Um wie viel Uhr stehen die beiden Zeiger zum nächsten Mal direkt gegenüber?

Aufgabe 21.5. Löse das lineare Gleichungssystem

$$x+y+z = 0.$$

Aufgabe 21.6. Löse das lineare Gleichungssystem

$$x=5,\ 2y=3,\ 4z+w=3\,.$$

Aufgabe 21.7.*

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} 3x & & +z & +4w & = & 4 \\ 2x & +2y & & +w & = & 0 \\ 4x & +6y & & +w & = & 2 \\ x & +3y & +5z & & = & 3\,. \end{array}$$

Aufgabe 21.8. Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} x & +2y & +3z & +4w & = & 1 \\ 2x & +3y & +4z & +5w & = & 7 \\ x & & +z & & = & 9 \\ x & +5y & +5z & +w & = & 0\,. \end{array}$$

Aufgabe 21.9. Gibt es eine Lösung $(a, b, c) \in \mathbb{Q}$ für das lineare Gleichungssystem

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

aus Beispiel 21.1?

Aufgabe 21.10. Zeige, dass es zu jedem linearen Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$ ein dazu äquivalentes Gleichungssystem mit der Eigenschaft gibt, dass alle Koeffizienten ganzzahlig sind.

Aufgabe 21.11. Bringe das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x - 4 + 5y &= 8z + 7x, \\ 2 - 4x + z &= 2y + 3x + 6, \\ 4z - 3x + 2x + 3 &= 5x - 11y + 2z - 8 \end{aligned}$$

in Standardgestalt und löse es.

Aufgabe 21.12.*

Erstelle eine Geradengleichung für die Gerade im $\mathbb{R}^2$, die durch die beiden Punkte $(2, 3)$ und $(5, -7)$ verläuft.

Vor der nächsten Aufgabe erinnern wir an den Begriff der Sekante, der schon im Kontext der Differentialrechnung aufgetaucht ist.

Zu einer auf einer Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}$ definierten Funktion

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

und zwei verschiedenen Punkten $a, b \in T$ heißt die Gerade durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ die *Sekante* von f an a und b.

Aufgabe 21.13. Bestimme eine Geradengleichung der Sekante der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto -x^3 + x^2 + 2,$$

zu den Stellen 3 und 4.

Aufgabe 21.14. Bestimme eine Ebenengleichung für die Ebene im $\mathbb{R}^3$, auf der die drei Punkte

$$(1, 0, 0), (0, 1, 2) \text{ und } (2, 3, 4)$$

liegen.

Aufgabe 21.15. Finde zu einer komplexen Zahl $z = a + b\mathrm{i} \neq 0$ die inverse komplexe Zahl mit Hilfe eines reellen linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen und zwei Gleichungen.

Aufgabe 21.16. Löse über den komplexen Zahlen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} \mathrm{i}x & +y & +(2-\mathrm{i})z & = & 2 \\ & 7y & +2\mathrm{i}z & = & -1+3\mathrm{i} \\ & & (2-5\mathrm{i})z & = & 1\,. \end{array}$$

Aufgabe 21.17. Es sei K der in Beispiel 4.4 eingeführte Körper mit zwei Elementen. Löse in K das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} x & +y & & = & 1 \\ & y & +z & = & 0 \\ x & +y & +z & = & 0\,. \end{array}$$

Aufgabe 21.18. Zeige durch ein Beispiel, dass das durch die drei Gleichungen I,II,III gegebene lineare Gleichungssystem nicht zu dem durch die drei Gleichungen I-II, I-III, II-III gegebenen linearen Gleichungssystem äquivalent sein muss.

In den folgenden vier Aufgaben geht es insbesondere darum, ein für die Aufgabenstellung angemessenes Lösungsverfahren zu finden und durchzuführen.

Aufgabe 21.19. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} & +7y & +3z & & = & 4 \\ x & & & +4w & = & 9 \\ & -3y & -5z & & = & 2 \\ -2x & & & +3w & = & 3 \end{array}.$$

Aufgabe 21.20. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 7y &= 5, \\ 4z &= 8, \\ 2u - 3v &= 0, \\ 5w &= 0, \\ 6x - 3y + 2z - 11u - v + 5w &= 17, \\ 4u - 5v &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 21.21.*

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x - 5y + 7z &= -3, \\ -2x + 4y + 3z &= 9, \\ x &= -2. \end{aligned}$$

Aufgabe 21.22. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x - 67y + 14z - 123u - 51w &= 5, \\ 8x - 11y + 12z - 27u - 65w &= 51, \\ 66x - 67y - 77z - u + 100w &= 0, \\ 8x - 11y + 12z - 27u - 65w &= -15, \\ -301x + 44y + 33z - 31u - 18w &= 571. \end{aligned}$$

Aufgabe 21.23.*

Bestimme in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ den Lösungsraum $L_a \subseteq \mathbb{R}^3$ der linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 5x + ay + (1-a)z &= 0, \\ 2ax + a^2y + 3z &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 21.24. Ein lineares Ungleichungssystem sei durch die Ungleichungen

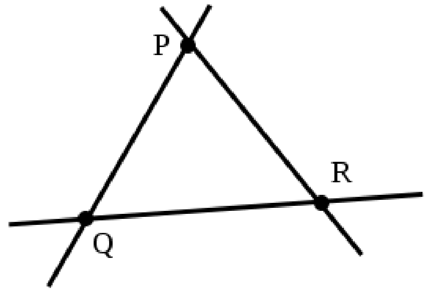
$$\begin{aligned} x &\geq 0, \\ y &\geq 0, \\ x + y &\leq 1, \end{aligned}$$

gegeben. Skizziere die Lösungsmenge dieses Ungleichungssystems.

Aufgabe 21.25. Es sei

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &\geq c_1, \\ a_2x + b_2y &\geq c_2, \\ a_3x + b3y &\geq c_3, \end{aligned}$$

ein lineares Ungleichungssystem, dessen Lösungsmenge ein Dreieck sei. Wie sieht die Lösungsmenge aus, wenn man in jeder Ungleichung $\geq$ durch $\leq$ ersetzt?



21.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 21.26. (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} x & +2y & +3z & +4w & = & 1 \\ 2x & +3y & +4z & +5w & = & 7 \\ x & & +z & & = & 9 \\ x & +5y & +5z & +w & = & 0\,. \end{array}$$

Aufgabe 21.27. (3 Punkte)

Löse das lineare Gleichungssystem in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$, das durch die beiden Gleichungen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \,=\, 0$$

und

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8 + x_9 - x_{10} \,=\, 0$$

gegeben ist.

Aufgabe 21.28. (3 Punkte)

Betrachte im $\mathbb{R}^3$ die beiden Ebenen

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 4y + 5z = 2\} \text{ und}$$
$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = -1\}.$$

Bestimme die Schnittgerade $E \cap F$.

Aufgabe 21.29. (3 Punkte)

Bestimme eine Ebenengleichung für die Ebene im $\mathbb{R}^3$, auf der die drei Punkte

$$(1, 0, 2), (4, -3, 2) \text{ und } (2, 1, -1)$$

liegen.

Aufgabe 21.30. (4 Punkte)

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} 2x & -ay & & = & -2 \\ ax & & +3z & = & 3 \\ -\frac{1}{3}x & +y & +z & = & 2 \end{array}$$

über den reellen Zahlen in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$. Für welche a besitzt das Gleichungssystem keine Lösung, eine Lösung oder unendlich viele Lösungen?

Aufgabe 21.31. (4 Punkte)

Zeige, dass ein lineares Gleichungssystem

$$ax + by = 0$$

$$cx + dy = 0$$

genau dann nur die triviale Lösung $(0,0)$ besitzt, wenn $ad - bc \neq 0$ ist.

Aufgabe 21.32. (4 (2+2) Punkte)

Ein lineares Ungleichungssystem sei durch die Ungleichungen

$$x \geq 0,$$

$$y + x \geq 0,$$

$$-1 - y \leq -x,$$

$$5y - 2x \geq 3,$$

gegeben.

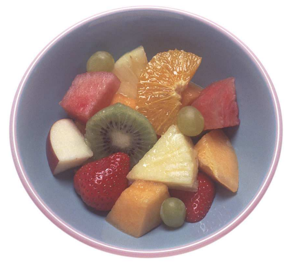
a) Skizziere die Lösungsmenge dieses Ungleichungssystems.

b) Bestimme die Eckpunkte der Lösungsmenge.

22. Vorlesung - Matrizen und Vektorräume

Hier hat Vorli die Fragebögen von Dr. Eisenbeis zerfetzt. Zum Glück hat Dr. Eisenbeis alles schon digital abgespeichert.

Beispiel 22.1. Ein gesundes Frühstück beginnt mit einem Obstsalat. Die folgende Tabelle zeigt, wie viel Vitamin C, Calcium und Magnesium (jeweils in Milligramm) unterschiedliche Früchte (pro 100 Gramm) besitzen.



	Apfel	Orange	Traube	Banane
Vitamin C	12	53	4	9
Calcium	7	40	12	5
Magnesium	6	10	8	27

Mein Obstsalat heute morgen besteht aus den angegebenen Früchten in den Anteilen $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ (also 300 Gramm Apfel u.s.w.). Daraus kann man den gesamten Vitamin-C-Gehalt, den Calcium-Gehalt und den Magnesium-Gehalt des Obstsalats ausrechnen, indem man einfach für jede Frucht ihre Menge mit dem entsprechenden Gehalt multipliziert und alles aufsummiert. Der Vitamingehalt des gesamten Obstsalats ist also (in Milligramm)

$$12 \cdot 3 + 53 \cdot 2 + 4 \cdot 7 + 9 \cdot 6 \;=\; 224.$$

Diese Operation ist ein Beispiel für die Wirkungsweise einer Matrix. Die Tabelle führt unmittelbar zu einer 3×4-Matrix, nämlich zu $\begin{pmatrix} 12 & 53 & 4 & 9 \\ 7 & 40 & 12 & 5 \\ 6 & 10 & 8 & 27 \end{pmatrix}$, und die obige Rechnung wird durch die Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} 12 & 53 & 4 & 9 \\ 7 & 40 & 12 & 5 \\ 6 & 10 & 8 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 224 \\ 215 \\ 256 \end{pmatrix}$$

realisiert.

Man kann auch umgekehrt sich einen Obstsalat wünschen, der eine bestimmte Menge an Vitamin C, Calcium und Magnesium besitzt, sagen wir $\begin{pmatrix} 180 \\ 110 \\ 140 \end{pmatrix}$.

Dies führt zum linearen Gleichungssystem in Matrixform

$$\begin{pmatrix} 12 & 53 & 4 & 9 \\ 7 & 40 & 12 & 5 \\ 6 & 10 & 8 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 110 \\ 140 \end{pmatrix}.$$

22.1. **Der Matrizenkalkül.**

Ein lineares Gleichungssystem lässt sich am einfachsten mit Matrizen schreiben. Dies ermöglicht es, die Umformungen, die zur Lösung eines solchen Systems führen, durchzuführen, ohne immer die Variablen mitschleppen zu müssen. Matrizen (und der zugehörige Kalkül) sind recht einfache Objekte; sie können aber ganz unterschiedliche mathematische Objekte beschreiben (eine Familie von Spaltenvektoren, eine Familie von Zeilenvektoren, eine lineare Abbildung, eine Tabelle von Wechselwirkungen, ein Vektorfeld etc.), die man stets im Hinterkopf haben sollte, um vor Fehlinterpretationen geschützt zu sein.

Definition 22.2. Es sei K ein Körper und I und J zwei Indexmengen. Eine $I \times J$-*Matrix* ist eine Abbildung

$$I \times J \longrightarrow K,\ (i,j) \longmapsto a_{ij}.$$

Bei $I = \{1, \ldots, m\}$ und $J = \{1, \ldots, n\}$ spricht man von einer $m \times n$-*Matrix*. In diesem Fall schreibt man eine Matrix zumeist tabellarisch als

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Wir beschränken uns weitgehend auf den durchnummerierten Fall. Zu jedem $i \in I$ heißt a_{ij} , $j \in J$, die i-te *Zeile* der Matrix, was man zumeist als einen *Zeilenvektor*

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$$

schreibt. Zu jedem $j \in J$ heißt a_{ij} , $i \in I$, die j-te *Spalte* der Matrix, was man zumeist als ein Spaltentupel

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

schreibt. Die Elemente a_{ij} heißen die *Einträge* der Matrix. Zu a_{ij} heißt i der *Zeilenindex* und j der *Spaltenindex* des Eintrags. Man findet den Eintrag a_{ij}, indem man die i-te Zeile mit der j-ten Spalte kreuzt. Eine Matrix mit $m = n$ nennt man eine *quadratische Matrix*. Eine $m \times 1$-Matrix ist einfach ein Spaltentupel (oder Spaltenvektor) der Länge m, und eine $1 \times n$-Matrix ist einfach ein Zeilentupel (oder Zeilenvektor) der Länge n. Die Menge aller Matrizen mit m Zeilen und n Spalten (und mit Einträgen in K) wird mit $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ bezeichnet, bei $m = n$ schreibt man $\mathrm{Mat}_n(K)$.

Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ werden addiert, indem man sie komponentenweise addiert. Ebenso ist die Multiplikation einer Matrix A mit einem Element $r \in K$ (einem *Skalar*) komponentenweise definiert, also

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

und

$$r\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \dots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \dots & ra_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \dots & ra_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die Matrizenmultiplikation wird folgendermaßen definiert.

Definition 22.3. Es sei K ein Körper und es sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times p$-Matrix über K. Dann ist das *Matrixprodukt*

$$AB$$

diejenige $m \times p$-Matrix, deren Einträge durch

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

gegeben sind.

Eine solche Matrizenmultiplikation ist also nur möglich, wenn die Spaltenanzahl der linken Matrix mit der Zeilenanzahl der rechten Matrix übereinstimmt. Als Merkregel kann man das Schema

$$(ZEILE)\begin{pmatrix} S \\ P \\ A \\ L \\ T \end{pmatrix} = (ZS + EP + IA + L^2 + ET)$$

verwenden, das Ergebnis ist eine 1×1-Matrix. Insbesondere kann man eine $m \times n$-Matrix A mit einem Spaltenvektor der Länge n (von rechts) multiplizieren, und erhält dabei einen Spaltenvektor der Länge m. Die beiden soeben angeführten Matrizen kann man auch in der anderen Reihenfolge multiplizieren (was nicht immer möglich ist) und erhält

$$\begin{pmatrix} S \\ P \\ A \\ L \\ T \end{pmatrix} (ZEILE) = \begin{pmatrix} SZ & SE & SI & SL & SE \\ PZ & PE & PI & PL & PE \\ AZ & AE & AI & AL & AE \\ LZ & LE & LI & L^2 & LE \\ TZ & TE & TI & TL & TE \end{pmatrix}.$$

Definition 22.4. Eine $n \times n$-Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

nennt man *Diagonalmatrix*.

Definition 22.5. Die $n \times n$-Matrix

$$E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nennt man die *Einheitsmatrix*.

Die Einheitsmatrix E_n besitzt die Eigenschaft $E_n M = M = M E_n$ für eine beliebige $n \times n$-Matrix M.

Bemerkung 22.6. Wenn man eine Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ mit einem Spaltenvektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ multipliziert, so erhält man

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Damit lässt sich ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit dem *Störvektor* $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ kurz als

$$Ax = c$$

schreiben. Die erlaubten Gleichungsumformungen durch Manipulationen an den Gleichungen, die die Lösungsmenge nicht ändern, können dann durch die entsprechenden Zeilenumformungen in der Matrix (unter Berücksichtigung der Störvektorseite) ersetzt werden. Man muss dann die Variablen nicht mitschleppen.

22.2. **Vektorräume.**

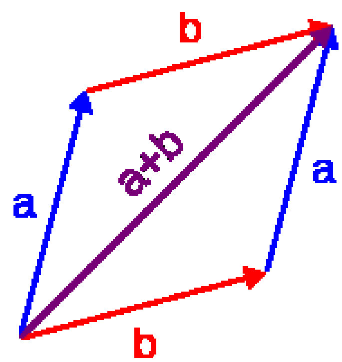
Der zentrale Begriff der linearen Algebra ist der Vektorraum.

Definition 22.7. Es sei K ein Körper und V eine Menge mit einem ausgezeichneten Element $0 \in V$ und mit zwei Abbildungen

$$+\colon V \times V \longrightarrow V,\ (u,v) \longmapsto u+v,$$

und

$$\cdot\colon K \times V \longrightarrow V,\ (s,v) \longmapsto sv = s \cdot v.$$



Die Addition von zwei Pfeilen a und b, ein typisches Beispiel für Vektoren.

Dann nennt man V einen K- *Vektorraum* (oder einen Vektorraum über K), wenn die folgenden Axiome erfüllt sind[42] (dabei seien $r, s \in K$ und $u, v, w \in V$ beliebig) [43]

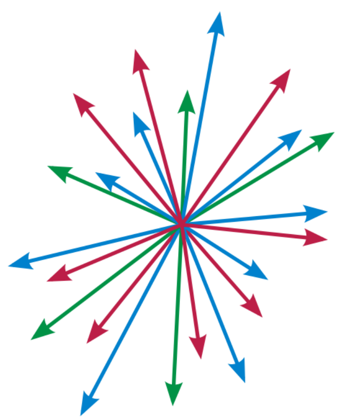
(1) $u + v = v + u$,
(2) $(u + v) + w = u + (v + w)$,
(3) $v + 0 = v$,
(4) Zu jedem v gibt es ein z mit $v + z = 0$,
(5) $1 \cdot u = u$,
(6) $r(su) = (rs)u$,
(7) $r(u + v) = ru + rv$,

[42]Die ersten vier Axiome, die unabhängig von K sind, bedeuten, dass $(V, 0, +)$ eine kommutative Gruppe ist.

[43]Auch für Vektorräume gilt die *Klammerkonvention*, dass Punktrechnung stärker bindet als Strichrechnung.

(8) $(r+s)u = ru + su$.

Die Verknüpfung in V nennt man (Vektor)-Addition und die Operation $K \times V \to V$ nennt man *Skalarmultiplikation*. Die Elemente in einem Vektorraum nennt man *Vektoren*, und die Elemente $r \in K$ heißen *Skalare*. Das Nullelement $0 \in V$ wird auch als *Nullvektor* bezeichnet, und zu $v \in V$ heißt das inverse Element das *Negative* zu v und wird mit $-v$ bezeichnet. Den Körper, der im Vektorraumbegriff vorausgesetzt ist, nennt man auch den *Grundkörper*. Alle Begriffe der linearen Algebra beziehen sich auf einen solchen Grundkörper, er darf also nie vergessen werden, auch wenn er manchmal nicht explizit aufgeführt wird. Bei $K = \mathbb{R}$ spricht man von *reellen Vektorräumen* und bei $K = \mathbb{C}$ von *komplexen Vektorräumen*. Bei reellen und komplexen Vektorräumen gibt es zusätzliche Strukturen wie Längen, Winkel, Skalarprodukt. Zunächst entwickeln wir aber die algebraische Theorie der Vektorräume über einem beliebigen Körper.



Beispiel 22.8. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann ist die Produktmenge

$$K^n = \underbrace{K \times \cdots \times K}_{n\text{-mal}} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in K\}$$

mit der komponentenweisen Addition und der durch

$$s(x_1, \ldots, x_n) = (sx_1, \ldots, sx_n)$$

definierten Skalarmultiplikation ein Vektorraum. Man nennt ihn den n-dimensionalen *Standardraum*. Insbesondere ist $K^1 = K$ selbst ein Vektorraum.

