高等混合算學

上卷

美國梧兹　巴雷原著

長沙易俊元譯述

商務印書館發行

A COURSE IN MATHEMATICS

VOLUME I

By

WOODS AND BAILEY

Translated by

I TSÜN YÜAN

1st ed., Dec., 1925 2d ed., Oct., 1926

Price: $2.80, postage extra

THE COMMERCIAL PRESS, LIMITED

SHANGHAI, CHINA

中華民國十四年十二月初版
中華民國十五年十月再版

◎(高等混合算學二冊)
(上卷定價大洋貳元捌角)
(外埠酌加運費滙費)

原著者 美國梧・茲 美國巴雷
譯述者 長沙易俊元
發行者 商務印書館
印刷所 上海北河南路北首寶山路 商務印書館
總發行所 上海棋盤街中市 商務印書館
分售處 北京 天津 保定 奉天 吉林 龍江 濟南 太原 開封 西安 南京 杭州 蘭谿 安慶 蕪湖 南昌 九江 漢口 長沙 常德 衡州 成都 重慶 廈門 福州 廣州 潮州 香港 梧州 雲南 貴陽 張家口 新嘉坡 商務印書分館

二九七〇自

高等混合算學

上卷目錄

第一章 消去法

第二章 圖解

第三章　一次多項式

第四章　n 次多項式

第五章　多項式之微係數

第六章　數種函數及其圖形

第七章　數種曲線及其方程式

第八章 相交曲線

第九章 代數函數之微分法

第十章 坐標軸之變換

第十一章 二次方程式之通論

第十二章　切線對極線及二次曲線之直徑

第十三章　越函數

第十四章 曲線之通徑表示

第十五章　極坐標

第十六章 曲率

例言

一、本書原著者爲美國麻省理工大學算學教授梧兹(Woods)巴雷(Bailey)二氏.係取高等代數解析幾何微積分微分方程式數種混合編成.其編制惟取貫串.不限畛域.爲最近算學界中不可多得之作.至於圖例宏富.述理明顯.尤合於大多數學者之心理.

一、本書分上下兩卷.上卷爲高等代數平面解析幾何及微分.下卷爲積分立體解析幾何及微分方程式.惟亦無截然之界限可尋.一依學者之程度及教材之關係而定.大概上卷可分爲六段.(1)消去法及行列式(2)函數之圖解.(3)代數多項式.(4)代數多項式之通論.(5)越函數.(6)曲綫之通徑表示極坐標曲率.下卷約可分爲三段.(1)含一變數之函數之積分法.(2)含二以上之變數之函數.(3)級數複數微分方程式.

一、原書期合於工科大學之用.故對於應用問題較他書爲詳.圖例尤多.

一、本書倉卒付梓.譯者自知難免錯誤.尙祈海內博學諸君有以教之.

一、譯者對於本書之成.得摯友郭君鍾富之襄助不少.附識於此.以致感謝.

長沙易俊元識

高等混合算學上卷

第一章　消去法

1. 行列式之記法 (*Determinant Notation*)　消去法爲從二元或二元以上諸方程式中.得一個或數個含未知數較少之方程式.所移去之量.名爲被其消去.凡解方程式之要義.即在於消去所有之未知數.而僅存其一.今由消去法.可導諸未知數之係數以組成某種之式.因而得一特殊之名稱及其相當之記法.此章專就一次方程式而論.在此種方程式中.均無含多於一元及高於一次之項者.

例 1.
$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1&=0,\\ a_2x+b_2y+c_2&=0. \end{aligned} \tag{1}$$

欲消去 y. 可先以 b_2 乘第一式.再以 $-b_1$ 乘第二式加之.如欲消去 x. 當先以 $-a_2$ 乘第一式.再以 a_1 乘第二式加之.結果爲

$$\begin{aligned} (a_1b_2-a_2b_1)x+(c_1b_2-c_2b_1)&=0,\\ (a_1b_2-a_2b_1)y+(a_1c_2-a_2c_1)&=0. \end{aligned} \tag{2}$$

除非 $a_1b_2-a_2b_1=0$. 方程式(2)即爲(1)之解答.惟如 $a_1b_2-a_2b_1=0$. 則用此法消去 y. 同時亦消去 x. 此當另行討論.見下第六節中.

例 2.
$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z+d_1&=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2&=0,\\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3&=0. \end{aligned} \tag{1}$$

欲消去 y 與 z.可先以$(b_2c_3-b_3c_2)$乘第一式.以$-(b_1c_3-b_3c_1)$乘第二式.以$(b_1c_2-b_2c_1)$乘第三式.再求其和.結果爲

$$[a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)]x$$
$$+[d_1(b_2c_3-b_3c_2)-d_2(b_1c_3-b_3c_1)+d_3(b_1c_2-b_2c_1)]=0,$$

或 $$(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1)x$$
$$+(d_1b_2c_3+d_2b_3c_1+d_3b_1c_2-d_1b_3c_2-d_2b_1c_3-d_3b_2c_1)=0. \qquad (2)$$

欲消去 x 與 z.可先以$-(a_2c_3-a_3c_2)$乘第一式.以$(a_1c_3-a_3c_1)$乘第二式.以$-(a_1c_2-a_2c_1)$乘第三式.再求其和.結果爲

$$(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1)y$$
$$+(a_1d_2c_3+a_2d_3c_1+a_3d_1c_2-a_1d_3c_2-a_2d_1c_3-a_3d_2c_1)=0. \qquad (3)$$

欲消去 x 與 y.可先以$(a_2b_3-a_3b_2)$乘第一式.以$-(a_1b_3-a_3b_1)$乘第二式.以$(a_1b_2-a_2b_1)$乘第三式.再求其和.結果爲

$$(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1)z$$
$$+(a_1b_2d_3+a_2b_3d_1+a_3b_1d_2-a_1b_3d_2-a_2b_1d_3-a_3b_2d_1)=0. \qquad (4)$$

除$a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1=0$.則方程式(2)(3)(4)卽爲(1)之解答.此式之例外.亦於第六節中論之.

解例 1 所得之二項式.名爲二次行列式.記號如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

卽用以表示行列式$a_1b_2-a_2b_1$.故例 1 之方程式可書爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=0.$$

解例 2 所得之多項式.名爲三次行列式.記號如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

即用以表示 $a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$.故例 2 之方程式可書爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x+\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y+\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} z+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}=0.$$

由例 2 得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

此即可用作三次行列式之定義.

同樣四次行列式以記號表之爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

此式爲等於

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}-a_4\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

設將以上諸三次行列式均展爲二次行列式.則凡四次行列式.共可得二十四項之代數多項式.

2. 凡 n 次行列式.通常爲含 n^2 量之代數多項式.此等之量.均名爲原素(*Elements*).行列式之記號.爲將所有之原素.列成一 n 行與 n 列之正方形.設在此記號中.省去其一行及一列.則成爲較原式低一次之行列式.此新成之行列式.名爲相當於原式被省去之行列交界處之原素之小行列式(*Minor*).今述之爲定義如次.

行列式之值.等於其第一行諸原素與其相當小行列式之乘積之代數和.乘積之符號爲正負相間.

以此定義再用之於其小行列式.最後可使任一行列式之值.全根據於若干二次行列式.由此可得其多項式.

學者如欲得行列式之普通定義及其詳論.可於專論此式之書中求之.今於此卷僅述其用於解方程式之性質.惟當未述其性質之先.須知行列式中行與列可互相交換.例如以上之定義.亦可云

行列式之值.等於其第一列諸原素.與其相當小行列式之乘積之代數和.乘積之符號爲正負相間.

於三次行列式.學者可自證明

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

以上既知其對於三次行列式爲眞.則對於四次行列式卽可證之如次.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

(依定義)

$$\begin{aligned} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} &- a_2\left\{ b_1\begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} - c_1\begin{vmatrix} b_3 & d_3 \\ b_4 & d_4 \end{vmatrix} + d_1\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_4 & c_4 \end{vmatrix} \right\} \\ &+ a_3\left\{ b_1\begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} - c_1\begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_4 & d_4 \end{vmatrix} + d_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_4 & c_4 \end{vmatrix} \right\} \\ &- a_4\left\{ b_1\begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} - c_1\begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix} + d_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right\} \end{aligned}$$

(已證明)

$$\begin{aligned} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} &- b_1\left\{ a_2\begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_3\begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_4\begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} \right\} \\ &+ c_1\left\{ a_2\begin{vmatrix} b_3 & d_3 \\ b_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_3\begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_4\begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix} \right\} \\ &- d_1\left\{ a_2\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_4 & c_4 \end{vmatrix} - a_3\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_4 & c_4 \end{vmatrix} + a_4\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right\} \end{aligned}$$

(由移置)

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

(依定義)

3. 行列式之性質

1. 行列式中.行與列互相交換.如第一列換爲第一行.第二列換爲第二行.以下依此.而其值不變.

學者可自證明

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

二次及三次行列式既已證明.則四次行列式卽可證之如次.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} - a_4\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

以上二式等號右邊既均相等.故左邊兩四次行列式亦互相等.同樣可證明較高次之行列式.

由此可知凡行列式之性質.對於諸行爲眞.則對於諸列亦必爲眞.反此類推.故以下諸定理.雖僅依行證明.須知行列同時均可適用.

2. 設將兩隣近之行(或列)互相交換.則行列式之符號必變.

學者可自證明

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

今由此可證明四次行列式.依定義得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_3 & c_3 & d_3 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

取此二式比較.可知a_1與a_4(未交換行之原素)之小行列式.在二式中惟交換二隣近之行.而a_2與a_3(交換行之原素)之小行列式.在二式中完全相同.惟立於其前之符號相反.故可證明此定理對於四次行列式亦爲眞.且知此定理如能對於任何次之行列式可適用.則對於較此高一次之行列式亦可適用.今已知其對於三次行列式爲眞.故推之任何次行列式皆眞.

3. 行列式之值.等於其任一行(或列)中諸原素與其相當小行列式之乘積之代數和.其乘積之符號.當按照原素所立之列數與行數之和爲偶數或爲奇數以定爲正或負.

將式中二隣近之行.經過$k-1$次之交換.可將第k行移至第一行.由定理 2.設k爲奇數.則新行列式與原式相等.設k爲偶數.則新行列式與原式異號.今此新行列式可展爲其第一行諸元素與其相當小行列式之乘積之代數和.即與原式第k行毫無差異.故知原式爲等於第k行諸原素與其相當小行列式之乘積之代數和.如k爲奇數.則乘積之符號爲正負相間.如k爲偶數.則乘積之符號爲負正相間.由此可證明以上之定理.

例 $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$= -a_4\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} + b_4\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} - c_4\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} + d_4\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

以上所得之結果.名爲按照第k行諸原素之展開式.在此展開式中.各原素所乘之量.即名爲該原素之係數 (*Coefficient*).

<u>凡原素之係數.按照該原素所立之行數與列數之和爲偶數或爲奇數.而等於其相當之小行列式之正值或負值.</u>

a_1之係數以A_1表之.b_1之係數以B_1表之.其餘類推.

例 $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3 = b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3$$

$$= c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3 = a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1$$

$$= a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2 = a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3.$$

4. 行列式中.取任二行(或列)互相交換.則式之符號必變.

設以行列式按照定理 3 而展開之.取式中未用以展開之任二行互相交換.則展開式中之小行列式.亦必生同樣之交換.故如此定理對於任何次行列式爲眞.則對於其較高一次之行列式亦必爲眞.今由定理 2 得知其對於二次行列式爲眞.故推至於任何次行列式皆眞.

5. 行列式中.如有二行(或二列)完全相同.此式之値爲等於零.

設以此式按照不相同之行而展開之.則展開式中每一小行列式.皆有二行相同.故此定理對於任何次行列式爲眞.則對於其較高一次之行列式.亦必爲眞.今知二次行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_1b_1 - a_1b_1 = 0.$$

故推至於任何次皆眞.

6. 任一行(或列)中各原素.與他行各相當原素之係數之乘積之和等於零.

例 $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 + d_2D_2.$$

設以 a_4, b_4, c_4, d_4 代等號右邊諸項中之 a_2, b_2, c_2, d_2. 則左邊亦必爲同一之代入.即爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_4A_2 + b_4B_2 + c_4C_2 + d_4D_2.$$

由定理 5 知行列式之值為零.故 $a_4A_2+b_4B_2+c_4C_2+d_4D_2=0$.
此為普通之證明.因而得此定理.

7. <u>以任一量乘其一行(或列).與取該量乘行列式相等.</u>

例

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & kc_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & kc_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & kc_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & kc_4 & d_4 \end{vmatrix} = kc_1C_1+kc_2C_2+kc_3C_3+kc_4C_4$$

$$=k(c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3+c_4C_4)$$

$$=k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

8. <u>如取任一行(或列)各原素之某倍數.加於他一行(或列)各相當原素.此行列式之值並不因之而變.</u>

上述以算式表之為

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \tag{1}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1+kd_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2+kd_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3+kd_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4+kd_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

今以 B_1, B_2, B_3, B_4 表(1)式第二列諸原素之係數.則(2)式第二列諸原素之係數仍與(1)式相同.故(2)爲

$$(b_1+kd_1)B_1+(b_2+kd_2)B_2+(b_3+kd_3)B_3+(b_4+kd_4)B_4$$
$$=b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3+b_4B_4+k(d_1B_1+d_2B_2+d_3B_3+d_4B_4).$$

依定理6. k 之係數爲零.其餘各項則等於行列式(1).故(2)=(1).

以上爲普通之證明.如令 $k=1$. 卽爲取某行中各原素.加於他一行中各相當原素.如令 $k=-1$. 卽爲從某行中各原素.減去他行中各相當原素.此定理可用之以化行列式爲簡單.其例如次.

例1.
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -5 & 2 & 5 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

如取(1)式第二列諸原素加於第四列.則爲

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

以此式第一列之二倍加於第二列.則(2)爲

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

再從(3)式第三列減去第一列.則爲

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

將(4)式按照第一行諸原素而展開之.可得

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

例 2.
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

依次由二行互減.可得

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & 0 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 \end{vmatrix}.$$

4.　n 個 n 元一次方程式.當其未知數之係數所成行列式之值非等於零時之解法. 茲推廣第一節解二元及三元一次方程式之法.以應用於任若干一次方程式.其方程式之數.爲與所含之未知數相等.今求簡便起見.卽取四方程式爲例.

設方程式爲

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1w+e_1=0, \tag{1}$$

$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2w+e_2=0, \tag{2}$$

$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3w+e_3=0, \tag{3}$$

$$a_4x+b_4y+c_4z+d_4w+e_4=0. \tag{4}$$

以 D 表未知數 x, y, z, w 之係數所成之行列式.得

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

今以 A_1 表 a_1 之係數. B_1 表 b_1 之係數.其餘類推.由假設 $D\neq 0$.

設以 A_1 乘 (1), A_2 乘 (2), A_3 乘 (3), A_4 乘 (4). 此四式之和.由第三節定理 3 及定理 6. 爲

$$Dx+e_1A_1+e_2A_2+e_3A_3+e_4A_4=0. \tag{5}$$

同樣.以 B_1, B_2, B_3, B_4 爲乘數.可得

$$Dy+e_1B_1+e_2B_2+e_3B_3+e_4B_4=0. \tag{6}$$

以 C_1, C_2, C_3, C_4 爲乘數.可得

$$Dz+e_1C_1+e_2C_2+e_3C_3+e_4C_4=0. \tag{7}$$

以 D_1, D_2, D_3, D_4 爲乘數.可得

$$Dw+e_1D_1+e_2D_2+e_3D_3+e_4D_4=0. \tag{8}$$

由此可知凡 x, y, z, w 之值.如適合於 (1), (2), (3), (4). 亦必適合於 (5), (6), (7), (8).反之.凡適合於 (5), (6), (7), (8) 之值.亦必適合於 (1), (2), (3), (4). 因以 a_1 乘 (5), b_1 乘 (6), c_1 乘 (7), d_1 乘 (8),相加仍得 (1) 也. 同樣亦可由 (5), (6), (7), (8) 求得 (2), (3), (4). 故 (1), (2), (3), (4) 與 (5), (6), (7), (8) 爲全等之方程式.

今

$$e_1A_1+e_2A_2+e_3A_3+e_4A_4=\begin{vmatrix} e_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ e_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ e_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ e_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

$$e_1B_1+e_2B_2+e_3B_3+e_4B_4=\begin{vmatrix} a_1 & e_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & e_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & e_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & e_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

$$e_1C_1+e_2C_2+e_3C_3+e_4C_4=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & e_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & e_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & e_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & e_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

$$e_1D_1+e_2D_2+e_3D_3+e_4D_4=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & e_4 \end{vmatrix}.$$

故(5),(6),(7),(8)之解答爲

$$x=-\frac{\begin{vmatrix} e_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ e_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ e_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ e_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}, \qquad y=-\frac{\begin{vmatrix} a_1 & e_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & e_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & e_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & e_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}},$$

$$z=-\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & e_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & e_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & e_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & e_4 & d_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}, \qquad w=-\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & e_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}},$$

此卽爲 (1),(2),(3),(4) 之惟一解答.由此得一重要定理如次.

凡 n 個 n 元一次方程式.自其未知數之係數所成之行列式非等於零時.其解答有一而限於惟一.

此解答可立時書出.因每一未知數.皆等於一分數式之負值.其分母爲以諸未知數之係數所成之行列式.分子則爲以諸絕對項代此行列式中該未知數諸係數所成之行列式.

例 1.
$$3x+5y-4=0,$$
$$2x-3y+7=0.$$

$$x=-\frac{\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}=-\frac{23}{19}, \qquad y=-\frac{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{29}{19}.$$

例 2.
$$2x-3y+z-1=0,$$
$$4x+5y-2z+2=0,$$
$$x-2y+3z-3=0.$$

$$x=-\frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}=0,\qquad y=-\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}=0,$$

$$z=-\frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}=1.$$

5. n 個一次方程式含多於 n 之未知數 如方程式之數少於所含之未知數.則解答通常爲無限.有時或無解答.此類之普通解法.爲擇取若干未知數.與方程式之數相等.且視其係數所成之行列式非等於零.而暫視其餘之未知數爲已知.依第四節之法解之.

例 1.
$$2x+3y+z+4=0,$$
$$x-2y+3z+2=0.$$

如取 x 與 y 爲未知數.得

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-7.$$

依第四節之法解之.得

$$x=-\frac{\begin{vmatrix} z+4 & 3 \\ 3z+2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}=-\frac{11}{7}z-2,$$

$$y=-\frac{\begin{vmatrix} 2 & z+4 \\ 1 & 3z+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{5}{7}z.$$

因 z 爲任意之値.故以上二式之解答無限.

例 2.　$2x+3y+z+4=0,$

$2x+3y+2z+3=0.$

如取 x 與 y 爲未知數.則

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

如取 y 與 z 爲未知數.則

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=3.$$

其解答爲　$y=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3},$

$z=1.$

設如不能擇取未知數令其係數所成之行列式非等於零.則諸方程式卽無解答.其討論不在本書範圍以內.學者惟知其應用足矣.

例 3. $$2x+3y+z+4=0,$$
$$2x+3y+z+3=0.$$

以上任取二未知數.其係數所成之行列式皆等於零.若從第一式減去第二式得$1=0$.可表示此二式互爲矛盾.

6. n 個 n 元一次方程式.當其未知數之係數所成之行列式爲等於零時之解法. 從第四節(1),(2),(3),(4)諸方程式中.假設$D=0$.設依第四節之解法.則(5),(6),(7),(8)諸式皆不再含未知數.此種方程式大率皆爲矛盾式.故(1),(2),(3),(4)通常無解答.

例 1. $$x-y+z+3=0,$$
$$2x+y+3z+1=0,$$
$$x+2y+2z+4=0.$$
$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

依第四節之法.消去 y 與 z.得$0x-24=0$爲不合理.故以上諸方程式無解答.

如$D=0$.而(5),(6),(7),(8)所有諸行列式亦皆等於零.則每方程式皆成$0=0$.似與(1),(2),(3),(4)之解答無關.實則此處之(1),(2),(3),(4)常有無限之解答.有時或全無解答.關於此種之通論太繁.不載於此.今惟述其定理如次.

凡一組 n 元一次方程式.設其未知數之係數所成之行列式爲等於零.則諸方程式常無解答.有時亦可得解答無限.

於實用上.此 n 個方程式中.常有一個可暫置勿用.其餘$(n-1)$方程式所含之 n 未知數.可依第五節之法解之.如能得一解答.再代其結果於其餘之方程式以驗其是否適合.

例 2. $$2x-3y+z-1=0,$$
$$x-2y+3z+4=0,$$
$$7x-11y+6z+1=0.$$

如依第四節之法解之.則得 $0=0$. 今從前二式求 x 與 y. 可得
$$x=7z+14,$$
$$y=5z+9.$$

所得之結果.代入第三式中亦相適合.惟因 z 之值爲不定.故諸方程式之解答無限.

7. 一次方程式之羣.其方程式之數多於所含之未知數. 設此等方程式均爲一次.則通常諸未知數之值.不能完全適合於所有之方程式.如必欲其可能.此等未知數之值.必須與方程式中諸係數有關.欲求此種關係.可先取若干方程式等於所含之未知數而解之.次取其解答代入其餘之方程式.如屬適合.則其結果必爲諸未知數之係數所成之行列式等於零.

此類之重要者爲 $(n+1)$ 方程式而含 n 未知數.例如
$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0,$$
$$a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0.$$

如 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$, 則前三式之解答由第四節爲

$$x=-\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},$$

$$y=-\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},$$

$$z=-\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

代此諸值於第四式方程式中.得

$$\frac{-a_4\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}+b_4\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}-c_4\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}+d_4\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

由第三節定理 3.上式卽爲

$$\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

故欲諸未知數之值與第四式適合.其要件爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}=0.$$

推廣至任若干變數.可得一定理如次.

<u>於含 n 未知數之 $(n+1)$ 個方程式中.欲求一普通解答.則諸未知數之係數及諸絕對項所成之行列式必須爲零.</u>

例 1.
$$x+y+z-2=0,$$
$$2x+y-z+3=0,$$
$$x-2y-3z+4=0,$$
$$5x-3y-4z+1=0.$$

因
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 4 \\ 5 & -3 & -4 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

此可表示如前三式有一解答.則其結果必與第四式適合.實地解之.可得 $x=1,\quad y=-2,\quad z=3.$

以上所述定理之逆不必爲眞.此處所證明者.爲 n 方程式若有一解答.則其結果可適合於第 $(n+1)$ 方程式如其行列式之值爲零.惟於諸矛盾方程式其行列式亦可爲零.故宜注意.

例 2.
$$2x-3y+z+1=0,$$
$$2x-3y+5z+2=0,$$
$$2x-3y-6z-3=0,$$
$$2x-3y+2z-8=0.$$

因
$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & -6 & -3 \\ 2 & -3 & 2 & -8 \end{vmatrix}=0.$$

惟由第六節之法.可知任取三方程式無不互爲矛盾.

8. 一次調和方程式(*Linear harmogeneous equations*)

方程式中.各項之未知數之指數和皆相同者.名曰調和方程式.一次調和方程式.卽式中各項僅含一未知數且均爲一次也.例如

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0.$$

此式中 x_1, x_2, x_3, x_4 均爲未知數.而 a_1, a_2, a_3, a_4 爲常數.

如令 $x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=0$.當然可與上式適合.惟此解答頗不關重要.凡在此類方程式中.其要務爲求諸未知數之比.因如以同一之值乘各未知數.則方程式仍未變也.若令

$$\frac{x_1}{x_4}=x, \qquad \frac{x_2}{x_4}=y, \qquad \frac{x_3}{x_4}=z.$$

可將以上之調和方程式變成非調和方程式

$$a_1x+a_2y+a_3z+a_4=0.$$

依此可知凡含 n 元之調和方程式.若以式中任一未知數除其各項.其結果常爲含 $(n-1)$ 未知數之非調和方程式.惟有時其用以除原方程式之未知數亦可爲零.似此則無意義.故解調和方程式之法.與解非調和方程式之法稍有變更.其例如下.

例 1.
$$\begin{aligned} &a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0, \\ &b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=0, \\ &c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4=0. \end{aligned} \tag{1}$$

今暫視上式中 x_1, x_2, x_3 爲未知數.依第四節之法解之.得

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_4x_4 & a_2 & a_3 \\ b_4x_4 & b_2 & b_3 \\ c_4x_4 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_4x_4 & a_3 \\ b_1 & b_4x_4 & b_3 \\ c_1 & c_4x_4 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4x_4 \\ b_1 & b_2 & b_4x_4 \\ c_1 & c_2 & c_4x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

即

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} a_4 & a_2 & a_3 \\ b_4 & b_2 & b_3 \\ c_4 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} x_4 = 0, \tag{2}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} x_2 - \begin{vmatrix} a_1 & a_4 & a_3 \\ b_1 & b_4 & b_3 \\ c_1 & c_4 & c_3 \end{vmatrix} x_4 = 0, \tag{3}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} x_4 = 0. \tag{4}$$

由此得

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

設此式中有一個或數個(惟非全體)行列式爲零.其相當之未知數亦必爲零.例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} = 0.$$

而他行列式皆非爲零.則由(3)與(4)可知 $x_2=0$, $x_3=0$. 而由(2)可知 x_1 與 x_4 之比.與(5)式相同.

設於(5)式中所有之行列式俱爲零.則諸未知數卽不能決定.似此宜先解前二式得任二未知數.再代其結果於其餘一式試之.

矛盾方程式.在此常不能成立.學者可取二矛盾方程式

$$2x-3y+4=0,$$

$$2x-3y-2=0.$$

與二調和方程式

$$2x_1-3x_2+4x_3=0,$$

$$2x_1-3x_2-2x_3=0.$$

相比較.從第一調和方程式中減去第二式.得 $6x_3=0$. 故 $x_3=0$.而 $x_1:x_2=3:2$.

例 2.
$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0,$$

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=0,$$

$$c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4=0,$$

$$d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3+d_4x_4=0.$$

以上四式之普通解答爲 $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$. 若欲求其可與諸未知數之同比相適合.則必須

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}=0.$$

證明與第七節相同.故所求之要件已足.因於第七節已證明如三方程式有一解答.則亦可與第四式適合.今由上述三調和方程式常有一解答也.

9. 消去式(*Eliminant*) 從二個或二個以上之方程式中.消去所有之未知數.結果可得一方程式.其等號左邊諸項.名爲原方程式之消去式或歸結式(*Resultant*).下述數種均屬重要.

1. 含 n 未知數之 $(n+1)$ 個非調和方程式. 如欲消去其未知數.可取 n 方程式解之.再代其結果於其餘之一式.方法與第七節相同.卽爲

凡含 n 未知數之 $(n+1)$ 個非調和方程式之消去式.等於諸係數與諸絕對項之行列式.

2. 含 n 未知數之 n 個調和方程式. 如欲消去其未知數.可先取 $(n+1)$ 個方程式解之.得其諸未知數之比.再代入其餘一式.方法與第八節相同.卽爲

凡含 n 未知數之 n 個調和方程式之消去式.等於諸係數之行列式.

3. 二方程式中.惟含一未知數. 設由以下二式中消去 x.

$$a_1x^2+b_1x+c_1=0, \tag{1}$$

$$a_2x^2+b_2x+c_2=0. \tag{2}$$

以 x 乘上式各項.得

$$a_1x^3+b_1x^2+c_1x=0, \tag{3}$$

$$a_2x^3+b_2x^2+c_2x=0. \tag{4}$$

此四方程式均可視爲含 x^3, x^2, x 三未知數之一次方程式.由本節 1.得其消去式爲

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \end{vmatrix}=0. \tag{5}$$

故(1)與(2)如有一共通解答.則(5)式常眞.反之.如(5)爲眞.則(1)與(2)有一共通解答.

上述之法.可用於任何次方程式.名曰　雪維斯特　消去法.(*Sylvester's method of eliminantion*).其法爲以 x 之依次乘冪乘諸方程式.至於所有之方程式較之 x 之乘冪多一爲止.其消去式與 1 相同.

此法亦可用於含二未知數之二方程式中消去一未知數.

問　　題

求下列諸行列式之值.

1. $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$.　**2.** $\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix}$.　**3.** $\begin{vmatrix} x & 1 \\ x^2 & 1 \end{vmatrix}$.　**4.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 4 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$.　**6.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.　**7.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$.　**9.** $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$.　**10.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. **12.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. **13.** $\begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \end{vmatrix}$.

試證以下之關係.

14. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix}=0.$ **15.** $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$

16. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & b \\ x & y & 1 & z & u \\ c & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=(ad-bc)^2.$

17. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. **18.** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}=xyz\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}=(x-y)(y-z)(z-x)$

20. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$.

21. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 6 & -8 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -6 & -3 & 4 \\ 3 & 8 & 4 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$

22. $\begin{vmatrix} a_1+d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

23. $\begin{vmatrix} a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 2a_2 & a_3 \\ a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 \end{vmatrix}$

$$= a_0\left\{a_0^2a_3^2 - 3a_1^2a_2^2 - 6a_0a_1a_2a_3 + 4a_0a_2^3 + 4a_1^3a_3\right\}.$$

解以下諸方程式.

24. $\begin{vmatrix} 4-x & 3 \\ 3 & 9-x \end{vmatrix} = 0.$　　**25.** $\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 2 & 3-x & 5 \\ 3 & 5 & 8-x \end{vmatrix} = 0.$

展開下列諸方程式.

26. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$　　**27.** $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

28. $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 13 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0.$

29. $\begin{vmatrix} a-x & h \\ h & b-x \end{vmatrix}=0.$

30. $\begin{vmatrix} a-x & h & g \\ h & b-x & f \\ g & f & c-x \end{vmatrix}=0.$

解以下諸方程式.

31. $4x-5y+6=0,$
$7x-9y+11=0.$

32. $x+2y-z+3=0,$
$2x-y-5=0,$
$x+2z-8=0.$

33. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1,$
$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2,$
$\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=4.$

34. $2x+4y+3z-2=0,$
$x-5y+z+1=0,$
$3x+10y+5z-5=0.$

35. $2x+y+z+2=0,$
$5x+2y+3z+5=0,$
$2x+3y-2z+2=0.$

36. $x+y+9z-7=0,$
$5x-y+9z-5=0,$
$3x-y+3z-2=0.$

37. $10x-3y+12z-5=0,$
$4x-y+6z-3=0,$
$5x-2y+3z=0.$

38. $x+y+z=a,$
$y+z+w=b,$
$z+w+x=c,$
$w+x+y=d.$

39. $10x_1+4x_2+5x_3=0,$
$3x_1+x_2+2x_3=0.$

40. $x_1+5x_2+3x_3=0,$
$3x_1+3x_2+x_3=0.$

41. $2x_1+4x_2+x_3=0,$
$3x_1+6x_2-x_3=0.$

42. $2x_1+x_2-5x_3+x_4=0,$
$3x_1-2x_2-4x_3-2x_4=0,$
$x_1+x_2+2x_3-x_4=0.$

43. $2x_1-3x_2+2x_3-3x_4=0,$
$4x_1+5x_2+4x_3-6x_4=0,$
$3x_1-7x_2-2x_3+3x_4=0.$

44. $7x_1-5x_2+3x_3-4x_4=0,$
$3x_1+2x_2-5x_3+9x_4=0.$
$5x_1-16x_2+21x_3-35x_4=0.$

求以下每組方程式是否有共通解答.

45. $2x-y+3=0,$
$3x+y-1=0,$
$3x-4y+10=0.$

46. $5x-2y+7=0,$
$3x-y+6=0,$
$x+3y-1=0.$

47. $x-2y+3z-1=0,$
$2x+y-z+1=0,$
$x-3y+2z+2=0,$
$x-19y+22z-4=0.$

48. $x-2y+1=0,$
$y-2z+2=0,$
$z-2x+3=0,$
$x+y+z=0.$

49. 下式所含之 a 應以何值為相稱.

$$x+a^2y+a=0,$$
$$ax+y+a^2=0,$$
$$a^2x+ay+1=0.$$

50. 消去以下二式中之 x.

$$xy+3x+1=0,$$
$$2xy-4y+2=0.$$

51. 消去以下二式中之 x.

$$xy^2+2y+3=0,$$

$$xy\ +4x+1=0.$$

52. 消去以下二式中之 x 及 z.

$$xy+yz-x+z+2=0,$$

$$xy-2x+y+z+2=0,$$

$$x+3z-2=0.$$

53. 求以下二方程式有一公共根之要件.

$$ax^2+bx+c=0,$$

$$x^2=1.$$

54. 證明 $ax^2+bx+c=0$ 及 $x^3=1$ 有一公共根之要件爲

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=0.$$

55. 設

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0,$$

$$a_3x+b_3y+c_3=0,$$

有一公共解答,則常可得 l, k, m 三數如

$$a_1l+a_2k+a_3m=0,$$

$$b_1l+b_2k+b_3m=0,$$

$$c_1l+c_2k+c_3m=0.$$

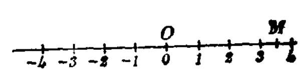
第二章 圖解

10. 實數(*Real number*) 數學爲討論各種數目之科學.數中最簡單者爲正整數.凡正整數可互加或互乘.所得仍爲正整數.惟不能取任一數除之或從一較小之數減去一較大者.今欲求除法常爲可能.必有所謂分數.分數者.一整數爲他一整數所除之商也.欲求減法常爲可能.則有負數之觀念發生.統括正負整數及分數.名爲有理數(*Rational number*).有理數可互相加減乘除.所得恆不出有理數之外.

今由開方之法.可得兩種新數.一爲無理數(*Irrational number*).例如$\sqrt{2}$.一爲複數(*Complex number*).例如$\sqrt{-2}$.複數當於第十二節中再行討論.今專論無理數.無理數之定義.可云係一種之數而不能用整數或分數以表之者.惟可求其近似之値.最簡當之例.卽爲諸有理數之平方根.例如$\sqrt{7}$可以$\frac{264}{100}$, $\frac{26457}{10000}$諸式表之.然究不能完全與之適合.然亦有非有理數之方根而不能用根號表示之者.常見之例.爲$\pi=3.14159\cdots$.凡無理數可爲正亦可爲負.合有理數及無理數.統名實數.

實數可以圖形表之如次.

於任一直綫上取一點O爲零點.定其一端爲正.他端爲負.如直綫爲水平(第一圖).則常取點之右端爲正.左端爲負.此圖上任一點M.卽表示一實數.其數値卽爲自O至M之距離.當M在O之右.其値爲正.在O之左爲負.反之.能於圖上表示某一實數之點.有一而限於一.



第一圖

11. 零與無窮大(*Zero and infinity*) 今有兩種數學上之意義.雖包括於數目之內.然常須特殊之運算.其一爲零.記號以 0 表之.其一爲無窮大.記號以 ∞ 表之.

從一量中減去與之相等之他一量.其結果卽爲零.例如 $a-a=0$.此處零之意義.等於無物.故零在演算之時.常不發生關係.因在各種計算.皆須有量之存在也.在文字上觀之.凡 $a\times 0,\frac{0}{a},\frac{a}{0}$,皆無意義.實則其意義可表之如次.

取 ax, $\frac{x}{a},\frac{a}{x}$ 三數.令 x 之值漸次減小而近於零.則如 x 降至極小.ax 及 $\frac{x}{a}$ 亦必小至不可名狀.同時 $\frac{a}{x}$ 則增至無限.故前兩者之結果.以式表之爲 $a\times 0=0$ 及 $\frac{0}{a}=0$.後者亦可用式表之.惟須具一無窮大之意義.無窮大者.一不定之量增加或減小以至於其絕對值大於任何數值也.故後者以式表之當爲 $\frac{a}{0}=\infty$.其意義卽爲當一分數之分母漸次減小而近於零.此分數之值因之增大至於超越任何可名之數量.

$a\times\infty,\frac{a}{\infty},\frac{\infty}{a}$ 三種.在文字上觀之.亦無意義.然設書爲 $ax,\frac{a}{x},\frac{x}{a}$ 之形.令 x 之值增至無限而視其結果.則易知爲

$$a\times\infty=\infty,\quad \frac{a}{\infty}=0,\quad \frac{\infty}{a}=\infty,$$

此外尙有 $\frac{0}{0}$ 及 $\frac{\infty}{\infty}$ 兩種.於演算中亦常遇之.此爲一分數式 $\frac{x}{y}$.其分子與分母之值.同時減小以達於零.或同時增大以至於無限.如欲定此分數之值.當先知限制此 x 與 y 之某種定律.此兩種均稱爲未定式.於下卷中當詳論之.

零與無窮大.均無代數上之符號.有時某量之值漸增且恆爲正.此可謂之 $+\infty$.有時某量之絕對值雖增惟恆爲負.此可謂之 $-\infty$.然通常凡無窮大之符號皆不明瞭.例如使一鈍角漸次減小以至於 $90°$.則其正切爲 $-\infty$.設使一銳角漸次增大以至於 $90°$.則其正切爲 $+\infty$.故可云 $\tan 90° = \infty$.而不能附加正負符號.

零無正負符號.理與上同.

12. 複數(*Complex number*) 設吾人僅限於應用實數.如第十節所云.則有時對於開方常不能演算.因各負數之偶次方根皆非實數也.故欲使代數上所有各種之演算皆爲可能.必有一新數名爲複數者發生.複數在本書上卷應用極少.今略述其大要.其詳細之討論.當於下卷中見之.

虛數之單位爲 $\sqrt{-1}$.通常以 i 表之.故得

$$i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \qquad i^4 = 1, \qquad i^5 = i, \qquad i^6 = -1.$$

通常令 k 爲零或任何整數.可由上式得

$$i^{4k} = 1, \qquad i^{4k+1} = i, \qquad i^{4k+2} = -1, \qquad i^{4k+3} = -i.$$

設 b 爲任一實數.則 bi 之乘積即名爲純虛數(*Pure imaginary number*).凡任一負數之平方根皆爲純虛數.例如

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i, \qquad \sqrt{-5} = \sqrt{5}\ \sqrt{-1} = i\sqrt{5}.$$

設 a, b 均爲任何實數.其結合如 $a+bi$ 之形.即名爲複虛數(*Complex imaginary number*).或省稱複數.如 $a=0$.則複數成爲純虛數.如 $b=0$.則複數成爲實數.如同時 $a=0$, $b=0$.則複數 $a+bi=0$.反之.如 $a+bi=0$.則 a 與 b 亦皆爲零.

複數之演算.皆依通常代數上之法則.而以上式所定諸值代 i 之累次方.

例 1.　$\sqrt{-3}\times\sqrt{-2}=i\sqrt{3}\times i\sqrt{2}=i^2\sqrt{6}=-\sqrt{6}.$

例 2.　$\dfrac{3+\sqrt{-4}}{2-\sqrt{-4}}=\dfrac{3+2i}{2-2i}\times\dfrac{2+2i}{2+2i}=\dfrac{6+10i+4i^2}{4-4i^2}=\dfrac{1+5\sqrt{-1}}{4}.$

二複數如 $a+bi$ 及 $a-bi$. 名爲共軛複數 (*Conjugate complex numbers*).凡共軛複數之乘積均爲實數.例如

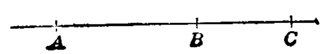
$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

複數在第十節之圖中不能表示.

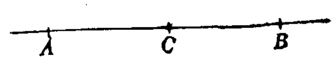
13. 一直綫上諸綫分之和　連結兩點 A, B 成一直綫.在初等幾何學上觀之.惟視其綫之位置及長短.既可稱之爲 AB.亦可稱之爲 BA.毫不發生差異.惟以下所述.則對於綫之方向同時亦佔重要.設其方向爲自 A 達 B.則此綫卽名爲 AB.設爲自 B 達 A.則此綫名 BA.其 AB 與 BA 之差別.與代數上之 $+a$ 及 $-a$ 相同.

在一直綫上取二綫分 AB 及 BC.令 B 之位置爲第一綫分之終點及第二綫分之始點.則綫分 AC 卽爲 AB 與 BC 之和.其式如下.

$$AB+BC=AC \qquad (1)$$



第　二　圖



第　三　圖

此式不僅對於第二圖爲眞.卽在於第三圖亦爲適合.因此處之 BC 與 AB 之方向相反.消去其一部仍得 AC.

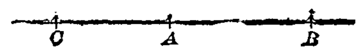
設將第三圖 C 之位置移向 A.則其和 AC 漸次減小.終至於 C 與 A 相重合.得

$$AB+BA=0$$

或　$$AB=-BA \qquad (2)$$

於第四圖 C 爲在 A 之左.仍爲 $AB+BC=AC$. 由(2)得 $AC=-CA$. 將(1)式移項.可得一減法之範式.

即　　$BC=AC-AB$　　(3)



第四圖

此式常眞.因(1)式爲眞也.

以上所得之結果.當應用於諸綫分時頗關重要.因於第十節之圖中.設 x 爲任一數值與圖上 M 點相合.則常可令 $x=OM$. 如 x 及 OM 均在 O 之右卽皆爲正.在 O 之左卽皆爲負.今設取任意二點 M_1 及 M_2. 使 $x_1=OM_1$, $x_2=OM_2$. 可得

$$M_1M_2=OM_2-OM_1=x_2-x_1.$$

$$M_2M_1=OM_1-OM_2=x_1-x_2=-M_1M_2.$$

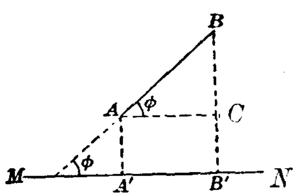
由此可知 M_2 在 M_1 之右.則綫分 M_1M_2 爲正. M_2 在 M_1 之左.則綫分 M_1M_2 爲負.

故任一綫分之長及其符號.爲自其相當於此綫分終點 x 之值減去相當於此綫分始點 x 之值.

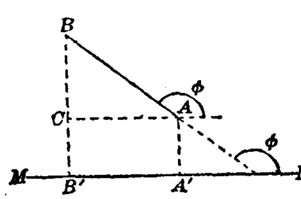
14. **射影**(*Projection*)　令 AB 與 MN 爲同平面上二直綫(第五圖及第六圖). AB 及 MN 爲正方向.自 A 與 B 作二直綫垂直於 MN. 與 MN 之交點爲 A' 及 B'. 則 $A'B'$ 爲 AB 對於 MN 之射影.其方向如爲 MN. 則 $A'B'$ 爲正(第五圖).方向如爲 NM. 則 $A'B'$ 爲負(第六圖).

以 ϕ 表 AB 與 MN 所成之角.引 AC 平行於 MN. 由三角法,兩圖均爲

$$AC=AB\cos\phi.$$



第五圖



第六圖

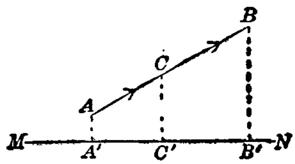
惟 $AC=A'B'$,

故 $A'B'=AB\cos\phi$.

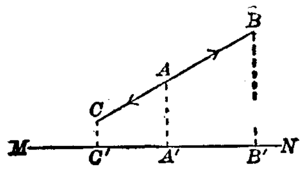
故求一直綫對於他直綫之射影.卽以該綫之長乘此二綫之正方向所夾角之餘弦.

例. 在力學上常以直綫表力.直綫之長及方向.卽表力之大小及方向.此力之任一方向之分力.卽爲其投於該方向之射影.

設以 AB 及 AC 表 F_1 及 F_2 (第七圖及第八圖).爲在一直綫上施於 A 之二力.以 MN 表與 AB 成 ϕ 角之一直綫.以 $A'B'$ 及 $A'C'$ 表 F_1 及 F_2 之分力.則此二分力之合力卽爲 $A'B'+A'C'$. 惟因 $A'B'=F_1\cos\phi$. $A'C'=F_2\cos\phi$. 故依代入之結果.此二分力之合力爲 $F_1\cos\phi+F_2\cos\phi$.



第　七　圖

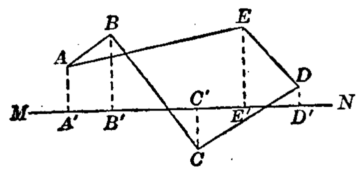


第　八　圖

15. 投於一直綫上他一折綫 (*Broken line*) 之射影.卽爲此折綫各綫分之射影之代數和.

設以 $ABCDE$ 爲折綫(第九圖).MN 爲在於同平面之直綫. AE 爲此折綫兩端所連結之直綫.

引 AA', BB', CC', DD', EE' 垂直於 MN.則 $A'B', B'C', C'D', D'E', E'A'$ 卽爲 AB, BC, CD, DE, EA 諸綫分投於 MN 之射影.



第　九　圖

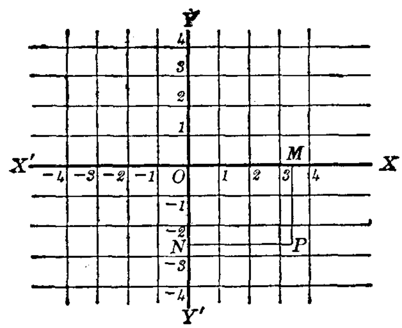
惟 $A'B'+B'C'+C'D'+D'E'=A'E'$ (第十三節).

故投於一直綫上他一折綫之射影.等於連結此折綫兩端所成直綫之射影.

例.　設 $ABCDE$(第九圖)表一成多角形之諸力.則其任何方向合力之分力(*Component of the Resultant*).卽爲在此方向諸分力之代數和.

16. 坐標軸(*Coördinate axes*)　設 XX' 及 YY' 爲直交之二直綫.於二直綫上分成無數等分.以二綫之交點 0 爲零點.如第十圖.

令 P 爲在此二直綫所成平面內任意一點.由 P 引二垂綫垂直於 XX' 及 YY'.各與之交於 M 及 N.依第十三節之法.令 $x=OM$, $y=ON$. 則任一點僅有一雙之 x, y 可與之相合.換言之.任意一雙之 x,y.相當之點惟有一.



第十圖

設 P 點爲已知.則 x 與 y 可由所引二垂綫 MP 及 NP 之長而求得.或僅作一垂綫 MP 亦可.因 $MP=ON=y$. 而 $OM=x$.

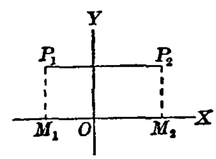
反之.如 x 與 y 爲已知.則由 x 與 y 之值可定 M 及 N 之位置.復於 M 及 N 各引一垂綫.其交點 P 卽爲所求之點.或先取 M 相當於 x.通過 M 作 XX' 之垂綫.復於此垂綫取等於 y 之距離.例如第十圖.相當於 x 之 M.可於 XX' 上得之.通過 M 引 XX' 之垂綫 MP.令其長等於 y. 卽得所求之點.凡由以上之任一法以求得 P 點.名爲作圖(*Plotting*).此法於正方格紙上極爲便利.觀上圖可明.

以上所述 x 之值.名爲 P 點之橫坐標(*Abscissa*).y 之值名爲 P 點之縱坐標(*Ordinate*).二者又統名坐標(*Coördinates*).故依定義

所云.凡某點之橫坐標及縱坐標.卽爲該點至 YY' 及 XX' 之距離.其方向與長短同列入計算之內.凡表示一點.通常皆書作 $P(a,-b)$ 以代 $x=a$ 及 $y=-b$.此括弧內當首列橫坐標.二坐標之間以，隔之, XX' 及 YY' 名爲坐標軸.通常亦稱 x 軸及 y 軸.

17. 兩點間之距離　令 $P_1(x_1, y_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2)$ 爲任意二點.先設 P_1P_2 爲與任一軸 OX 平行(第十一圖).卽 $y_2=y_1$.而 P_1P_2 投於 OX 之射影 M_1M_2 爲與 P_1P_2 相等.惟因 $M_1M_2=x_2-x_1$(第十三節).故

$$P_1P_2=x_2-x_1 \tag{1}$$



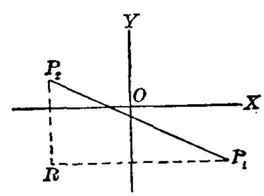
第十一圖

同樣.如 $x_2=x_1$.卽 P_1P_2 與 OY 平行.則

$$P_1P_2=y_2-y_1 \tag{2}$$

設 P_1P_2 不與任何軸平行. $x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$.則如第十二圖之位置.可自 P_1 引直綫與 OX 平行.自 P_2 引直綫與 OY 平行.此二直綫之交點 R.其坐標易知爲 (x_2, y_1).而由(1)與(2)得

$$P_1R=x_2-x_1, \qquad RP_2=y_2-y_1.$$



第十二圖

惟於直角三角形 P_1RP_2,

$$P_1P_2=\sqrt{\overline{P_1R}^2+\overline{RP_2}^2},$$

故　$$P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{3}$$

此根號之符號不易明瞭.惟 P_1P_2 旣不與任何軸平行.則可任擇一方向爲正.而令其他方向爲負.且由此可知(1)與(2)爲自普通之(3)式化出.

例.　有與三點 $P_1(1,2)$, $P_2(-1,-2)$, $P_3(2,-5)$ 等距離之一點.求其坐標.

設 $P(x, y)$ 爲所求之點.由假設

$$P_1P=P_2P, \qquad P_2P=P_3P.$$

惟 $P_1P=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$, $\quad P_2P=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}$,

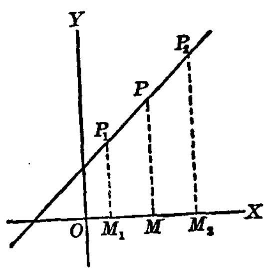
$$P_3P=\sqrt{(x-2)^2+(y+5)^2}.$$

$$\therefore \quad \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2},$$

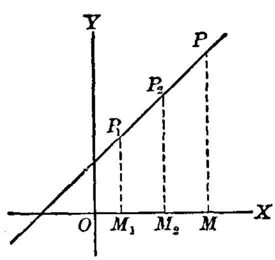
$$\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+5)^2},$$

解之,得 $x=\frac{8}{3}$, $\ y=-\frac{4}{3}$. 故所求之點爲 $P\left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

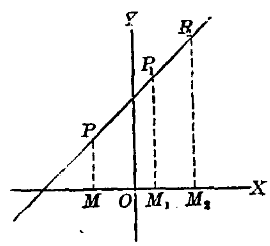
18. 共綫點(*Collinear points*)　設 $P(x, y)$ 爲在 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2)$ 所成直綫上一點.而令 $P_1P=l(P_1P_2)$.則由 P 之位置可得三種不同之現象.設 P 在 P_1 與 P_2 之間(第十三圖).且 $P_1P<P_1P_2$.則 l 爲小於一之正數.設 P 在從 P_1 至 P_2 之外(第十四圖).P_1P 仍與 P_1P_2 同向.而 $P_1P>P_1P_2$.則 l 爲大於一之正數.設 P



第十三圖



第十四圖



第十五圖

在從 P_2 至 P_1 之外(第十五圖).P_1P 與 P_1P_2 之方向相反.則 l 爲負數.最後之 l 所有之絕對值爲自 0 以至於 ∞.於第一類.P 名內分點.於後二類.P 名爲外分點.

設於以上三圖各引 P_1M_1, P_2M_2, PM 垂直於 OX.均得 $OM=OM_1+M_1M$.惟因 $P_1P=l(P_1P_2)$, $M_1M=l(M_1M_2)$.

$$\therefore OM=OM_1+l(M_1M_2),$$

代入 x 之值得

$$x=x_1+l(x_2-x_1). \qquad (1)$$

引直綫垂直於 OY,由同法可證明

$$y=y_1+l(y_2-y_1). \qquad (2)$$

如 P 為 P_1P_2 之二等分點. $l=\frac{1}{2}$.則上式成為

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

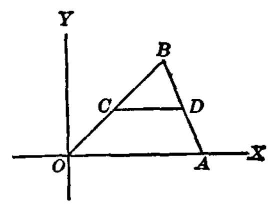
例 1. 自 $P_1(2, 3)$ 至 $P_2(3, -3)$ 所引直綫之 $\frac{2}{5}$ 距離處之點.問其坐標如何.

令所求之點為 $P(x, y)$.則

$$x=2+\frac{2}{5}(3-2)=2\frac{2}{5}, \qquad y=3+\frac{2}{5}(-3-3)=\frac{3}{5}.$$

例 2. 以解析法證明分三角形二邊於同比之直綫.與第三邊平行.

令三角形之一邊與 OX 重合.一頂點與 O 重合.三頂點為 $O(0, 0)$, $A(x_1, 0)$, $B(x_2, y_2)$(第十六圖).



第十六圖

設 CD 分二邊 OB 及 AB 為 $OC=l(OB)$ 及 $AD=l(AB)$.令 C 之坐標為 (x_3, y_3).D 之坐標為 (x_4, y_4).則由上式得

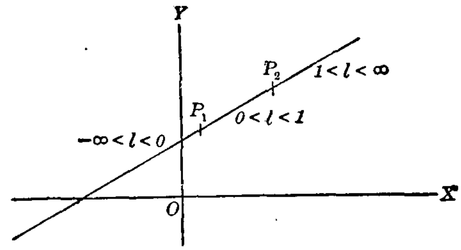
$$x_3=lx_2, \qquad y_3=ly_2.$$

$$x_4=x_1+l(x_2-x_1), \qquad y_4=ly_2.$$

因 $y_3=y_4$.故 CD 與 OA 平行.

19. 依次以不同之實數代 l.今可視其現象如次.

設 $l=0$.則 P 與 P_1(第十七圖)相重合. l 之值由此漸增. P 之位置卽漸次向 P_2 移動.終至於 $l=1$ 時. P 爲重合於 P_2.若 l 之值仍繼續增加. P 仍以同方向循此直線進行.如 l 爲負值.則 P 爲以相反於 P_2 之方向背 P_1 而移動.



第十七圖

由此可知在連結 P_1P_2 之直線上.以適宜之值代 l. 所得任意一點之坐標.卽可表示爲

$$x_1+l(x_2-x_1)$$
$$y_1+l(y_2-y_1)$$

相當於各綫分所代 l 諸值之範圍.表明於第十七圖.

例. 通過 $P_1(-1,-4)$ 及 $P_2(5,6)$ 作一直綫.在此直綫上任一點之坐標爲 $x=-1+6l$, $y=-4+10l$.

設 $l<0$.則 $x<-1$, $y<-4$. 故 P 在 P_1 之左.

設 $0<l<1$. 則 $-1<x<5$, $-4<y<6$.故 P 在 P_1 與 P_2 之間.

設 $l>1$. 則 $x>5$, $y>6$, 故 P 在 P_2 之右.

20. 變數及函數(*Variable and function*) 凡一數於某問題中.無論何時均無變更.此數名爲常數 (*Constant*). 某數之值.如在某問題之程序中時有變更.此數卽名爲變數.若有二數.其一數之值.常與他數有關.如他數爲已知.卽可求得此數.則此數稱爲他數之函數.當此二數均爲變數時.前者名爲自變數(*Independent Variable*).而函數名爲因變數(*Dependent variable*).設在

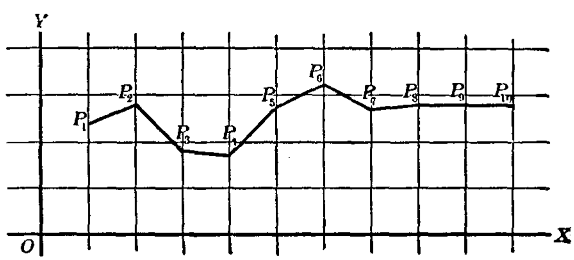
某問題中.有與以上關係相同之二數.常須擇其一爲變數.而令其他爲函數.例如圓之半徑與圓之面積有一爲已知.則其他卽可決定.故可云面積爲半徑之函數.亦可云半徑爲面積之函數.

以上所述變數與函數之關係.可用直角坐標(*Rectangular Co-ordinates*)之圖解以表明之.如以 x 表變數. y 表函數.則在一平面內.由 x 與 y 之值.可決定一點之位置.連結若干此種之點.可作成一曲綫.以表明此函數與變數相當之值.所得曲綫卽名爲該函數之圖形.

例 1.　函數之圖形.在統計學上甚爲重要.下表所列.爲各年中鐵軌一噸之價格.

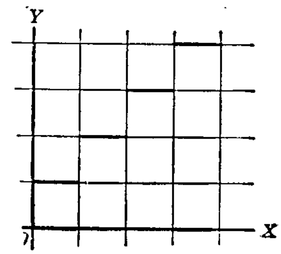
1895	\$ 24.33	1900	\$ 32.29
1896	28.00	1901	27.33
1897	18.75	1902	28.00
1898	17.62	1903	28.00
1899	28.12	1904	28.00

設取年爲橫坐標.以1895爲第一年.1896爲第二年.其餘類推.取鐵軌價格爲縱坐標.以十元爲一單位.則可得 $P_1, P_2, P_3, \cdots$ P_{10}諸點如第十八圖.今欲求其價格每年之起伏.可用直綫連結各各二點.所得之折綫.僅爲連結諸點之用.除其諸頂點外.綫上他點並無意義.此處鐵軌之價格.與年歲亦無關係.



第　十　八　圖

例 2. 一等郵件以每重一兩之郵費爲二分.其不足一兩者.亦作一兩計算.故郵費爲郵件重量之函數.今取郵件一兩爲 x 之單位.郵費二分爲 y 之單位.可得若干與 x 軸平行之直綫.以表示各相當重量之郵費(第十九圖).此函數不能用初等數學上之記號表之.其圖形之特殊處.爲所有之直綫均不相連續.惟各綫分所有之點.皆能代表相當之 x 與 y 之值.

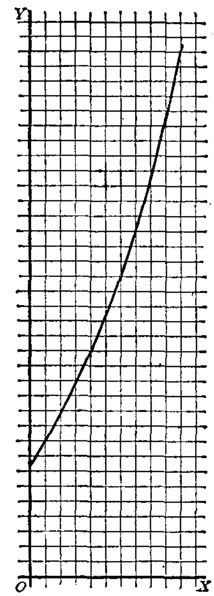


第十九圖

例 3. 物理學上飽和蒸氣之壓力.與其溫度常有一自然之定律.在各不同之溫度.皆有其相當之壓力.惟未能以算式表出之.然如知其若干不同之溫度.與其相當壓力.卽可求得一曲綫.此曲綫極可珍貴.下表所列.溫度爲以攝氏一度爲單位.壓力爲以水銀柱一粍(卽公釐)之高爲單位.

溫度	壓力
100	760
105	906
110	1074.7
115	1268.7
120	1490.5
125	1743.3
130	2029.8
135	2353.7
140	2717.9
145	3126.1
150	3581.9

設以 x 每單位表溫度五度.并以 x 之零點爲溫度百度所在處.以 y 每單位表水銀柱 100 粍高之壓力.定上表所列諸點之位置.再通過諸點作一曲綫.如第二十圖.則除上列十一點外.其餘之點.亦可於此曲綫上求得其近似值.求法爲先假定所知之溫度於横坐標.再量曲綫上相當點之縱坐標.卽得其相當壓力之近似值.同樣如壓力爲已知.亦可求得其相當溫度.上表所列諸點之位置愈爲接近.則由曲綫所得之值愈爲近似.然決未能適合於所有諸點也.



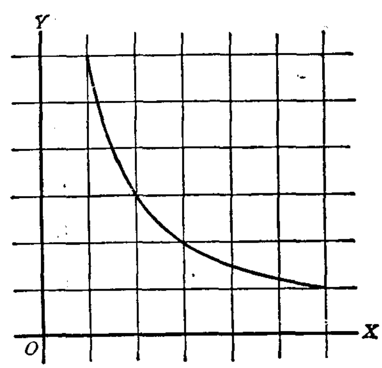
第二十圖

例 4.　波依耳 (*Boyle*) 或摩利阿脫 (*Mariotte*) 之定律爲"如溫度不變.則氣體之體積與所受之壓力成反比例".

今以 x 表壓力.y 表體積.k 爲常數.則上述爲

$$y=\frac{k}{x}.$$

第二十一圖立於第一象限之曲綫上任一點之坐標.爲表示上述壓力與體積之關係.設壓力增加一定量.則體積必減少一部分.與上列方程式完全適合.



第二十一圖

本例與前例之異點.爲對於函數之定律今爲已知.且可以算式表出之.故於此曲綫上.可求得任若干之點.且極準確.

21. 函數之分類 本卷所論者均爲含一變數之函數.且可以初等數學之記號表之.其中最簡單者爲代數多項式(*Algebraic polynomial*).例如

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

式中 x 之指數爲正整數.其係數 $a_0, a_1, \cdots\cdots a_{n-1}, a_n$ 等.可爲實數或複數或爲零.n 卽爲此多項式之次數.此類之函數.當於第三章及第四章論之.

二代數多項式之商名曰有理代數分數式(*Rational algebraic fraction*).例如

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

此類之函數.於第六章論之.

如一函數.爲以若干根號與諸代數多項式相結合而成.則爲無理代數函數(*Irrational algebraic function*).例如

$$\sqrt[3]{x^3+\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}}.$$

此類之函數.亦於第六章論之.

代數函數之普通定義.見於第九章.非代數函數或越函數(*Transcendental function*)之例.於第十三章見之.

22. 函數之記法 y 爲 x 之函數.通常書作 $y=f(x)$ 之形.設以一定值 a 代其中之 x.則當書爲 $f(a)$.例如

$$f(x)=x^3+3x^2+1,$$

則 $$f(2)=2^3+3\cdot 2^2+1=21,$$

$$f(0)=0^3+3\cdot 0^2+1=1,$$

$$f(-3)=(-3)^3+3(-3)^2+1=1,$$

$$f(a)=a^3+3a^2+1.$$

如一問題中.包含數個函數.可用 $f(x)$, $F(x)$, $\phi(x)$ 等區別之.通常亦有用 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ 以表示之者.於實用上尤爲便利.

$f(x)$ 如爲任一函數.可令 $y=f(x)$.依前法作一曲綫以代表此函數之圖形.此曲綫與方程式 $y=f(x)$ 之關係.爲凡坐標能適合於此方程式之點.皆在此曲綫上.反之.凡在於此曲綫上任一點之坐標.皆合於此方程式.

此曲綫名爲方程式之軌跡.而方程式則爲此曲綫之方程式.凡圖與式之用爲雙關.一方面由其曲綫之形式而識此函數.一方面由其方程式而知曲綫之幾何性質.兩者均於以後說明之.

問 題

1. 三角形之頂點爲 $(2,3)$, $(-3,3)$, $(1,1)$.求其周邊之長.

2. 求證連結三頂點 $(-4,-3)$, $(2,1)$, $(-5,5)$ 所成之三角形爲等脚.

3. 求證四點 $(6,2)$, $(-2,-4)$, $(5,-5)$, $(-1,3)$ 在一圓周上.此圓之中心爲 $(2,-1)$.并求其半徑之長.

4. 求證連結四點 $(2,2)$, $(4,5)$, $(-1,4)$, $(-3,1)$ 所成之四邊形爲平行四邊形.

5. 求一點與三定點 $(-3,4)$, $(5,3)$, $(2,0)$ 等距離.

6. 通過三點 $(0,0)$, $(-3,3)$, $(5,4)$ 作一圓.求其中心.

7. 求於 x 軸上取一點.與$(0,4)$, $(-3,-3)$等距離.

8. 一點與他二點$(1,1)$, $(-2,3)$爲等距離.且知此點與 OY 之距離爲距 OX 之二倍.求此點之坐標.

9. 求一點距 $(2,3)$ 爲四單位長.距 y 軸爲五單位長.

10. 一點在連結$(-4,-2)$, $(4,-6)$所成之直綫上.且分其二綫分之長爲$3:5$.求此點之坐標.

11. 求在於連結 $P_1(2,-1)$ $P(-4,5)$ 所成之直綫上一點 P 之坐標.令 P_1P 與 PP_2 之比爲二比三.

12. 求於連結 $P_1(2,4)$ $P_2(-1,-3)$之直綫上取一點 P.令其至 P_1 之距離爲自 P_1 達 P_2 之四分之三.

13. 設 $P(x,y)$爲在於連結 $P_1(x_1,y_1)$ 及 $P_2(x_2,y_2)$ 之直綫上一點.而 $\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{l_1}{l_2}$.求證

$$x=\frac{l_1x_2+l_2x_1}{l_1+l_2},\qquad y=\frac{l_1y_2+l_2y_1}{l_1+l_2}.$$

14. 一綫之中點爲$(1,2)$.其一端爲$(-3,5)$.求其他端.

15. 求於自 $(1,-1)$ 至 $(-4,5)$ 所連結之直綫上.取與此同方向之一點.令此點與第一點間之長.爲原綫分之三倍.

16. 一綫分之一端爲$(2,-5)$.其四分之一距離處爲$(-1,4)$.求此綫分之他端.

17. 求連結 $P_1(0,3)$ $P_2(6,-3)$之直綫上三等分點.

18. 求三角形$(2,1)$, $(0,-3)$, $(-4,0)$三中綫之長.

19. 設有三點 $A(-3,3)$, $B(3,1)$, $C(6,0)$ 在一直綫上.求一第四點 D.使$\frac{AD}{DC}=-\frac{AB}{BC}$.

20. 設已知P_1, P_2, P_3, P_4四點.自P_1P_2之中點至P_3之距離三分之一取一點.再自此點至P_4之距離四分之一另取一點.試證明上法與P_1, P_2, P_3, P_4之次序無關.無論自何點開始.所得之點仍不變.

21. 由解析法證明三角形一中綫之平方與其底邊一半之平方之和之二倍.等於他二邊平方之和.

22. 由解析法證明一直綫分三角形二隣邊於同比.此直綫與第三邊亦有同比.

23. 由解析法證明如三角形二中綫相等.則此形爲等脚三角形.

24. 由解析法證明連結任一直角三角形之頂點與斜邊中點所成之直綫.等於斜邊之半.

25. 由解析法證明連結任意四邊形各對邊中點之直綫.互爲二等分.

26. 試證任意四邊形四邊平方之和.等於兩對角綫平方之和.加連結兩對角綫中點之平方之四倍.

27. 由解析法證明平行四邊形之對角綫互二等分.

28. 由解析法證明連結梯形不平行二邊之中點之直綫.等於平行二邊之和之半.

29. $OABC$ 爲一梯形.其二平行邊OA及CB均垂直於OC.若D爲AB之中點.由解析法證明$OD=CD$.

30. 下表爲紐約自1890至1904各年中小麥每蒲式耳(*Bushel*)之市價.作圖表之.

1890	983	1895	.669	1900	.804
1891	1.094	1896	.781	1901	.803
1892	.908	1897	.954	1902	.836
1893	.739	1898	.952	1903	.853
1894	.611	1899	.794	1904	1.107

31. 下表爲氣象臺每時所記氣壓表之度數.作圖表之.

1 上午	28.85	9上午	29.04	5下午	29.13
2	28.87	10	29.05	6	29.18
3	28.90	11	29.05	7	29.21
4	28.92	12	29.05	8	29.24
5	28.94	1 下午	29.05	9	29.25
6	28.97	2	29.06	10	29.29
7	28.98	3	29.08	11	29.29
8	29.02	4	29.10	12	29.29

32. 下表爲波士頓自1880至1891每年所降雨水之平均吋數.作圖表之.

1880	38.89	1886	46.47
1881	49.22	1887	41.91
1882	48.42	1888	60.27
1883	35.56	1889	54.79
1884	53.86	1890	50.21
1885	44.07	1891	49.63

33. 下表爲鐵路行車時刻表之一部.大楷字母爲停車站.其旁所註數字爲自A站至該站之距離.第二及第三兩行,爲二相反方向之火車離各站之時刻.試作圖表示二車之進行.且定其相遇之時刻及地點.

A	10·45上午	2·00	F 99	1·06下午	10·48
B 21		1·30	G 126		9·53
C 44	11·50	12·56	H 151	2·59	8·56
D 64		12·11下午	I 177		7·48
E 84		11·30上午	K 200	4·15	7·00上午

34. 下表爲銀洋一元每年複利四藎之本利和.作圖表之.

5年	1.217	30 年	3.242
10	1.480	35	3.946
15	1.801	40	4.801
20	2.191	45	5.841
25	2.666	50	7.116

35. 以圖表明正方形之邊與其面積之關係.

36. 以圖表明圓之半徑與其面積之關係.

37. 以圖表明球之半徑與其體積之關係.

38. 墮體於 t 秒經過路程 s. 則 $s=\frac{1}{2}gt^2$. 假定 $g=32$. 作圖表之.

39. 於高地以速度 v_0 拋擲一物體於地面.則 t 秒終之速度爲 $v=v_0+gt$. 作圖表之.

40. 質量爲 m_1 及 m_2 之二點.相距爲 d. 其互引之力 F 爲

$$F=\frac{m_1m_2}{d^2}.$$

假定 $m_1=5, m_2=20$. 作圖表之.

41. 歐姆(Ohm)關於電流之定律爲

$$電流=\frac{動電力}{抵抗}.$$

設動電力爲常數.作圖表明電流與抵抗之關係.

42. $f(x)=x^4-3x^2+7x-1$. 求 $f(3), f(0), f(a), f(a+h)$.

43. $f(x)=x^3+1$. 證明 $f(2)-4f(1)=f(0)$.

44. $f(x)=x^4+2x^2+3$. 證明 $f(-x)=f(x)$.

45. $f(x)=x^5+3x^3-7x$. 證明 $f(-x)=-f(x)$.

46. $f(x)=x^2-a^2$. 證明 $f(a)=f(-a)$.

47. $f_1(x)=x^2+a^2,\quad f_2(x)=2x$. 證明 $f_1(a)-af_2(a)=0$.

48. $f(x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)$. 證明 $f(a)=-f\left(\frac{1}{a}\right)$.

49. $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$. 證明 $f(a)\cdot f(-a)=1$.

50. $f(x)=\frac{x^4+2x^3+2x+1}{x^2}$. 證明 $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

51. $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$. 求 $f(3),\quad f(0),\quad f(-3),\quad f(a),\quad f\left(\frac{1}{a}\right)$.

52. $f(x)=\underline{|x}$, 證明 $(x+1)f(x)=f(x+1)$.

53. $f_1(x)=\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{a}{x}},\quad f_2(x)=\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{a}{x}}$. 證明

$$[f_1(x)]^2-[f_2(x)]^2=[f_1(a)]^2.$$

54. $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$. 證明 $f[f(x)]=x$.

第三章 一次多項式

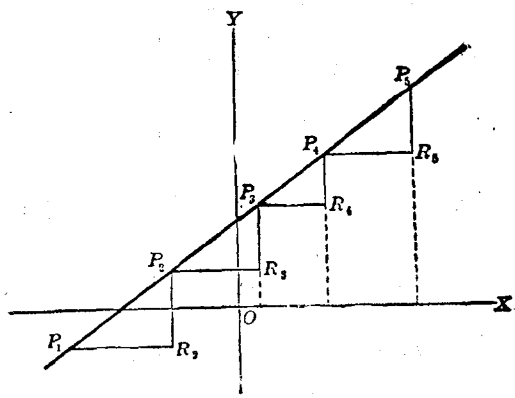
23. 圖解 一次代數多項式.常爲 $mx+b$ 之形.m 及 b 爲任何實數.如 b 等於零.則成一單項式 mx.

欲求此多項式之圖形.可書此式爲

$$y=mx+b. \qquad (1)$$

而依前例求之.先以 x_1, x_2, x_3, x_4 諸任意之值代 x 而求 y 之相當值.如

$$\left.\begin{aligned} y_1&=mx_1+b,\\ y_2&=mx_2+b,\\ y_3&=mx_3+b,\\ y_4&=mx_4+b. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$



第二十二圖

幷定 $P_1(x_1\, y_1)$, $P_2(x_2\, y_2)$, $P_3(x_3\, y_3)$, $P_4(x_4\, y_4)$ 諸點之位置(第二十二圖).今即證明連結 P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4 各各二點之直綫.常在同一直綫上.

通過 P_1, P_2, P_3, P_4 諸點.各作直綫與二軸平行.得若干三角形如第二十二圖.由第十三節得

$$\left.\begin{matrix} P_1R_2=x_2-x_1, & P_2R_3=x_3-x_2, & P_3R_4=x_4-x_3,\\ R_2P_2=y_2-y_1, & R_3P_3=y_3-y_2, & R_4P_4=y_4-y_3. \end{matrix}\right\} \qquad (3)$$

今於(2)式中取每二式之差.爲

$$y_2-y_1=m(x_2-x_1),$$

$$y_3-y_2=m(x_3-x_2),$$

$$y_4-y_3=m(x_4-x_3).$$

故
$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}. \tag{4}$$

將(3)式代入爲
$$\frac{R_2P_2}{P_1R_2}=\frac{R_3P_3}{P_2R_3}=\frac{R_4P_4}{P_3R_4}.$$

故以上之三角形均相似.而$R_2P_1P_2$, $R_3P_2P_3$, $R_4P_3P_4$諸角亦皆相等.可知$P_1P_2P_3P_4$在一直綫上.

設在此綫上取他一點P_5.引P_4R_5及R_5P_5各與OX及OY平行.則因$P_1R_2P_2$及$P_4R_5P_5$爲相似三角形.

$$\frac{R_5P_5}{P_4R_5}=\frac{R_2P_2}{P_1R_2}.$$

即
$$\frac{y_5-y_4}{x_5-x_4}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=m.$$

故
$$y_5=mx_5-mx_4+y_4.$$

代入(2)式中y_4之值.爲

$$y_5=mx_5+b.$$

故P_5之坐標與(1)式適合.

上已證明凡合於方程式(1)之點.均在一直綫上.換言之.此直綫上任一點之坐標.皆與(1)式適合.故方程式如爲$y=mx+b$之形.常代表一直綫.

24. 一次方程式之通式　如A, B, C爲任意之值或爲零.但A, B非同時爲零.則$Ax+By+C=0$即爲一次方程式之通式.今可證明凡一次方程式中諸係數均爲實數時.常代表一直綫.

1.　設 $A\neq 0$, $B\neq 0$. 如假定 x 爲任意之值. y 之值亦同時決定.故 y 爲 x 之函數.解此方程式得

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

此式爲 $y=mx+b$ 之形.由前節可知爲一直綫.

2.　設 $A=0$, $B\neq 0$. 方程式在此爲

$$By+C=0. \qquad \text{或} \qquad y=-\frac{C}{B}.$$

適合於此式之諸點.爲在於 $-\frac{C}{B}$ 單位遠且與 OX 平行之一直綫.反之.此直綫上各點.皆與上式適合.故方程式即代表此直綫.

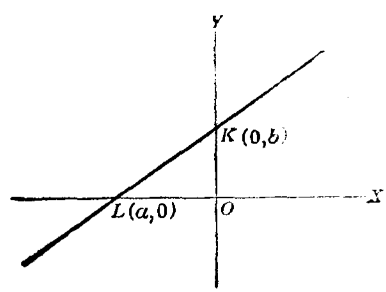
3.　設 $A\neq 0$, $B=0$. 方程式爲

$$Ax+C=0, \qquad \text{或} \qquad x=-\frac{C}{A}.$$

此式代表一直線,在於 $-\frac{C}{A}$ 單位遠,且與 OY 平行.

故方程式 $Ax+By+C=0$ 常代表一直綫.

25.　求作一直綫最普通之方法.爲擇取該直綫截 OX 及 OY 之二點.如第二十三圖中之 L 及 K. 令 L 之坐標爲 $(a, 0)$. K 之坐標爲 $(0, b)$.此二點之坐標均適合於方程式 $Ax+By+C=0$. 故由代入可得



第二十三圖

$$a=-\frac{C}{A}, \qquad b=-\frac{C}{B}.$$

a, b 二量.等於 OL 及 OK 之值量及符號.即名爲此直綫之截部

(*Intercepts*).所求得 b 之值.與在 $y=mx+b$ 者相同.

如 $C=0$.卽方程式爲 $Ax+By=0$.則 a 爲零時 b 亦爲零.直綫爲經過原點.設作此類之圖.可先求得適合此方程式之任意一點.再連結該點與原點卽得.

例 1. 作直綫 $3x-5y+12=0$.

令 $y=0$.得 $a=-4$.令 $x=0$.得 $b=2\frac{2}{5}$.取 $OL=-4$, $OK=2\frac{2}{5}$.通過 LK 作一直綫.卽爲所求.

例 2. 作直綫 $3x-5y=0$.

此式爲 $a=0$, $b=0$.如令 $x=1$.可得 $y=\frac{3}{5}$.連結二點 $(0,0)$ $\left(1,\frac{3}{5}\right)$ 成一直綫.卽爲所求.

26. 任一直綫均可以一次方程式表之.

證明爲自一次方程式之通式中.擇取諸係數 A, B, C 得使此式代表一直綫.如以 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) 爲一已知直綫上任二點.而

$$Ax_1+By_1+C=0,$$

$$Ax_2+By_2+C=0.$$

則此二點之坐標當可適合於

$$Ax+By+C=0. \tag{1}$$

今解上列二方程式.得 A, B, C 之比爲(第八節)

$$A:B:C=\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

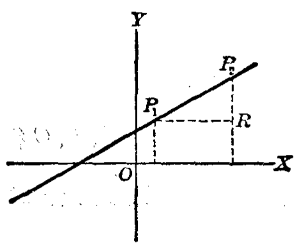
所得之值如與(1)式中相同.則(1)式代表一直綫.且含有已知直綫上二點.卽此二綫爲相重疊.故如定理所云.

代(2)式於(1)之結果.可得一通過已知兩點之直綫方程式爲

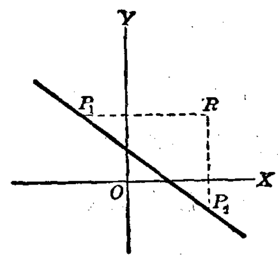
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

27. 斜度(*Slope*)　令 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 爲一直綫上二點,(第二十四圖及第二十五圖).設想有一點自 P_1 向 P_2 移動,則 x 因移動必起變更.計其變量之大小及符號爲 x_2-x_1. 同時 y 之變量爲 y_2-y_1. 凡一直綫之斜度.其定義卽爲一點循此直綫移動時.y 之變量與 x 之變量之比.設以 m 表斜度.則

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$



第二十四圖



第二十五圖

m 在第二十三節 $y=mx+b$ 式中.意與上同.故如一直綫之方程式爲 $Ax+By+C=0$.可解此方程式得 y 之值.其時 x 之係數.卽爲該直綫之斜度.例如

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.\qquad 故\ m=-\frac{A}{B}.$$

斜度在幾何學上之意義.亦易知之.設自 P_1 引一直綫與 OX 平行.自 P_2 引一直綫與 OY 平行.令此二直綫之交點爲 R.則

$$x_2-x_1=P_1R,\qquad y_2-y_1=RP_2.$$

$$故\quad m=\frac{RP_2}{P_1R}.$$

由上圖及第二十三節之(4)式.可知m之值.僅根據於此直綫.而與P_1及P_2之位置無關.故今可取P_1及P_2二點(第二十四圖及第二十五圖).令P_1R爲正.此外尙有兩種主要性質.卽視此綫爲向右方上端抑向右方下端進行.前者RP_2及m均爲正(第二十四圖).後者RP_2及m均爲負(第二十五圖).由此得一關於直綫斜度之定義如次.

如x之值漸增.y之值亦因之而增.則此直綫之斜度爲正.如x之值雖增.而y反因之而減.則其斜度爲負.

設直綫爲與OX平行.卽$y_2=y_1$.故$m=0$.設與OY平行.卽$x_2=x_1$.故$m=\infty$.此兩種之意義.可參看第十一節.

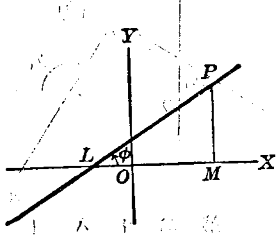
28. 角　由一直綫之斜度.可求得關於角之諸問題.今說明之於下.

1. 直綫與軸之夾角　凡一直綫截x軸於L.共可成爲四角.今求簡明起見.僅取其在x軸之上且在此直綫之右方者.視LX爲始綫(*initial line*).而以ϕ表此夾角.設在其終綫(*Terminal line*)上取一點P.引垂綫MP.則由第二十六圖及第二十七圖.均得

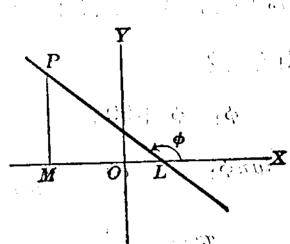
$$tan\phi=\frac{MP}{LM}.$$

惟$\frac{MP}{LM}$等於此直綫之斜度.故

$$tan\phi=m.$$



第二十六圖



第二十七圖

如直綫與 OY 平行.即 $\phi=90^\circ$.故 $\tan\phi=\infty$.如直綫與 OX 平行.則 ϕ 角不能存在.惟因 $m=0$.故可云 $\tan\phi=0$. 因得 $\phi=0^\circ$ 或 180°.

2. 平行綫 如二直綫互爲平行.則其與 OX 所成之角必皆相等.故其斜度亦等.由此可知設有二方程式.惟其絕對項相異.例如

$$Ax+By+C_1=0,$$
$$Ax+By+C_2=0.$$

即代表二平行綫.

通常二直綫

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0,$$

如

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0.$$

則此二直綫互爲平行.

3. 垂直綫 設 AB 與 CD(第二十八圖)爲成直交之二直綫.過其交點 P 作 PR 與 OX 平行.

令 $RPD=\phi_1$, $RPB=\phi_2$.

則 $\tan\phi_1=m_1$, $\tan\phi_2=m_2$.

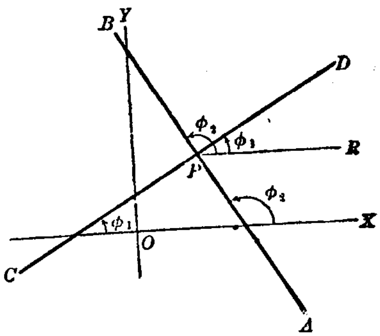
m_1 及 m_2 即爲此二直綫之斜度.

惟由假設

$$\phi_2=\phi_1+90^\circ.$$

故 $$\tan\phi_2=-\cot\phi_1=-\frac{1}{\tan\phi_1}.$$

即 $$m_2=-\frac{1}{m_1}.$$



第二十八圖

設有一直綫之斜度爲他一直綫之斜度之負反商數.則此二綫互爲垂直.此定理亦可云如二直綫斜度之乘積爲 -1. 則二綫互爲垂直.

故如二直綫之方程式爲

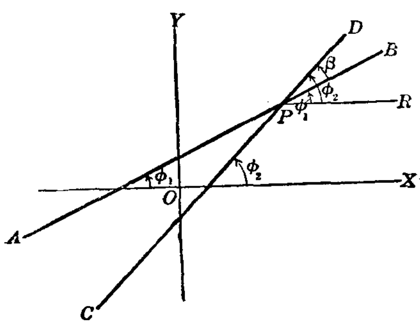
$$Ax+By+C_1=0$$

$$Bx-Ay+C_2=0$$

時互爲垂直.

4. 二直綫間之夾角 令 AB 與 CD 二綫相交於 P. 所成之 BPD 角名爲 β. 作 PR 與 OX 平行. 令 $RPB=\phi_1$, $RPD=\phi_2$, 則 $\beta=\phi_2-\phi_1$, (第二十九圖). 故

$$\tan\beta=\tan(\phi_2-\phi_1)=\frac{\tan\phi_2-\tan\phi_1}{1+\tan\phi_2\tan\phi_1}.$$



第二十九圖

惟 $\tan\phi_1=m_1$, $\tan\phi_2=m_2$, m_1 爲 AB 之斜度.而 m_2 爲 CD 之斜度.故

$$\tan\beta=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}.$$

如令 ϕ_2 常大於 ϕ_1. 則視 β 爲鋭角或爲鈍角可定 $\tan\beta$ 爲正或負.

29. 關於直線之問題 關於直綫 $y=mx+b$ 之主要問題.爲决定 m 及 b 之值.以使此直綫適合於某種條件.惟欲定二量之值.至少須先具兩種條件.故能適合於某兩種條件之直綫有一而限於一.

1. 求經過一定點且知其斜度之直線方程式. 以m_1表已知之斜度.$P_1(x_1, y_1)$表定點.則此直線之方程式必爲$y=m_1x+b$之形.而b爲一未知數.惟此直綫爲含P_1點.故$y_1=m_1x_1+b$因得$b=y_1-m_1x_1$.

故所求之方程式爲

$$y=m_1x+y_1-m_1x_1,$$

或
$$y-y_1=m_1(x-x_1).$$

例. 求經過定點(5, 7)且知其斜度爲$-\frac{2}{3}$之直綫方程式.

第一法
$$y=-\frac{2}{3}x+b,$$

$$7=-\frac{2}{3}(5)+b.$$

$$\therefore \quad b=\frac{31}{3}.$$

所求之方程式爲

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{31}{3},$$

或
$$2x+3y-31=0.$$

第二法　代入範式爲

$$y-7=-\frac{2}{3}(x-5).$$

即
$$2x+3y-31=0.$$

2. 求經過一定點且與他直綫平行之直綫方程式.

此直綫之斜度爲與已知直綫之斜度相等.今由第二十七節之法.可求得已知直綫之斜度.故解法與上相同.

例. 求過定點$(-2, 3)$且與$3x-5y+6=0$平行之直綫方程式.

第一法　已知直綫之斜度爲$\frac{3}{5}$.故所求之方程式爲

$$y-3=\frac{3}{5}(x+2)\quad 或\quad 3x-5y+21=0.$$

第二法　依第二十八節2知所求之方程式爲$3x-5y+C=0$.惟因此直綫經過定點$(-2,3)$.卽

$$3(-2)-5(3)+C=0,\qquad \therefore\quad C=21.$$

故得所求之方程式爲

$$3x-5y+21=0.$$

3.　<u>求經過一定點且垂直於他直綫之直綫方程式.</u>

所求直綫之斜度.可依前節3得之.其餘與上相同.

例.　求經過定點$(5,3)$且垂直於$7x+9y+1=0$之直綫方程式.

第一法　已知直綫之斜度爲$-\frac{7}{9}$.故所求直綫之斜度爲$\frac{9}{7}$.依上法可得所求之方程式爲

$$y-3=\frac{9}{7}(x-5)\quad 或\quad 9x-7y-24=0.$$

第二法　依第二十八節3知所求之方程式爲$9x-7y+C=0$.今以$(5,3)$代入此式.可得$C=-24$.故方程式爲$9x-7y-24=0$.

4.　<u>求經過二定點之直綫方程式.</u>

此題已於第二十六節中解之.其結果爲

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

卽

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 \end{vmatrix}=0.\qquad (第三節例2)$$

由第二十七節可得所求直綫之斜度爲

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

故此直綫之方程式爲

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

5. 求三點同在一直綫上之要件.

設有三點 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), 其在同一直綫上之要件.由本節問題4易知爲

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

30. 相交直線

設
$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0$$

爲二相交直綫.因凡在一直綫上任一點之坐標.必與此直綫之方程式相符合.今如一點同時在二直綫上.則此點之坐標必同時適合於該二直綫之方程式.故求任二直綫相交點之坐標.卽爲解其二聯立方程式.惟有以下三種須注意.

1. $$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0.$$

二直綫之交點卽爲

$$x=-\frac{\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \qquad y=-\frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},$$

2. $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0.$ 惟 $\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}$ 及 $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$ 至少有一不爲零.

此二方程式爲矛盾式.故不相交.實則於第二十八節中業已證明此二綫爲平行.

此類與第一類頗有關係.今如設想 $A_1B_2-A_2B_1$ 之值爲甚小.惟不爲零.則 x 與 y 之值必爲極大.假定其分子非爲甚小之時.此二綫之交點必在極遠之處.然後令 $A_1B_2-A_2B_1$ 漸次接近於零.x 與 y 遂增至於無限.終至於此二綫爲不相交而平行.

3. $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}=0.$

此二方程式僅代表一重置之直綫.如欲得其解答.須先明未定式 $\frac{0}{0}$ 之意義(第十一節).

31. 設有三直綫

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \tag{1}$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0, \tag{2}$$

$$A_3x+B_3y+C_3=0, \tag{3}$$

爲經過同一之點.以上三方程式必有一共通解答.

故
$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0. \tag{4}$$

且如以上三直綫互爲平行.所得之行列式(4)亦等於零.因如(1),(2),(3)爲平行.則 $A_1B_2-A_2B_1=0$, $A_2B_3-A_3B_2=0$, $A_3B_1-A_1B_3=0$.

故
$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0.$$

反之.如
$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0.$$

則此三直綫爲互平行.或相交於同一點.如由第七節知其中有二綫爲相交.其交點之坐標.亦必與他方程式適合.

32. 點與直線之距離 取任一直綫之方程式書爲

$$y-mx-b=0 \tag{1}$$

之形.且令多項式

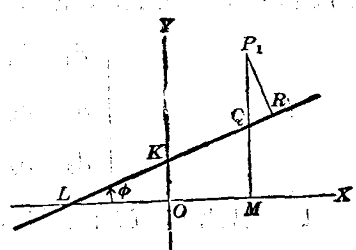
$$y-mx-b \tag{2}$$

爲立於等號之左.則可代入任一點P_1之坐標(x_1,y_1)於(2).設P_1爲在於(1)式之點.(2)式之值卽當爲零.今當求P_1不在(1)時$y-mx-b$之意義.

令LK(第三十圖)爲直綫(1).MP_1爲過P_1之縱綫.截LK於Q.故Q之橫坐標爲x_1.縱坐標爲MQ.由(1)得

$$MQ=mx_1+b,$$

故 $$y_1-mx_1-b=y_1-(mx_1+b)$$
$$=MP_1-MQ=QP_1.$$



第三十圖

由此可知如 (x_1y_1) 在 LK 之上.則 y_1-mx_1-b 爲正.如 (x_1y_1) 在 LK 之下.則 y_1-mx_1-b 爲負.且由 P_1QR 及 LMQ 二相似三角形知 P_1R 等於 $P_1Q\cos\phi$. 惟 $\tan\phi=m$. 故

$$\cos\phi=\frac{1}{\pm\sqrt{1+m^2}},$$

$$P_1R=\frac{y_1-mx_1-b}{\pm\sqrt{1+m^2}},$$

設惟取分母之正號.則當 P_1 在 $y=mx+b$ 之上時 P_1R 爲正.反是爲負.

如直綫方程式爲 $Ax+By+C=0$. 由此可得 $m=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$.

故 $$Ax_1+By_1+C=B(y_1-mx_1-b).$$

代入上式得 $$P_1R=\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

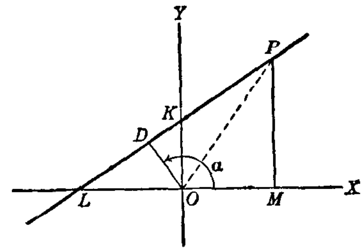
此可表現凡在直綫 $Ax+By+C=0$ 之一方所有諸點.其多項式 Ax_1+By_1+C 與垂綫 P_1R 均爲正.在此直線之他方諸點.此二者均爲負.欲擇何方相當於正號.可取原點試之爲便.

33 直線之法線式(*Normal equation of a straight line*)

設 LK 爲任一直綫(第三十一圖). OD 爲自原點所引之法綫(或垂綫).令 OD 之長爲 p. XOD 角爲 α.今於 LK 上取任一點 P.則 OP 對於 OD 之射影.等於 OM 及 MP 之射影之和(第十五節).惟因 ODP 爲直角.故 OP 對於 OD 之射影爲 p. 而 OM 對於 OD 之射影爲 $x\cos\alpha$(第十四節). MP 對於 OD 之射影爲 $y\cos(\alpha-90°)=y\sin\alpha$.

故　　$p=x\cos a+y\sin a.$

或　　$x\cos a+y\sin a-p=0.$



第三十一圖

在LK上任何點之坐標.均與此方程式適合.且此方程式再不合LK直線外之他點.故此卽爲LK之方程式.而因$\sin^2 a+\cos^2 a=1$.由第三十二節可知$x_1\cos a+y_1\sin a-p$卽爲一點(x_1, y_1)與直綫$x\cos a+y\sin a-p=0$之距離.

有時須改變一方程式$Ax+By+C=0$爲$x\cos a+y\sin a-p=0$之形.可注意(x, y)之任一値如能適合此中之一式.亦必能適合於他式.因其一式常爲他式之某倍數也.故設k爲一未定常數.則

$$A=k\cos a,\qquad B=k\sin a,\qquad C=-kp,$$

由前二式可得

$$A^2+B^2=k^2,$$

故
$$\cos a=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$\sin a=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$p=\frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},$$

惟因p爲正數.根號之符號宜與C相反.

問　　題

作下列諸方程式之圖形.

1. $5x-3y+10=0.$　　2. $4x+6y+12=0.$

3. $x+3y-7=0.$　　4. $2x-9y=0.$

5. $3x+5y=0.$　　6. $4x+7=0.$

7. $5y-8=0.$

8. 今有二數.其一數之半與他數三分之一之和等於一.設其一數爲已知.當如何可由作圖而得他數.

9. 正方形每邊之長爲3呎.設在其一邊上作一三角形.卽以正方形之邊爲底邊.試以三角形之高.表此兩形之面積.并作此函數之圖形.

10. 以英寸爲生的米突之函數.作圖表之.

11. 有一彈性均勻之綫.其長爲l.所受之伸引力爲f.如設m爲常數.l'.爲其新長.則$l'=l(1+mf)$.試作圖以表示l'與f之關係.

12. 設t爲沸點在高出海面h米突處之度數.則$h=295(100-t)$.作圖表之.

13. 沉於液體下每平方單位所受之壓力.等於在此平方單位上之水柱重量.如水之密度爲1.作圖表明距水面下x單位處所受之壓力.設以油覆水面.油之密度爲0.9.深爲8單位.另作他圖以表示一物體在距水面下x單位處所受之壓力.

14. 有一道路自高出海面百呎之處.以常率繼續增加百分之十五(卽每遠百呎增高十五呎).試證高出海面之距離.爲水平距離之函數.并作圖表之.

15. 一池貯水共一百加倫.設開其一管.令水流出之速度爲每分$\frac{2}{3}$加倫.以圖表示池中之水爲時間之函數.

16. 一直綫之斜度爲7.截OY於-3.求其方程式.

17. 一直綫經過$(0,-3)$.且與OX成$135°$之角.求其方程式.

18. 一直綫截OY於-5.且與OX成$60°$之角.求其方程式.

19. 一直綫經過原點.且與OX成$120°$之角.求其方程式.

20. 平行於OX之直綫.截OY於5.求其方程式.

21. 求二直綫$2x-3y+5=0$, $x+2y+2=0$所夾之銳角.

22. 求二直綫$2x+3y-6=0$, $2x+y+1=0$所夾之銳角.

23. 求二直綫$4x+y-2=0$, $3x+5y+8=0$所夾之銳角.

24. 試證$2x+14y-17=0$平分$8x+6y-11=0$與$3x-4y+3=0$所夾之一角.

25. 一直綫經過$(-4,5)$且與$5x-4y+1=0$平行.求其方程式.

26. 一直綫經過$(3,-1)$.且與$x-y-8=0$平行.求其方程式.

27. 一直綫經過$(2,-11)$.且垂直於$9x-8y+6=0$.試求其方程式.

28. 一直綫經過原點.且垂直於$6x+5y-3=0$.求其方程式.

29. 求一經過$(-2,-3)$,$(0,4)$二點之直綫方程式.

30. 求一經過$(2,-1)$,$(3,2)$二點之直綫方程式.

31. 求一經過$(-1,3)$,$(-1,5)$二點之直綫方程式.

32. 連結原點及$6x+4y=24$夾於二軸間之綫分之三等分點成兩直綫.求此二綫之夾角.

33. 求一垂直二等分連結兩定點$(-3,5)$,$(-4,1)$之直綫方程式.

34. 一直綫垂直於連結$(-4,-2)$,$(2,-6)$二點之直綫.其垂足爲在第一點至第二點之距離三分之一處.問其方程式如何.

35. 一直綫經過$(3,5)$,且平行於連結二定點$(2,5)$,$(-5,-2)$之直綫.求其方程式.

36. 一直綫平行於$2x-3y+5=0$.且二等分連結二定點$(-1,2)$ $(4,5)$之直綫.求其方程式.

37. 一直綫垂直於$3x-5y=9$.且等分其夾於二軸間之綫分.求其方程式.

38. 一直綫截x軸於2.截y軸於-5.問其方程式如何.

39. 一直綫截x軸於-4.截y軸於-7.問其方程式如何.

40. 一直綫平分三角形$A(-2,-2)$,$B(1,-3)$,$C(0,-7)$兩對邊AB及BC.試證此直綫與AC平行.且等於其長之半,

41. 一直綫經過$\left(4,\frac{8}{3}\right)$及$3x-4y-2=0$, $12x-15y-8=0$二綫之交點.求其方程式.

42. 一直綫經過$x-2y-5=0$, $2x-3y-8=0$之交點.且平行於$3x-2y+2=0$.問其方程式如何.

43. 一直綫經過$6x-2y-11=0$, $4x-6y-5=0$之交點.且垂直於$4x-y+1=0$,問其方程式如何.

44. 一直綫經過$2x-y+5=0$, $x+y+1=0$之交點及$x-y-7=0$, $2x+y-5=0$,之交點.求其方程式.

45. 如直綫$y=mx+3$為經過$y=2x+1$, $y=x+5$二綫之交點.求定m之值.

46. 求三角形$x=0$, $x-y+2=0$, $2x+3y-21=0$之頂點及角.

47. 問自一點$(3,5)$至直綫$y=4x-8$之距離.及此點位於直綫之何方.

48. 問自一點$(7,-4)$至直綫$2x+3y+8=0$之距離.及此點位於直綫之何方.

49. 求自定點$(b,-a)$至直綫$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$之距離.

50. 三角形之底邊爲連結二定點 $(-1,3),(5,-1)$ 之直綫.求自第三頂點 $(6,-2)$.至底邊之距離.

51. 三角形之頂點爲 $(6,-2)$. 底邊爲連結 $(-3,2),(4,3)$ 之直綫.求其底邊之長及高.

52. 求 $4x+3y-10=0, 4x+3y-8=0$ 二綫間之距離.

53. 一直綫至原點之距離爲7.其法綫與 OX 之夾角爲 $30°$.求此直綫之方程式.

54. 一直綫至原點之距離爲5.其法綫與 OX 成 $tan^{-1}\frac{1}{5}$ 之銳角.求此直綫之方程式.

55. 一直綫至原點之距離爲4.其法綫與 OX 之夾角爲 $45°$.求此直綫之方程式.

56. 經過原點之直綫.其法綫與 OX 成 $tan^{-1}\frac{3}{2}$ 之銳角.求此直綫之方程式.

57. 一直綫至原點之距離爲7.其法綫與 OX 之夾角爲 $90°$.求此直綫之方程式.

53. 設在一直綫 $4x+3y=12$ 上取一點.令與二定點 $(-1,-2)$, $(1,4)$ 等距離.問此點之坐標如何.

59. 一等脚三角形其頂點爲 $(3,2),(-2,-3),(2,-5)$. 求其底邊之垂直二等分直綫之方程式.

60. 求一點與 $(2,1),(-4,3)$ 等距離.且知連結此點及原點之直綫之斜度爲 $\frac{2}{3}$.

61. 連結一點至原點之長爲7. 斜度爲 $\frac{2}{3}$. 問其點之坐標如何.

62. 自 $(5,0)$ 作三垂綫垂直於三角形 $(4,3),(-4,3),(0,-5)$ 之三邊,證明三垂綫之足在一直綫上.

63. 求於直綫$x+2y-3=0$上取一點.令其至x軸及y軸之距離相等.

64. 平行四邊形之一對角綫爲連結$(4,-2)$,$(-4,-4)$所成.今知他對角綫之一端爲$(1,2)$.求此對角綫之方程式及長.

65. 一直綫經過$(-2,0)$.與$3x+4y+6=0$之夾角爲$tan^{-1}\frac{2}{3}$.求此直綫之方程式.

66. 一直綫經過$(2,2)$.與$3x-2y=0$之夾角爲$45°$求其方程式.

67. 一直綫經過$(2,1)$.與$2x-y-3=0$之夾角爲$tan^{-1}\frac{1}{2}$.求其方程式.

68. 一直綫截x軸於a.截y軸於b.求其方程式.

69. 用解析法證明與二點等距離之軌跡.爲連結二點所成直綫之垂直二等分綫.

70. 用解析法證明三角形之三中綫集交.

71. 用解析法證明三角形各邊之垂直二等分綫集交.

72. 用解析法證明三角形自各頂點至對邊之垂綫集交.

73. 用解析法證明自三角形任二頂點至自第三頂點之中綫,其距離爲相等.

74. 用解析法證明連結任意四邊形各相鄰邊之中點.成一平行四邊形.

75. 用解析法證明由平行四邊形一頂點至對邊中點所連之直綫.必三等分一對角綫.

第四章 n次多項式

34. 二次多項式之圖形

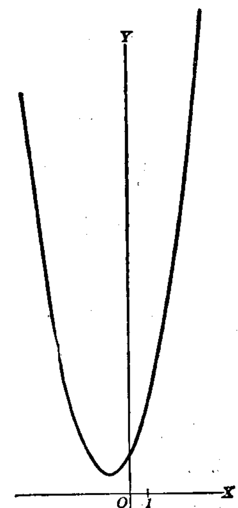
二次多項式ax^2+bx+c之作圖法.爲令此式等於y.而依第二十節及第二十三節之法處理之.

例1. x^2+2x+2.

令$y=x^2+2x+2$以任意之值代x.得x與y之相當值如下表.

x	y
0	2
1	5
2	0
3	17
4	26

x	y
-1	1
-2	2
-3	5
-4	10
-5	17



第三十二圖

依第二十節之法.定以上諸點之位置.再作一曲綫經過之(第三十二圖).

惟當注意圖中之點.有時在某處較他處爲密接.故曲綫在此處較爲準確.今爲免除此種差異起見.當在相離較遠之諸點間.插入若干x爲分數值之點.得表如下.

x	y
1.5	7.3
2.5	13.3
3.5	21.3
-2.5	3.3

x	y
-3.5	7.3
-4.5	13.3
-5.5	21.3

復定以上諸點之位置.以曲綫連之.即得多項式x^2+2x+2之圖形.此曲綫全立於x軸之上.如x之值漸增.多項式x^2+2x+2之值亦因之而增.曲綫離OX而退至於極遠.因多項式之值常爲正也.

例2. $2x^2+x-6$

令$y=2x^2+x-6$.以任意整數之值代x.得下表.

x	y
0	-6
1	-3
2	4
3	15

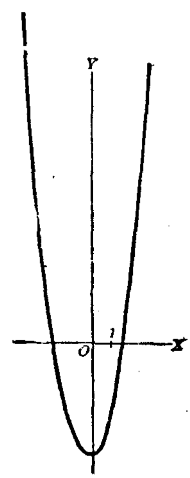
x	y
-1	-5
-2	0
-3	9

定此諸點後.尚須以分數之值代x得下表.

x	y
1.5	0
2.3	6.9
2.6	10.1
-1.5	-3
-2.5	4

x	y
-3.3	12.5
-3.7	17.7
$-.5$	-6
$-.3$	-6.1
$-.7$	-5.7

設以$-.7,-.5,-.3$諸值代x.可得與此曲綫之頂點極相接近之數點,定以上諸點後.作一曲綫經過之如(第三十三圖).



第三十三圖

惟當注意此曲綫截x軸於$x=-2$及$x=1.5$兩點.因此二值可使$2x^2+x-6$等於零.故即爲方程式$2x^2+x-6=0$之二根.

前例之圖形不經過x軸.故其方程式無實根.實地解之.可得其根爲$-1\pm\sqrt{-1}$.

35. 二次多項式之通式.即爲ax^2+bx+c.設令$y=ax^2+bx+c$.可改書此式爲

$$y=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$=a\left[-\frac{b^2-4ac}{4a^2}+\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right].$$

括弧之內.爲一常數$-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$加一x之函數$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.此函數除$x=-\frac{b}{2a}$時則爲零外.通常均爲正數.

其始視a爲正.可知當$x=-\frac{b}{2a}$時.y之值爲最小.故曲綫最低之點或頂點即爲$\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$.若$x$爲大於或小於$-\frac{b}{2a}$之值.則$x+\frac{b}{2a}$之絕對值漸增.故$y$之值亦增.其曲綫上相當之點.即因之而向上升.且$x$如爲$-\frac{b}{2a}+k$或$-\frac{b}{2a}-k$ (k爲任意之值).y之值恆相等.故曲綫對於直綫$x=-\frac{b}{2a}$爲對稱.直綫$x=-\frac{b}{2a}$爲與y軸平行.且經過此曲綫之頂點.

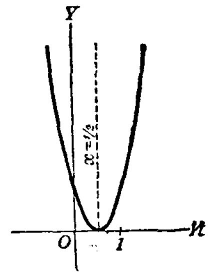
如a爲負數.亦可由同法證明曲綫對於直綫$x=-\frac{b}{2a}$爲對稱.此直綫經過曲綫最高之點或頂點.

36. 上已證明凡二次多項式之圖形均相似．且均有一頂點及一對稱之軸 (*Axis of Symmetry*)．由此可得一簡單之作圖法．其例如次．

例 1.　$4x^2-4x+1$.

$$y=4x^2-4x+1=4\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)$$

$$=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$



第三十四圖

曲綫之頂點為$\left(\frac{1}{2},0\right)$．對稱之軸為$x=\frac{1}{2}$．今以大於及小於$\frac{1}{2}$之值代$x$．可得軸之兩旁對稱諸點．如第三十四圖．

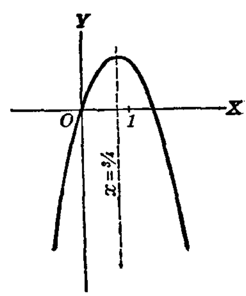
方程式$4x^2-4x+1=0$有二相等之實根$\frac{1}{2}$．故曲綫切x軸於$x=\frac{1}{2}$之處．

例 2.　$-2x^2+3x$.

$$y=-2x^2+3x$$

$$=-2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)$$

$$=-2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right].$$



第三十五圖

曲綫之頂點為$\left(\frac{3}{4},\frac{9}{8}\right)$．對稱之軸為$x=\frac{3}{4}$．此曲綫凡經過$x$軸於二相異之點(第三十五圖)．故方程式$-2x^2+3x=0$有二不相等之實根為0及$\frac{3}{2}$．

37 二次方程式之判定式 第三十五節之方程式

$$y=a\left[-\frac{b^2-4ac}{4a^2}+\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right]$$

中.其常數$-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$有三種不同之格式.今須述明如次.

1. $b^2-4ac>0$ $a>0$.則曲綫之頂點在軸x之下.$a<0$.則曲綫之頂點在x軸之上.此曲綫與x軸相交於兩點.

2. $b^2-4ac=0$ 曲綫之頂點卽在x軸.此曲綫惟切x軸於此點.

3. $b^2-4ac<0$ $a>0$.則曲綫之頂點在x軸之上.$a<0$.則曲綫之頂點在x軸之下.此曲綫不與x軸相交.

今設以若干相異之值代常數a, b, c.使b^2-4ac由一正數漸次縮小.此曲綫之頂點必漸升或漸降.終至於$b^2-4ac=0$時頂點乃合於x軸.同時此曲綫與x軸之二交點.漸次互相移近終至切x軸於一點.

凡一曲綫與x軸之交點之橫坐標.卽爲令其多項式等於零時所得方程式之根.故由此得下之結果.

1. 如$b^2-4ac>0$.則ax^2+bx+c之圖形交x軸於兩點.而方程式$ax^2+bx+c=0$有二不相等之實根.

2. 如$b^2-4ac=0$.則ax^2+bx+c之圖形切於x軸.而方程式$ax^2+bx+c=0$有二相等之實根.

3. 如$b^2-4ac<0$.則ax^2+bx+c之圖形不與x軸相交.方程式$ax^2+bx+c=0$惟有虛根.

b^2-4ac名爲二次方程式之判定式(*Discriminant*).由其符號之正負.可表示此方程式所含根之性質.

38. n 次多項式

n 次多項式爲

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

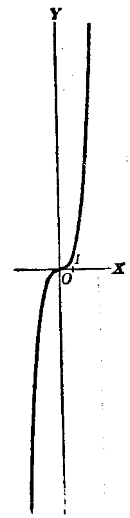
此式通常共含 $n+1$ 項.如不足 $n+1$ 項時.可視所缺項之係數爲零.今先作數種曲綫之圖形如次.

例 1. x^3.

令 $y=x^3$. 以任意之值代 x. 得表如下.

x	y
0	0
1	1
2	8
-1	-1
-2	-8
.5	.1
$-.5$	$-.1$

x	y
1.5	3.4
-1.5	-3.4
2.3	12.2
-2.3	-12.2
2.7	19.7
-2.7	-19.7



第三十六圖

作一曲綫經過以上諸點.此曲綫名爲立方拋物綫(*Cubical parabola*). 如第三十六圖.

例 2. x^4.

令 $y=x^4$. 假定 x 之值.得表如下.

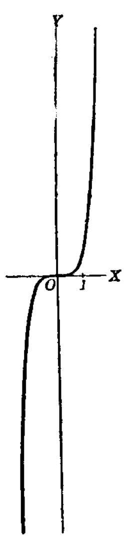
x	y	x	y
0	0	1.7	8.4
1	1	1.9	13.0
2	16	−.5	.1
−1	1	−.7	.2
−2	16	−.8	.4
.5	.1	−.9	.7
.7	.2	−1.1	1.5
.8	.4	−1.3	2.9
.9	.7	−1.5	5.1
1.1	1.5	−1.7	8.4
1.3	2.9	−1.9	13.0
1.5	5.1		

第三十七圖

曲線表示於第三十七圖.

例 3. x^5.

令 $y=x^5$. 假定 x 之值得下表.



第三十八圖

x	y	x	y
0	0	1.8	18.9
1	1	1.9	24.8
2	32	−.7	−.2
−1	−1	−.9	−.6
−2	−32	−1.2	−2.5
.7	.2	−1.4	−5.4
.9	.6	−1.6	−10.5
1.2	2.5	−1.7	−14.2
1.4	5.4	−1.8	−18.9
1.6	10.5	−1.9	−24.8
1.7	14.2		

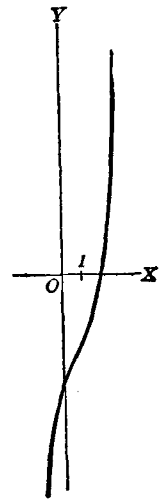
曲線表示於第三十八圖.

以上三曲綫皆過原點.故其方程式之根爲零.

例 4.　x^3-2x^2+3x-6.

令 $y=x^3-2x^2+3x-6$. 假定 x 值.得下表.

x	y	x	y
0	-6	1.5	-2.6
1	-4	2.5	4.6
2	0	2.7	7.2
3	12	-1.5	-18.4
-1	-12	-1.7	-21.8
-2	-28		



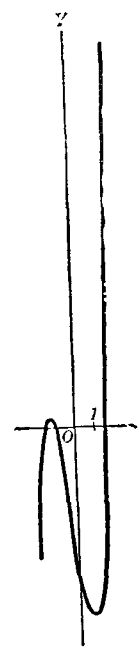
第三十九圖

曲綫表示於第三十九圖.此曲綫經過 x 軸於 $x=2$ 之處.故方程式 $x^3-2x^2+3x-6=0$ 有一實根爲 2. 其餘二虛根爲 $\pm\sqrt{-3}$.

例 5.　$4x^3+4x^2-9x-9$.

令 $y=4x^3+4x^2-9x-9$. 假定 x 之值.得下表.

x	y	x	y
0	-9	1.5	0
1	-10	1.3	-5.2
2	21	1.7	6.9
-1	0	$-.5$	-4.0
-2	-7	-1.5	0
		-1.3	.7



第四十圖

此曲綫 (第四十圖) 共經過 x 軸於 $x=1.5$, $x=-.15$, $x=-1$ 三點.故 ±1.5 及 -1 皆爲方程式 $4x^3+4x^2-9x-9=0$ 之實根.

不必另舉他例.可知凡多項式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

之圖形與x軸之交點之橫標.卽爲方程式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

之實根.反之.凡方程式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

之實根.卽爲多項式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

之圖形與x軸之交點之橫坐標.

再則如多項式之圖形不與x軸相交.則其相當之方程式無實根.反之.如一方程式無實根.則其多項式之圖形不與x軸相交.

39. 由分解因數以解方程式 設一多項式$f(x)$可分解爲$f_1(x),f_2(x),f_3(x)\cdots$諸因子.其每一因子之次數.均較$f(x)$爲低.則可書方程式

$$f(x)=0 \tag{1}$$

爲

$$f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)\cdots=0 \tag{2}$$

由此可知如以任一數值代x.可使$f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$諸因子中有一爲零.此數值亦必可使(1)式爲零.故卽爲方程式(1)之一根.亦卽爲$f_1(x)=0, f_2(x)=0, f_3(x)=0\cdots$諸方程式中之一根.

反之.(1)式之任一根必適合於(2)式.故必能使$f_1(x), f_2(x)$, $f_3(x),\cdots$諸因子中之一爲零.因假設諸因數均不爲零.其乘積決不能爲零.故解方程式$f(x)=0$.卽歸於解諸方程式

$$f_1(x)=0,\qquad f_2(x)=0,\qquad f_3(x)=0,\cdots$$

惟各因子常不宜高於二次.亦不必再分解爲一次之因子.因二次方程式可立得解答也.

例1. 解方程式 $x^3=8$.

移項得 $x^3-8=0.$

分解因數 $(x-2)(x^2+2x+4)=0.$

$\therefore\quad x-2=0$ 或 $x^2+2x+4=0.$

故 $x=2$ 或 $-1\pm\sqrt{-3}.$

原方程式可書作 $x=\sqrt[3]{8}$ 之形.故以上所得之結果.均爲8之立方根.凡任一數之立方根常有三個.可由令 x^3 等於該數之方程式而得之.

例2. 解方程式 $x^4+9=0.$

此式可書作 $(x^4+6x^2+9)-6x^2=0.$

分解因數 $(x^2+\sqrt{6}\,x+3)(x^2-\sqrt{6}\,x+3)=0.$

$\therefore\quad x^2+\sqrt{6}\,x+3=0$ 或 $x^2-\sqrt{6}\,x+3=0.$

解之得 $x=\dfrac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{-6}}{2}$ 或 $\dfrac{\sqrt{6}\pm\sqrt{-6}}{2}.$

凡任一數之四次方根常有四個.求法與前例相同.

40. 因數及根 依前節可知如 $x-r$ 爲 $f(x)$ 之一因數.則 r 卽爲方程式 $f(x)=0$ 之一根.

反之.如 r 爲方程式 $f(x)=0$ 之一根.則多項式 $f(x)$ 可以 $x-r$ 除盡.

設 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$

而 r 爲 $f(x)=0$ 之一根.則

$$f(r)=a_0r^n+a_1r^{n-1}+a_2r^{n-2}+\cdots+a_{n-1}r+a_n=0.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad f(x)&=f(x)-f(r)\\&=(a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)\\&\quad-(a_0r^n+a_1r^{n-1}+a_2r^{n-2}+\cdots+a_{n-1}r+a_n)\\&=a_0(x^n-r^n)+a_1(x^{n-1}-r^{n-1})+\cdots+a_{n-1}(x-r).\end{aligned}$$

$f(x)$既展開爲一級數.而每項均爲含x及r之相同正整數乘冪之差.可知各項均可以$x-r$除盡.故$f(x)$可以$x-r$除盡.

例. 由視察知方程式

$$x^4+x^3+2x^2+3x+1=0 \qquad (1)$$

之一根爲-1.卽$(x+1)$爲此方程式左邊諸項之一因數.故此式可書作

$$(x+1)(x^3+2x+1)=0 \qquad (2)$$

(1)式之他根可解方程式$x^3+2x+1=0$求得.其法詳第五十二節及第六十三節.

(注意)原方程式之解法.由解其低級方程式(*Depressed equation*)而得簡單.

41. 由前節之定理.設知某方程式之諸根爲$r_1, r_2, \cdots, r_n$.則此方程式卽可求得.因如$r_1, r_2, \cdots, r_n$爲此方程式之根.則方程式之左邊諸項.必含$x-r_1, x-r_2, \cdots, x-r_n$諸因子.右邊爲零.故方程式

$$(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)=0 \qquad (1)$$

爲以諸已知量爲根.再則此方程式亦不能再含他根。因x其餘之值不復能使任一因子爲零.故其乘積決不爲零.卽方程式爲(1)無疑矣.

例1. 求作一方程式.已知其根爲$2+3\sqrt{-1}, 2-3\sqrt{-1}, -\frac{1}{3}$.

所求之方程式爲

$$(x-2-3\sqrt{-1})(x-2+3\sqrt{-1})(x+\frac{1}{3})=0,$$

或

$$[(x-2)^2+9](3x+1)=0,$$

$$3x^3-11x^2+35x+13=0.$$

由此可得一分解二次因數之法.因設 r_1 及 r_2 爲二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根.則 ax^2+bx+c 可以 $x-r_1$ 及 $x-r_2$ 除盡.

故 $$ax^2+bx+c=a(x-r_1)(x-r_2).$$

例 2. 試將 $6x^2+x-1$ 分解因數.

方程式 $6x^2+x-1=0$ 之根爲 $-\frac{1}{2}$ 及 $\frac{1}{3}$.

$$\therefore\quad 6x^2+x-1=6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$$

$$=2\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot 3\left(x-\frac{1}{3}\right)$$

$$=(2x+1)(3x-1).$$

例 3. 試將 $4x^2+4x-2$ 分解因數.

方程式 $4x^2+4x-2=0$ 之根爲 $\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$.

$$\therefore\quad 4x^2+4x-2=4\left(x-\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=(2x+1-\sqrt{3})(2x+1+\sqrt{3}).$$

例 4. 試將 x^2+4x+6 分解因數.

方程式 $x^2+4x+6=0$ 之根爲 $-2\pm\sqrt{-2}$.

$$\therefore\quad x^2+4x+6=(x+2-\sqrt{-2})(x+2+\sqrt{-2}).$$

42. 方程式所含之根 關於方程式之根之基本定理.爲凡令一多項式等於零時所成之方程式.至少須含有一根.此定理之證明非在本書範圍.故暫從略.今卽假定上述爲眞.以證明凡 n 次方程式之根共有 n 且限於 n.

設表已知之方程式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

以 $$f(x)=0 \tag{1}$$

因此方程式至少須含一根.設此根爲 r_1. 則 $f(x)$ 可以 $x-r_1$ 除盡(第四十節).故

$$f(x)=(x-r_1)f_1(x) \tag{2}$$

$f_1(x)$ 爲其餘之一因子.其次數爲 $n-1$.

故(1)式可書爲

$$(x-r_1)f_1(x)=0 \tag{3}$$

且 $$f_1(x)=0 \tag{4}$$

之任一根.亦必爲 $f(x)=0$ 之一根(第三十九節).

惟(4)式至少當含一根.設此根爲 r_2. 依前理可書

$$f_1(x)=(x-r_2)f_2(x) \tag{5}$$

$f_2(x)$ 之次數爲 $n-2$.

代入(2)式.得

$$f(x)=(x-r_1)(x-r_2)f_2(x) \tag{6}$$

設依次分成 n 個一次因子之後.得最後之商爲 a_0 則

$$f(x)=a_0(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n) \tag{7}$$

故方程式 $f(x)=0$ 卽爲

$$a_0(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)=0 \tag{8}$$

此式共含 n 根.卽 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 是也.

惟此式亦不能再含他根.因如以異於 $r_1, r_2, \cdots r_n$ 之值代 x. 則(8)式中諸因子無一爲零.可知其乘積决不爲零.故 n 次方程式之根共有 n 亦不能多於 n.

方程式所含之根.可完全相異.有時其中亦可有數根爲相同者.如有數根相同.則方程式名爲含有重根(*Multiple roots*).

43. 設將前節(8)式左邊諸項展開之.仍可得其原式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

於此可知

$$(-r_1)+(-r_2)+(-r_3)+\cdots+(-r_n)=\frac{a_1}{a_0} \quad (1)$$

$$(-r_1)(-r_2)(-r_3)\cdots(-r_n)=\frac{a_n}{a_0} \quad (2)$$

(1) (2)兩式表明兩定理如次.

1　方程式中所有諸根變其符號之和.為以 x^n 之係數除 x^{n-1} 之係數之商.

2　方程式中所有諸根變其符號之積.為以 x^n 之係數除其常數項之商.

其餘類此之定理.見於方程式之理論中.今惟述其二於此.因如知某方程式之數根.可由此而求其餘之一根也.

例1.　方程式 $2x^4+7x^3+8x^2+2x-4=0$ 之三根為 $-2, -1\pm\sqrt{-1}$.求其餘之一根.

諸根之和為 $-\frac{7}{2}$.今所知三根之和為 -4.故知其餘一根為

$$-\frac{7}{2}-(-4)=\frac{1}{2}.$$

例2.　方程式 $36x^3-7x+1=0$ 之二根為 $\frac{1}{3}$ 及 $-\frac{1}{2}$.求餘一根.

因 x^2 之係數為零.可知諸根之和亦必為零.今已知其二根之和為 $-\frac{1}{6}$.故其餘一根為 $0-\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}$.

再則諸根之積為 $-\frac{1}{36}$.而所知二根之積為 $-\frac{1}{6}$.故得其餘一根為

$$\left(-\frac{1}{36}\right)\div\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}$$

44. **共軛複根**(*Conjugate Complex roots*) 前於第四十二節.對於$r_1, r_2, \cdots, r_n$諸根之性質尙未云及.然設$a_0, a_1, \cdots, a_n$皆爲實數.并知$a+bi$爲此方程式之一根.則$a-bi$亦必爲其一根.因設$a+bi$爲$f(x)=0$之一根.則$f(a+bi)=0$.展開$f(a+bi)$所得諸項.共可分爲兩組.其一爲含a及bi之偶次方.其他爲純含bi之奇方次.今由第十二節.可知第一組所有諸項均爲實數.其和設卽以A表之.第二組諸項均含i之一次方.命B爲任一實數.第二組諸項之和.卽以Bi表之.故$f(a+bi)=0$可書爲$A+Bi=0$.由第十二節得$A=0, B=0$.

設以$-bi$代上式之bi.則第一組諸項均無變更.因其僅含bi之偶次方也.第二組諸項.因均含bi之奇次方.惟變其符號.由此可得$f[a+(-bi)]=A-Bi$.今已知$A=0, B=0$.故$f[a+(-bi)]=0$.惟$f[a+(-bi)]=f(a-bi)$.卽$f(a-bi)=0$.可知$a-bi$亦爲此方程式之一根.

以上證明可簡單述之爲複根常有一對.且由此而知偶次方程式可全不含實根.奇次方程式至少須有一實根.

45. 第四十二節已證明凡一多項式皆可等於n個一次因子之乘積.例如

$$a_0(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n).$$

$r_1, r_2, \cdots, r_n$皆爲此方程式之根.設在此諸根中.有一爲複數.此方程式亦必含其共軛複數爲他一根.今以$a+bi$及$a-bi$表此二複根.其相當之因子卽爲$(x-a-bi)$及$(x-a+bi)$.此二因子之乘積爲二次實數因子$(x-a)^2+b^2$.故凡一多項式其各項之係數均爲實數時.爲等於若干一次及二次實數因子之乘積.

46. 若干一次及二次實數因子之乘積之圖形

1. 所有之因子均爲一次.且無一重複者.例如

$$a_0(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n).$$

令 y 等於此式.得

$$y=a_0(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n).$$

此式之圖形.與 x 軸交於 n 不同之點.卽 $x=r_1, x=r_2, \cdots, x=r_n$. 且此外再無他點. 因 x 不能再有他值可使 y 等於零也. 今以 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 諸根.依其值量而序列之.令 r_1 爲其中最小之值.則當 $x<r_1$ 時.式中所有之因子皆爲負數.如 x 之值變爲 $r_1<x<r_2$. 則第一因子爲正.餘仍爲負.故當 x 之值由小於 r_1 而達於大於 r_1 時.y 之符號爲之一變.此式之圖形經過 x 軸於 $x=r_1$ 之處.

如 x 之值.再由 $r_1<x<r_2$ 而達於 $r_2<x<r_3$. 則式中第二因子之符號由負而變於正.其餘均無變更.故 y 之符號亦爲之一變.此式之圖形復經過 x 軸於 $x=r_2$ 之處.

同樣以此法依次證明.可知此曲綫由左以至於右共經過 x 軸 n 次.

2. 所有因子均爲一次.惟其中有數個相同.例如

$$a_0(x-r_1)(x-r_2)^2(x-r_3).^3$$

其相當之方程式爲

$$y=a_0(x-r_1)(x-r_2)^2(x-r_3).^3$$

如 r 爲依其值量之大小而排列.依前法可證明圖形經過 x 軸於 $x=r_1, x=r_3$. 惟非於 $x=r_2$. 因設 x 之值由 $r_1<x<r_2$ 而達於 $r_2<x<r_3$. 諸因子之符號均不變.惟此處如 $x=r_2$. y 仍爲零.此圖形必有一點在 x 軸.故必與 x 軸相切.由此可證明凡一式含偶數個相同之一次因子.其圖形僅切 x 軸於此相當之點.

3. 諸因子有數個爲二次.例如

$$a_0(x-r_1)(x-r_2)^2[(x-a)^2+b^2].$$

其相當之方程式爲

$$y=a_0(x-r_1)(x-r_2)^2[(x-a)^2+b^2].$$

x無論爲何值.式中$[(x-a)^2+b^2]$恆爲正.故圖形與x軸之交點無他點可討論.

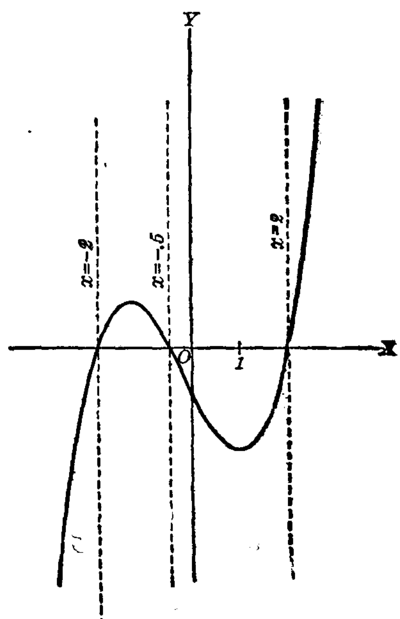
凡圖形在x軸上之點數.即等於其多項式所含不相同之一次因子之數.若式中有偶數個相同之一次因子.圖形僅切x軸於此相當之點.若爲奇數個相同之一次因子.圖形即經過x軸於此點.

例 1. $y=.5(x+2)(x+.5)(x-2)$.

1. 如$x=\pm 2$.或$-.5$則$y=0$.故圖形有三點在x軸.

2. 如$x<-2$.諸因子均爲負.故$y<0$.其相當之部分在x軸之下.如$-2<x<-.5$.第一因子爲正.餘均爲負.故$y>0$.其相當之部分在x軸之上.如$-.5<x<2$.第一及第二因子均爲正.第三因子爲負.故$y<0$.其相當之部分在x軸之下.最後如$x>2$.諸因子均爲正.故$y>0$.其相當之部分在x軸之上.

3. 以任意之值代x而求y之相當值.作此曲綫如第四十一圖.



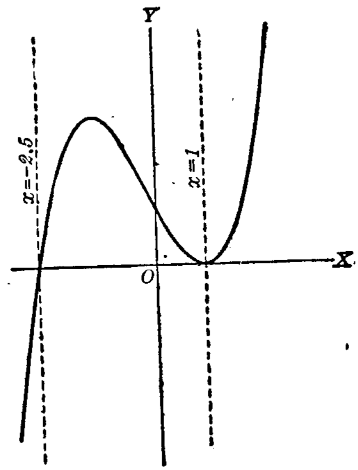
第四十一圖

例 2. $y=.5(x+2.5)(x-1)^2$.

1. 如 $x=-2.5$ 或 1. 則 $y=0$. 故曲綫有兩點在 x 軸.

2. 如 $x<-2.5$. 第一因子爲負. 第二因子爲正. 故 $y<0$. 相當之部分在 x 軸之下. 如 $-2.5<x<1$. 二因子均爲正. 故 $y>0$. 相當之部分在 x 軸之上. 最後如 $x>1$. 二因子仍爲正. 故曲綫僅與 x 軸相切於 $x=1$ 之處.

3. 以任意之值代 x 而求 y 之相當值. 作曲綫如第四十二圖.



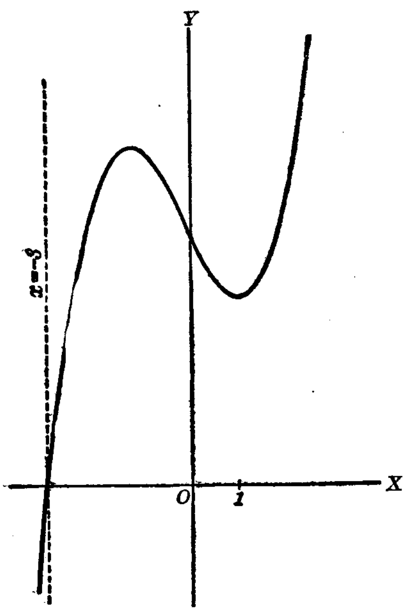
第四十二圖

例 3. $y=.5(x+3)(x^2-2.5x+3.5)$.

1. 如 $x=-3$. 則 $y=0$. 此曲綫僅有一點在 x 軸.

2. 式中第二因子爲 $(x-1.25)^2+1.9375$. 無論何時均爲正數. 如 $x<-3$. 第一因子爲負. 故 $y<0$. 相當之部分在 x 軸之下. 如 $x>-3$. 第一因子爲正. 故 $y>0$. 相當之部分在 x 軸之上.

3. 以任意之值代 x 而求 y 之相當值. 作曲綫如第四十三圖.



第四十三圖

47. 根之位置 依前節得知由方程式$f(x)=0$之根.可定$f(x)$之圖形所經過或接觸x軸之諸點.再則如以x_1及x_2 $(x_1<x_2)$爲x之二值.得使$f(x_1)$及$f(x_2)$之符號爲相反時.則圖形當$x=x_1$時在x軸之一邊.而當$x=x_2$時爲在其相反之一邊.故在$x=x_1$及$x=x_2$之間.圖形共經過x軸奇數次(第五十六節).且可接觸x軸任若干次.惟因經過x軸之一點.相當於此方程式奇數個根.接觸x軸之一點.相當於方程式偶數個根.故$f(x)=0$在x_1及x_2之間共有奇數個實根.

以上爲表示求方程式$f(x)=0$所含實根之法.可卽擇取x_1及x_2二值以代x.使$f(x_1)$及$f(x_2)$之符號相反.則在此二值之間.方程式共有奇數個實根.設x_1與x_2爲極近.此方程式之根亦可求得極近.用此法以求方程式之根.作圖雖有補益.惟亦無須用之.

48. 代加德氏之符號規律(*Descartes' rule of Signs*) 多項式中有一項之符號與其以下一項之符號爲相反時.謂之一變號(*Variation of sign*).例如多項式 $3x^4+2x^3-3x^2+x-2$ 共有三變號.

凡一方程式左邊諸項所有變號之多少.常與此式之實根有關.因方程式$f(x)=0$所有正根之數.不能超過於其左邊諸項所有變號之數.此卽名爲代加德氏之符號規律.

例如方程式$3x^4+2x^3-3x^2+x-2=0$不能有多於三之正根.因其左邊諸項僅有三變號也.

定一方程式所有負根最多之數.可以$-x'$代該方程式中之x.此新方程式所有之根.其符號皆與原式相反.故依上法旣可定此新方程式所有正根最多之數.卽已定原方程式所有

負根最多之數.例如以 $-x'$ 代方程式 $3x^4+2x^3-3x^2+x-2=0$ 中之 x.得新方程式為 $3x'^4-2x'^3-3x'^2-x'-2=0$.今知此式不能有多於一之正根.故原式之負根不能超過於一.

同時由代加德氏之規律.可證明某方程式是否含有虛根.例如方程式 $3x^3+x^2+2=0$ 為無正根.且不能有多於一之負根.惟此式為奇數次至少當含一實根(第四十四節).故此式共有一負根及二虛根.

欲證明代加德氏之規律.須先證明如以 $x-r$ (r 為正量)乘多項式 $f(x)$.則其乘積所有變號之數.至少須較 $f(x)$ 之變號多一.

今設 $f(x)$ 之第一項為正.先以其在第一負號以前所有諸正項列入第一括弧以內.再以其次之正號以前所有諸負項列入第二括弧以內.其餘類推.設 x^{n-k} 項為第一負號所在.x^{n-l} 項為其次之正號所在.以下依此.而至 x^{n-m} 項以後.諸項之符號皆與 x^{n-m} 項相同。則可書為

$$
\begin{aligned}
f(x)=&(a_0x^n+\cdots+a_{k-1}x^{n-k+1})\\
&-(a_kx^{n-k}+\cdots+a_{l-1}x^{n-l+1})\\
&+(a_lx^{n-l}+\cdots)-\cdots\\
&\pm(a_mx^{n-m}+\cdots+a_n) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

此式中凡在每括弧以內之符號皆相同(正號).故每括弧即表一變號.

以 $x-r$ 乘 $f(x)$ 之法.先以 x 乘 $f(x)$.次以 $-r$ 乘 $f(x)$ 加之.結果為

$$
\begin{aligned}
(x-r)f(x)=&(a_0x^{n+1}\pm\cdots)-(b_kx^{n-k+1}\pm\cdots)\\
&+(b_lx^{n-l+1}\pm\cdots)-\cdots\\
&\pm(b_mx^{n-m+1}\pm\cdots)\mp a_nr \qquad (2)
\end{aligned}
$$

式中 $b_k=a_k+ra_{k-1}$, $b_l=a_l+ra_{l-1}$ 等均為正數.

(2) 式諸括弧以外之符號與 (1) 式相同.惟括弧內之符號非均爲正.但應知括弧內之符號雖不一致.然在此括弧內第一項與以下之括弧內第一項至少有一變號.故單就括弧而論.所得乘積中之變號必不少於$f(x)$ 所有之變號.

此外尙有乘積之末項干a_nr. 其符號與最後括弧內第一項符號相反.故 $(x-r)f(x)$ 較之原式$f(x)$ 至少須增一變號.

今以$r_1, r_2, \cdots, r_n$ 爲此方程式之根.則方程式由第四十一節卽爲

$$(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)=0.$$

展開其左邊諸項.每次爲以一相當於正根之因子乘之.至少須增加一變號.故所有正根之數不能超過於其變號之數.如代加德氏之規律所云.

49. 有理根(*Rational roots*) 任一方程式之實根.或爲有理數或爲無理數原不一定.而爲有理數之根.必爲整數或爲分數.今先述求整根之方法.

根據以下之定理.可定一方程式之整根.

如方程式爲

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \tag{1}$$

而諸係數皆爲整數時.其任一整根r必爲a_n之因子.

前於第四十節.已證明 (1) 式之右邊可以 $x-r$ 除盡.因除數中x之係數爲一.而被除數所有諸項之係數復皆爲整數.故所得之商.其係數亦必爲整數.且此式旣能除盡無餘.故以r乘商數末項之係數必仍爲a_n.由此可證明以上之定理.

依此凡求一係數均爲整數之方程式之整根.可僅取a_n之整數因子試之.設能求得一根.方程式卽可減低一次(第四十節).故方程式所有之整根.均可依次求得.如a_n所有之因子均非此方程式之根.則方程式無整根.

例. 求方程式$4x^4-4x^3-25x^2+x+6=0$之整根.

此式之整根必爲6之因子.故可以$\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$試之.由此得其一根爲-2.今卽以$x+2$除原式.得低級方程式爲$4x^3-12x^2-x+3=0$.復以3之因子$\pm1,\pm3$試之.得其一根爲3.再以$x-3$除之.得二次方程式$4x^2-1=0$.易知其餘二根爲$\pm\frac{1}{2}$.故原方程式所有之諸根卽爲$-2,3,\pm\frac{1}{2}$.

凡方程式所有之整根.均可依此法求之.惟不能以之求分數根.因不知當以何分數試之也.由下節所述之定理.可以免除此種困難.

50. 前節方程式中.如a_0爲一而其餘諸係數皆爲整數.則該方程式必無既約分數之根.

命方程式爲

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

假設$\frac{p}{q}$爲此式一既約分數根.則

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+a_2\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)+a_n=0.$$

今以q^{n-1}乘此式.除第一項外餘均移至於等號之右邊.則爲

$$\frac{p^n}{q}=-a_1p^{n-1}-a_2p^{n-2}q-\cdots-a_{n-1}pq^{n-2}-a_nq^{n-1}.$$

由假設知p與q無公約數.卽$\frac{p^n}{q}$當爲一有理既約分數.而等號右邊則爲一整數式.故兩邊不能相等.因知有理既約分數$\frac{p}{q}$不能爲此方程式之根.

再則方程式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

如a_0非等於一.則此式亦可變爲最高次項係數爲一之他方程式.因以a_0除原式.可得

$$x^n+\frac{a_1}{a^0}x^{n-1}+\frac{a_2}{a_0}x^{n-2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_0}x+\frac{a_n}{a_0}=0 \tag{1}$$

設x爲此式之一根.m爲一整數.今以$x=\frac{x'}{m}$代入(1)式.爲

$$\frac{x'^n}{m^n}+\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{x'^{n-1}}{m^{n-1}}+\frac{a_2}{a_0}\cdot\frac{x'^{n-2}}{m^{n-2}}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_0}\cdot\frac{x'}{m}+\frac{a_n}{a_0}=0 \tag{2}$$

以m^n乘(2)式各項.得

$$x'^n+\left(\frac{a_1}{a_0}m\right)x'^{n-1}+\left(\frac{a_2}{a_0}m^2\right)x'^{n-2}+\cdots$$
$$+\left(\frac{a_{n-1}}{a_0}m^{n-1}\right)x'+\left(\frac{a_n}{a_0}m^n\right)=0 \tag{3}$$

由視察可定m之值.以使(3)式各項之係數均爲整數.此新方程式之根.卽爲原式之m倍.

例　變方程式$12x^3+16x^2-5x-3=0$爲x^3之係數爲一其餘諸項之係數均爲整數之方程式.

以12除原式爲

$$x^3+\frac{4}{3}x^2-\frac{5}{12}x-\frac{1}{4}=0.$$

今以整數m乘方程式之諸根.其法爲以m之累次方依次乘方程式之各項.令每項中m之次數與x之次數之和.等於此方程式之次數.由此得

$$x'^3+\left(\frac{4}{3}m\right)x'^2-\left(\frac{5}{12}m^2\right)x'-\left(\frac{1}{4}m^3\right)=0.$$

因$\frac{4}{3}m$爲整數.故m必爲$3k$. k爲他一整數.同時$\frac{5}{12}m^2$卽成爲$\frac{5}{12}(9k^2)$. 如使$k=2l$. 卽$m=6l$. 則此項方爲整數.最後如l爲一.末項$\frac{1}{4}m^3$或$\frac{1}{4}(6l)^3$亦爲整數.故m最小之値爲6.以6代上式之m.求得方程式爲

$$x'^3+8x'^2-15x'-54=0.$$

此式所有之根.爲原式諸根之6倍.今由第四十九節.求得此式之根爲 $-2, 3, -9$. 故原方程式之根爲$-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$.

依此可定諸係數爲有理數之方程式所含之分數根.

51. 求任一方程式諸有理根.可先求其整根.次定其分數根.

例. 求以下方程式之有理根.

$$2x^4-5x^3-2x^2-7x+30=0 \tag{1}$$

由代加德氏符號規律.知此式之正根及負根均不能多於二.先取30之因子$\pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm6, \pm10, \pm15, \pm30$試之.得其一根爲$+2$.故原方程式降爲

$$2x^3-x^2-4x-15=0 \tag{2}$$

復以15之諸因子試之.均不能使(2)式爲零.故(1)式再無整根.

今求其分數根.卽以2除(2)式各項.再以m乘其諸根.得

$$x'^3-\left(\frac{1}{2}m\right)x'^2-(2m^2)x'-\left(\frac{15}{2}m^3\right)=0 \tag{3}$$

令$m=2$. (3)式各項之係數均爲整數.卽

$$x'^3-x'^2-8x'-60=0. \tag{4}$$

依前法得其一根爲5.而(4)式降爲

$$x^2+4x+12=0 \tag{5}$$

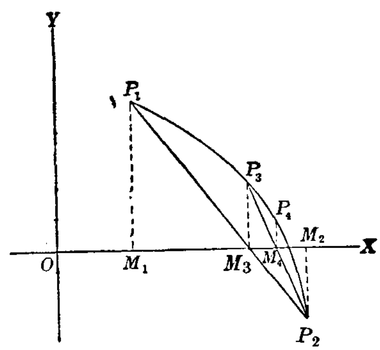
此式之二根爲 $-2\pm2\sqrt{-2}$.

故由此得知原方程式之諸根爲 $2, \frac{5}{2}, -1\pm\sqrt{-2}$.在本例求得諸有理根之後.其餘二虛根亦可求出.係因最後所得之方程式.其次數不高於二也.

52. 無理根(*Irrational roots*) 學者當知方程式之有理根.僅在於諸係數爲特殊值之時.就普通言之.如欲求得一方程式所有之實根.當於求得諸有理根之後.再定其無理根.惟由第十節無理數之定義.可知凡無理根均不能求得完全適合.僅可得其近似之值而已.下述爲求近似值之一法.此外尚有一較捷之法.於第六十三節中論之.

令已知之方程式爲 $f(x)=0$.

作 $f(x)$ 之圖形.如第四十四圖.今以 $OM_1=x_1$, $OM_2=x_2$.則 $M_1P_1=f(x_1)$ 而 $M_2P_2=f(x_2)$.因 $f(x_1)$ 與 $f(x_2)$ 之符號相反.故此曲線於 M_1 及 M_2 之間.必經過 x 軸.可知 $f(x)=0$.至少必有一根在 x_1 與 x_2 之間(第四十七節).

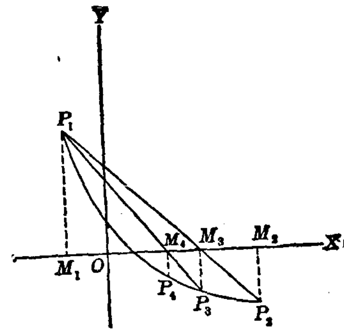


第四十四圖

惟於 M_1 及 M_2 之間.非僅曲綫必經過 x 軸.由第四十四圖.且知直綫 P_1P_2 亦於此間經過 x 軸於一點 M_3.如 M_1 與 M_2 之距離極近.即 x_1 與 x_2 之差爲極小時.此曲綫與直綫 P_1P_2 之差亦甚微.故

如以此直綫代曲綫.則 P_1P_2 與 x 軸交點之橫坐標.卽爲此方程式之一近似根.

如以 x_3 表 OM_3. 由第四十四圖.可知 $f(x)=0$ 之一根爲在 x_2 及 x_3 之間.較之以前所定其根爲在 x_1 及 x_2 之間時尤爲相近.惟曲綫如爲第四十五圖之形.則其一根在 x_1 及 x_3 之間.較之在 x_1 及 x_2 之間爲近.



第四十五圖

設 $f(x_3)$ 與 $f(x_1)$ 之符號相同.則爲第一類(第四十四圖).設 $f(x_3)$ 與 $f(x_2)$ 符號相同.則爲第二類(第四十五圖).於第一類.卽以 x_3 代 x_1 依前法求得 x_4. 此式之根爲在 x_2 與 x_4 之間.於第二類.卽以 x_3 代 x_2 依前法求得 x_4. 此式之根爲在 x_4 及 x_1 之間.

依次以 x 之值如 $x_3, x_4, x_5, \cdots$ 等所求得之結果.漸次接近於此方程式之眞根.

例. 求方程式 $x^3+2x-17=0$ 在 2 與 3 間之一根.

$x_1=2,\quad x_2=3.\quad f(2)=-5,\quad f(3)=16.$

由二點 $(2,-5)$, $(3,16)$ 所定直綫之方程式爲(第二十九節)

$$y+5=\frac{-5-16}{2-3}(x-2).$$

令 $y=0$. 此直綫截 OX 於 $2.2+$. 而 $f(2,2)=-1.952$.

因 $f(2.2)$ 與 $f(2)$ 之符號相同.則第二直綫爲連結二點 $(3,16)$, $(2.2,-1.952)$ 所成.此直綫截 OX 於 $2.28+$ 而 $f(2.28)=-0.587648$

因$f(2.28)$與$f(2.2)$之符號相同.第三直綫爲連結二點$(3,16)$, $(2.28,-0.587648)$所成.此直綫截OX於$2.3+$.而$f(2.3)=-0.233$.

第四直綫爲連結二點$(2.3-.233)$, $(3,16)$所成.此直綫截OX於$2.31+$.而$f(2.31)=-0.053609$.

第五直綫爲連結二點$(2.31-0.053609)$, $(3,16)$所成.此直綫截OX於2.312.故方程式$x^3+2x-17=0$之無理根.求至小數第二位爲2.31.

依此法繼續演之.可求至任若干位之小數.惟宜注意小數之位數.須求至較所欲求之位數多一爲止.

問題

作以下諸二次式之圖形.并定其頂點及二根之性質.

1. $2x^2+3x-2$. **2.** $9x^2-3x-2$.

3. $4x^2+4x+3$. **4.** $-3x^2+5x$.

5. $-9x^2+12x-7$. **6.** $4x^2-4x-1$.

7. 如欲使$ax^2+3x+7=0$之二根相等.問a之值如何.并求其根.

8. 如a與c爲任意之數.試證$\left(cx+\frac{2a}{c}\right)^2-8ax=0$之二根任何時皆相等.并問其根爲何.

9. 欲使$x^2+(mx+3)^2-16=0$之二根相等.證m爲非實數.

下列諸方程式中.k爲何值可使(1)二根相等.(2)二根均爲實數.而不相等.(3)二根均爲虛數.

10. $2x^2+3x+2=k$. **11.** $x^2+(2-k)x+1=0$.

12. $(k+1)x^2+(k-1)x+(k+1)=0.$

作下列諸多項式之圖形.

13. $x^3-ax(a>0).$ 14. $x^3-4x^2+x+1.$

15. $x^3-3x^2+1.$ 16. $x^3+x^2+2x+5.$

17. $x^3-x^2+x-4.$ 18. $x^3+6x-6.$

19. $x^3-12x+3.$ 20. $2x^4+x^3-4x^2-10x-4.$

21. $4x^4+12x^3+7x^2-28x-6.$ 22. $3x^4-10x^3-5x^2+2x.$

23. $x^4+6x^3+10x^2.$ 24. $2x^5+2x^4-7x^3-8x^2-4x.$

求以下諸方程式所有之根.

25. $8x^3=27.$ 26. $8x^6-63x^3-8=0.$

27. $x^5-5x^3+12x=2x^3+3x.$ 28. $5x^6+27x^2=2x^6-54x^4.$

29. $(2x-a)^4-(3x+a)^4=0.$ 30. $x^4-2(a^2+1)x^2+(a^2-1)^2=0.$

知下列諸根之值,求其方程式.

31. $0, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}.$ 32. $a+\sqrt{b},\ a-\sqrt{b}, -a.$

33. $0, 0, 2a\pm b, \pm\sqrt{2b}.$

34. 求一諸係數均爲實數之二次方程式.已知其一根爲 $2+3i.$

試將下列諸方程式分解因數.

35. $4x^2+8x-7.$ 36. $4x^2+12x+11.$

37. $4a^2x^2+2ax+1.$ 38. $x^2+2ax-a+a^2.$

39. $a^2x^2+2abx-a.$ 40. $a^2x^2+2abx+b+b^2.$

如r_1及r_2爲方程式$x^2+px+q=0$之二根.勿解此方程式而以p及q表下列諸式之值.

41. $r_1^2+r_2^2$.　　**42.** $r_1^3+r_2^3$.　　**43.** $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$.

44. $\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}$.　　**45.** $\frac{r_1}{r_2}+\frac{r_2}{r_1}$

如r_1, r_2, r_3爲方程式$x^3+px^2+qx+r=0$之三根.勿解此方程式而以諸係數表下列諸式之值.

46. $(r_1^2+r_2^2+r_3^2)+2(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)+3r_1r_2r_3$.

47. $r_1^2r_2r_3+r_2^2r_3r_1+r_3^2r_1r_2$.

48. $\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_3r_1}$.

49. 如$a+\sqrt{b}$爲一係數均爲有理數之方程式之一根.求證$a-\sqrt{b}$亦爲其一根.

作下列諸曲綫,且求其根.

50. $(x+1)(x-2)(x-4)$.　　**51.** $(x-2)(x-4)(2x+3)$.

52. $(x-4)(2x+1)(3x+5)$.　　**53.** $(x+3)(x-1)^2$.

54. $(2x-1)(x-3)^2$.　　**55.** $(x-2)(2x+3)^2$.

56. $(2x+5)(x^2+2x+3)$.　　**57.** $(x-5)(2x^2+3x+2)$.

58. $(x+2)(x-3)(x-2)^2$.　　**59.** $(x-2)(x+2)(x^2+2)$.

60. $(x-2)^2(2x^2+2x+1)$.　　**61.** $(x+1)(2x-1)(3x^2+2x+3)$.

求下列諸方程式所有之根.

62. $x^3-4x^2-2x+5=0$.　　**63.** $x^3-3x^2+4=0$.

64. $3x^3-7x^2-8x+20=0$.　　**65.** $4x^3-8x^2-35x+75=0$.

66. $x^3+4x^2+4x+3=0$.　　**67.** $8x^3-28x^2+30x-9=0$.

68. $12x^3-44x^2+5x+7=0.$

69. $3x^3+10x^2+10x-12=0.$

70. $3x^3+10x^2+2x-8=0.$

71. $4x^4+8x^3+3x^2-2x-1=0.$

72. $6x^4-11x^3-37x^2+36x+36=0.$

73. $3x^4-17x^3+41x^2-53x+30=0.$

74. $2x^4-9x^3-9x^2+57x-20=0.$

75. $18x^4-27x^3+10x^2+12x-8=0.$

76. $16x^4+16x^3-72x^2-20x+25=0.$

77. $x^5-2x^4-4x^3-4x^2+15x+18=0.$

78. $4x^5+12x^4+11x^3+5x^2-3x-2=0.$

79. $12x^5+44x^4-55x^3-95x^2+63x-9=0.$

80. $2x^5-5x^4-13x^3+13x^2+5x-2=0.$

由代加德氏之符號規律.定下列方程式諸根之性質.

81. $x^3+5x-7=0.$

82. $x^3+2x+3=0.$

83. $x^3+2x^2+5=0.$

84. $3x^4+4x^3+4x+3=0.$

85. $x^4+x^2-x-6=0.$

86. $x^4-4x^2+1=0.$

求下列諸方程式所有之實根至小數第二位.

87. $x^3+3x-7=0.$

88. $x^3+x+5=0.$

89. $x^4-12x+7=0.$

90. $x^4-3x^2+3=0.$

91. $x^3-x^2-6x+1=0.$

第五章 多項式之微係數

53. 極限(*Limit*) 當一變數依一定變化之律.漸次接近於一常數.其變數與常數間之差.小至於任何可名之數量時.此常數名爲該變數之極限.

如變數爲自變數.則依一定法則依次以諸值付之.可使其至於某一極限.例如x之值依次爲

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=\frac{3}{4},\ x_3=\frac{7}{8},\ \cdots,\ x_n=\frac{2^n-1}{2^n},$$

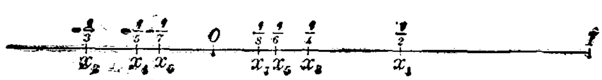
以至於無限時.則其極限爲1.因n漸大.x則漸近於1終至於n爲極大時.x與1之差.可使爲小於任何數量.今以圖形表明之.如第四十六圖.由x諸值依次所得之結果可見x與1之差漸次小至於不可明視.

第四十六圖

同樣.設x之值依次爲

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-\frac{1}{3},\ x_3=\frac{1}{4},\ x_4=-\frac{1}{5},\ \cdots,\ x_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}.$$

則其極限爲零(第四十七圖).



第四十七圖

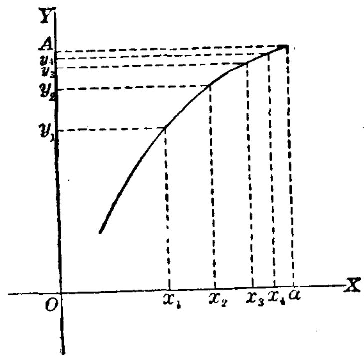
如變數非爲獨立而爲x之函數.則其達於極限時所經過諸值.須根據於所付與x之諸值.例如$y=f(x)$而x之值爲

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

以至於一極限a.其相當y之值爲

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_n,\ \cdots$$

當x之值近於a時.y與某量A之差小於任何數量.則如x之極限爲a.y之極限當爲A.此可以圖形表明之.如第四十八圖.x達於a時所經過諸值.可由x軸得之.y達於A時所經過諸值.可由y軸得之.此函數之圖形爲連續的漸次接近於直綫$y=A$.



第四十八圖

再則此函數之極限.惟根據於自變數之極限.而與x達於a時所經過之諸值無關.觀第四十八圖可明.

例 1. $y=\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$.

令x之值爲$x=1.1$, $x=1.01$, $x=1.001$, $x=1.0001$, $\cdots$依次以近於1.則y之值爲$y=5.1$, $y=5.01$, $y=5.001$, $y=5.0001$, $\cdots$易知其極限爲5.證明可用$x=1+h$ (h非爲零)代入函數.再以h除之.所得之結果爲$y=5+h$.故如x達於1時.y之極限爲5.再則y之極限與x達於1時其間所經過之諸值無關.

例 2. $y=1-\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$.

令x之值爲.1, .01, .001, .0001, $\cdots$依次以達於零.y之相當值則爲1.9487, 1.9950, 1.9995, $\cdots$可知其極限爲2.