Der Nullraum 0, der aus dem einzigen Element 0 besteht, ist ebenfalls ein Vektorraum. Man kann ihn auch als $K^0 = 0$ auffassen.

Die Vektoren im Standardraum K^n kann man als Zeilenvektoren

$$(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n)$$

oder als Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

schreiben. Der Vektor

$$e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei die 1 an der i-ten Stelle steht, heißt i-ter *Standardvektor*.

Beispiel 22.9. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden einen Körper und daher bilden sie einen Vektorraum über sich selbst. Andererseits sind die komplexen Zahlen als additive Struktur gleich $\mathbb{R}^2$. Die Multiplikation einer komplexen Zahl $a + b\mathrm{i}$ mit einer reellen Zahl $s = (s, 0)$ geschieht komponentenweise, d.h. diese Multiplikation stimmt mit der skalaren Multiplikation auf $\mathbb{R}^2$ überein. Daher sind die komplexen Zahlen auch ein reeller Vektorraum. Unter Verwendung einer späteren Terminologie kann man sagen, dass $\mathbb{C}$ ein eindimensionaler komplexer Vektorraum ist und dass $\mathbb{C}$ ein zweidimensionaler reeller Vektorraum ist mit der reellen Basis 1 und i.

Beispiel 22.10. Zu einem Körper K und gegebenen natürlichen Zahlen m, n bildet die Menge

$$\operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$$

der $m \times n$-Matrizen mit komponentenweiser Addition und komponentenweiser Skalarmultiplikation einen K-Vektorraum. Das Nullelement in diesem Vektorraum ist die *Nullmatrix*

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 22.11. Sei $R = K[X]$ der Polynomring in einer Variablen über dem Körper K, der aus sämtlichen Polynomen, also Ausdrücken der Form

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$$

mit $a_i \in K$ besteht. Mit (komponentenweiser) Addition und der ebenfalls komponentenweisen Multiplikation mit einem Skalar $s \in K$ (was man auch als die Multiplikation mit dem konstanten Polynom s auffassen kann) ist der Polynomring ein K-Vektorraum.

Lemma 22.12. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann gelten die folgenden Eigenschaften (dabei sei $v \in V$ und $s \in K$).*

(1) *Es ist $0v = 0$.* [44]
(2) *Es ist $s0 = 0$.*
(3) *Es ist $(-1)v = -v$.*
(4) *Aus $s \neq 0$ und $v \neq 0$ folgt $sv \neq 0$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 22.34. □

22.3. **Untervektorräume.**

Definition 22.13. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Untervektorraum*, wenn die folgenden Eigenschaften gelten.

(1) $0 \in U$.
(2) Mit $u, v \in U$ ist auch $u + v \in U$.
(3) Mit $u \in U$ und $s \in K$ ist auch $su \in U$.

Auf einem solchen Untervektorraum kann man die Addition und die skalare Multiplikation einschränken. Daher ist ein Untervektorraum selbst ein Vektorraum, siehe Aufgabe 22.20. Die einfachsten Untervektorräume in einem Vektorraum V sind der Nullraum 0 und der gesamte Vektorraum V.

Lemma 22.14. *Es sei K ein Körper und*

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem über K. Dann ist die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum des K^n (mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation).

Beweis. Siehe Aufgabe 22.22. □

Man spricht daher auch vom *Lösungsraum* des Gleichungssystems. Insbesondere ist die Summe von zwei Lösungen eines linearen Gleichungssystems wieder eine Lösung. Die Lösungsmenge eines inhomogenen Gleichungssystems ist kein Vektorraum. Man kann aber zu einer Lösung eines inhomogenen Gleichungssystems eine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems hinzuaddieren und erhält wieder eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems.

[44] Man mache sich hier und im Folgenden klar, wann die 0 in K und wann sie in V zu verstehen ist.

Beispiel 22.15. Wir knüpfen an die homogene Version von Beispiel 21.11 an, d.h. wir betrachten das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccc} 2x & +5y & +2z & & -v & = & 0 \\ 3x & -4y & & +u & +2v & = & 0 \\ 4x & & -2z & +2u & & = & 0\,. \end{array}$$

über $\mathbb{R}$. Aufgrund von Lemma 22.14 ist die Lösungsmenge L ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$. Wir haben ihn in Beispiel 21.11 explizit als

$$\left\{ u\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1, 0\right) + v\left(-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{4}{13}, 0, 1\right) \mid u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

beschrieben, woraus ebenfalls erkennbar ist, dass dieser Lösungsraum ein Vektorraum ist. In dieser Schreibweise wird klar, dass L in Bijektion zu $\mathbb{R}^2$ steht, und zwar respektiert diese Bijektion sowohl die Addition als auch die Skalarmultiplikation (der Lösungsraum L' des inhomogenen Systems steht ebenfalls in Bijektion zu $\mathbb{R}^2$, allerdings gibt es keine sinnvolle Addition und Skalarmultiplikation auf L'). Allerdings hängt diese Bijektion wesentlich von den gewählten „Basislösungen" $\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1, 0\right)$ und $\left(-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{4}{13}, 0, 1\right)$ ab, die von der gewählten Eliminationsreihenfolge abhängen. Es gibt für L andere gleichberechtigte Basislösungen.

An diesem Beispiel kann man sich Folgendes klar machen: Der Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems über K ist „in natürlicher Weise", d.h. unabhängig von jeder Auswahl, ein Untervektorraum des K^n (wenn n die Anzahl der Variablen ist). Der Lösungsraum kann auch stets in eine „lineare Bijektion" (eine „Isomorphie") mit einem K^d ($d \leq n$) gebracht werden, doch gibt es dafür keine natürliche Wahl. Dies ist einer der Hauptgründe dafür, mit dem abstrakten Vektorraumbegriff zu arbeiten anstatt lediglich mit dem K^n.

22. Arbeitsblatt

22.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 22.1. Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} Z & E & I & L & E \\ R & E & I & H & E \\ H & O & R & I & Z \\ O & N & T & A & L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & E & I \\ P & V & K \\ A & E & A \\ L & R & A \\ T & T & L \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 22.2.*

Berechne über den komplexen Zahlen das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} & -1-3\mathrm{i} & -1 \\ \mathrm{i} & 0 & 4-2\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \\ 2+5\mathrm{i} \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 22.3. Bestimme das Matrizenprodukt

$$e_i \circ e_j \, ,$$

wobei links der i-te Standardvektor (der Länge n) als Zeilenvektor und rechts der j-te Standardvektor (ebenfalls der Länge n) als Spaltenvektor aufgefasst wird.

Aufgabe 22.4. Es sei M eine $m \times n$-Matrix. Zeige, dass das Matrizenprodukt Me_j mit dem j-ten Standardvektor (als Spaltenvektor aufgefasst) die j-te Spalte von M ergibt. Was ist e_iM, wobei e_i der i-te Standardvektor (als Zeilenvektor aufgefasst) ist?

Aufgabe 22.5. Es sei

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix und M eine $n \times n$-Matrix. Beschreibe DM und MD.

Aufgabe 22.6. Es sei

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix und $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ ein n-Tupel über einem Körper K, und es sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ein Variablentupel. Welche Besonderheiten erfüllt das lineare Gleichungssystem

$$Dx = c,$$

und wie löst man es?

Aufgabe 22.7. Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} & 1-\frac{1}{2}\mathrm{i} & 4\mathrm{i} \\ -5+7\mathrm{i} & \sqrt{2}+\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5+4\mathrm{i} & 3-2\mathrm{i} \\ \sqrt{2}-\mathrm{i} & e+\pi\mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 2-3\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

gemäß den beiden möglichen Klammerungen.

Für die folgende Aussage wird sich bald ein einfacher Beweis über die Beziehung zwischen Matrizen und linearen Abbildungen ergeben.

Aufgabe 22.8. Zeige, dass die Matrizenmultiplikation assoziativ ist.

Genauer: Es sei K ein Körper und es sei A eine $m \times n$-Matrix, B eine $n \times p$-Matrix und C eine $p \times r$-Matrix über K. Zeige, dass $(AB)C = A(BC)$ ist.

Aufgabe 22.9.*

Zeige, dass die Matrizenmultiplikation von quadratischen Matrizen im Allgemeinen nicht kommutativ ist.

Zu einer Matrix M bezeichnet man mit M^n die n-fache Verknüpfung (Matrizenmultiplikation) mit sich selbst. Man spricht dann auch von n-ten *Potenzen* der Matrix.

Aufgabe 22.10. Berechne zur Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

die Potenzen

$$M^i,\ i = 1, \ldots, 4.$$

Aufgabe 22.11.*

Aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 werden verschiedene Produkte P_1, P_2, P_3, P_4 hergestellt. Die folgende Tabelle gibt an, wie viel von den Rohstoffen jeweils nötig ist, um die verschiedenen Produkte herzustellen (jeweils in geeigneten Einheiten).

	R_1	R_2	R_3
P_1	6	2	3
P_2	4	1	2
P_3	0	5	2
P_4	2	1	5

a) Erstelle eine Matrix, die aus einem Vierertupel von Produkten die benötigten Rohstoffe berechnet.

b) Die folgende Tabelle zeigt, wie viel von welchem Produkt in einem Monat produziert werden soll.

	P_1	P_2	P_3	P_4
	6	4	7	5

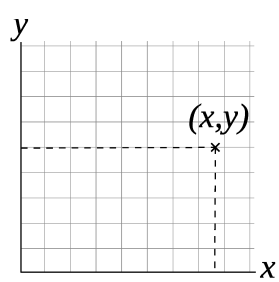
Welche Rohstoffmengen werden dafür benötigt?

c) Die folgende Tabelle zeigt, wie viel von welchem Rohstoff an einem Tag angeliefert wird.

	R_1	R_2	R_3
	12	9	13

Welche Produkttupel kann man daraus ohne Abfall produzieren?

Aufgabe 22.12. Bestimme die (ungefähren) Koordinaten des skizzierten Punktes (eine Kästchenlänge repräsentiere eine Einheit).



Aufgabe 22.13. Markiere die folgenden Punkte in der kartesischen Ebene $\mathbb{R}^2$.

$$(3, -7),\ (-1, -2),\ (0, 5),\ (4, 4),\ (4, 5),\ (-3, 0),\ (0, 0)\,.$$

Aufgabe 22.14. Es sei ein Punkt $P = (x, y)$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ gegeben. Skizziere die Punkte

$$(-x, y),\ (x, -y),\ (-x, -y),\ (3x, 3y), (-2x, -2y)\,.$$

Aufgabe 22.15. Es sei ein Punkt $P = (x, y)$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ gegeben. Skizziere die Menge aller Punkte

$$(cx, cy),\ c \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 22.16. Markiere zwei Punkte P und Q in der kartesischen Ebene $\mathbb{R}^2$ und addiere sie.

Aufgabe 22.17. Zeige, dass der Zahlenraum K^n zu einem Körper K mit der komponentenweisen Addition und der Skalarmultiplikation die Eigenschaften

(1) $r(su) = (rs)u$,
(2) $r(u + v) = ru + rv$,
(3) $(r + s)u = ru + su$,
(4) $1u = u$,

erfüllt.

Aufgabe 22.18. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Zeige, dass auch das Produkt

$$V \times W$$

ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 22.19.*

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es seien $s_1, \ldots, s_k \in K$ und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Zeige

$$\left(\sum_{i=1}^{k} s_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} v_j\right) = \sum_{1 \leq i \leq k,\, 1 \leq j \leq n} s_i \cdot v_j.$$

Aufgabe 22.20. Man mache sich klar, dass sich die Addition und die skalare Multiplikation auf einen Untervektorraum einschränken lässt und dass dieser mit den von V geerbten Strukturen selbst ein Vektorraum ist.

Aufgabe 22.21. Überprüfe, ob die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ Untervektorräume sind:

(1) $V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$,
(2) $V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}$,
(3) $V_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 1\}$,
(4) $V_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$.

Aufgabe 22.22.*

Es sei K ein Körper und

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem über K. Zeige, dass die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum des K^n ist. Wie verhält sich dieser Lösungsraum zu den Lösungsräumen der einzelnen Gleichungen?

Aufgabe 22.23.*

Es sei D die Menge aller reellen 2×2-Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

die die Bedingung

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$$

erfüllen. Zeige, dass D kein Untervektorraum im Raum aller 2×2-Matrizen ist.

Aufgabe 22.24. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Zeige, dass die Vereinigung $U \cup W$ nur dann ein Untervektorraum ist, wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gilt.

Aufgabe 22.25. Es sei K ein Körper und I eine Indexmenge. Zeige, dass

$$K^I = \text{Abb}\,(I, K)$$

mit stellenweiser Addition und skalarer Multiplikation ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 22.26. Es sei

$$C = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \text{Cauchyfolge in } \mathbb{R} \right\}$$

die Menge aller reellen Cauchyfolgen. Zeige, dass C ein Untervektorraum des Folgenraums

$$F = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \text{Folge in } \mathbb{R} \right\}$$

ist.

Aufgabe 22.27. Zeige, dass die Teilmenge

$$S = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\} \subseteq \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

ein Untervektorraum ist.

Aufgabe 22.28. Zeige, dass die Teilmenge

$$T = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ differenzierbar}\} \subseteq \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

ein Untervektorraum ist.

Aufgabe 22.29. Zeige, dass die Teilmenge

$$M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ monoton}\} \subseteq \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

kein Untervektorraum ist.

22.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 22.30. (3 Punkte)

Berechne über den komplexen Zahlen das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 3-2\mathrm{i} & 1+5\mathrm{i} & 0 \\ 7\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} & 4-\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 3-4\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} \\ 5-7\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 22.31. (3 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über einem Körper K. Zeige, dass die vierte Potenz von M gleich 0 ist, also

$$M^4 = MMMM = 0\,.$$

Aufgabe 22.32. (4 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Finde und beweise eine Formel für die n-te Potenz der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 22.33. (2 Punkte)

Finde neben den beiden Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ vier weitere Matrizen M mit der Eigenschaft $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 22.34. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften gelten (dabei sei $s \in K$ und $v \in V$).

(1) Es ist $0v = 0$.
(2) Es ist $s0 = 0$.
(3) Es ist $(-1)v = -v$.
(4) Aus $s \neq 0$ und $v \neq 0$ folgt $sv \neq 0$.

Aufgabe 22.35. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen Vektorraum V und von drei Teilmengen in V an, die jeweils zwei der Unterraumaxiome erfüllen, aber nicht das dritte.

23. Vorlesung - Basen und Dimension

> Man gibt seine Kinder auf die Schule, daß sie still werden, auf die Hochschule, daß sie laut werden.
>
> Jean Paul (1763-1825)

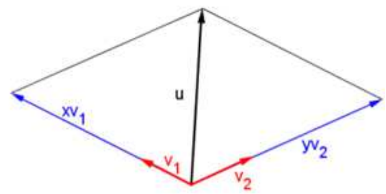
Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems in n Variablen über einem Körper K ist ein Untervektorraum des K^n. Häufig wird dieser Lösungsraum durch die Menge aller „Linearkombinationen“ von endlich vielen (besonders einfachen) Lösungen beschrieben. In dieser Vorlesung entwickeln wir die dazu notwendigen Begriffe.

23.1. **Erzeugendensysteme.**

Definition 23.1. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Familie von Vektoren in V. Dann heißt der Vektor

$$s_1v_1 + s_2v_2 + \cdots + s_nv_n \text{ mit } s_i \in K$$

eine *Linearkombination* dieser Vektoren (zum *Koeffiziententupel* $(s_1, \ldots, s_n)$).



Die von zwei Vektoren v_1 und v_2 erzeugte Ebene besteht aus allen Linearkombinationen $u = xv_1 + yv_2$.

Zwei unterschiedliche Koeffiziententupel können denselben Vektor definieren.

Definition 23.2. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt eine Familie $v_i \in V$, $i \in I$, ein *Erzeugendensystem* von V, wenn man jeden Vektor $v \in V$ als[45]

$$v = \sum_{j \in J} s_j v_j$$

mit einer endlichen Teilfamilie $J \subseteq I$ und mit $s_j \in K$ darstellen kann.

Im K^n bilden die Standardvektoren e_i, $1 \leq i \leq n$, ein Erzeugendensystem. Im Polynomring $K[X]$ bilden die Potenzen X^n, $n \in \mathbb{N}$, ein (unendliches) Erzeugendensystem.

Definition 23.3. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zu einer Familie v_i, $i \in I$, setzt man

$$\langle v_i,\, i \in I \rangle = \left\{ \sum_{i \in J} s_i v_i \mid s_i \in K,\, J \subseteq I \text{ endliche Teilmenge} \right\}$$

und nennt dies den von der Familie *erzeugten* oder *aufgespannten Untervektorraum.*

Der von der leeren Menge erzeugte Untervektorraum ist der Nullraum.[46] Dieser wird ebenso von der 0 erzeugt. Zu einem einzigen Vektor v besteht der aufgespannte Raum aus $Kv = \{sv \mid s \in K\}$. Bei $v \neq 0$ ist dies eine *Gerade*, was wir im Rahmen der Dimensionstheorie noch präzisieren werden. Bei zwei Vektoren v und w hängt die „Gestalt“ des aufgespannten Raumes davon ab, wie die beiden Vektoren sich zueinander verhalten. Wenn sie beide auf einer Geraden liegen, d.h. wenn $w = sv$ gilt, so ist w überflüssig und der von den beiden Vektoren erzeugte Untervektorraum stimmt mit dem von v

[45]Es bedeutet keinen Verständnisverlust, wenn man hier nur endliche Familien betrachtet. Das Summenzeichen über eine endliche Indexmenge bedeutet einfach, dass alle Elemente der Familie aufzusummieren sind.

[46]Dies kann man als Definition nehmen oder aber aus der Definition ableiten, wenn man die Konvention berücksichtigt, dass die leere Summe gleich 0 ist.

erzeugten Untervektorraum überein. Wenn dies nicht der Fall ist (und v und w nicht 0 sind), so erzeugen die beiden Vektoren eine „Ebene“.

Wir fassen einige einfache Eigenschaften für Erzeugendensysteme und Unterräume zusammen.

Lemma 23.4. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Zu einer Familie v_i, $i \in I$, von Elementen in V ist der erzeugte Untervektorraum ein Untervektorraum*[47] *von V.*
(2) *Die Familie v_i, $i \in I$, ist genau dann ein Erzeugendensystem von V, wenn*

$$\langle v_i,\, i \in I \rangle = V$$

ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 23.3. □

23.2. **Lineare Unabhängigkeit.**

Definition 23.5. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt eine Familie von Vektoren v_i, $i \in I$, (mit einer beliebigen endlichen Indexmenge I) *linear unabhängig*, wenn eine Gleichung

$$\sum_{i \in I} s_i v_i = 0 \text{ mit } s_i \in K$$

nur bei $s_i = 0$ für alle i möglich ist.

Wenn eine Familie nicht linear unabhängig ist, so nennt man sie *linear abhängig*. Man nennt übrigens eine Linearkombination $\sum_{i \in I} s_i v_i = 0$ eine *Darstellung des Nullvektors*. Sie heißt die *triviale Darstellung*, wenn alle Koeffizienten s_i gleich 0 sind, andernfalls, wenn also mindestens ein Koeffizient nicht 0 ist, spricht man von einer *nichttrivialen Darstellung der Null*. Eine Familie von Vektoren ist genau dann linear unabhängig, wenn man mit ihnen nur auf die triviale Art den Nullvektor darstellen kann. Dies ist auch äquivalent dazu, dass man keinen Vektor aus der Familie als Linearkombination der anderen ausdrücken kann.