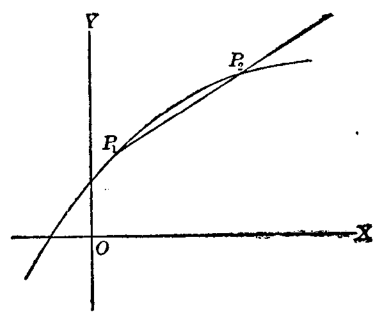
實則如同時以 $1+\sqrt{1-x}$ 乘此式之分子及分母.即得 $y=1+\sqrt{1-x}$.易知 x 達於零時 y 之極限爲2.

此後即用符號 $\doteq$ 以表示某數之極限.學者當知 $Lim\, x=a$ 與 $x\doteq a$ 之意義完全相同.

$$\underset{x\doteq a}{Lim} f(x)=A.$$

此式讀如"當 x 達於 a 時.$f(x)$ 之極限爲 A."

54. 曲線之斜度 由極限之定義.可推廣求直綫之斜度之法以至於任何曲綫.設 P_1 及 P_2 爲一曲綫上任意二點(第四十九圖).則連結 P_1P_2 所成直綫之斜度爲 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.如 P_1 與 P_2 極相接近.此曲綫與直綫 P_1P_2 殊少差別.而直綫之斜度與曲綫之斜度極爲近似.如取二點愈近.兩斜度之差必愈微.故得定義如次.



第四十九圖

<u>曲綫上任一點 $P_1(x_1, y_1)$ 之斜度.即爲一分數式 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 之極限.x_2 及 y_2 爲此曲綫上他一點 P_2 之坐標.其極限即爲令 P_2 沿曲綫移動以至於 P_1.</u>

例1. 取曲綫 $y=x^2$ 上一點 $(5, 25)$.設 $x_1=5$, $y_1=25$.再於此曲綫上取另一點 $P_2(x_2, y_2)$.令此點漸次移動以達於 (x_1, y_1).列其結果如下.

x_2	y_2	x_2-x_1	y_2-y_1	$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
6	36	1	11	11
5.1	26.01	.1	1.01	10.1
5.01	25.1001	.01	.1001	10.01
5.001	25.010001	.001	.010001	10.001

即此可知其極限常爲10.如須證明.可令$x_2=5+h$, $y_2=25+10h+h^2$.得$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=10+h$.設$x_2$漸近於$x_1$.即$h$漸近於零.而$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$之極限爲10.故曲綫在(5, 25)處之斜度爲10.

例 2.　求曲綫$y=\frac{1}{x}$在$\left(3, \frac{1}{3}\right)$處之斜度.

$$x_1=3, \qquad y_1=\frac{1}{3}.$$

如令　　$x_2=3+h$, $y_2=\frac{1}{3+h}$,

則　　$x_2-x_1=h$, $y_2-y_1=-\frac{h}{9+3h}$, 而 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{1}{9+3h}$.

設P_2沿此曲綫移動以達於P_1.則h之值當漸近於零.而$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$之極限爲$-\frac{1}{9}$.故曲綫在$\left(3, \frac{1}{3}\right)$處之斜度爲$-\frac{1}{9}$.

曲綫之方程式如不甚繁雜.其斜度即可依此求之.惟遇方程式太繁之時.求$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$之極限當用微分法.於以下諸節闡明之.

55. 增量 (*Increment*)　凡變數由某值以變於他值時.其加於第一值以成第二值之部分.謂之增量.例如 x 由5而變於 $5\frac{1}{2}$.其增量卽爲 $\frac{1}{2}$.如由5而變於 $4\frac{3}{4}$.其增量卽爲 $-\frac{1}{4}$.通常如 x 之值從 x_1 以變於 x_2.則其增量爲 x_2-x_1.增量之記號常以 Δ (希臘字母 *delta*) 表之.故

$$\Delta x=x_2-x_1,\text{ 而 } x_2=x_1+\Delta x.$$

設 y 爲 x 之函數.則 x 如得一增量.y 亦必有相當之增量.例如 $y=f(x)$.令 x 之值由 x_1 而變於 x_2.則

$$y_1=f(x_1),\qquad y_2=f(x_2).$$

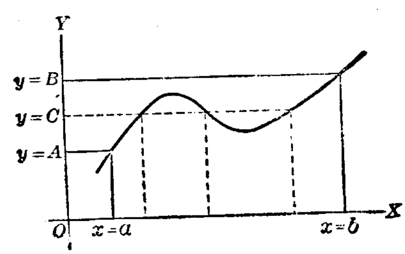
$$\Delta y=f(x_2)-f(x_1).$$

惟
$$x_2=x_1+\Delta x.$$

故
$$\Delta y=f(x_1+\Delta x)-f(x_1).$$

56. 連續 (*Continuity*)　函數 y 當 x 之增量漸近於零時 y 之增量亦漸近於零.則 y 名爲 x 之連續函數.

由此可知連續函數之值不能突然超越.因取 x 之增量爲充分小時.可使此函數之變化爲極小.依此.設當 $x=a$ 連續函數之值爲 A.當 $x=b$ 連續函數之值爲 B.則在 A 與 B 之間.x 之值至少有一可使此函數爲在 A 與 B 間之 C (第五十圖).



第五十圖

若 $f(a)$ 爲正而 $f(b)$ 爲負.則在 a 與 b 之間.x 之值至少有一可使 $f(x)$ 爲零.

凡代數多項式爲連續函數.證明從略.第二十節所述之郵政函數.在某定點爲不連續.其餘之非連續函數.當於第一百四十九節及第一百五十四節中見之.

如 Δx 與 Δy 同時均達於零.$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 常近於一極限.此即名爲 y 之微係數(*Derivative*).其定義如下.

57. 如 y 爲 x 之函數.則 y 對於 x 之微係數.即爲當 x 之增量漸近於零時 y 之增量與 x 之增量之比.

微係數之符號爲 $\frac{dy}{dx}$ 如以 $f(x)$ 表 y.則以 $f'(x)$ 表 y 之微係數.

例如　$y=f(x)$

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\underset{\Delta x\doteq 0}{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\underset{\Delta x\doteq 0}{Lim}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

求微係數之方法.名爲微分法.用此法時.名爲求 y 對於 x 之微分.微分法由定義共包含以下之四步.

1. 假設 x 之一增量.
2. 計算 y 之相當增量.
3. 以 x 之增量除 y 之增量.
4. 令 x 之增量漸近於零而定其商之極限.

例 1.　求 $y=x^3$ 之微係數.

(1)　設 $\Delta x=h$.

(2)　$\Delta y=(x+h)^3-x^3=3x^2h+3xh^2+h^3$.

(3)　$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2+3xh+h^2$.

(4)　此式之極限爲 $3x^2$.　　$\therefore\frac{dy}{dx}=3x^2$.

例 2. 求 $\frac{1}{x}$之微係數.

(1) 介 $y=\frac{1}{x}$，假定 $\Delta x=h$.

(2) $\Delta y=\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=-\frac{h}{x^2+xh}$.

(3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x^2+xh}$.

(4) 此式之極限爲 $-\frac{1}{x^2}$，故 $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}$.

由此可知凡求 y 之微係數.與求曲綫 $y=f(x)$ 之斜度完全相同.故微係數卽爲表示此曲綫上任一點之斜度之函數.

58. 微分法之範式 前節所述求微分之方法.在應用上極感不便.今由定義可得若干對於某種函數極便於計算之普通範式.本節專述求任一多項式之微係數之重要範式.

1. $\frac{d(ax^n)}{dx}=nax^{n-1}$. 但 n 爲正整數. a 爲任一常數.

介 $y=ax^n$.

(1) 設 $\Delta x=h$.

(2) $\Delta y=a(x+h)^n-ax^n$

$$=a\left(nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^{n-2}h^2+\cdots+h^n\right).$$

(3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=a\left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}\right)$.

(4) 取其極限得 $\frac{dy}{dx}=nax^{n-1}$.

2. $\frac{d(ax)}{dx}=a$. 但 a 爲常數.

此式爲1之變象.n在此爲等於1.學者可立行證明之.

3.　$\frac{dc}{dx}=0$.但c爲常數.

因c爲常數.不論x爲何值.Δc常等於零.故$\frac{\Delta c}{\Delta x}=0$.因此得其極限$\frac{dc}{dx}=0$.

4.　多項式之微係數.爲其各項之微係數之和.

例.　求$f(x)=6x^5-3x^4+5x^3-7x^2+8x-2$之微係數.

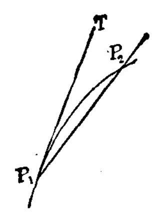
應用1,2,3諸範式.求得各項之微係數而加之.即得

$$f'(x)=30x^4-12x^3+15x^2-14x+8.$$

59. 切綫(*Tangent line*)　曲綫之切綫.即爲自此曲綫之任一割綫令其與曲綫之二交點漸次移近以訖於重合而成.

關於此二交點如何移動以至於重合.與本文無關係.於第三十七節爲視此曲綫在一平面上移動.於第八十八節爲令割綫平行於原位置移動以至於與曲綫相切.於本節則爲求定曲綫上某點之切綫.

設知此定點爲P_1.此外在曲綫上另有一點爲P_2.今如通過P_1P_2作一割綫(第五十一圖).令P_1固定不移.而使P_2沿此曲綫移動以達於P_1.則割綫P_1P_2以P_1爲樞紐而旋轉.終至於一切綫P_1T爲其極限.



第五十一圖

由以上之定義.知切綫之斜度與曲綫在此切點之斜度完全相同.因切綫之斜度爲割綫之斜度之極限.而此極限由第五十四節又即爲曲綫之斜度也.

如切點爲已知.則切綫方程式可立時書出.因設切點爲$(x_1 y_1)$.而以$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$表$x=x_1, y=y_1$時$\frac{dy}{dx}$之值.則$(x_1, y_1)$爲切綫上一點而$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$爲此切綫之斜度.故切綫方程式卽爲

$$y-y_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_1(x-x_1) \tag{1}$$

切綫方程式亦可就其切點之橫坐標而求得.設a爲在曲綫$y=f(x)$上之切點之橫坐標.而以$f'(x)$表$f(x)$之微係數.則切點之縱坐標爲$f(a)$.切綫之斜度爲$f'(a)$(第二十二節).故其方程式爲

$$y-f(a)=(x-a)f'(a) \tag{2}$$

例1.　求切曲綫$y=x^3$於(x_1, y_1)之切綫方程式.

由範式(1)得

$$y-y_1=3x_1^2(x-x_1).$$

惟因(x_1, y_1)在此曲綫上.$y_1=x_1^3$.故此方程式可書爲

$$y=3x_1^2x-2x_1^3.$$

例2.　求切曲綫$y=x^2+3x$於橫坐標爲2之點之切綫方程式.

由範式(2)得

$$f(x)=x^2+3x,\quad f'(x)=2x+3.$$

$$f(2)=10,\qquad f'(2)=7.$$

故所求方程式爲

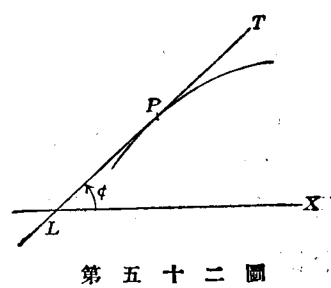
$$y-10=7(x-2),$$

或

$$y=7x-4.$$

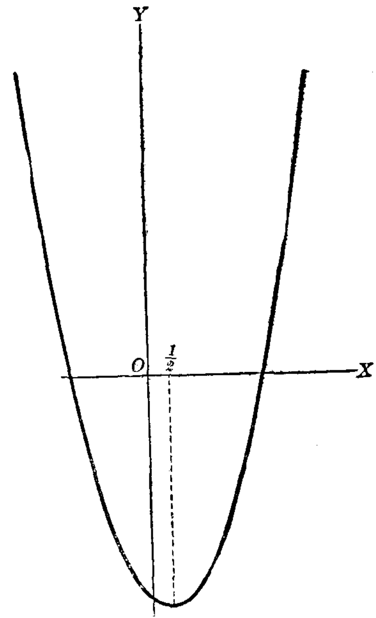
如PT(第五十二圖)爲切綫.而ϕ爲其與OX所成之角.則切綫之斜度爲$\tan\phi$(第二十八節).

故　$$\tan\phi=\frac{dy}{dx}.$$



第五十二圖

60. 微係數之符號　在x之函數中.設x增大而函數亦因之增大.此函數卽名爲增函數(*Increasing function*).如x增大而函數反因而減小.此函數卽名爲損函數(*Decreasing function*).當函數爲增時.圖形向右上端進行.函數爲損時.圖形向右下端進行.例如x^2-x-6(第五十三圖),當$x<\frac{1}{2}$時爲損.當$x>\frac{1}{2}$時爲增.



第五十三圖

由微係數之符號.可定其函數爲增或損.其規律如下.

如一函數之微係數爲正.則函數爲增.如其微係數爲負.則函數爲損.

證明可就$y=f(x)$.令$\frac{dy}{dx}$爲正.因$\frac{dy}{dx}$爲$\frac{\Delta y}{\Delta x}$之極限.$\Delta x$爲充分小時.如$\frac{\Delta y}{\Delta x}$爲正.卽假設$\Delta x$爲正.$\Delta y$亦必爲正.故此函數爲增.反之.如$\frac{dy}{dx}$爲負.卽當$\Delta x$爲充分小時.$\Delta x$與$\Delta y$之符號相反.故此函數爲損.

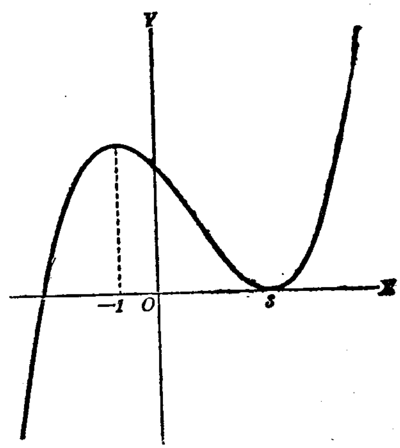
例 1.　$y=x^2-x-6,\quad \frac{dy}{dx}=2x-1.$

$x<\frac{1}{2}$ 則 $\frac{dy}{dx}$ 爲負. $x>\frac{1}{2}$ 則 $\frac{dy}{dx}$ 爲正.故當 $x<\frac{1}{2}$ 時此函數爲損.當 $x>\frac{1}{2}$ 時此函數爲增(第五十三圖).

例 2.　$y=\frac{1}{8}(x^3-3x^2-9x+27),$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{9}{8}=\frac{3}{8}(x+1)(x-3).$$

$x<-1$ 則 $\frac{dy}{dx}$ 爲正. $-1<x<3$ 則 $\frac{dy}{dx}$ 爲負. $x>3$ 則 $\frac{dy}{dx}$ 仍爲正.故當 $x<-1$ 時此函數爲增.當 $-1<x<3$ 時此函數爲損.當 $x>3$ 時此函數仍爲增(第五十四圖).



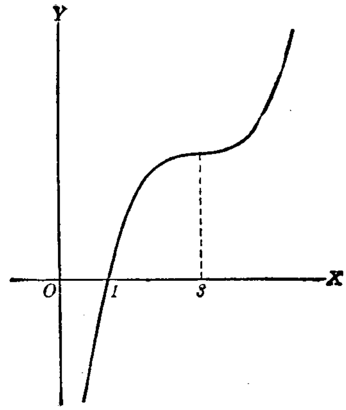
第五十四圖

此外如 $\frac{dy}{dx}=0$ 尙待考究.由以上二例.可知當 x 能使微係數等於零時之值.常分離使此函數爲增及爲損之諸值.凡相當於微係數等於零時在圖形上之點.名曰旋點(*Turning point*).

依此設 $f'(x)$ 爲 x 之連續函數.則微係數爲正時 x 之諸值與微係數爲負時 x 之諸值.被微係數爲零時 x 之值所隔開(第五十六節).因在基本算學中. $f'(x)$ 常爲連續函數.故可云

凡x之值爲使一函數由增以至於損.則此時x之值.常使此函數之微係數等於零.

惟此定理之逆不必爲眞.因使微係數爲零時x之值.未必皆能使其函數由增以至於損.或由損以至於增.例如就$\frac{1}{3}(x^3-9x^2+27x-19)$而論.其微係數$x^2-6x+9=(x-3)^2$常爲正數.故此函數無論何時皆爲增函數.然如$x=3$.其微係數亦等於零.如第五十五圖所表示.



第五十五圖

61. 極大與極小(*Maxima and Minima*)　凡某函數之圖形上之旋點.即相當於該函數極大或極小之值.其較此爲正確之定義.今述如次.

如h之值爲充分小(卽h所有之諸值均小於某定量)而$f(a\pm h)<f(a)$時.則$f(a)$爲函數$f(x)$之極大值.

如h之諸值爲充分小而$f(a\pm h)>f(a)$時.則$f(a)$爲函數$f(x)$之極小值.

凡由增函數以至於損函數.必經過一極大之值.由損函數以至於增函數.必經過一極小之值.根據前節所述.可得一求某數之極大值或極小值之法則如次.

先求此函數之微係數令爲等於零.而解所得之方程式以求其根.次取x微小於及微大於某根之值.代入微係數而視其符號之變更.如其符號爲由正以變於負.則代入此根可得函數之極大值.如其符號爲由負以變於正.則代入此根可得函數之極小值.

此法於微係數可分解因數時尤便應用.定其符號之變化與第四十六節所述相同.此外於第六十二節,尚有一當微係數不便於分解因數時求極大與極小之法.至於應用問題中,x之某值能使微係數為零.如欲知其相當於極大抑極小.可自其問題之性質定之.

例 1. 求$f(x)=x^5-5x^4+5x^3+10x^2-20x+5$之極大值與極小值.

$$f'(x)=5x^4-20x^3+15x^2+20x-20$$

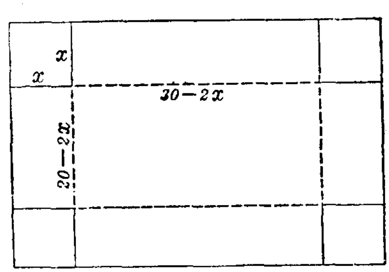
$$=5(x^2-1)(x^2-4x+4)$$

$$=5(x+1)(x-1)(x-2)^2.$$

$f'(x)=0$之根為$-1,1,2$.當x經過-1.$f'(x)$由正而變於負.故$x=-1$為$f(x)$之極大值.即$f(x)$為24.當x經過$+1$.$f'(x)$由負而變於正.故$x=1$為$f(x)$之極小值.即$f(x)$為-4.最後當x經過$+2$時.$f'(x)$之符號不變.故$x=2$非為$f(x)$之極大值亦非為$f(x)$之極小值.

例 2. 一長方形之盒.為自一矩形之紙片於每角各切去一正方形而折轉四邊所成.設紙片之長為30吋.寬為20吋.今欲作成一容積最大之盒.問其切法如何.

令x為紙片所切去正方形一邊之長.如沿第五十六圖虛綫之處而折轉之.則盒之三邊之長各為$(30-2x)$吋,$(20-2x)$吋,及x吋.



第五十六圖

設y爲此盒之容積,則

$$y=x(20-2x)(30-2x)$$
$$=600x-100x^2+4x^3.$$
$$\frac{dy}{dx}=600-200x+12x^2.$$

令y等於零.得方程式爲

$$3x^2-50x+150=0.$$

解之得　$x=\dfrac{25\pm5\sqrt{7}}{3}=3.9$ 或 12.7.

故　$\dfrac{dy}{dx}=12(x-3.9)(x-12.7)$.

當x經過則3.9. $\dfrac{dy}{dx}$由正而變於負.故$x=3.9$爲此盒容積之極大值.卽1056立方吋。$x=12.7$爲y之極小值.惟在本題爲無意義.因x之值必須在0與10之間.

例3.　置一梁於三支柱上.各支柱間之距離相等.梁之載重爲全體均勻一致.其偏倚(*Deflection*)以方程式表之爲

$$v=C(-l^3x+3lx^3-2x^4).$$

C爲常數.l爲每二支柱間之距離.x爲梁上任一點至末端支柱之距離.求其偏倚極大之點.

$$\frac{dv}{dx}=C(-l^3+9lx^2-8x^3)$$

令$\dfrac{dv}{dx}=0$,得

$$8x^3-9lx^2+l^3=0.$$

因x之值必小於l.由屢次試驗之結果.得此方程式之一根爲在$.4l$及$.5l$之間.令

$$y=8x^3-9lx^2+l^3.$$

依第五十二節之法.連結 $(.4l, .072l^3)$ 及 $(.5l, -.25l^3)$ 之直綫爲

$$y-.072l^3=-3.22l^2(x-.4l).$$

此直綫截 x 軸於

$$x=\left(.4+\frac{.072}{3.22}\right)l=.42l.$$

此爲所求根之近似值.如進求之.連結 $(.42l, .005104l^3)$ 及 $(.43l, -.028044l^3)$ 所成之直綫截 OX 於 $x=.4215l$. 依第六十三節例2所示.求得之結果已準確至第四位小數.

62. 第二次微係數 因 $\frac{dy}{dx}$ 常爲 x 之函數.故可取其對於 x 之微分.由此所得之結果.名爲 y 對於 x 之第二次微係數.以記號表之爲 $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ 或簡單書爲 $\frac{d^2y}{dx^2}$. 若以 $f(x)$ 表函數.$f'(x)$ 表其微係數.則其第二次微係數卽以 $f''(x)$ 表之.例如,

$$y=f(x)=x^3-3x^2+6x+7,$$

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=3x^2-6x+6,$$

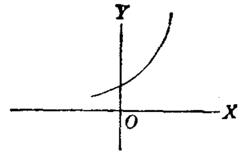
$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)=6x-6.$$

再求 $\frac{d^2y}{d^2x}$ 或 $f''(x)$ 之微係數.可得此函數之第三次微係數.卽以 $\frac{d^3y}{dx^3}$ 或 $f'''(x)$ 表之.如再求此式之微分.可得第四次微係數.以下由此類推.欲區別 $\frac{dy}{dx}$ 與高次微係數.$\frac{dy}{dx}$ 常稱爲第一次微係數.

$\frac{d^2y}{dx^2}$在圖形上之意義.因$\frac{dy}{dx}$爲曲線之斜度.故$\frac{d^2y}{dx^2}$爲斜度之微係數.由第六十節.如$\frac{d^2y}{dx^2}$爲正.則斜度漸增.如$\frac{d^2y}{dx^2}$爲負.則斜度漸減.因得以下之四種.

1. $\frac{dy}{dx}$爲$+$, $\frac{d^2y}{dx^2}$爲$+$.

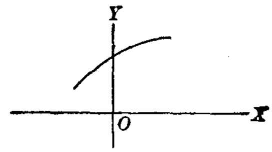
圖形向右上端進行.其斜度爲增(第五十七圖).



第五十七圖

2. $\frac{dy}{dx}$爲$+$, $\frac{d^2y}{dx^2}$爲$-$.

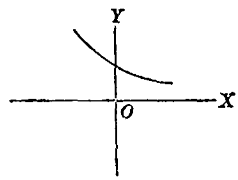
圖形向右上端進行.惟斜度爲損(第五十八圖).



第五十八圖

3. $\frac{dy}{dx}$爲$-$, $\frac{d^2y}{dx^2}$爲$+$.

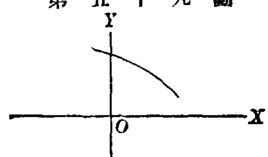
圖形向右下端進行.其斜度爲負數.以代數言之爲增.以數字言之爲損(第五十九圖).



第五十九圖

4. $\frac{dy}{dx}$爲$-$, $\frac{d^2y}{dx^2}$爲$-$.

圖形向右下端進行.以代數言之其斜度爲損(第六十圖).



第六十圖

今就此數種形式得一結果如下.

如$\frac{d^2y}{dx^2}$爲正.則圖形爲上凹嚮(*Concave upward*).如$\frac{d^2y}{dx^2}$爲負.則圖形爲下凹嚮(*Concave downward*).

惟因y值爲極小時圖形爲上凹嚮.y值爲極大時圖形爲下凹嚮.由此得一規律以區別極大與極小.

<u>如$\frac{dy}{dx}$爲零而$\frac{d^2y}{dx^2}$爲正.則y之值爲極小.如$\frac{dy}{dx}$爲零而$\frac{d^2y}{dx^2}$爲負.則y之值爲極大.</u>

此規律在於$\frac{dy}{dx}=0$及$\frac{d^2y}{dx^2}=0$時不能適用.故不如第六十一節所述之完備.惟有時較爲便於應用.在第一次微係數不能分解因數時尤甚.

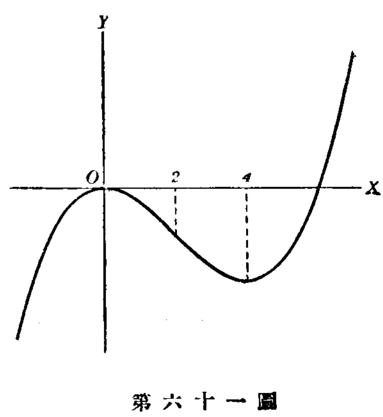
當一曲綫由某一凹嚮變爲其相反之凹嚮時.$\frac{d^2y}{dx^2}$必等於零.圖形上與此相當之點.名曰彎點(*Point of inflection*).求彎點之方法.卽解方程式$\frac{d^2y}{dx^2}=0$而視x經過各根時第二次微係數符號之變更.

例 1. $y=\frac{1}{12}(x^3-6x^2)$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{4}-x=\frac{x}{4}(x-4).$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x}{2}-1=\frac{1}{2}(x-2).$$

此曲綫(第六十一圖)當$x<2$時爲下凹嚮.當$x>2$時爲上凹嚮.彎點在$x=2$.如$x=0$.則$\frac{dy}{dx}=0$.$\frac{d^2y}{dx^2}<0$.故y之相當值爲極大.如$x=4$.則$\frac{dy}{dx}=0$,$\frac{d^2y}{dx^2}>0$.故y之相當值在此爲極小.



第六十一圖

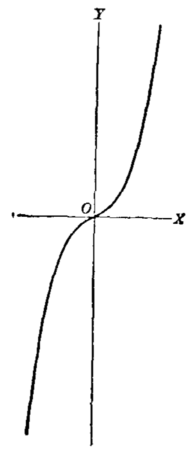
例 2.　$y=x^3+ax=x(x^2+a)$.

$\frac{dy}{dx}=3x^2+a$.

$\frac{d^2y}{dx^2}=6x$.

此曲綫當$x<0$時爲下凹嚮.當$x>0$時爲上凹嚮.彎點卽在於$x=0$.此外尙有二種須加辨識.

(1)　a爲正值.　$\frac{dy}{dx}$恒爲正.曲綫僅交x軸於原點(如第六十二圖).



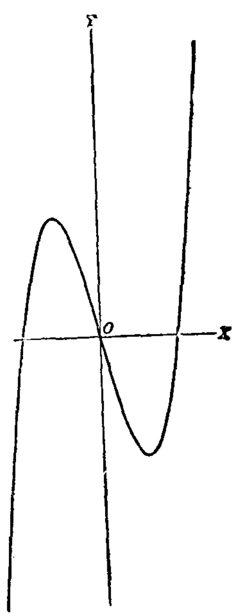
第六十二圖

(2)　a爲負值.　當$x=-\sqrt{-\frac{a}{3}}$時.

$y=-\frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}$爲其極大值.當$x=\sqrt{-\frac{a}{3}}$時,

$y=\frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}$爲其極小值.曲綫截$x$軸於

$x=-\sqrt{-a}$, 0, $+\sqrt{-a}$三點(第六十三圖).



第六十三圖

例 3.　$y=x^3+ax+b$.

此曲綫之圖形.視b之値爲正或負.卽移動第六十二及第六十三圖令其向上或向下以經過距離b.由例2 (1) 所得之曲綫.僅截x軸於一點.由例2 (2) 所得之曲綫.須視b之值爲小於,或等於,或大於該曲綫之旋點至OX之距離.而定此曲綫爲與x軸交於三點.或交於一點而切於他點,或惟交於一點.以算式表之.卽須根據

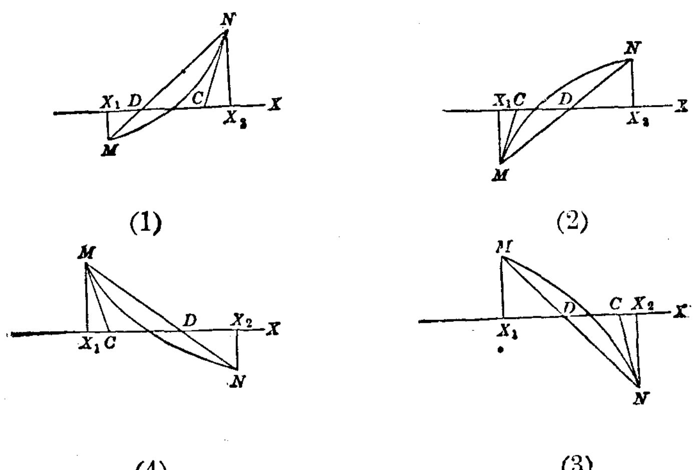
$$b^2 \lesseqgtr \left(-\frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)^2$$

或
$$\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27} \lesseqgtr 0.$$

設 $a>0$. 則 $\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}>0$. 可總括爲定義如下.

方程式 $x^3+ax+b=0$ 視 $\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}$ 爲小於,或等於,或大於零.而有三不等實根.或二相等實根及他一實根,或二複根及一實根.

63. 牛頓解數字方程式之法(*Newton's method*) 此章所得之結果.可卽用以求數字方程式之無理根.首由第四十七節.測知方程式 $f(x)=0$ 有一根在 x_1 及 x_2 之間.在此須注意 x 在 x_1 及 x_2 間所有諸值.均不得使 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 爲零.卽在 x_1 與 x_2 之間. $f(x)$ 當常爲增或常爲損.故 $f(x)=0$ 僅有一根在 x_1 及 x_2 之間.再則曲綫在此間必常爲上凹嚮或常爲下凹嚮.卽必爲以下四種之一.



第六十四圖

以上諸圖.無論自M或自N作一切綫.必交x軸於x_1與x_2間之C.惟於實地計算中.作此曲綫後.須注意於第一次及第二次微係數之符號.再於其端作一切綫.令此切綫爲在過切點之縱綫與曲綫之間.故切綫與OX之交點至曲綫與OX之交點(卽此方程式之根)之距離.必較切點之橫坐標至曲綫與OX之交點之距離爲近.例如第六十四圖(1)與(4)之切綫方程式爲

$$y-f(x_2)=(x-x_2)f'(x_2),$$

此綫截OX於$x_2-\dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$.以前所知在$x_1$及$x_2$之根.今已定其爲在

x_1與$x_2-\dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$之間.

於實用上.當以此法與第五十二節之法合用爲佳.匹如引割綫MN.必交x軸於一點D.所求之根.卽在C與D之間.惟C與D之距離較x_1與x_2之距離爲近.故知其根所在之範圍自較以前爲近.

例 1.　求方程式$x^3-6x-13=0$在3與4間之一根.

$$f(x)=x^3-6x-13,$$

$$f'(x)=3x^2-6,$$

$$f''(x)=6x.$$

$x=3$則$f(x)=-4$.$x=4$則$f(x)=27$.在$x=3$及$x=4$之間.$f'(x)$與$f''(x)$均爲正.故爲第六十四圖(1)之形式.M在此爲$(3,-4)$.N爲$(4,27)$.過N之切綫爲

$$y-27=42(x-4).$$

C爲　$$x=4-\frac{27}{42}=3.36.$$

MN之方程式為

$$y-27=31(x-4).$$

D為　$$x=4-\frac{27}{31}=3.13.$$

故所求之根當在3.13與3.36之間.惟此尚不能定其根之第一位小數.仍須應用第四十七節之法.得$f(3.1)=-1.809$及$f(3.2)=.568$. M在此為$(3.1,\ -1.809)$ N為$(3.2,\ .568)$.過N之切綫為

$$y-.568=24.72(x-3.2).$$

C為　$$x=3.17702.$$

割綫MN為

$$y-.568=23.77(x-3.2).$$

D為　$$x=3.176.$$

故方程式之根.當在3.176及3.177之間.在此所得之結果.於實用上已足.如進求之.可得其為根在3.1768143與3.1768144之間.

例2. 第六十一節例3之方程式$8x^3-9lx^2+l^3=0$.已知其一根為在$.42l$及$.43l$之間.今令

$$f(x)=8x^3-9lx^2+l^3,$$

$$f'(x)=24x^2-18lx,$$

$$f''(x)=48x-18l.$$

x之值如在$.42l$,與$.43l$之間.$f'(x)$為負而$f''(x)$為正.故圖形為第六十四圖中之(3).在$(.42l,\ .005104l^3)$之切綫截OX於$x=.42153l$.連結$(.42l,\ .005104l^3)$及$(.43l,\ -.028044l^3)$所成之弦截OX於$x=.42154l$.故其根已求至小數第四位.

64. 方程式之重根

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x^2+x_{n-1}x+a_n,$$

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\cdots$$

$$+2a_{n-2}x+a_{n-1},$$

$$f''(x)=n(n-1)a_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}$$

$$+(n-2)(n-3)a_2x^{n-4}+\cdots+2a_{n-2},$$

$$f'''(x)=n(n-1)(n-2)a_0x^{n-3}+(n-1)(n-2)(n-3)a_1x^{n-4}+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

今以$f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$, $\cdots$, 表示以 $x=a$ 代入以上諸函數之結果.而以$f(a+h)$ 表示以 $x=a+h$ 代入$f(x)$ 之結果.可得

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{\lfloor\underline{2}}f''(a)+\frac{h^3}{\lfloor\underline{3}}f'''(a)+\cdots+a_0h^n. \quad (1)$$

命 $h=x-a$ 代入 (1) 式則為

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{\lfloor\underline{2}}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{\lfloor\underline{3}}f'''(a)+\cdots$$

$$+a_0(x-a)^n. \quad (2)$$

今如a為$f(x)$ 之二重根 (*Double root*). 則$f(x)$ 可以$(x-a)^2$除盡.由第四十二節.故由 (2) 知$f(a)=0$, $f'(a)=0$.

如a為$f(x)$ 之三重根 (*Triple root*). 則$f(x)$ 可以 $(x-a)^3$除盡.故$f(a)=0$, $f'(a)=0$, $f''(a)=0$. 高級重根.可由此類推.

反之.如$f(a)=0$, $f'(a)=0$. 則 (2) 式即表示$f(x)$ 可以 $(x-a)^2$除盡.有時亦可以 $(x-a)$ 之較高次乘冪除盡.故a為 $f(a)=0$之重根.由此得一結果如下.

凡$f(x)=0$之重根.必常爲$f'(x)=0$之一根.其逆亦眞.

故求$f(x)=0$之重根.可即求$f(x)$及$f'(x)$之公因數.令之等於零而解所得之方程式.

求方程式$f(x)=0$含有重根之要件.爲令此方程式之判定式卽$f(x)=0$及$f'(x)=0$之消去式爲等於零.可依第九節之法解之.

例 1. 求$ax^2+bx+c=0$之判定式.

此卽爲求 $ax^2+bx+c=0$

及 $2ax+b=0.$

有一公共根之要件.今設以x乘第二式得

$$2ax^2+bx=0.$$

取此三方程式中諸係數與諸絕對項所成之行列式爲

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 2a & b \\ 2a & b & 0 \end{vmatrix}=0$$

或 $b^2-4ac=0$

例 2. 求 $x^3+ax+b=0$之判定式.

在此須求 $x^3+ax+b=0$

及 $3x^2+a=0$

之消去式.設以x乘第一式而以x及x^2乘第二式.共得五方程式爲

$$\begin{array}{rrrrrl} x^4 & & +ax^2 & +bx & & =0 \\ & x^3 & & +ax & +b & =0 \\ 3x^4 & & +ax^2 & & & =0 \\ & 3x^3 & & +ax & & =0 \\ & & 3x^2 & & +a & =0 \end{array}$$

其消去式爲

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & b \\ 3 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & a \end{vmatrix} = 0.$$

或　　　$4a^3+27b^2=0$ (參看第六十二節例3).

問　題

求以下諸曲線在各相當點之斜度.(1)由一近似數之計算.依第五十四節之法.(2)設x等於已知點之橫坐標加h.而令h之值漸次接近於零.

1.　$y=x^3$ (2, 8).

2.　$y=x^2-3x$ (0, 0).

3.　$y=x^3-3x+1$ (1, -1).

4.　不由範式而由定義求x^5-x之微係數.

5.　用前法求$3x^4+2x$之微係數.

由範式以求下列諸式之微係數.

6.　$\frac{1}{3}x^6-\frac{2}{5}x^5+x$

7.　$4x^3-6x^2+5x-8$

8.　$5x^9-6x^8+7x^6-4x^4-2x^2+3x-9$

9.　由展開以求微分.證明$(3x+2)^4$之微係數爲$12(3x+2)^3$.

10.　由前法證明$(x+a)^n$之微係數爲$n(x+a)^{n-1}$.

11. 求切於曲綫$y=x^4+3$上橫坐標爲-2之點之切綫方程式.

12. 試證切曲綫$y=x^3+ax+b$於(x_1, y_1)之切綫方程式爲$y=(3x_1^2+a)x-2x_1^3+b$.

13. 試證切曲綫$y=ax^2+2bx+c$於(x_1, y_1)之切綫方程式爲$y=2(ax_1+b)x-ax_1^2+c$.

14. 在曲綫$y=x^3-5x+7$上橫坐標爲-2與3之二點引切綫.求此二切綫之交點.

15. 在曲綫$y=2x^2-3x+1$上橫坐標爲-1與2之二點引切綫.求此二切綫之交角.

16. 求切曲綫$y=x^3$於$(2, 8)$之切綫與坐標二軸所成之三角形面積.

17. 求於曲綫$y=x^3-3x+7$上取一點.引切綫與$y=9x+3$平行.

18. 問於曲綫$y=x^3-4x^2+x-4$上可引若干切綫與直綫$y+4x+7=0$平行.且求其方程式.

19. 求於曲綫$y=x^3+x^2-6$上取一點.引切綫與OX成45°之角.

求x之相當值可使以下諸式爲增及爲損.

20. x^2+4x-7.

21. x^3-2x^2+8.

22. $x^4+8x-10$.

23. x^4-2x^2+6.

24. 求曲綫$y=3x^2-8x+7$最低之點.

25. 求曲綫$y=\frac{1}{4}x^4-2x^2+\frac{1}{4}$上之旋點.

求下列二式之極大值與極小值.

26. $3x^3-2x^2-5x+1$.

27. $3x^5-25x^3+60x-50$.

28. 求證周邊之長爲一定之最大矩形爲正方形.

29. 於長爲 a 吋寬爲 b 吋之矩形紙片之四角各切去一正方形,以作成一紙箱.問其容積爲極大時.所切去正方形每邊之長當爲幾何.

30. 等脚三角形之底邊爲 b 高爲 h. 求可內接於此形之最大矩形.

31. 求可內接於半徑爲 a 之球內而體積爲最大之直圓柱體.

32. 求於固定直圓錐上所能截成體積最大之直圓柱體.

33. 求在直綫 $3x+y=6$ 上取一點.令其與二點 $(5, 1)$ 及 $(7, 3)$ 之距離平方之和爲最小.

34. 於已知周邊之長諸扇形中.求其面積最大之一.

35. 長方形之箱.其底爲正方而頂部無蓋.係自一定量之木材作成.設不計算木材之厚及構造時之消費.今欲作成一容積最大之箱.其各邊當如何.

36. 將一長爲 l 之綫截成兩部.作成一圓形及一正方形.求證二者面積之和爲極小時.所截取二部分之比爲 $\pi:4$.

37. 將一長爲 b 呎寬爲 a 呎之鐵片.捲成一 U 字形水管.其長仍爲 b 呎.若其截口之形狀爲一矩形.其上再冠一半圓.則欲使其容積爲最大時.此矩形之長闊及半圓之半徑爲幾何.(1)水管之頂部有蓋.(2)水管之頂部無蓋.

38. 河流之速度爲a.擊於一水輪而施以速度爲x.設水輪之效率與輪之速度x及河流所失之速度$a-x$成比例.問效率最大時輪之速度如何.

39. 園工用一定長之鐵絲圍一長方形地域之三面.他面爲倚一已成之牆.問所圍之地域極大時.各邊之長如何.

40. 置一連續之梁於四支柱上.各支柱間之距離均相等.載重爲全梁一致.截口亦爲一致.其中部之偏倚以方程式表之爲$v=C(l^3x-6l^2x^2+10lx^3-5x^4)$.$C$爲常數.$l$爲二支柱間之距離.$x$爲任一點至支柱之距離.求偏倚最大之點.

41. 如ρ爲水之密度.t爲在$0°C$及$30°C$間之溫度.ρ_0爲$t=0$時水之密度.$l=.000052939$. $m=-.0000065322$. $n=.00000001445$.則$\rho=\rho_0(1+lt+mt^2+nt^3)$.試證當$t=4.108°$時.水之密度爲最大.

42. 試證於曲綫$y=ax^2+bx+c$.當按照a爲正或爲負.以定其圖形爲上凹嚮或下凹嚮.

43. 試證曲綫$y=x^3+ax+b$.當x爲正時爲上凹嚮.當x爲負時爲下凹嚮.

求定x可使下列曲綫爲上凹嚮及下凹嚮之諸値.

44. $y=x^3-3x^2-24$.

45. $y=x^5-5x+6$.

求下列諸曲綫之彎點.

46. $6y=x^3-6x^2+6x+1$.

47. $12y=x^4-6x^3+12x^2-2x+1$.

48. $y=3x^5-10x^4+10x^3+6x-8$.

49. $y=3x^5-5x^4+20x^3-60x^2+20x-5.$

50. 試證曲綫 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 常僅有一彎點.

求以下諸方程式之根至小數第二位.

51. $x^3-x^2-2x+1=0.$

52. $x^3+3x^2+4x+5=0.$

53. $x^3-2x-5=0.$

54. $x^3-3x^2-2x+5=0.$

55. $x^4-x^3-x^2+x-1=0.$

證以下二方程式有二等根且求其值.

56. $x^3-x^2-8x+12=0.$

57. $x^4-2(1-a)x^3+(1-3a)x^2+a=0.$

欲使下列諸方程式具有等根.其要件如何.

58. $x^3+3ax^2+b=0.$

59. $x^4+4ax^3+b=0.$

60. $x^4+4ax+b=0.$

61. $a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0.$

第六章 數種函數及其圖形

65. 多項式之平方根 以前所論之範圍僅限於多項式.今將討論多項式之平方根.

先設多項式爲n個一次實數因子.依第四十二節所述卽爲

$$y=\pm\sqrt{a_0(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)} \qquad (1)$$

此函數之圖形.可就

$$y=a_0(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n) \qquad (2)$$

之圖形而作成之.

(1)式之圖形與x軸之交點.全與(2)式相同.卽爲$x=r_1, x=r_2, \cdots, x=r_n$.因$x$在此諸值時.可使根號下之乘積爲零.卽$y$等於零也.

設(2)式之圖形在x軸之下.則(1)式根號下之乘積爲負.故y爲虛值.在圖形上無相當之點.如(2)式之圖形在x軸之上.y在(1)式爲兩實數.其量相等而符號相反.故圖形上相當之點有二.此二點之地位對於OX爲對稱.OX在此時卽爲對稱之軸.

因在根號下之式中所有之負值與正值.爲零所隔開.故能使此式爲零之x諸值.如r_1, r_2, $\cdots$, r_n等.在作圖上極關重要.此$x=r_1$, $x=r_2$, $\cdots$ $x=r_n$諸直綫.分平面爲數部分.凡x之諸值.能使(1)式根號下之乘積爲正.則其相當之部分有圖.如使(1)式根號下之乘積爲負.則其相當之部分無圖.故作此種曲綫之初步.爲引若干與OY平行之直綫.然後定其在各部分間之圖形.

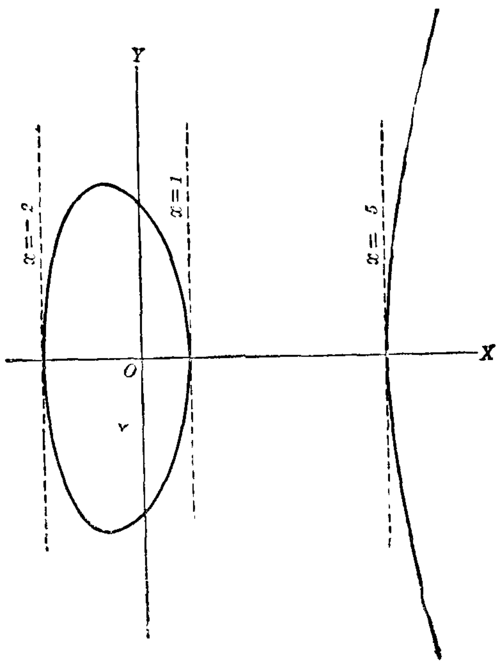
例 1.　$y=\pm\sqrt{(x+2)(x-1)(x-5)}$.

當 $x=-2, 1, 5$ 時. $y=0$. 故曲綫截 x 軸於此三點.

$x=-2$, $x=1$, $x=5$ 三直綫分平面爲四部(第六十五圖).

如 $x<-2$. 乘積中之任一因子皆爲負.故 y 爲虛數.其相當之部分無圖.

如 $-2<x<1$. 第一因子爲正.餘二因子爲負.故 y 爲實數.其相當之部分有圖.



第六十五圖

如 $1<x<5$. 前二因子爲正.最後因子爲負.故 y 爲虛數.其相當之部分無圖.

如 $x>5$. 三因子均爲正.故 y 爲實數.其相當之部分有圖.

此圖形共含兩相離之部分.其一爲閉合環狀.一爲無限分枝.

例 2. $y=\pm\sqrt{(x+4)(x+2)(x-1)(x-4)}$.

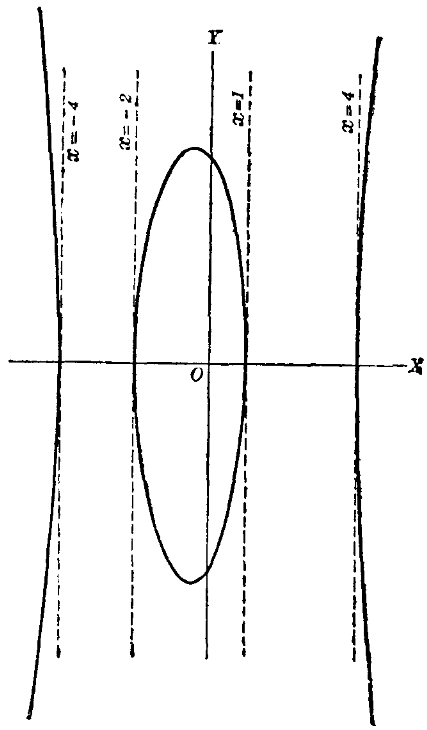
當 $x=-4, -2, 1, 4$ 時 $y=0$. 故圖形截 x 軸於此四點.

$x=-4, x=-2, x=1, x=4$ 四直綫分平面爲五部分如(第六十六圖).

如 $x<-4$. 根號下四因子均爲負.故 y 爲實數.圖形在第一部分.

如 $-4<x<-2$. 第一因子爲正.其餘爲負.故 y 爲虛數.第二部分無圖.

如 $-2<x<1$. 前二因子爲正.末二因子爲負.故 y 爲實數.圖形在第三部分.



第六十六圖

如 $1<x<4$. 最初三因子爲正.末一因子爲負.故 y 爲虛數.第四部分無圖.

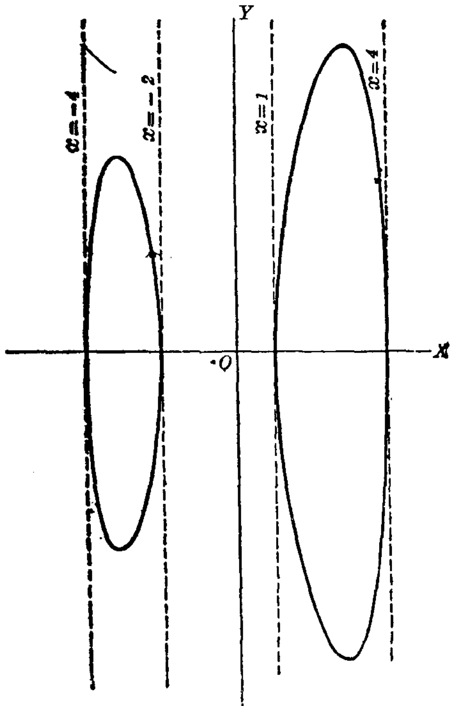
如 $x>4$. 四因子均爲正.故 y 爲實數.圖形在第五部分.

圖形共含三個相離之部分.一為閉合環狀.二為無限分枝.

例 3. $y=\pm\sqrt{-(x+4)(x+2)(x-1)(x-4)}$.

$x=-4$, $x=-2$, $x=1$, $x=4$ 四直線分平面為五部分(第六十七圖).

依前二例之法,得 y 在 $-4<x<-2$ 或 $1<x<4$ 之間為實.在其餘之 x 諸值為虛.故圖形共含二個分離之部分.各為一閉合環狀(第六十七圖).



第六十七圖

66. 前節所論之各因子均無一相同.如在根號之下有某因子為重出,則惟可令其第一次乘冪仍留其下.換言之.即當不令任何因子之平方立於根號之下也.故其結果必有一含 x 之因子立於根號之外.其現象與前例有別.

例 1. $y=\pm\sqrt{(x+2)(x-1)^2}$

$$=\pm(x-1)\sqrt{x+2}.$$

直線 $x=-2$ 分平面為二部分.

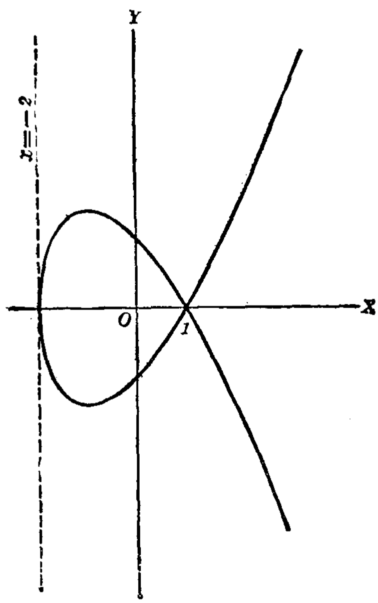
y 當 $x>-2$ 爲實.而當 $x<-2$ 爲虛.故圖形僅在直綫 $x=-2$ 之右方.此直綫之左方無圖(第六十八圖).

取此與前節例1.比較.可知以因子 $x-1$ 換其因子 $x-5$.可連結其閉合環狀與無限分枝成一交於(1, 0)之單純曲綫.

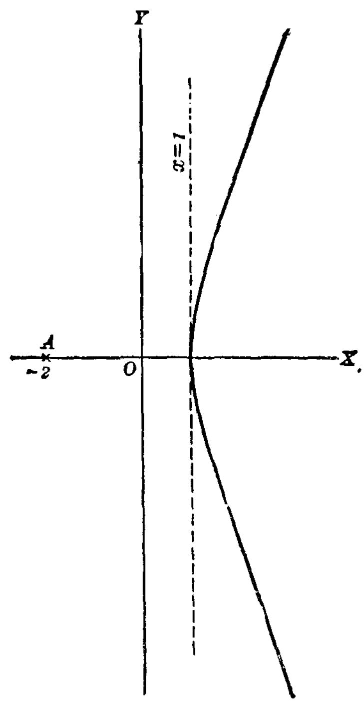
例 2. $y=\pm\sqrt{(x+2)^2(x-1)}$

$$=\pm(x+2)\sqrt{x-1}.$$

直綫 $x=1$ 分平面爲二部分(第六十九圖).



第六十八圖



第六十九圖

y 當 $x>1$ 時爲實.其相當之部分有圖.而當 $x<1$ 時爲虛.除 x 之值能使根號之係數爲零以外.餘均無圖.x 之值惟等於 -2 可適合於此要件.故在直綫 $x=1$ 之左.惟有一點 $(-2,0)$ 爲此函數之圖形.此點卽名爲獨點(*Isolated point*).

取此例與前節例1比較.可知以因子 $x+2$ 換其因子 $x-5$.能使其環狀縮小成一獨點.惟存一無限分枝.

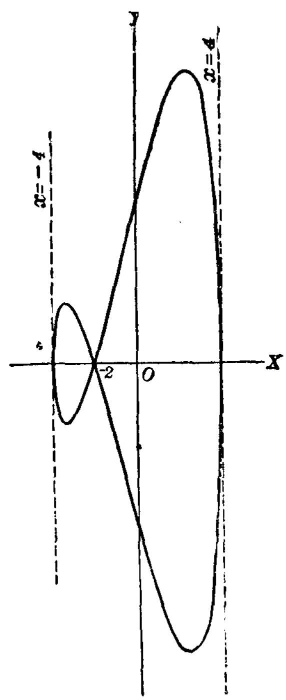
例 3. $y=\pm\sqrt{-(x+4)(x+2)^2(x-4)}$

$=\pm(x+2)\sqrt{-(x+4)(x-4)}$.

直綫 $x=-4$ 及 $x=4$ 分平面爲三部分(第七十圖).

y 當 $-4<x<4$ 時爲實.其相當之部分有圖.而在 $x<-4$ 或 $x>4$ 時其值爲虛.因在此間 x 之諸值無能使 $x+2$ 爲零者.故在此部分無圖.

取此與前節例3比較.以 $x+2$ 換其 $x-1$.可將二環狀合成一交於 $(-2,0)$ 之閉合曲綫.



第七十圖

67. 含y^2之方程式之函數 凡一代數多項式同時含y與x.則y名爲x之函數.因以任一値代x.其相當y之值卽可由方程式而求得也.如方程式所含y之次數不高於二.則可解此方程式而得y之值.其作圖之法與前相同.

通常解此方程式之結果.必爲

$$y=c\pm\sqrt{(x-r_1)(x-r_2)\cdots}$$

之形.取此與前例比較.可知$y=c$爲代$y=0$成一對稱之軸.其餘各部與前無異.

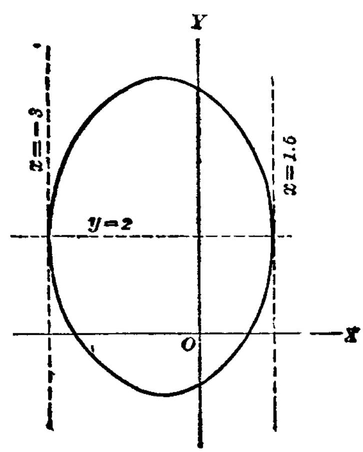
例. $2x^2+y^2+3x-4y-5=0.$

解之得 $y=2\pm\sqrt{-2x^2-3x+9}$

$$=2\pm\sqrt{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+3)}.$$

直綫$x=-3$及$x=\frac{3}{2}$分平面爲三部分(第七十一圖).依前例知此曲綫當全在$-3<x<\frac{3}{2}$之間.直綫$y=2$爲其對稱之軸.

若在某方程式中.y之次數高於二.而x之次數在二以下.則可解方程式得x之值.依前法求之.惟取y軸以代x軸而已.



第七十一圖

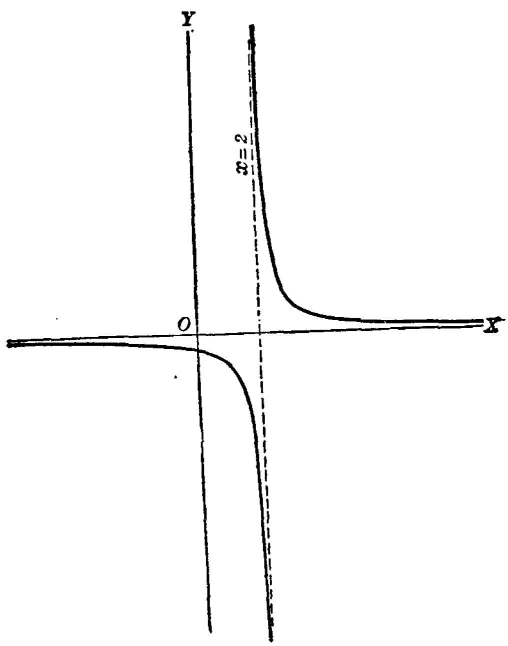
凡含x與y之方程式.因二者之中.任一皆可爲自變數而令其他爲函數.故由便利起見.解此方程式得y或x均無不可.

68. 含分數之函數　在含分數式之函數中.不能有使其分母爲零之x之值(第十一節).惟如$x=a$爲使其分母爲零而分子不爲零.則令x之值漸次接近於a.函數必漸次增大以至於無限.此時函數之圖形遂向上或向下無限伸延以接近於直綫$x=a$.然亦不能實達於此綫.故依此可得第十一節無窮大之圖解.

函數如爲無窮大.其圖形爲非連續.此爲代數函數中惟一非連續之例.

例 1.　$y=\dfrac{1}{x-2}$.

無論x爲何數值.y常爲實數.當$x<2$時y爲負數.當$x>2$時y爲正數.如x漸減而至於2.則y爲正以達於無窮大.如x漸增而至於2.則y爲負以達於無限大.故除2以外.可以任何數值代x.曲綫表示於第七十二圖.



第七十二圖

由視察得知x之值愈近於2.曲綫上之點必愈近於直綫$x=2$.如取一相當之值代x.可使此間之距離小至無極.同時此點離OX沿曲綫而達於無限遠.

一直綫與一曲綫在某位置.如將二者無限延長而其間之距離漸小以至於零爲極限時.此直綫名爲曲綫之漸近綫(*Asymptote*).

由此定義而知$x=2$及$y=0$兩直綫均爲此曲綫之漸近綫.於本例之漸近綫$x=2$.爲令x之值使此函數爲無窮大時所得.

凡方程式爲

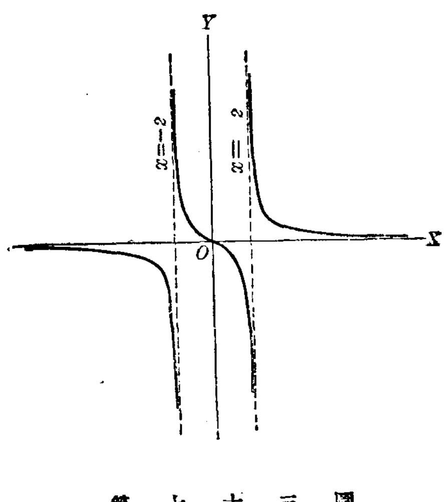
$$y=\frac{1}{x-a}$$

之形.所代表之曲綫.其形狀通常皆與第七十二圖相似.

例 2. $y=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}$.

如$x=-2$或$x=2$.y爲無窮大.故除此二數外.x可爲任何數值.曲綫表示於第七十三圖.

由類似例1之討論.可證明$x=-2$及$x=2$(x可使函數爲無窮大之值)及$y=0$三直綫皆爲此曲綫之漸近綫.



第七十三圖

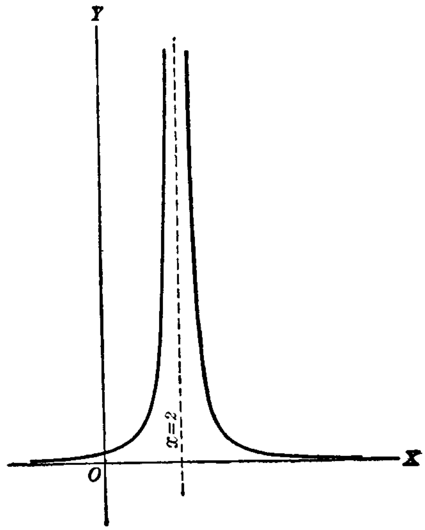
此曲綫之通式爲

$$y=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}.$$

由此可知凡代表

$$y=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}+\cdots$$

之圖形.與本例相似.



第七十四圖

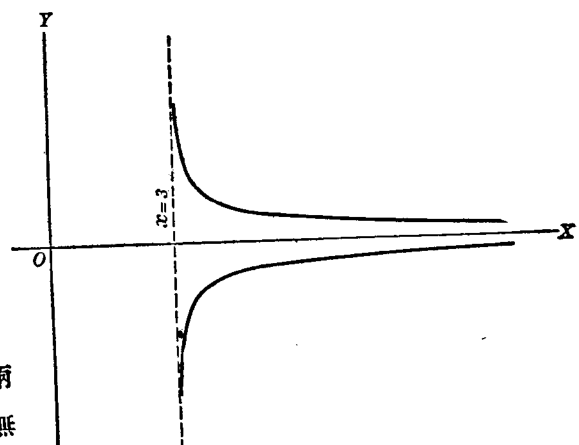
例 3. $y=\frac{1}{(x-2)^2}$.

除 2 以外. x 可爲任何數值.曲綫表示於(第七十四圖).由視察得 $x=2$ 及 $y=0$ 二綫爲此曲綫之漸近綫.

本例之通式爲　$y=\frac{1}{(x-a)^2}$.

此式之通式復爲

$$y=\frac{1}{(x-a)^2}+\frac{1}{(x-b)^2}+\cdots$$



第七十五圖

例 4. $y^2=\frac{1}{(x-3)}$.

解之得

$$y=\pm\sqrt{\frac{1}{x-3}}.$$

直綫 $x=3$ 分平面爲兩部分.在 $x<3$ 之一部無圖形.此直綫亦爲曲綫之漸近綫與前例相似.曲綫表示於第七十五圖.其通式爲

$$y^2=\frac{1}{x-a}.$$

注意此時x軸亦爲一漸近綫.

例 5. $y=\dfrac{x^2+1}{x}$.

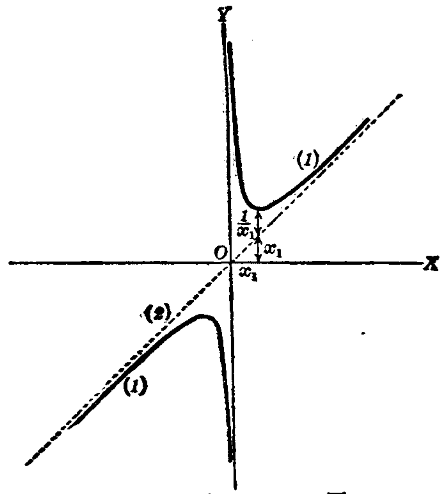
此式可書爲

$$y=x+\frac{1}{x} \qquad (1)$$

除零以外.x可爲任何數值.因x等於零則y爲無窮大.今設再引一直綫

$$y=x \qquad (2)$$

經過原點且二等分第一及第三兩象限.取(1)(2)兩式比較.如x爲任一值x_1.則y之相當值.在(1)爲$x_1+\dfrac{1}{x_1}$.在(2)爲x_1.此兩者之差爲$\dfrac{1}{x_1}$.故如x_1之值爲極大時.可使其差小於任何可名之數量.可知$y=x$爲此曲綫之一漸近綫.再由視察得$x=0$亦爲其一漸近綫(第七十六圖).

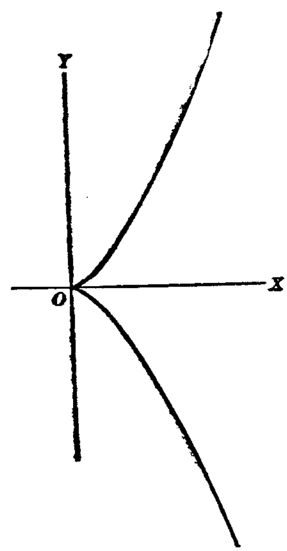


第七十六圖

69. 特殊之無理函數

例 1. $y^2=x^3$.

設書此式爲$y=\pm x\sqrt{x}$.則y爲x之無理函數.圖形對於OX爲對稱.且全立於y軸之右.曲綫表示於第七十七圖.名爲半立方拋物綫(*Semicubical parabola*).



第七十七圖

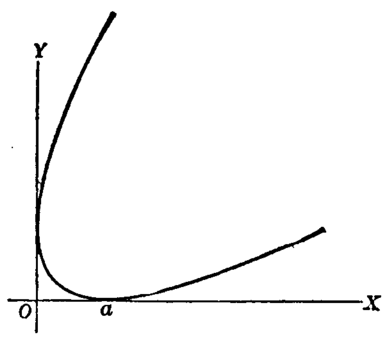
凡方程式如爲 $y=kx^n$ 之形.則當視 n 爲整數或分數以區別此函數爲有理或無理.前於第三十八節.已作成數種類此之有理函數之圖形.該時 k 等於 1 而 n 爲 3, 4, 5. 今則 n 爲 $\frac{3}{2}$.

凡函數如 $y=x^{\frac{1}{3}}$, $y=x^{\frac{1}{4}}$, $y=x^{\frac{1}{5}}$ 之圖形.皆可依上法得之.或改書此等方程式爲 $x=y^3$, $x=y^4$, $x=y^5$. 可立知其圖形與有理函數 $y=x^3$, $y=x^4$, $y=x^5$ 相似.惟將 x 軸與 y 軸互換.

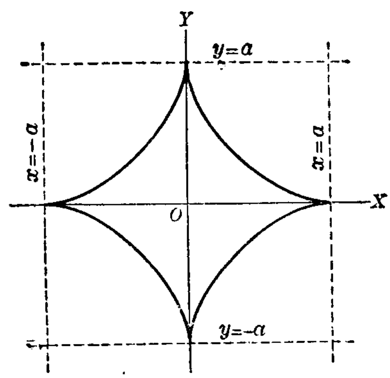
方程式 $y=x^n$ 所代表之圖形.均經過 (0, 0) (1, 1) 兩點.

例 2. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$.

此函數之圖形.惟在第一象限以內.因 x 與 y 必同時爲正值方能與此式適合.此曲綫表示於第七十八圖.爲一拋物綫之形.設將方程式書作 $y=(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}})^2$. 易知 y 爲 x 之無理函數.



第七十八圖



第七十九圖

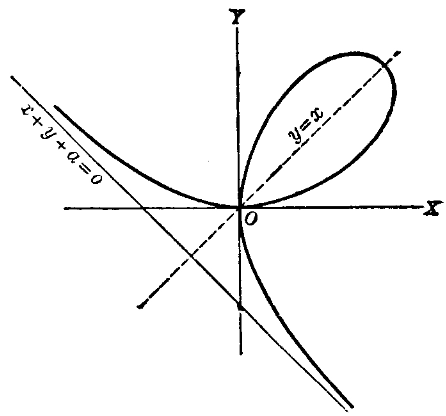
例 3. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

將此式書爲 $y=(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$. 故 y 爲 x 之無理函數.且知圖形對於 OX 爲對稱.而以 $x=a$ 及 $x=-a$ 二綫爲界.

同樣可表示圖形對於OY亦爲對稱.而以 $y=a$ 及 $y=-a$ 二綫爲界.曲綫表示於第七十九圖.名爲四歧點內擺綫 (*Four-cusped hypocycloid*).

例 4. $x^3+y^3-3axy=0.$

此方程式之圖形.表現於第八十圖.其名稱爲代加德氏之法倫綫(*Folium of Descartes*). 對於直綫 $y=x$ 爲對稱.而以$x+y+a=0$爲其漸近綫.本題之作圖雖可以任意數值代x而解三次方程式得y.然較簡易之法.係換爲他種坐標以求之(參看第十章例38).



第八十圖

問題

作下列諸方程式之圖形.

1. $y^2=(x-1)(x^2-4).$
2. $y^2=(x+2)(8x-x^2-15).$
3. $4y^2=(x+3)(2x-3)^2.$
4. $4y^2=x^2(x+1).$
5. $y^2=(x-3)^2(5-2x).$
6. $y^2=(3x+2)(9x^2-4).$
7. $y^2=(x-2)^2(4x^2-4x-15).$
8. $y^2=(4x^2-1)(x^2-4).$
9. $y^2=(2x+5)^2(6+x-x^2).$
10. $y^2=-x^2(x+3)^2(x+1).$
11. $y^2=x^2(x-2)^2(x-3).$
12. $y^2=(1-x^2)(x^2-9).$
13. $y^2=(2x-5)(x^2+2).$
14. $y^2=(x-2)^2(x^2+2).$

15. $y^2=(x-2)(2x-3)^2(x^2+x+1)$.

16. $16y^2=4x^4-x^6$.

17. $x^2-y^2-4x+6y-1=0$.

18. $4x^2+9y^2+4x-12y-31=0$.

19. $x^2-y^3+3y^2+y-3=0$.

20. $x^2-y^4(4+y)=0$.

21. $[x^2+3(y-1)][x^2-3(y-1)]=0$.

22. $(y-1)^2=(x-1)^2(x-4)$.

23. $(y-x)^2=9-x^2$.

24. $(x+y)^2=y^2(y+1)$.

25. $x^2-4xy+8y^2-y^4=0$.

26. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$.

27. $y^3=x^4$.

28. $y^3=x(x^2-4)$.

29. $y^3=x^2(x+2)$.

30. $(y+2)^3=(x-1)(x^2-4)$.

31. $xy=7$.

32. $xy=-7$.

33. $y=\frac{16}{1-x}$.

34. $y=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x+3)^2}$.

35. $2y=3x+\frac{1}{x}$.

36. $y-2=2(x-1)+\frac{2}{x-1}$.

37. $(y-2)^2=\frac{1}{x+1}$.

38. $y^2=\frac{x(x+2)}{x-2}$.

39. $y^2=\frac{x^3}{8-x}$.

40. $y^2=\frac{x^3}{x^2-6x+8}$.

41. $x^2y^2+36=4y^2$.

42. $16a^4y^2=b^2x^2(a^2-2ax)$.

43. $y^2=\frac{x^2(a+x)}{a-x}$.

44. $y(x^2+a^2)=a^2(a-x)$.

45. $y^2(x^2+a^2)=a^2x^2$.

46. $a^4y^2+b^2x^4=a^2b^2x^2$.

47. $y^2(a^2+x^2)=x^2(a^2-x^2)$.

48. $xy^2=4a^2(2a-x)$.

49. $y=x^2+\frac{1}{x}$.

50. $y=x+\frac{1}{x^2}$.

第七章　數種曲綫及方程式

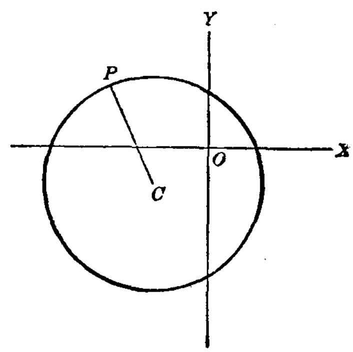
70. 圓(*Circle*) 當一曲綫有某種幾何性質之定義.則以代數記號表此定義.常可得該曲綫之方程式.所得之方程式.即爲其作圖及試驗其他種性質之基本.本章即將推出數種最關重要之曲綫方程式.今以圓爲開始.

圓爲一動點對於他一定點常保持其不變之距離之軌跡.此定點名爲圓之中心(*Center*).不變之距離名爲半徑(*Radius*).

令(d, e)爲中心C之坐標.r.爲半徑.設$P(x, y)$爲圓上一點(第八十一圖).則x與y由第十七節必適合於

$$(x-d)^2+(y-e)^2=r^2 \qquad (1)$$

反之.如x與y適合於(1)式.則(x, y)至(d, e)之距離爲r.故此點爲在圓上.因知(1)式即爲圓之方程式.



第八十一圖

展開(1)式得

$$x^2+y^2-2dx-2ey+d^2+e^2-r^2=0.$$

設以A乘全式.可得圓之普通方程式爲

$$Ax^2+Ay^2+2Gx+2Fy+C=0.$$

此式爲令　$d=-\dfrac{G}{A}$,　$e=-\dfrac{F}{A}$,　$d^2+e^2-r^2=\dfrac{C}{A}$.

例.　中心爲$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$半徑爲$\frac{2}{3}$之圓.其方程式爲

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}.$$

或　$$12x^2+12y^2-12x+8y-1=0.$$

71. <u>方程式</u> $Ax^2+Ay^2+2Gx+2Fy+C=0$. 其 $A\neq 0$.<u>如能代表一曲綫.所代表者必爲一圓.</u>

欲證明此定理.當先變方程式爲

$$x^2+2\frac{G}{A}x+y^2+2\frac{F}{A}y=-\frac{C}{A},$$

$$x^2+2\frac{G}{A}x+\frac{G^2}{A^2}+y^2+2\frac{F}{A}y+\frac{F^2}{A^2}=\frac{G^2}{A^2}+\frac{F^2}{A^2}-\frac{C}{A},$$

$$\left(x+\frac{G}{A}\right)^2+\left(y+\frac{F}{A}\right)^2=\frac{G^2+F^2-AC}{A^2}.$$

由此發生三種情形.

1. $G^2+F^2-AC>0$. 方程式爲前節(1)式之形.而 $d=-\frac{G}{A}$, $e=-\frac{F}{A}$, $r^2=\frac{G^2+F^2-AC}{A^2}$. 故所代表者爲一圓.其中心爲 $\left(-\frac{G}{A},\ -\frac{F}{A}\right)$. 半徑爲 $\sqrt{\frac{G^2+F^2-AC}{A^2}}$.

2. $G^2+F^2-AC=0$. 方程式爲

$$\left(x+\frac{G}{A}\right)^2+\left(y+\frac{F}{A}\right)^2=0.$$

x 與 y 如均爲實數.則僅有 $x=-\frac{G}{A}$, $y=-\frac{F}{A}$ 與此式適合.故此方程式惟代表一點 $\left(-\frac{G}{A},\ -\frac{F}{A}\right)$. 卽爲一圓當其半徑漸次接近於零時之極限.亦可名爲半徑等於零之圓.

3. $G^2+F^2-AC<0$. x 與 y 無實數值以適合於此方程式.因二正量之和決不能爲負也.故此式不代表曲綫.

例 1. 方程式$x^2+y^2-2x+4y+1=0$可書作

$$(x-1)^2+(y+2)^2=4.$$

爲代表一中心爲$(1,\ -2)$半徑爲2之圓.

例 2. 方程式$x^2+y^2-2x+4y+5=0$可書作

$$(x-1)^2+(y+2)^2=0.$$

僅有一點$(1,\ -2)$與此式適合.

例 3. 方程式$x^2+y^2-2x+4y+7=0$可書作

$$(x-1)^2+(y+2)^2=-2.$$

不代表何種曲綫.

72. 求適合於某要件之圓之方程式.必須先定$d,\ e,\ r$之值或$A,\ G,\ F,\ C$之比.因每一要件常爲含以上諸量之一方程式.今欲定三量之值.通常非有三方程式不可.故必需三要件方可以決定一圓.今擇三種述之如次.

1. 設知此圓經過一定點$(x_1,\ y_1)$. 則$(x_1,\ y_1)$必與圓之方程式適合.故$d,\ e,\ r$之值必適合於

$$(x_1-d)^2+(y_1-e)^2=r^2.$$

2. 設知此圓與一已知直綫相切.則圓之中心至已知直綫之距離必等於圓之半徑.故由第三十二節d, e, r必適合於

$$\frac{Ad+Be+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\pm r.$$

除非由他種條件得知中心爲在直綫之某方.上式之符號常不能明瞭.

3. 設知此圓之中心爲在於直綫$Ax+By+C=0$. 則d與e必適合於

$$Ad+Be+C=0.$$

例 1.　一圓經過三定點 $(2,\ -2)$, $(7,\ 3)$, $(6,\ 0)$. 試求其方程式.

d, e, r 必適合於以下三要件.

$$(2-d)^2+(-2-e)^2=r^2,$$

$$(7-d)^2+(3-e)^2=r^2,$$

$$(6-d)^2+(0-e)^2=r^2.$$

解此三式得 $d=2$, $e=3$, $r=5$. 故所求之方程式為

$$(x-2)^2+(y-3)^2=5^2,$$

或
$$x^2+y^2-4x-6y-12=0.$$

例 2.　一圓經過兩定點 $(2,\ -3)$, $(-4,\ -1)$. 而其中心在於直線 $3y+x-18=0$. 試求其方程式.

d, e, r 必適合於以下三要件.

$$(2-d)^2+(-3-e)^2=r^2,$$

$$(-4-d)^2+(-1-e)^2=r^2,$$

$$3e+d-18=0.$$

解此三式得 $d=\frac{3}{2}$, $e=\frac{11}{2}$, $r^2=\frac{145}{2}$. 故所求之方程式為

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{11}{2}\right)^2=\frac{145}{2}.$$

或
$$x^2+y^2-3x-11y-40=0.$$

例 3.　一圓切於兩直線 $17x+y-35=0$, $13x+11y+50=0$. 且知其中心在於直線 $88x+70y+15=0$. 試求其方程式.

d, e, r 必適合於以下三要件.

$$\frac{17d+e-35}{\sqrt{290}}=\pm r,$$

$$\frac{-13d-11e-50}{\sqrt{290}}=\pm r,$$

$$88d+70\ +15=0.$$

解此三式可得兩組答數爲

$$d=-\frac{5}{6},\qquad e=\frac{5}{6},\qquad r=\frac{\sqrt{290}}{6};$$

及 $$d=5,\qquad e=-\frac{13}{2},\qquad r=\frac{3\sqrt{290}}{20}.$$

故以下兩圓均適合於本題.

$$3x^2+3y^2+5x-5y-20=0.$$

$$40x^2+40y^2-400x+520y+2429=0.$$

例 4. 經過某三點之圓.由方程式 $Ax^2+Ay^2+2Gx+2Fy+C=0$ 極易知之.

設 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 爲所經過之三點.則 A, G, F, C 必適合於

$$Ax_1^2+Ay_1^2+2Gx_1+2Fy_1+C=0,$$

$$Ax_2^2+Ay_2^2+2Gx_2+2Fy_2+C=0,$$

$$Ax_3^2+Ay_3^2+2Gx_3+2Fy_3+C=0.$$

含未知數 A, G, F, C 之同次方程式共有四個.消去之結果爲

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{1}$$

卽爲所求之方程式(消去法參看第九節).

注意(1)式中x^2+y^2之係數爲

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

如此行列式等於零.則(1)式代表一直綫.惟當

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

卽(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)三點在於一直綫(第二十九節5).而不能決定一圓.

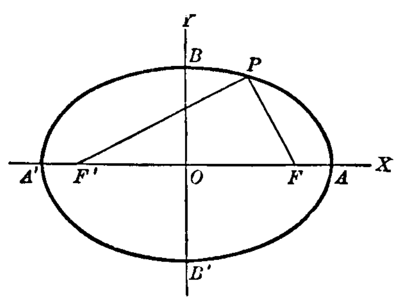
73. 橢圓(*Ellipse*)　<u>一動點至他二定點之距離之和爲一定.則其軌跡爲橢圓.</u>

此二定點名爲焦點(*Foci*).常以F及F'表之(第八十二圖).今以通過二焦點之直綫爲x軸.二焦點之半途爲原點.橢圓上一點P至二焦點之距離之和爲$2a$.卽

$$F'P+PF=2a \tag{1}$$

由三角形$F'PF$得

$$F'F<2a.$$



第八十二圖

故於x軸上F點之右必有一點能適合於以上之定義.因得

$$F'A+FA=2a.$$

或
$$(F'O+OA)+(OA-OF)=2a.$$

$$\therefore\quad OA=a.$$

今設$\dfrac{OF}{OA}=e$, $e<1$. 則F及F'之坐標爲$(\pm ae, 0)$.依第十七節計算$F'P$及FP之值代入(1)式得

$$\sqrt{(x+ae)^2+y^2}+\sqrt{(x-ae)^2+y^2}=2a \tag{2}$$

移第二根號於等號之右.自乘後再簡單之得

$$a-ex=\sqrt{(x-ae)^2+y^2}=FP \tag{3}$$

如移(2)式中第一根號.則爲

$$a+ex=\sqrt{(x+ae)^2+y^2}=F'P \tag{4}$$

由(3)(4)中任取一式皆得

$$(1-e^2)x^2+y^2=a^2(1-e^2) \tag{5}$$

或
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e)^2}=1 \tag{6}$$

惟因$e<1$.故$a^2(1-e^2)$爲正.今令之等於b^2.則(6)式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{7}$$

凡適合於(1)式之點.其坐標必適合於(7).反之.凡適合於(7)式之一點之坐標.亦必適合於(1).證明可先設(7)爲已知.即可推得(6)與(5).而(5)又可爲下式中之任一式.

$$x^2+2aex+a^2e^2+y^2=a^2+2aex+e^2x^2,$$

$$x^2-2aex+a^2e^2+y^2=a-2aex+e^2x^2,$$

此二式之平方根爲

$$F'P=\pm(a+ex)$$

及 $$FP=\pm(a-ex).$$

故其結果必爲以下四式之一.

$$F'P+FP=2a.$$

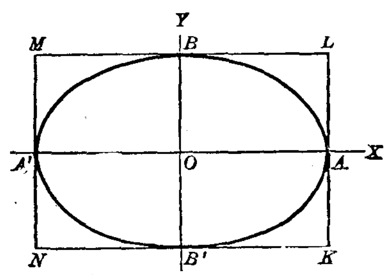
$$F'P-FP=2a,$$

$$-F'P+FP=2a,$$

$$-F'P-FP=2a.$$

最後之式爲不可能.因二負數之和決不能爲正.第二及第三兩式亦不合理.因 FP 與 $F'P$ 之差必小於 FF' 而 FF' 又當小於 $2a$. 故任一點能適合於(7).亦必適合於(1).即(7)爲橢圓之方程式無疑矣.

74. 於前節(7)式.設令 $y=0$. 得 $x=\pm a$.令 $x=0$. 得 $y=\pm b$. 故橢圓截 OX 於兩點 $A\ (a,\ 0)$, $A'\ (-a,\ 0)$. 截 OY 於兩點 $B\ (0,\ b)$, $B'(0,\ -b)$. A 與 A' 均名爲橢圓之頂點(*Vertices*).直綫 AA' 名爲橢圓之長軸(*Major axis*).其長爲 $2a$. BB' 名爲橢圓之短軸(*Minor axis*).其長爲 $2b$.



第八十三圖

先解(7)式得 y. 次得 x. 爲

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

及 $$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}.$$

此二方程式表示(1)橢圓對於 OX

及OY均爲對稱.(2) x之値不能大於a. (3) y之値不能大於b. 如以O爲中心.二邊之長各爲$2a$及$2b$.以完成一矩形$MLKN$(第八十三圖).則橢圓必完全在此矩形以內.再則如求得在某一象限內一部分之圖形.其在他象限者皆可由對稱得之.

75. 凡方程式爲第七十三節(7)式之形而$a>b$時.所代表者卽爲焦點在OX之一橢圓.因如令$b^2=a^2(1-e^2)$.可得

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

而由$OF=-OF'=ae$之關係.可決定F及F'之位置.

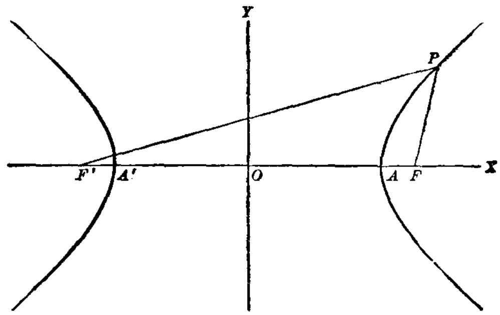
於作圖中求焦點.可以兩脚規立於B.以a爲半徑作一圓弧.弧與AA'之交點卽爲焦點.因$OB=b$, $OF=\sqrt{a^2-b^2}$.故$BF=a$.

同樣.凡方程式爲第七十三節(7)式之形而$b>a$時.所代表者卽爲焦點在OY之一橢圓.焦點與O之距離爲$\sqrt{b^2-a^2}$.而$BB'=2b$爲長軸.$AA'=2a$爲短軸.

(注意) 如二焦點愈近.e之値必愈小.而a與b之差亦愈微.故圓可視爲二焦點重合且二軸相等之橢圓.

76. 雙曲線(*Hyperbola*) 一動點至他二定點之距離之差爲一定.則其軌跡爲雙曲綫.

二定點名爲焦點.以F及F'表之(第八十四圖).今以FF'爲x軸.FF'之半途爲原點.雙曲綫上一點P至二焦點之距離之差爲$2a$.則



第八十四圖

$$F'P-FP=2a \tag{1}$$

或
$$-F'P+FP=2a \tag{2}$$

因於三角形 $F'PF$. 其 $FP, F'P$ 二邊之差必小於第三邊 FF'. 卽 $FF'>2a$. 故在 O 與 F 之間當有一點 A 適合於以上之定義.

因得
$$F'A-AF=2a,$$

或
$$(F'O+OA)-(OF-OA)=2a,$$

$$\therefore\ OA=a.$$

今設 $\dfrac{OF}{OA}=e$, $e>1$. 則 F 與 F' 之坐標爲 $(\pm ae, 0)$. 而 (1), (2) 兩式爲

$$\sqrt{(x+ae)^2+y^2}-\sqrt{(x-ae)^2+y^2}=2a \tag{3}$$

及
$$\sqrt{(x-ae)^2+y^2}-\sqrt{(x+ae)^2+y^2}=2a \tag{4}$$

移二根之一於等號之右。自乘後再簡單之.由(3)得

$$ex+a=\sqrt{(x+ae)^2+y^2}=F'P,$$

或
$$ex-a=\sqrt{(x-ae)^2+y^2}=FP.$$

由(4)得

$$-(ex+a)=\sqrt{(x+ae)^2+y^2}=F'P.$$

或
$$-(ex-a)=\sqrt{(x-ae)^2+y^2}=FP.$$

以上四式中任一式皆爲

$$(1-e^2)x^2+y^2=a^2(1-e^2) \tag{5}$$

或
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1 \tag{6}$$

惟因 $e>1$. 故 $a^2(1-e^2)$ 爲負.設令之等於 $-b^2$. 卽得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{7}$$

凡適合於(1)式或(2)式之點.必適合於(7).反之.如有一點 P 之坐標與(7)式適合.則

$$F'P=\pm(ex+a),$$

及
$$FP=\pm(ex-a).$$

故必爲以下四式之一.

$$F'P-FP=2a,$$

$$-F'P+FP=2a,$$

$$F'P+FP=2a,$$

$$-F'P-FP=2a.$$

第三式 $F'P+FP=2a$ 爲不可能.因 $F'P+FP>FF'$ 而 $FF'>2a$. 第四式 $-F'P-FP=2a$ 亦易知爲不合理.故合於(7)式之任一點必與(1)式或(2)式適合.因知(7)式卽爲雙曲綫之方程式.

77. 於前節(7)式.設令 $y=0$. 得 $x=\pm a$. 故雙曲綫截 OX 於兩點 A, A'. 此二點卽名爲雙曲綫之頂點.設令 $x=0$. 得 y 爲虛數.故曲綫不與 OY 相交.

解前節(7)式得y與x

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

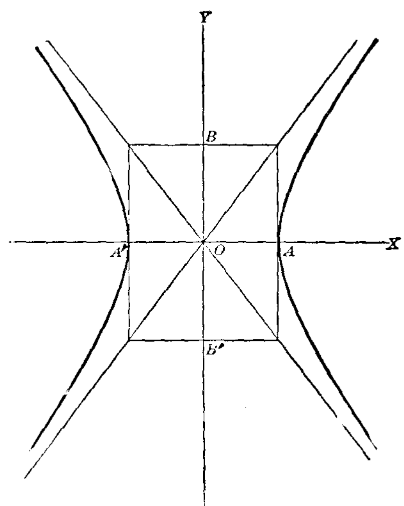
$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}.$$

此二方程式表示(1)曲綫對於OX及OY均為對稱.(2)x之值不能小於a.(3)y可任為何值.

再則y之方程式可書為

$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}.$$

當x之值漸增.$\frac{a^2}{x^2}$則漸次減小至於以零為極限.故雙曲綫如愈延長.必愈接近於直綫$y=\pm\frac{b}{a}x$.此直綫為雙曲綫之漸近綫.即如第八十五圖所作矩形之對角綫也.用此綫可為作圖之引導.直綫AA'名為雙曲綫之橫軸(*Transverse axis*).BB'名為雙曲綫之共軛軸(*Conjugate axis*).



第八十五圖

78. 凡方程式為第七十六節(7)式之形.其a與b均為實數時.為代表焦點在AA'之一雙曲綫.如令$-b^2=a^2(1-e^2)$得

$$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

而由$OF=-OF'=ae$之關係.可得焦點之位置.

同樣.凡方程式爲

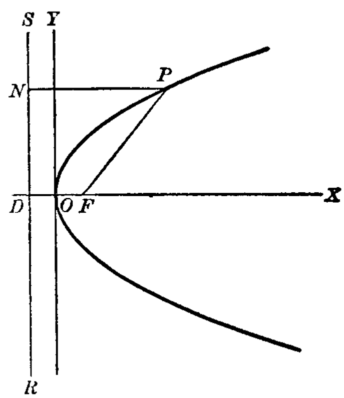
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

卽代表焦點在 BB' 之一雙曲綫.

設 $b=a$. 此雙曲綫卽名爲等邊雙曲綫 (*Equilateral hyperbola*). 其方程式爲 $x^2-y^2=a^2$ 或 $-x^2+y^2=a^2$.

79. 拋物線(*Parabola*) 拋物綫爲一動點至一定點及直綫爲等距離之軌跡.

定點名爲焦點(*Focus*). 定直綫名爲準綫(*Directrix*). 今取經過焦點且垂直於準綫之直綫爲 x 軸. 焦點至準綫間之中點爲原點. 而以 p 表焦點之横坐標. 於第八十六圖. F 爲焦點. RS 爲準綫. 其與 OX 之交點爲 D. P 爲曲綫上任一點. 故 F 之坐標爲 $(p, 0)$. D 之坐標爲 $(-p, 0)$. RS 之方程式爲 $x=-p$.



第八十六圖

自 P 引直綫與 OX 平行. 交 RS 於 N. 設 F 在 RS 之右. P 亦必在 RS 之右. 由定義爲

$$FP=NP.$$

反之. 如 F 在 RS 之左. P 亦必在 RS 之左. 而

$$FP=-NP.$$

二者均爲

$$\overline{FP}^2=\overline{NP}^2.$$

惟　$\overline{FP}^2=(x-p)^2+y^2,\qquad NP=x+p.$

故　$$(x-p)^2+y^2=(x+p)^2.$$

或　$$y^2=4px \tag{1}$$

拋物綫上任一點之坐標皆與(1)式適合.反之.如有一點與(1)式適合.則其所在必爲$FP=\pm NP$.故卽在此拋物綫上.

方程式(1)表示(1)曲綫對於OX爲對稱.(2)x與p之符號相同.(3)如x漸增y亦因之而增.

曲綫於第八十六圖爲當p值爲正之時.如p值爲負.則F在O之左.而曲綫向x軸之負端伸延.

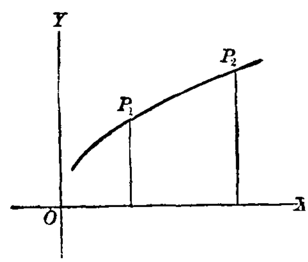
同樣.方程式$x^2=4py$代表一焦點在y軸之拋物綫.當視p值爲正或負以定此曲綫爲向y軸之正端或負端伸延.總之O均名拋物綫之頂點(*Vertex*).O與F所定之直綫名軸(*axis*).

80. 設$P_1(x_1, y_1)$與$P_2(x_2, y_2)$爲一拋物綫上兩點(第八十七圖).則

$$y_1^2=4px_1$$

$$y_2^2=4px_2;$$

故　$$\frac{y_1^2}{y_2^2}=\frac{x_1}{x_2}.$$



第八十七圖

卽凡在拋物綫任二點之縱坐標之平方比,常等於其橫坐標之比.反之.凡在於某曲綫任二點之縱坐標之平方比等於其橫坐標之比時.此曲綫爲拋物綫.

因設P_1爲曲綫上一定點.而P爲此曲綫上另外任一點.則由假設

$$\frac{y^2}{y_1^2}=\frac{x}{x_1},$$

即
$$y^2=\frac{y_1^2}{x_1}x.$$

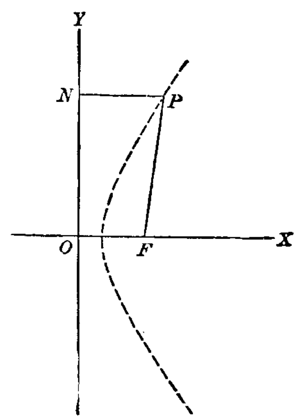
如令$p=\frac{y_1^2}{4x_1}$.則上式即為$y^2=4px$.

81. 圓錐曲綫(*Conic*) 一動點至一定點之距離與此點至一定直綫之距離成一常數比.則其軌跡為圓錐曲綫.

此定點名焦點.定直綫名準綫.常數比名離心率(*Eccentricity*).

今以準綫為y軸.經過焦點且垂直於準綫之直綫為x軸.焦點之坐標為$(c,0)$ c即代表OF.視F為在O之右或左而定其值之正負.

設P為圓錐曲綫上任意一點.連結P與F.引PN垂直於OY.由定義視P在OY之右或左.得



第八十八圖

$$FP=\pm e\cdot NP \tag{1}$$

二者均為

$$\overline{FP}^2=e^2\cdot\overline{NP}^2$$

惟 $\overline{FP}^2=(x-c)^2+y^2,\quad NP=x.$

故 $$(x-c)^2+y^2=e^2x^2 \tag{2}$$

反之.如P之坐標適合於(2).則亦必適合於(1).故(2)為圓錐曲綫之方程式.

拋物綫爲圓錐曲綫之一種.其離心率$e=1$.

橢圓亦爲圓錐曲綫之一種.其離心率$e<1$(第七十三節).

因如P(第八十九圖)爲橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$上一點.則由第七十三節可得

$$FP=a-ex, \qquad F'P=a+ex,$$

或

$$FP=e\left(\frac{a}{e}-x\right), \qquad F'P=e\left(\frac{a}{e}+x\right).$$

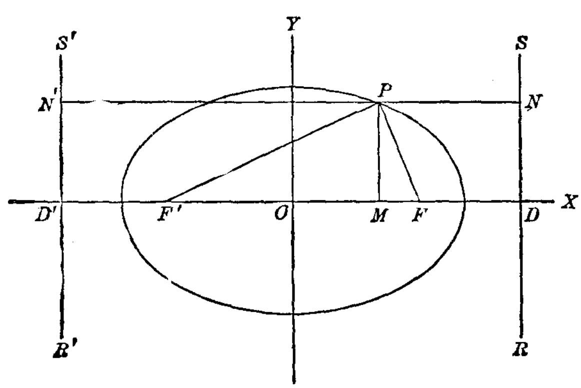
今如取一點D.令$OD=\frac{a}{e}$.再取他點D'.令$OD'=-\frac{a}{e}$.引DS及$D'S'$二綫垂直於OX.再引縱綫MP及垂直於DS與$D'S'$之直綫$N'PN$.則得

$$\frac{a}{e}-x=OD-OM=MD=PN,$$

$$\frac{a}{e}+x=D'O+OM=D'M=N'P.$$

$$\therefore FP=e\cdot PN, \qquad F'P=e\cdot N'P.$$

故橢圓有二準綫.其與中心之距離爲$\pm\frac{a}{e}$.如橢圓爲圓時.$e=0$.而準綫在無窮遠.



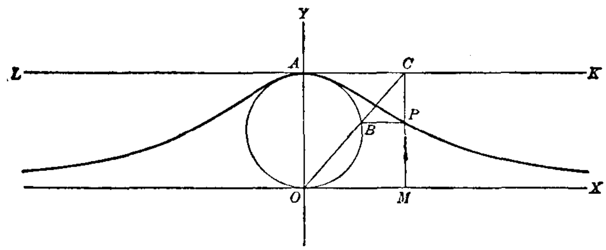
第八十九圖

同法可證明雙曲綫亦爲圓錐曲綫之一種.其離心率$e>1$.

於第一百十四節例3當證明凡圓錐曲綫常爲橢圓雙曲綫拋物綫中之一.

82. 維尺(*Witch*)曲綫 設OBA(第九十圖)爲一圓.OA爲其直徑.LK爲切圓於A之切綫.自O引任意直綫截圓於B.截LK於C.自B引直綫平行於LK.再自C引直綫垂直於LK.名此二直綫之交點爲P.則P之軌跡爲「維尺」曲綫.

欲求其方程式.卽令O爲原點.OA爲y軸.圓之直徑爲$2a$.連結CP.交OX於M.而P之坐標爲(x, y).卽得



第九十圖

$$OM=x,\quad MP=y,\quad OA=MC=2a.$$

於三角形OMC.

$$\frac{MP}{MC}=\frac{OB}{OC}=\frac{OB\cdot OC}{\overline{OC}^2}. \tag{1}$$

設連結AB.則OBA卽成一直角三角形.因得

$$OB\cdot OC=\overline{OA}^2,\qquad \overline{OC}^2=\overline{OM}^2+\overline{MC}^2,$$

故
$$\frac{MP}{MC}=\frac{\overline{OA}^2}{\overline{OM}^2+\overline{MC}^2} \tag{2}$$

即
$$\frac{y}{2a}=\frac{4a^2}{x^2+4a^2}\tag{3}$$

$$y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}\tag{4}$$

反之.如任意一點與(4)式適合.即可循序推出(3), (2), (1)三式.因而證明此點在於維尺曲綫.

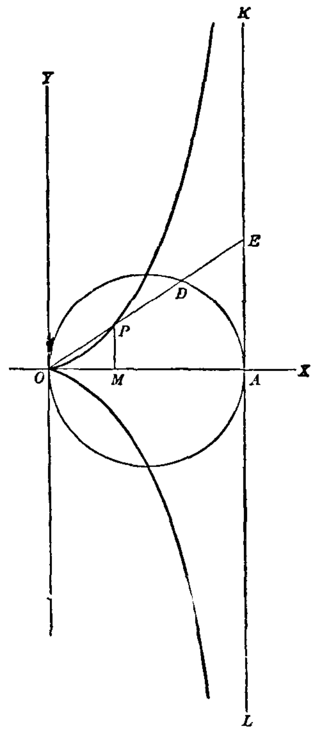
解(4)式得x爲

$$x=\pm 2a\sqrt{\frac{2a-y}{y}}.$$

此式表現(1)曲綫對於OY爲對稱.(2)y不能爲負數或大於$2a$.(3)$y=0$爲一漸近綫.

83. 蔓葉綫 (*Cissoid*)

設ODA爲一圓.OA爲其直徑(第九十一圖).LK爲切圓於A之切綫.自O引任意直綫截圓於D.截LK於E.再於OE取OP之距離令等於DE.則P之軌跡爲蔓葉綫.



第九十一圖

欲求其方程式.即取O爲原點.OA爲x軸.圓之直徑爲$2a$.引MP垂直於OA.如連結AD.即完成二相似三角形ADE及OMP.

故
$$\frac{OP}{MP}=\frac{AE}{DE}\tag{1}$$

由假設
$$DE=OP.$$

$$\therefore \qquad \overline{OP}^2 = MP \cdot AE \qquad (2)$$

再於二相似三角形 OAE 及 OPM.

$$\frac{AE}{OA} = \frac{MP}{OM} \qquad (3)$$

代 AE 於 (2) 式得

$$\overline{OP}^2 = \frac{OA \cdot \overline{MP}^2}{OM} \qquad (4)$$

或
$$x^2 + y^2 = \frac{2ay^2}{x} \qquad (5)$$

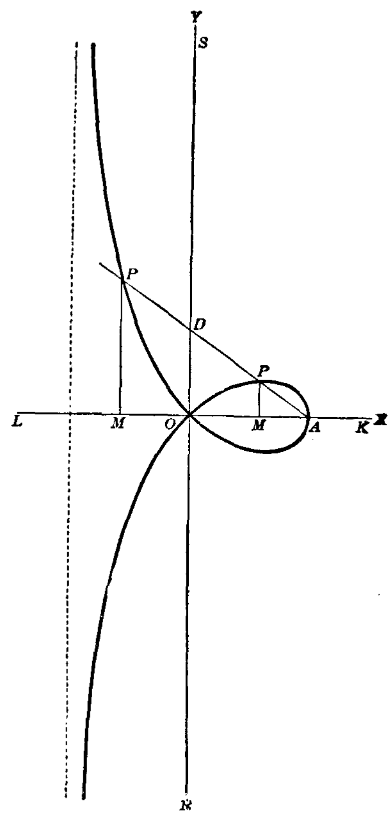
故
$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x} \qquad (6)$$

此方程式與蔓葉綫上任一點之坐標適合.反之.如 (6) 式爲已知.卽可推得 (5) 與 (4).并由 (1) 與 (3) 得 $OP = DE$. 故 (6) 爲蔓葉綫之方程式.此式亦可書爲

$$y = \pm x\sqrt{\frac{x}{2a - x}}.$$

此可表現(1)曲綫對於 OX 爲對稱.(2) x 之値不能大於 $2a$ 或小於零.(3) $x = 2a$ 爲一漸近綫.

84. 環索綫(*Strophoid*) 令 LK 及 RS 爲直交於 O 之二直綫(第九十二圖).A 爲 LK 上一定點.自 A 引任意直綫截 RS 於 D. 再從 D 沿 AD 兩方面均取 DP 與 OD 相等.則 P 之軌跡名爲環綫索.



第九十二圖

欲求此方程式.卽以 LK 爲 x 軸.RS 爲 y 軸.A 之坐標爲 $(a, 0)$.由定義得知 P 可在任一象限以內.設取 AD 之正方向爲自 A 以達於 D.則當 P 在第一象限時.$OD=PD$.

在第二象限時.　$OD=-PD$.

在第三象限時.　$-OD=-PD$.

在第四象限時.　$-OD=PD$.

總括以上四式.均爲

$$\overline{OD}^2=\overline{PD}^2 \tag{1}$$

自二相似三角形 OAD 及 APM.

$$\frac{OD}{AD}=\frac{MP}{AP}=\frac{y}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}},$$

$$\frac{PD}{AD}=\frac{MO}{AO}=\frac{OM}{OA}=\frac{x}{a}.$$

故
$$\frac{y^2}{(x-a)^2+y^2}=\frac{x^2}{a^2}. \tag{2}$$

此式適合於環索綫任一點之坐標.反之.如(2)式爲已知.卽可推得(1)式.故(2)式爲環索綫之方程式.此式亦可書爲

$$y=\pm x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

表現(1)曲綫對於 OX 爲對稱.(2) x 之值不能小於 $-a$ 或大於 $+a$.(3) $x=-a$ 爲一漸近綫.

85. 例題 用某曲綫之方程式以解關於此曲綫之問題.在本書爲最常見.以下諸例.均根據於以前所述之原理.

例 1. 試證在於橢圓任二縱綫之平方比.等於在長軸上爲其縱綫之足所分二綫分之乘積之比.

卽於第九十三圖求證

$$\frac{\overline{M_1P_1}^2}{\overline{M_2P_2}^2}=\frac{A'M_1\cdot M_1A}{A'M_2\cdot M_2A}.$$

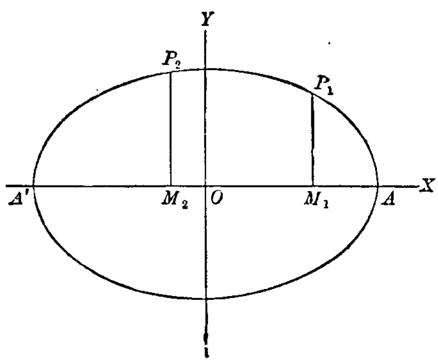
設P_1之坐標爲(x_1, y_1). P_2之坐標爲(x_2, y_2). 則

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\qquad \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1.$$

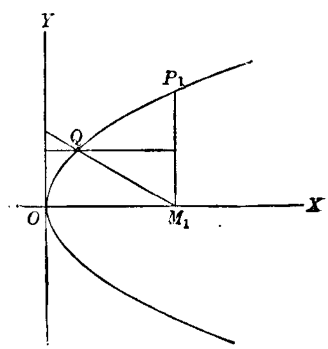
故 $$\frac{y_1^2}{y_2^2}=\frac{a^2-x_1^2}{a^2-x_2^2}=\frac{(a-x_1)(a+x_1)}{(a-x_2)(a+x_2)}.$$

惟 $y_1=M_1P_1$, $a+x_1=A'O+OM_1=A'M_1$, $a-x_1=OA-OM_1=M_1A$.

$y_2=M_2P_2$, $a+x_2=A'M_2$, $a-x_2=M_2A$. 故如題云.



第九十三圖



第九十四圖

例 2. 設M_1P_1爲拋物綫$y^2=4px$上一點P_1之縱坐標.通過M_1P_1之中點引一直綫與OX平行,截曲綫於Q. 求證M_1Q在y軸上之截部等於$\frac{2}{3}M_1P_1$.

設P_1(第九十四圖)之坐標爲(x_1, y_1).由拋物綫之方程式得$x_1=\frac{y_1^2}{4p}$.而由作圖得Q之縱坐標爲$\frac{y_1}{2}$.又因Q亦在拋物綫上,代$y=\frac{y_1}{2}$於方程式$y^2=4px$.求得其橫坐標爲$\frac{y_1^2}{16p}$.

已知Q之坐標爲$\left(\frac{y_1^2}{16p}, \frac{y_1}{2}\right)$. M_1之坐標爲$(x_1, 0)$或$\left(\frac{y_1^2}{4p}, 0\right)$.

故M_1Q之方程式由第二十九節爲

$$8px+3y_1y-2y_1^2=0.$$

此直綫在y軸上之截部爲$\frac{2}{3}y_1=\frac{2}{3}M_1P_1$. 故如題云.

問　題

1. 圓之中心爲$(2, -4)$. 半徑爲3. 求其方程式.

2. 圓之中心爲$\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$. 半徑爲6. 求其方程式.

3. 以連結$(2, 3)$, $(-3, 1)$二點所成直綫爲半徑之圓. 求其方程式.

4. 以連結$(a, -b)$, $(-a, b)$二點所成直綫爲直徑之圓. 求其方程式.

5. 圓之半徑爲a. 且切y軸於原點. 求其方程式.

6. 圓之半徑爲a. 且同時切於兩軸. 求其方程式.

7. 以一直綫$2x-3y+6=0$夾於二軸間之部分爲直徑之圓. 求其方程式.

求以下各圓之中心及半徑.

8. $x^2+y^2+4x-10y-36=0$.

9. $x^2+y^2+4x-6y+1=0$.

10. $3x^2+3y^2-9x+6y-2=0$.

11. $5x^2+5y^2+2x-4y+1=0$.

12. 設有二圓之方程式僅其絕對項相異. 求證此二圓爲同心.

13. 試證二圓 $x^2+y^2+2Gx+2Fy+C=0$ 及 $x^2+y^2+2G'x+2F'y+C'=0$. 當$\sqrt{(G-G')^2+(F-F')^2}=\sqrt{G^2+F^2-C}\pm\sqrt{G'^2+F'^2-C'}$時爲互相切.

14. 通過三點(0, 3),(3, 0),(0, 0)之圓.試求其方程式.

15. 以 (0, 2), (−1, 0), (0, −2) 爲頂點之三角形.求其外接圓之方程式.

16. 以$x+y-2=0$, $9x+5y-2=0$, $y+2x-1=0$ 爲三邊之三角形.求其外接圓之方程式.

17. 與$x^2+y^2-5x+4y-1=0$同心且經過(−2, 4)之圓.求其方程式.

18. 切於兩坐標軸且過定點(4, 2)之圓.求其方程式.

19. 切於兩坐標軸而中心在於直綫 $2x-3y+6=0$ 之圓.求其方程式.

20. 圓之半徑爲5.且知其經過二定點 (2, −1), (3, −2).問其方程式如何.

21. 經過二定點(1, −2),(−2, 2)而中心在於直綫$8x-4y+9=0$之圓.試求其方程式.

22. 經過二定點 (−3, 2), (4, 9) 且切於OX之圓.問其方程式如何.

23. 切於二直綫$x-3=0$, $x-7=0$而中心在於直綫$y=2x+4$之圓.問其方程式如何.

24. 圓之中心在於直綫$2x+y=0$. 此圓經過(4, 2)且切於直綫$4x-3y-15=0$. 問其方程式如何.

25. 連結$(-3, 0)$,$(3, 0)$爲底邊而高爲4之三角形.求其外接圓之方程式.

26. 橢圓之焦點爲$(\pm3, 0)$.長軸爲8.求其方程式.

27. 橢圓之焦點爲$(0, \pm2)$.長軸爲6.求其方程式.

28. 橢圓之頂點爲$(\pm6, 0)$.一焦點爲$(4, 0)$.求其方程式.

29. 設橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$經過二定點$(1, 4)$, $(2,-3)$.求定半軸a, b.

30. 橢圓之頂點爲$(\pm5, 0)$.焦點爲$(\pm3, 0)$.求其方程式.

31. 橢圓之中心在原點.離心率爲$\frac{2}{3}$.長軸沿OX而其長爲8.求其方程式.

32. 橢圓之中心爲原點.一焦點爲$(-3, 0)$.短軸爲8.求其方程式.

33. 橢圓之焦點爲$(0, \pm6)$.離心率爲$\frac{4}{7}$.求其方程式.

34. 求橢圓$9x^2+16y^2=144$之半軸,離心率,焦點.

35. 橢圓之焦點爲在中心與頂點之半途.長軸爲沿OX.求其方程式及離心率.

36. 橢圓之中心爲原點.長軸沿OX.離心率爲$\frac{2}{3}$.焦點上縱綫之長爲5.求其方程式.

37. 橢圓之焦點上縱綫之長等於短軸四分之一.求其方程式及離心率.

38. 如連結橢圓兩軸正端之直綫,與連結原點及在左焦點之縱綫上端所成之直綫平行.求其離心率.

39. 橢圓之焦點爲$(\pm2, 0)$.準綫爲$x=\pm5$.求其方程式.

40. 求橢圓$2x^2+3y^2=1$之半軸,焦點,及準綫.

41. 雙曲綫之焦點爲$(\pm 3,\ 0)$.横軸爲4.求其方程式.

42. 雙曲綫之焦點爲$(0,\ \pm 4)$.横軸爲4.求其方程式.

43. 以原點爲中心OX爲横軸之雙曲綫.如知其横軸爲5.離心率爲$\frac{4}{3}$.求其方程式.

44. 雙曲綫之頂點爲$(\pm 4,\ 0)$.離心率爲$\frac{7}{5}$.求其方程式.

45. 試證等邊雙曲綫之離心率等於正方形之對角綫與邊之比.

46. 雙曲綫之頂點在中心與焦點之半途.長軸沿OX.求其方程式.

47. 經過$(2,\ 4)$而以OX及OY爲二軸之雙曲綫.其離心率爲3.問其方程式如何.

48. 求經過$(5,\ -2)$之等邊雙曲綫方程式.

49. 求經過$(2,\ -1)$且以$\left(0,\ \pm\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$爲焦點之雙曲綫方程式.

50. 雙曲綫二半軸之和爲17.離心率爲$\frac{13}{12}$.設二軸爲沿OX及OY.試求其方程式.

51. 求以$y=\pm\frac{3}{5}x$爲漸近綫且經過$(1,\ 1)$之雙曲綫方程式.

52. 試以雙曲綫之離心率表其二漸近綫間之夾角.

53. 如雙曲綫之頂點爲自其中心至焦點之距離三分之二.求其二漸近綫之斜度.

54. 求雙曲綫$4x^2-25y^2=100$之離心率,焦點,及漸近綫.

55. 雙曲綫之焦點爲$(\pm 4,\ 0)$.漸近綫爲$y=\pm\frac{2}{3}x$.求其方程式.

56. 如 k 爲常數.試證 $\dfrac{x^2}{a^2-k^2}+\dfrac{y^2}{b^2-k^2}=1$ 當 $k^2<b^2$ 時代表一與 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 同焦點之橢圓.當 $k^2>b^2$ 而 $<a^2$ 時(a^2 視爲大於 b^2)代表一與 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 同焦點之雙曲綫.

57. 雙曲綫之焦點爲 $(\pm 7, 0)$. 準綫爲 $x=\pm 4$. 求其方程式.

58. 求雙曲綫 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 之離心率,焦點,準綫,漸近綫.

59. 自雙曲綫之一焦點引垂直於一漸近綫之垂綫.試證其垂足至中心及焦點之距離各爲 a 及 b.

60. 試證等邊雙曲綫上任一點至中心之距離爲其焦點距離之比例中項.

61. 設拋物綫 $y^2=4px$ 經過 $(2, -3)$. 求定 p 值.

62. 拋物綫狀之拱門.底端之闊爲 29 呎.頂點與水平面之距離爲 8 呎.今於距頂點 4 呎處置一橫梁.問其長爲幾何.

63. 長 240 呎之懸橋.爲以下垂之鏈繫於一拋物綫狀之鐵纜上而成.設所繫之鏈最長者爲 80 呎.最短者爲 30 呎.問離懸橋中點 50 呎之處.所繫之鏈爲長幾何.

64. 通過拋物綫 $y^2=4px$ 之頂點及在焦點之縱綫之二端作一圓.問其方程式如何.

65. 通過拋物綫 $y^2+12x=0$ 之頂點,焦點,及在焦點之縱綫之上端作一圓.問其方程式如何.

63. 求一點與二定點 $(3, -2)$, $(-4, 1)$ 等距離之軌跡方程式.

67. 求一點至 x 軸之距離五倍於至 y 軸之距離之軌跡方程式.

68. 求一點至x軸之距離等於至(0, 3)之距離三分之一之軌跡方程式.

69. 求一點至(4, −2)及直綫$x=3$爲等距離之軌跡方程式.

70. 求一點至直綫$3x+4y-6=0$之距離二倍於至(2, 1)之距離之軌跡方程式.

71. 一動點至y軸之距離常等於其至(5, 0)之距離.求其軌跡方程式.

72. 一動點至(0, 2)之距離之平方常等於其至y軸之距離之立方.求其軌跡方程式.

73. 求至直綫$4x+3y-6=0$之距離爲5之點之軌跡.

74. 求與$2x+3y-6=0$及$3x-2y+1=0$二直綫等距離之點之軌跡.

75. 試證一動點至二定直綫之距離之和爲常數.則其軌跡爲一直綫.

76. 求至二定直綫爲等距離之點之軌跡方程式.

77. 一動點至二定點之距離之比爲常數k.如k非等於1.試證其軌跡爲圓.

78. 一動點至一等邊三角形各邊距離之平方爲常數.試證其軌跡爲圓.且求其中心.

79. 一動點至一等脚三角形底邊之距離之平方.等於其至他二邊之距離之乘積.試證其軌跡爲一經過此三角形兩底角頂點之圓及雙曲綫.

80. 一動點至一正方形四邊之距離平方之和爲常數.求其軌跡.

81. 一動點至若干定點之距離平方之和爲常數.試求其軌跡.

82. 求一點至一定點之距離之平方與此點至一定直綫之距離成比例之軌跡.

83. 一點至二同心圓之切綫之長與二圓之半徑成反比例.問其軌跡如何.

84. 自一動點引一定圓之切綫.其長爲等於其至他一定點之距離,問其軌跡如何.

85. 自一點引二定圓之切綫.其長相等.求此點之軌跡.

86. 自$(-a, 0)$, $(a, 0)$兩點引二直綫.令其與軸x所成二角之差爲$\tan^{-1}\frac{1}{a}$求此二綫之交點軌跡.

87. 經過$(a, 0)$之直綫之斜度.二倍於經過$(-a, 0)$之直綫之斜度.求此二綫之交點之軌跡.

88. 一動點至二定點$A\ (-a, 0)$及$B\ (a, 0)$所連之二直綫.其斜度之乘積爲常數.試證此點之軌跡爲橢圓或雙曲綫.

89. 如三角形ABC. AB固定.而$\tan A \tan\frac{B}{2}=2$.試證C之軌跡爲以A爲頂點,B爲焦點之拋物綫.

90. 已知三角形底邊之長爲$2b$.二底角之正切之和爲S.求其頂點之軌跡.

91. 切於一定圓及一定直綫之圓.求其中心之軌跡.

92. 求證過一定點且切於一定直綫之圓.其中心之軌跡爲拋物綫.

93. 一動點至一定圓之最短距離等於其至此圓一固定直徑之距離.問其軌跡如何.

94. O爲一定點.AB爲一定直綫.今於O引直綫交AB於Q.再於OQ取P令$OP\cdot OQ=k^2$.求P之軌跡.

95. 如自原點引一直綫至$y=a$綫上任一點Q.再於前綫取一點P.令P之縱坐標等於Q之橫坐標.求P之軌跡.

96. AOB與COD二直綫互爲垂直二等分.今於同平面上取一點P.令$PA\cdot PB=PC\cdot PD$.求P之軌跡.

97. AB與CD爲一圓之互爲垂直之二直徑.M爲圓上任一點.今自M引AM及BM.AM與CD相交於N.再自N引一直綫與AB平行.交BM於P.求P之軌跡.

98. 已知一定直綫AB及一定點Q.今於AB取任一點R引直綫垂直於AB.令其長等於RQ.求此垂綫之端點軌跡.

99. 設OA爲一定圓之直徑.自圓上任一點B引直綫垂直於OA.與之相交於D.延長DB至P.令$OD:DB=OA:DP$.求P之軌跡.

100. 自一拋物綫之頂點引互爲垂直之二直綫.交曲綫於P及Q.試證直綫PQ截拋物綫之軸於一定點.

101. 於拋物綫$y^2=4px$上作一內接等邊三角形.令其一頂點卽在原點.問三角形一邊之長幾何.

102. 試證橢圓短軸之半爲AF及FA'之比例中項.

103. 試證凡在橢圓或雙曲綫之焦點之縱綫.常爲AF及AF'之比例中項.

104. 如自雙曲綫上之任一點P引直綫PK與橫軸平行.截其漸近綫於Q及R.則$PQ\cdot PR=a^2$.如引PK與共軛軸平行.則$PQ\cdot PR=-b^2$.

105. 試證雙曲綫上任一點之焦點距離.等於自此點引平行於一漸近綫與其相當準綫相交之直綫之長.

106. 求證雙曲綫上任一點至其兩漸近綫之距離之乘積爲常數.

107. 求證於雙曲綫任二縱綫之平方比.等於在橫軸上爲其二縱綫之足所分綫分之乘積之比.

108. 自橢圓短軸兩端各引一直綫同經過橢圓上任一點.試證其在於OX之截部之乘積爲常數.

109. P_1爲拋物綫$y^2=4px$上任一點.P_1Q垂直於OP_1而交拋物綫之軸於Q.求證P_1Q對於拋物綫之軸之射影常爲$4p$.

第八章 相交曲綫

86. 通論 如$f_m(x, y)$爲一含x與y之式.則

$$f_m(x, y)=0. \tag{1}$$

爲一含可以適合於(1)式之所有諸點之曲綫方程式.同樣如$f_n(x, y)$爲含x與y之他一式.則

$$f_n(x, y)=0. \tag{2}$$

爲另一曲綫之方程式.故此二曲綫所有之公共點之坐標.必能同時適合於(1)與(2).反之.若一點之坐標x及y能適合於(1)與(2).則此點必爲二曲綫所共有.故求二曲綫之交點.即解其二聯立方程式.

二直綫之交點已於第三十節論及.玆將擇取較繁者分述之.

87. $f_1(x, y)=0$ 及 $f_2(x, y)=0$

設
$$f_1(x, y)=0. \tag{1}$$

爲二元一次方程式.而

$$f_2(x, y)=0. \tag{2}$$

爲二元二次方程式.因一次方程式常代表一直綫.此問題即爲求一直綫與一曲綫之交點.求法爲解第一方程式得x或y之值以之代入第二方程式.其結果必爲一元二次方程式.例如解(1)式得y以之代入(2)式.所得之結果常爲

$$ax^2+bx+c=0.$$

此式亦名爲歸結式.(第九節)如以x_1及x_2表此方程式之根.則x_1及x_2卽爲所求二交點之橫坐標.其縱坐標可以x_1及x_2代入(1)式求之.

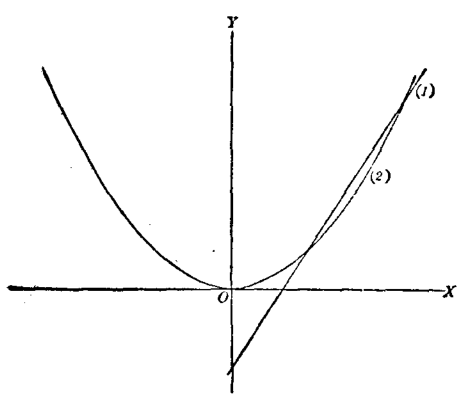
惟按第三十七節所論.解此歸結式常有三種情形須加注意.(1)如x_1及x_2爲不相等之實根.則以上二綫之交點有二.(2)如x_1及x_2爲相等之實根.則其相當之縱坐標亦相等.而二交點爲重合.此在第三十七節.卽爲移動曲綫之位置以使x_1與x_2漸相接近之極限.卽使二交點沿此曲綫移動以訖於重合也.故(1)式所表之直綫卽爲(2)式所表曲綫之切綫.(3)如x_1及x_2爲虛根.則不能求得任何交點.卽二曲綫爲不相交.

例 1.　求以下二曲綫之交點

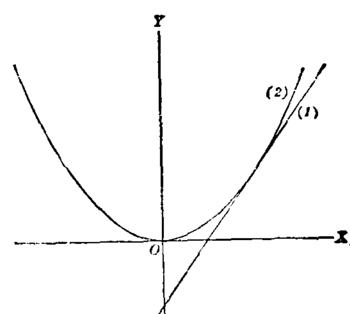
$$3x-2y-4=0 \qquad (1)$$

$$x^2-4y=0. \qquad (2)$$

解(1)式得y代入(2)式.卽得$x^2-6x+8=0$.此式之二根爲2及4.以之依次代入(1)式.得y之相當值爲1及4.故交點爲(2, 1)及(4, 4)(第九十五圖).



第九十五圖



第九十六圖

例 2. 求以下二綫之交點

$$6x-4y-9=0 \tag{1}$$

$$x^2-4y=0. \tag{2}$$

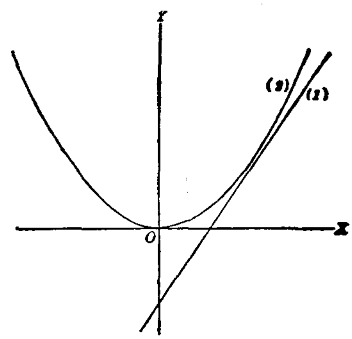
解(1)式得 y 代入(2)式得 $x^2-6x+9=0$. 此式之二根均等於3. 故此直綫卽爲曲綫之切綫. 以 $x=3$ 代入(1)式得 $y=\frac{9}{4}$. 故二綫之切點爲 $(3, \frac{9}{4})$ (第九十六圖).

例 3. 求以下二綫之交點

$$3x-2y-5=0 \tag{1}$$

$$x^2-4y=0. \tag{2}$$

依前法解此二式得 $x^2-6x+10=0$. 其二根爲 $3\pm\sqrt{-1}$. 而 y 之相當值爲 $2\pm\frac{3}{2}\sqrt{-1}$. 故此二綫爲不相交(第九十七圖).



第九十七圖

以上三例中之直綫其方向皆相同. 惟與 y 軸之交點各異.

88. 二次方程式所代表之曲綫. 設知其一切綫之斜度. 則切綫方程式可由前節之法以推得之. 因如知其斜度爲 m. 則切綫方程式必爲 $y=mx+b$ 之形. 惟由切綫之定義. 係爲一直綫當其與曲綫之二交點漸次移近以至於重合所成. 故未知數 b 可依下例求得.

例 1. 已知切於拋物綫 $3x^2+2y=0$ 之切綫之斜度爲2. 求此切綫之方程式.

因切綫之斜度爲2. 故其方程式必爲 $y=2x+b$ 之形. 今以此式 y 之值代入拋物綫方程式得 $3x^2+4x+2b=0$. 惟因其二交點

爲重合.故此方程式之二根必相等.由第三十七節方程式含二等根之條件爲$(4)^2-4(3)(2b)=0$.即$b=\frac{2}{3}$.故所求之切綫方程式爲$y=2x+\frac{2}{3}$或$6x-3y+2=0$.(第九十八圖).

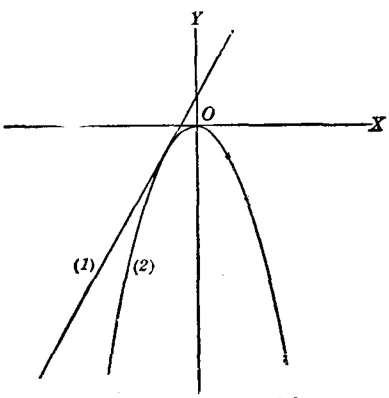
例 2. 已知切於一橢圓$x^2+4y^2=4$之切綫之斜度爲$\frac{1}{2}$.求其方程式.

此切綫之方程式必爲$y=\frac{x}{2}+b$.代y之值於橢圓之方程式.得

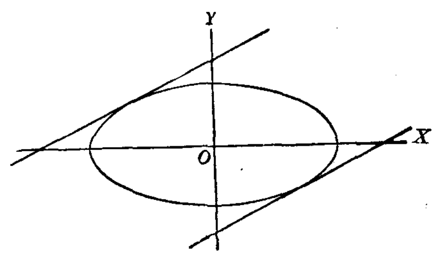
$$x^2+2bx+(2b^2-2)=0.$$

此式兩根相等之條件爲$(2b)^2-4(2b^2-2)=0$.因得$b=\pm\sqrt{2}$.此例有兩切綫其斜度皆爲$\frac{1}{2}$者.$y=\frac{x}{2}+\sqrt{2}$及$y=\frac{x}{2}-\sqrt{2}$

或$x-2y\pm2\sqrt{2}=0$.(第九十九圖).



第九十八圖



第九十九圖

依同法可推得已知斜度爲m之切綫公式如下.

1. 切於拋物綫$y^2=4px$之切綫爲

$$y=mx+\frac{p}{m}$$

2.　切於橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 之切綫爲

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

3.　切於雙曲綫 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 之切綫爲

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$$

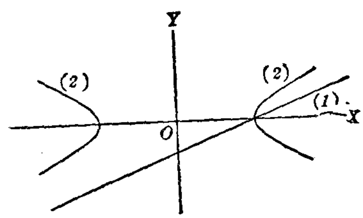
89.　前於第八十七節已述明.凡依代入之結果.常得二次方程式.然亦有例外不可不知.如以下例1之歸結式爲一次方程式.而例2之歸結式則不能成立矣.

例 1.　茲就以下二式而論

$$2x-5y-10=0 \qquad (1)$$

$$4x^2-25y^2=100 \qquad (2)$$

從 (1) 式求 y 之值代入 (2) 式得一次方程式 $40x-200=0$. 故 $x=5$, $y=0$. 此綫僅交曲綫於一點 (5, 0)(第一百圖).

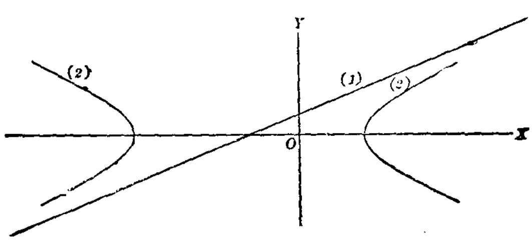


第一百圖

例 2.　$2x-5y+4=0$　　(1)

$$4x^2-25y^2+16x-84=0. \qquad (2)$$

取 (1) 式之 y 值代入 (2) 式得 $-100=0$. 此式不能成立.故(1),(2)兩式爲矛盾式.卽直綫與曲綫爲不相交(第一百零一圖).



第一百零一圖

以上兩種例外.可用極限之意義表明於下.

設 x_1 及 x_2 爲歸結式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根.則

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}$$

如 $a=0$. 則歸結式漸次接近於直綫方程式 $bx+c=0$. 同時 $x_1=-\frac{c}{b}$, $x_2=\infty$. 故如在一平面內移動直綫或曲綫之位置使 a 漸次接近於零.則二方程式僅得一解答.是爲當一交點爲自原點引退至無窮遠時二相交綫之極限.

如 $a=0$ 而 $b=0$. 則 x_1 及 x_2 均無限增大.二方程式卽互爲矛盾.是爲當二交點均從原點引退至無窮遠時二相交綫之極限.

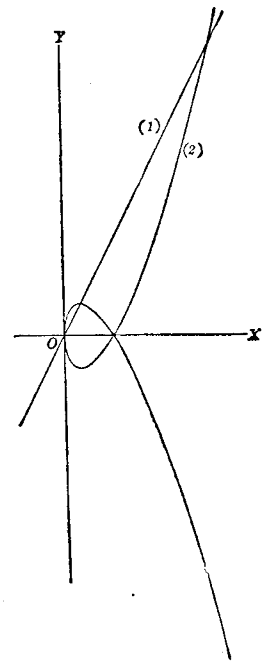
90. $f_1(x, y)=0$ 及 $f_n(x, y)=0$

設
$$f_1(x, y)=0$$
爲一次方程式.而
$$f_n(x, y)=0.$$
爲 n 次方程式 n 大於二.因凡曲綫之次數其意義卽等於其方程式之次數.故本題卽爲求一直綫與一個次數高於二之曲綫之交點.求法與第八十七節完全相同.代入後所得之歸結式.通常爲 n 次之方程式.解法見第四,五章.交點之數與歸結式實根之數相同.故一直綫與一 n 次曲綫之交點.至多不能過於 n. 若歸結式中含有重根.則依第八十八節.此直綫切曲綫於該相當之點.若歸結式之次數少於 n. 其中必有從原點引退至無窮遠之交點.而直綫爲在其極限之位置.

例 1. 求以下二綫之交點

$$y=2x \qquad (1)$$

$$y^2=x(x-3)^2 \qquad (2)$$



第一百零二圖

其歸結式爲

$$x[(x-3)^2-4x]=0.$$

或 $$x[x^2-10x+9]=0.$$

故 $$x=0.$$

或 $$x^2-10x+9=0.$$

此二方程式之根爲 0, 1, 9. 以之代入(1)式得相當 y 之値爲 0, 2, 18. 故二綫共交於三點(0, 0), (1, 2), (9, 18).(第一百零二圖).

例 2. 求以下二綫之交點

$$y=3x+2 \qquad (1)$$

$$y=x^3 \qquad (2)$$

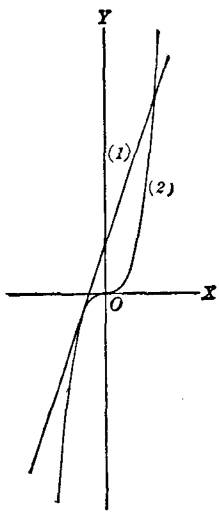
其歸結式爲 $x^3-3x-2=0$. 由第四十九節得其一根爲 2. 自其低級方程式 $x^2+2x+1=0$ 得其餘二根爲 -1. (1) 式中 y 之相當値爲 8 及 -1. 故二綫交於 (2, 8) 而切於 $(-1, -1)$ (第一百零三圖).

例 3. 求以下二綫之交點

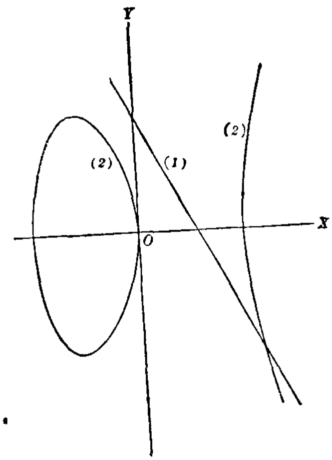
$$2x+y-4=0 \qquad (1)$$

$$y^2=x(x^2-12) \qquad (2)$$

其歸結式爲 $x^3-4x^2+4x-16=0$ 或 $(x-4)(x^2+4)=0$. 此式之根爲 4 及 $\pm 2\sqrt{-1}$. 自 (1) 得 y 之相當值爲 -4 及 $4\mp 4\sqrt{-1}$. 因 (1). (2) 兩式僅有一實數解答. 故二綫惟交於一點 $(4, -4)$ (第一百零四圖).



第一百零三圖



第一百零四圖

91. $f_m(x, y)=0$ 及 $f_n(x, y)=0$

設

$$f_m(x, y)=0.$$

爲 m 次方程式而

$$f_n(x, y)=0.$$

爲 n 次方程式. m, n 均大於一. 其解法亦與前相同. 卽先消去 x 或 y 得一歸結式而求其根. 再定所消去之未知數之相當值. 惟宜注意消去後所得通常皆爲 mn 次之方程式. 可知原有二聯立方程式所有解答之數當有 mn. 如所有解答均爲實數. 則相當二曲綫之交點共有 mn. 如有數解答爲虛數或爲相等之實

數.則相當二曲綫之交點少於 mn. 故凡 m 次與 n 次曲綫之交點之數.必不能多於 mn. 今述數例如次.

例 1. 求以下二綫之交點

$$y^2-2x=0. \qquad (1)$$

$$x^2+y^2-8=0. \qquad (2)$$

自(2)式減去(1).得其歸結式爲 $x^2+2x-8=0$. 此式之二根爲 2 及 -4. 以之代入(1)式得 y 之相當值爲 ±2 及 $\pm2\sqrt{-2}$. 故 (1)(2)兩式之實數解答爲 $x=2,\ y=\pm2$, 卽曲綫交於 $(2,\ 2)$, $(2,\ -2)$ 兩點(第一百零五圖)。

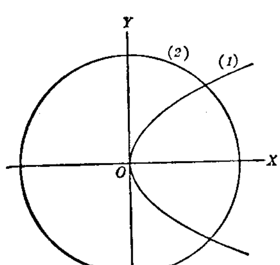
直綫 $x=-4$ 全在此二曲綫之左.故如 $x=-4$. y 之相當值必爲虛數.可於圖中見之.

例 2. 求以下二綫之交點

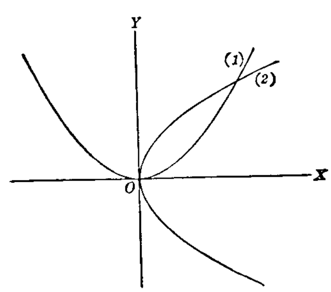
$$x^2-3y=0 \qquad (1)$$

$$y^2-3x=0. \qquad (2)$$

取(1)式中之 y 值代入 (2) 式.得歸結式 $x^4-27x=0$. 卽 $x(x-3)(x^2+3x+9)=0$. 此式之根爲 $0, 3$ 及 $\frac{-3\pm3\sqrt{-3}}{2}$. 以所得 x 之值依次代歸(1)式.得 y 之相當值爲 $0,\ 3$ 及 $\frac{-3\mp3\sqrt{-3}}{2}$. 故(1).(2)兩式



第一百零五圖



第一百零六圖

之實數解答共有二組.一爲$x=0$, $y=0$.一爲$x=3$, $y=3$.惟如以x之值代入(2)式.則似另有一組實數解答爲$x=3, y=-3$.然設以$y=-3$代歸(1)式.得x之值爲虛數.因(1)式所表之曲綫全立於x軸之上也.就幾何學而論.直綫$x=3$可交(1)與(2)於一公共點并交(2)於另他一點.故以上二式之實數解答惟有二組.而二曲綫之交點爲(0, 0)及(3, 3)(第一百零六圖).

故凡解方程式所得之結果.必須代歸原二式中以驗其是否均得實數解答.

以$x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{-3}}{2}$代入原式得其餘之解答均爲虛數.

例 3.　求以下二綫之交點

$$2x^2+3y^2=35 \qquad (1)$$

$$xy=6 \qquad (2)$$

因此二式爲調和方程式.

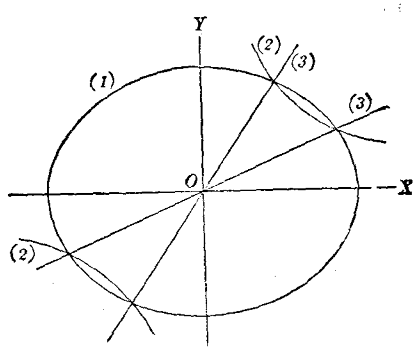
故可以 $$y=mx \qquad (3)$$

代入(1), (2)兩式.其結果爲

$2x^2+3m^2x^2=35$及$mx^2=6$.由此得

$$x^2=\frac{35}{2+3m^2} \qquad (4)$$

$$x^2=\frac{6}{m} \qquad (5)$$



第一百零七圖

故 $$\frac{35}{2+3m^2}=\frac{6}{m} \qquad (6)$$

解之可得$m=\dfrac{3}{2}$或$\dfrac{4}{9}$.如以$m=\dfrac{3}{2}$代入(5)式.可得$x=\pm2$.代入(3)式.可得$y=\pm3$.同樣.如取$m=\dfrac{4}{9}$可得$x=\pm\dfrac{3}{2}\sqrt{6}, y=\pm\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$,

故橢圓與雙曲綫共交於四點$(2,3)$，$(-2,-3)$，$\left(\frac{3}{2}\sqrt{6},\ \frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$，$\left(-\frac{3}{2}\sqrt{6},\ -\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$.（第一百零七圖）.

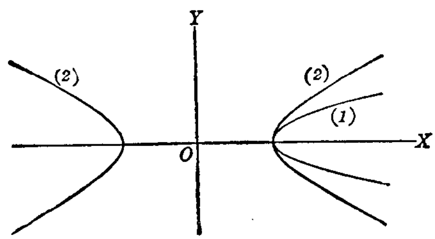
惟宜注意(3)式爲代表經過原點之一直綫方程式.故解(6)式所得m之值卽爲經過原點交二曲綫於公共點之直綫之斜度.

例 4. 求以下二綫之交點

$$2y^2=x-2 \qquad (1)$$

$$x^2-4y^2=4 \qquad (2)$$

消去y得$x^2-2x=0$. 此式之根爲0及2. 如$x=0$. 代入(1), (2)兩式均得$y=\pm\sqrt{-1}$. 如$x=2$. 則y在(1),(2)兩式均等於零.故二曲綫惟切於一點$(2, 0)$.（第一百零八圖）.



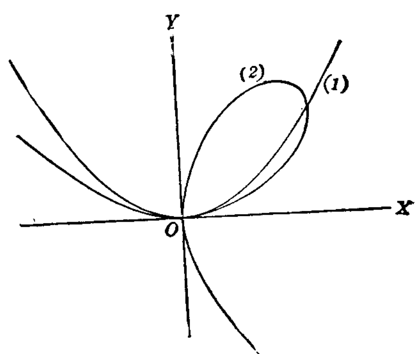
第一百零八圖

例 5. 求以下二綫之交點

$$x^2-2y=0 \qquad (1)$$

$$x^3-3xy+y^3=0 \qquad (2)$$

消去y得$x^6-4x^3=0$或$x^3(x^3-4)=0$. 此式之實根爲$4^{\frac{1}{3}}$及三重根0. 其餘二虛根爲$\frac{4^{\frac{1}{3}}(-1\pm\sqrt{-3})}{2}$. 代入原式得$y$之相當值爲$2^{\frac{1}{3}}$, 0及



第一百零九圖

$2^{-\frac{2}{3}}(-1\mp\sqrt{-3})$.故曲綫交於二點(0, 0)及$(4^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}})$.(第一百零九圖).

(1)式所表之拋物綫於(0, 0)切(2)式所表曲綫於一部而又交於其他一部.故此點爲三重交點(*Triple point of intersection*).

92. $lf_m(x, y)+kf_n(x, y)=0$

設有$f_m(x, y)$及$f_n(x, y)$兩式.(參看第八十六節)可令其各等於零.

即
$$f_m(x, y)=0. \tag{1}$$
$$f_n(x, y)=0. \tag{2}$$

則成爲二曲綫之方程式.今如各以與x, y無關係之二量l, k乘之而加其乘積.即得一第三曲綫之方程式.

$$lf_m(x, y)+kf_n(x, y),=0. \tag{3}$$

此曲綫有兩種重要性質今述明於下.

1. 此綫經過(1),(2)兩曲綫之公共點.因此等之點如與(1)(2)兩式適合.則能使$f_m(x, y)$及$f_n(x, y)$爲零.故其坐標亦必適合於(3).即當在於(3)式所表之曲綫也.

2. 如l及k非等於零.則除(1),(2)兩綫之公共點外.此曲綫不能與(1),(2)兩綫交於他點.因在曲綫(1)之任一點之坐標.雖能使$f_m(x, y)$爲零.然不能使$f_n(x, y)$爲零.故此點之坐標不與(3)式適合.即非爲(3)式所表曲綫上之點.

由此可知如(1),(2)兩綫無公共之點.則(3)式所表之曲綫必不與(1)(2)兩綫相交.

設令l及k爲諸不同之值.可使(3)式適合於某一要件.其例如次.

例 1. 一直綫經過(1, 2)點及

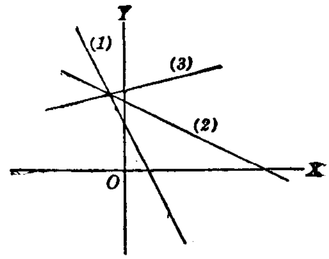
$$2x+y-1=0. \qquad (1)$$

$$x+2y-3=0. \qquad (2)$$

兩直綫之交點.試求其方程式.

$$l(2x+y-1)+k(x+2y-3)=0. \qquad (3)$$

爲一經過(1),(2)兩綫之交點之直綫方程式.因此綫復經過(1, 2).故



第一百十圖

$$l(2+2-1)+k(1+4-3)=0.$$

或 $$3l+2k=0.$$

今以$k=-\frac{3}{2}l$代入(3)式而簡單之.即得所求之方程式爲$x-4y+7=0$(第一百十圖).

例 2. 一直綫經過

$$x-2y+1=0. \qquad (1)$$

$$x-3y+3=0. \qquad (2)$$

兩綫之交點.且平行於直綫

$$2x+3y+8=0. \qquad (3)$$

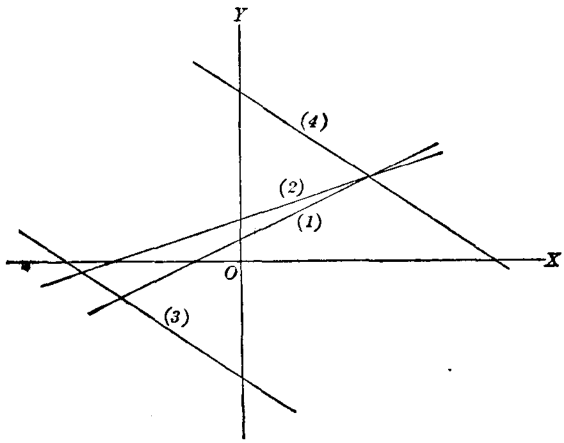
試求其方程式.

依例1知所求之直綫爲

$$l(x-2y+1)+k(x-3y+3)=0. \qquad (4)$$

或 $$(l+k)x+(-2l-3k)y+(l+3k)=0.$$

因此綫與(3)平行.故 $\frac{l+k}{2}=\frac{-2l-3k}{3}$.(第二十八節2)由此得 $k=-\frac{7}{9}l$.以k之值代入(4)式而簡單之.得所求之直綫方程式爲 $2x+3y-12=0$ (第一百十一圖).



第一百十一圖

上述二例亦可照下法求得.先求兩綫之交點.再用第三章之法求經過此交點能適合題中條件之綫.

93. 上述二例所設之方程式均係一次.玆取其中有一個或二個皆爲二次者。

例 1. 一圓經過(1, −1)及

$$2x-y-6=0. \tag{1}$$

$$x^2+y^2-6x-6y-7=0. \tag{2}$$

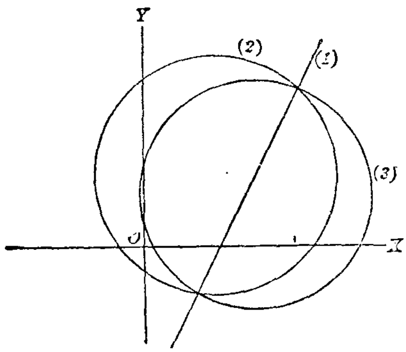
二綫之交點.試求其方程式.

設所求之方程式爲

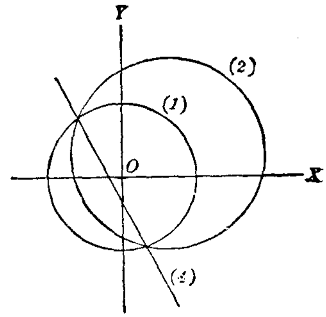
$$l(2x-y-6)+k(x^2+y^2-6x-6y-7)=0. \tag{3}$$

因 x^2 及 y^2 之係數相等.故所代表爲一圓.今惟欲定l之值.使所代表之圓經過(1, −1).其法卽以(1, −1)代入(3)式.得 $3l+5k=0$

或 $k=-\frac{3}{5}l$. 故所之求方程式爲 $3x^2+3y^2-28x-13y+9=0$.(第一百十二圖).



第一百十二圖



第一百十三圖

例 2. 經過兩定圓

$$x^2+y^2-9=0. \tag{1}$$

$$x^2+y^2-4x-2y-11=0. \tag{2}$$

之交點之圓羣.試求其方程式.

設 $l(x^2+y^2-9)+k(x^2+y^2-4x-2y-11)=0$ (3)

爲所求之方程式.此方程式所代表爲一圓且經過二定圓之公共點.今設以諸不同之值代 l 及 k. 可使(3)式代表無數經過兩定圓公共點之圓.換言之.卽代表所求之圓羣也.

然若以適宜之值代 l 及 k. 使(3)式中 x^2 及 y^2 之係數爲零.在本例卽令 $l=-k$. 則(3)式成爲

$$2x+y+1=0. \tag{4}$$

此式仍經過二定圓之公共點.惟係代表一直綫.故卽爲此二定圓之共通弦之方程式.

通常如

$$x^2+y^2+2G_1x+2F_1y+C_1=0. \tag{5}$$

$$x^2+y^2+2G_2x+2F_2y+C_2=0. \tag{6}$$

爲任二圓之方程式.則可假定$l=-k$而求得第三方程式.

$$2(G_1-G_2)x+2(F_1-F_2)y+(C_1-C_2)=0. \tag{7}$$

如二定圓爲相交(7)式卽爲其共通弦之方程式.如不相交.則(7)式爲其根軸(*Radical axis*).根軸垂直於二圓之中心綫且爲自一點引二定圓之相等切綫之軌跡.

問　題

求下列直綫與二次曲綫之交點.

1. $2x+3y=5.$　　$4x^2+9y^2+16x-18y-11=0.$
2. $x-y+1=0,$　　$(x+2)^2-4y=0.$
3. $x-2y+4=0,$　　$2x^2-y^2+8x+2y+13=0.$
4. $y-2x=0,$　　$x^2+y^2-x+3y=0.$
5. $x-2y+4=0,$　　$5x^2-4y^2+20=0.$
6. $y=8x-5.$　　$2x^2+xy-3y^2+6x+4y+4=0.$
7. $2x+3y-6=0,$　　$x^2+4y^2-4=0.$
8. $x+y-4=0,$　　$x^2-2xy+y^2-20=0.$
9. 問$x^2+y^2+8x-4y+10=0$爲直綫$2x-3y+3=0$所截取之弦其長幾何.
10. 求切於曲綫$x^2+6x-2y+5=0$而斜度爲2之切綫方程式.
11. 如直綫$y-3x+1=0$爲與拋物綫$y^2=4px$相切.求定p之值.

12. 切於橢圓 $4x^2+9y^2=36$ 之切綫.爲與連結橢圓二軸正端之直綫平行.試求其方程式.

13. 求切於曲綫 $b^2x^2+a^2y^2+2ab^2x=0$ 且垂直於直綫 $ax+by=ab$ 之切綫方程式.

14. 試證直綫 $y=-mx+2c\sqrt{m}$ 常切於雙曲綫 $xy=c^2$. 其切點爲 $\left(\dfrac{c}{\sqrt{m}},\ c\sqrt{m}\right)$.

15. 求切於曲綫 $x^2-4y^2+2xy-2x+4y=0$ 而斜度爲 $\dfrac{1}{2}$ 之切綫方程式.

16. 求直綫 $8y-25x=0$ 與曲綫 $x^2y^2+36=4y^2$ 之交點.

17. 求直綫 $y=2x-3$ 與曲綫 $4y^2=(x+3)(2x-3)^2$ 之交點.

18. 求直綫 $x-2y+2=0$ 與蔓葉綫 $x(x^2+y^2)=4y^2$ 之交點.

19. 求直綫 $x=2y$ 與曲綫 $16y^2=4x^4-x^6$ 之交點.

20. 求直綫 $y=2x-2$ 與蔓葉綫 $x(x^2+y^2)=4y^2$ 之交點.

21. 求直綫 $y=mx$ 與蔓葉綫 $x(x^2+y^2)=2ay^2$ 之交點.

22. 求直綫 $x-y-1=0$ 與「維尺」曲綫 $y=\dfrac{8}{x^2+4}$ 之交點.

求下列每對曲綫之交點.

23. $4y^2=x^2(x+1)$,　　　$y^2=x(x+1)^2$

24. $y^2=12x$,　　　$y^2=(x+2)(x-3)^2$

25. $x^2=y^2(y+2)$,　　　$x^2=(y-1)^2(y+1)$

26. 求二拋物綫 $y^2=4ax+4a^2$, $y^2=-4bx+4b^2$ 之交點.

27. 求拋物綫 $x^2=4ay$ 與維尺曲綫 $y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$ 之交點.

28. 求蔓葉綫 $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$ 與拋物綫 $y^2=4ax$ 之交點.

29. 求蔓葉綫 $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$ 與圓 $x^2+y^2-4ax=0$ 之交點.

30. 求雙曲綫 $xy=2a^2$ 與維尺曲綫 $y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$ 之交點.

31. 求蔓葉綫 $x^2=\dfrac{4y^3}{5a-4y}$ 與維尺曲綫 $y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$ 之交點.

32. 求維尺曲綫 $y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$ 與圓 $x^2+y^2=5a^2$ 之交點.

33. 一直綫經過定點(-2.1)及二直綫 $7x-y=18$, $x-3y=14$ 之交點.試勿用先求二綫之交點法,以求直綫之方程式.

34. 一直綫與 $2x+5y+2=0$ 平行.且經過他二直綫 $2x-y+5=0$ $x-4y+13=0$ 之交點.試按33題法求其方程式.

35. 一直綫經過二定直綫 $4x-6y-5=0$, $6x-4y-5=0$ 之交點.且垂直於他一直綫 $x-3y+1=0$. 試按33題法求其方程式.

36. 一圓經過坐標之原點及定圓 $x^2+y^2=14$ 與定直綫 $2x+3y+5=0$ 之交點.試求其方程式.

37. 試證$(1, 1)$爲二定圓 $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2-4y=0$ 之共通弦之一點.

38. 一圓經過一定點$(1, -3)$及二定圓 $x^2+y^2-4x-4y-8=0$, $x^2+y^2+x+y-4=0$ 之交點.試求其方程式.

39. 今有二次曲綫爲經過定點$(1, 1)$及二定曲綫 $3x^2+5y^2-15=0$, $2x^2-3y^2-6=0$ 之交點.試求其方程式.并指明此曲綫屬於何類.

40. 試證經過二定曲綫 $x^2-2y^2+x+2y+1=0$, $3x^2+4y^2-2x-2=0$ 之交點可作一拋物綫.

41. 一圓之中心位於拋物綫 $y^2=4px$ 之頂點 A. 其直徑爲 $3AF$. F 爲此拋物綫之焦點. 試證兩曲綫之共通弦分 AF 爲二等分.

42. 以一拋物綫之焦點半徑 (*Focal radius*) 作直徑所畫之圓爲切於經過此拋物綫之頂點之切綫. 求證.

43. 以一拋物綫之焦弦(*Focal chord*)作直徑所畫之圓爲切於此拋物綫之準綫. 求證.

44. 一圓以雙曲綫之焦點爲中心. 共軛軸之半爲半徑. 試證此圓切兩漸近綫於其與相當準綫之交點.

第九章　代數函數之微分法

94. 極限之定理　關於極限運算之重要定理.述明如次.

1.　若干變數之和之極限.等於各變數之極限之和.

今卽取三變數爲證.由此可以推至於任若干變數.

設三變數爲X, Y, Z.而$Lim\ X=A$, $Lim\ Y=B$, $Lim\ Z=C$.由第五十三節極限之定義.可書上式爲$X=A+a$, $Y=B+b$.及$Z=C+c$.其a, b, c三量.爲當諸變數接近於其極限時.小於任何數量之量.故如以之相加.卽爲

$$X+Y+Z=A+B+C+a+b+c.$$

今設ϵ爲一甚小之量.惟令a, b, c仍各小於$\frac{\epsilon}{3}$則$a+b+c$必小於ϵ.卽$X+Y+Z$與$A+B+C$之差必小於ϵ也.故

$$Lim(X+Y+Z)=A+B+C=Lim\ X+Lim\ Y+Lim\ Z$$

2.　若干變數乘積之極限.等於各變數之極限之乘積.

先取二變數X與Y.令$LimX=A$, $LimY=B$.依前例得$X=A+a$, $Y=B+b$.故

$$XY=AB+bA+aB+ab.$$

今設a與b爲小至於使bA, aB及ab均各小於$\frac{\epsilon}{3}$(ϵ爲任一甚小之量)則

$$LimXY=AB=(LimX)(LimY).$$

次取三變數X, Y, Z爲例.令$XY=U$.依上述得

$$LimUZ=(LimU)(LimZ)$$

卽

$$LimXYZ=(LimXY)(LimZ)$$

$$=(LimX)(LimY)(LimZ)$$

此定理可用任若干變數同樣證明之.

3. 常數與變數之積之極限.等於此常數乘變數之極限.

學者可自證明此定理.

4. 二變數之商之極限.等於其極限之商.惟當令其除數之極限非爲零.