Beispiel 23.6. Die Standardvektoren im K^n sind linear unabhängig. Eine Darstellung

$$\sum_{i=1}^{n} s_i e_i = 0$$

---

[47] In der Bezeichnung „erzeugter Untervektorraum“ wurde diese Eigenschaft schon vorweg genommen.

bedeutet ja einfach

$$s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + s_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

woraus sich aus der i-ten Zeile direkt $s_i = 0$ ergibt.

Beispiel 23.7. Die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig. Es ist nämlich

$$4 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors.

Lemma 23.8. *Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Wenn die Familie linear unabhängig ist, so ist auch zu jeder Teilmenge $J \subseteq I$ die Familie v_i , $i \in J$, linear unabhängig.*
(2) *Die leere Familie ist linear unabhängig.*
(3) *Wenn die Familie den Nullvektor enthält, so ist sie nicht linear unabhängig.*
(4) *Wenn in der Familie ein Vektor mehrfach vorkommt, so ist sie nicht linear unabhängig.*
(5) *Ein einzelner Vektor v ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0$ ist.*
(6) *Zwei Vektoren v und u sind genau dann linear unabhängig, wenn weder u ein skalares Vielfaches von v ist noch umgekehrt.*

Beweis. Siehe Aufgabe 23.9. □

Bemerkung 23.9. Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in K^m$ sind genau dann linear abhängig, wenn das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{matrix}$$

eine nichttriviale (d.h. von 0 verschiedene) Lösung besitzt.

23.3. **Basen.**

Definition 23.10. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt ein linear unabhängiges Erzeugendensystem $v_i \in V$, $i \in I$, von V eine *Basis* von V.

Beispiel 23.11. Die Standardvektoren im K^n bilden eine Basis. Die lineare Unabhängigkeit wurde in Beispiel 23.6 gezeigt. Um zu zeigen, dass auch ein Erzeugendensystem vorliegt, sei

$$v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n$$

ein beliebiger Vektor. Dann ist aber direkt

$$v = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i .$$

Also liegt eine Basis vor, die man die *Standardbasis* des K^n nennt.

Satz 23.12. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei*

$$v_1, \ldots, v_n \in V$$

eine Familie von Vektoren. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *Die Familie ist eine Basis von V.*
(2) *Die Familie ist ein minimales Erzeugendensystem, d.h. sobald man einen Vektor v_i weglässt, liegt kein Erzeugendensystem mehr vor.*
(3) *Für jeden Vektor $u \in V$ gibt es genau eine Darstellung*
$$u = s_1 v_1 + \cdots + s_n v_n .$$
(4) *Die Familie ist maximal linear unabhängig, d.h. sobald man irgendeinen Vektor dazunimmt, ist die Familie nicht mehr linear unabhängig.*

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Bemerkung 23.13. Es sei eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ eines K-Vektorraums V gegeben. Aufgrund von Satz 23.12 (3) bedeutet dies, dass es für jeden Vektor $u \in V$ eine eindeutig bestimmte Darstellung (eine Linearkombination)

$$u = s_1 v_1 + s_2 v_2 + \cdots + s_n v_n$$

gibt. Die dabei eindeutig bestimmten Elemente $s_i \in K$ (Skalare) heißen die *Koordinaten* von u bezüglich der gegebenen Basis. Bei einer gegebenen Basis entsprechen sich also die Vektoren aus V und die Koordinatentupel $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in K^n$. Man sagt, dass eine Basis ein *lineares Koordinatensystem* festlegt.[48]

[48]Lineare Koordinaten vermitteln also eine bijektive Beziehung zwischen Punkten und Zahlentupeln. Aufgrund der Linearität ist eine solche Bijektion mit der Addition und der

Satz 23.14. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem. Dann besitzt V eine endliche Basis.*

Beweis. Es sei v_i, $i \in I$, ein Erzeugendensystem von V mit einer endlichen Indexmenge I. Wir wollen mit der Charakterisierung aus Satz 23.12 (2) argumentieren. Falls die Familie schon minimal ist, so liegt eine Basis vor. Andernfalls gibt es ein $k \in I$ derart, dass die um v_k reduzierte Familie, also v_i, $i \in I \setminus \{k\}$, ebenfalls ein Erzeugendensystem ist. In diesem Fall kann man mit der kleineren Indexmenge weiterargumentieren. Mit diesem Verfahren gelangt man letztlich zu einer Teilmenge $J \subseteq I$ derart, dass v_i, $i \in J$, ein minimales Erzeugendensystem, also eine Basis ist. □

23.4. **Dimensionstheorie.**

Ein endlich erzeugter Vektorraum hat im Allgemeinen ganz unterschiedliche Basen. Allerdings ist die Anzahl der Elemente in einer Basis stets konstant und hängt nur vom Vektorraum ab. Diese wichtige Eigenschaft werden wir jetzt formulieren und als Ausgangspunkt für die Definition der Dimension eines Vektorraums nehmen.

Satz 23.15. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem. Dann besitzen je zwei Basen von V die gleiche Anzahl von Basisvektoren.*

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Dieser Satz erlaubt die folgende Definition.

Definition 23.16. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem. Dann nennt man die Anzahl der Vektoren in einer Basis von V die *Dimension* von V, geschrieben

$$\dim (V) .$$

Man sagt auch, dass die Dimension aufgrund des vorstehenden Satzes *wohldefiniert* ist. Wenn ein Vektorraum nicht endlich erzeugt ist, so setzt man $\dim (V) = \infty$. Der Nullraum 0 hat die Dimension 0. Einen eindimensionalen Vektorraum nennt man auch eine *Gerade*, einen zweidimensionalen Vektorraum eine *Ebene*, einen dreidimensionalen Vektorraum einen *Raum* (im engeren Sinn), wobei man andererseits auch jeden Vektorraum einen Raum nennt.

Skalarmultiplikation verträglich. In vielen anderen Kontexten spielen auch nichtlineare (oder krummlinige) Koordinaten eine wichtige Rolle. Auch diese setzen Raumpunkte mit Zahlentupeln in eine bijektive Verbindung. Wichtige nichtlineare Koordinaten sind u.A. Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten. Mathematische Probleme können häufig durch eine geeignete Wahl von Koordinaten vereinfacht werden, beispielsweise bei Volumenberechnungen.

Korollar 23.17. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann besitzt der Standardraum K^n die Dimension n.*

Beweis. Die Standardbasis e_i, $i = 1, \ldots, n$, besteht aus n Vektoren, also ist die Dimension n. $\square$

Beispiel 23.18. Die komplexen Zahlen bilden einen zweidimensionalen reellen Vektorraum, eine Basis ist z.B. 1 und i.

Beispiel 23.19. Der Polynomring $R = K[X]$ über einem Körper K ist kein endlichdimensionaler Vektorraum. Es ist zu zeigen, dass es kein endliches Erzeugendensystem des Polynomringes gibt. Betrachten wir n Polynome $P_1, \ldots, P_n$. Es sei d das Maximum der Grade dieser Polynome. Dann hat auch jede K-Linearkombination $\sum_{i=1}^n a_i P_i$ maximal den Grad d. Insbesondere können Polynome von einem größeren Grad nicht durch $P_1, \ldots, P_n$ dargestellt werden, und diese endlich vielen Polynome sind kein Eruegendensystem für alle Polynome.

Korollar 23.20. *Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann ist U ebenfalls endlichdimensional und es gilt*

$$\dim(U) \leq \dim(V).$$

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. $\square$

Korollar 23.21. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit endlicher Dimension $n = \dim(V)$. Es seien n Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in V gegeben. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent.*

(1) *$v_1, \ldots, v_n$ bilden eine Basis von V.*
(2) *$v_1, \ldots, v_n$ bilden ein Erzeugendensystem von V.*
(3) *$v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.*

Beweis. Siehe Aufgabe 23.17. $\square$

Beispiel 23.22. Es sei K ein Körper. Man kann sich einfach einen Überblick über die Untervektorräume des K^n verschaffen, als Dimension von Untervektorräumen kommt nach Korollar 23.20 nur k mit $0 \leq k \leq n$ in Frage. Bei $n = 0$ gibt es nur den Nullraum selbst, bei $n = 1$ gibt es den Nullraum und K selbst. Bei $n = 2$ gibt es den Nullraum, die gesamte Ebene K^2, und die eindimensionalen Geraden durch den Nullpunkt. Jede solche Gerade G hat die Gestalt

$$G = Kv = \{sv \mid s \in K\}$$

mit einem von 0 verschiedenen Vektor v. Zwei von 0 verschiedene Vektoren definieren genau dann die gleiche Gerade, wenn sie linear abhängig sind. Bei $n = 3$ gibt es den Nullraum, den Gesamtraum K^3, die eindimensionalen Geraden durch den Nullpunkt und die zweidimensionalen Ebenen durch den Nullpunkt.

Der folgende Satz heißt *Basisergänzungssatz.*

Satz 23.23. *Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum der Dimension $n = \dim_K(V)$. Es seien*

$$u_1, \ldots, u_k$$

linear unabhängige Vektoren in V. Dann gibt es Vektoren

$$u_{k+1}, \ldots, u_n$$

derart, dass

$$u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$$

eine Basis von V bilden.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Rationale Zahlen

23. Arbeitsblatt

23.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 23.1. Drücke in $\mathbb{Q}^2$ den Vektor

$$(2, -7)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(5, -3) \text{ und } (-11, 4)$$

aus.

Aufgabe 23.2. Drücke in $\mathbb{C}^2$ den Vektor

$$(1, 0)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(3 + 5\mathrm{i}, -3 + 2\mathrm{i}) \text{ und } (1 - 6\mathrm{i}, 4 - \mathrm{i})$$

aus.

Aufgabe 23.3. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Beweise folgende Aussagen.

(1) Zu einer Familie v_i, $i \in I$, von Elementen in V ist der erzeugte Untervektorraum ein Untervektorraum.
(2) Die Familie v_i, $i \in I$, ist genau dann ein Erzeugendensystem von V, wenn

$$\langle v_i,\, i \in I \rangle = V$$

ist.

Aufgabe 23.4. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V und w_j, $j \in J$, eine weitere Familie von Vektoren in V. Dann gilt für die aufgespannten Untervektorräume die Beziehung $\langle v_i, i \in I \rangle \subseteq \langle w_j, j \in J \rangle$ genau dann, wenn $v_i \in \langle w_j, j \in J \rangle$ für alle $i \in I$ gilt.

Aufgabe 23.5. Wir betrachten im $\mathbb{Q}^3$ die Untervektorräume

$$U = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \rangle$$

und

$$W = \langle \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle.$$

Zeige $U = W$.

Aufgabe 23.6. Zeige, dass die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 23.7. Finde für die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{Q}^3$ eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors.

Aufgabe 23.8. Man gebe im $\mathbb{R}^3$ drei Vektoren an, so dass je zwei von ihnen linear unabhängig sind, aber alle drei zusammen linear abhängig.

Aufgabe 23.9. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Wenn die Familie linear unabhängig ist, so ist auch zu jeder Teilmenge $J \subseteq I$ die Familie v_i , $i \in J$, linear unabhängig.
(2) Die leere Familie ist linear unabhängig.
(3) Wenn die Familie den Nullvektor enthält, so ist sie nicht linear unabhängig.

(4) Wenn in der Familie ein Vektor mehrfach vorkommt, so ist sie nicht linear unabhängig.
(5) Ein Vektor v ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0$ ist.
(6) Zwei Vektoren v und u sind genau dann linear unabhängig, wenn weder u ein skalares Vielfaches von v ist noch umgekehrt.

Aufgabe 23.10. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und sei v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V. Es sei λ_i, $i \in I$, eine Familie von Elementen $\neq 0$ aus K. Zeige, dass die Familie v_i, $i \in I$, genau dann linear unabhängig (ein Erzeugendensystem von V, eine Basis von V) ist, wenn dies für die Familie $\lambda_i v_i$, $i \in I$, gilt.

Aufgabe 23.11. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum der linearen Gleichung

$$3x + 4y - 2z + 5w = 0.$$

Aufgabe 23.12. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$-2x + 3y - z + 4w = 0 \text{ und } 3z - 2w = 0\,.$$

Aufgabe 23.13. Zeige, dass im $\mathbb{R}^3$ die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 23.14. Bestimme, ob im $\mathbb{C}^2$ die beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 + 7\mathrm{i} \\ 3 - \mathrm{i} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 15 + 26\mathrm{i} \\ 13 - 7\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 23.15. Es sei K ein Körper. Man finde ein lineares Gleichungssystem in drei Variablen, dessen Lösungsraum genau

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \mid \lambda \in K \right\}$$

ist.

Aufgabe 23.16.*

Es sei K ein Körper und sei

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$$

ein von 0 verschiedener Vektor. Man finde ein lineares Gleichungssystem in n Variablen mit $n-1$ Gleichungen, dessen Lösungsraum genau

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid \lambda \in K \right\}$$

ist.

Aufgabe 23.17.*

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit endlicher Dimension $n = \dim(V)$. Es seien n Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in V gegeben. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) $v_1, \ldots, v_n$ bilden eine Basis von V.
(2) $v_1, \ldots, v_n$ bilden ein Erzeugendensystem von V.
(3) $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.

Aufgabe 23.18. Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $d \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge aller Polynome vom Grad $\leq d$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum von $K[X]$ ist. Was ist seine Dimension?

Aufgabe 23.19. Zeige, dass die Menge aller reellen Polynome vom Grad ≤ 4, für die -2 und 3 Nullstellen sind, ein endlichdimensionaler Untervektorraum in $\mathbb{R}[X]$ ist. Bestimme die Dimension von diesem Vektorraum.

Aufgabe 23.20.*

Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Welche Dimension besitzt der Produktraum $V \times W$?

Aufgabe 23.21. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über den komplexen Zahlen, und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Zeige, dass die Vektorenfamilie

$$v_1, \ldots, v_n \text{ und } \mathrm{i}v_1, \ldots, \mathrm{i}v_n$$

eine Basis von V, aufgefasst als reeller Vektorraum, ist.

Aufgabe 23.22.*

Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen und sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei $v_1, v_2, v_3, \ldots$ eine Aufzählung (ohne Wiederholung) der Elemente aus V. Nach wie vielen Elementen kann man sich sicher sein, dass diese ein Erzeugendensystem von V sind?

23.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 23.23. (3 Punkte)

Drücke in $\mathbb{Q}^3$ den Vektor

$$(2, 5, -3)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(1, 2, 3), (0, 1, 1) \text{ und } (-1, 2, 4)$$

aus. Zeige, dass man ihn nicht als Linearkombination von zweien der drei Vektoren ausdrücken kann.

Aufgabe 23.24. (4 Punkte)

Wir betrachten im $\mathbb{Q}^4$ die Untervektorräume

$$U = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

und

$$W = \langle \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \rangle .$$

Zeige $U = W$.

Aufgabe 23.25. (2 Punkte)

Bestimme, ob im $\mathbb{R}^3$ die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 23.26. (2 Punkte)

Bestimme, ob im $\mathbb{C}^2$ die beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2-7\mathrm{i} \\ -3+2\mathrm{i} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 5+6\mathrm{i} \\ 3-17\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 23.27. (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{Q}^n$ der n-dimensionale Standardraum über $\mathbb{Q}$ und sei $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{Q}^n$ eine Familie von n Vektoren. Zeige, dass diese Familie genau dann eine $\mathbb{Q}$-Basis des $\mathbb{Q}^n$ ist, wenn diese Familie aufgefasst im $\mathbb{R}^n$ eine $\mathbb{R}$-Basis des $\mathbb{R}^n$ bildet.

Aufgabe 23.28. (4 Punkte)

Zeige, dass die Menge aller reellen Polynome vom Grad ≤ 6, für die -1, 0 und 1 Nullstellen sind, ein endlichdimensionaler Untervektorraum in $\mathbb{R}[X]$ ist. Bestimme die Dimension von diesem Vektorraum.

Aufgabe 23.29. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_m$ eine Familie von m Vektoren in V und sei

$$U = \langle v_i,\, i = 1, \ldots, m \rangle$$

der davon aufgespannte Untervektorraum. Zeige, dass die Familie genau dann linear unabhängig ist, wenn die Dimension von U gleich m ist.

24. Vorlesung - Lineare Abbildungen

> Durch starkes Denken kann man ein Kamel zu Fall bringen.
>
> Ibn Sina

24.1. **Basiswechsel.**

Wir wissen bereits, dass in einem endlichdimensionalen Vektorraum je zwei Basen die gleiche Länge haben, also die gleiche Anzahl von Basisvektoren besitzen. Jeder Vektor besitzt bezüglich einer jeden Basis eindeutig bestimmte Koordinaten (oder Koeffizienten). Wie verhalten sich diese Koordinaten zu zwei Basen untereinander? Dies beantwortet die folgende Aussage.

Lemma 24.1. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension n. Es seien $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_n$ zwei Basen von V. Es sei*

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} w_i$$

mit den Koeffizienten $c_{ij} \in K$, die wir zur $n \times n$-Matrix

$$M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}} = (c_{ij})_{ij}$$

zusammenfassen. Dann hat ein Vektor u, der bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ besitzt, bezüglich der Basis $\mathfrak{w}$ die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus

$$u = \sum_{j=1}^{n} s_j v_j = \sum_{j=1}^{n} s_j \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij} w_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} s_j c_{ij} \right) w_i$$

und der Definition der Matrizenmultiplikation. □

Die Matrix $M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}$, die den Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{w}$ beschreibt, nennt man auch die *Transformationsmatrix* (oder *Übergangsmatrix*). In der j-ten Spalte der Transformationsmatrix stehen also die Koordinaten von v_j bezüglich der Basis $\mathfrak{w}$. Wenn man zu einer Basis $\mathfrak{v}$ und einem Vektor $u \in V$ das zugehörige Koordinatentupel mit $\Psi_{\mathfrak{v}}(u)$ bezeichnet, so kann man den Übergang kurz als

$$\Psi_{\mathfrak{w}}(u) = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\Psi_{\mathfrak{v}}(u))$$

schreiben.

Beispiel 24.2. Wir betrachten im $\mathbb{R}^2$ die Standardbasis

$$\mathfrak{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Basis

$$\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Basisvektoren von $\mathfrak{v}$ lassen sich direkt mit der Standardbasis ausdrücken, nämlich

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daher erhält man sofort

$$M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zum Beispiel hat der Vektor, der bezüglich $\mathfrak{v}$ die Koordinaten $(4, -3)$ besitzt, bezüglich der Standardbasis $\mathfrak{u}$ die Koordinaten

$$M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Übergangsmatrix $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$ ist schwieriger zu bestimmen: Dazu müssen wir die Standardvektoren als Linearkombinationen von v_1 und v_2 ausdrücken. Eine direkte Rechnung (dahinter steckt das simultane Lösen von zwei linearen Gleichungssystemen) ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

24.2. **Lineare Abbildungen.**

Definition 24.3. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Eine Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

heißt *lineare Abbildung*, wenn die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

(1) $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ für alle $u, v \in V$.
(2) $\varphi(sv) = s\varphi(v)$ für alle $s \in K$ und $v \in V$.

Die erste Eigenschaft nennt man dabei die *Additivität* und die zweite Eigenschaft die *Verträglichkeit mit Skalierung*. Wenn man den Grundkörper betonen möchte spricht man von K-Linearität. Die Identität $\mathrm{Id}_V\colon V \to V$, die Nullabbildung $V \to 0$ und die Inklusionen $U \subseteq V$ von Untervektorräumen sind die einfachsten Beispiele für lineare Abbildungen.

Beispiel 24.4. Es sei K ein Körper und sei K^n der n-dimensionale Standardraum. Dann ist die i-te *Projektion*, also die Abbildung

$$K^n \longrightarrow K,\ (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \longmapsto x_i,$$

eine K-lineare Abbildung. Dies folgt unmittelbar aus der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation auf dem Standardraum. Die i-te Projektion heißt auch die i-te *Koordinatenfunktion*.

Lemma 24.5. *Es sei K ein Körper und seien U, V, W Vektorräume über K. Es seien*

$$\varphi : U \longrightarrow V \text{ und } \psi : V \longrightarrow W$$

lineare Abbildungen. Dann ist auch die Verknüpfung

$$\psi \circ \varphi \colon U \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung.

Beweis. Siehe Aufgabe 24.16. □

Lemma 24.6. *Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

eine bijektive lineare Abbildung. Dann ist auch die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} \colon W \longrightarrow V$$

linear.

Beweis. Siehe Aufgabe 24.17. □

24.3. **Festlegung auf einer Basis.**

Hinter der folgenden Aussage (dem *Festlegungssatz*) steckt das wichtige Prinzip, dass in der linearen Algebra (von endlichdimensionalen Vektorräumen) die Objekte durch endlich viele Daten bestimmt sind.

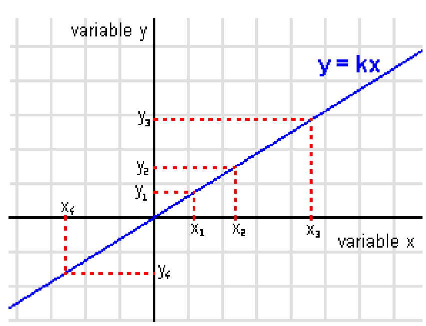
Satz 24.7. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Es sei v_i, $i \in I$, eine endliche Basis von V und es seien w_i, $i \in I$, Elemente in W. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung*

$$f \colon V \longrightarrow W$$

mit

$$f(v_i) = w_i \text{ für alle } i \in I\,.$$

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □



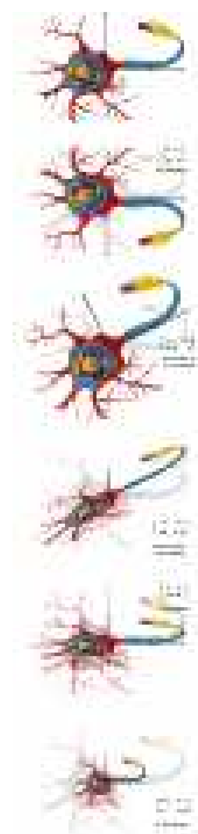
Der Funktionsgraph einer linearen Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die Abbildung ist allein durch den Proportionalitätsfaktor k festgelegt.

Beispiel 24.8. Die einfachsten linearen Abbildungen sind (neben der Nullabbildung) diejenigen von K nach K. Eine solche lineare Abbildung

$$\varphi\colon\ K \longrightarrow K,\, x \longmapsto \varphi(x),$$

ist aufgrund von Satz 24.7 bzw. direkt aufgrund der Definition durch $\varphi(1)$ bzw. durch den Wert $\varphi(t)$ für ein einziges $t \in K$, $t \neq 0$, festgelegt. Es ist also $\varphi(x) = ax$ mit einem eindeutig bestimmten $a \in K$. Insbesondere im physikalischen Kontext, wenn $K = \mathbb{R}$ ist und wenn zwischen zwei messbaren Größen ein linearer Zusammenhang besteht, spricht man von *Proportionalität*, und a heißt der *Proportionalitätsfaktor*. In der Schule tritt die lineare Beziehung zwischen zwei skalaren Größen als „Dreisatz“ auf.

24.4. **Lineare Abbildungen und Matrizen.**



Die Wirkungsweise von verschiedenen linearen Abbildungen des $\mathbb{R}^2$ in sich, dargestellt an einer Gehirnzelle.

Eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon\ K^n \longrightarrow K^m$$

ist nach Satz 24.7 durch die Bilder $\varphi(e_j)$, $j = 1, \ldots, n$, der Standardvektoren eindeutig festgelegt, und jedes $\varphi(e_j)$ ist eine Linearkombination

$$\varphi(e_j) \;=\; \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i$$

und damit durch die Elemente a_{ij} eindeutig festgelegt. Insgesamt ist also eine solche lineare Abbildung durch mn Elemente a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, aus dem Körper festgelegt. Einen solchen Datensatz kann man wieder als eine Matrix schreiben. Nach dem Festlegungssatz gilt dies, sobald sowohl im Definitionsraum als auch im Zielraum der linearen Abbildung eine Basis fixiert ist.

Definition 24.9. Es sei K ein Körper und sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und sei W ein m-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$.

Zu einer linearen Abbildung

$$\varphi\colon\, V \longrightarrow W$$

heißt die $m \times n$-Matrix

$$M \;=\; M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) \;=\; (a_{ij})_{ij},$$

wobei a_{ij} die i-te Koordinate von $\varphi(v_j)$ bezüglich der Basis $\mathfrak{w}$ ist, die *beschreibende Matrix zu* φ bezüglich der Basen.

Zu einer Matrix $M \;=\; (a_{ij})_{ij} \;\in\; \operatorname{Mat}_{m\times n}(K)$ heißt die durch

$$v_j \longmapsto \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

gemäß Satz 24.7 definierte lineare Abbildung $\varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M)$ die *durch* M *festgelegte lineare Abbildung.*

Bei einer linearen Abbildung $\varphi\colon\, K^n \to K^m$ wird, wenn nichts anderes gesagt wird, auf die Standardbasen Bezug genommen. Bei einer linearen Abbildung $\varphi\colon\, V \to V$ eines Vektorraumes in sich selbst, was man einen *Endomorphismus* nennt, nimmt man häufig vorne und hintem die gleiche Basis. Die Identität auf einem Vektorraum der Dimension n wird bezüglich einer beliebigen Basis durch die Einheitsmatrix beschrieben.

Satz 24.10. *Es sei* K *ein Körper und sei* V *ein* n*-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis* $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ *und sei* W *ein* m*-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis* $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$*. Dann sind die in Definition 24.9 festgelegten Abbildungen*

$$\varphi \longmapsto M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) \text{ und } M \longmapsto \varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M)$$

invers zueinander.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. $\square$

Beispiel 24.11. Eine lineare Abbildung

$$\varphi \colon K^n \longrightarrow K^m$$

wird zumeist durch die Matrix M bezüglich der Standardbasen links und rechts beschrieben. Das Ergebnis der Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ist dann direkt als Punkt in K^m interpretierbar. Die j-te Spalte von M ist das Bild des j-ten Standardvektors e_j.

24.5. **Drehungen.**

Eine Drehung der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ um den Nullpunkt um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn bildet $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$ ab. Daher werden ebene Drehungen folgendermaßen beschrieben.

Definition 24.12. Eine lineare Abbildung

$$D(\alpha) \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die durch eine *Drehmatrix* $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ (mit einem $\alpha \in \mathbb{R}$) bezüglich der Standardbasis gegeben ist, heißt *Drehung*.

Eine *Raumdrehung* ist eine lineare Abbildung des $\mathbb{R}^3$ in sich, bei der um eine Drehachse (durch den Nullpunkt) um einen bestimmten Winkel gedreht wird. Wenn der Vektor $v_1 \neq 0$ die Drehachse definiert und u_2 und u_3 auf v_1 und aufeinander senkrecht stehen, so wird die Drehung bezüglich der Basis v_1, u_2, u_3 durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

beschrieben.

24.6. **Der Kern einer linearen Abbildungen.**

Definition 24.13. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Dann nennt man

$$\operatorname{kern} \varphi := \varphi^{-1}(0) = \{ v \in V \mid \varphi(v) = 0 \}$$

den *Kern* von φ.

Der Kern ist ein Untervektorraum von V.

Wichtig ist das folgende *Injektivitätskriterium*.

Lemma 24.14. *Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Dann ist φ genau dann injektiv, wenn $\operatorname{kern}\varphi = 0$ *ist.*

Beweis. Wenn die Abbildung injektiv ist, so kann es neben $0 \in V$ keinen weiteren Vektor $v \in V$ mit $\varphi(v) = 0$ geben. Also ist $\varphi^{-1}(0) = \{0\}$. Sei umgekehrt $\operatorname{kern}\varphi = 0$ und seien $v_1, v_2 \in V$ gegeben mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Dann ist wegen der Linearität

$$\varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = 0.$$

Daher ist $v_1 - v_2 \in \operatorname{kern}\varphi$ und damit $v_1 = v_2$. □

24. Arbeitsblatt

24.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 24.1.*

Bestimme die Übergangsmatrizen $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$ und $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ für die Standardbasis $\mathfrak{u}$ und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegebene Basis $\mathfrak{v}$ im $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 24.2. Bestimme die Übergangsmatrizen $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$ und $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ für die Standardbasis $\mathfrak{u}$ und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

gegebene Basis $\mathfrak{v}$ im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 24.3.*

Es sei $\mathfrak{v} = v_1, v_2, v_3$ eine Basis eines dreidimensionalen K-Vektorraumes V.

a) Zeige, dass $\mathfrak{w} = v_1, v_1 + v_2, v_2 + v_3$ ebenfalls eine Basis von V ist.

b) Bestimme die Übergangsmatrix $M^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{v}}$.

c) Bestimme die Übergangsmatrix $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}$.

d) Berechne die Koordinaten bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ für denjenigen Vektor, der bezüglich der Basis $\mathfrak{w}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$ besitzt.

e) Berechne die Koordinaten bezüglich der Basis $\mathfrak{w}$ für denjenigen Vektor, der bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$ besitzt.

Aufgabe 24.4. Bestimme die Übergangsmatrizen $M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{v}}$ und $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}}$ für die Standardbasis $\mathfrak{u}$ und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 + 5\mathrm{i} \\ 1 - \mathrm{i} \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 2 + 3\mathrm{i} \\ 4 + \mathrm{i} \end{pmatrix},$$

gegebene Basis $\mathfrak{v}$ im $\mathbb{C}^2$.

Aufgabe 24.5. Wir betrachten die Vektorenfamilien

$$\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^2$.

a) Zeige, dass sowohl $\mathfrak{v}$ als auch $\mathfrak{u}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Es sei $P \in \mathbb{R}^2$ derjenige Punkt, der bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ die Koordinaten $(-2, 5)$ besitze. Welche Koordinaten besitzt der Punkt bezüglich der Basis $\mathfrak{u}$?

c) Bestimme die Übergangsmatrix, die den Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$ beschreibt.

Aufgabe 24.6. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi \colon K^3 \longrightarrow K^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Es sei $U \subseteq K^3$ der durch die lineare Gleichung $2x + 3y + 4z = 0$ definierte Untervektorraum von K^3, und ψ sei die Einschränkung von φ auf U. Zu U gehören Vektoren der Form

$$u = (0, 1, a),\ v = (1, 0, b) \text{ und } w = (1, c, 0)\,.$$

Berechne a, b, c und die Übergangsmatrizen zwischen den Basen

$$\mathfrak{b}_1 = v, w,\ \mathfrak{b}_2 = u, w \text{ und } \mathfrak{b}_3 = u, v$$

von U sowie die beschreibenden Matrizen für ψ bezüglich dieser drei Basen (und der Standardbasis auf K^2).

Aufgabe 24.7. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Zeige, dass für beliebige Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ und Koeffizienten $s_1, \ldots, s_n \in K$ die Beziehung

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} s_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} s_i \varphi(v_i)$$

gilt.

Aufgabe 24.8. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass zu $a \in K$ die Abbildung

$$V \longrightarrow V,\ v \longmapsto av,$$

linear ist.[49]

Aufgabe 24.9. Interpretiere die folgenden physikalischen Gesetze als lineare Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Was sind die messbaren Größen, was ist der Proportionalitätsfaktor und wodurch ist dieser festgelegt?

(1) Die zurückgelegte Strecke ist Geschwindigkeit mal Zeit.
(2) Masse ist Volumen mal Dichte.
(3) Energie ist Masse mal Brennwert.
(4) Kraft ist Masse mal Beschleunigung.
(5) Energie ist Kraft mal Weg.
(6) Energie ist Leistung mal Zeit.
(7) Spannung ist Widerstand mal Stromstärke.
(8) Ladung ist Stromstärke mal Zeit.

[49]Eine solche Abbildung heißt *Homothetie* oder *Streckung* mit dem Streckungsfaktor a.

Aufgabe 24.10. Um die Erde wird entlang des Äquators ein Band gelegt. Das Band ist jedoch einen Meter zu lang, so dass es ringsherum gleichmäßig angehoben wird, um straff zu werden. Welche der folgenden Lebewesen können drunter durch laufen/schwimmen/fliegen/tanzen?

(1) Eine Amöbe.
(2) Eine Ameise.
(3) Eine Meise.
(4) Eine Flunder.
(5) Eine Boa constrictor.
(6) Ein Meerschweinchen.
(7) Eine Boa constrictor, die ein Meerschweinchen verschluckt hat.
(8) Ein sehr guter Limbotänzer.

Aufgabe 24.11. Eine lineare Funktion

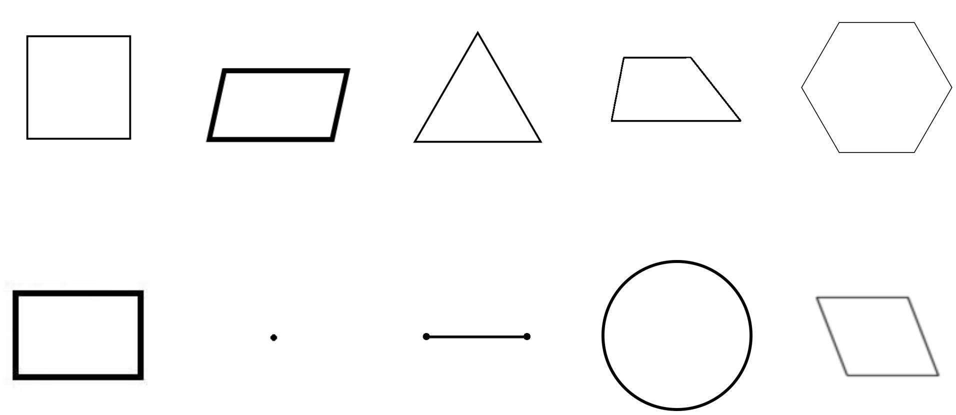
$$\varphi\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

hat an der Stelle $\frac{11}{13}$ den Wert $\frac{7}{17}$. Welchen Wert hat sie an der Stelle $\frac{3}{19}$?

Aufgabe 24.12. Welche der folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind linear?

(1) Die reelle Exponentialfunktion.
(2) Die Nullfunktion.
(3) Die konstante Funktion mit dem Wert 7.
(4) Die Quadratfunktion $x \mapsto x^2$.
(5) Die Funktion, die jede reelle Zahl halbiert.
(6) Die Funktion, die von jeder reellen Zahl 1 abzieht.

Aufgabe 24.13. Welche der folgenden Figuren können als Bild eines Quadrates unter einer linearen Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ auftreten?



Aufgabe 24.14. Es sei eine lineare Abbildung $\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \text{ und } \varphi \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 4$$

gegeben. Berechne

$$\varphi \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 24.15. Lucy Sonnenschein arbeitet als Fahrradkurier und bekommt einen Stundenlohn von 12 €. Am Obststand kosten Himbeeren 3 €, Erdbeeren kosten 2 € und Äpfel $0,4$ € (jeweils pro Hundert Gramm). Beschreibe die Abbildung, die einem Einkauf die Zeit zuordnet, die Lucy für den Einkauf arbeiten muss, als eine Hintereinanderschaltung von linearen Abbildungen.

Aufgabe 24.16.*

Es sei K ein Körper und seien U, V, W Vektorräume über K. Es seien

$$\varphi\colon U \to V \text{ und } \psi\colon V \to W$$

lineare Abbildungen. Zeige, dass dann auch die Verknüpfung

$$\psi \circ \varphi\colon\ U \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung ist.

Aufgabe 24.17. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi\colon\ V \longrightarrow W$$

eine bijektive lineare Abbildung. Zeige, dass dann auch die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1}\colon\ W \longrightarrow V$$

linear ist.

Aufgabe 24.18. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Familie von Vektoren in V. Zeige, dass für die Abbildung

$$\varphi\colon\ K^n \longrightarrow V,\ (s_1, \ldots, s_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} s_i v_i,$$

die folgenden Beziehungen gelten.

(1) φ ist injektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind.
(2) φ ist surjektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V ist.
(3) φ ist bijektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis ist.

Aufgabe 24.19. Zeige, dass die Abbildungen

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto \mathrm{Re}\,(z),$$

und

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto \mathrm{Im}\,(z),$$

$\mathbb{R}$-lineare Abbildungen sind. Zeige ferner, dass die komplexe Konjugation $\mathbb{R}$-linear, aber nicht $\mathbb{C}$-linear ist. Ist der Betrag

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto |z|\,,$$

$\mathbb{R}$-linear?

Aufgabe 24.20. Betrachte die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ auf q schickt und die alle irrationalen Zahlen auf 0 schickt. Ist dies eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung? Ist sie mit Skalierung verträglich?

Aufgabe 24.21. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Zeige, dass die folgenden Aussagen gelten.

(1) Für einen Untervektorraum $S \subseteq V$ ist auch das Bild $\varphi(S)$ ein Untervektorraum von W.
(2) Insbesondere ist das Bild $\operatorname{bild}\varphi = \varphi(V)$ der Abbildung ein Untervektorraum von W.
(3) Für einen Unterraum $T \subseteq W$ ist das Urbild $\varphi^{-1}(T)$ ein Untervektorraum von V.
(4) Insbesondere ist $\varphi^{-1}(0)$ ein Untervektorraum von V.

Aufgabe 24.22. Finde mittels elementargeometrischer Überlegungen eine Matrix, die eine Drehung um 45 Grad gegen den Uhrzeigersinn in der Ebene beschreibt.

Aufgabe 24.23.*

Beweise die Additionstheoreme für den Sinus und den Kosinus unter Verwendung von Drehmatrizen.

Aufgabe 24.24.*

Bestimme den Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 24.25.*

Bestimme den Kern der durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 24.26. Wie sieht der Graph einer linearen Abbildung

$$f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$g\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$
$$h\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

aus? Wie sieht man in einer Skizze des Graphen den Kern der Abbildung?

Aufgabe 24.27. Es sei M eine $m \times n$-Matrix über dem Körper K, $\varphi\colon\ K^n \to K^m$ die zugehörige lineare Abbildung und $Mx = c$ das (vom Störvektor $c \in K^m$ abhängige) zugehörige lineare Gleichungssystem. Zeige, dass die Lösungsmenge des Systems gleich dem Urbild von c unter der linearen Abbildung φ ist.

Aufgabe 24.28. Es seien V und W Vektorräume über einem Körper K und seien $\varphi, \psi\colon\ V \to W$ lineare Abbildungen. Zeige, dass auch die durch

$$(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$$

definierte Abbildung linear ist.

Aufgabe 24.29. Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die nicht injektiv ist, deren Einschränkung

$$\mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

aber injektiv ist.

Aufgabe 24.30. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi\colon \mathbb{R}^4_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}^4_{\geq 0},$$

die einem Vierertupel (a, b, c, d) das Vierertupel

$$(|b-a|\,, |c-b|\,, |d-c|\,, |a-d|)$$

zuordnet. Beschreibe diese Abbildung unter der Bedingung, dass

$$a \,\leq\, b \,\leq\, c \,\leq\, d$$

gilt, mit einer Matrix.