設 X 與 Y 爲二變數而 $Lim X=A$, $Lim Y=B$. 依前例令 $X=A+a$, $Y=B+b$. 可得

$$\frac{X}{Y}=\frac{A+a}{B+b} \text{ 而 } \frac{X}{Y}-\frac{A}{B}=\frac{A+a}{B+b}-\frac{A}{B}=\frac{aB-bA}{B^2+bB}.$$

如取 a, b 爲充分小之值.可使此方程式等號右邊之分數式 $\frac{aB-bA}{B^2+bB}$ 爲小於任何可名之數.故假設 B 不爲零.則

$$Lim\frac{X}{Y}=\frac{A}{B}=\frac{Lim X}{Lim Y}.$$

95. 微係數之定理 第五章所述之增量,連續,微係數諸定義,均極普通.惟在該處僅能應用於代數多項式.如欲推廣以求他種函數之微分.當先明以下之定理.

1. 函數與常數之和之微係數.等於該函數之微係數.

設 c 爲常數. u 爲 x 之函數.且可以求其微分.今令

$$y=u+c$$

則 x 如得一增量 Δx. u 亦必得一增量 Δu. 而 c 仍不變.故 y 之值變爲 $u+\Delta u+c$.

$$\Delta y=(u+\Delta u+c)-(u+c)=\Delta u.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

取此方程式各邊之極限.得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$$

例　$y=4x^3+3$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(4x^3)=12x^2.$$

2.　常數與函數之積之微係數.等於此常數乘該函數之微係數.

設c爲常數.u爲x之函數且可以求其微分.命

$$y=cu$$

x之增量爲Δx. u與y之相當增量爲Δu及Δy.則

$$\Delta y=c(u+\Delta u)-cu=c\Delta u$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=c\ \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$Lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=c\ Lim\ \frac{\Delta u}{\Delta x}$$ (由前節定理3)

故　$$\frac{dy}{dx}=c\ \frac{du}{dx}$$ (由微係數之定義)

例　$y=5(x^3+3x^2+1)$

$$\frac{dy}{dx}=5\frac{d}{dx}(x^3+3x^2+1)=5(3x^2+6x)=15x(x+2)$$

3.　若干函數之和之微係數.等於各函數之微係數之和.

設u, v, w均爲x之函數.且可以求其微分.今命

$$y=u+v+w$$

而以Δx表x之增量. Δu, Δv, Δw, Δy表u, v, w, y之相當增量.則

$$\Delta y=(u+\Delta u+v+\Delta v+w+\Delta w)-(u+v+w)$$

$$=\Delta u+\Delta v+\Delta w$$

故　$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta w}{\Delta x}$$

今命Δx漸次接近於零.由前節定理1

$$Lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=Lim\frac{\Delta u}{\Delta x}+Lim\frac{\Delta v}{\Delta x}+Lim\frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

按照微係數之定義.上式卽爲

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}.$$

4. 若干函數之乘積之微係數.等於每次取一因子之微係數乘所有其餘因子之乘積之和.

設 u 與 v 均爲 x 之函數.且可以求其微分.今令

$$y=uv$$

以 Δx 表 x 之增量 Δu, Δv, Δy 表 u, v, y 之相當增量.則

$$\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv.$$

$$=u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}.\Delta v$$

如 Δx 漸次接近於零.則

$$Lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=uLim\frac{\Delta v}{\Delta x}+vLim\frac{\Delta u}{\Delta x}+Lim\frac{\Delta u}{\Delta x}Lim\Delta v.$$

惟 $Lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$, $Lim\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{du}{dx}$, $Lim\frac{\Delta v}{\Delta x}=\frac{dv}{dx}$, $Lim\Delta v=0.$

故 $$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}.$$

復令 $$y=uvw$$

暫視 uv 爲一函數應用以上之結果得

$$\frac{dy}{dx}=uv\frac{dw}{dx}+w\frac{d(uv)}{dx}.$$

$$=uv\frac{dw}{dx}+w\left[u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}\right].$$

$$=uv\frac{dw}{dx}+uw\frac{dv}{dx}+vw\frac{du}{dx}.$$

此定理可用任若干變數證明之.其理甚顯.

例　$$y=(3x-5)(x^2+1)x^3.$$

$$\frac{dy}{dx}=(3x-5)(x^2+1)\frac{d(x^3)}{dx}+(3x-5)x^3\frac{d(x^2+1)}{dx}$$

$$+(x^2+1)x^3\frac{d(3x-5)}{dx}.$$

$$=(3x-5)(x^2+1)3x^2+(3x-5)x^3(2x)+(x^2+1)x^3(3)$$

$$=(18x^3-25x^2+12x-15)x^2.$$

5.　分數式之微係數.等於以其分母乘分子之微係數之積.減去其分子乘分母之微係數之積.再以分母之平方除之.

設 $y=\frac{u}{v}$ 而 u, v 均爲 x 之函數.且可以求其微分. $\Delta x, \Delta u, \Delta v, \Delta y$ 之意義與前相同.則

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v^2+v\Delta v}.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v\Delta v}.$$

今令 Δx 漸次接近於零.依前節得

$$Lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{vLim\frac{\Delta u}{\Delta x}-uLim\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+vLim\Delta v}.$$

故　$$\frac{dy}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

例　$$y=\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2+1)(2x)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

6.　y 如爲 x 之函數.則 x 亦爲 y 之函數.而 x 對於 y 之微係數.即爲 y 對於 x 之微係數之反商.

令Δx及Δy爲x與y之相當增量.則

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

故 $$Lim\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{Lim\frac{\Delta y}{\Delta x}},$$

即 $$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

7. 設y爲u之函數.而u復爲x之函數.則y亦爲x之函數.而y對於x之微係數.等於以y對於u之微係數乘u對於x之微係數.

增量Δy須視增量Δu而定.而Δu復須視增量Δx而定.故

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

從而 $$Lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=Lim\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot Lim\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

即 $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

例 $$y=u^2+3u+1 \text{ 而 } u=\frac{1}{x^2}.$$

$$\frac{dy}{dx}=(2u+3)\left(-\frac{2}{x^3}\right)=-\frac{2+3x^2}{x^2}\cdot\frac{2}{x^3}=-\frac{4+6x^2}{x^5}$$

96. 範式 前節所證明之範式爲

$$\frac{d(u+c)}{dx}=\frac{du}{dx} \tag{1}$$

$$\frac{d(cu)}{dx}=c\frac{du}{dx} \tag{2}$$

$$\frac{d(u+v)}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx} \tag{3}$$

$$\frac{d(uv)}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx} \tag{4}$$

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}. \tag{5}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}} \tag{6}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \tag{7}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}} \tag{8}$$

最後一式係合(6)(7)兩式而成

97. u^n之微係數 如u爲x之任一函數.且可以求其微分.而n爲任一常數惟當爲實數.則

$$\frac{d(u^n)}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

此範式之證明有以下四種之區別.

1. n爲正整數

$$\frac{d(u^n)}{dx}=\frac{d(u^n)}{du}\cdot\frac{du}{dx} \qquad \text{(由第九十六節(7)式)}$$

$$=n\,u^{n-1}\frac{du}{dx} \qquad \text{(由第五十八節(1)式)}$$

2. n爲有理正分數

設$n=\frac{p}{q}$. p與q均爲正整數.可令

$$y=u^{\frac{p}{q}}.$$

此式兩邊均乘q次方.得

$$y^q = u^p$$

y^q與u^p均爲x之函數.且當x爲任何值時二者仍相等.設令x之增量爲Δx.可得

$$\Delta(y^q) = \Delta(u^p)$$

$$\frac{\Delta(y^q)}{\Delta x} = \frac{\Delta(u^p)}{\Delta x}.$$

$$\frac{d(y^q)}{dx} = \frac{d(u^p)}{dx}.$$

因p與q俱爲正整數.故

$$qy^{q-1}\frac{dy}{dx} = pu^{p-1}\frac{du}{dx}.$$

代入y值再相除得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}u^{\frac{p}{q}-1}\frac{du}{dx}.$$

即
$$\frac{d}{dx}(u^n) = n\,u^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

3. n爲有理負數

設$n=-m$. m爲正整數.今令

$$y = u^{-m} = \frac{1}{u^m}.$$

則
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-d(u^m)}{dx}}{u^{2m}}. \qquad \text{(由第九十六節(6)式)}$$

$$= -\frac{mu^{m-1}\frac{du}{dx}}{u^{2m}}. \qquad \text{(由1與2)}$$

$$= -mu^{-m-1}\frac{du}{dx}.$$

即 $$\frac{d(u^n)}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

4.　n 爲無理數

上之範式亦眞.惟證明從略.

由此可知第五十八節1之範式.對於 n 爲任何實數皆爲眞.

例 1.　$$y=(x^3+4x^2-5x+7)^3$$

$$\frac{dy}{dx}=3(x^3+4x^2-5x+7)^2\frac{d}{dx}(x^3+4x^2-5x+7)$$

$$=3(3x^2+8x-5)(x^3+4x^2-5x+7)^2$$ (由第五十八節)

例 2.　$$y=\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{x^3}=x^{\frac{2}{3}}+x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-3x^{-4}$$ (由第九十六節(3)式)

$$=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}-\frac{3}{x^4}.$$

例 3.　$$y=(x+1)\sqrt{x^2+1}.$$

$$\frac{dy}{dx}=(x+1)\frac{d(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{dx}+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\frac{d(x+1)}{dx}.$$ (由第九十六節(4)式

$$=(x+1)\left[\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}.2x\right]+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{x(x+1)}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

例 4.　$$y=\sqrt[3]{\frac{x}{x^3+1}}=\left(\frac{x}{x^3+1}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\left(\frac{x}{x^3+1}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^3+1}\right).$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{x^3+1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}.\qquad \text{(由第九十六節(5)式)}$$

$$=\frac{1-2x^3}{3x^{\frac{2}{3}}(x^3+1)^{\frac{4}{3}}}.$$

98. 高次微係數(*Higher derivatives*) 前於第六十二節.已述明凡一函數之微係數之微係數.名爲第二次微係數.同樣凡第二次微係數之微係數.名爲第三次微係數.依此類推.至累次微係數通常記法如下.

$y=f(x)$	原有函數
$\frac{dy}{dx}=f'(x)$	第一次微係數
$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)$	第二次微係數
$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d^3y}{dx^3}=f'''(x)$	第三次微係數
$\frac{d^ny}{dx^n}=f^n(x)$	第 n 次微係數

由第六十二節.$f(a)$ 爲用以表示 $x=a$ 時 $f(x)$ 之值.同樣 $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$ 爲用以表示當 $x=a$ 時 $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ 相當之值.惟須注意此函數之微係數.須於未代入 x 之值以前求之.

例 $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$ 求 $f''(0)$.

$$\therefore f'(x)=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

$$f''(x)=\frac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3}.$$

$$\therefore f''(0)=2.$$

99. 代數陰函數之微分法

取任一方程式

$$p_0y^n+p_1y^{n-1}+p_2y^{n-2}+p_3y^{n-3}+\cdots+p_{n-1}y+p_n=0 \qquad (1)$$

n 爲正整數.其諸係數 $p_0, p_1, p_2, \cdots p_n$ 中.有數個或全爲 x 之多項式.在此方程式中.如知 x 之值.y 之值卽可決定.因此時諸係數均已變爲數字.而方程式爲與第四章所討論者相同.卽共含 n 根也.故 y 在(1)式中常爲 x 之函數.此爲代數函數最普通之形式.設解(1)式得 y.令 y 爲等於若干 x.則 y 名爲代數陽函數.(*Explicit algebraic function*)如仍(1)式原狀.則 y 名爲代數陰函數.(*Implicit algebraic function*).

例如 $$3x^2-4xy+5y^2-6x+7y-8=0.$$

可書作 $$5y^2+(7-4x)y+(3x^2-6x-8)=0.$$

y 名爲 x 之陰函數

如解此方程式得

$$y=\frac{-7+4x\pm\sqrt{209+64x-44x^2}}{10}.$$

則 y 卽爲 x 之陽函數.

(1)式中 y 爲 x 之連續函數且可以求其微分.今卽不解(1)式.亦可求得 y 之微係數.因(1)式爲一常等於零之 x 之函數.故其微係數亦等於零.今述數例如次.

例 1. $$x^2+y^2=5$$

$$\frac{d(x^2+y^2)}{dx}=0.$$

卽 $$2x+2y\frac{dy}{dx}=0.$$

故 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

如解方程式得y.則

$$y=\pm\sqrt{5-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{-x}{\sqrt{5-x^2}}=-\frac{x}{y}.$$

例 2. $$y^3-xy-1=0$$

$$\frac{d(y^3)}{dx}-\frac{d(xy)}{dx}=0.$$

故 $$3y^2\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}-y=0.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{3y^2-x}.$$

第二次微係數.即可求以上所得結果之微分而得之.

例 3. 於$x^2+y^2=5$已求得$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$.

故 $$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$=-\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}.$$

$$=-\frac{y-x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}.$$

$$=-\frac{y^2+x^2}{y^3}.$$

$$=-\frac{5}{y^3}.$$

例 4. 於$y^3-xy-1=0$已求得$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{3y^2-x}$.

故 $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(3y^2-x)\frac{dy}{dx}-y\frac{d(3y^2-x)}{dx}}{(3y^2-x)^2}.$$

$$=\frac{(3y^2-x)\dfrac{dy}{dx}-y\left(6y\dfrac{dy}{dx}-1\right)}{(3y^2-x)^2}.$$

$$=\frac{(3y^2-x)\dfrac{y}{3y^2-x}-y\left(\dfrac{6y^2}{3y^2-x}-1\right)}{(3y^2-x)^2}.$$

$$=\frac{-2xy}{(3y^2-x)^3}.$$

100. 切綫 前於第五十九節已述明在曲綫 $y=f(x)$ 上一點(x_1, y_1)之切綫爲

$$y-y_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_1(x-x_1).$$

$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_1$ 表示 $\dfrac{dy}{dx}$ 在(x_1, y_1)時之值.今即應用此式於第七章所述之數種曲綫.得其結果如次.

例 1. 圓之方程式爲 $Ax^2+Ay^2+2Gx+2Fy+C=0$.

求其微分得

$$2Ax+2Ay\frac{dy}{dx}+2G+2F\frac{dy}{dx}=0.$$

從而
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{Ax+G}{Ay+F}.$$

故切綫方程式爲

$$y-y_1=-\frac{Ax_1+G}{Ay_1+F}(x-x_1).$$

即
$$Ax_1x-Ax_1^2+Ay_1y-Ay_1^2+Gx-Gx_1+Fy-Fy_1=0.$$

惟因(x_1, y_1)在此圓上

$$Ax_1^2+Ay_1^2+2Gx_1+2Fy_1+C=0.$$

故上式因之變爲

$$Ax_1x+Ay_1y+G(x+x_1)+F(y+y_1)+C=0.$$

所得結果.爲與圓之方程式相似.極易辨識.

例 2.　橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 之切綫爲 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1.$

例 3.　雙曲綫 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 之切綫爲 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1.$

例 4.　抛物綫 $y^2=4px$ 之切綫爲 $y_1y=2p(x+x_1)$.

例 5.　維尺曲綫之方程式爲 $x^2y+4a^2y-8a^3=0.$

求其微分得　$$2xy+x^2\frac{dy}{dx}+4a^2\frac{dy}{dx}=0.$$

故其切綫之方程式爲

$$y-y_1=-\frac{2x_1y_1}{x_1^2+4a^2}(x-x_1).$$

即　$$x_1^2y+4a^2y-4a^2y_1+2x_1y_1x-3x_1^2y_1=0.$$

惟　$$x_1^2y_1+4a^2y_1-8a^3=0.$$

故切綫方程式即爲

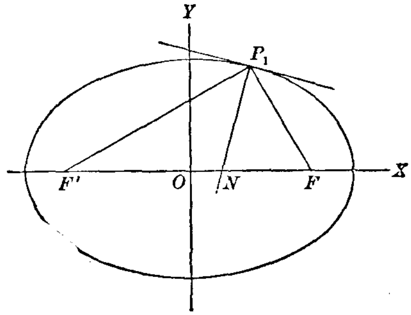
$$2x_1y_1x+(x_1^2+4a^2)y+8a^2y_1-24a^3=0.$$

例 6.　依同樣之法.求得在蔓葉綫 $x^3+xy^2-2ay^2=0$ 上一點 $(x_1,\ y_1)$ 之切綫爲

$$(3x_1^2+y_1^2)x+(2x_1y_1-4ay_1)y-2ay_1^2=0.$$

101.　法綫(*Normal*)　曲綫上任一點之法綫.即爲垂直於在該點之切綫之垂綫.如欲求其方程式.當先求切綫之斜度.再應用第二十九節問題3.

例 1. 在橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一定點 (x_1, y_1) 之切綫之斜度爲 $-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$. 故在 (x_1, y_1) 之法綫之方程式爲



$$y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1).$$

即 $$a^2y_1x-b^2x_1y-(a^2-b^2)x_1y_1=0.$$

如 $y=0$ 則

$$x=\frac{a^2-b^2}{a^2}x_1=e^2x_1.$$

於(第一百十四圖).

第一百十四圖

$$NF=OF-ON=ae-e^2x_1$$

$$F'N=F'O+ON=ae+e^2x_1$$

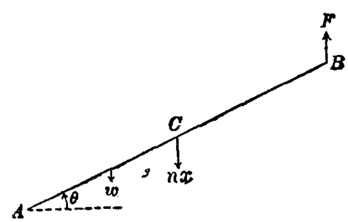
$$\therefore \quad \frac{F'N}{NF}=\frac{a+ex_1}{a-ex_1}=\frac{F'P_1}{FP_1} \qquad \text{(第七十三節).}$$

故由平面幾何學可知 NP_1 爲 $F'P_1F$ 角之二等分綫.卽至橢圓上任一點之二焦點半徑所夾之角.常爲此點之法綫所平分.

102. 極大與極小 第六十一節所討論.在此無甚變更.

例 1. 槓桿之支點爲在其一端 A 今施力於他端 B. 以舉一重量爲 w 至支點之距離爲 a 之物體.問施力最小時.槓桿之長當爲幾何.

設以 x 爲槓桿 AB 之長. θ 爲槓桿與水平面所成之角. F 爲施於 B 之力.則槓桿之全重 nx 可視爲集於 AB 之中點 C. 由槓桿之定律(第一百十五圖).



第一百十五圖

$$Fx\cos\theta = wa\cos\theta + nx\left(\frac{x}{2}\right)\cos\theta,$$

或
$$F = \frac{wa}{x} + \frac{nx}{2}.$$

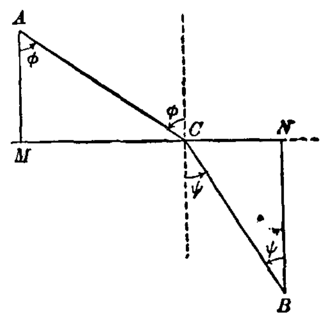
故
$$\frac{dF}{dx} = -\frac{wa}{x^2} + \frac{n}{2}.$$

$$\frac{d^2F}{d^2x} = \frac{2wa}{x^3}.$$

當
$$x = \sqrt{\frac{2wa}{n}}\text{.則 } \frac{dF}{dx} = 0,\ \frac{d^2F}{dx^2} > 0.$$

故得所求之長爲 $x = \sqrt{\frac{2wa}{n}}$.

例 2. 光自一媒體中之 A 點達於他媒體中之 B 點.此二媒體之表面爲一平面所隔開.今設光在第一媒體中之速度爲 v_1.在第二媒體中之速度爲 v_2.求其自 A 至 B 之時間爲最小時所經過之路程.



第一百十六圖

所求路程必在於一平面內.此平面爲含 AB 且垂直於分隔二媒體之平面.惟光在各媒體中.其路徑必爲一直綫.故於第一百十六圖.MN 表示分離二媒體之平面.而 ACB 表示所經過之路程.

令 $MA=a$, $NB=b$, $MN=C$. $MC=x$ 則 $AC=\sqrt{a^2+x^2}$, $CB=\sqrt{(c-x)^2+b^2}$.故得自 A 至 B 所經過之時間爲

$$t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}{v_2}.$$

而
$$\frac{dt}{dx}=\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{c-x}{v_2\sqrt{(c-x)^2+b^2}}.$$

$$\frac{d^2t}{dx^2}=\frac{a^2}{v_1(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{b_2}{v_2[(c-x)^2+b^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

因 $\frac{d^2t}{dx^2}$ 之值常爲正故當 t 爲極小時

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{c-x}{v_2\sqrt{(c-x)^2+b^2}}=0. \qquad (1)$$

解此方程式雖可得 x 之值.惟用下法尤爲明顯.

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{MC}{AC}=sin\phi.$$

$$\frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}=\frac{CN}{CB}=sin\psi.$$

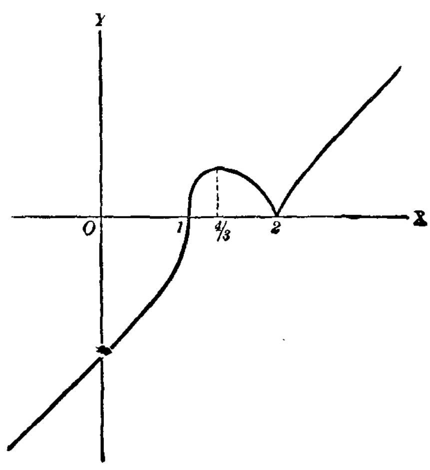
故(1)式爲
$$\frac{sin\phi}{sin\psi}=\frac{v_1}{v_2}.$$

ϕ 爲 AC 與在 C 之法綫所成之投射角. ψ 爲 CB 與在 C 之法綫所成之屈折角.故如光之投射角之正弦與屈折角之正弦之比.爲等於其在第一媒體之速度與在第二媒體中之速之比時.光之傳達所需時間爲最小.

極大與極小有時亦在當微係數爲無窮大之時.故其圖形爲非連續而不在以前所討論之內. 實則凡使微係數爲無窮大之值.皆可依第六十一節之規律試驗之.

例 3.
$$y=\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}=(x-1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}}$$
$$=\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}}[(x-2)+2(x-1)]$$
$$=\frac{3x-4}{3\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)}}.$$

$x=\frac{4}{3}$ 則 $\frac{dy}{dx}=0$. 當 x 之值經過 $\frac{4}{3}$ 之時. $\frac{dy}{dx}$ 由正而變於負。故 $x=\frac{4}{3}$ 爲此函數之極大值. 如 $x=1$ 或 2. 則 $\frac{dy}{dx}=\infty$. 當 $x=1$ 時 $\frac{dy}{dx}$ 之符號不變.而當 $x=2$ 時 $\frac{dy}{dx}$ 由負而變於正. 故 $x=2$ 爲此函數之極小值.其圖形如第一百十七圖.



第一百十七圖

103. 彎點 彎點之定義已見於第六十二節.卽爲曲綫上之一點當該曲綫由上凹嚮變爲下凹嚮或由下凹嚮變爲上凹嚮之處.其要件爲 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 改變符號.故惟使 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 爲零或爲無窮大之 x 值.可用以試驗該曲綫之彎點.

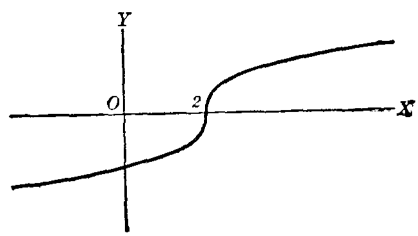
例 1. 求 維尺 曲綫 $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$ 之彎點.

由微分法得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-16a^3x}{(x^2+4a^2)^2}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{16a^3(3x^2-4a^2)}{(x^2+4a^2)^3}.$$

可知惟當 $x=\pm\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ 能使 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 爲零.而 x 之實數值無能使 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 爲無窮大者.

故今惟取 $x=\pm\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ 兩點而論.書 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 爲 $\dfrac{48a^3\left(x+\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\right)}{(x^2+4a^2)^3}$ 之形.當 $x<-\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ 則 $\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$. 當 $-\dfrac{2a}{\sqrt{3}}<x<\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ 則 $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$. 當 $x>\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ 則 $\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$. 故此曲綫惟在 $x=-\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ 及 $x=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ 二點之間爲下凹嚮.其餘諸點均爲上凹嚮.曲綫有二彎點.其橫坐標爲 $x=\pm\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.由方程式可求得其縱坐標爲 $\dfrac{3a}{2}$.



第一百十八圖

例 2. 求曲綫 $y=(x-2)^{\frac{1}{3}}$ 之彎點

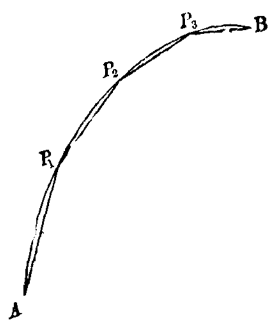
由微分法得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{3(x-2)^{\frac{2}{3}}}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2}{9(x-2)^{\frac{5}{3}}}.$$

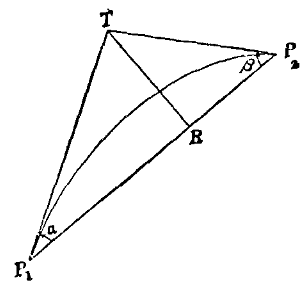
x 之諸值均不能使 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 爲零.惟當 $x=2$ 時 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\infty$. $x<2$ 時

$\frac{d^2y}{dx^2}>0$. $x>2$ 時 $\frac{d^2y}{dx^2}<0$ 故 $x=2$ 爲一彎點.曲綫在此點之左爲上凹嚮.在此點之右爲下凹嚮.此點之縱坐標爲零(第一百十八圖).

104. 弧與弦之比之極限　圓周之長爲其內接正多角形之周邊之極限.學者自無不知.故通常如欲求一曲綫之弧長.可作若干之弦.而連結其各端成一折綫.如第一百十九圖.則弧之長卽爲當各弦之長均近接於零.而弦之數則增至於無限時所有諸弦之和之極限.求此極限之法.係在積分學



第一百十九圖



第一百二十圖

之範圍.茲不具載.惟今卽用此定義.以求任一曲綫當其弧之長達於以零爲極限時(卽當其弧之兩端沿此曲綫以訖於重合)弧與弦之比.

設 P_1 與 P_2 (第一百二十圖)爲一曲綫上任意二點. P_1P_2 爲連結此二點之弦.而 P_1T 及 P_2T 爲經過二點之切綫.假設 $\widehat{P_1P_2}$ 完全立於 P_1P_2 弦之一邊.而以凹嚮對 P_1P_2.(求此要件可令 P_1P_2 二點極爲接近)則由定義.

$$P_1T+TP_2>\widehat{P_1P_2}>P_1P_2.$$

從而
$$\frac{P_1T+TP_2}{P_1P_2}>\frac{\widehat{P_1P_2}}{P_1P_2}>1.$$

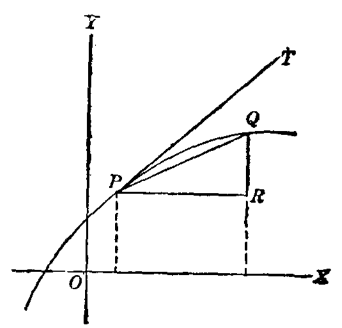
如 TR 爲自 T 達於 P_1P_2 之垂綫.而以 α 及 β 表 P_2P_1T 及 P_1P_2T 角.則 $P_1T=P_1R\sec\alpha$, $TP_2=RP_2\sec\beta=(P_1P_2-P_1R)\sec\beta$

$$\therefore\quad P_1T+TP_2=P_1R\sec\alpha+(P_1P_2-P_1R)\sec\beta$$
$$=P_1P_2\sec\beta+P_1R(\sec\alpha-\sec\beta)$$
$$\frac{P_1T+TP_2}{P_1P_2}=\frac{P_1P_2\sec\beta+P_1R(\sec\alpha-\sec\beta)}{P_1P_2}.$$
$$=\sec\beta+\frac{P_1R}{P_1P_2}(\sec\alpha-\sec\beta)$$

今如 P_2 及 P_1 沿此曲綫互相移近.則 α 及 β 同時達於零爲極限.從而 $\sec\alpha$ 及 $\sec\beta$ 達於極限爲 1. 然因 $\frac{P_1R}{P_1P_2}$ 常小於 1. 可知 $\frac{P_1T+TP_2}{P_1P_2}$ 之極限等於 1.

因 $\frac{\widehat{P_1P_2}}{P_1P_2}$ 爲立於 1 及某量以 1 爲極限之間.故其極限亦必等於 1. 卽當弧達於以零爲極限時.弧與弦之比之極限爲 1.

105. 微係數 $\frac{dx}{ds}$ 及 $\frac{dy}{ds}$ 於任一曲綫上取一固定始點(*Initial point*).令自此點沿曲綫至任一點 P 之距離爲 s. 當 P 爲在始點之一方向 s 爲正.在其相反之方向 s 爲負.何者相當於正方向.可任意擇之.今卽以切綫之正



第一百二十一圖

方向爲曲綫之正方向.而以ϕ表切綫之正方向與OX之正方向所夾之角.

凡在一定曲綫上某點P至一固定始點之距離如已知其爲s.則P之位置卽可決定.故P之坐標x與y常爲s之連續函數.且可以求其微分.今將表明

$$\frac{dx}{ds}=\cos\phi,\quad \frac{dy}{ds}=\sin\phi.$$

令$\widehat{PQ}=\Delta s$.(第一百二十一圖)此處之P與Q爲令Δs爲正時所擇取之二點.故$PR=\Delta x$, $RQ=\Delta y$

$$\frac{\Delta x}{\Delta s}=\frac{PR}{\widehat{PQ}}=\frac{PQ}{\widehat{PQ}}\cdot\frac{PR}{PQ}$$

$$=\frac{PQ}{\widehat{PQ}}\cos RPQ.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta s}=\frac{RQ}{\widehat{PQ}}=\frac{PQ}{\widehat{PQ}}\frac{RQ}{PQ}$$

$$=\frac{PQ}{\widehat{PQ}}\sin RPQ$$

取其極限.因$Lim\dfrac{PQ}{\widehat{PQ}}=1$.而$Lim RPQ=\phi$.故得

$$\frac{dx}{ds}=\cos\phi,\qquad \frac{dy}{ds}=\sin\phi. \tag{1}$$

由(1)式互除.應用第九十六節(8)式得

$$\tan\phi=\frac{\dfrac{dy}{ds}}{\dfrac{dx}{ds}}=\frac{dy}{dx}. \tag{2}$$

此與第五十九節相符合.

再由(1)取各式自乘相加得

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1. \tag{3}$$

以 $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2$ 及 $\left(\frac{ds}{dy}\right)^2$ 乘(3)式.應用第九十六節(7)式得

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\left(\frac{ds}{dx}\right)^2, \tag{4}$$

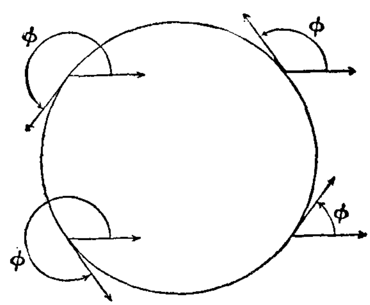
$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1=\left(\frac{ds}{dy}\right)^2. \tag{5}$$

最後兩式卽爲習見之三角範式.

$$1+tan^2\phi=sec^2\phi,$$

$$cot^2\phi+1=csc^2\phi.$$

前爲便利起見.常取 ϕ 爲銳角.惟當 s 漸增時 ϕ 可在任一象限以內.觀第一百二十二圖可明.



第一百二十二圖

學者可證明範式(1)至(5)無論何時皆眞.

106. 速度(*Velocity*) 微係數一重要之應用.爲求一運動物體之速度.

凡運動之物體.如所經過之距離爲與時間成比例.則名爲等速運動.其速度爲一常數.卽爲其所經過之距離以所需之時間相除之商.設以 t 表時間.s 表 t 時共經過之距離.v 表速度.則在等速運動 $v=\frac{s}{t}$. 如距離爲不與時間成比例.而爲時間之

他一函數.則以時間除距離所得之商.名爲在該時間內之平均速度.例如一汽車在5小時以內行200哩.則其平均速度每小時爲40哩.故通常如有一物體在一甚小之時間增量Δt內.經一甚小之距離增量Δs.則其商數$\frac{\Delta s}{\Delta t}$爲在$\Delta t$時間內之平均速度.此平均速度須根據於$\Delta t$而轉移.欲求在一瞬時(*Interval*)$\Delta t$初之速度.可設想$\Delta t$及$\Delta s$均達於零爲極限.而取$\frac{\Delta s}{\Delta t}$之極限爲速度$v$.即

$$v=Lim\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}.$$

注意.如 $v>0$. 則當時間漸增.相當之s亦增.如 $v<0$. 則當時間漸增.反使s減少.故當一物體爲向量s之方向運動.其速度爲正.如向此相反之方向而運動.其速度爲負.

例 1. 如以一物體自地面向上拋擲其初速爲每秒100呎.向上所經過之距離以方程式表明爲

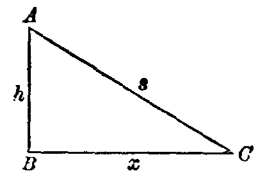
$$s=100t-16t^2.$$

$$v=\frac{ds}{dt}=100-32t$$

可知$t<3\frac{1}{8}$則$v>0$. $t>3\frac{1}{8}$則$v<0$. 故$3\frac{1}{8}$秒以前物體爲向上行.$3\frac{1}{8}$秒以後復向下降.所達最高之點爲$100\left(3\frac{1}{8}\right)-16\left(3\frac{1}{8}\right)^2$ $=156\frac{1}{4}$呎.

例 2. 一人立於高出水面20呎之岸上.以每秒三呎之等速度用繩以引一舟.求此舟向岸之速度.

設 A 爲人所立之位置(第一百二十三圖).C 爲舟.令 $AB=h=20$, $AC=s$, $BC=x$ 而求 $\frac{dx}{dt}$.



第一百二十三圖

因 $$x=\sqrt{s^2-400}$$

故 $$\frac{dx}{dt}=\frac{s}{\sqrt{s^2-400}}\cdot\frac{ds}{dt}$$

惟由假設 s 爲以每秒3呎之率遞減.故 $\frac{ds}{dt}=-3$ 而得所求之舟速爲

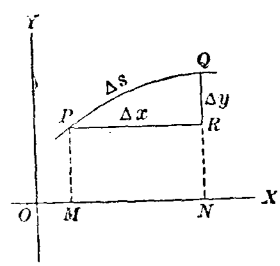
$$\frac{dx}{dt}=\frac{-3s}{\sqrt{s^2-400}}.$$

如以時間表示之.則當知 $t=0$ 時 s 之値.假設其値爲 s_0.則

$$s=s_0-3t$$

而 $$\frac{dx}{dt}=\frac{-3s_0+9t}{\sqrt{s_0^2-400-6s_0t+9t^2}}.$$

107. 分速度(*Components of velocity*) 當一物體沿一直綫或一曲綫運動自 P 以達於 Q(第一百二十四圖).設 $PQ=\Delta s$, x 之變量 $PR=\Delta x$, y 之變量 $RQ=\Delta y$. 可得



第一百二十四圖

$$Lim\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=v=$$ 物體沿曲綫運動之速度

$$Lim\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=v_x=$$ 平行於OX之分速度

$$Lim\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{dy}{dt}=v_y=$$ 平行於OY之分速度

換言之.v爲P之速度.v_x爲P對於OX之射影之速度.v_y爲P對於OY之射影之速度.

由第九十六節(7)與第一百零五節(3)

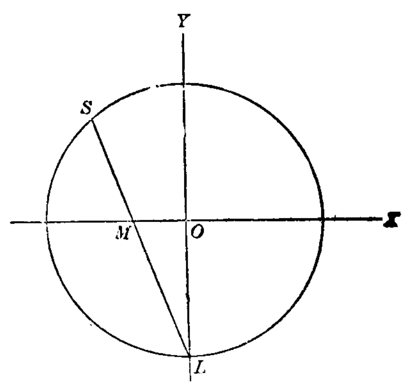
$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{dt},\qquad \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{ds}\cdot\frac{ds}{dt},$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2;$$

從而 $$v_x=v\cos\phi,\qquad v_y=v\sin\phi$$

$$v^2=v_x^2+v_y^2$$

例. 一人以等速度沿一圓場之直徑進行.設在垂直於此直徑之他一直徑之端懸一燈.映照此人之影於圓形之牆上.求人影沿牆之速度.



第一百二十五圖

於第一百二十五圖設燈爲L,人爲M,影爲S,場之半徑爲a,人之速度爲C,變數OM爲x_1而$\frac{dx_1}{dt}=C$.則直綫LS之方程式爲

$$ax-x_1y-ax_1=0,$$

圓之方程式爲

$$x^2+y^2=a^2.$$

解此二式得S之坐標爲

$$x=\frac{2a^2x_1}{a^2+x_1^2},\qquad y=\frac{a^3-ax_1^2}{a^2+x_1^2}.$$

故
$$v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{2a^4-2a^2x_1^2}{(a^2+x_1^2)^2}\cdot\frac{dx_1}{dt}=2a^2c\frac{a^2-x_1^2}{(a^2+x_1^2)^2}$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=\frac{-4a^3x_1}{(a^2+x_1^2)^2}\cdot\frac{dx_1}{dt}=-2a^2c\frac{2ax_1}{(a^2+x_1^2)^2}$$

$$v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=4a^4c^2\frac{a^4+2a^2x_1^2+x_1^4}{(a^2+x_1^2)^4}$$

所求之速度爲　$v=\dfrac{2a^2c}{a^2+x_1^2}.$

以上如用三角函數之解法當較爲簡易.可參看第一百五十三節例2.

108. 加速度與力(*Acceleration and force*)　當一物體之運動爲非等速.則其速度在某時間之終必不與在該時間之始者相同.設v在爲瞬時Δt之始之速度.而$v+\Delta v$爲其終之速度.則當時間爲達於零爲極限時.速度變化與時間變化之比之極限.名在爲途中之加速度.卽如令a爲加速度

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)=\frac{d^2s}{dt^2}$$

如a爲正.則t漸增時相當之v亦增.此爲物體以漸增之速度沿量s之方向運動.或以漸減之速度沿反對量s之方向運動.

如 a 爲負.則 t 漸增時 v 反因之而減.此爲物體以漸減之速度沿量 s 之方向運動.或以漸增之速度沿反對量 s 之方向運動.

運動物體在其途中向其經過方向所施之力 F 爲等於物體之質量 m 與其加速度 a 之乘積.卽

$$F=ma=m\frac{dv}{dt}=m\frac{d^2s}{dt^2}.$$

由此可知力之正負.惟視其加速度之正負而定.故施於量 s 之方向之力爲正.施於與此相反之方向之力爲負.

例　　設 $s=A+Bt+\frac{1}{2}Ct^2.$

則

$$v=B+Ct,$$

$$a=C,$$

$$F=mC,$$

如當 $t=0$ 時 s 與 v 之值爲 s_0 及 v_0.由以上之方程式可得

$$s_0=A,\qquad v_0=B.$$

故原式卽爲

$$s=s_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2.$$

在特殊之時

設有一質量爲 m 之物體.自高於地面 h 呎之處.以每秒 v_0 呎之初速直向上擲.如自地面向上之距離爲 s.引力之加速度爲 g.則

$$s_0=h,\qquad F=-mg,\qquad a=-g.$$

故上式卽爲

$$s=h+v_0t-\frac{1}{2}gt^2.$$

109. 微係數之他種說明

1.　改變率 (*Rate of change*)　如 $y=f(x)$. x 之値改變 Δx 單位. y 之値亦因之改變 Δy 單位.則 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 爲當 x 改變每單位時 y 之改變.卽當 Δy 爲與 Δx 成比例時. x 改變每一單位 y 所生之改變也.取其極限得

$$\frac{dy}{dx}=y\text{ 對於 }x\text{ 之改變率}$$

例如運動物體之速度.爲其距離對於時間之改變率.其加速度卽爲速度對於時間之改變率.

2.　運動量 (*Momentum*)　凡運動物體之運動量等於其質量與速度之相乘積.如 M 爲運動量.則

$$M=mv$$

今由前節　$F=m\frac{dv}{dt}=\frac{d(mv)}{dt}=\frac{dM}{dt}.$

故力爲運動量對於時間之微係數.換言之.卽爲運動量對於時間之改變率.

3.　運動能力 (*Kinetic energy*)　運動物體之運動能力等於其速度平方與質量之乘積之半.如 E 爲運動能力.則

$$E=\frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{dE}{ds}=\frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{ds}=mv\frac{dv}{ds}=m\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dv}{ds}=m\frac{dv}{dt}=F.$$

故力為運動能力對於所經過距離之微係數.換言之.卽為運動能力對於距離之改變率.

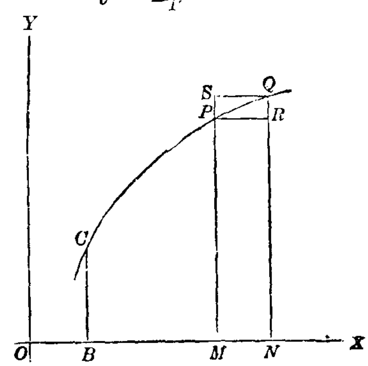
4.　膨脹係數(*Coefficient of Expansion*)　設一物體在溫度t時之體積為v.如溫度增加Δt.壓力仍不變更.則其體積亦增加Δv.體積每單位之改變為$\frac{\Delta v}{v}$.而體積每單位之改變與溫度改變之比為$\frac{1}{v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta t}$.此比之極限.卽名為膨脹係數.故膨脹係數為等於$\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dt}$.換言之.則膨脹係數為體積每單位對於溫度之改變率.

5.　彈性(*Elasticity*)　設某物體之體積為v.所受之壓力為p.如壓力增加Δp.體積增加$-\Delta v$.則體積每單位改變為$-\frac{\Delta v}{v}$.體積每單位之改變與壓力改變之比為$-\frac{1}{v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta p}$.其極限名為壓縮性(*Compressibility*).故壓縮性卽為單位體積對於壓力之改變率.

壓縮性之反商.名為彈性.故彈性為$-v\frac{dp}{dv}$.

例.　完全氣體(*Perfect gas*)在溫度不變時.

$$p=\frac{k}{v}.$$



第一百二十六圖

故其彈性爲

$$-v\frac{dp}{dv}=-v\left(-\frac{k}{v^2}\right)=\frac{k}{v}=p.$$

即完全氣體之彈性等於所受之壓力.

6.　面積(*Area*)　設 $y=f(x)$ (第一百二十六圖)爲任一曲綫. C 爲曲綫上一定點. $P(x, y)$ 爲曲綫上一動點. 假設 P 爲在 C 之右. 且夾於 C 與 P 間之曲綫. 爲全立於 x 軸之上.

引縱綫 BC 及 MP. 以 A 表示 $BMPC$ 之面積. 則 A 爲 x 之函數. 因如 $OM=x$ 爲已知. A 亦因之而決定. 設 x 之增量 $\Delta x=MN$. 引縱綫 NQ 及平行於 OX 之 PR 及 QS 二綫. 則

$$RQ=\Delta y, \qquad MNQP=\Delta A,$$

$$MNRP=MP\cdot MN=y\Delta x, \qquad MNQS=NQ\cdot MN=(y+\Delta y)\Delta x.$$

惟由圖形上

$$MNRP<MNQP<MNQS.$$

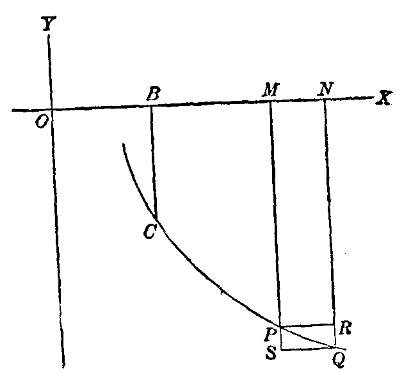
「註」如曲綫爲向右下方進行. 則以上之不等號須反轉.

即　$$y\Delta x<\Delta A<(y+\Delta y)\Delta x.$$

故　$$y<\frac{\Delta A}{\Delta x}<y+\Delta y.$$

今如 Δx 達於零爲極限時. $\frac{\Delta A}{\Delta x}$ 達於 $\frac{dA}{dx}$ · y 仍不變. 而 $y+\Delta y$ 達於 y. 故 $\frac{\Delta A}{\Delta x}$ 爲在 y 及以 y 爲極限之 $y+\Delta y$ 之間. 故

$$\frac{dA}{dx}=y.$$



第一百二十七圖

如曲綫爲在x軸之下。(第一百二十七圖)依前法令$MNRP=y\Delta x$而$MNQS=(y+\Delta y)\Delta x$. 卽得

$$\frac{dA}{dx}=y.$$

惟當視今之面積爲負.

110. 積分法(*Integration*) 微積學之應用.常有已知某函數之微係數而求其原函數,例如有已知之斜度而求其曲綫.或有已知之速度或加速度而求其所經過之距離.或有已知之曲綫而求其所圍面積之一部分.或有已知之改變率而求其函數.

由微係數而求其函數之方法.名爲積分法.積分法.爲微分法之反轉.此二者之關係.與加法對於減法.乘法對於除法或開方對於乘方.完全相同.惟積分法之方法非常複雜.其詳論當在以後積分學中述明.今僅取數種簡單之例.爲當其積分法可用微分法諸範式以反求之者.

惟首宜注意求某函數之積分.不能得一絕對之結果.因如第九十五節所述.設C爲任一常數.則

$$\frac{d(u+c)}{dx}=\frac{du}{dx}$$

卽當二函數惟所附帶之常數相異時.其微係數恆相同.

反之.如二函數之微係數相同.則其差爲一常數.

因設
$$\frac{dv}{dx}=\frac{du}{dx}.$$

則
$$\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dx}=0.$$

或 $$\frac{d(v-u)}{dx}=0.$$

故 $$v-u=c,\quad (c\text{爲常數})$$

「註」證明見於下卷

卽 $$v=u+c$$

此常數c不能由積分法決定.惟可由某問題之特殊情形而定之.

例 1. 求一曲綫凡在此綫上任一點之斜度等於該點橫坐標之二倍.

由假設 $$\frac{dy}{dx}=2x.$$

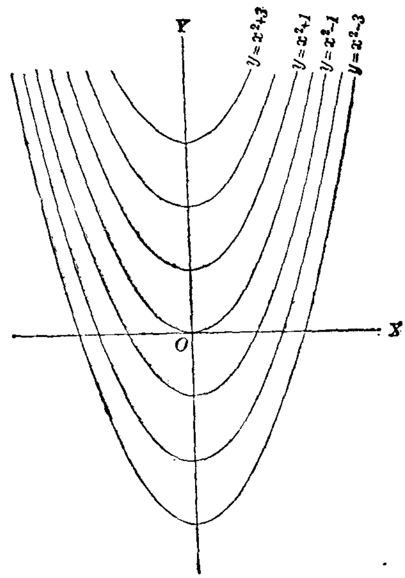
故 $$y=x^2+c.\quad (1)$$

令(1)式之 c 爲某定值之任意曲綫均與本題適合.今設所求之曲綫爲經過(2, 3).則由(1)得

$$3=4+c,\quad \therefore c=-1.$$

故其方程式爲

$$y=x^2-1.$$



第一百二十八圖

設所求之曲綫爲經過(−3, 10).

則 $$10=9+c\quad \therefore c=1.$$

而其方程式爲

$$y=x^2+1.$$

例 2. 求一物體所經過之距離.設已知其速度等於時間之平方.

由假設　　$v=\frac{ds}{dt}=t^2$

故　　$s=\frac{1}{3}t^3+c.$

如知此物體在某時間之位置.則 c 卽可決定.例如當 $t=0$ 時物體爲在量 s 之始點.可知 c 必等於零.如當 $t=0$ 時物體距 $s=0$ 之點爲二單位.則得 $c=2$.

例 3.　求一物體所經過之距離.設已知其加速度爲與時間成比例.

由假設　　$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}=kt$　　（k 爲任一常數）

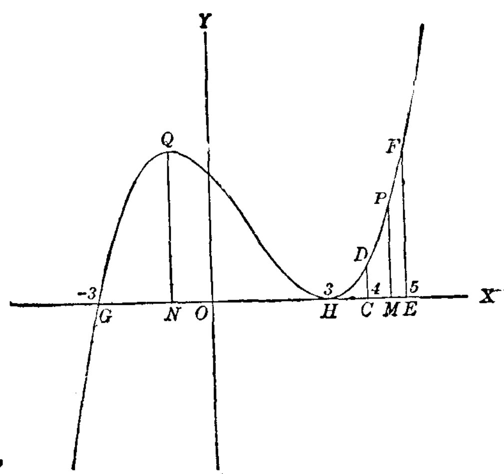
故　　$v=\frac{ds}{dt}=\frac{1}{2}kt^2+c_1.$

$$s=\frac{1}{6}kt^3+c_1t+c_2$$

如知此物體在某時間之位置.則 c_1, c_2, 二常數卽可決定.例如當 $t=0$ 時.$s=0$ 而 $v=4$.則 $c_2=0$, $c_1=4$.

例 4.　求曲綫 $y=\frac{1}{8}(x^3-3x^2-9x+27)$ 與二縱綫 $x=4$, $x=5$ 及 x 軸所夾之面積.

設 A 爲 $CDPM$（第一百二十九圖）之面積.$OC=4$,$OM=x$,則由第一百零九節6



第一百二十九圖

$$\frac{dA}{dx}=\frac{1}{8}(x^3-3x^2-9x+27)$$

故 $$A=\frac{1}{8}\left(\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{9}{2}x^2+27x\right)+c \tag{1}$$

如 $x=4$. 則 MP 與 CD 重合.故 $A=0$ 代入 $x=4$, $A=0$ 之值於(1)式.得 $c=-\frac{9}{2}$.

即 $$A=\frac{1}{8}\left(\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{9}{2}x^2+27x\right)-\frac{9}{2}.$$

如 $x=5$ 則 $A=CDEF$.

故 $$CDEF=\frac{1}{8}\left(\frac{625}{4}-125-\frac{225}{2}+135\right)-\frac{9}{2}=2\frac{7}{32}.$$

例 5. 求曲綫 $y=\frac{1}{8}(x^3-3x^2-9x+27)$ 與二縱綫 $x=-3$, $x=3$ 及 x 軸所夾之面積.

由前法得 $$\frac{dA}{dx}=\frac{1}{8}(x^3-3x^2-9x+27)$$

$$A=\frac{1}{8}\left(\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{9}{2}x^2+27x\right)+c.$$

設 $x=-3$. 得 $A=0$, $c=\frac{297}{32}$.

故 $$A=\frac{1}{8}\left(\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{9}{2}x^2+27x\right)+\frac{297}{32}.$$

令 $x=3$ 求得 GQH 之面積 $=13\frac{1}{2}$.

問題

求以下各式之 $\frac{dy}{dx}$.

1. $y=(3x+1)(x^2+2x+1)$

2. $y=(3x^2+6x+1)(5x^2+10x+5)$

3. $y=\dfrac{x-a}{x+a}$.

4. $y=\dfrac{x^3+1}{x^3-1}$.

5. $y=\dfrac{2x^2-4x+3}{3x^2-6x+1}$.

6. $y=\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^4-1}$.

7. $y=2x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}-\dfrac{2}{x^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{5}{x^{\frac{2}{3}}}$.

8. $y=4x^2-6x+\dfrac{7}{x}-\dfrac{3}{x^2}$.

9. $y=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

10. $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

11. $y=(3x^2-5x+6)^2$.

12. $y=(x^2+1)^3$.

13. $y=\sqrt{4x^2+5x-6}$.

14. $y=\sqrt[3]{x^2+x-1}$.

15. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$.

16. $y=\dfrac{5}{x^3+x^2+1}$.

17. $y=\dfrac{10}{\sqrt[4]{x^2+1}}$.

18. $y=(2x-3)^2(x+1)^3$.

19. $y=(3x-5)^2(x^2-5x+1)$.

20. $y=(x+1)\sqrt{x^2+1}$.

21. $y=(x^2-4x+3)^{\frac{1}{2}}(x^3+1)^{\frac{2}{3}}$

22. $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$.

23. $y=x+\sqrt{x^2+1}$.

24. $y=\sqrt[3]{3x^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3x^2+1}}$.

25. $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

26. $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$.

27. $y=\dfrac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(x^3+1)^{\frac{1}{3}}}$.

28. $y=\dfrac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}$.

29. $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.　　30. $y=\dfrac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}$.

求以下各方程式之 $\dfrac{dy}{dx}$.

31. $x^4-4x^2y^2+y^3=0$.　　32. $x^5-y^5-x^3+y=0$.

33. $x^3y^4+(x-y)^3=0$.　　34. $x^5+y^4-x^3-y=0$.

35. $(x+y)^{\frac{3}{2}}+(x-y)^{\frac{3}{2}}=a$.　　36. $y^2=\dfrac{x+y}{x-y}$.

求以下各方程式之 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

37. $5x^2+2y^2=10$.　　38. $x^7+y^7=a^7$.

39. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.　　40. $y^3=a^2(x+y)$.

41. $y^3+y=x^3$.　　42. $y^3-2x^3+4xy=0$.

43. 求在拋物綫 $y^2-4y-6x-9=0$ 上横坐標爲 -2 之定點之切綫及法綫.

44. 求在圓 $x^2+y^2-4x+6y-24=0$ 上一定點$(1,3)$之切綫及法綫.

45. 求在維尺曲綫 $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ 上横坐標爲1之定點之切綫.

46. 求在曲綫 $x^5-y^5+x^3-y=0$ 上横坐標爲1之定點之切綫.

47. 求在曲綫 $x^2y+x^3-x^2+y=0$ 上横坐標爲1之定點之切綫.

48. 求在曲綫 $y^3-xy-a=0$ 上一定點(x_1, y_1)之切綫方程式.

49. 求在曲綫 $x=y^3+1$ 上一定點(x_1, y_1)之切綫方程式.

50. 求在曲綫 $y^2=x^3$ 上一定點(x_1, y_1)之切綫方程式.

51. 求在曲綫$y=x+\dfrac{1}{x^2}$上一定點(x_1, y_1)之切綫及法綫之方程式.

52. 求在曲綫$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$上一定點$(x_1, y_1)$之切綫方程式.

53. 求在曲綫$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$上一定點$(x_1, y_1)$之切綫方程式.

54. 求在橢圓$3x^2+5y^2=15$右焦點之縱綫上端之切綫及法綫.

55. 求在雙曲綫$4x^2-y^2=12$上縱橫坐標相等之定點之切綫及法綫之方程式.

56. 試以x, y及$\dfrac{dy}{dx}$表示切綫及法綫在其切點與OX間之部分對於OX之射影.由此所求得之結果.名爲次切綫(*subtangent*)及次法綫(*subnormal*).

57. 試以x, y及$\dfrac{dy}{dx}$表示切綫在切點與坐標軸間之部分長.

58. 求證雙曲綫之法綫爲與引至此法綫與雙曲綫之交點之二焦點半徑成等角.

59. 求證抛物綫之法綫與軸所夾之角.等於此法綫與自焦點引至法綫與抛物綫之交點之直綫所夾之角.

60. 求證自橢圓與其法綫之交點至此法綫截於二坐標處之二綫分長.其比爲$a^2 : b^2$.

61. 過曲綫$x^3-xy-1=0$上一點之切綫之斜度爲2.求此點之坐標.

62. 過橢圓$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上一點之切綫爲與連結其長軸與短軸之正端之直綫平行.求此點之坐標.

63. 過橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上一點之切綫爲與二軸成等角.求此點之坐標.

64. 求證雙曲綫之切綫被夾於二漸近綫間之部分.爲其切點所平分.

55. 設有橫軸相同之若干雙曲綫.求證切於雙曲綫上橫坐標相同之點之切綫交橫軸於同一之點.

66. 設雙曲綫之任一切綫與過雙曲綫兩頂點之切綫相交於Q及R.試證以QR爲直徑作圓必經過二焦點.

67. 求證拋物綫上二切綫之交點之縱坐標等於該二切點之縱坐標之等差中項.

68. 如P, Q, R爲拋物綫上三點.其縱坐標爲成等比級數.試證過P及R兩切綫之交點之橫坐標.與Q之橫坐標相同.

69. 試證過拋物綫垂直焦弦(*Latus rectum* 卽經過焦點且垂直於軸之弦)二端點作切綫必互爲垂直.

70. 試證過拋物綫垂直焦弦二端點各作切綫.必相交於準綫.

71. 以解析法證明橢圓所有之法綫如均通過中心.則此橢圓爲圓.

72. 在拋物綫$y^2=4px$上任一點之切綫.交準綫與垂直焦弦之延長綫於兩點.求證此兩點至焦點之距離相等.

73. 求以x_1及p表示自拋物綫$y^2=4px$之焦點至經過曲綫上任一點(x_1, y_1)之切綫之距離.

74. 自拋物綫之軸取距焦點相等之二點.自此二點引任一切綫之垂綫.求證此二垂綫之平方之差爲常數.

75. 試證自橢圓兩焦點作任一切綫之垂綫.其乘積等於短軸之半之平方.

76. 求自橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$之中心引任一切綫之垂綫.方程式.并求垂綫之長.

77. 求曲綫$y^2-4x+4=0$與直綫$y-x+1=0$之交角.

「註」曲綫之交角卽在交點所作切綫之交角.

78. 求直綫$y=2x-2$與蔓葉綫$x\ (x^2+y^2)=4y^2$之交角.

79. 問二圓$x^2+y^2-9=0,\ x^2+y^2-6x-6y+9=0$之交角如何.

80. 求證二圓$x^2+y^2=a^2,\ x^2+y^2-2ax=0$之中心互在他圓之圓周上.且問其交角如何.

81. 問圓$x^2+y^2=21$與拋物綫$y^2=4x$之交角如何.

82. 試證二曲綫$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1,\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$互交於直角.且爲同焦點.

83. 求證焦點相同之雙曲綫及橢圓相交於直角.

84. 如有二同心等邊雙曲綫.其一曲綫之軸互爲他曲綫之漸近綫.求證兩雙曲綫相交於直角.

85. 求二拋物綫$y^2=4ax,\ x^2=4ay$之交角.

86. 求拋物綫$x^2=4ay$及 維尺 曲綫$y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$之交角.

87. 求證蔓葉綫$y^2=\frac{x^3}{2a-x}$與拋物綫$y^2=4ax$爲直交於原點.

88. 求蔓葉綫 $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ 與圓 $x^2+y^2-4ax=0$ 之交角.

89. 求蔓葉綫 $x^2=\frac{4y^3}{5a-4y}$ 與維尺曲綫 $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$ 之交角.

90. 求「維尺」曲綫 $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$ 與圓 $x^2+y^2=5a^2$ 之交角.

91. 求蔓葉綫 $y=\pm x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ 與圓 $x^2+y^2=a^2$ 之交角.

92. 求曲綫 $y^2=2ax$, $x^3+y^3-3axy=0$ 之交角.

93. 今以籬柵圍矩形地域之三面.其一面爲倚一已成之牆.求用籬柵最少而圍地域極大.

94. 有人立於河之一岸設河兩岸爲平行綫.河寬爲 $\frac{1}{4}$ 哩.今欲達於對岸沿河下流 3 哩之處.設此人步行爲每小時 4 哩.游泳爲每小時 2 哩.問當取如何之路程.可使所需時間爲最少.

95. 有一矩形地域.其面積爲 96 平方路得 (1 $Rod=16.5$ 呎).今以籬柵圍之.且用一平行於矩形二邊之籬分矩形爲二相等部分.問需籬柵最少時矩形之長闊當如何.

96. 自一長爲 b 呎直徑爲 a 呎之圓柱形木材.作成一長方形之梁.問能作成體積最大時.梁之各邊當如何.

97. 已知一直角三角形之斜邊.問三角形之面積爲極大時其二邊之長當如何.

98. AB 二村均在一小河之傍.二村至河岸最近處之道路爲平行.其長爲 2 哩及 3 哩.此二道路間之距離爲 10 哩.今欲在

河岸取一點安置自來水管至二村.問此點之位置須在何處.方可使所用之水管極少.

99. AB 與 CD 爲二平行綫.其間之距離爲 b.今引一橫綫(*Transversal*) BF.交 AD 橫綫於 E.問 F 之位置當如何方可使兩三角形 AEB, FED 之面積之和爲最小.

100. 等角三角形之周邊已知爲一常數.今以其高爲軸而旋轉以成一直圓錐.試證圓錐之體積極大時.三角形之邊爲等於其底之四分之三.

101. 有一圓錐狀之酒盂.其深爲 a.底角爲 2α.今投一圓球於盂內.使其溢出之量爲最大.表示此球之半徑爲

$$\frac{a \sin \alpha}{\sin \alpha + \cos 2\alpha}.$$

102. 二舟以常速度 u 及 v 沿二直綫進行.此二直綫之交角爲 θ.在某時間知此二舟至路程交點之距離爲 a 及 b.表示在此時二舟間之最近距離爲

$$\frac{(av-bu)\sin\theta}{(u^2+v^2-2uv\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}.$$

103. 假設以 a, b 爲半軸之橢圓.其面積爲等於 πab.求一最小之橢圓可外接於一已知之矩形.

104. 自已知之圓面切去一扇形.以作成一圓錐體.問此圓錐體之面積極大時.所切去之扇形當如何.

105. 長方形之梁.其硬度(*Stiffness*)爲與其深之立方與寬之乘積成比例.今從一半徑爲 a 之圓柱形木材.以作成一最堅固之梁.問其各邊之長當如何.

106. 長方形之梁.其硬度爲與其深之平方與寬之乘積成比例.今從一半徑爲 a 之圓柱形木材.以作成一最堅固之梁.問各邊當如何.

107. 汽船所消費之燃料.爲與其在靜水中速度之立方成比例.今設有一船逆流而上.水之速度每小時爲 a 哩.求消費最小之速度.

108. 今欲作成一能容一定量而頂部無蓋之直圓柱形貯水池.問所需材料爲極少時其高與半徑當如何.

109. 求可內接於一球內而體積最大之直圓錐體.

110. 有一電廠立於河之一岸.而一工廠爲在於對岸沿河下流 a 哩之處.今欲以電綫連於該廠.如設置電綫費在陸地每哩爲 m 圓水底每哩爲 n 圓.求費用最小時之路程.

111. 自一半圓形板之截成一等角三角形.其頂點爲在直徑之中心.求所截面積最大之三角形.

112. 作一等脚三角形令其可置於一拋物綫及一直綫之間.此直綫爲垂直於拋物綫之軸.設三角形之頂點爲在此直綫上.而底邊則與直綫平行.求作一面積最大之三角形.

113. 求曲綫 $y=a+(b-x)^3$ 之彎點.

114. 求曲綫 $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ 之彎點.

115. 求曲綫 $y=(x-1)^2(x+1)^3$ 之極大值極小值及彎點.

116. 求曲綫 $y^3=x(x^2-a^2)$ 之極大值極小值及彎點.

117. 求曲綫 $y=\dfrac{8}{x^2+4}$ 之彎點.

118. 試證環索綫 $y=\pm x\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$ 無彎點.

119. 求曲綫 $a^4y^2=a^2x^4-x^6$ 之彎點.

120. 求曲綫 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ 之彎點.

121. 求在曲綫 $y=x^3-6x^2+3x+5$ 上之點.其縱坐標之改變率等於過此點之切綫斜度之改變率.

122. 有一物體按照 $s=\dfrac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2$ 之規律沿一直綫而運動.求其速度及加速度.并問當何時此物體為固定不動,何時之速度為最大.何時為反向後方運動.

123. 一質點沿曲綫 $y^2=4x$ 而運動.當 $x=4$ 時其縱坐標之增加率為每秒10呎,問其時之橫坐標之改變率如何,及此質點沿曲綫進行為若干遠.再則於何處為其橫坐標之改變,十倍於其縱坐標之改變.

124. 橫坐標相同之二點.各沿曲綫 $y=x^3-12x^2+4x$ 及曲綫 $y=x^3-8x^2-8$ 而運動.求在 y 軸之方向速度相等之點.并問在此處兩曲綫之切綫之關係如何.

125. 長為 a 單位之梯.其頂點沿一垂直於水平面之牆而滑動.求梯頂與梯底之二速度之比.

126. 有一時常變更之圓柱形.在任何時其高恆與底之直徑相等.當其高為6呎之時.圓柱以每小時2呎之率增高.問在此時其體積之增加率如何.

127. 一舟以每小時行8哩之速度安置海底電綫.假設海深100呎.電綫爲自船尾放出以達於海底.問放出120呎之時.電綫之速率如何.

128. 於長爲4呎之繩端繫一小球作旋繞狀擲之.設每分鐘共旋轉100次.如此繩猝然斷裂.則球以自裂點之切綫方向飛去.假設外無他力以施於該球.問距繩斷十秒後.此球離中心之速率如何.

129. 物體沿一斜面滑下.其速率爲以t秒之時間經過$5t^2$之距離.設斜面爲與水平面成$30°$之角.求三秒後此物體之垂直速度.

130. 將皮帶一卷以每秒5呎之速度展置於一水平面.設皮帶之厚爲$\frac{1}{4}$呎而所卷爲一圓形.當其未展之前.圓之直徑爲2呎.問三秒終其半徑遞減之率如何.

131. 一車以每小時16哩之速度.行於高出地面40呎之軌道上.軌道爲與地面平行.且與地面上另一軌道成直交.設再有一車以每小時8哩之速度沿地面之軌道行駛.問距二車相遇五分鐘後其分離之速率如何.

132. 經過$(1, -3)$之曲綫.在該綫上任一點之斜度.等於該點之橫坐標之平方加3.求此曲綫之方程式.

133. 經過$(2, 1)$之曲綫.在該綫上任一點之斜度.等於該點橫坐標反商之平方.求此綫之方程式.

134. 經過 $(4,9)$ 之曲綫.在該綫上任一點之斜度.等於該點橫坐標之平方根.求此曲綫之方程式.

135. 求證一曲綫上任一點之斜度與該點之橫坐標成比例時.此曲綫爲拋物綫.

136. 經過$(1,1)$之曲綫.在該綫上任一點之斜度爲與該點縱坐標之平方成比例.求此曲綫之方程式.

137. 求曲綫 $y=150x-25x^2-x^3$ 每弓形$(Arch)$之面積.

138. 求曲綫 $y=x^3-3x^2-9x+27$ 一弓形之面積.

139. 試證拋物綫 $y^2=4px$ 與 x 軸及曲綫上任一點之縱坐標所夾之面積.等於以該點爲坐標所作成矩形面積之三分之二.

140. 曲綫 $y=x^n$ 與 x 軸及曲綫上任一點(h,k)所夾之面積.求以h,k之有理函數表之.

141. 求曲綫 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$(第六十九節)與二坐標軸所夾之三邊形面積.

142. 求拋物綫 $y^2=8x$ 與直綫 $2y-x=0$ 所夾之面積.

143. 求二拋物線 $y^2=4ax,\ x^2=4ay$ 所夾之面積.

144. 求二曲綫 $y=x^2+5,\ y=2x^2+1$ 所夾之月形面積.

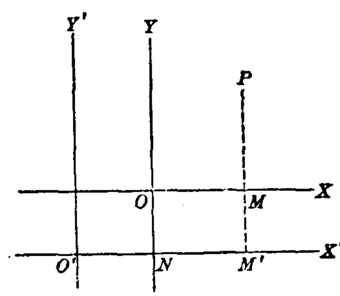
145. 求二曲綫 $y^2=16x,\ y^2=x^3$ 所夾之面積.

第十章 坐標軸之變換

111. 發凡 以前所述任一點坐標.爲假設在一平面上有二固定之坐標軸.故一定點常有相當一雙之坐標.反言之則凡任一雙之坐標.其相當之點惟有一.惟有時爲求便利起見須將兩軸之位置變換.此卽名爲變換坐標(*Transformation of Coordinates*).在此時須明該點同時對於第一組坐標及第二組坐標之關係.

表明此種關係之方程式.名爲變換之範式.惟今當知所謂變換坐標.不過變換該點之坐標軸.換言之.卽僅變其所根據之標準物.並非變換該點之位置也.

112. 變換原點而不變換軸之方向 在此爲擇取一新原點.而令其新軸之方向仍與原坐標軸平行.



第一百三十圖

設OX與OY(第一百三十圖)爲原坐標軸.$O'X'$與$O'Y'$爲新坐標軸.O'對於原軸之坐標爲(x_0, y_0).P爲平面上任一點.其坐標對於原軸爲(x, y).對於新軸爲(x', y').今引PMM'平行於OY.交OX及$O'X'$於M及M'.則$OM=x$, $MP=y$, $O'M'=x'$, $M'P=y'$, $ON=y_0$, $NO'=x_0$.

惟 $$OM=NM'=NO'+O'M'.$$

$$MP=MM'+M'P=ON+M'P.$$

$$\therefore\quad x=x_0+x',\ y=y_0+y'.$$

此卽爲所求之範式

例 1. 一定點之坐標爲(3, −2).今有一組新坐標軸.軸之方向與原軸平行.新坐標原點對於原軸之坐標爲(1, −1).問該定點對於新軸之坐標如何.

以$x_0=1, y_0=-1, x=3, y=-2$代入範式.得$3=1+x'$, $-2=-1+y'$.故$x'=2$, $y'=-1$.

例 2. 軸之方向不變.而將原點移至(−2, 1).問方程式$y^2-2y-3x-5=0$之變化如何.

變換之範式在此爲$x=-2+x'$, $y=1+y'$.故此方程式變爲

$$(1+y')^2-2(1+y')-3(-2+x')-5=0.$$

或 $$y'^2-3x'=0.$$

在曲綫上任一點之位置均未變更.故曲綫幷無變動.其方程式所以不同.蓋由於該曲綫對於新軸與對於原軸之關係有差異也.

在變換之手續完全以後.可除去x, y上之撇.得其對於新軸之方程式爲$y^2-3x=0$或$y^2=3x$.

113. 變換坐標最重要之應用.爲將某曲綫之方程式化爲簡單.例如前節例2所得之新方程式$y^2=3x$.較原式爲簡.且表明其曲綫爲一拋物綫.惟欲化某方程式爲簡單.則擇取新

原點之位置極關重要.今取一例以述明求定適宜新原點之方法.

例. 軸之方向不變.求擇取一新原點使 $y^2-4y-x^3-3x^2-3x+3=0$ 之新方程式不含 x 及 y 之一次項.

變換之範式為

$$x=x_0+x',\qquad y=y_0+y'.$$

今求定適宜之 x_0 與 y_0 可將原式書為

$$(y_0+y')^2-4(y_0+y')-(x_0+x')^3-3(x_0+x')^2-3(x_0+x')+3=0$$

展開齊項得

$$y'^2+(2y_0-4)y'-x'^3-(3x_0+3)x'^2-(3x_0^2+6x_0+3)x'$$
$$+(y_0^2-4y_0-x_0^3-3x_0^2-3x_0+3)=0.$$

本題之要件為使

$$2y_0-4=0,\qquad \text{及}\qquad 3x_0^2+6x_0+3=0.$$

因得　$x_0=-1,\quad y_0=2.$

故當擇 $(-1, 2)$ 為新原點.則曲綫之新方程式為 $y'^2-x'^3=0$ 或 $y^2=x^3$.

114. 化方程式為簡單之法.在於第七章所述之圓錐曲綫.頗屬重要.因就

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1. \tag{1}$$

而論.如令 $x=x_0+x'$, $y=y_0+y'$. 則 (1) 為

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1. \tag{2}$$

此式代表一橢圓.中心在$x'=0, y'=0$.二軸沿$O'X'$及$O'Y'$.故(1)式爲代表一中心在$x=x_0$, $y=y_0$二軸與OX及OY平行之橢圓.

設$a>b, e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a}}$橢圓之焦點爲($x'=\pm ae, y'=0$)或$x=\pm ae+x_0$, $y=y_0$).準綫爲$x'=\pm\frac{a}{e}$或$x=x_0\pm\frac{a}{e}$.同樣

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

爲一中心在(x_0, y_0)二軸平行於OX及OY之雙曲綫方程式.

$$(y-y_0)^2=4p(x-x_0)$$

爲一頂點在(x_0, y_0)軸與OX平行之拋物綫方程式.

任一方程式能變成以上之形式者.其討論與此相同.此種方程式之通論.見於第十一章.玆舉數例如次.

例 1. $16x^2+25y^2+64x-150y-111=0.$

移項 $16(x^2+4x)+25(y^2-6y)=111.$

完成平方 $16(x^2+4x+4)+25(y^2-6y+9)=400.$

即
$$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{16}=1.$$

令命 $x=-2+x'$, $y=3+y'$.

得
$$\frac{x'^2}{25}+\frac{y'^2}{16}=1.$$

此式爲一橢圓.半軸爲5及4.離心率爲$\frac{3}{5}$.中心爲($x'=0, y'=0$).焦點爲($x'=\pm 3$, $y'=0$).準綫爲$x'=\pm\frac{25}{3}=\pm 8\frac{1}{3}$.

故原式代表一橢圓.其半軸爲 5 及 4.離心率爲 $\frac{3}{5}$ 中心爲 $(-2, 3)$.焦點爲 $(-5, 3)$ 及 $(1, 3)$.準綫爲 $x=-10\frac{1}{3}$ 及 $x=6\frac{1}{3}$.

例 2. $$5y^2-10y-4x-7=0.$$

移項 $$5(y^2-2y)=4\left(x+\frac{7}{4}\right)$$

$$5(y^2-2y+1)=4\left(x+\frac{7}{4}+\frac{5}{4}\right)$$

卽 $$(y-1)^2=\frac{4}{5}(x+3)$$

今命 $$x=-3+x', \qquad y=1+y'.$$

得 $$y'^2=\frac{4}{5}x'.$$

此式代表一以 $O'X'$ 爲軸之拋物綫.其頂點爲 $(x'=0,\ y'=0)$.焦點爲 $\left(x'=\frac{1}{5},\ y'=0\right)$.準綫爲 $x'=-\frac{1}{5}$.

故原式代表一拋物綫.其軸與 OX 平行.頂點爲 $(-3, 1)$.焦點爲 $\left(-2\frac{4}{5}, 1\right)$.準綫爲 $x=-3\frac{1}{5}$.

例 3. $$(x-c)^2+y^2=e^2x^2$$

此爲一圓錐曲綫之方程式.已述明於第八十一節.今可書此式爲

$$(1-e^2)x^2-2cx+y^2=-c^2.$$

設 $e\neq 1$.則爲

$$(1-e)^2\left(x^2-\frac{2c}{1-e^2}x+\frac{c^2}{(1-e^2)^2}\right)+y^2=-c^2+\frac{c^2}{1-e^2}.$$

$$(1-e^2)\left(x-\frac{c}{1-e^2}\right)^2+y^2=\frac{c^2e^2}{1-e^2}.$$

$$\frac{\left(x-\frac{c}{1-e^2}\right)^2}{\frac{c^2e^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y^2}{\frac{c^2e^2}{1-e^2}}=1.$$

命令

$$\frac{c^2e^2}{(1-e^2)^2}=a^2.$$

$$\frac{c^2e^2}{1-e^2}=a^2(1-e^2)=\pm b^2.$$

$$\frac{c}{1-e^2}=\frac{a}{e}.$$

b 之符號爲正或負.視 e 爲小於1或大於1而決定.故得方程式.

$$\frac{\left(x-\frac{a}{e}\right)^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1.$$

以代表一中心爲$\left(\frac{a}{e},\ 0\right)$之橢圓或雙曲綫.

如 $e=1$.則方程式 $(x-c)^2+y^2=e^2x^2$ 成爲

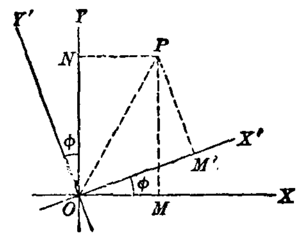
$$y^2=2cx-c^2=2c\left(x-\frac{c}{2}\right)$$

卽代表一頂點在$\left(\frac{c}{2},\ 0\right)$之拋物綫.

115. 變軸之方向而不變換原點

第一類　旋轉坐標軸　設 OX 及 OY (第一百三十一圖) 爲原軸. OX' 及 OY' 爲與 OX 及 OY 成 ϕ 角之新軸.則 $\angle XOY'=90°+\phi$ 而 $\angle YOX'=90°-\phi$.

如P爲同平面上任一點.其坐標對於OX及OY爲x與y.對於OX'及OY'爲x'及y'.則由作圖得$OM=x$, $ON=y$, $OM'=x'$. $M'P=y'$.



第一百三十一圖

今引直綫OP.其對於OX之射影爲OM.而折綫$OM'P$對於OX之射影爲$OM'\cos\phi+M'P\cos(90°+\phi)$或$OM'\cos\phi-M'P\sin\phi$.由第十五節.

得
$$OM=OM'\cos\phi.-M'P\sin\phi. \qquad (1)$$

同樣.OP對於OY之射影爲ON.折綫$OM'P$對於OY之射影爲$OM'\cos(90°-\phi)+M'P\cos\phi$.由第十五節得

$$ON=OM'\sin\phi+M'P\cos\phi. \qquad (2)$$

以諸值代OM, ON, OM', … 爲

$$x=x'\cos\phi-y'\sin\phi.$$

$$y=x'\sin\phi+y'\cos\phi.$$

例 1. 原點不變而旋轉坐標軸與原軸成45°之角.則方程式$xy=5$之變化如何.