24.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 24.31. (3 Punkte)

Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$\varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechne

$$\varphi \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 24.32. (6 (3+1+2) Punkte)

Wir betrachten die Vektorenfamilien

$$\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$.

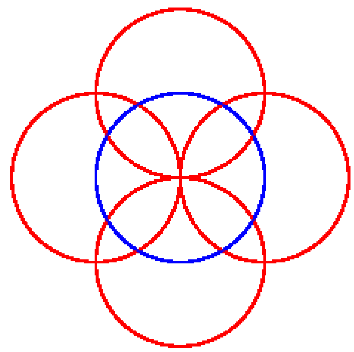
a) Zeige, dass sowohl $\mathfrak{v}$ als auch $\mathfrak{u}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Es sei $P \in \mathbb{R}^3$ derjenige Punkt, der bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ die Koordinaten $(2, 5, 4)$ besitze. Welche Koordinaten besitzt der Punkt bezüglich der Basis $\mathfrak{u}$?

c) Bestimme die Übergangsmatrix, die den Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$ beschreibt.

Aufgabe 24.33. (3 Punkte)

Skizziere das Bild der dargestellten Kreise unter der durch die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ gegebenen linearen Abbildung vom $\mathbb{R}^2$ in sich.



Aufgabe 24.34. (3 Punkte)

Finde mittels elementargeometrischer Überlegungen eine Matrix, die (bezüglich der Standardbasis) eine Drehung um 30 Grad gegen den Uhrzeigersinn in der Ebene beschreibt.

Aufgabe 24.35. (3 Punkte)

Bestimme das Bild und den Kern der linearen Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 24.36. (3 Punkte)

Es sei $E \subset \mathbb{R}^3$ die durch die lineare Gleichung $5x + 7y - 4z = 0$ gegebene Ebene. Bestimme eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

derart, dass das Bild von φ gleich E ist.

Aufgabe 24.37. (3 Punkte)

Auf dem reellen Vektorraum $G = \mathbb{R}^4$ der Glühweine betrachten wir die beiden linearen Abbildungen

$$\pi \colon G \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} z \\ n \\ r \\ s \end{pmatrix} \longmapsto 8z + 9n + 5r + s,$$

und

$$\kappa \colon G \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} z \\ n \\ r \\ s \end{pmatrix} \longmapsto 2z + n + 4r + 8s.$$

Wir stellen uns π als Preisfunktion und κ als Kalorienfunktion vor. Man bestimme Basen für $\operatorname{kern} \pi$, für $\operatorname{kern} \kappa$ und für $\operatorname{kern}(\pi \times \kappa)$.[50]

25. Vorlesung - Invertierbare Matrizen

25.1. **Die Dimensionsformel.**

Die folgende Aussage heißt *Dimensionsformel*.

Satz 25.1. *Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und*

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung und V sei endlichdimensional. Dann gilt

$$\dim(V) \,=\, \dim(\operatorname{kern} \varphi) + \dim(\operatorname{bild} \varphi).$$

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. $\square$

Definition 25.2. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung und V sei endlichdimensional. Dann nennt man

$$\operatorname{rang} \varphi \,:=\, \dim(\operatorname{bild} \varphi)$$

den *Rang* von φ.

Die Dimensionsformel kann man auch als

$$\dim(V) \,=\, \dim(\operatorname{kern} \varphi) + \operatorname{rang} \varphi$$

ausdrücken.

[50] Man störe sich nicht daran, dass hier negative Zahlen vorkommen können. In einem trinkbaren Glühwein kommen natürlich die Zutaten nicht mit einem negativen Koeffizienten vor. Wenn man sich aber beispielsweise überlegen möchte, auf wie viele Arten man eine bestimmte Rezeptur ändern kann, ohne dass sich der Gesamtpreis oder die Energiemenge ändert, so ergeben auch negative Einträge einen Sinn.

Beispiel 25.3. Wir betrachten die durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ 2y+2z \\ x+3y+4z \\ 2x+4y+6z \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung des Kerns müssen wir das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y+z \\ 2y+2z \\ x+3y+4z \\ 2x+4y+6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen. Der Lösungsraum ist

$$L = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

und dies ist der Kern von φ. Der Kern ist also eindimensional und daher ist die Dimension des Bildes nach der Dimensionsformel gleich 2.

Korollar 25.4. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der gleichen Dimension n. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann ist φ genau dann injektiv, wenn φ surjektiv ist.

Beweis. Dies folgt aus Satz 25.1 und Lemma 24.14. □

25.2. **Verknüpfung von linearen Abbildungen und Matrizen.**

Lemma 25.5. *Bei der Korrespondenz zwischen linearen Abbildungen und Matrizen entsprechen sich die Hintereinanderschaltung von linearen Abbildungen und die Matrizenmultiplikation. Damit ist folgendes gemeint: es seien U, V, W Vektorräume über einem Körper K mit Basen*

$$\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_p,\ \mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n \text{ und } \mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m .$$

Es seien

$$\psi : U \longrightarrow V \text{ und } \varphi : V \longrightarrow W$$

lineare Abbildungen. Dann gilt für die beschreibenden Matrizen von ψ, φ und der Hintereinanderschaltung $\varphi \circ \psi$ die Beziehung

$$M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{w}}(\varphi \circ \psi) \,=\, (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)) \circ (M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{v}}(\psi)).$$

Beweis. Wir betrachten die Abbildungskette

$$U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W\,.$$

Bezüglich der Basen werde ψ durch die $n \times p$-Matrix $B \,=\, (b_{jk})_{jk}$ und φ durch die $m \times n$-Matrix $A \,=\, (a_{ij})_{ij}$ beschrieben. Die Hintereinanderschaltung $\varphi \circ \psi$ wirkt auf einen Basisvektor u_k folgendermaßen.

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \psi)(u_k) &= \varphi(\psi(u_k)) \\
&= \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} b_{jk} v_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \varphi(v_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right) w_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_{ik} w_i .
\end{aligned}$$

Dabei sind diese Koeffizienten $c_{ik} \,=\, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ gerade die Einträge in der Produktmatrix $A \circ B$. $\square$

Daraus folgt beispielsweise, dass das Produkt von Matrizen assoziativ ist.

25.3. **Invertierbare Matrizen.**

Definition 25.6. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann heißt M *invertierbar*, wenn es eine weitere Matrix $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ mit

$$A \circ M \,=\, E_n \,=\, M \circ A$$

gibt.

Definition 25.7. Es sei K ein Körper. Zu einer invertierbaren Matrix $M \in \operatorname{Mat}_n(K)$ heißt die Matrix $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ mit

$$A \circ M \,=\, E_n \,=\, M \circ A$$

die *inverse Matrix* von M. Man schreibt dafür

$$M^{-1}\,.$$

25.4. **Lineare Abbildungen und Basiswechsel.**

Lemma 25.8. *Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Es seien $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{u}$ Basen von V und $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{z}$ Basen von W. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich der Basen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ durch die Matrix $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)$ beschrieben werde. Dann wird φ bezüglich der Basen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{z}$ durch die Matrix

$$M^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{z}} \circ (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)) \circ (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}})^{-1}$$

beschrieben, wobei $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}}$ und $M^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{z}}$ die Übergangsmatrizen sind, die die Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$ und von $\mathfrak{w}$ nach $\mathfrak{z}$ beschreiben.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Korollar 25.9. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es seien $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ Basen von V. Dann besteht zwischen den Matrizen, die die lineare Abbildung bezüglich $\mathfrak{u}$ bzw. $\mathfrak{v}$ (beidseitig) beschreiben, die Beziehung

$$M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{u}}(\varphi) \,=\, M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}} \circ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{v}}(\varphi) \circ (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}})^{-1}.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 25.8. □

Definition 25.10. Zwei quadratische Matrizen $M, N \in \operatorname{Mat}_n(K)$ heißen *ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix B mit $M = BNB^{-1}$ gibt.

Nach Korollar 25.9 sind zu einer linearen Abbildung $\varphi\colon V \to V$ die beschreibenden Matrizen bezüglich zweier Basen ähnlich zueinander.

25.5. **Eigenschaften von linearen Abbildungen.**

Lemma 25.11. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(K)$ beschrieben werde. Dann gelten folgende Eigenschaften.

1. *φ ist genau dann injektiv, wenn die Spalten der Matrix linear unabhängig sind.*
2. *φ ist genau dann surjektiv, wenn die Spalten der Matrix ein Erzeugendensystem von K^m bilden.*
3. *Bei $m = n$ ist φ genau dann bijektiv, wenn die Spalten der Matrix eine Basis von K^m bilden, und dies ist genau dann der Fall, wenn M invertierbar ist.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$ Basen von V bzw. W und es seien $s_1, \ldots, s_n$ die Spaltenvektoren von M. (1). Die Abbildung φ hat die Eigenschaft

$$\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} s_{ij} w_i,$$

wobei s_{ij} der i-te Eintrag des j-ten Spaltenvektors ist. Daher ist

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} a_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{i=1}^{m} s_{ij} w_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j s_{ij}\right) w_i.$$

Dies ist genau dann 0, wenn $\sum_{j=1}^{n} a_j s_{ij} = 0$ für alle i ist, und dies ist äquivalent zu

$$\sum_{j=1}^{n} a_j s_j = 0.$$

Dafür gibt es ein nichttriviales (Lösungs-)Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ genau dann, wenn die Spalten linear abhängig sind und genau dann, wenn φ nicht injektiv ist. (2). Siehe Aufgabe 25.3. (3). Sei $n = m$. Die erste Äquivalenz folgt aus (1) und (2). Wenn φ bijektiv ist, so gibt es die (lineare) Umkehrabbildung φ^{-1} mit

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Id}_W \text{ und } \varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}_V .$$

Es sei M die Matrix zu φ und N die Matrix zu φ^{-1}. Die Matrix zur Identität ist die Einheitsmatrix. Nach Lemma 25.5 ist daher

$$M \circ N = E_n = N \circ M$$

und somit ist M invertierbar. Die Umkehrung wird ähnlich bewiesen. □

25.6. **Auffinden der inversen Matrix.**

Verfahren 25.12. Es sei M eine quadratische Matrix. Wie kann man entscheiden, ob die Matrix invertierbar ist, und wie kann man die inverse Matrix M^{-1} finden?

Dazu legt man eine Tabelle an, wo in der linken Seite zunächst die Matrix M steht und in der rechten Seite die Einheitsmatrix. Jetzt wendet man auf beide Matrizen schrittweise die gleichen elementaren Zeilenumformungen an. Dabei soll in der linken Seite die Ausgangsmatrix in die Einheitsmatrix umgewandelt werden. Dies ist genau dann möglich, wenn diese Matrix invertierbar ist. Wir behaupten, dass bei dieser Vorgehensweise in der rechten Seite die Matrix M^{-1} als Endmatrix entsteht. Dies beruht auf folgendem *Invarianzprinzip*. Jede elementare Zeilenumformung kann als eine Matrizenmultiplikation mit einer Elementarmatrix E von links realisiert werden. Wenn in der Tabelle

$$(M_1, M_2)$$

steht, so steht im nächsten Schritt

$$(EM_1, EM_2) .$$

Wenn man das Inverse (das man noch nicht kennt, das es aber gibt unter der Voraussetzung, dass die Matrix invertierbar ist.) der linken Seite mit der rechten Seite multipliziert, so ergibt sich

$$(EM_1)^{-1}EM_2 \,=\, M_1^{-1}E^{-1}EM_2 \,=\, M_1^{-1}M_2.$$

D.h., dass sich dieser Ausdruck bei den Einzelschritten nicht ändert. Zu Beginn ist dieser Ausdruck gleich $M^{-1}E_n$, daher muss zum Schluss für (E_n, N) gelten

$$N \,=\, E_n^{-1}N \,=\, M^{-1}E_n \,=\, M^{-1}.$$

Beispiel 25.13. Wir wollen zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ gemäß dem in Verfahren 25.12 beschriebenen Verfahren die inverse Matrix M^{-1} bestimmen.

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 11 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$

25. Arbeitsblatt

25.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 25.1. Die Telefonanbieter A, B und C kämpfen um einen Markt, wobei die Marktaufteilung im Jahr j durch das Kundentupel $K_j = (a_j, b_j, c_j)$ ausgedrückt wird (dabei steht a_j für die Anzahl der Kunden von A im Jahr

j u.s.w.). Es sind regelmäßig folgende Kundenbewegungen innerhalb eines Jahres zu beobachten.

(1) Die Kunden von A bleiben zu 80% bei A und wechseln zu je 10% zu B bzw. zu C.
(2) Die Kunden von B bleiben zu 70% bei B und wechseln zu 10% zu A und zu 20% zu C.
(3) Die Kunden von C bleiben zu 50% bei C und wechseln zu 20% zu A und zu 30% zu B.

a) Bestimme die lineare Abbildung (bzw. die Matrix), die das Kundentupel K_{j+1} aus K_j berechnet.

b) Welches Kundentupel entsteht aus dem Kundentupel $(12000, 10000, 8000)$ innerhalb eines Jahres?

c) Welches Kundentupel entsteht aus dem Kundentupel $(10000, 0, 0)$ in vier Jahren?

Aufgabe 25.2.*

Die Zeitungen A, B und C verkaufen Zeitungsabos und konkurrieren dabei um einen lokalen Markt mit 100000 potentiellen Lesern. Dabei sind innerhalb eines Jahres folgende Kundenbewegungen zu beobachten.

(1) Die Abonnenten von A bleiben zu 80% bei A, 10% wechseln zu B, 5% wechseln zu C und 5% werden Nichtleser.
(2) Die Abonnenten von B bleiben zu 60% bei B, 10% wechseln zu A, 20% wechseln zu C und 10% werden Nichtleser.
(3) Die Abonnenten von C bleiben zu 70% bei C, niemand wechselt zu A, 10% wechseln zu B und 20% werden Nichtleser.
(4) Von den Nichtlesern entscheiden sich je 10% für ein Abonnement von A, B oder C, die übrigen bleiben Nichtleser.

a) Erstelle die Matrix, die die Kundenbewegungen innerhalb eines Jahres beschreibt.

b) In einem bestimmten Jahr haben alle drei Zeitungen je 20000 Abonnenten und es gibt 40000 Nichtleser. Wie sieht die Verteilung ein Jahr später aus?

c) Die drei Zeitungen expandieren in eine zweite Stadt, wo es bislang überhaupt keine Zeitungen gibt, aber ebenfalls 100000 potentielle Leser. Wie viele Leser haben dort die einzelnen Zeitungen (und wie viele Nichtleser gibt es noch) nach drei Jahren, wenn dort die gleichen Kundenbewegungen zu beobachten sind?

Aufgabe 25.3.*

Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(K)$ beschrieben werde. Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn die Spalten der Matrix ein Erzeugendensystem von K^m bilden.

Aufgabe 25.4. Es sei M eine $m \times n$-Matrix und $\varphi\colon K^n \to K^m$ die zugehörige lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn es eine $n \times m$-Matrix A mit $M \circ A = E_m$ gibt.

Aufgabe 25.5.*

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 11 & -20 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}.$$

a) Zeige

$$M^2 = E_2.$$

b) Bestimme die inverse Matrix zu M.

c) Löse die Gleichung

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 25.6.*

Bestimme die inverse Matrix von

$$\begin{pmatrix} -\frac{9}{4} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{50}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\frac{5}{3} & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 10^7 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{2}{11} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 25.7. Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 25.8. Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 25.9. Bestimme die inverse Matrix zur komplexen Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2+3\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ 5-4\mathrm{i} & 6-2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 25.10.*

a) Bestimme, ob die komplexe Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2+5\mathrm{i} & 1-2\mathrm{i} \\ 3-4\mathrm{i} & 6-2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

b) Finde eine Lösung für das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$M \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54+72\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 25.11. Bestimme die inverse Matrix von

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 25.12. Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & k+2 & k+1 \\ 0 & 0 & k+1 & k \\ -k & k+1 & 0 & 0 \\ k+1 & -(k+2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für jedes $k \in K$ zu sich selbst invers ist.

Es sei K ein Körper. Mit B_{ij} bezeichnen wir diejenige $n \times n$-Matrix, die an der Stelle (i, j) den Wert 1 und sonst überall den Wert 0 hat. Dann nennt man die folgenden Matrizen *Elementarmatrizen*.

(1) $V_{ij} := E_n - B_{ii} - B_{jj} + B_{ij} + B_{ji}$.
(2) $S_k(s) := E_n + (s-1)B_{kk}$ für $s \neq 0$.
(3) $A_{ij}(a) := E_n + aB_{ij}$ für $i \neq j$ und $a \in K$.

Aufgabe 25.13. Es sei K ein Körper und M eine $m \times n$-Matrix mit Einträgen in K. Zeige, dass die Multiplikation mit $m \times m$-Elementarmatrizen von links mit M folgende Wirkung haben.

(1) $V_{ij} \circ M =$ Vertauschen der i-ten und der j-ten Zeile von M.
(2) $(S_k(s)) \circ M =$ Multiplikation der k-ten Zeile von M mit s.
(3) $(A_{ij}(a)) \circ M =$ Addition des a-fachen der j-ten Zeile von M zur i-ten Zeile ($i \neq j$).

Aufgabe 25.14. Beschreibe die Wirkungsweise, wenn man eine Matrix mit einer Elementarmatrix von rechts multipliziert.

Aufgabe 25.15. Zeige, dass die Elementarmatrizen invertierbar sind. Wie sehen die inversen Matrizen zu den Elementarmatrizen aus?

Aufgabe 25.16. Zeige, dass man eine Scherungsmatrix

$$A_{ij}(a) = E_n + aB_{ij}$$

als Matrizenprodukt $M \circ N \circ L$ schreiben kann, wobei M und L Diagonalmatrizen sind und N eine Scherungsmatrix der Form $A_{ij}(1)$ ist.

Aufgabe 25.17.*

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finde Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_k$ derart, dass $E_k \circ \cdots \circ E_1 \circ M$ die Einheitsmatrix ist.

25.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 25.18. (6 (3+1+2) Punkte)

Eine Tierpopulation besteht aus Traglingen (erstes Lebensjahr), Frischlingen (zweites Lebensjahr), Halbstarken (drittes Lebensjahr), Reifen (viertes Lebensjahr) und alten Hasen (fünftes Lebensjahr), älter können diese Tiere nicht werden. Der Gesamtbestand dieser Tiere in einem bestimmten Jahr j wird daher durch ein 5-Tupel $B_j = (b_{1,j}, b_{2,j}, b_{3,j}, b_{4,j}, b_{5,j})$ angegeben.

Von den Traglingen erreichen 7/8-tel das Frischlingsalter, von den Frischlingen erreichen 9/10-tel das Halbstarkenalter, von den Halbstarken erreichen 5/6-tel das reife Alter und von den Reifen erreichen 2/3-tel das fünfte Jahr.

Traglinge und Frischlinge können sich noch nicht vermehren, dann setzt die Geschlechtsreife ein und 10 Halbstarke zeugen 5 Nachkommen und 10 Reife zeugen 8 Nachkommen, wobei die Nachkommen ein Jahr später geboren werden.

a) Bestimme die lineare Abbildung (bzw. die Matrix), die den Gesamtbestand B_{j+1} aus dem Bestand B_j berechnet.

b) Was wird aus dem Bestand $(200, 150, 100, 100, 50)$ im Folgejahr?

c) Was wird aus dem Bestand $(0, 0, 100, 0, 0)$ in fünf Jahren?

Aufgabe 25.19. (3 Punkte)

Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl und es sei

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ w \longmapsto zw,$$

die dadurch definierte Multiplikation, die eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung ist. Wie sieht die Matrix zu dieser Abbildung bezüglich der reellen Basis 1 und i aus? Zeige, dass zu zwei komplexen Zahlen z_1 und z_2 mit den beiden reellen Matrizen M_1 und M_2 die Produktmatrix $M_2 \circ M_1$ die beschreibende Matrix zu $z_1 z_2$ ist.

Aufgabe 25.20. (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 25.21. (3 Punkte)

Führe das Invertierungsverfahren für die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

unter der Voraussetzung $ad - bc \neq 0$ durch.

Aufgabe 25.22. (3 Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Finde Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_k$ derart, dass $E_k \circ \cdots \circ E_1 \circ M$ die Einheitsmatrix ist.

26. Vorlesung - Determinanten

> Man muß nur Ein Wesen
> recht von Grund aus lieben,
> da kommen einem die übrigen
> alle liebenswürdig vor!
>
> Johann Wolfgang von Goethe

26.1. **Rang von Matrizen.**

Definition 26.1. Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann nennt man die Dimension des von den Spalten erzeugten Untervektorraums von K^m den *(Spalten-)Rang* der Matrix, geschrieben

$$\operatorname{rang} M\,.$$

Lemma 26.2. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei*

$$\varphi\colon\, V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(K)$ beschrieben werde. Dann gilt

$$\operatorname{rang} \varphi \,=\, \operatorname{rang} M.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 26.21. □

Zur Formulierung der nächsten Aussage führen wir den *Zeilenrang* einer $m \times n$-Matrix als die Dimension des von den Zeilen erzeugten Untervektorraumes von K^n ein.

Lemma 26.3. *Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann stimmt der Spaltenrang mit dem Zeilenrang überein. Wenn man M im Sinne von Satz 21.9 mittels elementarer Zeilenumformungen in eine Matrix M' in Stufenform transformiert, so ist der Rang gleich der Anzahl der relevanten Zeilen von M'.*

Beweis. Es sei r die Anzahl der relevanten Zeilen in der durch elementare Zeilenumformungen gewonnenen Matrix M' in Stufenform. Wir zeigen, dass diese Zahl sowohl mit dem Spaltenrang als auch mit dem Zeilenrang von M' und von M übereinstimmt. Bei elementaren Zeilenumformungen ändert sich der von den Zeilen erzeugte Untervektorraum nicht, und damit ändert sich auch nicht der Zeilenrang. Der Zeilenrang von M stimmt also mit dem Zeilenrang von M' überein. Diese Matrix hat den Zeilenrang r, da die ersten r Zeilen linear unabhängig sind und ansonsten nur Nullzeilen auftauchen. Sie hat aber auch den Spaltenrang r, da die r Spalten, in denen eine neue Stufe auftritt, linear unabhängig sind und die weiteren Spalten Linearkombinationen dieser r Spalten sind. Die Aufgabe 26.2 zeigt, dass sich bei elementaren Zeilenumformungen auch der Spaltenrang nicht ändert. □

Beide Ränge stimmen also überein, so dass wir im Folgenden nur noch vom *Rang einer Matrix* sprechen werden.

Korollar 26.4. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *M ist invertierbar.*
(2) *Der Rang von M ist n.*
(3) *Die Zeilen von M sind linear unabhängig.*
(4) *Die Spalten von M sind linear unabhängig.*

Beweis. Die Äquivalenz von (2), (3) und (4) folgt aus der Definition und aus Lemma 26.3. Für die Äquivalenz von (1) und (2) betrachten wir die durch M definierte lineare Abbildung

$$\varphi\colon K^n \longrightarrow K^n .$$

Die Eigenschaft, dass der Spaltenrang gleich n ist, ist äquivalent zur Surjektivität der Abbildung, die aufgrund von Korollar 25.4 äquivalent zur Bijektivität der Abbildung ist. Die Bijektivität ist nach Lemma 25.11 äquivalent zur Invertierbarkeit der Matrix. □

26.2. **Determinanten.**

Definition 26.5. Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix über K. Zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei M_i diejenige $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die entsteht, wenn man in M die erste Spalte und die i-te Zeile weglässt. Dann definiert man rekursiv die *Determinante* von M durch

$$\det M = \begin{cases} a_{11}\,, & \text{falls } n = 1\,, \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i & \text{für } n \geq 2\,. \end{cases}$$

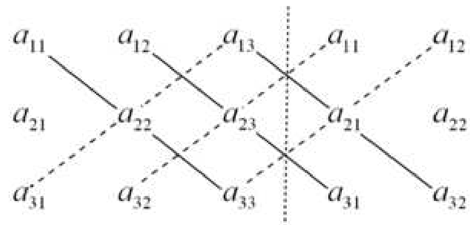
Die Determinante ist nur für quadratische Matrizen definiert. Die in der Definition auftretenden Matrizen nennt auch *Streichungsmatrizen.* Für kleine n kann man die Determinante einfach ausrechnen.

Beispiel 26.6. Für eine 2×2-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb\,.$$



Als Merkregel für eine 3×3-Matrix verwendet man die *Regel von Sarrus*. Man wiederholt die erste Spalte als vierte Spalte und die zweite Spalte als fünfte Spalte. Die Produkte der durchgezogenen Diagonalen werden positiv genommen, die Produkte der gestrichelten Diagonalen negativ.

Beispiel 26.7. Für eine 3×3-Matrix $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ist

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Dies nennt man die *Regel von Sarrus*.

Lemma 26.8. *Für eine obere Dreiecksmatrix*

$$M = \begin{pmatrix} b_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & b_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

ist

$$\det M = b_1 b_2 \cdots b_{n-1} b_n .$$

Insbesondere ist für die Einheitsmatrix $\det E_n = 1$.

Beweis. Dies folgt mit einer einfachen Induktion direkt aus der Definition der Determinante. $\square$

26.3. **Multilinearität.**

Wir wollen zeigen, dass die oben rekursiv definierte Determinante eine „multilineare“ „alternierende“ Abbildung ist, wenn man die Identifizierung

$$\mathrm{Mat}_n(K) \cong (K^n)^n$$

vornimmt, bei der einer Matrix das n-Tupel der Zeilen der Matrix zugeordnet wird. Wir fassen also im Folgenden eine Matrix als ein Spaltentupel

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

auf, wobei die einzelnen Einträge v_i Zeilenvektoren der Länge n sind.

Satz 26.9. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann ist die Determinante*

$$\mathrm{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$

multilinear. D.h., dass für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$, für je $n-1$ Vektoren $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n \in K^n$ und für $u, w \in K^n$ die Gleichheit

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u+w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

und für $s \in K$ die Gleichheit

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ su \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = s \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

gilt.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Satz 26.10. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann besitzt die Determinante*

$$\mathrm{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$

folgende Eigenschaften.

(1) *Wenn in M zwei Zeilen übereinstimmen, so ist $\det M = 0$. D.h., dass die Determinante alternierend ist.*
(2) *Wenn man in M zwei Zeilen vertauscht, so ändert sich die Determinante mit dem Faktor -1.*

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

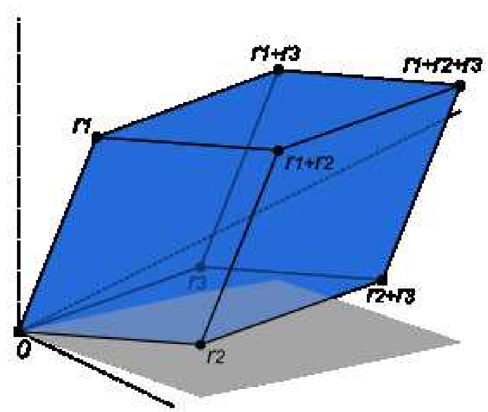
Satz 26.11. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1)
$$\det M \neq 0.$$
(2) *Die Zeilen von M sind linear unabhängig.*
(3) *M ist invertierbar.*
(4)
$$\operatorname{rang} M = n.$$

Beweis. Die Beziehung zwischen Rang, Invertierbarkeit und linearer Unabhängigkeit wurde schon in Korollar 26.4 gezeigt. Seien die Zeilen linear abhängig. Wir können nach Zeilenvertauschungen annehmen, dass $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} s_i v_i$ ist. Dann ist nach Satz 26.9 und Satz 26.10

$$\det M = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ \sum_{i=1}^{n-1} s_i v_i \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n-1} s_i \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_i \end{pmatrix} = 0.$$

Seien nun die Zeilen linear unabhängig. Dann kann man durch Zeilenvertauschungen, Skalierung und Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile die Matrix sukzessive zur Einheitsmatrix transformieren. Dabei ändert sich die Determinante stets durch einen von 0 verschiedenen Faktor. Da die Determinante der Einheitsmatrix 1 ist, muss auch die Determinante der Ausgangsmatrix $\neq 0$ sein. □



Bemerkung 26.12. Bei $K = \mathbb{R}$ steht die Determinante in einer engen Beziehung zu Volumina von geometrischen Objekten. Wenn man im $\mathbb{R}^n$ Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ betrachtet, so spannen diese ein *Parallelotop* auf. Dieses ist definiert als

$$P := \{s_1 v_1 + \cdots + s_n v_n \mid s_i \in [0,1]\}.$$

Es besteht also aus allen Linearkombinationen der Vektoren, wobei aber die Skalare auf das Einheitsintervall beschränkt sind. Wenn die Vektoren linear unabhängig sind, so handelt es sich wirklich um einen „voluminösen“ Körper, andernfalls liegt ein Objekt von niedrigerer Dimension vor. Es gilt nun die Beziehung

$$\operatorname{vol} P \,=\, |\det(v_1, \ldots, v_n)|\,,$$

d.h. das Volumen des Parallelotops ist der Betrag der Determinante derjenigen Matrix, die entsteht, wenn man die aufspannenden Vektoren hintereinander schreibt.

26.4. **Der Determinantenmultiplikationssatz und Folgerungen.**

Wir besprechen weitere wichtige Sätze über Determinanten, die wir aber nicht beweisen werden. Die Beweise beruhen auf einer systematischeren Untersuchung der für die Determinante charakteristischen Eigenschaften, multilinear und alternierend zu sein. Durch diese beiden Eigenschaften zusammen mit der Bedingung, dass die Determinante der Einheitsmatrix gleich 1 ist, ist die Determinante nämlich schon eindeutig festgelegt.

Satz 26.13. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gilt für Matrizen $A, B \in \operatorname{Mat}_n(K)$ die Beziehung*

$$\det(A \circ B) \,=\, \det A \cdot \det B.$$

Definition 26.14. Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $m \times n$-Matrix über K. Dann nennt man die $n \times m$-Matrix

$$M^{\text{tr}} = (b_{ij})_{ij} \text{ mit } b_{ij} := a_{ji}$$

die *transponierte Matrix* zu M.

Die transponierte Matrix entsteht also, indem man die Rollen von Zeilen und Spalten vertauscht. Beispielsweise ist

$$\begin{pmatrix} t & n & o & e \\ r & s & n & r \\ a & p & i & t \end{pmatrix}^{\text{tr}} = \begin{pmatrix} t & r & a \\ n & s & p \\ o & n & i \\ e & r & t \end{pmatrix}.$$

Satz 26.15. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann ist*

$$\det M \,=\, \det M^{tr}.$$

Daraus folgt, dass man die Determinante auch berechnen kann, indem man „nach einer Zeile entwickelt“, wie die folgende Aussage zeigt.

Korollar 26.16. *Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix über K. Zu $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ sei M_{ij} diejenige Matrix, die entsteht, wenn man* *in M die i-te Zeile und die j-te Spalte weglässt. Dann ist (bei $n \geq 2$ für jedes feste i bzw. j)*

$$\det M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}.$$

Beweis. Für $j = 1$ ist die erste Gleichung die rekursive Definition der Determinante. Daraus folgt die Aussage für $i = 1$ aufgrund von Satz 26.15. Durch Spalten- und Zeilenvertauschung folgt die Aussage daraus allgemein, siehe Aufgabe 26.12. □

26.5. **Die Determinante einer linearen Abbildung.**

Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung eines Vektorraumes der Dimension n in sich. Diese wird bezüglich einer Basis durch eine Matrix $M \in \mathrm{Mat}_n(K)$ beschrieben. Es liegt nahe, die Determinante dieser Matrix als Determinante der linearen Abbildung zu definieren, doch hat man hier das *Problem der Wohldefiniertheit*: die lineare Abbildung wird bezüglich einer anderen Basis durch eine „völlig" andere Matrix beschrieben. Allerdings besteht zwischen den zwei beschreibenden Matrizen M und N und der Basiswechselmatrix B aufgrund von Korollar 25.9 die Beziehung $N = BMB^{-1}$. Aufgrund des Determinantenmultiplikationssatzes ist daher

$$\begin{aligned}\det N &= \det\left(BMB^{-1}\right)\\ &= (\det B)(\det M)(\det B^{-1})\\ &= (\det B)(\det B^{-1})(\det M)\\ &= \det M,\end{aligned}$$

so dass die folgende Definition in der Tat unabhängig von der Wahl einer Basis ist.

Definition 26.17. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich einer Basis durch die Matrix M beschrieben werde. Dann nennt man

$$\det \varphi := \det M$$

die *Determinante* der linearen Abbildung φ.

26. Arbeitsblatt

26.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 26.1. Bestimme explizit den Spaltenrang und den Zeilenrang der Matrix
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Beschreibe lineare Abhängigkeiten (falls solche existieren) zwischen den Zeilen als auch zwischen den Spalten der Matrix.

Aufgabe 26.2. Zeige, dass sich bei elementaren Zeilenumformungen der Spaltenrang nicht ändert.

Aufgabe 26.3. Bestimme die Determinante von ebenen Drehungen.

Aufgabe 26.4. Berechne die Determinante der Matrix
$$\begin{pmatrix} 1+3\mathrm{i} & 5-\mathrm{i} \\ 3-2\mathrm{i} & 4+\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 26.5. Berechne die Determinante der Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 26.6.*

Berechne die Determinante der Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ -3 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 26.7. Zeige durch Induktion, dass bei einer oberen Dreiecksmatrix die Determinante gleich dem Produkt der Diagonalelemente ist.

Aufgabe 26.8. Überprüfe die Multilinearität und die Eigenschaft, alternierend zu sein, direkt für die Determinante von 3×3-Matrizen.

Aufgabe 26.9. Es sei M eine quadratische Matrix, die man als

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Matrizen A und D schreiben kann. Zeige

$$\det M = \det A \cdot \det D.$$

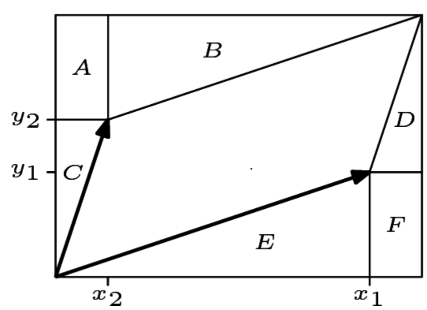
Aufgabe 26.10.*

Bestimme, für welche $x \in \mathbb{C}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} x^2 + x & -x \\ -x^3 + 2x^2 + 5x - 1 & x^2 - x \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Aufgabe 26.11.*



Man begründe anhand des Bildes, dass zu zwei Vektoren (x_1, y_1) und (x_2, y_2) die Determinante der durch die Vektoren definierten 2×2-Matrix mit dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten *Parallelogramms* (bis auf das Vorzeichen) übereinstimmt.

Aufgabe 26.12. Zeige, dass man die Determinante nach jeder Zeile und nach jeder Spalte entwickeln kann.

Aufgabe 26.13. Es sei K ein Körper und $m, n, p \in \mathbb{N}$. Zeige, dass das Transponieren von Matrizen folgende Eigenschaften besitzt (dabei seien $A, B \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$, $C \in \operatorname{Mat}_{n \times p}(K)$ und $s \in K$.).

(1) $(A^{\text{tr}})^{\text{tr}} = A$.
(2) $(A + B)^{\text{tr}} = A^{\text{tr}} + B^{\text{tr}}$.

(3) $(sA)^{\text{tr}} = s \cdot A^{\text{tr}}$.
(4) $(A \circ C)^{\text{tr}} = C^{\text{tr}} \circ A^{\text{tr}}$.

Aufgabe 26.14. Man berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

indem man die Matrix nach allen Spalten und nach allen Zeilen entwickle.

Aufgabe 26.15. Berechne die Determinanten aller 3×3-Matrizen, bei denen in jeder Spalte und in jeder Zeile genau einmal 1 und zweimal 0 steht.

Aufgabe 26.16. Sei $z \in \mathbb{C}$ und

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ w \longmapsto zw,$$

die zugehörige Multiplikation. Bestimme die Determinante dieser Abbildung, wenn man sie als reell-lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auffasst.

Die nächsten Aufgaben verwenden die folgende Definition.

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zu $a \in K$ heißt die lineare Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow V,\ v \longmapsto av,$$

die *Streckung* (oder *Homothetie*) zum *Streckungsfaktor* a.

Aufgabe 26.17. Was ist die Determinante einer Streckung auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V?

Aufgabe 26.18. Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für zwei Streckungen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum.

Aufgabe 26.19. Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 26.20.*

Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

26.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 26.21. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Zeige, dass

$$\operatorname{rang} \varphi = \operatorname{rang} M$$

gilt.

Aufgabe 26.22. (3 Punkte)

Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 3-2\mathrm{i} & 5 \\ \mathrm{i} & 1 & 3-\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & -4-\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 26.23. (3 Punkte)

Berechne die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 26.24. (4 Punkte)

Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

27. Vorlesung - Eigentheorie

27.1. **Eigentheorie.**

Unter einer Achsenspiegelung in der Ebene verhalten sich gewisse Vektoren besonders einfach. Die Vektoren auf der Spiegelungsachse werden auf sich selbst abgebildet, und die dazu senkrechten Vektoren werden auf ihr Negatives abgebildet. Für all diese Vektoren liegt das Bild unter der linearen Abbildung in dem von diesem Vektor aufgespannten eindimensionalen Unterraum. In der Theorie der Eigenwerte und Eigenvektoren untersucht man, ob es zu einer linearen Abbildung Geraden (also eindimensionale Unterräume) gibt, die unter der Abbildung auf sich selbst abgebildet werden. Eine Zielsetzung ist dabei, zu einer gegebenen linearen Abbildung eine Basis zu finden, bezüglich der die beschreibende Matrix möglichst einfach ist. Eine wichtige Anwendung ist dabei, Lösungen für ein lineares Differentialgleichungssystem zu finden.

Eine *Achsenspiegelung* besitzt zwei Eigengeraden, die Spiegelungsachse zum Eigenwert 1 und die dazu senkrechte Gerade zum Eigenwert -1.

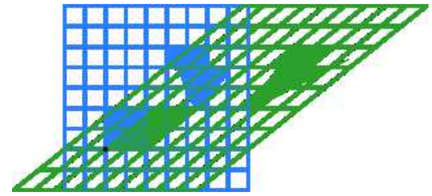
Definition 27.1. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt ein Element $v \in V$, $v \neq 0$, ein *Eigenvektor* von φ (zum Eigenwert λ), wenn

$$\varphi(v) = \lambda v$$

mit einem $\lambda \in K$ gilt.



Eine *Scherung* hat eine Eigengerade zum Eigenwert 1 und keine weitere Eigenwerte.

Definition 27.2. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt ein Element $\lambda \in K$ ein *Eigenwert* zu φ, wenn es einen von 0 verschiedenen Vektor $v \in V$ mit

$$\varphi(v) = \lambda v$$

gibt.

Definition 27.3. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zu $\lambda \in K$ nennt man

$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi) := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$$

den *Eigenraum* von φ zum Wert λ.