因$\phi=45°$.故變換之範式爲$x=\dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}$.

代入方程式而簡單之.得新方程式爲$x^2-y^2=10$.可知此式爲代表一等邊雙曲綫.

例 2. 原點不變.而旋轉坐標軸與原軸成ϕ角.求擇取ϕ之值.使$34x^2+41y^2-24xy=100$之新方程式中不含xy項.

變換之範式爲

$$x=x'\cos\phi-y'\sin\phi.$$

$$y=x'\sin\phi+y'\cos\phi.$$

代入方程式齊項得

$$(34\cos^2\phi+41\sin^2\phi-24\sin\phi\cos\phi)x^2.$$
$$+(34\sin^2\phi+41\cos^2\phi+24\sin\phi\cos\phi)y^2$$
$$+(24\sin^2\phi+14\sin\phi\cos\phi-24\cos^2\phi)xy=100.$$

適合此式ϕ之值.惟$\tan^{-1}\frac{3}{4}$可使$x\,y$項之係數爲零.故卽令$\sin\phi=\frac{3}{5}$, $\cos\phi=\frac{4}{5}$.得方程式$x^2+2y^2=4$爲代表一橢圓.

第二類　互換坐標軸　如以x軸與y軸互換.則軸之方向亦起變更.此項變換之範式爲$x=y'$, $y=x'$.

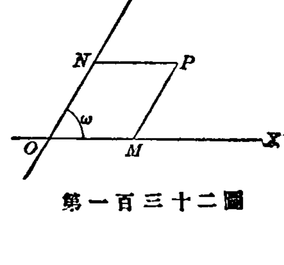
第三類　旋轉及互換坐標軸　如將二軸旋轉ϕ角後再行互換.則可結合以上二類得其範式爲

$$x=y'\cos\phi-x'\sin\phi,\qquad y=y'\sin\phi+x'\cos\phi.$$

當$\phi=270°$時. $x=x'$, $y=-y'$.此式有時亦屬重要.

如同時變換原點及軸之方向.其方法與前相同.卽先變換原點再變換軸之方向.

116. 斜角坐標(*Oblique Coordinates*)　以前所論之二坐標軸均係直交.惟有時爲求便利起見.須令二軸斜交成若干度之角.今於(第一百三十二圖).爲令OX及OY成ω角而非$90°$.



第一百三十二圖

求一點之斜角坐標. x爲自該點平行於OX以至OY之距離. y爲自該點平行

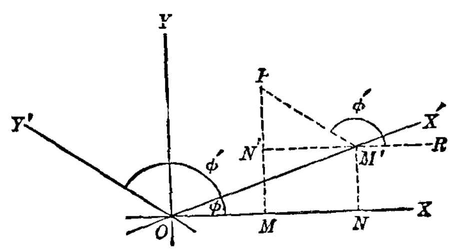
於OY以至OX之距離．x與y之正負符號．與第十六節之規律相同．

由此可知直角坐標卽爲斜角坐標之特殊格式．因由x與y之新定義．亦包含以前之一種也．實則凡云楷托坐標(*Cartersian coordinates*)或直綫坐標．(*Rectilinear coordinates*)同時包含直角與斜角兩種．

斜角坐標通常不及直角坐標之便利．在本書爲極少見．設有一組坐標軸．并未標明其角度．則二軸之夾角卽可默喻爲直角．

117. 不變換原點而由直交軸變爲斜交軸

設OX及OY(第一百三十三圖)爲原直交軸OX'及OY'爲新軸．與OX互成ϕ及ϕ'角．故$\omega=\phi'-\phi$．今命P爲同平面上任一點．其對於直交軸之坐標爲(x, y)．對於斜交軸之坐標爲(x', y')．



第一百三十三圖

引PM平行於OY, PM'平行於OY', $M'N$平行於OY, $RM'N'$平行於OX．則$\angle RM'P=\phi'$．

惟
$$OM=ON+NM=ON+M'N'=OM'\cos\phi+M'P\cos\phi'$$
$$MP=MN'+N'P=NM'+N'P=OM'\sin\phi+M'P\sin\phi'$$

$$\therefore\quad x=x'\cos\phi+y'\cos\phi'$$
$$y=x'\sin\phi+y'\sin\phi'$$

例. 變換雙曲綫$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$以其二漸近綫爲軸.

因漸近綫之方程式爲$y=\pm\frac{b}{a}x$.故$\phi=tan^{-1}\left(-\frac{b}{a}\right)$,$\phi'=tan^{-1}\frac{b}{a}$.如令雙曲綫對於新軸爲在第一及第三象限以內.則變換之範式爲

$$x=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}(x'+y'),\quad y=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}(-x'+y')$$

代入原式而簡單之得新方程式$xy=\frac{a^2+b^2}{4}$.除$b=a$外.軸之斜交角ω卽等於$2tan^{-1}\frac{b}{a}$.

118. 所得方程式之次數 就此章所論.凡用以變換原有坐標之至於新坐標之範式均爲一次.故變換後所得方程式之次數.必不能較原方程式之次數爲高.在他方面言之.其結果亦不能低於原式之次數.因如從任一方程式變成新方程式.再自新方程式變歸原式.必須與原有形式完全適合.故在第一次之變換如能減低其次數.則當第二次之變換必須增加次數方可與原式適合.今由上述增加次數旣不可能.故第一次之變換所得方程式之次數.必不能較原式爲低.

由此可知凡將任一方程式變換坐標一次或數次.其方程式之毫無次數變更.例如一次方程式.不論在直角坐標或斜角坐標均代表一直綫.

問　題

1. 以(3, −2)爲原點.而不變換軸之方向.問(2, 3)(−4, 5)(5, −7)三點對於新軸之坐標如何.

2. 以$(1, -1)$爲原點.而不變換軸之方向.問方程式$x^2+4y^2-2x+8y+1=0$之變化如何.

3. 以$(2, -3)$爲原點.而不變換軸之方向.問方程式$y^3-6y^2+3x^2+12y-18x+35=0$之變化如何.

4. 令原點爲在一橢圓短軸之下端.以OY爲短軸.求此橢圓之方程式.

5. 令原點爲在一橢圓左端之頂點.以OX爲長軸.求此橢圓之方程式.

6. 令原點爲在一雙曲綫左端之頂點.以OX爲橫軸.求此雙曲綫之方程式.

7. 如以A爲原點.(第九十二圖)二軸與第八十四節所述者平行.求環索綫之方程式.

8. 如以漸近綫爲y軸.x軸與第八十四節所述者相同.求環索綫之方程式.

9. 如以LK爲x軸OA爲y軸.(第九十圖)求維尺曲綫之方程式.

10. 如原點爲在圓之中心(第九十圖).二軸與第八十二節所述者平行.求維尺曲綫之方程式.

11. 如x軸無變更.而以漸近綫爲y軸.求蔓葉綫之方程式.

12. 如原點爲在圓之中心(第九十一圖).軸之方向與第八十三節相同.求蔓葉綫之方程式.

13. 如以拋物綫之軸爲x軸.焦點爲原點.求此拋物綫之方程式.

14. 如以拋物綫之軸及準綫爲x軸及y軸.求此拋物綫之方程式.

15. 軸之方向不變.求另擇一點爲原點.使$y^2-8x-10y+1=0$僅含y^2及x項.

16. 軸之方向不變.求另擇一點爲原點.使$12x^2+18y^2-12x+12y-31=0$不含一次項.

17. 試證方程式$xy+ax+by+c=0$由擇取與原軸平行之新軸可變成$xy=k$之形.且求定k之值.

18. 試證方程式$ax^2+by^2+cx+dy+e=0$($a\neq0$, $b\neq0$)由擇取與原軸平行之新軸.常可變成$ax^2+by^2=k$之形.且求定k之值.

19. 試證方程式$y^2+ay+bx+c=0$ ($b\neq0$)由擇取與原軸平行之新軸.常可變成$y^2+bx=0$之形.

20. 求一橢圓之方程式.如知其長短二軸爲6及2.中心爲在$(-3, 2)$.長軸與OX平行.

21. 求一橢圓之方程式.如知其二軸爲$\frac{3}{7}$及$\frac{1}{5}$.中心爲在$(-2, -3)$.長軸與OX平行.

22. 求雙曲綫之方程式.如知其橫軸爲4.共軛軸爲2.中心爲在$(1, -2)$.橫軸與OX平行.

23. 求雙曲綫之方程式.如知其橫軸爲$\sqrt{2}$.共軛軸爲$\sqrt{\frac{2}{3}}$.中心爲在$(2, 3)$.橫軸與OX平行.

24. 拋物綫之頂點爲$(3, -2)$.焦點爲$(5, -2)$.求其方程式.

25. 拋物綫之頂點爲$(4, 5)$.焦點爲$(4, 1)$.求其方程式.

26. 橢圓之中心爲(2,3).離心率爲$\frac{1}{2}$.平行於x軸之長軸爲10.問其方程式如何.

27. 橢圓之頂點爲$(-2, 0)$及$(4, 0)$.焦點之一爲原點.求其方程式.

28. 雙曲綫之中心爲$(-1, -2)$.離心率爲$1\frac{1}{2}$.平行OX之橫軸爲4.求其方程式.

29. 經過原點之拋物綫.其軸與OX平行.頂點爲在$(-4, -2)$.求其方程式.

30. 求橢圓$4x^2+9y^2+8x-36y+4=0$之離心率,中心,頂點焦點及準綫.

31. 求橢圓$3x^2+5y^2+18x-20y+32=0$之離心率,中心,頂點焦點,及準綫.

32. 求雙曲綫$9x^2-4y^2-54x-32y-19=0$之離心率,中心,頂點焦點,準綫及漸近綫.

33. 求雙曲綫$3x^2-2y^2+6x+8y-11=0$之離心率,中心,頂點,焦點,準綫及漸近綫.

34. 求拋物綫$72x^2+48x+180y-37=0$之頂點,焦點,軸與準綫.

35. 求拋物綫$y^2-5x+6y-1=0$之頂點,焦點,軸與準綫.

36. 如將二軸旋轉$60°$角.求$(0, 1)$ $(1, 0)$ $(1, 1)$三點之新坐標.

37. 原點不變.而將二軸旋轉$45°$.求$3x^2+3y^2-10xy+8=0$之新方程式.

38. 將二軸旋轉$45°$.求$x^3+y^3-3axy=0$之新方程式.

39. 將二軸旋轉45°.且變換原點.求證$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$爲一拋物綫.

40. 旋轉二軸$\tan^{-1}\frac{2}{3}$.求$5x^2-12xy+10y^2-14=0$之新方程式.

41. 如原點不變.試證方程式$x^2+y^2=a^2$對於任一雙直交軸均無變更.

42. 以原軸所夾角之二等分綫爲軸.求$x^2-y^2=36$之新方程式.

43. 旋轉二軸.求擇一適宜之角.使$4x^2-3xy+8y^2=1$之新方程式無xy項.

44. 旋轉二軸.求擇一適宜之角.使方程式$3x^2+2\sqrt{3}\,xy+y^2+2x-2\sqrt{3}\,y=0$爲不含$xy$項之新方程式.

45. 旋轉二軸60°.而以$(-1,2)$爲原點.求$x^2-5y^2-6\sqrt{3}\,xy+[2+12\sqrt{3}]x+[20-6\sqrt{3}]y-15+12\sqrt{3}=0$對於新直交軸之方程式.

46. 原點不變.將直交軸變爲與OX成$\tan^{-1}\frac{1}{3}$及$\tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right)$之角之斜交軸.則方程式$4x^2+9y^2=36$之變化如何.

47. 求雙曲綫$3x^2-4y^2=12$之新方程式.如以其漸近綫爲軸.

48. 試證直綫$y=\pm x$僅交環索綫於原點.且求以此二綫爲軸時該曲綫之方程式.

49. 原點不變.將直交軸變爲與OX成$\tan^{-1}\frac{1}{2}$及$\tan^{-1}\frac{4}{3}$之角之斜交軸.則方程式$2x^2-3y^2=6$之變化如何.

50. 由一組直交軸變爲同原點同x軸之斜交軸.其二斜軸間之夾角爲ω.求證其變換之範式爲

$$x=x'+y'\cos\omega.$$

$$y=y'\sin\omega.$$

51. 由前題之範式.證明直綫$y=mx+b$對於斜角坐標之方程式爲

$$y=\frac{\sin\phi}{\sin(\omega-\phi)}x+c.$$

ω爲OX與OY間之夾角.ϕ爲直綫與OX之夾角.c爲OY上之截部.

52. 連結斜三角形諸邊角.直接由三角範式以推求第51題之結果.

53. 由第50題之變換.求證圓對於斜角坐標之方程式爲

$$(x-d)^2+(y-e)^2+2(x-d)(y-e)\cos\omega=r^2.$$

ω爲二軸間之夾角.而(d, e)爲圓之中心.

54. 連結斜三角形諸邊角.直接由三角範式推求第53題之結果.

第十一章 二次方程式之通論

119. 發凡 二次方程式之通式爲

$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0$$

其諸係數可爲任意之值.亦可爲零.惟A, B, H不能同時爲零.

今將證明此方程式如能代表一曲綫.則所代表必爲橢圓雙曲綫拋物綫中之一.或此三種之極限.且將推出決定此等曲綫之標準.

120. 換去xy項 原點不變.將二軸旋轉ϕ角成一組新直交軸.以第一百十五節之範式

$$x=x'\cos\phi-y'\sin\phi.$$

$$y=x'\sin\phi+y'\cos\phi.$$

代入前式.得

$$A'x'^2+2H'x'y'+B'y'^2+2G'x'+2F'y'+C'=0.$$

此式爲令 $A'=A\cos^2\phi+2H\sin\phi\cos\phi+B\sin^2\phi.$

$$H'=(B-A)\sin\phi\cos\phi+H(\cos^2\phi-\sin^2\phi)$$

$$B'=A\sin^2\phi-2H\sin\phi\cos\phi+B\cos^2\phi$$

$$G'=G\cos\phi+F\sin\phi$$

$$F'=F\cos\phi-G\sin\phi.$$

$$C'=C$$

今可定ϕ之值以使H'爲零.即

$$2(B-A)\cos\phi\sin\phi+2H(\cos^2\phi-\sin^2\phi)=0.$$

由此得　$2H\cos 2\phi+(B-A)\sin 2\phi=0.$

故
$$\tan 2\phi=\frac{2H}{A-B},$$

或
$$\phi=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2H}{A-B}.$$

計算A', B'之值得

$$\begin{aligned}A'&=A\cos^2\phi+2H\sin\phi\cos\phi+B\sin^2\phi\\&=A\frac{1+\cos 2\phi}{2}+H\sin 2\phi+B\frac{1-\cos 2\phi}{2}.\\&=\frac{1}{2}[A+B+(A-B)\cos 2\phi+2H\sin 2\phi]\end{aligned}$$

惟因　$\tan 2\phi=\dfrac{2H}{A-B}.$

$$\sin 2\phi=\pm\frac{2H}{\sqrt{(A-B)^2+4H^2}},\qquad \cos 2\phi=\pm\frac{A-B}{\sqrt{(A-B)^2+4H^2}},$$

故
$$\begin{aligned}A'&=\frac{1}{2}\left[A+B\pm\frac{(A-B)^2+4H^2}{\sqrt{(A-B)^2+4H^2}}\right].\\&=\frac{1}{2}\left[A+B\pm\sqrt{(A-B)^2+4H^2}\right].\end{aligned}$$

同樣　$B'=\dfrac{1}{2}\left[A+B\mp\sqrt{(A-B)^2+4H^2}\right].$

由此結果.得知

$$A'B'=AB-H^2.$$

故如$AB-H^2$爲正.則A'與B'之符號相同.$AB-H^2$爲負.則A'與B'之符號相反.$AB-H^2$爲零.則A', B'之中必有一爲零.

以前之普通方程式.今卽用一較簡之方程式

$$A'x'^2+B'y'^2+2G'x'+2F'y'+C'=0.$$

代之.其討論見於以下諸節.諸文字上之撇.爲求簡便已除去.

121. 方程式 $Ax^2+By^2+2Gx+2Fy+C=0$ 今將證明凡方程式爲 $Ax^2+By^2+2Gx+2Fy+C=0.$

而其係數

$$AF^2+BG^2-ABC\neq 0.$$

如能代表一曲綫.所代表必爲一圓錐曲綫.詳言之爲

(1) 如 A 與 B 符號相同.則代表一橢圓.

(2) 如 A 與 B 符號相反.則代表一雙曲綫.

(3) 如 A 與 B 有一爲零.則代表一拋物綫.

初設 A,B 均不爲零.故方程式可書作

$$A\left(x^2+2\frac{G}{A}x\right)+B\left(y^2+2\frac{F}{B}y\right)=-C.$$

完成括弧內之平方爲

$$A\left(x^2+2\frac{G}{A}x+\frac{G^2}{A^2}\right)+B\left(y^2+2\frac{F}{B}y+\frac{F^2}{B^2}\right)=\frac{G^2}{A}+\frac{F^2}{B}-C.$$

即 $$A\left(x+\frac{G}{A}\right)^2+B\left(y+\frac{F}{B}\right)^2=\frac{AF^2+BG^2-ABC}{AB}.$$

因 $AF^2+BG^2-ABC\neq 0$ 故方程式可以等號右邊之項除之得

$$\frac{\left(x+\frac{G}{A}\right)^2}{M}+\frac{\left(y+\frac{F}{B}\right)^2}{N}=1.$$

此式爲令 $M=\dfrac{AF^2+BG^2-ABC}{A^2B},\qquad N=\dfrac{AF^2+BG^2-ABC}{AB^2}.$

今將原點移至$\left(-\frac{G}{A},\ -\frac{F}{B}\right)$.二軸仍與原軸平行.由變換之範式

$$x=-\frac{G}{A}+x',\qquad y=-\frac{F}{B}+y'.$$

得方程式爲

$$\frac{x'^2}{M}+\frac{y'^2}{N}=1.$$

A,B如爲同符號.M,N亦必同符號.設其符號爲正.即令$M=a^2$, $N=b^2$,可得一代表橢圓之方程式

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1.$$

此橢圓之軸爲與原有坐標軸平行.中心對於原軸爲$\left(-\frac{G}{A},\ -\frac{F}{B}\right)$.設$A=B$.則橢圓變爲圓.

M,N如均爲負.則無x與y之實數值以適合於方程式

$$\frac{x'^2}{M}+\frac{y'^2}{N}=1.$$

A,B如爲異符號.M N之符號亦必相反.今設$M=a^2$, $N=-b^2$.或$M=-a^2$, $N=b^2$.可得二式

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1,$$

$$-\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1.$$

各代表一雙曲綫.此雙曲綫之軸.爲與原有坐標軸平行.中心

對於原軸爲$\left(-\frac{G}{A},\ -\frac{F}{B}\right)$. 故此定理之第一部及第二部皆已證明.

今設A, B有一爲零.例如$A=0$, $B\neq 0$. 則方程式爲

$$By^2+2Gx+2Fy+C=0.$$

關於其係數之要件爲$BG^2\neq 0$. 卽$G\neq 0$. 因B原不能爲零也.

將方程式移項得

$$y^2+2\frac{F}{B}y=-2\frac{G}{B}x-\frac{C}{B}.$$

完成平方

$$\left(y+\frac{F}{B}\right)^2=-\frac{2G}{B}\left(x+\frac{C}{2G}-\frac{F^2}{2GB}\right).$$

如變換原點令

$$x=-\frac{C}{2G}+\frac{F^2}{2GB}+x',\quad y=-\frac{F}{B}+y'.$$

卽得一抛物綫方程式

$$y'^2=-\frac{2G}{B}x'.$$

同樣.如$B=0$. 而$A\neq 0$. 則方程式可變爲

$$x'^2=-\frac{2F}{A}y'.$$

亦爲一抛物綫. 以上兩種抛物綫之軸. 均與原有坐標軸平行. 定理之第三部今亦已證明.

122. 極限(*Limiting cases*) 今將討論方程式爲

$$Ax^2+By^2+2Gx+2Fy+C=0.$$

而其係數

$$AF^2+BG^2-ABC=0.$$

此方程式所代表之圖形爲一圓錐曲綫之極限.因本節之方程式可由前節之方程式令其係數 AF^2+BG^2-ABC 漸次接近於零而得之也.惟有三種須注意.

1. A, B 之符號相同.

依一百二十一節之法.得方程式爲

$$A\left(x+\frac{G}{A}\right)^2+B\left(y+\frac{F}{B}\right)^2=0.$$

今令 $\qquad x=-\frac{G}{A}+x',\qquad y=-\frac{F}{B}+x'.$

得 $$Ax'^2+By'^2=0$$

因 A, B 之符號相同.可視之均爲正號.分解因數

$$(\sqrt{A}\,x'+i\sqrt{B}\,y')(\sqrt{A}\,x'-i\sqrt{B}\,y')=0.$$

適合此式之實數值.惟有 $x'=0$, $y'=0$ 或於原坐標爲 $x=-\frac{G}{A}$, $y=-\frac{F}{B}$.故方程式在此惟代表一點.此卽爲橢圓之極限.

2. A, B 之符號相反得方程式爲

$$A\left(x+\frac{G}{A}\right)^2+B\left(y+\frac{F}{B}\right)^2=0.$$

或 $$Ax'^2+By'^2=0$$

因 A, B 之符號相反.今卽視 A 爲正而 B 爲負.分解方程式爲兩實數因子

$$(\sqrt{A}x'+\sqrt{-B}y')(\sqrt{A}x'-\sqrt{-B}y')=0.$$

故此式代表二直綫相交於$x'=0, y'=0$.或$x=-\frac{G}{A}, y=-\frac{F}{B}$.

此卽爲雙曲綫之極限.

3. 係數 A, B 有一爲零.例如 $A=0, B\neq0$. 則關於 $AF^2+BG^2-ABC=0$之要件爲$G=0$.故方程式爲

$$By^2+2Fy+C=0.$$

分解因數爲

$$B(y-y_1)(y-y_2)=0.$$

此方程式按照y_1與y_2之值爲不等實數或相等實數或虛數而代表二平行直綫或二重合直綫或無軌跡.此卽爲抛物綫之極限.

123. 行例式$AB-H^2$

今仍取普通二次方程式

$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0.$$

設將此式變爲

$$A'x'^2+B'y'^2+2G'x'+2F'y'+C'=0.$$

則

$$AB-H^2=A'B'.$$

此種關係已述明於前.今卽根據於此以述次之定理.

方程式

$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0.$$

如能代表曲綫所代表者必爲一圓錐曲綫或其極限.詳言之爲

1. 如 $AB-H^2>0$. 方程式代表一橢圓或一點或不代表曲綫.

2. 如 $AB-H^2<0$. 方程式代表一雙曲線或二相交直綫.

3. 如 $AB-H^2=0$. 方程式代表一拋物綫或二平行直綫或二重合直綫或不代表曲綫.

124. 普通方程式之判定式 前於第一百二十二節.已述明.

$$A'x'^2+B'y'^2+2G'x'+2F'y'+C'=0. \qquad (1)$$

如
$$A'F'^2+B'G'^2-A'B'C'=0.$$

則所代表必為一圓錐曲綫之極限.此要件對於普通方程式

$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0. \qquad (2)$$

之係數尤關重要.此雖可用第一百二十節所得之值代 A', B', G', F', C' 而求之.然似此頗嫌繁雜.今設(1)式為代表一圓錐曲綫之極限.則該式卽可分解為 x 及 y 之有理因數.故在(2)式亦必與此相同.今卽求可以分解(2)式之要件.

1. 假設 $A\neq0$. (2)式可視為 x 之二次方程式.解此方程式可得

$$x=-\frac{(Hy+G)\pm\sqrt{(H^2-AB)y^2+2y(HG-AF)+(G^2-CA)}}{A}$$

今須使 y 不在根號之下.卽在根號下之數必須為一完全平方.故由第三十七節得其要件為

$$(HG-AF)^2-(H^2-AB)(G^2-CA)=0,$$

卽
$$ABC+2FGH-AF^2-BG^2-CH^2=0. \qquad (3)$$

2. 假設 $A=0$, $B\neq 0$. 此式視爲 y 之二次方程式,依前法可得相同之結果.

3. 假設 $A=0$, $B=0$. H 必不能爲零.方程式爲

$$xy+\frac{G}{H}x+\frac{F}{H}y+\frac{C}{2H}=0.$$

此式如能分解因數.其形式必爲

$$(x+a)(y+b)=0.$$

此處爲令 $a=\frac{F}{H}$, $b=\frac{G}{H}$, $ab=\frac{C}{2H}$.

使 a, b 二量能適合上式之要件爲

$$2FG-CH=0.$$

惟此卽爲(3)式當 $A=0$, $B=0$ 時所成.故方程式

$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0$$

代表一圓錐曲綫之極限之要件爲

$$ABC+2FGH-AF^2-BG^2-CH^2=0.$$

(3)式名爲(1)式之判定式(*Discriminant*).通常以 Δ 表之.其行列式之形式爲

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}$$

125. 二次曲綫之分類 以上諸節之結果總括之爲下表以表明方程式

$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0.$$

假設　$D=AB-H^2.$

$$\Delta=ABC+2FGH-AF^2-BG^2-CH^2.$$

時所代表之曲綫.

	$\Delta\neq0$	$\Delta=0$
$D>0$	橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 或不代表曲綫	點 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
$D<0$	雙曲綫 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 或 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	二相交直綫 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
$D=0$	拋物綫 $y^2=4px$ 或 $x^2=4py$	二平行直綫 $(y-y_1)(y-y_2)=0$ 或 $(x-x_1)(x-x_2)=0$ 或無軌迹

126. 圓錐曲綫之中心　凡求普通方程式所代表圓錐曲綫之中心.可卽令其中心爲在坐標之原點.則此方程式必不復含 x, y 之一次項.因如有一點 (x_1, y_1) 與此式適合.其對稱點 $(-x_1, -y_1)$ 亦必與之適合.故令中心爲 (x_0, y_0) 而以

$$x=x_0+x',\qquad y=y_0+y'$$

代入普通方程式.得

$$Ax'^2+2Hx'y'+By'^2+2(Ax_0+Hy_0+G)x'+2(Hx_0+By_0+F)y'$$
$$+Ax_0^2+2Hx_0y_0+By_0^2+2Gx_0+2Fy_0+C=0.$$

由此可得求中心之要件爲

$$Ax_0+Hy_0+G=0,$$

$$Hx_0+By_0+F=0. \qquad (1)$$

擇一適宜因子乘以上二式再相加得次之方程式

$$(AB-H^2)x_0=HF-BG,$$

$$(AB-H^2)y_0=HG-AF. \qquad (2)$$

由此發生三種情形.

1. $AB-H^2\neq 0$. (2)式有一解答.故曲綫有一中心.凡橢圓雙曲綫及其極限均屬此類.

2. $AB-H^2=0$,惟 $HF-BG$ 及 $HG-AF$ 非等於零. (2)式中至少有一爲不合理.故(1)式無解答.而曲綫無中心.抛物綫屬於此類.

3. $AB-H^2=0$, $HF-BG=0$, $HG-AF=0$. (2)式均爲$0=0$.故方程式(1)爲均等式(*Identical*).即代表同一直綫.在此直綫上任一點皆爲圓錐曲綫之中心.且在此易知 $\Delta=0$. 故曲綫即爲兩平行綫(第一百十二五節).而所求之中心綫爲在兩平行綫之半途.

127. 設將原點移至方程式

$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0,$$

所表曲綫之中心.則此式變爲

$$Ax'^2+2Hx'y'+By'^2+C'=0.$$

其中 $$C'=Ax_0^2+2Hx_0y_0+By_0^2+2Gx_0+2Fy_0+C.$$

取前節方程式(1)以x_0乘第一式.再以y_0乘第二式.相加得

$$Ax_0^2+2Hx_0y_0+By_0^2+Gx_0+Fy_0=0.$$

從C'之值中減去此式爲

$$C'=Gx_0+Fy_0+C.$$

代入前節(2)式中x_0及y_0之值可得

$$C'=\frac{ABC+2FGH-AF^2-BG^2-CH^2}{AB-H^2}=\frac{\Delta}{D}.$$

128. 處理數字方程式之次第 將一數字方程式變爲一較簡之形式.根據以前之方法述之如次.

先計算$AB-H^2$之值.而定其曲綫之種類.(第一百二十三節)如再計算Δ之值亦佳.惟非必要.

如$AB-H^2\neq0$. 卽依第一百二十六節之法求曲綫之中心.而將原點移至其處.再依第一百二十節將二軸旋轉ϕ角.

$$\phi=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2H}{A-B}=\tan^{-1}\frac{\pm2H}{\sqrt{(A-B)^2+4H^2}\pm(A-B)}.$$

依第一百二十節之範式計算A', B'之值.其$\tan\phi$之二值.卽爲曲綫兩軸之斜度.

如$AB-H^2=0$.則書方程式爲

$$(\sqrt{A}\,x+\sqrt{B}\,y)^2+2Gx+2Fy+C=0.$$

$\sqrt{B}$之符號與H相同.次令

$$y'=\frac{\sqrt{A}\,x+\sqrt{B}\,y}{\sqrt{A+B}},\qquad x'=\frac{\sqrt{B}\,x-\sqrt{A}\,y}{\sqrt{A+B}}.$$

解此二方程式得x及y.代入原式.卽得$y'^2+2G'x'+2F'y'+C'=0$.之形.再依第一百二十一節之法求之.

例 1. $8x^2-4xy+5y^2-36x+18y+9=0$.

$AB-H^2=36$故曲綫爲一橢圓或橢圓之極限.

由第一百二十六節得其中心爲$(2,-1)$.將原點移至此處.得方程式.

$$8x'^2-4x'y'+5y'^2-36=0.$$

旋轉二軸ϕ角.$\phi=\frac{1}{2}tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right)=tan^{-1}2$或$tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$.由第一百二十節求得$A'=9$或$4$,$B'=4$或$9$.

如令$tan\phi=2$.則變換之範式(第一百十五節)爲

$$x'=\frac{x''-2y''}{\sqrt{5}},\quad y'=\frac{2x''+y''}{\sqrt{5}}.$$

可得$A'-4$, $B'=9$.

簡單之方程式爲

$$4x''^2+9y''^2=36.$$

曲綫兩軸之斜度爲2及$-\frac{1}{2}$.

例 2. $36x^2-48xy+16y^2+52x-260y-39=0$.

$$AB-H^2=0.$$

將原式完成平方

$$(6x-4y)^2+52x-260y-39=0.$$

令
$$y'=\frac{6x-4y}{\sqrt{52}}=\frac{3x-2y}{\sqrt{13}}.$$

$$x'=\frac{-4x-6y}{\sqrt{52}}=\frac{-2x-3y}{\sqrt{13}}.$$

解此二式得y及x代入原式為

$$y'^2+\sqrt{13}\,y'+\sqrt{13}\,x'-\frac{3}{4}=0.$$

或
$$y''^2=-\sqrt{13}\,x''.$$

此式為令
$$x''=-\frac{4}{\sqrt{13}}+x',\quad y''=\frac{\sqrt{13}}{2}+y'$$

故曲綫為一拋物綫.其軸為$y''=0$或$6x-4y+13=0$.

129. 經過五點之圓錐曲綫方程式

普通方程式

$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0.$$

共含六個常數.今欲求定此種常數之比.必須有五個獨立之方程式.故通常有五要件卽可決定一圓錐曲綫.最簡單之例.為使一圓錐曲綫經過五點(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5).則決定A, H, B, G, F, C之比之五方程式為

$$Ax_1^2+2Hx_1y_1+By_1^2+2Gx_1+2Fy_1+C_1=0.$$

$$Ax_2^2+2Hx_2y_2+By_2^2+2Gx_2+2Fy_2+C_2=0.$$

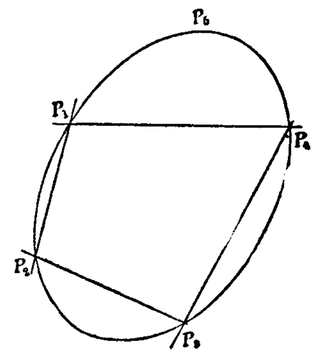
$$Ax_3^2+2Hx_3y_3+By_3^2+2Gx_3+2Fy_3+C_3=0.$$

$$Ax_4^2+2Hx_4y_4+By_4^2+2Gx_4+2Fy_4+C_4=0.$$

$$Ax_5^2+2Hx_5y_5+By_5^2+2Gx_5+2Fy_5+C_5=0.$$

消去普通方程式及以上諸式之係數.可得經過五定點之圓錐曲綫方程式爲

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$



第一百三十四圖

經過五定點之圓錐曲綫.亦可依下法求之.

先取其中四點.以直綫連成一任意四邊形(第一百三十四圖).設 $P_1 P_2$ 之方程式爲 $A_1x+B_1y+C_1=0$.或簡單書爲 $f_1(x, y)=0$. 同樣. $P_2 P_3$ 之方程式爲 $f_2(x, y)=0$. $P_3 P_4$ 之方程式爲 $f_3(x, y)=0$. $P_4 P_1$ 之方程式爲 $f_4(x, y)=0$.

今完成一方程式

$$l f_1(x, y)\cdot f_3(x, y)+k f_2(x, y)\cdot f_4(x, y)=0. \tag{1}$$

係數 l, k 之值爲未定.此方程式爲含 x 與 y 之二次方.故必代表一圓錐曲綫.再則 P_1 之坐標能使 $f_1(x, y)=0$ 及 $f_4(x, y)=0$. 故與(1)式適合.可知此曲綫必經過 P_1. 同樣曲綫亦經過 P_2, P_3, P_4. 今如代入 P_5 之坐標.使曲綫亦經過 P_5. 即可決定 l 及 k 之值.而得所求之圓錐曲綫方程式.

例　求一圓錐曲線經過五定點 $P_1(2,3)$, $P_2(-1,2)$ $P_3(-3,-1)$, $P_4(0,-4)$, $P_5(1,1)$.

P_1P_2 之方程式爲 $x-3y+7=0$. P_2P_3 之方程式爲 $3x-2y+7=0$. P_3P_4 之方程式爲 $x+y+4=0$. P_4P_1 之方程式爲 $7x-2y-8=0$.

作成方程式

$l(x-3y+7)(x+y+4)+k(3x-2y+7)(7x-2y-8)=0$. 代入 P_5 之坐標.得 $k=\frac{5}{4}l$.

故所求之方程式爲

$$(x-3y+7)(x+y+4)+\frac{5}{4}(3x-2y+7)(7x-2y-8)=0,$$

或
$$109x^2-108xy+8y^2+169x-10y-168=0.$$

設其中有三點在一直綫上.此法仍可應用.因此爲一圓錐曲綫之極限.爲含連結此三點及連結其餘二點之兩直綫.

設其中有四點或五點同在一直綫上.則此法不能存在.就幾何之意義言之.此問題爲未決定.因如有四點在同一直綫.則圓錐曲綫爲含此直綫及經過第五點之任一直綫.如五點均在一直綫.則圓錐曲綫爲含此直綫及此外一任何直綫.二者均未完全決定也.

惟於拋物綫.則僅知四點已足.因已知其方程式中諸係數之一關係爲 $AB-H^2=0$. 今依前例取方程式

$$lf_1(x,y)\cdot f_3(x,y)+kf_2(x,y)\cdot f_4(x,y)=0$$

之係數.完成方程式 $AB-H^2=0$. 則所得必爲 $\frac{l}{k}$ 之二次方程式.故按照 $\frac{l}{k}$ 之值爲不等實數或相等實數或虛數.而得兩拋物綫或一拋物綫或虛拋物綫.惟須注意此處所云拋物綫.包含二平行直綫在內.

例 設求一拋物綫經過四定點 $P_1(1,-1)$, $P_2(2,3)$, $P_3(2,-5)$, $P_4(5,7)$.

諸直綫之方程式 P_1P_2 爲 $4x-y-5=0$. P_2P_3 爲 $x-2=0$. P_3P_4 爲 $4x-y-13=0$. P_4P_1 爲 $2x-y-3=0$. 故圓錐曲綫之方程式爲

$$l(4x-y-5)(4x-y-13)+k(x-2)(2x-y-3)=0.$$

或
$$(16l+2k)x^2+(-8l-k)xy+ly^2$$
$$+(-72l-7k)x+(18l+2k)y+65l+6k=0.$$

$AB-H^2=0$ 之要件爲

$$(16l+2k)l-\left(4l+\frac{1}{2}k\right)^2=0.$$

即
$$k=0, \quad 或 \quad -8l.$$

故可得二拋物綫

$$16x^2-8xy+y^2-72x+18y+65=0$$

及
$$y^2-16x+2y+17=0.$$

惟第一方程式可分解爲

$$4x-y-5=0, \quad 及 \quad 4x-y-13=0.$$

此二式代表兩平行直綫.爲一拋物綫之極限.

130. 斜角坐標　以前之普通方程式.皆假設爲對於直角坐標而言.今設有對於斜角坐標之方程式

$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0.$$

則可任擇一適宜之直角坐標而將此式變換之.其範式已述於第一百十七節.且於第一百十八節業已證明類此之變換并不能改變方程式之次數.故所得之新方程式其形式仍爲

$$A'x'^2+2H'x'y'+B'y'^2+2G'x'+2F'y'+C'=0.$$

此式可依以前之法處理之.今由此得一結果爲

任意二次方程式.不論其爲對於直角坐標或斜角坐標而言均代表一圓錐曲線.

問　題

求以下諸圓錐曲線之性質

1. $4xy+3y^2-8x+16y+19=0.$

2. $x^2-6xy+9y^2-280x-20=0.$

3. $11x^2-4xy+14y^2-26x+32y+59=0.$

4. $5x^2-26xy+5y^2+10x-26y+71=0.$

5. $4xy+6x-8y+1=0.$

6. $x^2-2xy+y^2+2x-2y+1=0.$

7. $13x^2+10xy+13y^2+6x-42y-27=0.$

8. $x^2-4xy-2y^2-14x+4y+25=0.$

9. $6x^2-5xy-6y^2-46x-9y+60=0.$

10. $4x^2-8xy+4y^2+6x-8y+1=0.$

11. $x^2+6xy+9y^2-6x-18y+5=0.$

12. $41x^2-24xy+34y^2-188x+116y+196=0.$

13. $31x^2-24xy+21y^2+48x-84y+84=0.$

14. 試證普通方程式中如 A, B 之符號相反.則其圓錐曲綫必爲雙曲綫.

15. 試證普通方程式中如 $A=-B$. 則代表一等邊雙曲綫.

16. 設於直角坐標軸.求證普通方程式代表一圓之要件爲 $A=B$ 及 $H=0$.

17. 試證普通方程式如含 xy 項.而含 x^2 及 y^2 之項不多於一.其圓錐曲綫必爲雙曲綫.

18. 試證 $xy+ax+by+c=0$. 爲一雙曲綫之普通方程式.如令坐標軸爲與其漸近綫平行.

19. 求證 x 及 y 之任一調和方程式.代表一羣經過原點之直綫.

20. 求方程式 $Ax^2+2Hxy+By^2=0$ 所代表二直綫之夾角.

21. 試證雙曲綫之二漸近綫.爲與二直綫 $Ax^2+2Hxy+By^2=0$ 平行.

22. 試證如置焦點於準綫.則圓錐曲綫變爲其極限之一.

求經過以下諸點之圓錐曲綫.

23. $(3,\ 2), (-2,\ -3), (\frac{1}{2},\ -3), (2,\ -2), (\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}).$

24. $(1,\ 2), (6,\ 3), (3,\ 2), (2,\ 1),\ (9,\ 2).$

25. $(0,\ a),(a,\ 0),(0\ \ -a),(-a,\ 0),(a,\ a)$.

26. $(1,\ 1),(-1,\ 5),(2,\ 4),(0,\ 3),(3,\ 1)$.

27. 求經過四點$(4,\ -4),(9,\ 4),(6,\ -1),(5,\ -2)$之拋物綫.

28. 一動點至二相交直綫之距離平方之和為常數.求證其軌跡為橢圓.且求以此二直綫之夾角表橢圓之離心率.

第十二章　切綫對極綫及二次曲綫之直徑

131. 切綫之方程式 前於第五十九節.已述明在曲綫上一點(x_1, y_1)之切綫方程式爲

$$y-y_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_1(x-x_1).$$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$爲表明$\frac{dy}{dx}$在$(x_1, y_1)$時之値.

今應用此定理於圓錐曲綫

$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0,$$

先由微分法得

$$2Ax+2Hy+2Hx\frac{dy}{dx}+2By\frac{dy}{dx}+2G+2F\frac{dy}{dx}=0,$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{Ax+Hy+G}{Hx+By+F}.$$

故在(x_1, y_1)之切綫方程式爲

$$y-y_1=-\frac{Ax_1+Hy_1+G}{Hx_1+By_1+F}(x-x_1),$$

卽 $$Ax_1x-Ax_1^2+Hxy_1+Hx_1y-2Hx_1y_1+By_1y-By_1^2$$
$$+Gx-Gx_1+Fy-Fy_1=0.$$

惟因(x_1, y_1)在曲綫上.故

$$Ax_1^2+2Hx_1y_1+By_1^2+2Gx_1+2Fy_1+C=0.$$

以之加入上式.得其結果爲

$$Ax_1x+H(x_1y+xy_1)+By_1y+G(x+x_1)+F(y+y_1)+C=0.$$

此式與圓錐曲綫之方程式極相類似.殊便記憶.

132. 對極綫之定義及方程式 前節表明當(x_1, y_1)爲在圓錐曲綫

$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0. \tag{1}$$

上時.方程式

$$Ax_1x+H(x_1y+xy_1)+By_1y+G(x+x_1)+F(y+y_1)+C=0. \tag{2}$$

卽爲代表經過(x_1, y_1)而切於(1)式之切綫.今不論(x_1, y_1)之位置爲在何處.(2)式常代表一直綫.此直綫對於圓錐曲綫(1)及定點(x_1, y_1)必有一種特殊之關係.

此直綫名爲定點(x_1, y_1)對於圓錐曲綫(1)之對極綫(*Polar*)而定點卽名爲此直綫之極.(*Pole*)

切綫爲當極在圓錐曲綫上時一特殊之對極綫.

例 1. 定點$(3, -2)$對於橢圓$4x^2+5y^2-2x+3y-1=0$之對極綫爲

$$12x-10y-(x+3)+\frac{3}{2}(y-2)-1=0.$$

或

$$22x-17y-14=0.$$

例 2. 求直綫$2x-3y+6=0$對於雙曲綫$4x^2-5y^2+4x-2y+3=0$之極.

(x_1, y_1)之對極綫爲

$$4x_1x-5y_1y+2(x+x_1)-(y+y_1)+3=0.$$

或 $$(4x_1+2)x+(-5y_1-1)y+2x_1-y_1+3=0$$

設 $$\frac{4x_1+2}{2}=\frac{5y_1+1}{3}=\frac{2x_1-y_1+3}{6}.$$

則上式與已知之直綫相同.由此得二方程式

$$12x_1-10y_1+4=0,$$

$$2x_1-11y_1+1=0.$$

故 $$x_1=-\frac{17}{56},\quad y_1=\frac{1}{28}.$$

133. 對極綫之基本定理

方程式

$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0. \tag{1}$$

如為代表一圓錐曲綫之極限.其對極綫頗無關重要.今假設圓錐曲綫為代表橢圓(圓亦在內)雙曲綫拋物綫中之一..則極與對極綫之性質由次之定理極易得之.

如 P_2 為在於他一點 P_1 對極綫上.則 P_2 之對極綫必經過 P_1.

因 $P_1(x_1, y_1)$ 對於(1)式之對極綫為 (1)

$$Ax_1x+H(x_1y+xy_1)+By_1y+G(x+x_1)+F(y+y_1)+C=0. \tag{2}$$

當 $P_2(x_2, y_2)$ 為在(2)時

$$Ax_1x_2+H(x_1y_2+x_2y_1)+By_1y_2+G(x_2+x_1)+F(y_2+y_1)+C=0. \tag{3}$$

然 P_2 對於(1)式之對極綫為

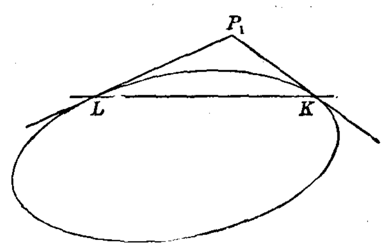
$$Ax_2x+H(x_2y+xy_2)+By_2y+G(x+x_2)+F(y+y_2)+C=0. \tag{4}$$

故由(3)式可知(4)式經過 (x_1, y_1).

134. 切弦(*Chord of contact*)

由視察圓錐曲綫之圖形.而知自不在曲綫上之一點常可作二切綫或全不能作切

綫.前者爲當該點在曲綫以外.後者爲在曲綫以內.今設P_1爲在曲綫外之一點.由此點引二切綫切曲綫於L及K(第一百三十五圖).由第一百三十二節.凡曲綫上任一點之對極綫.卽爲過該點之切



第一百三十五圖

綫.故由前節之基本定理.可知P_1之對極綫必經過L及K.此對極綫LK.卽名爲自P_1所引切綫之切弦.

反之.如一直綫與一圓錐曲綫相交.則其極卽爲自二綫相交處所引切綫之交點.學者可自證之.

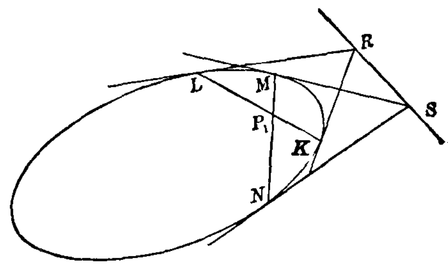
今可利用切弦以求經過不在圓錐曲綫上任一點之切綫方程式

例.　求經過定點$(4,\ -3)$且切於定圓$x^2+2xy+y^2+2x+6y+1=0$之切綫.

因定點非在曲綫上.其坐標必不與曲綫之方程式適合.今先求得其對極綫方程式爲$3x+5y-1=0$.此卽爲自定點至曲綫當其能作切綫時所作切綫之切弦.次取此對極綫及曲綫兩聯立方程式解之.得其交點爲$(7,\ -4)$及$(2,\ -1)$.故可得二切綫方程式$2x+3y-2=0$及$x+2y=0$.

135.　對極綫之作法　無論一點爲在圓錐曲綫以內或以外.其對極綫均可以次之作圖法求得.自P_1引二直綫.(第一百三十六圖)其一交曲綫於L及K.其一交曲綫於M及

N. 設經過 L 及 K 之切綫相交於 R. 而經過 M 及 N 之切綫相交於 S. 則 R 爲 LK 之極. S 爲 MN 之極(前節). 因 P_1 爲同時在 LK 及 MN. 依基本定理. 其對極綫必經過 R 及 S. 故 RS 卽爲所求之對極綫.



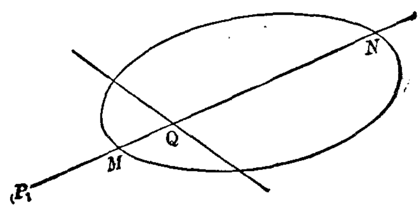
第一百三十六圖

如 P_1 爲在圓錐曲綫以外. 此作圖法仍可適用.

136. 對極綫之調和性質

關於極與對極綫之重要定理爲凡經過 P_1 之任一割綫. 爲圓錐曲綫及 P_1 之對極綫所分於調和比.

設 P_1N(第一百三十七圖)爲經過 P_1 之任意割綫. M 及 N 爲 P_1N 與圓錐曲綫之交點. Q 爲 P_1N 與 P_1 之對極綫之交點. 今將證明直綫 MN 爲曲綫及對極綫所分於調和比.(卽內分及外分於同比)以式表之爲



第一百三十七圖

$$\frac{P_1M}{P_1N}=\frac{MQ}{QN}.$$

令 $MQ=P_1Q-P_1M$, $QN=P_1N-P_1Q$. 解上式得 P_1Q 爲

$$P_1Q=\frac{2P_1M\cdot P_1N}{P_1M+P_1N}.$$

設 P_1 之坐標爲(x_1, y_1). 圓錐曲綫之方程式爲

$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0. \qquad (1)$$

P_1之對極綫爲

$$Ax_1x+H(x_1y+xy_1)+By_1y+G(x+x_1)+F(y+y_1)+C=0. \qquad (2)$$

如(x, y)爲在 P_1N 上一不定之點. r 爲不定之距離 P_1P. 而 θ 爲 P_1N 及 OX 所成之角.則

$$cos\theta=\frac{x-x_1}{r}, \qquad sin\theta=\frac{y-y_1}{r}.$$

卽
$$x=rcos\theta+x_1, \qquad y=rsin\theta+y_1. \qquad (3)$$

今如 P 與 M 或 N 重合.(3)式中 x 與 y 之値必適合於(1).代入爲

$$r^2[Acos^2\theta+2Hsin\theta cos\theta+Bsin^2\theta]$$
$$+2r[Ax_1cos\theta+H(x_1sin\theta+y_1cos\theta)$$
$$+By_1sin\theta+Gcos\theta+Fsin\theta]+C'=0.$$

此式爲令 $C'=Ax_1^2+2Hx_1y_1+By_1^2+2Gx_1+2Fy_1+C.$

以上方程式之根卽爲 P_1M 及 P_1N. 今由第四十三節

$$P_1M+P_1N=-\frac{2[Ax_1cos\theta+H(x_1sin\theta+y_1cos\theta)+By_1sin\theta+Gcos\theta+Fsin\theta]}{Acos^2\theta+2Hsin\theta cos\theta+Bsin^2\theta},$$

$$P_1M\cdot P_1N=\frac{C'}{Acos^2\theta+2Hsin\theta cos\theta+Bsin^2\theta},$$

故
$$\frac{2P_1M\cdot P_1N}{P_1M+P_1N}$$

$$=-\frac{C'}{Ax_1cos\theta+H(x_1sin\theta+y_1cos\theta)+By_1sin\theta+Gcos\theta+Fsin\theta}. \qquad (4)$$

如 P 與 Q 重合(3)式中 x 與 y 之値必適合於(2).依代入之結果爲

$$r[Ax_1cos\theta+H(x_1sin\theta+y_1cos\theta)+By_1sin\theta+Gcos\theta+Fsin\theta]+C'=0.$$

此式之根爲P_1Q故

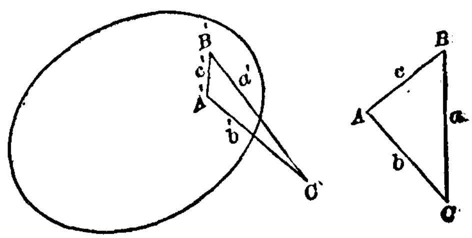
$$P_1Q=-\frac{C'}{Ax_1cos\theta+H(x_1sin\theta+y_1cos\theta)+By_1sin\theta+Gcos\theta+Fsin\theta}. \quad (5)$$

取(4)式與(5)式比較得

$$P_1Q=\frac{2P_1M\cdot P_1N}{P_1M+P_1N},$$

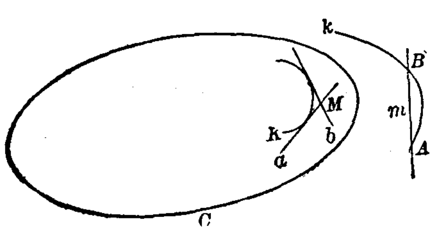
此節之定理.常用爲對極綫之基本定義.

137. 反對極綫(*Reciprocal polars*) 今取一已知之圓錐曲綫及一直綫圖形.如第一百三十八圖中之三角形ABC令其各邊之長爲a, b, c.次引A, B, C對於圓錐曲綫之對極綫a', b', c'.則a', b', c'三直綫完成一三角形$A'B'C'$.由基本定理可知A', B', C'各爲a, b, c之極.故兩三角形之關係.爲其一三角形之頂點.均爲他三角形之極.反對極綫之名稱.卽由此而得.惟須知此處不限於三角形爲然.凡任一直綫圖形.皆可依同樣之作圖法得之.



第一百三十八圖

次取任意曲綫K及一切綫a(第一百三十九圖).令A爲a對於圓錐曲綫C之極.設切綫爲繞曲綫而移動.A點卽畫成他一曲綫k.今令a, b爲K之二



第一百三十九圖

切綫.而M爲其交點.A,B爲k上相當之點.m爲AB弦.則由基本定理m卽爲M之對極綫.如設a,b漸次移近以訖於重合.M爲達於K上一點.而m達於k之一切綫.故K綫上之點亦爲k綫上切綫之極.

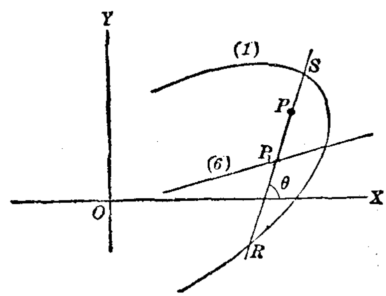
故今得二曲綫.凡在其任一綫上之點皆爲他綫上切綫之極.此兩曲綫亦名反對極綫.

反對極綫於幾何上頗佔重要.惟在此書範圍以外之討論概從略.

138. 直徑之定義及方程式 圓錐曲綫之直徑.爲一羣平行弦之中點軌跡.設

$$Ax^2+2Hxy+By^2+2Gx+2Fy+C=0 \qquad (1)$$

爲任一圓錐曲綫(第一百四十圖).RS爲與OX成θ角之弦.而$P_1(x_1,y_1)$爲此弦之中點.取此弦上任一點$P(x,y)$令$P_1P=r$.設P_1P爲RS之方向.則r爲正.如爲SR之方向.則r爲負.而由P之任一位置.皆得



第一百四十圖

$$\frac{x-x_1}{r}=cos\theta,\quad \frac{y-y_1}{r}=sin\theta.$$

$$\therefore\qquad x=x_1+rcos\theta,\quad y=y_1+rsin\theta. \qquad (2)$$

今如P與R或S重合.(2)式中x與y之值亦與(1)式適合.代入可得

$$r^2[A\cos^2\theta+2H\sin\theta\cos\theta+B\sin^2\theta]$$
$$+2r[Ax_1\cos\theta+Hx_1\sin\theta+Hy_1\cos\theta$$
$$+By_1\sin\theta+G\cos\theta+F\sin\theta]$$
$$+[Ax_1^2+2Hx_1y_1+By_1^2+2Gx_1+2Fy_1+C]=0. \quad (3)$$

此式之根爲 P_1S 及 P_1R. 惟由假設 $P_1R=-P_1S$. 故方程式(3)之二根爲相等.惟其符號相反.可知(3)式中 r 之係數必爲零.卽

$$Ax_1\cos\theta+Hx_1\sin\theta+Hy_1\cos\theta+By_1\sin\theta$$
$$+G\cos\theta+F\sin\theta=0. \quad (4)$$

假設 $\cos\theta\neq 0$. 卽以 $\cos\theta$ 除上式.而以斜度 m 代 $\tan\theta$. 得

$$Ax_1+Hy_1+G+m(Hx_1+By_1+F)=0. \quad (5)$$

今設 RS 依平行於原位置而移動.使 m 爲一定.而 P_1 常變更.則(5)式恆眞.可知 P_1 常爲在直綫

$$Ax+Hy+G+m(Hx+By+F)=0. \quad (6)$$

上之一點.

反之.直綫(6)上任一點 $P_1(x_1,\ y_1)$ 如能使(3)式 r 之值相等而符號相反.且使二根均爲實數.則 P_1 必爲一斜度等於 m 之弦之中點.

直綫(6)之長爲無限.通常均視其全長爲直徑.雖明知在全綫上所有之點.非皆爲相當於交圓錐曲綫於實點之羣弦之中點.

139. 前節結局一段.今特詳述如次.

方程式 $y=mx+b$. 由令 b 爲適宜之值.可使其代表斜度爲 m 之任一直綫.所給與 b 之值中.有若干爲使其相當之直綫交前

節圓錐曲綫(1)於實點(*Real points*).此卽爲被直徑(6)所二等分諸弦中之一.

惟此外b之值.均使其相當之直綫不交圓錐曲綫於實點.解兩聯立方程式所得之結果.x與y均爲虛數.惟如以所得x與y之虛值代第十八節範式$x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$中之x_1, x_2及y_1, y_2.則所得x與y均爲實數.且與直徑之方程式相符合.故今可云該直綫爲交圓錐曲綫於虛點之弦.其中點仍爲直徑上之實點.由此而知當以(6)式之全長爲直徑.因此上任意一點.均爲羣弦之一之中點也.

140. 圓錐曲綫如有一中心.則任何直徑必經過之.因由第一百二十六節.其中心爲與二方程式

$$Ax+Hy+G=0, \qquad Hx+By+F=0.$$

適合.故不論m爲何值.中心必適合於第一百三十八節(6)式.

惟於拋物綫所有之直徑.皆與其軸平行.因由第一百三十八節(6)式.可得直徑之斜度爲$-\frac{A+Hm}{H+Bm}$.而於拋物綫則$H=\sqrt{AB}$.故

$$-\frac{A+Hm}{H+Bm}=-\frac{A+\sqrt{AB}\,m}{\sqrt{AB}+Bm}=-\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}.$$

所得之斜度爲與拋物綫之軸平行.而與m無關係.且由此可知圓錐曲綫之軸.亦爲其直徑.因其含垂直於該軸所有諸弦之中點也.實則此爲能垂直於所平分諸弦之惟一直徑.後此當證明之.

141. 抛物綫之直徑　設將抛物綫之方程式書為最簡單之形式 $y^2=4px$. 其直徑之方程式即為 $y=\frac{2p}{m}$.

由此式可知垂直於所平分諸弦之惟一直徑. 即為抛物綫之軸.

例 1.　求抛物綫 $2y^2+3x=0$ 之直徑. 平分所有斜度為 2 之諸弦.

因 $m=2, p=-\frac{3}{8}$. 故直徑之方程式為 $y=\frac{2(-\frac{3}{8})}{2}$ 或 $8y+3=0$.

例 2.　抛物綫 $y^2=2x$ 之一直徑為經過定點 $(2, -1)$. 求此直徑之方程式. 及所平分諸弦之斜度.

設 m 為所平分諸弦之斜度. 則直徑方程式為 $y=\frac{1}{m}$. 惟因 $(2, -1)$ 為直徑上一點. 故 $-1=\frac{1}{m}$. 可得所求之直徑方程式為 $y=-1$.

以上之方程式可立時書出. 因直徑為與 OX 平行. 設已知其上有一點距 OX 為 -1. 則所有其餘之點距 OX 亦必為 -1. 故得方程式為 $y=-1$.

取抛物綫及其直徑兩聯立方程式解之. 可求得 O' 之坐標為 $\left(\frac{p}{m^2}, \frac{2p}{m}\right)$ (第一百四十一圖).

在 O' 之切綫方程式為 $y=mx+\frac{p}{m}$ 其斜度為 m. 設名 O' 為直徑之端點. 可得一定理為<u>在直徑端點之切綫. 與此直徑所平</u>

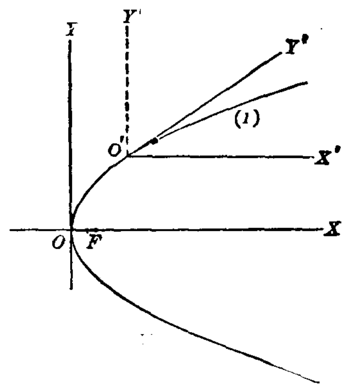
分之諸弦平行.此切綫亦可視爲一絃平行於其原位置而移動之極限.

142. 以一直徑及一切綫爲軸之抛物綫

設$O'X'$(第一百四十一圖)爲抛物綫

$$y^2=4px \qquad (1)$$

之一直徑.平分諸弦之斜度爲m. $O'Y'$爲過O'之切綫.則O'之坐標爲$\left(\frac{p}{m^2}, \frac{2p}{m}\right)$. $O'Y'$之斜度爲m.



第一百四十一圖

先將(1)式移於以$O'X'$及$O'Y''$爲軸($O'Y''$與OY平行).得其變換之範式爲

$$x=\frac{p}{m^2}+x'', \quad y=\frac{2p}{m}+y''.$$

新方程式之形式爲

$$y''^2+\frac{4p}{m}y''=4px''.$$

今用第一百十七節之範式

$$x''=x'+\frac{y'}{\sqrt{1+m^2}}, \quad y''=\frac{my'}{\sqrt{1+m^2}}.$$

因$\phi=0$, $\phi'=tan^{-1}m$.故最後得

$$y'^2=4\left[\frac{p(1+m^2)}{m^2}\right]x'$$

惟由第十七節 $$FO'=\frac{p(1+m^2)}{m^2}.$$

故如令 $FO'=p'$. 除去 x 與 y 上之撇.方程式即爲

$$y^2=4p'x.$$

凡方程式爲 $y^2=4px$ 之形.常代表一拋物綫.此拋物綫爲以 x 軸爲一直徑. y 軸爲一切綫.自原點至焦點之距離等於其 x 之係數四分之一.

143. 橢圓及雙曲綫之直徑 如將橢圓之方程式書爲最簡單之形式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 而以 m_1 表羣弦之共通斜度.則其直徑之方程式爲

$$y=-\frac{b^2}{a^2m_1}x.$$

令此直徑之斜度爲 m_2. 可得 $m_2=-\frac{b^2}{a^2m_1}$. 故 $m_1m_2=-\frac{b^2}{a^2}$.

若 b 不等於 a. $m_1\ m_2$ 常不能等於 -1. 故橢圓之直徑常不能垂直於所平分之弦.其惟一之例外.爲當諸弦均與一軸平行.在此時之直徑.即爲垂直於所平分諸弦之他一軸.

若 b 等於 a. 則橢圓爲圓.而 $m_1\ m_2$ 常等於 -1. 故圓之直徑常垂直於所平分之弦.

例 1. 求橢圓 $4x^2+9y^2=36$ 之一直徑.已知其所平分之弦爲與直綫 $x+2y+1=0$ 平行.

$a^2=9,\ b^2=4,\ m_1=-\frac{1}{2}$. 故直徑爲 $y=-\frac{4x}{9(-\frac{1}{2})}$ 或 $9y-8x=0$.

例 2. $2y+3x=0$ 爲橢圓 $4x^2+9y^2=36$ 之一直徑.問所平分諸弦之斜度如何.

直徑之斜度爲 $-\frac{3}{2}$.由以上範式此卽等於 $-\frac{b^2}{a^2m_1}$. m_1 爲弦之斜度.因 $a^2=9$. $b^2=4$.故 $-\frac{3}{2}=-\frac{4}{9m_1}$.因得 $m_1=\frac{8}{27}$.

例 3. 求圓 $4x^2+4y^2+4x-8y-11=0$ 之一直徑.已知其所平分之諸弦之斜度爲 2.

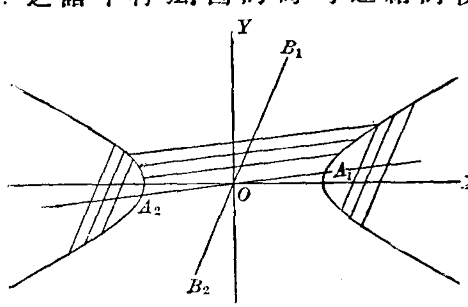
圓之中心爲 $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.故所求之直徑爲 $y-1=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 或 $2x+4y-3=0$.

例 4. 求圓 $4x^2+4y^2+4x-8y-11=0$ 之一直徑.已知其經過一定點 $(2, -1)$.

圓之中心爲 $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.由此點與 $(2,-1)$ 所定之直綫 $4x+5y-3=0$ 卽爲所求之直徑.

凡引雙曲綫 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. 之諸平行弦.因同時可連結同枝上及異枝上之點.故其作法有兩種.觀第一百四十二圖可明.

今不論所引之弦爲依何法.如以 m_1 表其共通斜度.則直徑之方程式爲



第一百四十二圖

$$y=\frac{b^2}{a^2m_1}x.$$

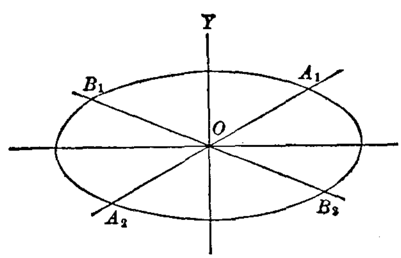
此式較之橢圓之直徑方程式.惟等號右邊之符號相異.

設以m_2爲直徑之斜度.則$m_1m_2=\frac{b^2}{a^2}$.故雙曲綫之直徑除非在特殊之地位.例如爲橫軸及共軛軸之時.常不能垂直於所平分之弦與橢圓相同.

144. 共軛直徑(*Conjugate diameters*) 前節已證明如以m_1表橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$諸平行弦之斜度.而$m_2$爲其直徑之斜度.可得

$$m_2=-\frac{b^2}{a^2m_1},\quad 或\quad m_1m_2=-\frac{b^2}{a^2}. \tag{1}$$

同樣.如弦之斜度爲m_2.則平分諸弦之直徑之斜度必爲$-\frac{b^2}{a^2m_2}$.此由(1)式卽等於m_1.故設於橢圓有二直徑其斜度各爲m_1及m_2.則其中每一直徑常平分與他直徑平行之諸弦此二直徑卽名爲共軛直徑.例如長軸及短軸各平分與他軸平行之諸弦.故亦爲共軛直徑.由此得



第一百四十三圖

1. 長軸及短軸爲惟一之一雙互爲垂直之共軛直徑.

2. 共軛直徑中有一與x軸成銳角.則他一直徑必與x軸成鈍角. 假設$m_1>0$.因$m_1m_2=-\frac{b^2}{a^2}$故$m_2<0$.惟因正斜度相當於一銳角.負斜度相當於一鈍角.故共軛二直徑之上端常各

在於短軸之一邊.例如第一百四十三圖之OA_1及OB_1.(A_1A_2,B_1B_2爲共軛直徑).

同樣.設於雙曲綫$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$有二直徑之斜度$m_1$及$m_2$爲

$$m_1m_2=\frac{b^2}{a^2}.$$

則二直徑名爲共軛直徑.且各平分與他直徑平行之諸弦.橫軸與共軛軸各平分與他軸平行之弦.亦爲共軛直徑之一例.由此得

1. 橫軸與共軛軸爲惟一之一雙互爲垂直之共軛直徑.

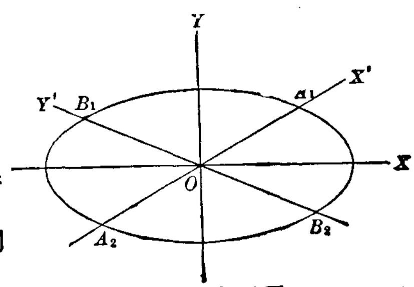
2. 兩共軛直徑同時與橫軸x成銳角或同時成鈍角.因m_1m_2常爲正.故m_1與m_2之符號相同.

3. 兩共軛直徑不能同在其一漸近綫之一邊.因$m_1m_2=\frac{b^2}{a^2}$.如$m_1<\frac{b}{a}$則$m_2>\frac{b}{a}$.故其相當之共軛直徑各在漸近綫$y=\frac{b}{a}x$之一邊(第一百四十六圖).

145. 以共軛直徑爲軸之橢圓及雙曲綫 設取橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

之共軛直徑OA_1及OB_1(第一百四十四圖)爲新坐標軸OX'及OY'.新軸與OX所成之角命爲ϕ及ϕ'.則變換之範式爲



第一百四十四圖

$$x=x'\cos\phi+y'\cos\phi'.$$

$$y=x'\sin\phi+y'\sin\phi'. \qquad (2)$$

惟因OX'與OY'爲共軛直徑.故

$$\tan\phi\tan\phi'=-\frac{b^2}{a^2},$$

$$\frac{\sin\phi\sin\phi'}{b^2}+\frac{\cos\phi\cos\phi'}{a^2}=0. \qquad (3)$$

將(2)式代入(1)式齊項得

$$\left(\frac{\cos^2\phi}{a^2}+\frac{\sin^2\phi}{b^2}\right)x'^2+2\left(\frac{\cos\phi\cos\phi'}{a^2}+\frac{\sin\phi\sin\phi'}{b^2}\right)x'y'$$

$$+\left(\frac{\cos^2\phi'}{a^2}+\frac{\sin^2\phi'}{b^2}\right)y'^2=1. \qquad (4)$$

由(3)式可知(4)式中$x'y'$之係數爲零.如以a'及b'表橢圓在OX'及OY'之截部.卽令$OA_1=a'$, $OB_1=b'$.則(4)式成爲

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}=1 \qquad (5)$$

此式爲令 $a'=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\phi}{a^2}+\dfrac{\sin^2\phi}{b^2}}}$, $b'=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\phi'}{a^2}+\dfrac{\sin^2\phi'}{b^2}}}$.

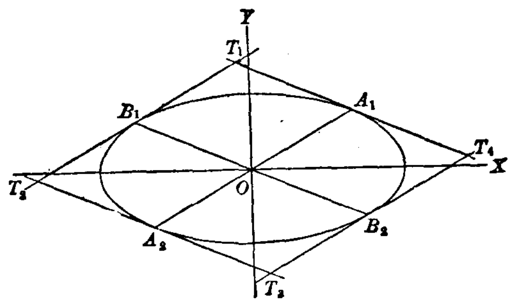
橢圓之方程式僅當擇取兩共軛直徑爲軸之時得成(5)式之形.因在此時$x'y'$之係數方爲零也.反之.凡類似(5)式之方程式爲以共軛直徑爲軸之橢圓.

同樣.凡以共軛直徑爲軸之雙曲綫.其方程式爲$\dfrac{x^2}{a'^2}-\dfrac{y^2}{b'^2}=1$. b'之幾何意義當於第一百四十七節中見之.

146. 共軛直徑之性質

1. 凡過直徑端點之切線.必與其共軛直徑平行.今取橢圓之定理以證.即為雙曲線同樣之證.

於第一百四十五圖設 A_1 之坐標為(x_1, y_1)則 OA_1 之斜度為 $\frac{y_1}{x_1}$.今如 OB_1 之斜度為 m_2.則 $m_2\frac{y_1}{x_1}=-\frac{b^2}{a^2}$.



第一百四十五圖

可得 $m_2=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$.然在 A_1 之切線 A_1T_1 之方程式為 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$.

其斜度亦為 $-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$.故此切線與共軛直徑 OB_1 平行.

2. 橢圓兩共軛直徑之半之平方之和為一常數.此常數等於長短兩半軸之平方之和.以式表之.即為 $a^2+b^2=a'^2+b'^2$.

仍就第一百四十五圖而論.OB_1 之斜度為 $-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$.故其方程式為

$$y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x. \tag{1}$$

將此方程式與橢圓方程式聯立解之以求 B_1 之坐標.可代(1)式之 y 值於 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.得 $x^2=\frac{a^4y_1^2}{a^2y_1^2+b^2x_1^2}$.惟 A_1 (x_1, y_1)為橢圓上之一點.即 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$.或 $b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2$.

$$\therefore x^2=\frac{a^4y_1{}^2}{a^2b^2}=\frac{a^2y_1{}^2}{b^2}.$$

$$x=\pm\frac{ay_1}{b}.$$

代入(1)式得　　$$y=\mp\frac{bx_1}{a}.$$

故B_1之坐標為$\left(-\frac{ay_1}{b},\ \frac{bx_1}{a}\right)$.如按前節之例以$a'$表$OA_1$,b'表OB_1.由第十七節

$$a'^2=x_1{}^2+y_1{}^2,\ b'^2=\frac{a^2y_1{}^2}{b^2}+\frac{b^2x_1{}^2}{a^2},$$

故　　$$a'^2+b'^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}x_1{}^2+\frac{a^2+b^2}{b^2}y_1{}^2.$$

$$=(a^2+b^2)\left(\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}\right)$$

$$=a^2+b^2.$$

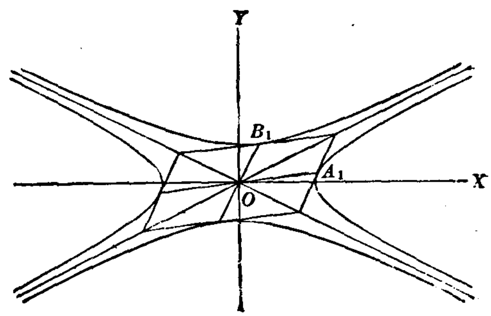
3.　<u>自橢圓共軛直徑之端點各引一切綫所成平行四邊形之面積爲一常數而等於$4ab$.</u>

設$T_1T_2T_3T_4$爲自共軛直徑A_1A_2, B_1B_2之端點各引切綫所成之平行四邊形.此四邊形之全面積當爲小平行四邊形$A_1OB_1T_1$面積之四倍.惟$A_1T_1=OB_1=b'=\frac{\sqrt{a^4y_1{}^2+b^4x_1{}^2}}{ab}$. 而因$A_1T_1$之方程式爲$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$. 由第三十二節.自$O$至$A_1T_1$之垂直距離爲$\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^4y_1{}^2+b^4x_1{}^2}}$.$A_1OB_1T_1$面積$=\left(\frac{\sqrt{a^4y_1{}^2+b^4x_1{}^2}}{ab}\right)\left(\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^4y_1{}^2+b^4x_1{}^2}}\right)=ab.$

可知$T_1T_2T_3T_4$之面積爲$4ab$(第一百四十五圖).

147. 前於第一百四十四節已證明雙曲綫$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$之共軛直徑各在一漸近綫之一邊.故如共軛直徑中之一與雙曲綫相交.則他一直徑必不能與之相交.今欲推論雙曲綫與前節定理2及定理3相同之性質.必須假借與此雙曲綫有關之另一雙曲綫$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.此兩雙曲綫卽名共軛雙曲綫.

如有二直徑之斜度之乘積爲$m_1m_2=\frac{b^2}{a^2}$.則此二直徑卽爲以上兩共軛雙曲綫之共軛直徑.而由第一百四十六圖可見如有一直徑與一雙曲綫相交.則其他一直徑必與共軛雙曲綫相交.



第一百四十六圖

今設OA_1與OB_1爲兩共軛直徑.依第一百四十五節定理1.以OA_1爲a'可求得OB_1等於b'與橢圓相同.由此按前節定理2 b'之值得雙曲綫爲$a'^2-b'^2=a^2-b^2$.按定理3則與橢圓相同.學者可自證之.

問　題

求以下之各點對於定圓錐曲綫之對極綫.並求對極綫與圓錐曲綫相交之諸點.

1. $(1, 2)$. $23x^2-11xy+2y^2+36x-9y+9=0$.

2. $(-1, -2)$, $3x^2-3xy+4x+y-3=0$.

3 $(0, 0)$, $2x^2-2y^2-2x+2y-1=0$.

4. $(4, -2)$, $5y^2+18y+4x+5=0$.

求以下之對極綫對於定圓錐曲綫之極.

5. $2x-y=0$, $x^2+8xy-2y^2-12x+6y-9=0$.

6. $x-3y+2=0$, $x^2+y^2-2x+4y=0$.

7. $x+2y-13=0$, $3x^2+8y^2-26x-76y+231=0$.

8. $3x-2y-9=0$, $3x^2-4y^2+6x-24y-45=0$.

求自以下之定點引各圓錐曲綫之切綫.

9. $(2, 3)$, $4x^2-5xy+2y^2+3x-2y=0$.

10. $(0, 1)$, $3x^2-4y^2+12x=0$.

11. $(1, -2)$, $2x^2-2y^2-6x-6y-1=0$.

12. $(2, 4)$, $x^2+y^2-6x-2y+5=0$.

13. $(2, 0)$, $5y^2+4x-2y-3=0$.

14. $(-1, -1)$, $3x^2+8y^2-8x-12y+4=0$.

15. 如k爲變數.求證一定點對於圓羣中各圓$x^2+y^2-2kx+c^2=0$之對極綫不論k爲何值常經過他一定點.

16. T爲在拋物綫$y^2=4px$之PQ弦之一極.求證自P, T, Q至拋物綫上任一點之切綫.所引垂綫之長成一等比級數.

17. P爲任意一點.LM爲P對於有心圓錐曲綫之對極綫.C爲圓錐曲綫之中心.R爲自C引至LM之垂足.S爲自P所引LM之垂綫與圓錐曲綫之軸之交點.求證$CR\cdot PS=b^2$.

18. 求證自任一點(x_1, y_1)引垂綫至其對於任一有心圓錐曲綫之對極綫.此垂綫當截圓錐曲綫之軸於至曲綫中心爲e^2x_1之距離處.

19. 求證在於任一圓錐曲綫之一點P其法綫之極爲在於此曲綫上另一點Q之法綫時.則P之法綫必經過Q之法綫之極.

20. 設P_1與P_2爲任意二點.C爲一圓錐曲綫之中心.試證自P_1及C至P_2之對極綫所引垂綫之比.等於自P_2及C至P_1之對極綫所引垂綫之比.

21. 如m_1爲P_1對於橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$之對極綫之斜度.$m_2$爲連結$P_1$及橢圓中心所成直綫之斜度.試證$m_1 m_2=-\frac{b^2}{a^2}$.幷求雙曲綫與此相同之關係.