Wir erlauben also beliebige Werte (nicht nur Eigenwerte) in der Definition der Eigenräume. Die 0 gehört zu jedem Eigenraum, obwohl sie kein Eigenvektor ist. Den von einem Eigenvektor erzeugten Untervektorraum nennt man eine *Eigengerade*. Wir betrachten einige einfache Beispiele über $\mathbb{R}$.

Beispiel 27.4. Eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist die Multiplikation mit einer festen Zahl $a \in \mathbb{R}$ (dem *Streckungsfaktor* oder *Proportionalitätsfaktor*). Daher ist jede Zahl $v \neq 0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert a und der Eigenraum zu diesem Eigenwert ist ganz $\mathbb{R}$. Es gibt neben a keinen weiteren Eigenwert, sämtliche Eigenräume zu $\lambda \neq a$ sind 0.

Beispiel 27.5. Eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ ist bezüglich der Standardbasis durch eine 2×2-Matrix gegeben. Wir betrachten die Eigenwerte zu einigen elementaren Beispielen. Eine Streckung ist durch $v \mapsto av$ mit einem Streckungsfaktor $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Jeder Vektor $v \neq 0$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert a und der Eigenraum zu diesem Eigenwert ist ganz $\mathbb{R}^2$. Es gibt neben a keinen weiteren Eigenwert, sämtliche Eigenräume zu $\lambda \neq a$ sind 0. Die Identität besitzt den einzigen Eigenwert 1.

Eine Achsenspiegelung an der x-Achse wird durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ beschrieben. Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist die x-Achse, der Eigenraum zum Eigenwert -1 ist die y-Achse. Ein Vektor (s,t) mit $s, t \neq 0$ kann kein Eigenvektor sein, da die Gleichung

$$(s, -t) = \lambda(s,t)$$

dann keine Lösung besitzt.

Eine ebene Drehung wird durch die Drehmatrix $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ zu einem Drehwinkel α, $0 \leq \alpha < 2\pi$, gegeben. Bei $\alpha = 0$ liegt die Identität vor, bei $\alpha = \pi$ liegt die Halbdrehung vor, also die Punktspiegelung bzw. die Streckung mit dem Faktor -1. Bei allen anderen Drehwinkeln wird keine Gerade auf sich selbst abgebildet, so dass diese Drehungen keine Eigenwerte und keine Eigenvektoren besitzen (und alle Eigenräume 0 sind).

Lemma 27.6. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Der Eigenraum*

$$\operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi)$$

ist ein Untervektorraum von V.

(2) *λ ist genau dann ein Eigenwert zu φ, wenn der Eigenraum $\operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi)$ nicht der Nullraum ist.*

(3) *Ein Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, ist genau dann ein Eigenvektor zu λ, wenn $v \in \operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi)$ ist.*

Beweis. Siehe Aufgabe 27.14. $\square$

Für Matrizen verwenden wir die entsprechenden Begriffe. Ist $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung und M eine beschreibende Matrix bezüglich einer Basis, so gilt für einen Eigenwert λ und einen Eigenvektor $v \in V$ mit dem Koordinatentupel $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis die Beziehung

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Die Matrix N bezüglich einer weiteren Basis steht dann zu M nach Lemma 25.8 in der Beziehung $N = BMB^{-1}$, wobei B eine invertierbare Matrix ist. Es sei

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

das Koordinatentupel bezüglich der anderen Basis. Dann ist

$$\begin{aligned} N \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} &= (BMB^{-1}) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \\ &= (BMB^{-1})B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= BM \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= B\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \lambda B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

d.h. die beschreibenden Matrizen besitzen dieselben Eigenwerte, wobei sich allerdings die beschreibenden Koordinatentupel für die Eigenvektoren mit den Basen ändern.

Beispiel 27.7. Wir betrachten die durch eine Diagonalmatrix

$$
\begin{pmatrix}
d_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n
\end{pmatrix}
$$

gegebene lineare Abbildung

$$
\varphi\colon\ K^n \longrightarrow K^n,\ e_i \longmapsto d_i e_i.
$$

Die Diagonaleinträge d_i sind Eigenwerte von φ, und zwar ist der i-te Standardvektor e_i ein zugehöriger Eigenvektor. Die Eigenräume sind

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{Eig}_d(\varphi) \\
= \ & \{v \in K^n \mid v \text{ ist Linearkombination von solchen } e_i, \text{ für die } d = d_i \text{ ist}\}.
\end{aligned}
$$

Diese Räume sind genau dann von 0 verschieden, wenn d mit einem Diagonaleintrag übereinstimmt. Die Dimension der Eigenräume ist durch die Anzahl gegeben, wie oft der Wert d in der Diagonalen vorkommt. Die Summe dieser Dimensionen ergibt n.

Beispiel 27.8. Bei einer *orthogonalen Spiegelung* des $\mathbb{R}^n$ an einem $(n-1)$-dimensionalen Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ wird dieser Untervektorraum fixiert und jeder Vektor wird senkrecht zu U auf die andere Seite von U abgebildet. Wenn $v_1, \ldots, v_{n-1}$ eine Basis von U und v_n ein zu U orthogonaler Vektor ist, so wird die Spiegelung bezüglich dieser Basis durch die Matrix

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & -1
\end{pmatrix}
$$

beschrieben.

Beispiel 27.9. Wir betrachten die durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y \\ x \end{pmatrix}.$$

Die Frage, ob diese Abbildung Eigenwerte besitzt, führt zur Frage, ob es $\lambda \in \mathbb{Q}$ derart gibt, dass die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

eine nichtriviale Lösung $(x, y) \neq (0, 0)$ besitzt. Bei gegebenem λ kann dies auf ein lineares Problem zurückgeführt werden, das mit dem Eliminationsalgorithmus einfach gelöst werden kann. Die Frage aber, ob es Eigenwerte überhaupt gibt, führt wegen des variablen „Eigenwertparameters“ λ zu einem nichtlinearen Problem. Das obige Gleichungssystem bedeutet ausgeschrieben

$$5y = \lambda x \text{ und } x = \lambda y\,.$$

Bei $y = 0$ ist auch $x = 0$, der Nullvektor ist aber kein Eigenvektor. Sei also $y \neq 0$. Aus den beiden Gleichungen erhält man die Bedingung

$$5y = \lambda x = \lambda^2 y,$$

woraus $5 = \lambda^2$ folgt. Da in $\mathbb{Q}$ die Zahl 5 keine Quadratwurzel besitzt, gibt es keine Lösung und das bedeutet, dass φ keine Eigenwerte und damit auch keine Eigenvektoren besitzt.

Wir fassen nun die Matrix M als eine reelle Matrix auf und untersuchen die zugehörige Abbildung

$$\psi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y \\ x \end{pmatrix}.$$

Die gleichen Rechnungen führen auf die notwendige Lösungsbedingung $5 = \lambda^2$, die jetzt von den beiden reellen Zahlen

$$\lambda_1 = \sqrt{5} \text{ und } \lambda_2 = -\sqrt{5}$$

erfüllt wird. Für diese beiden Werte kann man unabhängig voneinander nach Eigenvektoren suchen. Wir betrachten zuerst den Fall $\lambda = \sqrt{5}$, was zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

führt. Dies schreibt man als

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

bzw. als lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & -5 \\ -1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses ist einfach lösbar, der Lösungsraum ist eindimensional und

$$v = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Basislösung.

Für $\lambda = -\sqrt{5}$ führen dieselben Umformungen zu einem weiteren linearen Gleichungssystem, für das der Vektor

$$w = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basislösung ist. Über $\mathbb{R}$ sind also $\sqrt{5}$ und $-\sqrt{5}$ Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume sind

$$\operatorname{Eig}_{\sqrt{5}}(\psi) = \left\{ s \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } \operatorname{Eig}_{-\sqrt{5}}(\psi) = \left\{ s \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

27.2. **Weiteres zu Eigenräumen.**

Lemma 27.10. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann ist

$$\operatorname{kern} \varphi = \operatorname{Eig}_0(\varphi).$$

Insbesondere ist 0 genau dann ein Eigenwert von φ, wenn φ nicht injektiv ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 27.17. □

Allgemeiner gilt die folgende Charakterisierung.

Lemma 27.11. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \in K$. Dann ist

$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi) = \operatorname{kern}(\lambda \cdot \operatorname{Id}_V - \varphi).$$

Beweis. Sei $v \in V$. Dann ist $v \in \operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$ genau dann, wenn $\varphi(v) = \lambda v$ ist, und dies ist genau bei $\lambda v - \varphi(v) = 0$ der Fall, was man als $(\lambda \cdot \operatorname{Id}_V - \varphi)(v) = 0$ schreiben kann. □

Bemerkung 27.12. Neben dem Eigenraum zu $0 \in K$, der der Kern der linearen Abbildung ist, sind die Eigenwerte 1 und -1 besonders interessant. Der Eigenraum zu 1 besteht aus allen Vektoren, die auf sich selbst abgebildet werden. Auf diesem Untervektorraum wirkt also die Abbildung wie die Identität, man nennt ihn den *Fixraum*. Der Eigenraum zu -1 besteht aus allen Vektoren, die auf ihr Negatives abgebildet werden. Auf diesem Untervektorraum wirkt die Abbildung wie eine Punktspiegelung.

Lemma 27.13. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es seien $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Elemente in K. Dann ist

$$\operatorname{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \cap \operatorname{Eig}_{\lambda_2}(\varphi) = 0.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 27.19. □

Lemma 27.14. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es seien $v_1, \ldots, v_n$ Eigenvektoren zu (paarweise) verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Dann sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n. Für $n = 0$ ist die Aussage richtig. Sei die Aussage also für weniger als n Zahlen bewiesen. Betrachten wir eine Darstellung der 0, also

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0.$$

Wir wenden darauf φ an und erhalten einerseits

$$a_1 \varphi(v_1) + \cdots + a_n \varphi(v_n) = \lambda_1 a_1 v_1 + \cdots + \lambda_n a_n v_n = 0.$$

Andererseits multiplizieren wir die obige Gleichung mit λ_n und erhalten

$$\lambda_n a_1 v_1 + \cdots + \lambda_n a_n v_n = 0.$$

Die so entstandenen Gleichungen zieht man voneinander ab und erhält

$$(\lambda_n - \lambda_1) a_1 v_1 + \cdots + (\lambda_n - \lambda_{n-1}) a_{n-1} v_{n-1} = 0.$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass alle Koeffizienten $(\lambda_n - \lambda_i) a_i = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, sein müssen. Wegen $\lambda_n - \lambda_i \neq 0$ folgt $a_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und wegen $v_n \neq 0$ ist dann auch $a_n = 0$. □

Korollar 27.15. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann gibt es maximal $\dim(V)$ *viele Eigenwerte zu φ.*

Beweis. Siehe Aufgabe 27.20. □

27. Arbeitsblatt

27.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 27.1.*

Bestimme die Eigenvektoren der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \pi x$.

Aufgabe 27.2. Überprüfe, ob der Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zur Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

ist und bestimme, falls ein Eigenvektor vorliegt, den zugehörigen Eigenwert.

Aufgabe 27.3. Bestimme die Eigenvektoren und die Eigenwerte zu einer linearen Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die durch eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ gegeben ist.

Aufgabe 27.4. Zeige, dass der erste Standardvektor ein Eigenvektor zu einer jeden oberen Dreiecksmatrix ist. Was ist der Eigenwert?

Aufgabe 27.5.*

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix. Zeige, dass ein Eigenwert zu M ein Diagonaleintrag von M sein muss.

Aufgabe 27.6.*

Bestimme die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume zu einer ebenen Drehung $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ zu einem Drehwinkel α, $0 \leq \alpha < 2\pi$, über $\mathbb{R}$.

Aufgabe 27.7. Zeige, dass jede Matrix

$$M \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$$

mindestens einen Eigenwert besitzt.

Aufgabe 27.8. Es seien

$$\varphi, \psi \colon V \longrightarrow V$$

Endomorphismen auf einem K-Vektorraum V und es sei $v \in V$ ein Eigenvektor von φ und von ψ. Zeige, dass v auch ein Eigenvektor von $\varphi \circ \psi$ ist. Was ist der Eigenwert?

Aufgabe 27.9. Es sei $\varphi \colon V \to V$ ein Isomorphismus auf einem K-Vektorraum V mit der Umkehrabbildung φ^{-1}. Zeige, dass $a \in K$ genau dann ein Eigenwert von φ ist, wenn a^{-1} ein Eigenwert von φ^{-1} ist.

Aufgabe 27.10. Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

derart, dass φ keine Eigenwerte besitzt, dass aber eine gewisse Potenz φ^n, $n \geq 2$, Eigenwerte besitzt.

Aufgabe 27.11. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung mit

$$\varphi^n = \mathrm{Id}_V$$

für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$.[51] Zeige, dass jeder Eigenwert λ von φ die Eigenschaft $\lambda^n = 1$ besitzt.

Aufgabe 27.12. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von φ und $P \in K[X]$ ein Polynom. Zeige, dass $P(\lambda)$ ein Eigenwert von[52] $P(\varphi)$ ist.

[51]Der Wert $n = 0$ ist hier erlaubt, aber aussagelos.

[52]Der Ausdruck $P(\varphi)$ bedeutet, dass man die lineare Abbildung φ in das Polynom P einsetzt. Dabei muss man X^n als φ^n, also als die n-fache Hintereinanderschaltung von φ mit sich selbst, interpretieren, die Addition wird zur Addition von linearen Abbildungen, u.s.w.

Aufgabe 27.13. Es sei M eine quadratische Matrix, die man als Blockmatrix

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Matrizen A und B schreiben kann. Zeige, dass eine Zahl $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert von M ist, wenn λ ein Eigenwert von A oder von B ist.

Aufgabe 27.14.*

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$. Zeige folgende Aussagen.

(1) Der Eigenraum
$$\mathrm{Eig}_{\lambda}(\varphi)$$
ist ein Untervektorraum von V.
(2) λ ist genau dann ein Eigenwert zu φ, wenn der Eigenraum $\mathrm{Eig}_{\lambda}(\varphi)$ nicht der Nullraum ist.
(3) Ein Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, ist genau dann ein Eigenvektor zu λ, wenn $v \in \mathrm{Eig}_{\lambda}(\varphi)$ ist.

Aufgabe 27.15. Es bezeichne $V = \mathbb{R}[X]_{\leq d}$ die Menge aller reellen Polynome vom Grad $\leq d$. Bestimme die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume zum Ableitungsoperator

$$V \longrightarrow V,\, P \longmapsto P'.$$

Der Begriff des Eigenvektors ist auch für unendlichdimensionale Vektorräume definiert und wichtig, wie die folgende Aufgabe zeigt.

Aufgabe 27.16. Es sei V der reelle Vektorraum, der aus allen unendlich oft differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ besteht.

a) Zeige, dass die Ableitung $f \mapsto f'$ eine lineare Abbildung von V nach V ist.

b) Bestimme die Eigenwerte der Ableitung und zu jedem Eigenwert mindestens einen Eigenvektor.[53]

c) Bestimme zu jeder reellen Zahl die Eigenräume und deren Dimension.

[53]In diesem Zusammenhang spricht man auch von *Eigenfunktionen*.

Aufgabe 27.17. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass

$$\operatorname{kern}\varphi = \operatorname{Eig}_0(\varphi)$$

gilt.

Aufgabe 27.18. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Sei $\lambda \in K$ und sei

$$U = \operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$$

der zugehörige Eigenraum. Zeige, dass sich φ zu einer linearen Abbildung

$$\varphi|_U\colon U \longrightarrow U,\, v \longmapsto \varphi(v),$$

einschränken lässt, und dass diese Abbildung die Streckung um den Streckungsfaktor λ ist.

Aufgabe 27.19.*

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und seien $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Elemente in K. Zeige, dass

$$\operatorname{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \cap \operatorname{Eig}_{\lambda_2}(\varphi) = 0$$

ist.

Aufgabe 27.20.*

Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass es maximal $\dim(V)$ viele Eigenwerte zu φ gibt.

27.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 27.21. (1 Punkt)

Überprüfe, ob der Vektor $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zur Matrix

$$\begin{pmatrix} -8 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

ist und bestimme, falls ein Eigenvektor vorliegt, den zugehörigen Eigenwert.

Aufgabe 27.22. (1 Punkt)

Überprüfe, ob der Vektor $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -9 \\ -2 & 7 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist und bestimme, falls ein Eigenvektor vorliegt, den zugehörigen Eigenwert.

Aufgabe 27.23. (4 (1+3) Punkte)

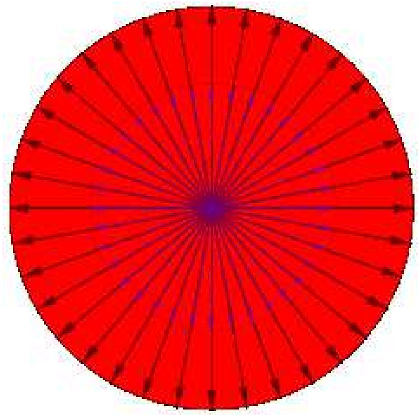
Das Nachtleben im Dorf Kleineisenstein besteht aus folgenden Möglichkeiten: dem Bett (bzw. zuhause), der Kneipe „Nachteule“ und dem Tanzclub „Pirouette“. In der Nacht kann man innerhalb einer Stunde folgende Bewegungen beobachten:

a) Von den Leuten im Bett gehen 1/10 in die Nachteule, 1/12 gehen in die Pirouette und der Rest bleibt im Bett.

b) Von den Leuten in der Nachteule gehen 1/3 in die Pirouette, 1/5 gehen ins Bett und der Rest bleibt in der Nachteule.

c) Von den Leuten in der Pirouette bleiben 3/5 in die Pirouette, 8 Prozent gehen in der Nachteule, der Rest geht ins Bett.

(1) Erstelle eine Matrix, die die Bewegungen innerhalb einer Stunde beschreibt.
(2) Kleineisenstein hat 500 Einwohner. Bei welcher Verteilung der Einwohner auf die drei Möglichkeiten ändert sich die Verteilung innerhalb einer Stunde nicht?



Aufgabe 27.24. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann eine Streckung ist, wenn jeder Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, ein Eigenvektor von φ ist.

Aufgabe 27.25. (4 Punkte)

Betrachte die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass M als reelle Matrix keine Eigenwerte besitzt. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume von M als komplexer Matrix.

Aufgabe 27.26. (6 Punkte)

Betrachte die reellen Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

Man charakterisiere in Abhängigkeit von a, b, c, d, wann eine solche Matrix

(1) zwei verschiedene Eigenwerte,
(2) einen Eigenwert mit einem zweidimensionalen Eigenraum,
(3) einen Eigenwert mit einem eindimensionalen Eigenraum,
(4) keinen Eigenwert,

besitzt.

28. Vorlesung - Diagonalisierbarkeit

Wirf den Helden in deiner
Seele nicht weg!

Friedrich Nietzsche

28.1. Das charakteristische Polynom.

Wir möchten zu einem Endomorphismus $\varphi\colon\ V \to V$ die Eigenwerte und dann auch die Eigenräume bestimmen. Dazu ist das charakteristische Polynom entscheidend.

Definition 28.1. Zu einer $n \times n$-Matrix M mit Einträgen in einem Körper K heißt das Polynom

$$\chi_M := \det(X \cdot E_n - M)$$

das *charakteristische Polynom*[54] von M.

Für $M = (a_{ij})_{ij}$ bedeutet dies

$$\chi_M = \det \begin{pmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & X - a_{nn} \end{pmatrix}.$$

In dieser Definition nehmen wir Bezug auf die Determinante von Matrizen, die wir nur für Matrizen mit Einträgen in einem Körper definiert haben. Die Einträge sind jetzt aber Elemente im Polynomring $K[X]$. Da wir sie aber als Elemente im Körper der rationalen Funktionen $K(X)$ auffassen können,[55] ist dies eine sinnvolle Definition. Gemäß der Definition ist diese Determinante ein Element in $K(X)$, da aber alle Einträge der Matrix Polynome sind und bei der rekursiven Definition der Determinante nur multipliziert und addiert wird, ist das charakteristische Polynom wirklich ein Polynom. Der Grad des charakteristischen Polynoms ist n und der Leitkoeffizient ist 1, d.h. die Gestalt ist

$$\chi_M = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_1 X + c_0.$$

Es gilt die wichtige Beziehung

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda E_n - M)$$

[54] Manche Autoren definieren das charakteristische Polynom als Determinante von $M - X \cdot E_n$ anstatt von $X \cdot E_n - M$. Dies ändert aber - und zwar nur bei n ungerade - nur das Vorzeichen.

[55] $K(X)$ heißt der Körper der rationalen Polynome; er besteht aus allen Brüchen P/Q zu Polynomen $P, Q \in K[X]$ mit $Q \neq 0$. Bei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ kann man diesen Körper mit der Menge der rationalen Funktionen identifizieren.

für jedes $\lambda \in K$, siehe Aufgabe 28.4. Hier wird links die Zahl λ in das Polynom eingesetzt und rechts wird die Determinante von einer Matrix, die von λ abhängt, ausgerechnet.

Für eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

auf einem endlichdimensionalen Vektorraum definiert man das *charakteristische Polynom*

$$\chi_\varphi := \chi_M,$$

wobei M eine beschreibende Matrix bezüglich einer beliebigen Basis sei. Der Determinantenmultiplikationssatz zeigt, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Basis ist, siehe Aufgabe 28.3.

Satz 28.2. *Es sei K ein Körper und es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann ist $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert von φ, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_φ ist.

Beweis. Es sei M eine beschreibende Matrix für φ, und sei $\lambda \in K$ vorgegeben. Es ist

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda E_n - M) = 0$$

genau dann, wenn die lineare Abbildung

$$\lambda \operatorname{Id}_V - \varphi$$

nicht bijektiv (und nicht injektiv) ist (wegen Satz 26.11 und Lemma 25.11). Dies ist nach Lemma 27.11 und Lemma 24.14 äquivalent zu

$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi) = \operatorname{kern}(\lambda \operatorname{Id}_V - \varphi) \neq 0,$$

was bedeutet, dass der Eigenraum zu λ nicht der Nullraum ist, also λ ein Eigenwert zu φ ist. $\square$

Beispiel 28.3. Wir betrachten die reelle Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} \chi_M &= \det(xE_2 - M) \\ &= \det\left(x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} x & -5 \\ -1 & x \end{pmatrix} \\ &= x^2 - 5. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also $x = \pm\sqrt{5}$ (diese Eigenwerte haben wir auch in Beispiel 27.9 ohne charakteristisches Polynom gefunden).

Beispiel 28.4. Zur Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

ist das charakteristische Polynom gleich

$$\chi_M = \det \begin{pmatrix} X-2 & -5 \\ 3 & X-4 \end{pmatrix} = (X-2)(X-4)+15 = X^2-6X+23.$$

Die Nullstellenbestimmung dieses Polynoms führt zur Bedingung

$$(X-3)^2 = -23+9 = -14,$$

die über $\mathbb{R}$ nicht erfüllbar ist, so dass die Matrix über $\mathbb{R}$ keine Eigenwerte besitzt. Über $\mathbb{C}$ hingegegen gibt es die beiden Eigenwerte $3+\sqrt{14}\mathrm{i}$ und $3-\sqrt{14}\mathrm{i}$. Für den Eigenraum zu $3+\sqrt{14}\mathrm{i}$ muss man

$$\begin{aligned} \operatorname{Eig}_{3+\sqrt{14}\mathrm{i}}(M) &= \operatorname{kern}\left(\left(3+\sqrt{14}\mathrm{i}\right)E_2 - M\right) \\ &= \operatorname{kern}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{14}\mathrm{i} & -5 \\ 3 & -1+\sqrt{14}\mathrm{i} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bestimmen, ein Basisvektor (also ein Eigenvektor) davon ist $\begin{pmatrix} 5 \\ 1+\sqrt{14}\mathrm{i} \end{pmatrix}$. Analog ist

$$\operatorname{Eig}_{3-\sqrt{14}\mathrm{i}}(M) = \operatorname{kern}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{14}\mathrm{i} & -5 \\ 3 & -1-\sqrt{14}\mathrm{i} \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1-\sqrt{14}\mathrm{i} \end{pmatrix} \rangle.$$

Beispiel 28.5. Für eine obere Dreiecksmatrix

$$M = \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

ist das charakteristische Polynom nach Lemma 26.8 gleich

$$\chi_M = (X-d_1)(X-d_2)\cdots(X-d_n).$$

In diesem Fall liegt das charakteristische Polynom direkt in der Zerlegung in lineare Faktoren vor, so dass unmittelbar seine Nullstellen und damit die Eigenwerte von M ablesbar sind, nämlich die Diagonalelemente $d_1, d_2, \ldots, d_n$ (die nicht alle verschieden sein müssen).

28.2. **Vielfachheiten.**

Für eine genauere Untersuchung der Eigenräume ist die folgende Begrifflichkeit sinnvoll. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V und $\lambda \in K$. Man nennt dann den Exponenten des linearen Polynoms $X-\lambda$ im charakteristischen Polynom χ_φ die *algebraische Vielfachheit* von λ, die wir mit $\mu_\lambda := \mu_\lambda(\varphi)$ bezeichnen, und die Dimension des zugehörigen Eigenraumes, also

$$\dim\left(\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)\right)$$

die *geometrische Vielfachheit* von λ. Nach Satz 28.2 ist die eine Vielfachheit genau dann positiv ist, wenn dies für die andere gilt. Im Allgemeinen können die beiden Vielfachheiten aber verschieden sein, wobei eine Abschätzung immer gilt.

Lemma 28.6. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$. Dann besteht zwischen der geometrischen und der algebraischen Vielfachheit die Beziehung

$$\dim\left(\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)\right) \leq \mu_\lambda(\varphi).$$

Beweis. Sei $m = \dim\left(\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)\right)$ und sei $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von diesem Eigenraum, die wir durch $w_1, \ldots, w_{n-m}$ zu einer Basis von V ergänzen. Bezüglich dieser Basis hat die beschreibende Matrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda E_m & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist daher nach Aufgabe 26.9 gleich $(X-\lambda)^m \cdot \chi_C$, so dass die algebraische Vielfachheit mindestens m ist. □

Beispiel 28.7. Wir betrachten 2×2-*Scherungsmatrizen*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a \in K$. Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_M = (X-1)(X-1),$$

so dass 1 der einzige Eigenwert von M ist. Den zugehörigen Eigenraum berechnet man als

$$\operatorname{Eig}_1(M) = \operatorname{kern}\begin{pmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -as \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor ist, und dass bei $a \neq 0$ der Eigenraum eindimensional ist (bei $a = 0$ liegt die Identität vor und der Eigenraum ist zweidimensional). Bei $a \neq 0$ ist die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 1 gleich 2, die geometrische Vielfachheit gleich 1.

28.3. **Diagonalisierbarkeit.**

Die Einschränkung einer linearen Abbildung auf einen Eigenraum ist die Streckung um den zugehörigen Eigenwert, also eine besonders einfache lineare Abbildung. Viele Eigenwerte mit hochdimensionalen Eigenräumen korrespondieren zu strukturell einfachen linearen Abbildungen. Ein Extremfall liegt bei den sogenannten diagonalisierbaren Abbildungen vor.

Bei einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

ist das charakteristische Polynom einfach gleich

$$(X - d_1)(X - d_2) \cdots (X - d_n)\,.$$

Wenn die Zahl d in den Diagonalelementen k-mal vorkommt, so kommt auch der Linearfaktor $X - d$ mit dem Exponenten k in der Faktorisierung des charakteristischen Polynoms vor. Dies gilt auch, wenn nur eine obere Dreiecksmatrix vorliegt. Anders aber als bei einer oberen Dreiecksmatrix kann man bei einer Diagonalmatrix sofort die Eigenräume angeben, siehe Beispiel 27.7, und zwar besteht der Eigenraum zu d aus allen Linearkombinationen der Standardvektoren e_i, für die d_i gleich d ist. Insbesondere ist die Dimension des Eigenraums gleich der Anzahl, wie oft d als Diagonalelement auftritt. Bei einer Diagonalmatrix stimmen also algebraische und geometrische Vielfachheiten überein.

Definition 28.8. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt φ *diagonalisierbar*, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren zu φ besitzt.

Satz 28.9. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *φ ist diagonalisierbar.*
(2) *Es gibt eine Basis $\mathfrak{v}$ von V derart, dass die beschreibende Matrix $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(\varphi)$ eine Diagonalmatrix ist.*
(3) *Für jede beschreibende Matrix $M = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{w}}(\varphi)$ bezüglich einer Basis $\mathfrak{w}$ gibt es eine invertierbare Matrix B derart, dass*

$$BMB^{-1}$$

eine Diagonalmatrix ist.

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) folgt aus der Definition, aus Beispiel 27.7 und der Korrespondenz zwischen linearen Abbildungen und Matrizen. Die Äquivalenz von (2) und (3) folgt aus Korollar 25.9. □

Korollar 28.10. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung, die $n = \dim_K(V)$ verschiedene Eigenwerte besitze. Dann ist φ diagonalisierbar.

Beweis. Aufgrund von Lemma 27.14 gibt es n linear unabhängige Eigenvektoren. Diese bilden nach Korollar 23.21 eine Basis. □

Beispiel 28.11. Wir schließen an Beispiel 27.9 an. Es gibt die beiden Eigenvektoren $\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ zu den verschiedenen Eigenwerten $\sqrt{5}$ und $-\sqrt{5}$, so dass die Abbildung nach Korollar 28.10 diagonalisierbar ist. Bezüglich der Basis $\mathfrak{u}$ aus diesen Eigenvektoren wird die lineare Abbildung durch die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

beschrieben.

Die Übergangsmatrix von der Basis $\mathfrak{u}$ zur durch e_1 und e_2 gegebenen Standardbasis $\mathfrak{v}$ ist einfach

$$M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{v}} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die inverse Matrix dazu ist

$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ -1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Gemäß Korollar 25.9 besteht die Beziehung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

28.4. **Vielfachheiten und diagonalisierbare Abbildungen.**

Satz 28.12. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann ist φ genau dann diagonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom χ_φ in Linearfaktoren zerfällt und wenn für jede Nullstelle λ mit der algebraischen Vielfachheit μ_λ die Gleichheit

$$\mu_\lambda = \dim\left(\mathrm{Eig}_\lambda(\varphi)\right)$$

gilt.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Das Produkt von zwei Diagonalmatrizen ist natürlich wieder eine Diagonalmatrix. Das folgende Beispiel zeigt, dass das Produkt von diagonalisierbaren Matrizen nicht diagonalisierbar sein muss.

Beispiel 28.13. Es seien G_1 und G_2 zwei Geraden im $\mathbb{R}^2$ durch den Nullpunkt und es seien φ_1 und φ_2 die Achsenspiegelungen an diesen Achsen. Eine Achsenspiegelung ist stets diagonalisierbar, und zwar sind die Spiegelungsachse und die dazu senkrechte Gerade Eigengeraden (zu den Eigenwerten 1 und -1). Die Hintereinanderschaltung

$$\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1$$

dieser Spiegelungen ist eine Drehung, und zwar ist der Drehwinkel das Doppelte des Winkels zwischen den beiden Achsen. Eine Drehung ist aber nur dann diagonalisierbar, wenn der Drehwinkel 0 oder 180 Grad beträgt. Wenn der Winkel zwischen den Achsen von $0, 90$ Grad verschieden ist, so besitzt ψ keinen Eigenvektor.

28.5. **Trigonalisierbare Abbildungen.**

Definition 28.14. Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ heißt *trigonalisierbar*, wenn sie bezüglich einer geeigneten Basis durch eine obere Dreiecksmatrix beschrieben wird.

Diagonalisierbare lineare Abbildungen sind insbesondere trigonalisierbar. Die Umkehrung gilt nicht, wie Beispiel 28.7 zeigt.

Satz 28.15. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *φ ist trigonalisierbar.*
(2) *Das charakteristische Polynom χ_φ zerfällt in Linearfaktoren.*

Wenn φ trigonalisierbar ist und bezüglich einer Basis durch die Matrix M beschrieben wird, so gibt es eine invertierbare Matrix $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ derart, dass BMB^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Satz 28.16. *Es sei $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ eine quadratische Matrix mit komplexen Einträgen. Dann ist M trigonalisierbar.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 28.15 und dem Fundamentalsatz der Algebra. □

28. Arbeitsblatt

28.1. **Übungsaufgaben.**

Aufgabe 28.1. Berechne das charakteristische Polynom zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28.2. Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$.

Aufgabe 28.3.*

Zeige, dass das charakteristische Polynom zu einer linearen Abbildung $\varphi : V \to V$ auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V wohldefiniert ist, also unabhängig von der gewählten Basis.

Aufgabe 28.4. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Zeige, dass für jedes $\lambda \in K$ die Beziehung

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda E_n - M)$$

gilt.[56]

Aufgabe 28.5. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Wie findet man die Determinante von M im charakteristischen Polynom χ_M wieder?

[56]Die Hauptschwierigkeit bei dieser Aufgabe ist vermutlich zu erkennen, dass man hier wirklich was zeigen muss.

Aufgabe 28.6. Zeige, dass das charakteristische Polynom der sogenannten *Begleitmatrix*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

gleich

$$\chi_M = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

ist.

Aufgabe 28.7.*

Wir betrachten die reelle Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme

$$M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für $n = 1, 2, 3, 4$.

b) Sei

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} := M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Erstelle eine Beziehung zwischen den Folgen x_n und y_n und Rekursionsformeln für diese Folgen.

c) Bestimme die Eigenwerte und die Eigenvektoren zu M.

Aufgabe 28.8.*

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Bestimme das charakteristische Polynom von M.
(2) Bestimme eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms von M und klammere den entsprechenden Linearfaktor aus.
(3) Begründe, dass das charakteristische Polynom von M zumindest zwei reelle Nullstellen hat.

Aufgabe 28.9.*

Es sei λ eine Nullstelle des Polynoms

$$X^3 + 2X^2 - 2\,.$$

Zeige, dass

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{(1+\lambda)^3} \\ \frac{1}{(1+\lambda)^2} \\ \frac{1}{(1+\lambda)} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor der Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert λ ist.

Zur Lösung der folgenden Aufgabe ist neben den beiden vorstehenden Aufgaben auch Aufgabe 24.30 hilfreich.

Aufgabe 28.10. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi \colon \mathbb{R}^4_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}^4_{\geq 0},$$

die einem Vierertupel (a, b, c, d) das Vierertupel

$$(|b-a|\,, |c-b|\,, |d-c|\,, |a-d|)$$

zuordnet. Zeige, dass es Zahlentupel (a, b, c, d) gibt, für die bei beliebig vielen Iterationen der Abbildung nie das Nulltupel erreicht wird.

Aufgabe 28.11.*

Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume der durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ v \longmapsto Mv.$$

Aufgabe 28.12.*
Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3,$$

die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2+\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 0 & 0 & -1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

a) Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

b) Berechne zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

c) Stelle die Matrix für φ bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren auf.

Aufgabe 28.13. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})\,.$$

Berechne:

(1) die Eigenwerte von A;
(2) die zugehörigen Eigenräume;
(3) die geometrische und algebraische Vielfachheit der einzelnen Eigenwerte;
(4) eine Matrix $C \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ derart, dass $C^{-1}AC$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 28.14. Bestimme den Eigenraum und die geometrische Vielfachheit zu -2 zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28.15.*
Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 28.16.*

Es sei

$$M \in \mathrm{Mat}_n(K)$$

eine Matrix mit n (paarweise) verschiedenen Eigenwerten. Zeige, dass die Determinante von M das Produkt der Eigenwerte ist.

Aufgabe 28.17. Es sei K ein Körper, $a \in K$ und $m, n \in \mathbb{N}_+$ mit $1 \leq m \leq n$. Man gebe Beispiele für $n \times n$-Matrizen M derart, dass a ein Eigenwert zu M ist mit der algebraischen Vielfachheit n und der geometrischen Vielfachheit m.

Aufgabe 28.18.*

Bestimme, welche der folgenden elementargeormetrischen Abbildungen linear, welche diagonalisierbar und welche trigonalisierbar sind.

(1) Die Achsenspiegelung durch die durch $4x - 7y = 0$ gegebene Achse.
(2) Die Verschiebung um den Vektor $(5, -3)$.
(3) Die Drehung um 30 Grad gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung.
(4) Die Punktspiegelung mit dem Punkt $(1, 0)$ als Zentrum.

Aufgabe 28.19. Bestimme, ob die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar ist oder nicht.

Aufgabe 28.20. Eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

werde bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Finde eine Basis, bezüglich der φ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Die nächsten Aufgaben verwenden die folgende Definition.

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt ein Untervektorraum $U \subseteq V$ φ- *invariant*
, wenn

$$\varphi(U) \subseteq U$$

gilt.

Aufgabe 28.21. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige folgende Eigenschaften.

(1) Der Nullraum $0 \subseteq V$ ist φ-invariant.
(2) V ist φ-invariant.
(3) Eigenräume sind φ-invariant.
(4) Seien $U_1, U_2 \subseteq V$ φ-invariante Unterräume. Dann sind auch $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ φ-invariant.
(5) Sei $U \subseteq V$ ein φ-invarianter Unterraum. Dann sind auch der Bildraum $\varphi(U)$ und der Urbildraum $\varphi^{-1}(U)$ φ-invariant.

Aufgabe 28.22. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $v \in V$. Zeige, dass der kleinste φ-invariante Unterraum von V, der v enthält, gleich

$$\langle \varphi^n(v),\, n \in \mathbb{N} \rangle$$

ist.

Aufgabe 28.23.*

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass die durch

$$U = \{ v \in V \mid \text{ es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \varphi^n(v) = 0 \}$$

definierte Teilmenge von V ein φ-invarianter Unterraum ist.

Aufgabe 28.24. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, bezüglich der die Matrix zur linearen Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine obere Dreiecksmatrix sei. Zeige, dass die erzeugten Untervektorräume

$$\langle v_1, \ldots, v_i \rangle$$

φ-invariant für jedes i sind.

Aufgabe 28.25.*

Bestimme, ob die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar ist oder nicht.

28.2. **Aufgaben zum Abgeben.**

Aufgabe 28.26. (2 Punkte)

Berechne das charakteristische Polynom zur Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 8 & 5 \\ 4 & 7 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28.27. (3 Punkte)

Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$.

Aufgabe 28.28. (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ mindestens einen Eigenvektor besitzt.

Aufgabe 28.29. (4 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Berechne:

(1) die Eigenwerte von A;
(2) die zugehörigen Eigenräume;
(3) die geometrische und algebraische Vielfachheit der einzelnen Eigenwerte;
(4) eine Matrix $C \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ derart, dass $C^{-1}AC$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 28.30. (4 Punkte)

Bestimme für jedes $\lambda \in \mathbb{Q}$ die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten für die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28.31. (4 Punkte)

Entscheide, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 8 \\ 6 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ trigonalisierbar ist.

Aufgabe 28.32. (3 Punkte)

Bestimme, ob die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar ist oder nicht.

Abbildungsverzeichnis