22. 求證任意二點對於一拋物綫之對極綫所夾取該拋物綫軸上之綫分.等於連結此二定點之直綫對於該軸之射影.

23. 試證於任一圓錐曲線其焦點之對極綫卽爲準綫.

24. 問橢圓或雙曲綫之中心對於該曲綫之對極綫爲在何處.

25. 求橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$之二共軛直徑方程式.已知其中有一直徑平分連結短軸上端與焦點所成之弦.

26. P_1及P_2爲橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$之二共軛直徑之上端求證自$P_1$及$P_2$至橢圓長軸所引垂綫之平方和爲$b^2$

27. 試證橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 僅有一雙相等共軛直徑 $y=\pm\frac{b}{a}x$.

28. 試證以相等共軛直徑爲軸之橢圓方程式爲 $x^2+y^2=\frac{a^2+b^2}{2}$.

29. 試證平行於連結橢圓二軸之端點之二直徑爲共軛.

30. 橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 之一直徑經過其右方垂直焦弦之上端.問其共軛直徑之斜度如何.

31. 設經過一橢圓之二垂直焦弦之上端之二直徑爲共軛.則半軸 a, b 之關係如何.

32. 試證在於有心圓錐曲綫一直徑上任一點之對極綫平行於共軛直徑.

33. 試證如橢圓與雙曲綫兩軸之長短及位置均相同.則雙曲綫之漸近綫與橢圓之相等共軛直徑重合.

34. 求證過雙曲綫之共軛直徑之端點各引切綫.必相交於漸近綫.

35. 求證連結雙曲綫一雙共軛直徑之一雙端點之直綫與一漸近綫平行且爲他漸近綫所平分.

36. 如雙曲綫有一雙相等共軛直徑.求證其爲等邊雙曲綫.

37. 試證等邊雙曲綫之共軛直徑與漸近綫成等角.

38. 試證等邊雙曲綫互爲垂直之直徑皆相等.

39. 試證等邊雙曲綫任一直徑皆等於其共軛直徑.

40. 求證在於圓錐曲綫任一弦之兩端之切綫必交於平分此弦之直徑上.

41. 凡連結曲綫之任一直徑之兩端至曲綫上任一點所成之二弦名爲補弦(*Supplemental chords*).求證平行於任一雙補弦之直徑爲共軛.

42. 如在於一橢圓頂點 A 之切綫與延長任一雙共軛直徑相截於 T 及 t. 試證 $AT \cdot At = -b^2$.

43. 試證如一切綫與任一雙共軛直徑相交.則其所成二綫分之乘積等於其平行直徑之半之平方.

44. 如自一橢圓之焦點引至一直徑之垂綫.試證此垂綫必與共軛直徑交於相當之準綫.

45. 在於橢圓任一點 P_1 之切綫截二相等共軛直徑於 T 及 T_1. 試證兩三角形 TCP_1 及 T_1CP_1 之比等於 $\overline{CT}^2 : \overline{CT_1}^2$.

46. 試證在於有心圓錐曲綫任一點之二焦點距離之乘積等於其相當共軛直徑一半之平方.

47. 自雙曲綫一準綫之足引雙曲綫之二切綫.問切綫與雙曲綫會於何處.且求此二切綫與橫軸所成之角.

48. 試證自一焦點引其對於橢圓或雙曲綫之對極綫之垂綫.與由極至中心所成之直綫會於相當之準綫.

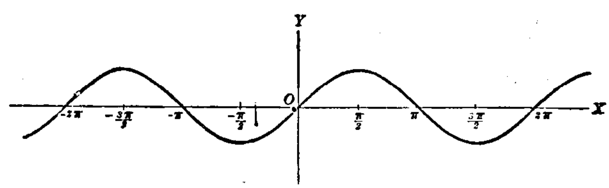
第十三章 越函數

148. 定義 凡屬於x之函數如非爲代數函數卽名爲越函數(*Transcendental function*).越函數凡包含三角函數(*Trigonometric function*).逆三角函數(*Inverse trigonometric function*).指數函數(*Exponential function*).對數函數(*Logarithmic function*)諸種在內.此種函數之定義及其簡易性質.今設學者爲已知.本章專論其圖形及微係數.

149. 三角函數之圖形

例 1. $$y=\sin x.$$

y之値可自三角表中求之.惟作此曲綫之初須將x用弧度(*Circular measure*)表示.例如180°之角爲$x=\pi=3{\cdot}1416$.此函數當x爲π之整數倍時.y均等於零.當x爲$\frac{\pi}{2}$之奇數倍時.y等於±1.x爲此外之値.y均小於1.其圖形含無數可重合之弓形互在x軸之上下.每弓形之闊爲π.高爲1(第一百四十七圖).



第一百四十七圖

此函數$y=\sin x$亦可不用三角表而作其圖形.其法如下.

設 P_1 爲以半徑 1 中心 O 之圓周上任一點(第一百四十八圖).並將直徑 AO 延長至於無限.今從 AO 綫上截

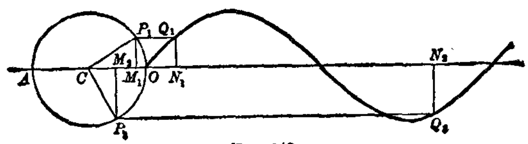


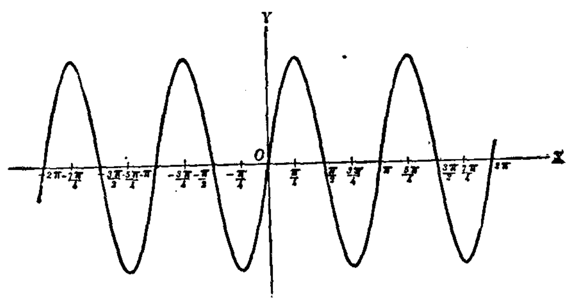
Fig. 148

第一百四十八圖

取 ON_1 令其長等於 OP_1 弧(作法參看一百零四節).再自 N_1 引直綫垂直於 AO.自 P_1 引直綫平行於 AO.設此二綫相交於 Q_1.則 $N_1Q_1=M_1P_1=CP_1 sin OCP_1$.惟 $CP_1=1$.而 OCP_1 之弧度爲 $OP_1=ON_1$.故如令 $ON_1=x$, $N_1Q_1=y$.則 Q_1 爲曲綫 $y=\sin x$ 上一點.依此而移動 P_1 之位置可作成曲綫之全形.

例 2.　　　$y=a\sin bx$.

當 x 爲 $\frac{\pi}{b}$ 之任一整數倍.y 均等於零.當 x 爲 $\frac{\pi}{2b}$ 之奇數倍.y 等於 $\pm a$. x 爲此外之值 y 均小於 a.此函數之圖形與例 1 大致相似.惟在此時每弓形之闊爲 $\frac{\pi}{b}$ 而高爲 a.第一百四十九圖表示此函數當 $a=3$, $b=2$ 時之圖形.



第一百四十九圖

例 3.　　　$y=a\sin(bx+c)$.

令 $x=-\frac{c}{b}+x'$, $y=y'$.則此式成爲 $y'=a\sin bx'$.其圖形與例 2 相

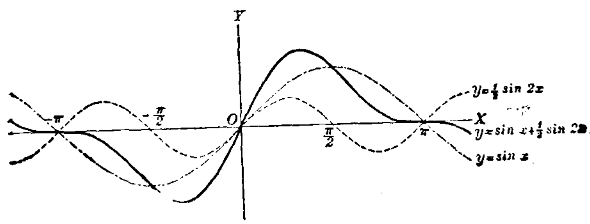
同. $+c$之影響惟將原點改變位置.

例 4.　　$y=a\cos bx.$

此式可書爲$y=a\sin\left(bx+\frac{\pi}{2}\right)$.故餘弦與正弦之圖形除對於原點之位置有差異外普通形式完全相同.

例 5.　　$y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x.$

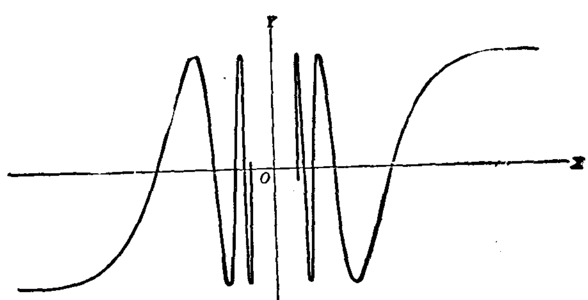
將二曲綫$y=\sin x$, $y=\frac{1}{2}\sin 2x$之諸相當縱綫相加.可得此式之圖形(第一百五十圖).



第一百五十圖

例 6.　　$y=\sin\frac{\pi}{x}.$

當$x=\frac{1}{k}$時(k爲任一常數)$\frac{\pi}{x}=k\pi$而$y=0$.故其圖形經過x軸於1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$,……諸點.在每兩點之間y之值爲連續變.由零以至於±1復返於零.由



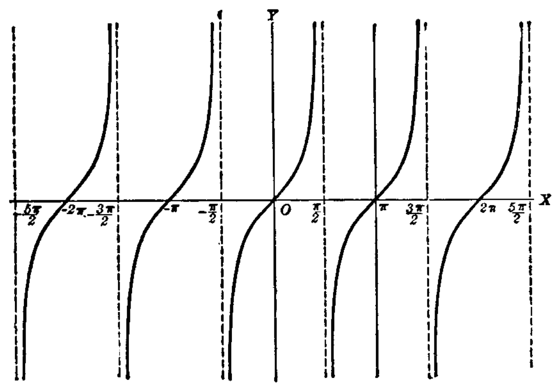
第一百五十一圖

此可知如x漸近於零.則圖形在兩直綫$y=\pm1$之間經過x軸之次數無限.故在原點之近傍不能作此圖形.於第一百五十一圖可見其隔斷處.

不論x之值小至如何.y之值恆可求得.例如$x=\frac{12}{125}$則$\frac{\pi}{x}=\frac{125}{12}\pi=10\pi+\frac{5}{12}\pi$.而$y=sin\frac{5\pi}{12}=sin75°=\cdot9659$.惟當$x=0$時$y$之值不能決定.故函數在$x=0$時爲非連續.

例 7. $y=tan\,x$.

當x爲π之整數倍.y等於零.當x爲$\frac{\pi}{2}$之奇數倍.y等於無窮大.故此函數之圖形共有無數垂直於OX之漸近綫.即$x=\pm\frac{\pi}{2}$,



第一百五十二圖

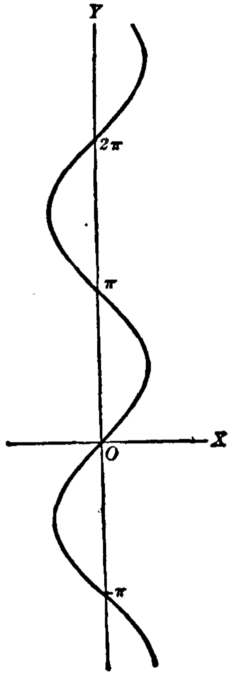
$x=\pm\frac{3\pi}{2}$, $x=\pm\frac{5\pi}{2}$.此等直綫分平面爲無數部分.在各部分間含曲綫之一枝如第一百五十二圖.

150. 逆三角函數之圖形

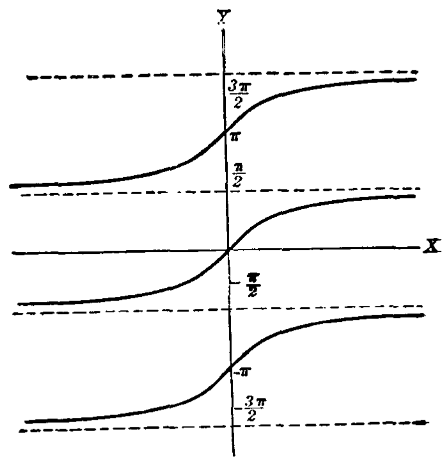
逆三角函數之圖形與三角函數之圖形無異.惟對於坐標軸之關係不同而已.其x之任一值相當之y值無限.

例 1. $y=sin^{-1}x.$

由 $x=sin\,y$.令 y 爲任意之值.可得相當之 x 值曲綫表示於第一百五十三圖.



第一百五十三圖



第一百五十四圖

例 2. $y=tan^{-1}x.$

則 $x=tan\,y$. 曲綫表示於第一百五十四圖.

151. $\frac{sin\,h}{h}$ 及 $\frac{1-cos\,h}{h}$ 之極限

欲求三角函數之微分.須先明當 h 達於零時 $\frac{sin\,h}{h}$ 及 $\frac{1-cos\,h}{h}$ 之極限.(h 爲用弧度表示)

1. 設 AOB(第一百五十五圖)爲 h 角. r 爲以 O 爲中心所作 AB 弧之半徑.今令 $\widehat{AB}$ 之長爲 a. 自 B 至 OA 所引垂綫之長爲 p. 自 B 引切綫交 OA 之延長綫於 D. 所引切綫 BD 之長爲 t.

以 OA 爲軸旋轉圖形使 B 重合於 B'. 則

$$BCB'=2p, \quad BAB'=2a, \quad B'D=BD$$

故 $$BD+B'D>BAB'>BCB'.$$

卽 $$t>a>p$$

以 r 除上式

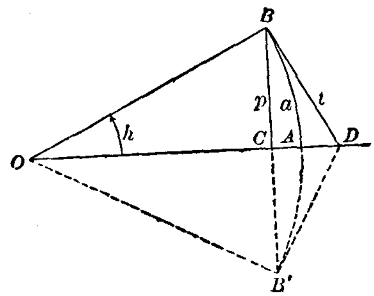
$$\frac{t}{r}>\frac{a}{r}>\frac{p}{r}$$

卽 $$\tan h> h >\sin h$$

此式復以 $\sin h$ 除之.爲

$$\frac{1}{\cos h}>\frac{h}{\sin h}>1.$$

反轉爲 $$\cos h<\frac{\sin h}{h}<1.$$



第一百五十五圖

今如 h 漸近於零. $\cos h$ 必漸近於1. 故在1與 $\cos h$ 間之 $\frac{\sin h}{h}$ 亦必達於1. 卽

$$\lim_{h \doteq 0}\frac{\sin h}{h}=1.$$

2. 當 h 達於零時求 $\frac{1-\cos h}{h}$ 之極限.其法如次.

$$\frac{1-\cos h}{h}=\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h}=\frac{\sin^2\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\frac{h}{2}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2$$

今如 h 達於零爲極限. 則 $\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ 之極限必爲1.故由第九十四節2得 $\frac{h}{2}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2$ 之極限爲零.卽

$$\lim_{h \doteq 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0.$$

152. 三角函數之微分法 以下所列爲三角函數微分法之範式.u爲代表x之任一函數.且可以求其微分.

$$\frac{d}{dx}\sin u = \cos u \ \frac{du}{dx} \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \frac{du}{dx} \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \ \frac{du}{dx} \qquad (3)$$

$$\frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx} \qquad (4)$$

$$\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx} \qquad (5)$$

$$\frac{d}{dx}\csc u = -\csc u \cot u \ \frac{du}{dx} \qquad (6)$$

1. 由第九十六節(7) $\frac{d}{dx}\sin u = \frac{d}{du}\sin u \frac{du}{dx}$.

求 $\frac{d}{du}\sin u$ 之法.爲令 $y=\sin u$. 如u之增量爲Δu. 則y之增量爲Δy. 而

$$\Delta y = \sin(u+\Delta u) - \sin u = 2\cos\left(u+\frac{\Delta u}{2}\right)\sin\frac{\Delta u}{2}.$$

「註」此式最末之變換係根據三角範式 $\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$.

故 $$\frac{\Delta y}{\Delta u}=2\cos\left(u+\frac{\Delta u}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta u}{2}}{\Delta u}=\cos\left(u+\frac{\Delta u}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta u}{2}}{\frac{\Delta u}{2}}.$$

令 Δu 漸近於零.由第九十四節 2

$$Lim\frac{\Delta y}{\Delta u}=Lim\cos\left(u+\frac{\Delta u}{2}\right)Lim\frac{\sin\frac{\Delta u}{2}}{\frac{\Delta u}{2}}.$$

惟 $$Lim\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{dy}{du},\quad Lim\cos\left(u+\frac{\Delta u}{2}\right)=\cos u$$

$$Lim\frac{\sin\frac{\Delta u}{2}}{\frac{\Delta u}{2}}=1.$$

故 $$\frac{d}{du}\sin u=\cos u$$

而 $$\frac{d}{dx}\sin u=\cos u\frac{du}{dx}.$$

2. 求 $\frac{d}{dx}\cos u$ 可令

$$\cos u=\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right).$$

則 $$\frac{d}{dx}\cos u=\frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\qquad\text{(由 1)}$$

$$=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\frac{du}{dx}$$

$$=-\sin u\frac{du}{dx}$$

3. 求 $\frac{d}{dx}\tan u$ 可令

$$\tan u=\frac{\sin u}{\cos u}.$$

則　$$\frac{d}{dx}\tan u=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin u}{\cos u}\right)$$

$$=\frac{\cos u\frac{d}{dx}\sin u-\sin u\frac{d}{dx}\cos u}{\cos^2 u}.$$

(由第九十六節(5)式)

$$=\frac{(\cos^2 u+\sin^2 u)\frac{du}{dx}}{\cos^2 u}.\qquad\text{(由1與2)}$$

$$=\sec^2 u\frac{du}{dx}.$$

4.　求 $\frac{d}{dx}\cot u$ 可令

$$\cot u=\frac{\cos u}{\sin u}.$$

則　$$\frac{d}{dx}\cot u=\frac{d}{dx}\frac{\cos u}{\sin u}.$$

$$=\frac{\sin u\frac{d}{dx}\cos u-\cos u\frac{d}{dx}\sin u}{\sin^2 u}.$$

$$=\frac{-\sin^2 u-\cos^2 u}{\sin^2 u}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=-\csc^2 u\cdot\frac{du}{dx}.$$

5.　求 $\frac{d}{dx}\sec u$ 可令

$$\sec u=\frac{1}{\cos u}=(\cos u)^{-1}.$$

則　$$\frac{d}{dx}\sec u=-(\cos u)^{-2}\frac{d}{dx}\cos u\qquad\text{(由第九十七節)}$$

$$= \frac{\sin u}{\cos^2 u}\frac{du}{dx} \qquad (由 2)$$

$$= \sec u \tan u \frac{du}{dx}.$$

6.　求 $\frac{d}{dx}\csc u$ 可令

$$\csc u = \frac{1}{\sin u} = (\sin u)^{-1}.$$

則

$$\frac{d}{dx}\csc u = -(\sin u)^{-2}\frac{d}{dx}\sin u \qquad (由第九十七節)$$

$$= -\csc u \cot u \frac{du}{dx} \qquad (由 1)$$

例 1.

$$y = \tan 2x - \tan^2 x = \tan 2x - (\tan x)^2.$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 2x \frac{d}{dx}(2x) - 2(\tan x)\frac{d}{dx}\tan x.$$

$$= 2\sec^2 2x - 2\tan x \sec^2 x.$$

例 2.　一質點沿一直綫運動.常使

$$s = k \sin bt.$$

t 爲時間.s 爲距離.b 與 k 均爲常數.則其

$$速度 = v = \frac{ds}{dt} = bk \cos bt.$$

$$加速度 = a = \frac{d^2s}{dt^2} = -b^2 k \sin bt = -b^2 s.$$

$$力 = F = ma = -mb^2 s$$

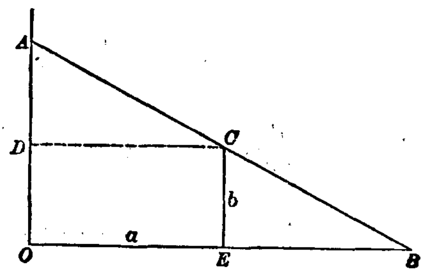
設 O 爲當 $t=0$ 時此質點之位置.$OA=+k$, $OB=-k$.則由 s 與 v 之範式.可明此點爲在 B 與 A 之間前後擺動.在 $\frac{\pi}{2b}$ 之時間所經

過之距離爲OA.而由B至於A復返於B所需時間爲$\frac{2\pi}{b}$.

範式$F=-mb^2s$表現爲有一施於此點之力以向於O.且與此點至O之距離成比例.

此質點之運動名爲單弦運動(*Simple harmonic motion*).

例 3. 今用一柱以支持土牆AO.此柱必須經過另一矮垣CE.CE之高爲b.至AO之距離爲a.求所用之柱爲最短.



第一百五十六圖

設AB爲支柱(第一百五十六圖).其長爲l.C爲矮垣之頂.今引直綫CD與OB平行.令$EBC=\theta$.則

$$l=BC+CA.$$

$$=EC\csc\theta+DC\sec\theta$$

$$=b\csc\theta+a\sec\theta.$$

$$\frac{dl}{d\theta}=-b\csc\theta\cot\theta+a\sec\theta\tan\theta.$$

$$=\frac{a\sin^3\theta-b\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}.$$

令 $\frac{dl}{d\theta}=0$.故$a\sin^3\theta=b\cos^3\theta$

即 $$\tan\theta=\frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}.$$

當θ之值較此爲小.則$a\sin^3\theta<b\cos^3\theta$.當$\theta$之值較此爲大.則$a\sin^3\theta>b\cos^3\theta$.故當$\tan\theta=\frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$.時$l$爲最小.即

$$l=b\csc\theta+a\sec\theta$$

$$=\frac{b\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}}{b^{\frac{1}{3}}}+\frac{a\sqrt{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}}{a^{\frac{1}{3}}}.$$

$$=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

153. 逆三角函數之微分法 逆三角函數微分法之範式彙列如次.

1. $\frac{d}{dx}\sin^{-1}u=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$.當 $\sin^{-1}u$ 爲在第一及第四象限以內.

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}.$$ 當 $\sin^{-1}u$ 爲在第二及第三象限以內.

2. $\frac{d}{dx}\cos^{-1}u=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$.當 $\cos^{-1}u$ 爲在第一及第二象限以內.

$$=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}.$$ 當 $\cos^{-1}u$ 爲在第三及第四象限以內.

3. $\frac{d}{dx}\tan^{-1}u=\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$

4. $\frac{d}{dx}\cot^{-1}u=-\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$

5. $\frac{d}{dx}\sec^{-1}u=\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$ 當 $\sec^{-1}u$ 爲在第一及第三象限以內.

$$=-\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}.$$當 $sec^{-1}u$ 爲在第二及第四象限以內。

6. $$\frac{d}{dx}csc^{-1}u=-\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}.$$當 $csc^{-1}u$ 爲在第一及第三象限以內。

$$=\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}.$$當 $csc^{-1}u$ 爲在第二及第四象限以內。

諸式之證明如下。

1. 如 $$y=sin^{-1}u$$

即 $$sin\,y=u$$

故 $$cos\,y\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\qquad\text{(前節)}$$

或 $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{cos\,y}\frac{du}{dx}$$

惟當 y 在第一及第四象限時 $cos\,y=\sqrt{1-u^2}$. 當 y 在第二及第三象限時 $cos\,y=-\sqrt{1-u^2}$.

2. 如 $$y=cos^{-1}u.$$

即 $$cos\,y=u$$

故 $$-sin\,y\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}.$$

或 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{sin\,y}\cdot\frac{du}{dx}$$

惟當 y 在第一及第二象限時 $sin\,y=+\sqrt{1-u^2}$. 當 y 在第三及第四象限時 $sin\,y=-\sqrt{1-u^2}$.

3.　如　$$y=\tan^{-1}u.$$

即　$$\tan y=u.$$

故　$$\sec^2 y\,\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}.$$

或　$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+u^2}\,\frac{du}{dx}.$$

4.　如　$$y=\cot^{-1}u.$$

即　$$\cot y=u.$$

故　$$-\csc^2 y\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}.$$

或　$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{1+u^2}\,\frac{du}{dx}.$$

5.　如　$$y=\sec^{-1}u$$

即　$$\sec y=u.$$

故　$$\tan y\sec y\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx},$$

或　$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\tan y\sec y}\,\frac{du}{dx}.$$

惟因$\sec y=u$當y在第一及第三象限時$\tan y=+\sqrt{u^2-1}$. 當y在第二及第四象限時$\tan y=-\sqrt{u^2-1}$.

6.　如　$$y=\csc^{-1}u.$$

即　$$\csc y=u.$$

故　$$-\csc y\cot y\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}.$$

或　$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\csc y\cot y}\,\frac{du}{dx}.$$

惟因 $\csc y=u$ 當 y 在第一及第三象限時 $\cot y=+\sqrt{u^2-1}$. 當 y 在第二及第四象限時 $\cot y=-\sqrt{u^2-1}$.

例 1. $y=\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$. y 爲銳角.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\frac{d}{dx}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

如令 $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}=\cos^{-1}x$ 求之.亦可得同樣之結果.

例 2. 第一百零七節之例可自 S 至 O(第一百二十五圖)引一直綫令 YOS 角等於 θ 其所對之弧爲 s. 則

$$s=a\theta,$$

$$\theta=2YLS=2\tan^{-1}\frac{OM}{OL}=2\tan^{-1}\frac{x_1}{a}.$$

故 $$s=2a\tan^{-1}\frac{x_1}{a},$$

$$v=\frac{ds}{dt}=2a\cdot\frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{x_1^2}{a^2}}\cdot\frac{dx_1}{dt}=\frac{2a^2c}{a^2+x_1^2}.$$

154. 指數函數及對數函數 方程式

$$y=a^x.$$

決定 y 爲 x 之連續函數.名爲指數函數.即 x 之任一實數值能得相當 y 之實數正值惟有一.證明之理論太高.不載於此.惟學者已知 x 如爲簡單數值時.y 之相當值均可計算.如 $x=n$(n 爲整數). y 之值可從 a 乘 n 次方而決定.如 x 爲正分數 $\frac{p}{q}$. 則 y 爲 a 之 p 次方之 q 次方根.如 x 爲正無理數.則可以近似有理數表 x 而求得

y之近似值.如$x=0$得$y=a^0=1$.最後如$x=-m$(m爲任一正數).則$y=a^{-m}=\frac{1}{a^m}$.

惟於實際應用.a^x之值多由對數求之.例如

$$y=a^x.$$

則　$$x=log_a y.$$

如$a=10$.卽可自通常之對數表求之.設a不等於10而另有一數.可使

$$10^b=a.$$

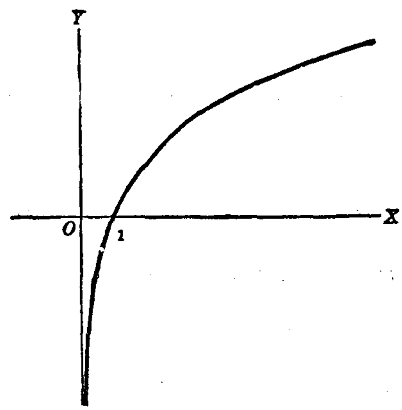
卽　$$b=log_{10}a.$$

則可得

$$y=a^x=(10^b)^x=10^{bx}.$$

故　$$bx=log_{10}y.$$

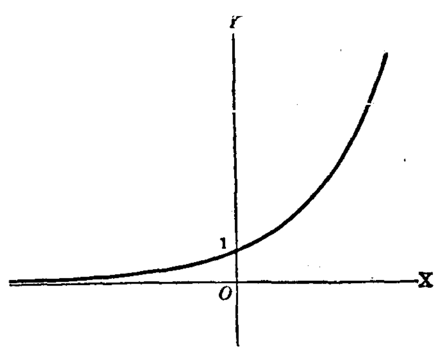
$$x=\frac{log_{10}y}{b}=\frac{log_{10}y}{log_{10}a}.$$



第一百五十七圖

例 1.　$y=log_{(1.5)}x$之圖形表示於第一百五十七圖.注意.此曲綫以y軸之負端爲一漸近綫而無相當於x爲負值之點.

例 2.　$y=(1.5)^x$之圖形表示於第一百五十八圖.



第一百五十八圖

155. *e*. 今爲便於論及指數函數與對數函數之應用及理論而引

用一無理數e.其定義爲一無限級數.即

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots.$$

於本書下卷當表示e爲一斂級數(*Converging series*).即一級數當取其項數愈多時可使其和近於某一數值爲極限.今設取e之最初十一項計之.可得其結果至小數第七位爲

$$e=2.7182818\cdots.$$

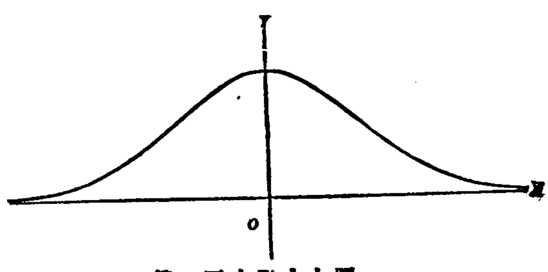
當$y=e^x$時x名爲y之自然對數或納白爾對數.(*Natural or Napierian logarithm*).學者後此可知在理論上用納白爾對數所得範式較之用普通對數爲簡單.故於理論上凡云$\log x$常指納白爾對數.在他方面如計算數值.則$\log x$常指普通對數即$\log_{10}x$.本書係依前者.

檢$\log_e x$及e^x之表以求此等函數之圖形.甚爲簡便.惟當注意所得之圖形須與前節例1及例2之普通形式無異.

今述數種含e之函數之圖形如次.

例 1. $y=e^{-x^2}$.

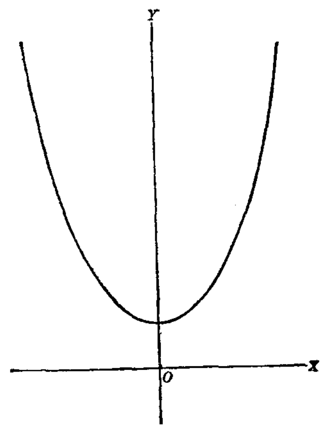
曲綫對於OY爲對稱.且常在x軸之上.當$x=0$時$y=1$. x之值由此漸增.y則遞減以至於零.故OX爲一漸近綫(第一百五十九圖).



第一百十五十九圖

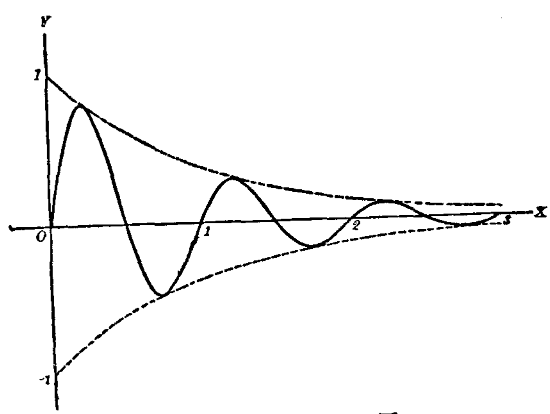
例 2.
$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

此曲綫名爲懸鏈綫(*Catenary*).可懸鏈之兩端而作成之(第一百六十圖).



第一百六十圖

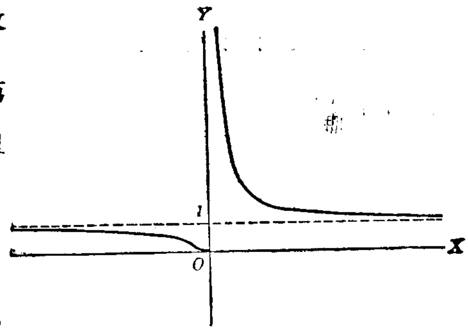
例 3.　　$y=e^{-ax}\sin bx.$



第一百六十一圖

以曲綫 $y=e^{-ex}$, $y=\sin bx$ 之相當縱坐標相乘可求得所求曲綫之 y 値.而因 $\sin bx$ 所有諸值均在 ±1 之間.故 $e^{-ax}\sin bx$ 之値不

能超過e^{-ax}.即圖形爲全在二曲綫$y=e^{-ax},y=-e^{-ax}$之間也.當x爲$\frac{\pi}{b}$之整數倍時.y均爲零.故圖形經過x軸之次數無限.第一百六十一圖表示當 $a=1$ $b=2\pi$時此函數之圖形.

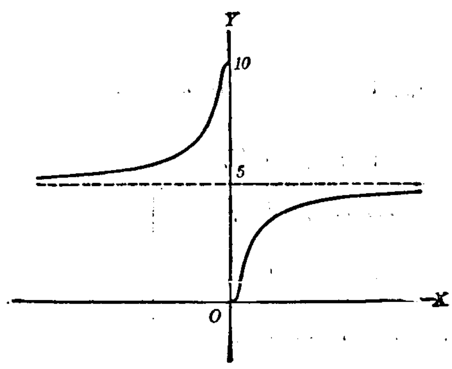


第一百六十二圖

例 4. $y=e^{\frac{1}{x}}$.

當 x 由正值漸減以達於零.y則漸增以至於無限.當x由負值漸增以達於零.y則漸減以至於零.例如當 $x=\frac{1}{1000}, y=e^{1000}$.當 $x=-\frac{1}{1000}, y=e^{-1000}=-\frac{1}{e^{1000}}$,此函數在$x=0$時爲非連續.

直綫$y=1$爲一漸近綫(第一百六十二圖)因如x之值漸增以至於無限.不論其爲正或負.$\frac{1}{x}$常近於零.y則常近於1.



第一百六十三圖

例 5. $y=\frac{10}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

當x由正值遞減以近於零.y近於零.當x由負值遞增以至於零.y近於10.x之值增至無限.y近於5.曲綫在$x=0$時爲非連續(第一百六十三圖).

156. $(1+h)^{\frac{1}{h}}$及$\frac{e^h-1}{h}$之極限 欲求指數函數及對數函數微分法之範式.須先知數種極限.關於此種極限之嚴格討論.今

不能載.惟可述其普通之證明如次.

1.　求$(1+h)^{\frac{1}{h}}$當h達於零時之極限.先由二項式定理展開$(1+h)^{\frac{1}{h}}$爲

$$(1+h)^{\frac{1}{h}}=1+\frac{1}{h}\cdot h+\frac{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{h}-1\right)}{\lfloor 2}\cdot h^2+\frac{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{h}-1\right)\left(\frac{1}{h}-2\right)}{\lfloor 3}\cdot h^3+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{1}+\frac{(1-h)}{\lfloor 2}+\frac{(1-h)(1-2h)}{\lfloor 3}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots+R.$$

R爲代表含h, h^2, h^3, 等,所有諸項之和.今設h漸近於零.可知R亦必漸近於零.同時

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots.$$

則近於e.故

$$\underset{h\doteq 0}{Lim}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e.$$

2.　求$\dfrac{e^h-1}{h}$當h達於零時之極限.

設令　$e^h-1=k.$

可知當h漸近於零.k亦漸近於零.而因

$$e^h=1+k\quad 故\quad h=log(1+k).$$

因得　$$\frac{e^h-1}{h}=\frac{k}{log(1+k)}=\frac{1}{\frac{1}{k}log(1+k)}=\frac{1}{log(1+k)^{\frac{1}{k}}}.$$

前已表明如h近於零.則k近於零.而$(1+k)^{\frac{1}{k}}$近於e.故$log(1+k)^{\frac{1}{k}}$漸近於log^e即近於1也.

$$\therefore \quad \lim_{h \doteq 0} \frac{e^h-1}{h}=1.$$

157. 指數函數及對數函數之微分法 以下四式爲指數函數及對數函數微分法之範式. u 爲代表任一函數.且可以求其對於 x 之微分. log 係指納白爾對數.而 a 爲任一常數.

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}. \tag{1}$$

$$\frac{d}{dx} \log u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \tag{2}$$

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \log a \frac{du}{dx}. \tag{3}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{\log_a e}{u} \frac{du}{dx}. \tag{4}$$

1. 由第九十六節(7) $\frac{d}{dx} e^u = \frac{d}{du} e^u \cdot \frac{du}{dx}$.

欲求 $\frac{d}{du} e^u$. 當令 $y=e^u$. 則如 u 獲一增量 Δu. y 亦必獲一增量 Δy. 而

$$\Delta y = e^{u+\Delta u} - e^u = e^u (e^{\Delta u}-1).$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = e^u \frac{e^{\Delta u}-1}{\Delta u}.$$

今如 Δu 達於零.由第九十四節

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta u} = e^u \lim \frac{e^{\Delta u}-1}{\Delta u}.$$

惟 $$\lim \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{dy}{du} = \frac{d}{dx} e^u.$$

而　$$Lim\frac{e^{\Delta u}-1}{\Delta u}=1.$$　(由前節2)

故　$$\frac{d}{du}e^u=e^u.$$

$$\frac{d}{dx}e^u=e^u\frac{du}{dx}.$$

2.　如　$$y=\log u.$$

即　$$e^y=u.$$

故　$$e^y\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^y}\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}.$$

3.　設　$$y=a^u.$$

則常可求得某量b使

$$a=e^b.$$

從而　$$b=\log a.$$

故　$$y=(e^b)^u=e^{bu}.$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{bu}\frac{d}{dx}(bu).$$　(由1)

$$=be^{bu}\frac{du}{dx}.$$

$$=(\log a)a^u\frac{du}{dx}.$$

4.　如　$$y=\log_a u.$$

即　$$a^y=u.$$

而　$$a^y\log a\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}.$$　(由3)

故 $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\log a}\cdot\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$$

惟如 $$\log a=b.$$

$$a=e^b.$$

從而 $$a^{\frac{1}{b}}=e.$$

卽 $$\frac{1}{b}=\log_a e.$$

或 $$\frac{1}{\log a}=\log_a e.$$

故 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\log_a e}{u}\cdot\frac{du}{dx}$$

例 1. $y=\log(x^2-4x+5)$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-4}{x^2-4x+5}.$$

例 2. $y=e^{-x^2}$.

$$\frac{dy}{dx}=-2xe^{-x^2}.$$

例 3. $y=e^{-ax}\cos bx$.

$$\frac{dy}{dx}=\cos bx\frac{d}{dx}(e^{-ax})+e^{-ax}\frac{d}{dx}(\cos bx).$$

$$=-ae^{-ax}\cos bx-be^{-ax}\sin bx.$$

158. 指數函數有一重要之性質爲<u>如一函數之改變率爲與該函數之值成比例時.則其函數爲一指數函數.</u>

設 $$\frac{dy}{dx}=a\,y.$$

則　$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=a.$

故　$\log y=ax+c_1.$

或　$y=e^{ax+c_1}=e^{c_1}.e^{ax}=ce^{ax}.$

例．設p爲高出地面h距離處之大氣壓力.而ρ爲空氣之密度.假設密度爲與壓力成比例.則如ρ_0及p_0爲在地面之空氣密度及壓力.

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{p}{p_0}.$$

從而　$\rho=\frac{\rho_0}{p_0}p.$

今設h增高一距離Δh.壓力增加Δp.則$-\Delta p$爲等於在高爲Δh底面積爲一單位之空氣柱之重量.如ρ爲在高爲h之密度.$\rho-\Delta\rho$爲在高爲$h+\Delta h$之密度.可知此空氣柱之重量爲在$(\rho-\Delta\rho)\Delta h$及$\rho\Delta h$之間.即

$$(\rho-\Delta\rho)\Delta h<-\Delta p<\rho\Delta h.$$

從而　$\rho-\Delta\rho<-\frac{\Delta p}{\Delta h}<\rho.$

取其極項得

$$\frac{dp}{dh}=Lim\frac{\Delta p}{\Delta h}=-\rho=-\frac{\rho_0}{p_0}p.$$

故　$p=ce^{-\frac{\rho_0}{p_0}h}$

因當$h=0$時.$e^{\frac{\rho_0}{p_0}h}=1.$而$p=p_0.$可知$c=p_0.$

故　$p=p_0e^{-\frac{\rho_0}{p_0}h}$

或
$$h=\frac{p_0}{\rho_0}\log\frac{p_0}{p}.$$

159. 求某一函數之微分.有時可先取此函數之對數.再應用以前之範式.極爲簡便.

例 1. 設
$$y=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}.$$

則
$$\log y=\log\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}.$$
$$=\frac{1}{2}\log(1-x^2)-\frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

故
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{1-x^2}-\frac{x}{1+x^2}.$$
$$=\frac{-2x}{(1-x^2)(1+x^2)}.$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2xy}{(1-x^2)(1+x^2)}.$$
$$=\frac{-2x}{(1-x^2)(1+x^2)}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$
$$=\frac{-2x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}.$$

此法對於函數爲 u^v 之形 (u, v 均爲 x 之函數)效用尤廣.此種函數通常爲極少見.而其微分爲不能用以前所有範式以求之者.惟取其對數即可求其微分.

例 2. 設 $y=x^{\sin x}$.

則
$$\log y=\log(x^{\sin x}).$$
$$=\sin x\cdot\log x.$$

故
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=(\sin x)\frac{1}{x}+\cos x\cdot\log x,$$

$$\frac{dy}{dx}=x^{\sin x-1}\cdot\sin x+x^{\sin x}\cos x\cdot\log x.$$

160. 雙曲綫函數(*Hyperbolic function*) 指數函數有數種結合名爲雙曲綫函數.其名稱與性質均與三角函數相同.惟其成因茲不能述.基本之雙曲綫函數爲雙曲綫正弦($\sin h$).雙曲綫餘弦($\cos h$).雙曲綫正切($\tan h$).雙曲綫餘切($\cot h$).雙曲綫正割($\sec h$).及雙曲綫餘割($\csc h$).以方程式表示之爲

$$\sin h\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

$$\cos h\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

$$\tan h\,x=\frac{\sin h\,x}{\cos h\,x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},$$

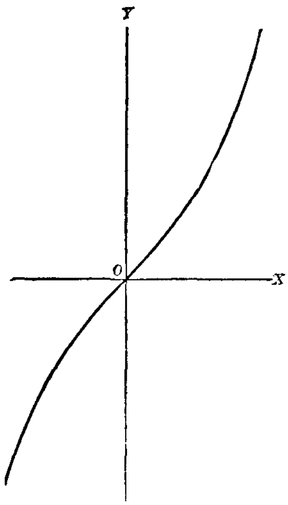
$$\cot h\,x=\frac{\cos h\,x}{\sin h\,x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}},$$

$$\sec h\,x=\frac{1}{\cos h\,x}=\frac{2}{e^x+e^{-x}},$$

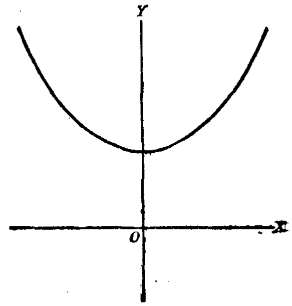
$$\csc h\,x=\frac{1}{\sin h\,x}=\frac{2}{e^x-e^{-x}}.$$

第一百六十四圖爲$\sin h\,x$之圖形.第一百六十五圖爲$\cos h\,x$之圖形.第一百六十六圖爲$\tan h\,x$之圖形.

諸雙曲綫函數間之關係可由其相當之指數函數求得.學者可自證明以下諸範式.



第一百六十四圖



第一百六十五圖

$$\cos h^2 x - \sin h^2 x = 1,$$

$$\tan h^2 x + \sin h^2 x = 1,$$

$$\cot h^2 x - \csc h^2 x = 1,$$

$$\sin h(x \pm y) = \sin h\, x \cos h\, y \pm \cos h\, x \sin h\, y,$$

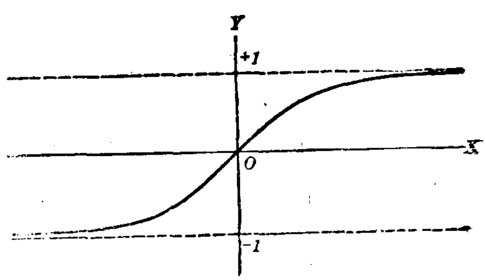
$$\cos h(x \pm y) = \cos h\, x \cos h\, y \pm \sin h\, x \sin h\, y,$$

$$\tan h(x \pm y) = \frac{\tan h\, x \pm \tan h\, y}{1 \pm \tan h\, x \tan h\, y}.$$

求雙曲綫函數之微係數,卽可求其相當方程式之微分.如

$$\frac{d}{dx} \sin h\, u = \cos h\, u \frac{du}{dx},$$

$$\frac{d}{dx} \cos h\, u = \sin h\, u \frac{du}{dx},$$



第一百六十六圖

$$\frac{d}{dx}\tan h\ u=\sec h^2\ u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cot h\ u=-\csc h^2\ u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\sec h\ u=-\tan hu\ \sec h\ u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\csc h\ u=-\ \csc hu\ \cot h\ u\frac{du}{dx}$$

161. 逆雙曲綫函數 (*Inverse hyperholic function*)

設　　$x=\sin hy.$

則　　$y=\sec h^{\ 1}x.$

卽名爲 x 之逆雙曲綫正弦.

此函數可以對數表之如次.

$$y=\sin h^{-1}x.$$

卽　　$x=\sin hy=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}.$

令 $e^{-y}=\dfrac{1}{e^y}$ 消去分數式得

$$e^{2y}-2xe^y=1.$$

視此式爲 e^y 之二次方程式而解之得

$$e^y=x\pm\sqrt{x^2+1}.$$

惟因 y 爲任一實數. e^y 恆爲正.故可取消根號前之負號.卽

$$y=\sin h^{-1}x=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

同樣可證明

$$\cos h^{-1}x=\log\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right)=\pm\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

$$\tan h^{-1}x=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x},$$

$$\cot h^{-1}x=\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1},$$

$$\sec h^{-1}x=\log\frac{1\pm\sqrt{1-x^2}}{x}=\pm\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$\csc h^{-1}x=\log\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

求逆雙曲綫函數之微係數.可卽求以上諸式之微分或用類似第一百五十三節之方法.二者均得

$$\frac{d}{dx}\sin h^{-1}u=\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}\cos h^{-1}u=\pm\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}\tan h^{-1}u=\frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}\cot h^{-1}u=\frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}.$$

$$\frac{d}{dx}\sec h^{-1}u=\text{干}\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}\csc h^{-1}u=-\frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}.$$

例. 就一單位質點由靜止下墜之運動而以一與其速度之平方成比例之力阻之.則施於此質點之全力爲$g-kv^2$.g爲重力加速度而k爲常數.故

$$\frac{dv}{dt}=g-kv^2.$$

$$\frac{1}{g-kv^2}\cdot\frac{dv}{dt}=1,$$

或 $$\frac{1}{g}\cdot\frac{1}{1-\frac{k}{g}v^2}\cdot\frac{dv}{dt}=1.$$

使此式能應用已知之微分法範式.須設

$$\sqrt{\frac{k}{g}}\,v=u;$$

從而 $$\frac{dv}{dt}=\sqrt{\frac{g}{k}}\,\frac{du}{dt}$$

故 $$\frac{1}{\sqrt{kg}}\cdot\frac{1}{1-u^2}\cdot\frac{du}{dt}=1;$$

$$\frac{1}{\sqrt{kg}}\tan h^{-1}u=t+c,$$

或 $$\frac{1}{\sqrt{kg}}\tan h^{-1}\sqrt{\frac{k}{g}}\,v=t+c.$$

惟因物體由靜止下墜.當 $t=0$ 時 $v=0$. 故 $c=0$. 上式成爲

$$v=\sqrt{\frac{g}{k}}\tan h t\sqrt{kg},$$

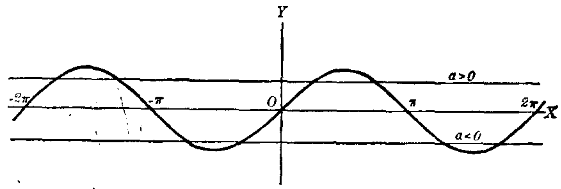
即 $$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\frac{g}{k}}\,\frac{\sin h\, t\sqrt{kg}}{\cos h\, t\sqrt{kg}}.$$

故 $$s=\frac{1}{k}\log\cos h\, t\sqrt{kg}+c.$$

162. 越方程式 (*Transcental equations*)　含越函數之方程式.常可以類似代數方程式之解法解之.用圖解法亦爲便利.

例 1. $\sin x = a.$

此方程式之解答爲曲綫 $y=\sin x$ 與直綫 $y=a$ 之交點之橫坐標(第一百六十七圖).如 $a>1$ 或 $a<-1$. 則二方程式無實數解答.如 a 在 -1 與 1 之間.則得解答無限.今設有一最小之正根 x_1. 則 a 如爲正.$0<x_1<\frac{\pi}{2}$



第一百六十七圖

a 如爲負.$\pi<x_1<2\pi$. 此 x_1 之值.須由檢表或由圖形之近似値而定其次之最大正根.當 a 爲正値時等於 $\pi-x_1$. 當 a 爲負値時等於 $3\pi-x_1$. 所有其餘之根.不論爲正或負.均可加減 2π 之倍數而求得.故此方程式之普通解答爲 $2k\pi+x_1$ 及 $(2k+1)\pi-x_1$. 或簡單書爲 $k\pi+(-1)^k x_1$ (k 爲任意之正負整數或零).

例 2. $\cos x = a.$

如 x_1 爲此式之最小正解答.k 爲整數或零.則此式之普通解答爲 $2k\pi \pm x_1$. 學者可自證之.

例 3. $\tan x = a.$

此式之普通解答爲 $k\pi+x_1$. 學者可自證之.

例 4. $\cos 2x = 2\cos x.$

凡一方程式含兩種三角函數.以變成同類函數爲佳.上式可書爲 $\cos x$ 之二次方程式 $2\cos^2 x-1=2\cos x$.

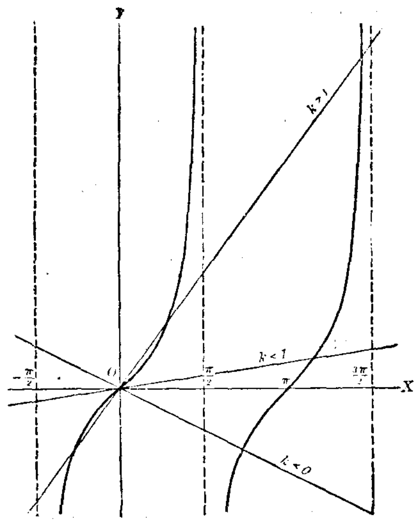
解之得 $\cos x=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$.惟因 $\cos x$ 之數值不能超過於1.故此式之正號可不用.所得之方程式 $\cos x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 依例2之法解

之.得其結果爲$x=2k\pi\pm1.946$.

例 5.　　$\tan x=kx$.

此方程式之根.卽爲曲綫$y=\tan x$與直綫$y=kx$之交點之橫坐標(第一百六十八圖).

二綫相交於原點.惟其餘之交點須根據於k之值而定.因曲綫$y=\tan x$之斜度當$x=0$時爲1.當$0<x<\frac{\pi}{2}$時大於1.故視$k>1$或$0<k\leqq1$或$k<0$而有三種區別.



第一百六十八圖

由此式之圖形.可表現當$k>1$時最小正根爲在0與$\frac{\pi}{2}$之間.當$0<k\leqq1$時最小正根爲在π與$\frac{3\pi}{2}$之間.當$k<0$時最小正根爲在$\frac{\pi}{2}$與π之間.

今求一特例$\tan x=2x$之最小正根.

先由圖形或檢表以定其根之位置.(第四十七節)如用檢表法當變角度爲半徑角(*Radian*).今卽用披爾斯教授之積分簡表(*Professor B. O. Peirces "Short Table on Intergrals"*)第一百三十二頁求一角之正切與兩倍該角之近似値相等.可得當$x=1.1636$ $(66°40')$.$\tan x=2.3183$.當$x=1.1665$ $(66°50')$.$\tan x=2.3369$.卽曲綫

$$y=\tan x-2x.$$

當 $x_1=1.1636$ 時 $y_1=-.0089$. 當 $x_2=1.1665$ 時 $y_2=.0039$. 故此曲綫交 OX 於 x_1 與 x_2 之間.而方程式

$$\tan x=2x.$$

之一根求至小數第二位.如進求之.須用第六十三節之法.得

$$\frac{dy}{dx}=\sec^2 x-2,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\tan x\sec^2 x.$$

當 x 在 x_1 與 x_2 之間.兩者均爲正.故曲綫

$$y=\tan x-2x.$$

在此部爲第六十四圖(1)之形式.其與 OX 之交點爲在過 (x_2,y_2) 之切綫及連結兩點 $(x_1,\ y_1)$ $(x_2,\ y_2)$ 所成之弦之間.在 $(x_2,\ y_2)$ 之切綫方程式爲

$$y-.0039=4.461(x-1.1665);$$

連結之弦爲

$$y-.0039=\frac{.0128}{.0029}(x-1.1665).$$

以上兩綫與 OX 之交點求至小數第四位均得 $x=1.1656$.卽爲所求之近似根.

例 6. $e^x-4x^2-2x+3=0.$

此方程式之根.卽爲二曲綫 $y=e^x$ 及 $y=4x^2+2x-3$ 之交點之橫坐標.由圖解或檢表可定其一根爲在 -1 與 -2 之間.一根爲在 0 與 1 之間.今設求 0 與 1 間之根.則 $y=e^x-4x^2-2x+3$ 當 $x_1=0$ 時 $y_1=4$. 當 $x_2=1$ 時 $y_2=-.282$. 而

$$\frac{dy}{dx}=e^x-8x-2,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^x-8.$$

當 x 在 0 與 1 之間.以上兩者均為負.故曲綫在此部為第六十四圖(4)之形.其與 OX 之交點為在過 (x_2, y_2) 之切綫及連結二點 (x_1, y_1) (x_2, y_2) 所成之弦之間.切綫為

$$y+.282=-7.282(x-1),$$

此綫交 OX 於 $x=.97-$.連結之弦為

$$y+.282=-4.282(x-1),$$

此綫交 OX 於 $x=.93+$

今如令 $x_1=.93$, $y_1=.2149$, $x_2=.97$, $y_2=-.0657$, 在 (x_2, y_2) 之切綫為

$$y+.0657=-7.1221(x-.97)$$

與 OX 交於 $x=.9608-$,在 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) 間之弦為

$$y+.0657=\frac{-.2806}{.04}(x-.97),$$

與 OX 交於 $x=.9606+$

故方程式之一根為在 .9606 及 .9608 之間.

問　題

作下列諸方程式之圖形

1. $y=\cot x.$
2. $y=\sec x.$
3. $y=\csc x.$
4. $y=\text{vers}\, x.$
5. $y=\frac{1}{3}\sin 3x$
6. $y=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x.$

7. $y=\sin x+\sin 2x.$ 8. $y=2\sin x-\sin 2x.$

9. $y=\cos x+\frac{1}{9}\cos 3x.$ 10. $y=1-\frac{1}{2}\cos x-\frac{2}{3}\cos 2x.$

11. $y=x\sin\frac{1}{x}.$ 12. $y=x^2\sin\frac{1}{x}.$

13. $y=e^{\frac{1+x}{1-x}}.$ 14. $y=xe^{\frac{1-x}{x}}.$

15. $y=xe^{\frac{1}{x}}.$ 16. $y=\log(\sin x).$

17. $y=\tan^{-1}(ax+b).$ 18. $y=\log\frac{x-1}{x+1}.$

19. 作方程式$y=\frac{1}{x}\sin x$之圖形.且定其與雙曲綫$xy=\pm 1$之關係.

20. 作方程式$y=\sin x^2$之圖形.且表示其在OX上兩連續截部爲達於零爲極項.

求以下各式之$\frac{dy}{dx}$.

21. $y=\sin(ax+b)\cos(ax-b).$

22. $y=\tan(ax+b)\cot(ax+c).$

23. $y=\frac{\tan 2x+\cot 2x}{\sec 4x},$ 24. $y=\frac{\cot 2x+2}{\csc 2x}.$

25. $y=\frac{\sec 3x}{\tan 3x+1}.$ 26. $y=\csc 2x-\cot 2x.$

27. $y=\sec^m nx\cdot\csc^n mx.$ 28. $y=\sec^2 2x+\tan 2x.$

29. $y=\cot 4x\csc 2x$ 30. $y=\sin(x\cos x).$

31. $y=\left(\cos^2 x+\frac{2}{3}\right)\sin^3 x.$ 32. $y=(2\sec^4 x+3\sec^2 x)\sin x.$

33. $y=\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-\cos 2x}}.$ 34. $y=\cos\sqrt{1-x^2}$

35. $y=\dfrac{\sin 2x}{\sin x}-\dfrac{\cos 2x}{\cos x}$.

36. $y=\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

37. $y=\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

38. $y=\cos^{-1}\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

39. $y=\sec^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

40. $y=\sin^{-1}\dfrac{a-x}{a+x}$.

41. $y=\sec^{-1}\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

42. $y=\csc^{-1}(x^2+2x)$.

43. $y=\cot^{-1}\dfrac{2ax}{x^2-a^2}-2\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$.

44. $y=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cos^{-1}\dfrac{b+a\cos x}{a+b\cos x}$.

45. $y=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$.

46. $y=\csc^{-1}\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$.

47. $y=\sec^{-1}\sqrt{4x^2+4x+2}$.

48. $y=\csc^{-1}\dfrac{1}{2}\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

49. $y=e^{x^2+2x}$.

50. $y=\log\sqrt{\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}}$.

51. $y=a^{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}e^{\sqrt{1-x^2}}$.

52. $y=\log(2x+1+2\sqrt{x^2+x})$.

53. $y=e^x\sqrt[x]{a}$

54. $y=a^{\tan x}$.

55. $y=x^2\log x^2$.

56. $y=a^{\tan x\sec^2 x}$.

57. $y=\tan 2x\cdot a^{\sec 2x}$.

58. $y=e^{(a+x)^2}\sin mx$.

59. $y=\csc^{-1}(\sec 2x)$.

60. $y=(x+a)e^{\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}}$.

61. $y=\tan^{-1}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

62. $y=\log\dfrac{3\tan x+1}{\tan x+3}$.

63. $y=\sec^{-1}\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

64. $y=e^{x\cos a}\cos(x\sin a)$.

65. $y=\log\tan(x^2+a^2)$.

66. $y=x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}$.

67. $y=\frac{1}{a}\log(\sec ax+\tan ax)$.

68. $y=(x+a\sqrt{1-x^2})e^{a\sin^{-1}x}$.

69. $y=\log\sqrt{1+x^2}+x\cot^{-1}x$.

70. $y=\frac{x\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}-\log\sqrt{1-x^2}$.

71. $y=\frac{e^{ax}(a\sin mx-m\cos mx)}{m^2+a^2}$.

72. $y=x^2\cot^{-1}\frac{a}{x}+a^2\tan^{-1}\frac{x}{a}-ax$.

73. $y=\log\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)-\frac{\sin^{-1}x}{x}$.

74. $y=\log(x+\sqrt{x^2-a^2})+\cos^{-1}\frac{x}{a}$.

75. $y=\log(x+\sqrt{x^2-a^2})-\csc^{-1}\frac{x}{a}$.

76. $y=\tan^{-1}\sqrt{x^2-2x}-\frac{\log(x-1)}{\sqrt{x^2-2x}}$.

77. $y=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)$.

78. $y=\log\tan(2x+1)+\csc(4x+2)$.

79. $y=\sqrt{2ax-x^2}+a\cos^{-1}\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a}$.

80. $y=x\sqrt{a^2+x^2}+a^2\log(x+\sqrt{a^2+x^2})$.

81. $y=\log\sqrt{\frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}+1}}-\frac{2\sqrt{x}\sec^{-1}2\sqrt{x}}{\sqrt{4x-1}}$.

82. $y=\frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x-a}{a}$.

83. $y=\tan^{-1}(x-\sqrt{x^2-1})+\log\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

84. $y=\dfrac{\log(e^x+2)}{\sqrt{e^{2x}+2e^x-1}}+\csc^{-1}\sqrt{e^{-x}+e^x}$.

85. $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2}-\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)\tan^{-1}\sqrt{1-x^2}$.

86. $y=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\log\dfrac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x}+\log(x+\sqrt{1+x^2})$.

87. $y=(\sin\sqrt{x})^{\tan\sqrt{x}}$.　　88. $y=\sqrt[x]{\sin x}$.

89. $y=x^{(x^x)}$　　90. $y=(x)^{e^x}$.

91. $y=(e)^{x^x}$.　　92. $y=(a+x)^{\tan^{-1}(a+x)}$.

求下列諸式之$\dfrac{dy}{dx}$.

93. $x^y+\sec xy=0$.　　94. $y\tan^{-1}x-y^2+x^2=0$.

95. $y\sin x-\cos(x-y)=0$.　　96. $ye^{ny}=ax^m$.

97. $e^x\sin y-e^y\cos x=0$.　　98. $y\sin x+x\cos y=xy$.

99. $y\log x=x\sin y$.　　100. $xy=\tan^{-1}\dfrac{x}{y}$.

求下列諸式之$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

101. $\log(x^2+y^2)-2\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=0$.

102. $e^x+e^y=1$.

103. $\log\dfrac{1-x}{1+y}-\log\dfrac{1+x}{1-y}=1$.

104. $x-y=\log(x+y)$.

105. $e^{x+y}=x^y$.

106. 求在曲綫 $y=\sin x+\sin 2x$ 上與 x 軸平行之點.

107. 曲綫 $y=\dfrac{1}{5mx}+\tan^{-1}(x+m)$ 在橫坐標爲1之處爲與 OX

平行.求定m之值.

108. 求二曲綫$y=\sin x$, $y=\cos x$之交角.

109. 求二曲綫$y=\sin x$, $y=\sin(x+a)$之交角.

110. 求二曲綫$y=\sin x$, $y=\sin 2x$之交角.

111. 求證屈拉克利克司曲綫(*Tractrix*).

$$y=\frac{a}{2}\log\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\sqrt{a^2-x^2}.$$

之切綫在切點與y軸間之部分.長爲常數.

112. 求曲綫$y=2\sin x-\dfrac{1}{2}\sin 2x$之彎點.

113. 求曲綫$xy=a^2\log\dfrac{x}{a}$之彎點.

114. 求曲綫$y=e^{-x^2}$之彎點.

115. 求證曲綫$y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{3}\sin x+\dfrac{1}{12}\sin 2x$所有彎點之數爲無限.且其中有二彎點爲在$x=6$及$x=10$之間.

116. 作曲綫$y=\sin^2 x$之圖形.且求其極大值極小值與彎點.

117. 作曲綫$y=e^{-ax}\cos bx$之圖形.且證明此曲綫與曲綫$y=e^{-ax}$不論在何公共點均係相切.幷求此曲綫在$a=b=1$時之極大值極小值與彎點.

118. 作曲綫$y=x^ne^{-x}(n>0)$之圖形.且求其極大值極小值與彎點.

119. 有一物體在一平面上運動.常使$x=a\cos t+b$, $y=a\sin t+c$.其中t表示時間.a, b, c均爲常數.求此物體所經過之路程.且表示其速度爲常數.

120. 有一直綫運動.以方程式表之爲$s=5-2\cos^2 t$.試證此爲單弦運動.且求以s表任一點之速度及加速度.

121. 一圓之中心A在於他一中心爲B之圓周上.今有一動直綫AMN交二圓於M與N.此直綫係以等角速度繞A而旋轉.求證BN繞B之角速度亦爲常數.

122. 兩質點在一直綫上運動.其在於任一時間t此兩點至一定點O之距離爲$x=a\cos\omega t$及$x'=a\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)$. ω與a均爲常數.求兩質點間之最大距離.

123. 長爲b呎之梯.倚於一屋之旁.梯足爲以每秒a呎之率滑動.求其中心之速率.

124. 一質點依$s=e^{-\frac{1}{2}ct}(a\sin ht+b\cos ht)$而運動.求其速度及加速度.且表示有兩力施於此質點.一與其至原點之距離成比例.一與其速度成比例.

125. 如$s=ae^{kt}+be^{-kt}$. 試證有一抵抗力施於此質點.此力與至量s之點之距離成比例.

126. BC爲一長a呎之竿.與一活塞(*Piston*)相連於C. 又與一曲拐(*Crank*)AB相連於B. AB之長爲b呎繞A而旋轉.求以AB之角速度表C之速度.

127. 一人以每秒5呎之等速度沿一圓場之直徑進行.直徑之長200呎.問當日光與直徑成直角時.此人之影沿圓牆之速度如何.

128. 前題設日光與直徑成α角.則人影速度如何.

129. 在某時間已知一三角形之兩邊及其夾角為6呎, 10呎, 及$30°$.此三量之改變率每秒各為3呎, -2呎, 及$10°$.問在當時此三角形之面積及面積之改變率.

130. 三角形一邊之長為l呎.其對角為α.問當此三角形之面積極大時其餘二角當如何.

131. 張貼廣告之板安置於一牆上.板高8呎.其底邊至地面之距離20呎.問視察最清楚之處距牆面為若干呎.(卽求自板之頂及底至視察之處所引二綫之夾角為最大).

132. 以力F在地面引一重為W之物體.設磨擦係數為K.問所得結果最佳時.施力之方向當如何.

133. 一流水之溝.頂部無蓋.底與兩邊之寬均為4吋.其兩邊之傾斜亦皆相等.問欲使其容積為極大時.頂部之寬當為幾何.

134. 懸一燈正對於一圓桌之中心.設光之照度為與距離之平方成反比例.而與投射角之正弦成正比例.今欲使此圓桌所受之光最強.則燈距桌面之高與桌之半徑之比當如何.

135. 數人曳一長27呎之梁經一夾道以達於一廊廡.廊之寬為8呎而與夾道成直角.設不計算梁寬.此夾道之寬當為若干方可使此梁經繞無礙.

136. 求曲綫$y=\sin x$一弓形之面積.

137. 求y軸與二曲綫$y=\sin x$, $y=\cos x$在$x=0$及$x=\pi$間之部分所夾之面積.

138. 求二曲綫$y=\frac{1}{2}\sin 2x$, $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$在$x=0$及$x=\pi$間之部分所夾之面積.

139. 求曲綫 $y=e^x$ 與 x 軸及兩縱綫 $x=0$, $x=1$ 所夾之面積.

140. 求夾於懸鏈綫與 x 軸及兩縱綫 $x=\pm a$ 間之面積.

141. 求夾於曲綫 $y=\frac{1}{x}$ 與 x 軸及兩縱綫 $x=1, x=2$ 間之面積.

142. 求於 維尺 曲綫上引一縱綫使夾於此縱綫與曲綫及坐標二軸間之面積等於其作圖時所用之輔助圓之面積.

143. 試證懸鏈綫 $\frac{ds}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ 且由此而求 s.

144. 求一經過 (2, 3) 之曲綫. 在此綫上任一點之斜度爲 k 倍於該點之橫坐標之反商.

145. 求一經過 (a, b) 之曲綫在此綫上任一點之斜度等於其縱坐標之 k 倍.

146. 一運動物體之速度爲與其所經過之距離成比例. 求此物體在 t 時間內所經過之距離.

解以下之方程式

147. $\tan x=\cos x$.

148. $\cos 2x=\frac{1}{2}\cos x$.

149. $\sin 2\theta\cos 2\theta+2\sin\theta=0$.

150. $\sin 4x-2\sin x\cos 2x=0$.

151. $\sin^4 x+3\cos^4 x-4\sin^2 x\cos^2 x=0$.

152. $\tan x=x$.

153. $\tan x=\frac{1}{2}x$.

154. $x-\frac{1}{2}\sin x=\frac{1}{10}$.

155. $e^x=x^2$.

156 $\log x=\frac{1}{3}x$.

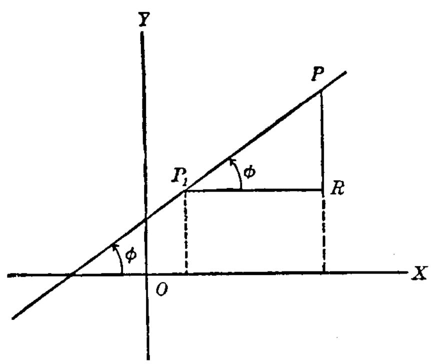
第十四章　曲綫之通徑表示

163. 定義 以前所論之曲綫均係一單獨含x與y之方程式.此外另有一法爲用一第三自變數以表示x及y.例如

$$x=f_1(t), \qquad y=f_2(t)$$

此式t爲自變數而$f_1(t)$及$f_2(t)$均爲t之連續函數.當t之值發生變動時.x與y亦因之變動.而(x, y)點即經過一曲綫.如消去以上二式中之t仍可得一含x與y之方程式.

164. 直綫 設$P_1(x_1, y_1)$(第一百六十九圖)爲在於一直綫之定點.而ϕ爲此直綫與一平行於OX之直綫P_1R所夾之角.$P(x, y)$爲此直綫上任一點而r爲自P_1至P之距離.如P在ϕ之終綫上則r爲正.如在終綫之後方延長綫上則r爲負.惟不論P之位置如何均得



第一百六十九圖

$$\frac{x-x_1}{r}=\cos\phi, \quad \frac{y-y_1}{r}=\sin\phi.$$

故　$x=x_1+r\cos\phi, \ y=y_1+r\sin\phi.$

此即爲直綫之通徑表示其通徑(*Parameter*)爲r.此種方程式之應用見於第一百三十六節及第一百三十八節.

直綫之另一通徑表示爲十九節之方程式

$$x=x_1+l(x_2-x_1),$$

$$y=y_1+l(y_2-y_1).$$

l 爲通徑而 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ 爲定點.

通常設 a, b, f, g 均爲常數而 t 爲通徑.則方程式

$$x=a+bt,\quad y=f+gt.$$

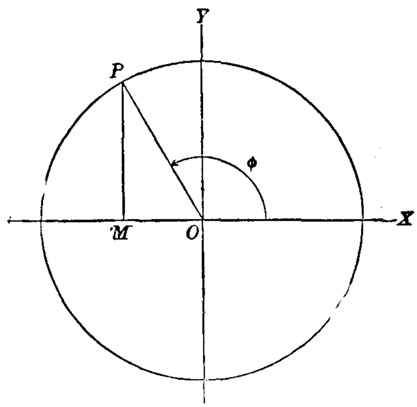
常代表一直綫.因消去此二式之 t 可得

$$y-f=\frac{g}{b}(x-a).$$

165. 圓 設 $P(x,\ y)$ (第一百七十圖) 爲圓上任一點.圓之中心爲 O. 半徑爲 a. OP 與 OX 所夾之角爲 ϕ. 則由正弦與餘弦之定義以 ϕ 爲通徑可得圓之通徑方程式爲

$$x=a\cos\phi,$$

$$y=a\sin\phi.$$

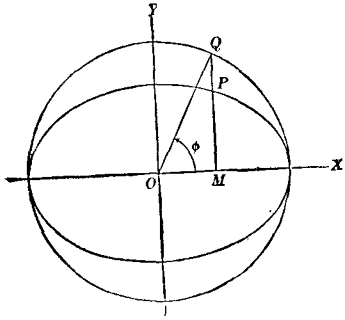


第一百七十圖

166. 橢圓 以橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b)$$

之長軸爲直徑作一圓.自橢圓上任一點 $P(x,\ y)$ (第一百七十一圖) 引縱綫 MP 延長之交圓於 Q. 令 Q 之坐標爲 $(x,\ y')$ 則由圓之方程式得



第一百七十一圖

$$y' = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

而由橢圓之方程式得

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

故 $$y = \frac{b}{a}y'.$$

引直綫OQ令角$XOQ = \phi$. 由前節得

$$x = a\cos\phi.$$

$$y' = a\sin\phi.$$

代入上式y之值得橢圓之通徑方程式爲

$$x = a\cos\phi, \quad y = b\sin\phi.$$

ϕ名爲橢圓上任一點之離心角(*Eccentric angle*). $x^2+y^2=a^2$則名爲輔助圓.

例 橢圓之通徑方程式可用之以求其面積.因如A爲夾於橢圓與坐標二軸及任一縱綫MP間之面積(第一百七十一圖).則由第一百零九節 6.

$$\frac{dA}{dx} = y.$$

惟 $$\frac{dA}{dx} = \frac{\frac{dA}{d\phi}}{\frac{dx}{d\phi}} = \frac{\frac{dA}{d\phi}}{-a\sin\phi}.$$

而 $$y = b\sin\phi.$$

故(1)式爲

$$\frac{dA}{d\phi} = -ab\sin^2\phi = ab\,\frac{\cos 2\phi - 1}{2}.$$

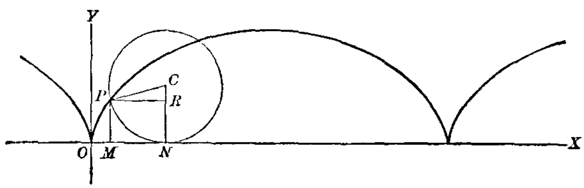
$$A=ab\left(\frac{\sin 2\phi}{4}-\frac{\phi}{2}\right)+c.$$

如 $\phi=\frac{\pi}{2}$. 則 $A=0$ 而 $c=\frac{\pi ab}{4}$.

$$\therefore \qquad A=ab\left(\frac{\sin 2\phi}{4}-\frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

當 $\phi=0$ 時 A 爲橢圓全面積四分之一.故其全面積爲 πab.

167. 擺綫 (*Cycloid*)　當一圓在一直綫上迴轉.則圓周上任一點所經過之路程成一曲綫.此曲綫名爲擺綫.



第一百七十二圖

設一半徑爲 a 之圓在 x 軸上迴轉. C 爲當此圓運動時某一時間之中心. N 爲圓與 OX 之切點. P 爲圓周上任一點.其經過之路程卽爲擺綫.今取坐標之原點爲當此圓向左方迴轉時 P 與 OX 相切之處.則

$$ON=\widehat{PN}.$$

引 MP 及 CN 各垂直於 OX. PR 平行於 OX. 連結 CP. 令

$$NCP=\phi.$$

則
$$\begin{aligned} x=OM&=ON-MN \\ &=\widehat{NP}-PR \\ &=a\phi-a\sin\phi. \end{aligned}$$

$$y=MP=NC-RC$$
$$=a-a\cos\phi.$$

故擺綫之通徑表示爲

$$x=a(\phi-\sin\phi).$$
$$y=a(1-\cos\phi).$$

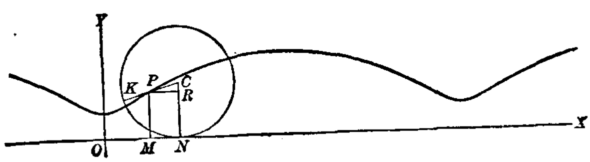
消去ϕ可得擺綫之方程式爲

$$x=a\cos^{-1}\frac{a-y}{a}\pm\sqrt{2ay-y^2}.$$

惟此式不及通徑方程式之便利.

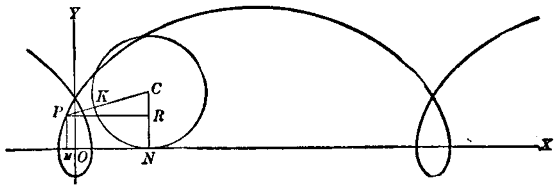
擺綫與OX相會之頂點名爲歧點(*cusp*).兩連續歧點間之距離等於$2\pi a$.

168. 次擺綫(*Trochoid*) 當一圓在一直綫上迴轉在其半徑或半徑之延長綫上任一點所經過之路程爲一曲綫.此曲綫名爲次擺綫.



第一百七十三圖

設圓在x軸上迴轉.C(第一百七十三圖及一百七十四圖)爲其在某一時間之中心.N爲圓與x軸之切點.$P(x_1, y_1)$爲半徑上一點.其經過之路程卽爲次擺綫.K爲CP與圓相交之處.今取坐標原點爲在當此圓向左迴轉時K與OX相會之處.則$ON=\widehat{NK}$.



第一百七十四圖

引 PM 及 CN 垂直於 OX. 由 P 引直綫與 OX 平行. 交 CN 或其延長綫於 R. 設圓之半徑爲 a. CP 爲 h. NCP 爲 ϕ. 則

$$x = OM = ON - MN.$$

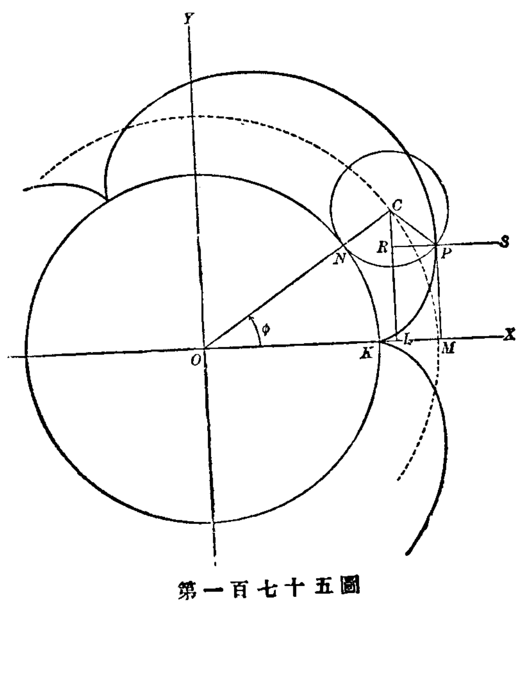
$$= \widehat{NK} - PR.$$

$$= a\phi - h\sin\phi.$$

$$y = MP = NC - RC.$$

$$= a - h\cos\phi.$$

169. 外擺綫($Epicycloid$)　當一動圓在一定圓之外面迴轉.動圓之圓周上任一點所經過之路程爲一外擺綫.



第一百七十五圖

設 O(第一百七十五圖)爲定圓之中心. C 爲動圓之中心. N 爲其與定圓之切點. $P(x, y)$ 爲動圓上一點.其經過之路程爲外擺綫. 迴轉動圓使 P 與定圓相會而定其點爲 K. 則

$$\widehat{KN} = \widehat{NP}$$

取 O 爲坐標原點 OK 爲 x 軸.引 PM 及 CL 垂直於 OX. PS 平行於 OX 交 CL 於 R. 連結 OC. 設動圓之半徑爲 a. 定圓之半徑爲 b. 角 OCP 爲 θ. 而角 KOC 爲 ϕ. 則

$$\widehat{KN}=b\phi,\quad \widehat{NP}=a\theta.$$

故 $$b\phi=a\theta,$$

今得
$$
\begin{aligned}
x=OM&=OL+LM.\\
&=OC\cos KOC-CP\cos SPC.\\
&=(a+b)\cos\phi-a\cos(\phi+\theta).\\
&=(a+b)\cos\phi-a\cos\frac{a+b}{a}\phi.\\
y=MP&=LC-RC.\\
&=OC\sin KOC-CP\sin SPC.\\
&=(a+b)\sin\phi-a\sin(\phi+\theta).\\
&=(a+b)\sin\phi-a\sin\frac{a+b}{a}\phi.
\end{aligned}
$$

曲綫含多數可重合之弓形.第一弓形相當於 θ 自 0 至 2π 之値.即相當於 ϕ 自 0 至 $\frac{2a\pi}{b}$ 之値.同樣第 k 弓形相當於 ϕ 自 $\frac{2(k-1)a\pi}{b}$ 至 $\frac{2ka\pi}{b}$ 之値.故曲綫惟當 k 之値能使 $\frac{2ka\pi}{b}$ 爲 2π 之整數倍時方爲閉合形.如 a 與 b 爲不可公度.則上述爲不可能.惟如 $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$ 而 $\frac{p}{q}$ 爲一既約有理分數.則 k 之最小値爲 q. 曲綫所含弓形之數爲 q 而環繞定圓 p 次.

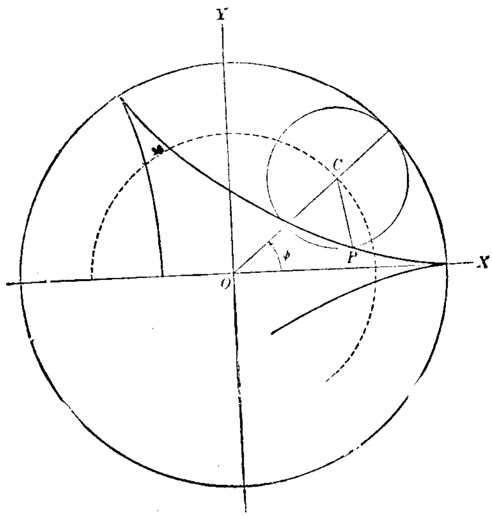
170. 內擺綫(*Hypocycloid*) 當一動圓在一定圓之內面迴轉.動圓之圓周上任一點所經過之路程.即成一內擺綫.依

前節之例得其方程式爲

$$x=(b-a)\cos\phi+a\cos\frac{b-a}{a}\phi,$$

$$y=(b-a)\sin\phi-a\sin\frac{b-a}{a}\phi.$$

學者可自證明.此式曲線表示於第一百七十六圖.

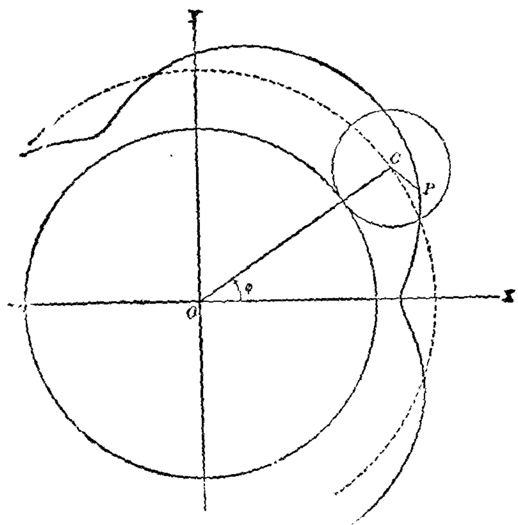


第一百七十六圖

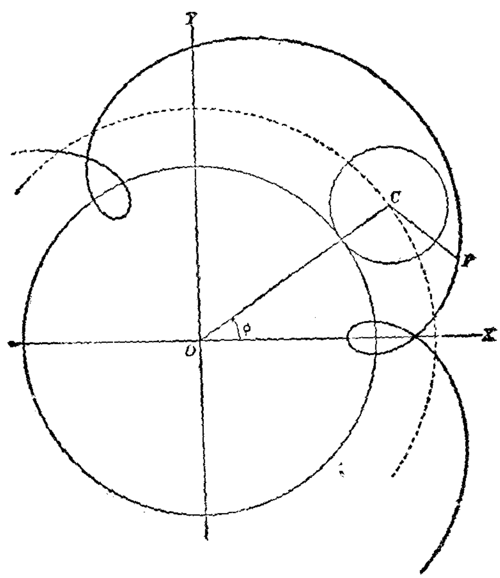
171. 外次擺綫及內次擺綫(*Epitrochoid and Hypotrochoid*)　當一動圓在一定圓之外面或內面迴轉.在動圓半徑上任一點所經過之路程卽成一外次擺綫或內次擺綫.如 h 爲自該點至動圓中心之距離.則外次擺綫之方程式爲

$$x=(a+b)\cos\phi-h\cos\frac{a+b}{a}\phi,$$

$$y=(a+b)\sin\phi-h\sin\frac{a+b}{a}\phi.$$



第一百七十七圖

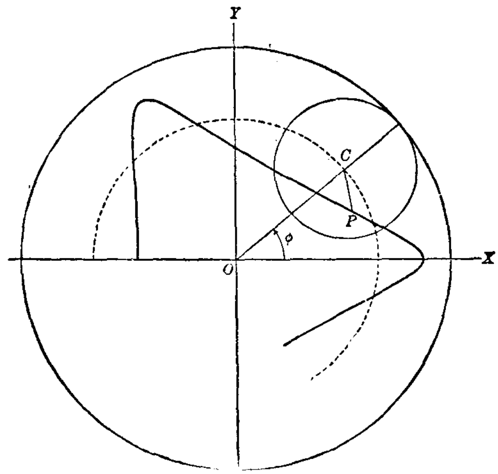


第一百七十八圖

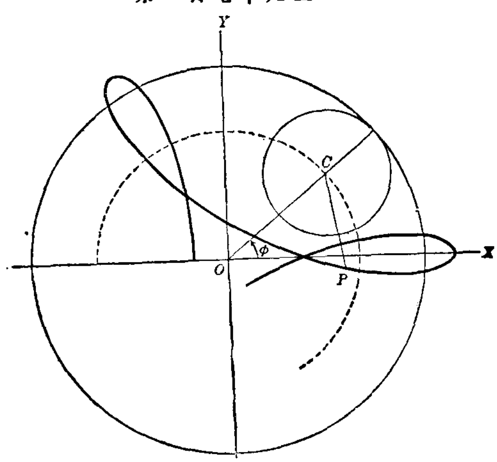
內次擺線之方程式爲

$$x=(b-a)\cos\phi+h\cos\frac{b-a}{a}\phi,$$

$$y=(b-a)\sin\phi-h\sin\frac{b-a}{a}\phi.$$



第一百七十九圖



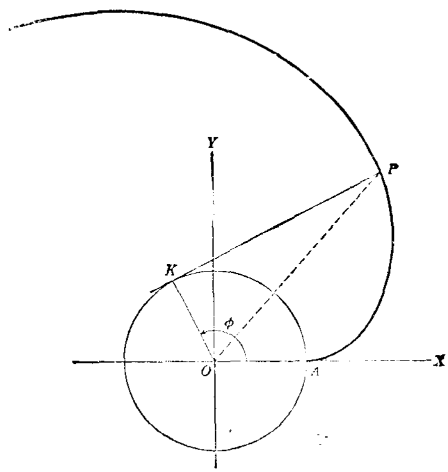
第一百八十圖

學者可自證明.以上諸式曲線凡表示於第一百七十七圖至第一百八十圖.

172. 圓之漸伸綫 將繩繞於一圓周上漸次解放.則繩端所經過之路徑爲一曲綫.此曲綫名爲圓之漸伸綫(*Involute*).設O爲圓之中心(第一百八十一圖).a爲半徑.A爲當繩端仍在圓上之點.今取O爲坐標原點.OA爲x軸.$P(x, y)$爲漸伸綫上一點.PK爲自P至圓上K點之切綫.則PK卽代表所解放之繩之一部.故

$$KP = \widehat{AK} = a\phi.$$

不論K在於何種位置.OK與OY所夾之角常爲$\phi-\frac{\pi}{2}$.故OK對於OX之射影爲$OK\cos\phi = a\cos\phi$.對於OY之射影爲$OK\cos\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)=a\sin\phi$. KP與OX所夾之角常爲$\phi-\frac{\pi}{2}$.而與OY所夾之角爲$\pi-\phi$.故KP對於OX之射影爲$KP\cos\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)=a\phi\sin\phi$.對於$OY$之射影爲$KP\cos(\pi-\phi)=-a\phi\cos\phi$.



第一百八十一圖

再則OP對於OX之射影爲x.對於OY之射影爲y.故由射影之定律得

$$x = a\cos\phi + a\phi\sin\phi,$$

$$y = a\sin\phi - a\phi\cos\phi.$$

173. 時間通徑　曲綫之通徑表示.在力學上最要之應用爲當若干力施於一運動之物體時.求此物體之路程.在此時即常取時間爲通徑.

例 1.　一質點以均一速度k在一圓上運動.設以s表示所經過之弧.a表此圓之半徑.則

$$s=kt,\qquad \phi=\frac{s}{a}=\frac{kt}{a}.$$

故圓之方程式爲(第一百六十五節)

$$x=a\cos\frac{kt}{a},$$

$$y=a\sin\frac{kt}{a}.$$

此可表示P對於兩坐標軸之射影爲同擺幅之單弦運動.

例 2.　質點Q以等速度沿橢圓之輔助圓而運動(第一百六十六節).求其同行點P之運動.

依例 1 得$\phi=\frac{kt}{a}$.所經之路徑方程式爲

$$x=a\cos\frac{kt}{a},$$

$$y=b\sin\frac{kt}{a}$$

此可表示P在OX及OY之射影爲各以a,b爲擺幅之單弦運動.

例 3.　以始速v_0擲一拋擲物(*projectile*).其最初之方向爲與水平方向成α角.初速之水平分速度爲$v_0\cos\alpha$.垂直分速度爲

$v_0 \sin \alpha$ 設不計算空氣之抵抗力.卽視此物體爲僅受重力之作用時.取其最初位置爲原點.水平方向爲x軸.可得

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0.$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g.$$

由此得

$$x=c_1t+c_2,$$
$$y=-\frac{1}{2}gt^2+c_3t+c_4.$$

惟當$t=0$時$x=0$, $y=0$. $\frac{dx}{dt}=v_0\cos\alpha$. $\frac{dy}{dt}=v_0\sin\alpha$.

故拋擲物之路徑以通徑方程式表之爲

$$x=v_0t\cos\alpha.$$
$$y=v_0t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2.$$

從二式中消去t得

$$y=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

或 $$2v_0^2y\cos^2\alpha=2v_0^2x\sin\alpha\cos\alpha-gx^2.$$

表示所經過之路程爲拋物綫.

174. 微係數 曲綫之方程式如爲

$$x=f_1(t),\qquad y=f_2(t).$$

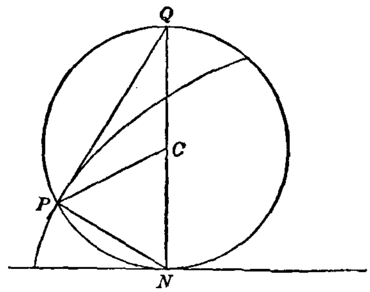
爲可由第九十六節(8)式得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

例　$x=a(\phi-\sin\phi)$,

$y=a(1-\cos\phi)$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\phi}}{\frac{dx}{d\phi}}=\frac{a\sin\phi}{a(1-\cos\phi)}=\cot\frac{\phi}{2}.$$



第一百八十二圖

惟 $\frac{dy}{dx}$ 為切綫與 OX 所夾角之正切.故此角等於 $\frac{\pi}{2}-\frac{\phi}{2}$

由此可得一作擺綫之切綫及法綫最簡便之法.因如延直綫 NC(第一百八十二圖)交圓於 Q 引 PQ 及 PN 二直綫.則 $\angle CQP=\frac{\phi}{2}$.故 PQ 與 OX 成 $\frac{\pi}{2}-\frac{\phi}{2}$ 之角.即為所求之切綫.垂直於 PQ 之直綫 PN 即為其法綫.

如欲求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 可按下法

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}. \tag{2}$$

例.　取前例之擺綫

$$\frac{dy}{dx}=\cot\frac{\phi}{2},$$

$$\frac{dx}{d\phi}=a(1-\cos\phi)=2a\sin^2\frac{\phi}{2}.$$

$$\therefore\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\frac{1}{2}\csc^2\frac{\phi}{2}}{2a\sin^2\frac{\phi}{2}}=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{\phi}{2}}.$$

(2)式復可展為

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}.$$

$$\therefore\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}. \tag{3}$$

以$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$乘第一百零五節方程式(3)可得

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2. \tag{4}$$

175. 軌跡問題之應用 應用通徑表示之原理以求適合某要件之點之軌跡方程式.頗爲便利.因注意所求軌跡中某一點.常可用一單純通徑表示此點之坐標.消去通徑.即爲所求之方程式.

例 1. 拋物綫上互爲垂直之切綫之交點軌跡.

設拋物綫爲$y^2=4px$(第一百八十三圖)任一切綫之方程式爲

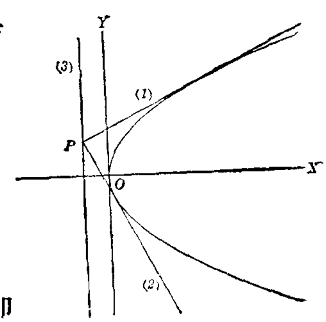
$$y=mx+\frac{p}{m}. \tag{1}$$

如以$-\frac{1}{m}$代m.得垂直於(1)之切綫方程式

$$y=\left(-\frac{1}{m}\right)x+\frac{p}{-\frac{1}{m}}$$

或
$$y=-\frac{x}{m}-pm \tag{2}$$

故如$P(x, y)$爲(1)(2)兩綫之交點.則P即爲所求軌跡上一點.



第一百八十三圖

解(1)與(2)得以通徑m表示所求之軌跡爲

$$x=-p \tag{3}$$

$$y=\frac{p}{m}(1-m^2). \tag{4}$$

惟(3)爲一楷托方程式(*Cartesian equation*).故軌跡上所有之點均在$x=-p$.在此宜注意本題可無須消去通徑.因有一方程式全未含之也.

(3)式爲準綫方程式.故凡拋物綫上互爲垂直之切綫皆相交於準綫.

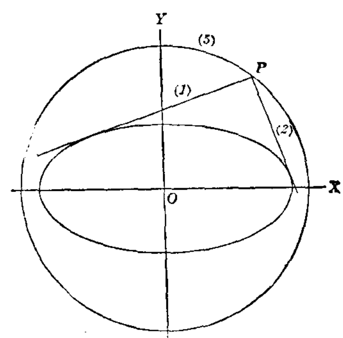
例 2　橢圓上互爲垂直之切綫之交點軌跡.

設橢圓爲$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(第一百八十四圖).任一切綫之方程式爲(第八十八節).

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2} \tag{1}$$

垂直於(1)之切綫方程式爲

$$y=-\frac{x}{m}\pm\sqrt{\frac{a^2}{m^2}+b^2}. \tag{2}$$



第一百八十四圖

(1)與(2)之交點卽爲軌跡上一點.今解(1)(2)兩式求得以通徑m表所求之軌跡爲

$$x=\frac{\pm m\left[\sqrt{\frac{a^2}{m^2}+b^2}-\sqrt{a^2m^2+b^2}\right]}{m^2+1}. \tag{3}$$

$$y=\frac{\pm\left[m^2\sqrt{\frac{a^2}{m^2}+b^2}+\sqrt{a^2m^2+b^2}\right]}{m^2+1}. \tag{4}$$

以x與y各乘成平方相加可消去m.其結果爲

$$x^2+y^2=a^2+b^2. \tag{5}$$

故其軌跡爲一與橢圓同心之圓.而以連結橢圓長短二軸之弦爲半徑.

(3)(4)兩式爲軌跡之陽通徑表示.(1)(2)兩式爲軌跡之陰通徑表示.今可直接由(1)(2)兩式消去通徑.卽取

$$y-mx=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$$

$$my+x=\pm\sqrt{a^2+b^2m^2}.$$

各式自乘後相加.結果爲

$$(1+m^2)(x^2+y^2)=(1+m^2)(a^2+b^2).$$

或 $$(1+m^2)(x^2+y^2-a^2-b^2)=0.$$

因由假設 m 必爲實數.故 $1+m^2$ 必不能爲零.今卽將此因子除去.得前此相同之結果

$$x^2+y^2-a^2-b^2=0.$$

例 3. 由拋物綫之焦點至其任一切綫之垂足軌跡.

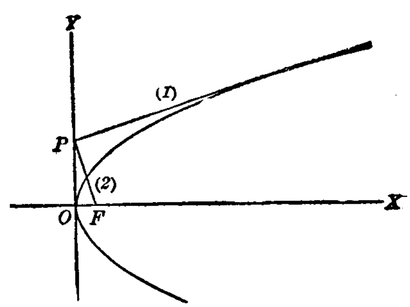
設拋物綫爲$y^2=4px$.(第一百八十五圖).任一切綫爲

$$y=mx+\frac{p}{m} \tag{1}$$

由焦點至此切綫之垂綫爲

$$y=-\frac{1}{m}(x-p) \tag{2}$$

此二式之交點$P(x, y)$卽爲軌跡上一點.



第一百八十五圖

解(1)與(2)得

$$x=0. \tag{3}$$

及

$$y=\frac{p}{m} \tag{4}$$

故軌跡爲$x=0$.卽爲在拋物綫之頂點之切綫.

如卽就其陰通徑表示.可代(2)式m之值於(1)而消去通徑m.其結果爲$x\,[y^2+(p-x)^2]=0$.此式可分爲兩方程式$x=0$及$y^2+(p-x)^2=0$.因第二式僅代表一點.故適合本題所求之方程式爲$x=0$.與前法所得相同.

由此可知自以通徑表示之x與y之方程式中消去通徑.必須留意試驗所得之結果是否尙有外界因子在內.

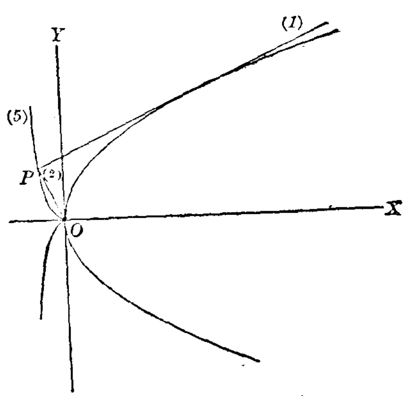
例 4.　自拋物綫之頂點引任一切綫之垂足軌跡.

設拋物綫爲$y^2=4px$.(第一百八十六圖)任一切綫爲

$$y=mx+\frac{p}{m}. \tag{1}$$

自頂點至(1)之垂綫爲

$$y=-\frac{1}{m}x. \tag{2}$$



第一百八十六圖

解(1)與(2)求得軌跡之陽通徑表示爲

$$x=\frac{-p}{m^2+1} \tag{3}$$

$$y=\frac{p}{m(m^2+1)} \tag{4}$$

以(2)式之m代入(1)式可得軌跡之楷托方程式

$$y^2=-\frac{x^3}{p+x}\tag{5}$$

此爲一立於x軸負端之蔓葉綫方程式(第八十三節)

最後兩種軌跡爲垂足曲綫(*Pedal curve* 卽自任一點至一曲綫之切綫之垂足軌跡)之特例.

176. 前節所舉之例爲用一單純通徑以表示某種軌跡.本節則不論其爲陽通徑或陰通徑皆以通徑表示之.惟此二徑幷非完全各自獨立.常有一方程式爲之連絡.故求某種軌跡之楷托方程式.卽可由三方程式中消去兩通徑.

例 1. 自一拋物綫之頂點引任一切綫之垂綫.求此綫與過切點所引縱綫之交點之軌跡.

設$P_1(x_1, y_1)$爲拋物綫$y^2=4px$上任一點(第一百八十七圖).P_1T爲在P_1之切綫.OT爲自頂點O至P_1T之垂綫.則P_1T之方程式爲

$$y_1y=2p(x+x_1)\tag{1}$$

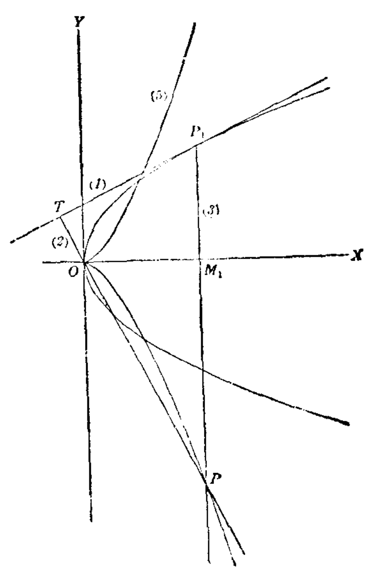
又OT之方程式爲

$$y=-\frac{y_1}{2p}x\tag{2}$$

過P_1之縱綫M_1P_1爲

$$x=x_1,\tag{3}$$

如$P(x, y)$爲(2)與(3)之交點.則P爲軌跡上之一點.(2)與(3)卽爲軌跡之陰通徑表示.而以x_1及y_1爲通徑.又因



第一百八十七圖

$P_1(x_1, y_1)$由假設爲在抛物綫上.其坐標必與抛物綫方程式適合.卽通徑x_1與y_1適合於

$$y_1{}^2=4px_1. \tag{4}$$

解(2)(3)兩式得x_1與y_1代入(4)式得軌跡之楷托方程式

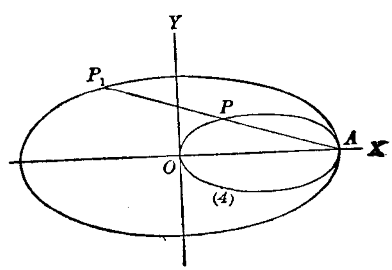
$$y^2=\frac{1}{p}x^3. \tag{5}$$

由此方程式之形式得知軌跡爲一半立方抛物綫.

再則軌跡之陽通徑表示易知爲$x=x_1$及$y=\dfrac{-y_1x_1}{2p}\cdot x_1$與$y_1$之關係爲$y_1{}^2=4px_1$.

例 2.　過橢圓長軸一端所引諸弦之中點之軌跡.

設橢圓爲$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$(第一百八十八圖).$P_1(x_1,\ y_1)$爲橢圓上一點.$AP_1$爲經過$A$之任意弦.其中點$P(x, y)$卽爲所求軌跡上一點.因$A$之坐標爲$(a,\ 0)$.由第十八節



第一百八十八圖

$$x=\frac{x_1+a}{2}. \tag{1}$$

$$y=\frac{y_1}{2} \tag{2}$$

(1)(2)兩式爲所求軌跡之陽通徑表示其通徑爲x_1與y_1.因P_1爲橢圓上一點.其坐標亦必適合於橢圓方程式卽

$$\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}=1. \tag{3}$$

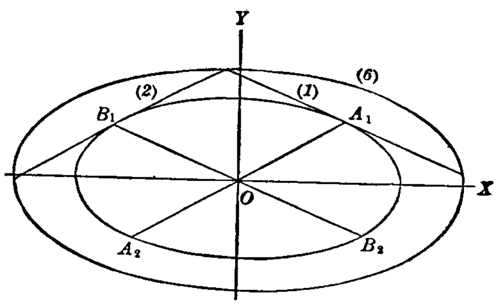
求此軌跡之楷托方程式.可代(1)(2)式中x_1與y_1之值於(3).其結果爲

$$\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1.$$

故軌跡爲一中心在$\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$之橢圓.其半軸各等於$\frac{a}{2}$及$\frac{b}{2}$.

例 3. 過橢圓共軛直徑端點之切綫之交點軌跡.

設橢圓爲$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(第一百八十九圖).$OA_1$及$OB_1$爲其共軛直徑.令$A_1$爲$(x_1, y_1)$則$B_1$由第一百四十六節例2卽爲$\left(-\frac{ay_1}{b},\ \frac{bx_1}{a}\right)$.在$A_1$與$B_1$之切綫爲



第一百八十九圖

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1. \tag{1}$$

及
$$\frac{-y_1x}{ab}+\frac{x_1y}{ab}=1. \tag{2}$$

而
$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1. \tag{3}$$

解(1)與(2)求得軌跡之陽通徑表示爲

$$x=\frac{bx_1-ay_1}{b}. \tag{4}$$

$$y=\frac{bx_1+ay_1}{a}. \tag{5}$$

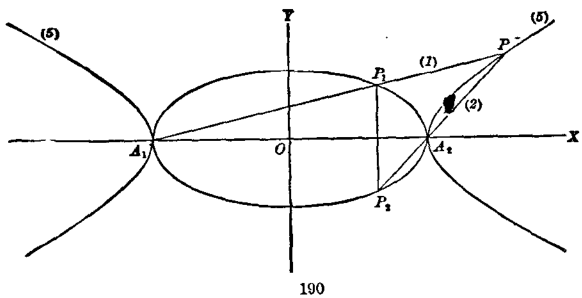
如將(4)(5)兩式書爲$bx=bx_1-ay_1$及$ay=bx_1+ay_1$.自乘後相加得

$$b^2x^2+a^2y^2=2(b^2x_1^2+a^2y_1^2)$$

或由(3)式
$$b^2x^2+a^2y^2=2a^2b^2. \tag{6}$$

(6)式可書爲$\frac{x^2}{(a\sqrt{2})^2}+\frac{y^2}{(b\sqrt{2})^2}=1$. 表示所求之軌跡爲一橢圓.與已知之橢圓同心而以$a\sqrt{2}$及$b\sqrt{2}$爲半軸.

例 4. P_1P_2爲垂直於一橢圓長軸A_1A_2之任意弦.求A_1P_1與A_2P_2之交點軌跡.



第一百九十圖

設橢圓爲$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.(第一百九十圖)$P_1$與$P_2$之坐標爲$(x_1, y_1)$及$(x_1, -y_1)$.則$A_1P_1$及$A_2P_2$之方程式爲

$$y=\frac{y_1}{x_1+a}(x+a) \tag{1}$$

及
$$y=\frac{y_1}{a-x_1}(x-a). \tag{2}$$

此卽爲軌跡之陰通徑表式示.通徑x_1與y_1適合於方程式

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1. \tag{3}$$

取(1)(2)兩式之積得

$$y^2=\frac{y_1^2}{a^2-x_1^2}(x^2-a^2). \tag{4}$$

因(3)式之關係可書(4)式爲

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2). \tag{5}$$

(5)式卽雙曲綫 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. 故所求之軌跡爲一與已知橢圓同心同半軸之雙曲綫.

問　題

1. 試證 $x=pt^2, y=2pt$ 爲拋物綫之通徑方程式.

2. 用問題1之拋物綫方程式求其切綫及法綫.

3. 如以一經過拋物綫頂點之直綫之斜度爲通徑.求此拋物綫之通徑方程式.

4. 用問題3之拋物綫方程式求其法綫及切綫.

5. 如以一經過橢圓中心之直綫之斜度爲通徑.求此橢圓之通徑方程式.

6. 如以一經過橢圓左端頂點之直綫之斜度爲通徑.求此橢圓之通徑方程式.

7. 如以第九十一圖 AOP 角爲通徑.求蔓葉綫之通徑方程式.

8. 試證 $x=t,\ y=\frac{a^3}{a^2+t^2}$ 爲維尺曲綫之通徑方程式.

9. 試證 $x=\frac{2a}{1+t^2},\ y=\frac{2a}{t(1+t^2)}$ 爲蔓葉綫之通徑方程式.且問 t 之幾何意義如何.

10. 用問題9之方程式.求蔓葉綫之切綫方程式.

求以下各題之楷托方程式

11. $x=\frac{a}{2}\cdot\frac{t^2+2}{t^2+1}$, $y=\frac{a}{2}\cdot\frac{t^3+2t}{t^2+1}$.

12. $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$.

13. $x=a+\frac{k^2}{a(1+t^2)}$, $y=at+\frac{k^2t}{a(1+t^2)}$.

14. $x=\frac{1+2t}{1-t^2}$, $y=\frac{1+t}{1-t}$.

15. $x=\frac{t+1}{t-1}$, $y=\frac{2t}{t^3-1}$.

16. $x=\frac{e^t+e^{-t}}{(e^t-2e^{-t})^2}$, $y=\frac{e^t-e^{-t}}{(e^t-2e^{-t})^2}$.

17. $x=t^2+3t+2$, $y=t^2-1$.

18. $x=\frac{ct}{(a+bt)(1+t^2)}$, $y=\frac{ct^2}{(a+bt)(1+t^2)}$.

19. 從下式消去t.且求證其代表一對數螺綫.(第一百七十八節).

$$\frac{x}{a}=\frac{\cos t-\sin t}{e^t},\qquad \frac{y}{a}=\frac{\cos t+\sin t}{e^t}.$$

20. 半徑爲a之圓其中心爲O.A爲圓上一定點.B爲圓上一動點.如在A之切綫與在B之切綫相交於C.而P爲BC之中點.試以AOB角爲通徑.OA爲x軸.O爲原點.求P之軌跡之通徑方程式及楷托方程式.

21. $OBCD$爲一矩形.$OB=a$而$BC=c$.自C引任一直綫會OB於E.完成三角形EPO.且使CEP及EPO均爲直角試以DOP角

爲通徑. OB 爲 x 軸. O 爲原點. 求 P 之軌跡之通徑方程式及楷托方程式.

22. AB 爲一定直綫, O 爲一定點. 其至 AB 之距離爲 a. 今於經過定點 O 且交 AB 於 M 之任意直綫上取一點 P. 令 $OM \cdot MP = k^2$. k 爲任一常數. 試以 O 爲原點. 自 O 至 AB 之垂綫爲 x 軸. OX 與 OP 之夾角爲通徑. 求 P 之軌跡之通徑方程式及楷托方程式.

23. A 與 B 爲 y 軸上兩點. 其至原點之距離爲 $-a$ 及 $+a$. AH 爲經過 A 之任意直綫. 交 x 軸於 H. BK 爲自 B 至 AH 之垂綫交 AH 於 K. 自 K 引一直綫與 x 軸平行. 自 H 引一直綫與 y 軸平行. 此二綫相交於 P. 試以 BAK 角爲通徑. 求 P 之軌跡之通徑方程式及楷托方程式.

24. 設 OA 爲一定圓之直徑. 而 LK 爲在 A 之切綫 自 O 引任一直綫交圓於 B. 交 LK 於 C. 令 P 爲 BC 之中點. 試以 AOP 角爲通徑. OA 爲 y 軸. O 爲原點. 求 P 之軌跡之通徑方程式及楷托方程式.

25. 試證至橢圓上任一點之切綫與至其輔助圓上相當點(即同橫坐標之點)之切綫交長軸於同一之點.

26. 求證在橢圓二共軛直徑之端點之二離心角之差爲 $\frac{\pi}{2}$

27. 試證自橢圓之焦點至其輔助圓上任一點之切綫之垂綫等於橢圓上相當點之焦點距離.

28. Q 爲橢圓之輔助圓上一點. P 爲橢圓上相當之點. 過 P 與 OQ 平行之直綫交 OX 於 L. OY 於 M. 證 $PL = b$ 及 $PM = a$.

29. 求以橢圓上任意一點之離心角表在該點之切綫方程式.

30. 問鎗彈所射及之水平距離最大時.鎗與水平綫之交角如何.(問題30至33凡重力以外之力及空氣之抵抗皆不列入計算)

31. 經過鎗口作一斜綫.與水平綫成 β 角.問鎗彈射及此綫之距離最大時鎗與水平綫之交角.

32. 欲求鎗彈射及水平綫上至鎗口之距離爲 b 之處.問鎗與水平綫之交角當如何.

33. 置鎗於高出水面 h 之岸上.欲求鎗彈射及水面上與口之距離爲 b 之處.問鎗與水平綫之交角當如何.

34. 求汽機之連通竿(*Connecting rod*)上任一點經過曲綫之通徑方程式.

35. 如一動圓在一定圓之內面迴轉.定圓之半徑爲動圓半徑之二倍.問動圓圓周上任一點所經過曲綫之形式如何.

36. 試證動圓半徑爲定圓半徑四分之一之內擺綫其楷托方程式爲 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

37. 如有一輪以不變之角速度在一直綫上迴轉.求其圓周上任一點及輻上任一點之速度

38. 一輪以不變之角速度在一同定圓周上迴轉.求圓周上及輻上任一點之速度.

39. 一輪以不變之角速度在路上行駛.試證輪上最高點之速度二倍於輪邊上距地面爲半徑二分之一處之點之速度.

40. 繞於圓周上之繩.以不變之角速度漸次解放.求繩端在途中之速度.

41. AB及 CD 爲一半徑等於R之圓之兩垂直直徑.圓之一弦AM係以A爲樞紐而旋轉,且使 BAM 角之變動爲常數.設將AM延長至N.使$MN=MB$弦.求N經過之路程.及N在途中之速度.及平行於AB與CD之分速度.

42. O, O', O''爲一直綫上三點.$O''O'=\frac{1}{3}OO'$.LK爲自O所引OO''之垂綫.今於LK上取一點M.自M引一直綫垂直於$O''M$.復自O引一直綫平行於$O''M$.此二綫相交於P.求P之軌跡.

43. O為一定點.LK爲一定直綫.今於LK上取任一點M.連結OM延長之至P.使$OM \cdot OP=k^2$.k爲一常數.求P之軌跡.

44. 試證對於拋物綫諸切綫與頂點爲對稱之點之軌跡爲蔓葉綫.

「註」即以切綫爲對稱之軸而求與頂點對稱之點之軌跡.

45. 設OA爲任意一圓之直徑.LK爲在A之切綫.過O引任意直綫交圓於D.交LK於E.延長OE取$EP=OD$.求P之軌跡.

46. 設有一中心爲O之圓.交y軸於A交x軸於C.今於圓上取二點G及E與A爲等距離.如過G之縱綫交CE於P.試證P之軌跡爲一蔓葉綫.

47. 取距x軸之距離爲a之一點O.自O引無數直綫至OX.而從各直綫與OX之交點各引一綫與始綫成直角.且與其長相等.求此直交綫之端點之軌跡.

48. OA 爲一圓之直徑. LK 爲在 A 之切線. 自 O 引任意直綫交圓於 B. 交 LK 於 C. 自 B 引一直綫垂直於 OA. 與之相交於 M. 最後延長 MB 至 P. 使 $MP=AC$. 求 P 之軌跡.

49. 將一切綫繞圓周而迴轉.求切綫上任一點所經過之軌跡.

50. CD 爲垂直於 OX 之直綫.由 O 至 CD 之距離爲 a. 自 CD 上任一點 A 引直綫 OA. 再自 A 引 OA 之垂綫交 OX 於 B. 復自 B 引直綫平行於 OY. 與 OA 相交於 P. 如以 m 爲 OA 之斜度.求 P 之軌跡之通徑方程式及楷托方程式.

51. 求證任一點對於拋物綫之垂足曲綫爲經過該點之三次曲綫.

52. 求證中心對於橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 之垂足曲綫爲 $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$.

53. 一直綫之長等於常數 k. 其兩端點爲在二坐標軸上運動.求此直綫任一點所經過之軌跡.

54. 經過一定點之直綫.其兩端爲在二坐標軸上運動.求此直綫之中點所經過之軌跡.

55. 如將雙曲綫之縱綫 NP 延長至 Q. 使 $NQ=FP$.求 Q 之軌跡.

56. 求在橢圓及其輔助圓相當點之法綫之交點軌跡.

57. P 爲拋物綫上任一點.今自頂點 A 引一直綫垂直於在 P 之切綫.求此綫與過 P 之直徑之交點軌跡.及此綫與過 P 之縱綫之交點軌跡.

58. 二相等之拋物綫其軸互爲平行且於頂點有一共通切綫.今作若干平行於軸之直綫.試證此等直綫交於二拋物綫間之綫分之中點軌跡亦爲一相等拋物綫.

59. 在橢圓上任一點作切綫.求自中心所引此切綫之垂綫.與過此點之縱綫或其延長綫之交點軌跡.

60. 有立於同軸上之兩拋物綫.今自第一拋物綫任一點引第二拋物綫之切綫.求證第一拋物綫.所有平行於此切綫之諸弦被夾於兩拋物綫間之綫分之中點軌跡亦爲一拋物綫.

61. 橢圓之諸弦均經過一定點.求諸弦中點之軌跡.

62. 自橢圓上任一點P引直綫至兩頂點A, A'.復自A與A'各引AP及$A'P$之垂綫.試證此垂綫之交點之軌跡爲一橢圓.

63. 取一拋物綫上任二點令其縱坐標之比爲常數.自此二點各引切綫.試證此二切綫之交點之軌跡爲一拋物綫.

64. 如拋物綫$y^2=4px$之切綫與軸相交於T.與過頂點A之切綫相交於B.今完成一矩形$TABQ$.試證Q之軌跡爲一拋物綫$y^2+px=0$.

65. 求自拋物綫$y^2=4px$之焦點垂直於其法綫之垂足軌跡.

66. 試證拋物綫$y^2=4px$互爲垂直之法綫相交於曲綫$y^2=px-3p^2$.

67. 求雙曲綫上每一雙互爲垂直之切綫之交點軌跡.

68. 作一橢圓之兩切綫.令其斜度之乘積爲常數.試證當此乘積爲負時.則切綫交點之軌跡.爲一橢圓.當此乘積爲正時.則此軌跡爲一雙曲綫.

69. 求證拋物綫上兩切綫當其斜度之乘積爲常數時此二切綫交點之軌跡爲一直綫.

70. 求自雙曲綫任一焦點至其任一切綫之垂足軌跡.

71. 設 AB 爲一圓之直徑. O 爲其中心. 今自圓上任一點 Q 引縱綫 NQ. P 爲圓上他一點. 其對於 Q 之關係爲當 OP 自 OA 以等速率運動經過一直角. 同時 QN 亦以等速率自 A 移動以至於 O. 如 OP 與 NQ 相交於 R. 求 R 之軌跡.

72. 以擺綫上最高點之切綫爲 x 軸. 過其頂點之法綫爲 y 軸. 達於最高點時半徑所經之角爲 θ. 求此擺綫之方程式.

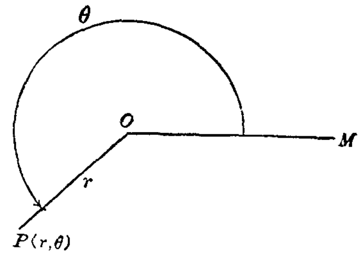
73. 求證擺綫在 x 軸上一弓形之面積爲其動圓面積之三倍.

74. 在上題之擺綫. 求證 $\frac{ds}{d\phi}=2a\sin\frac{\phi}{2}$. 且由此求曲綫在每兩歧點間之長.

75. 若爲外擺綫. 求證 $\frac{ds}{d\phi}=2(a+b)\sin\frac{b\phi}{2a}$. 且由此以求曲綫在每兩歧點間之長.

第十五章　極坐標

177.　坐標系統　在一平面上某點之位置.前以兩距離 x 及 y 定之.今亦可以一距離及一方向求之如下.



第一百九十一圖

設以定點 O（第一百九十一圖）爲原點或極.定直綫 OM 爲始綫.(*Initial line*) 取同平面上任一點 P. 引 OP 令其長爲 r. MOP 角爲 θ. 則 r 與 θ 卽名爲 $P(r, \theta)$ 之極坐標(*Polar Coordinates*).當此二值爲已知時.點卽已完全決定.

例如求定一點$(2,15°)$之位置.可作角 $MOP=15°$. 再取 $OP=2$.

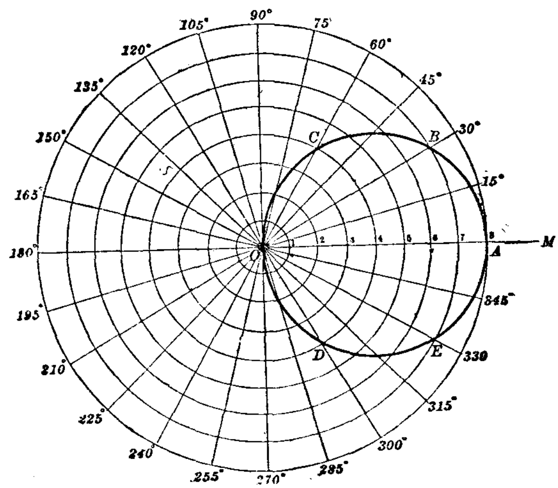
OP 或 r 名爲 P 之動徑.(*Radius vector*) θ 名爲 P 之動角.(*Vectorial angle*) 此二量可任爲正負.凡 θ 之負值.爲取時鐘之方向.正值爲取時鐘相反之方向.旣作成 θ 角以後.r 之正值可自 O 沿終綫 (*Terminal line*) 量取之.其負值則自 O 沿終綫之延長以相反之方向量取之.由此可知凡一點可不限於一雙坐標.例如$(2, 195°)$ $(2, -165°)$ $(-2, 15°)$,$(-2, -345°)$卽表示相同之一點.惟於實用上常限 θ 爲正.

作極坐標之圖形當用第一百九十二圖及一百九十三圖之極坐標紙.θ 角已標明於諸直綫之端點.r 之值可自 O 在諸同圓心上按照 r 之值爲正或負,而向標明該 θ 角之直線之方向或相反之方向量取之.

求極方程式(卽以極坐標表示之方程式)之圖形.可令θ爲適宜之值以計算相當之r而定若干之點.再作一曲綫經過之.

例 1.　$r=a\cos\theta$.

a爲常數.可令之等於任一適宜之值.再於三角表中.求得相當於θ任一值之餘弦.以定r.作諸點.相當於自$0°$至$90°$之θ之值.得圓弧$ABCO$.(第一百九十二圖)自$90°$至$180°$之θ之值得圓弧$ODEA$.自$180°$至$270°$之θ之值仍得圓弧$ABCO$.自$270°$至$360°$之θ之值仍得圓弧$ODEA$.設取θ大於$360°$之值.所得之點.必與已作成之圖形重合.可不待論此曲綫爲一圓(參看第一百八十四節).

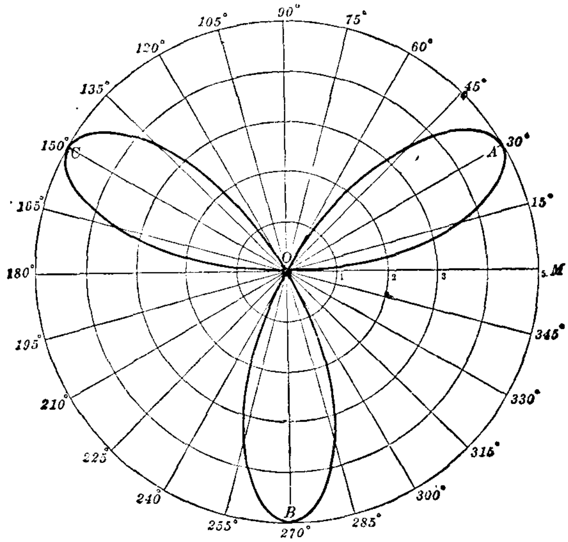


第一百九十二圖

例 2.　$r=a\sin 3\theta$.

當θ自$0°$漸增以至於$30°$, r自0漸增至a.當θ自$30°$漸增至$60°$, r自a漸減至0. $P(r, \theta)$點卽經跡一環形(*Loop*) OAO.(第一百

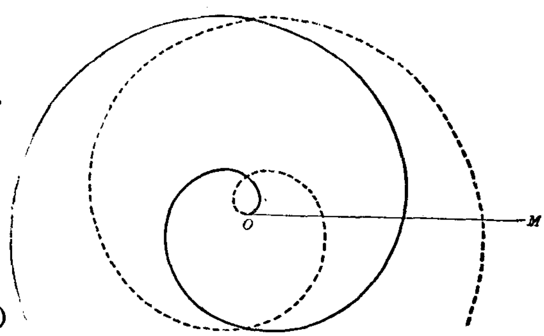
九十三圖)當 θ 自 60° 增至 90°. r 為負值由 0 漸減至 $-a$. 當 θ 自 90° 至 120° r 自 $-a$ 漸增至 0. $P(r,\theta)$ 點即經跡他一環形 OBO. 當 θ 自 120°.增至 180°. $P(r,\theta)$ 經跡第三環形 OCO. 如取 θ 之值大於 180°.所得之點仍在已成之三環形上.其理為 $\sin 3(180^\circ+\theta)=-\sin 3\theta$. 又因 $\sin 3(60^\circ+\theta)=-3\sin 3\theta$. 故此三環形均可重合.此曲綫名為三葉玫瑰綫(*Rose of thre leaves*).



第一百九十三圖

178. 螺線(*Spirals*)

極坐標最重要之應用.為以之表數種螺綫.今擇要述之如次.



第一百九十四

例 1. 亞基默德螺綫 (*The spiral of Archimedes*)

$$r=a\theta$$

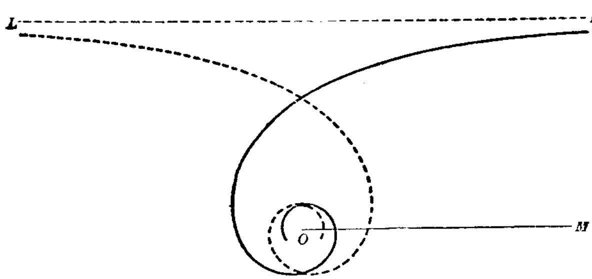
作此曲綫宜以弧度表示θ之值.當$\theta=0$.時$r=0$. θ如漸增.r亦漸增.此曲綫漸離原點而圍繞之至於無數次（第一百九十四圖).圖上實綫爲代表螺綫相當於θ爲正值之部分.虛綫爲代表螺綫相當於θ爲負值之部分.

例 2.　雙曲螺綫(*Hyperbolic Spiral*)

$$r\,\theta=a,$$

或

$$r=\frac{a}{\theta}.$$



第一百九十五圖

當θ漸增至於無限.r漸近於零.故曲綫漸次接近於原點.然決不能實達於原點(第一百九十五圖).如θ爲達於零.r卽漸增以至於無限.今設P爲曲綫上任一點NP爲始綫之垂綫.則

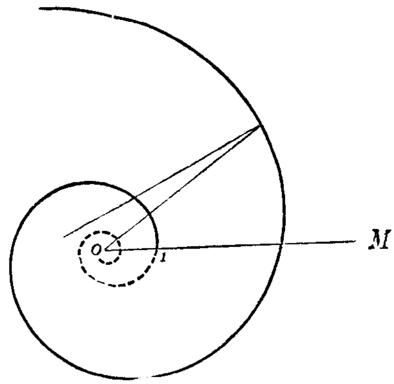
$$NP=r\sin\theta=a\frac{\sin\theta}{\theta}.$$

故如θ達於零爲極限時.NP當達於a.(第一百五十一節)平行於OX而其距離爲a之直綫LK.卽爲曲綫之一漸近綫.圖上虛綫爲相當於θ之負值之部分.

例 3.　對數螺綫(*Logarithmic Spiral*)

$$r=e^{a\theta}.$$

當 $\theta=0$, $r=1$. θ 漸增, r 亦漸增. 曲綫為以漸增之距離.圍繞原點. 當 θ 為負值增至於無限時. r 漸近於零.故曲綫圍繞原點無數次而漸近於原點.圖上虛綫相當於 θ 之負值(第一百九十六圖).

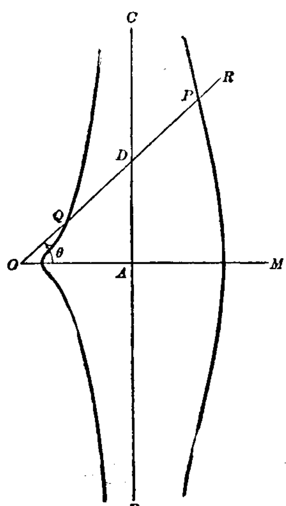


第一百九十六圖

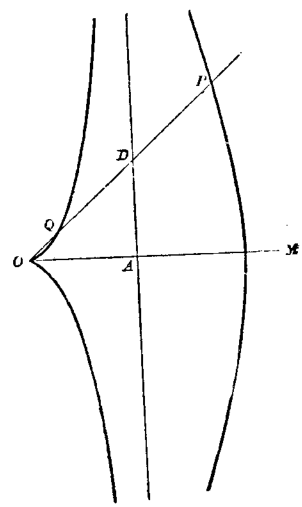
對數螺綫與動徑相交於一常角.學者習第一百八十七節後可證明之.

今舉例數述明由一曲綫之定義.以推求該曲綫之極方程式.

179.　康可曲線(*Conchoid*) 取一定點 O. (第一百九十七圖)及一定直綫 BC. 自 O 引任意直綫 OR 交 BC 於 D. 再於 OR



第一百九十七圖



第一百九十八圖

自D向各端取一常距離DP或DQ.則P與Q之軌跡卽名爲「康可」曲綫.

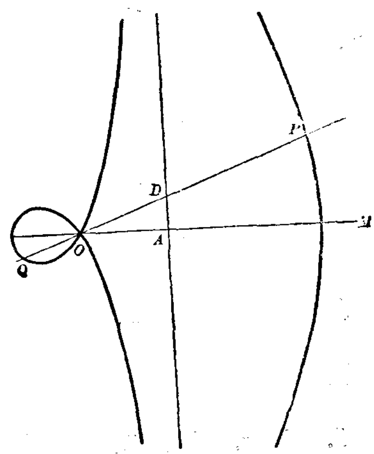
由定義得知康可曲綫凡含兩部.一爲P之軌跡.一爲Q之軌跡.惟今可令直綫OR以其正方向迴轉360度.自D向AOR角之終綫上常取一定距離b.則當AOR爲在第一象限.可得P所經過之曲綫上半部.當AOR爲在第二象限.可得Q所經過之曲綫下半部.當AOR爲在第三象限.可得Q所經過之曲綫上半部當AOR爲在第四象限.可得P所經過曲綫下半部.由此可作成全圖.

欲求其極方程式.可取O爲原點.令垂直於BC之直綫OA爲始綫.令$OA=a$.常距離$DP=b$.

令坐標P爲(r, θ).$\theta=\angle AOR$.當θ爲在第一或第四象限時.$r=OD+DP=OD+b$.當θ爲在第二及第三象限時.$r=-OD+DQ=-OD+b$.惟當θ在第一及第四象限時$OD=a\sec\theta$.當θ爲在第二及第三象限時.$OD=-a\sec\theta$.故在「康可」曲綫上所有之點.均爲

$$r=a\sec\theta+b.$$

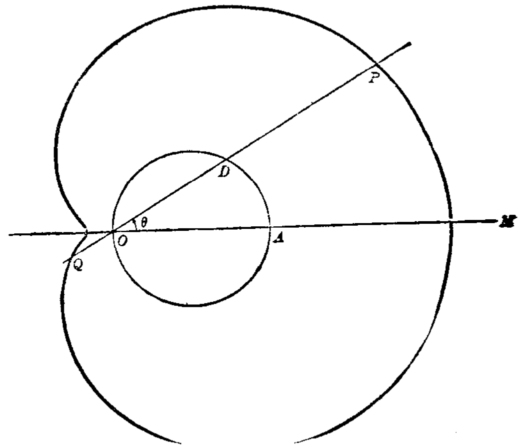
「康可」曲綫按照$a>b$,(第一百九十七圖)$a=b$(第一百九十八圖)$a<b$,(第一百九十九圖)而有三種形式.如$b=0$.則康可曲綫成爲一直綫BC.其方程式爲$r=a\sec\theta$.(第一百八十三節).



第一百九十九圖

180. **蝸線**(*Limaçon*)　自一定圓周上一點 O.(第二百圖)引任一直綫截圓於 D. 自 D 向直綫各端各取一常距離 DP 及 DQ. 則 P 與 Q 之軌跡名爲蝸綫.

取 O 爲極.直徑 OA 爲始綫. OA 之長等於 a. 常距離等於 b. 今令 OD 迴轉 $360°$ 而常在 AOD 之終綫上取 $DP=b$. 卽可求得軌跡之全形.



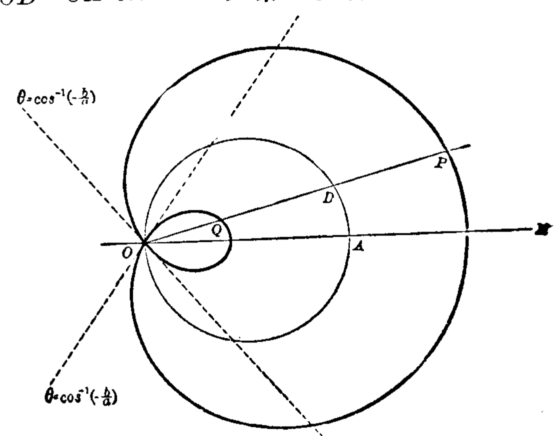
第二百圖

設 $\theta=AOD$. P 之坐標爲 (r, θ). 當 θ 在第一及第四象限時. $r=OD+DP$. 當 θ 在第二及第三象限時. $r=-OD+DP$. 惟由圖形可知當 θ 在第一及第四象限時. 則 $OD=OA\ \cos A$. θ 在第二及第三象限時則 $OD=-OA\ \cos\theta$. 故蝸綫上所有之點.均爲

$$r=a\cos\theta+b.$$

曲綫之形式有三種區別.

1. $b>a$. r 常爲正曲綫如第二百圖.



第二百零一圖

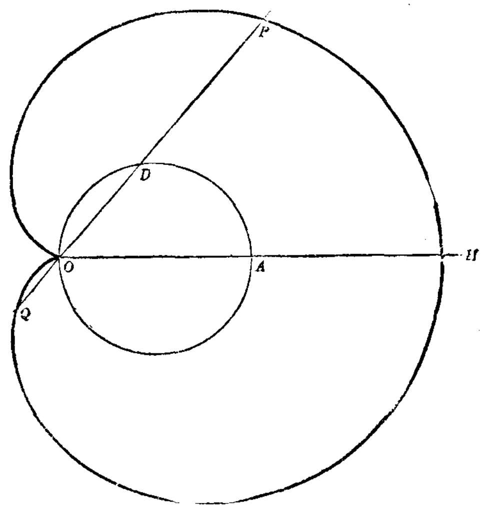
2. $b<a$. r 當 $\cos\theta>-\dfrac{b}{a}$ 時爲正.當 $\cos\theta<-\dfrac{b}{a}$ 時爲負.曲綫如第二百零一圖.

3. $b=a$. 方程式成爲

$$r=a(\cos\theta+1)=2a\cos^2\frac{\theta}{2}$$

r 除當 $\theta=180^\circ$ 時爲零外.餘均爲正.曲綫如第二百零二圖.其特殊之名稱爲心臟曲綫(*Cardioid*).

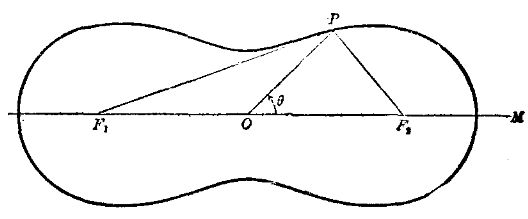
心臟曲綫爲當定圓與動圓半徑相等時之外擺綫.學者可自證之.



第二百零二圖

181. 卡新黎卵狀曲線(*The Ovals of Cassini*) 當一動點至兩定點之距離之乘積爲常數時.此動點之軌跡名爲卡新黎卵狀曲綫.

設 F_1 與 F_2 (第二百零三圖) 爲二定點.名爲焦點. b^2 爲曲綫上任一點至 F_1 及 F_2 之距離之乘積.取 F_1F_2 爲始綫. $F_1.F_2$ 之中點 O 爲極.P 爲曲綫任一點.則由定義



第二百零三圖

$$F_1P\cdot F_2P=b^2. \qquad (1)$$

由三角法得

$$\overline{F_1P}^2=\overline{OP}^2+\overline{OF_1}^2-2OP\cdot OF_1\cos F_1OP=r^2+a^2+2ra\cos\theta$$

其中(r,θ)爲P之坐標. $2a=F_1F_2$, 又

$$\overline{F_2P}^2=\overline{OP}^2+\overline{OF_2}^2-2OP\cdot OF_2\cos F_2OP=r^2+a^2-2ra\cos\theta$$

代入(1)式爲

$$(r^2+a^2)^2-4a^2r^2\cos^2=b^4,$$

$$r^4-2a^2r^2\cos 2\theta+a^4-b^4=0. \tag{2}$$

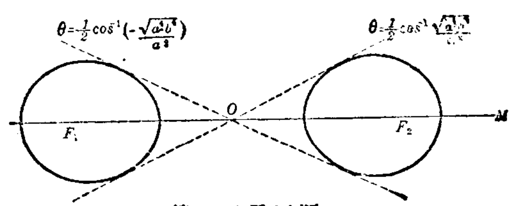
欲定曲綫之形式須解(2)式得

$$r^2=a^2\cos 2\theta\pm\sqrt{a^4\cos^2 2\theta-(a^4-b^4)} \tag{3}$$

由此發生三種情形.

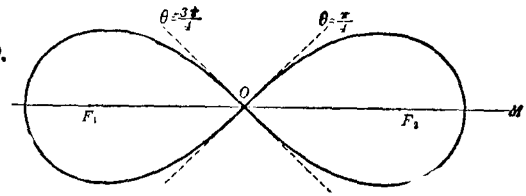
1. $a^2<b^2$.不論θ爲何值.(3)式根號下之量常爲正且大於$a^4\cos^2 2\theta$.故(3)式r^2有正負二值.因之r惟有二相等且異符號之實值.此曲綫爲一對於原點爲對稱之卵狀曲綫(第二百零三圖).

2. $a^2>b^2$.當$\cos^2 2\theta>\dfrac{a^4-b^4}{a^4}$時.(3)式根號下之量爲正且小於$a^4\cos^2 2\theta$.故對於$\theta$在此時之諸值.$r^2$常有二正值.而$r$有正負各二值.當$\cos^2 2\theta<\dfrac{a^4-b^4}{a^4}$時.(3)式根號下之量爲負.故$r$均爲虛值.當$\cos^2 2\theta=\dfrac{a^4-b^4}{a^4}$時.則$r=\pm\dfrac{\sqrt{a^4-b^4}}{a}$爲二實值.所得曲綫爲二分離卵狀(第二百零四圖).



第二百零四圖

3. $a^2=b^2$ 分解方程式(2)爲 $r^2=0$. 及 $r^2-2a^2cos 2\theta=0$. 惟 $r^2=0$ 僅代表一原點.而此點亦在第二方程式所表曲綫上.故

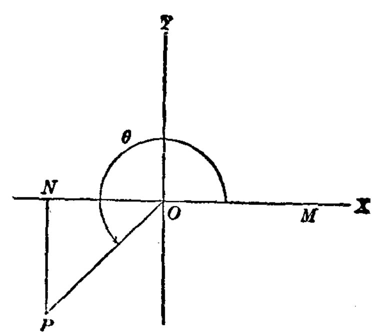


第二百零五圖

$$r^2=2a^2ocs2\theta \qquad (4)$$

卽爲此軌跡之方程式.且由(4)可知當 $O<\theta<\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4}$ 或 $\frac{7\pi}{4}<\theta<2\pi$ 時. r 有二相等且異符號之實根.再則當 $\theta=\frac{\pi}{4}$ $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, 或 $\frac{7\pi}{4}$ 時. $r=0$. 而當 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{5\pi}{4}<\theta<\frac{7\pi}{4}$ 時. r 爲虛數.此曲綫之特殊名稱爲雙紐綫 (*Lemniscate*) (第二百零五圖).

182. **直角坐標與極坐標之關係** 設一極坐標系統之極 O 及始綫 OM, 卽爲他一直角坐標系統之原點及 x 軸.令 P 爲在同平面上任一點(第二百零六圖).其直角坐標爲 (x, y). 極坐標爲 (r, θ) 則由三角函數之定義.



第二百零六圖

$$cos\ \theta=\frac{x}{r}, \qquad sin\ \theta=\frac{y}{r}.$$

故在彼方面爲

$$x=r\ cos\ \theta,$$

$$y=r\ sin\ \theta, \qquad (1)$$

而在他方面爲

$$r=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}},\qquad(2)$$

$$\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

應用(1)式.可由直角坐標變爲極坐標.應用(2)式.可由極坐標變爲直角坐標.其例如次.

例 1. 蔓葉綫之方程式(第八十三節)爲

$$y^2=\frac{x^3}{2a-x},$$

以(1)式代入後再簡單之.得其極方程式爲

$$r=\frac{2a\sin^2\theta}{\cos\theta}.$$

例 1. 雙紐綫之極方程式爲

$$r^2=2a^2\cos 2\theta,$$

令 $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ 以(2)代入之得其直角方程式爲

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2).$$

183. 直線 設直綫之方程式爲 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$. 以前節(2)式代入之結果得

$$r(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)-p=0,$$

即
$$r\cos(\theta-\alpha)=p.$$

參看第三十三節可明 $(p,\ \alpha)$ 爲自原點至直綫所引法綫與該直綫交點之極坐標.設 $2=0$ 而 $p=a$. 可得一特殊方程式

$$r\cos\theta=a,$$

或 $$r=a\sec\theta.$$

與第一百七十九節所述相同.

直綫如經過原點則$p=0$. 方程式成爲

$$\cos(\theta-\alpha)=0,$$

或 $$\theta=\frac{\pi}{2}+\alpha$$

卽 $$\theta=c.$$

184. 圓 設(d, e)爲圓之中心之直角坐標. a爲圓之半徑. 圓之方程式爲

$$(x-d)^2+(y-e)^2=a^2.$$

今設再有一極坐標系統. 其極與始綫卽爲直角坐標之原點及x軸. 圓之中心之極坐標爲(b, α). 圓上任一點之極坐標爲(r, θ). 則由第一百八十二節範式(1)

$$x=r\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta.$$

$$d=b\cos\alpha, \qquad e=b\sin\alpha.$$

以之代入式可得

$$r^2-2rb(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)+b^2-a^2=0,$$

或 $$r^2-2rb\cos(\theta-\alpha)+b^2-a^2=0. \tag{1}$$

以上之結果觀第二百零七圖亦可由

$$\overline{CP}^2=\overline{OC}^2+\overline{OP}^2-2OP\cdot OC\cos POC.$$

之關係而求得.

當原點在圓之中心, 則$b=0$, 而(1)式成爲

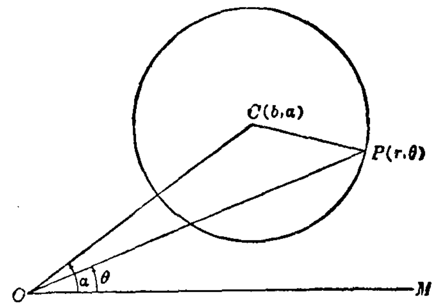
$$r=a. \qquad (2)$$

當原點爲在圓上.則 $b=a$ 而(1)式成爲

$$r-2a\cos(\theta-\alpha)=0.$$

或 $$r=a_0\cos\theta+a_1\sin\theta \qquad (3)$$

此式之 a_0 與 a_1 爲在 $\theta=0$ 及 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 兩綫上之截部.



第二百零七圖

當原點爲在圓上且以始綫爲直徑.則(3)式成爲

$$r=a_0\cos\theta. \qquad (4)$$

當原點在圓上而以始綫爲切綫.則(3)式成爲

$$r=a_1\sin\theta. \qquad (5)$$

185. 以焦點爲極之圓錐曲線 設以 x 軸爲圓錐曲綫之軸. y 軸爲其準綫.得圓錐曲綫之方程式爲(參看第八十一節)

$$(x-c)^2+y^2=e^2x^2.$$

今設 $$x=c+x', \qquad y=y'.$$

而將原點移至焦點. x 軸仍無變更.以上之方程式卽爲

$$x'^2+y'^2=e^2(x'+c)^2.$$

今復取一極坐標系統.卽以焦點爲極.而以圓錐曲綫之軸爲始綫.可得

$$x'=r\cos\theta, \qquad y'=r\sin\theta.$$

代入上式爲

$$r^2=e^2(r\cos\theta+c)^2.$$

卽
$$r=\frac{ce}{1-e\cos\theta},$$

或
$$r=-\frac{ce}{1+e\cos\theta}.$$

以上二式中任一式皆可代表圓錐曲綫之全體.證明可就第二方程式令 $\theta=\theta_1$ 卽得

$$r_1=\frac{-ec}{1+e\cos\theta}.$$

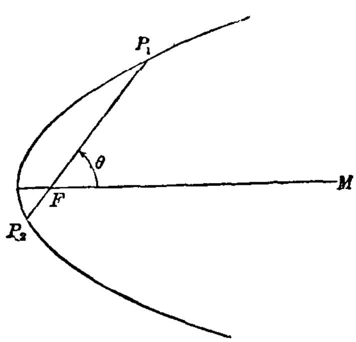
今於第一方程式.令 $\theta=\pi+\theta_1$. 可得 $r=-r_1$. 惟 (θ_1, r_1) 及 $(\pi+\theta_1, -r_1)$ 卽爲同一之點.可知任意一點如能在第二方程式中求得.亦必能在第一方程式中求得.故所求之極方程式卽爲

$$r=\frac{ce}{1-e\cos\theta}.$$

186. 例題　應用極坐標以解問題.述明如次.

例 1. 求證經過圓錐曲綫之焦點引一割綫.其被焦點所分之二分反商之和爲常數.

設 P_1P_2 爲經過焦點之任一割綫.(第二百零八圖)令 $FP_1=r_1$, $FP_2=r_2$, $MFP=\theta$, P_1 之坐標爲 $(r_1\ \theta)$, P_2 之坐標爲 $(r_2,\ \pi+\theta)$. 由圓錐曲綫之極方程式.得



第二百零八圖

$$r_1=\frac{ce}{1-e\cos\theta},$$

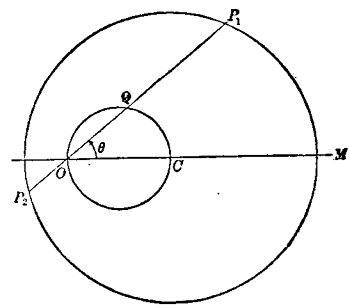
$$r_2=\frac{ce}{1-e\cos(\pi+\theta)}=\frac{ce}{1+e\cos\theta}.$$

故 $$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{2}{ce}.$$

例 2. 一圓之羣弦均經過一定點.求其中點之軌跡.

定圓之中心爲 C(第二百零九圖)定點 O 爲在其同平面上.今卽取 O 爲極.OC 爲始綫.圓之方程式爲

$$r^2-2rb\cos\theta+b^2-a^2=0. \qquad (1)$$



第二百零九圖

設 P_1P_2 爲過 O 之任一弦. $OP_1=r_1$, $OP_2=r_2$. 則 r_1 及 r_2 爲(1)式相當於 θ 爲同值之二根.卽

$$r_1+r_2=2b\cos\theta.$$

今令 Q 爲 P_1P_2 之中點而 $OQ=r$. 可得

$$r=\frac{r_1+r_2}{2}=b\cos\theta.$$

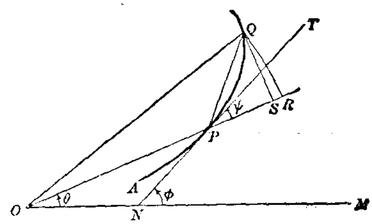
卽所求之軌跡爲一經過 O 與 C 之圓.

187. 曲線之方向 以極坐標表示之曲綫.其方向常以在其切綫與動徑間之夾角定之.設 $P\ (r_1,\theta)$ 爲曲綫上任一點.(第二百十圖) PT 爲在 P 之切綫. ψ 爲 PT 與動徑 OP 所成之角.今以弧度表示 θ 之增量 $\Delta\theta=POQ$. 卽可在此曲綫上定第二點 $Q\ (r+\Delta r,\ \theta+\Delta\theta)$. 次以 O 爲中心. OQ 爲半徑作一圓弧.交 OP 延長於 R. 則

$OR=OQ=r+\Delta r$

$PR=\Delta r$

$\widehat{PQ}=\Delta s.$



第二百十圖

s 爲自始點 A 所量之距離.次引 PQ 弦如及垂直 OP 之直綫 QS.與之相交於 S.則

$$SQ=(r+\Delta r)\sin\Delta\theta.$$

$$OS=(r+\Delta r)\cos\Delta\theta.$$

$$SR=OR-OS$$

$$=(r+\Delta r)(1-\cos\Delta\theta).$$

$$PS=PR-SR.$$

$$=\Delta r-(r+\Delta r)(1-\cos\Delta\theta).$$

當 $\Delta\theta$ 漸近於零.PQ 弦漸近於 PT 爲極限.而角 RPQ 則以 ψ 爲極限.惟於三角形 SPQ

$$\tan RPQ=\frac{SQ}{PS}.$$

$$=\frac{(r+\Delta r)\sin\Delta\theta}{\Delta r-(r+\Delta r)(1-\cos\Delta\theta)}.$$

$$=\frac{(r+\Delta r)\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}}{\frac{\Delta r}{\Delta\theta}-(r+\Delta r)\frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta}}.$$

今如 $\Delta\theta$ 達於零

$$Lim(r+\Delta r)=r,\qquad Lim\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}=1.$$

$$Lim\frac{\Delta r}{\Delta\theta}=\frac{dr}{d\theta},\qquad Lim\frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta}=0.$$ (第一百五十一節)

故取(1)式之極限爲

$$\tan\psi=\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}. \qquad (2)$$

如須求角$MNP=\phi$.即可由$\phi=\psi+\theta$之關係得之.

188. 對於弧之微係數 於三角形PQS(第二百一十圖).

$$\sin SPQ=\frac{SQ}{PQ}$$

$$=\frac{SQ}{\widehat{PQ}}\cdot\frac{\widehat{PQ}}{PQ}.$$

$$=\frac{(r+\Delta r)\sin\Delta\theta}{\Delta s}\cdot\frac{\widehat{PQ}}{PQ}.$$

$$=(r+\Delta r)\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}\cdot\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\cdot\frac{\widehat{PQ}}{PQ}.$$

當$\Delta\theta$達於零.則SPQ達於ψ. $Lim\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}=1$. 而 $Lim\frac{\widehat{PQ}}{PQ}=1$.

故
$$\sin\psi=r\frac{d\theta}{ds}. \qquad (1)$$

取前節(2)式除上式得

$$\cos\psi=\frac{dr}{ds}. \qquad (2)$$

由(1)與(2)可知

$$\left(r\frac{d\theta}{ds}\right)^2+\left(\frac{dr}{ds}\right)^2=1. \qquad (3)$$

以$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2$乘(3)式爲

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2=r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \qquad (4)$$

以$\left(\frac{ds}{dr}\right)^2$乘(3)式爲

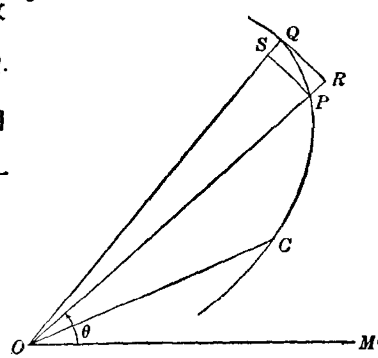
$$\left(\frac{ds}{dr}\right)^2=\left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2+1.$$

189. 面積　設C(第二百十一圖)爲一定點.$P(r,\ \theta)$爲曲綫$r=f(\theta)$上一動點.A爲以曲綫CP及半徑OC,OP所夾之面積OCP.因由θ之值可定P之位置.故A亦爲θ之函數.設θ增加$\Delta\theta=\angle POQ$.則A亦增加$\Delta A=POQ$之面積.今自O以半徑$OP=r$及$OQ=r+\Delta r$各作一圓弧PS及QR.則由圖形

面積$POS<\Delta A<$面積ROQ.

惟扇形POS之面積爲

$$\frac{1}{2}OP\cdot PS=\frac{1}{2}r^2\Delta\theta.$$



第二百十一圖

而　　面積$ROQ=\frac{1}{2}OQ\cdot RQ=\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\theta.$

故
$$\frac{1}{2}r^2\Delta\theta<\Delta A<\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\theta.$$

卽
$$\frac{1}{2}r^2<\frac{\Delta A}{\Delta\theta}<\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2.$$

當$\Delta\theta$達於零時.取其極限爲

$$\frac{dA}{d\theta}=\frac{1}{2}r^2.$$

例. 求雙紐綫 $r^2=2a^2\cos 2\theta$ 一環形之面積.

今取 C 爲當 $\theta=0$ 時之點.而 P 爲當 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 時任意一點.則

$$\frac{dA}{d\theta}=a^2\cos 2\theta.$$

卽

$$A=\frac{a^2}{2}\sin 2\theta+c.$$

惟當 $\theta=0$ 時, $A=0$. 故 $c=0$. 當 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 時, A 等於環形面積之一半.故環形全面積爲 $a^2\sin\frac{\pi}{2}$ 卽等於 a^2.

問　題

作以下諸曲綫.

1. $r=a\sin 2\theta$.
2. $r=a\cos 3\theta$.
3. $r=a\tan\theta$.
4. $r=a(1+\sin\theta)$.
5. $r=a(2+\sin\theta)$.
6. $r=a(1+2\sin\theta)$.
7. $r=a\theta^{-\frac{1}{2}}$.
8. $r=a\sec^2\frac{\theta}{2}$
9. $r=\frac{a}{\theta-b}$.
10. $r=a-b\theta$.
11. $r=a\sin\frac{\theta}{2}$.
12. $r=a\cos\frac{\theta}{3}$
13. $r=a(1+\cos 2\theta)$.
14. $r=a(1+2\cos 2\theta)$.
15. $r=a(1-\cos 2\theta)$.
16. $r=a(1+\cos 3\theta)$.
17. $r=a(1+2\cos 3\theta)$.
18. $r=4+5\cos 5\theta$.
19. $r=2+\sin\frac{3}{2}\theta$.
20. $r=a\tan\frac{\theta}{2}$.

21. $r=a\sin^3\dfrac{\theta}{3}$.

22. $r^2=a^2\sin\theta$.

23. $r^2=a^2\sin 3\theta$.

24. $r\cos\theta=a\cos 2\theta$.

25. $r=\dfrac{a}{\cos\theta}+\dfrac{a}{\sin\theta}$.

求以下每兩曲綫之交點.

26. $r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=a$,　$r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=a$.

27. $r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{3a}{4}$,　$r=a\sin\theta$.

28. $r^2=a^2\sin\theta$,　$r^2=a^2\sin 3\theta$.

29. $r=a\sin 2\theta$,　$r=a(1-\cos 2\theta)$.〔$(r_1,\ \theta_1)$,$(-r_1,\ \theta_1+\pi)$為同一之點〕.

30. O為定點. LK為定直綫.設過O引任一直綫交LK於Q.再於此綫取一點P.令$OP\cdot OQ=k^2$.求P之軌跡.

31. 定長之直綫OA.以O為樞紐迴轉.今從A引一直綫垂直於一經過O點之固定直綫.與之相交於B.再由B引一直綫垂直於OA.與之相交於P.求P之軌跡.

32. MN為一垂直於始綫之直綫.其至O之距離為a.今由O引一直綫至MN上任一點B.復由B引直綫垂直於OB.交始綫於C.自C引直綫垂直於BC.交MN於D.最後自D引直綫垂直於CD.交OB於P.求P之軌跡.

將下列諸式變為極方程式.

33. $y^2=4px$.

34. $xy=7$.

35. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

36. $x^2+y^2-8ax-8ay=0$.

37. $x^4+x^2y^2-a^2y^2=0.$ 38. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$

39. $x^3+y^3-3axy=0.$

40 以 A 爲極.OA 爲始綫(第九十一圖).求蔓葉綫之極方程式.

41. 於第九十二圖.(1),以 O 爲極,OA 爲始綫.(2),以 A 爲極,OA 爲始綫.求環索綫之極方程式.

42. 於環索綫(第九十二圖)試證

$$AP\cdot AP_1=a^2. \quad 及 \quad \frac{1}{AP}+\frac{1}{AP_1}=\frac{2}{AN}.$$

AN 爲 AO 對於 AD 之射影.

將下列諸式變爲楷托方程式.

43. $r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)+r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=12.$

44. $r=a\sin\theta.$

45. $r=a(\cos 2\theta+\sin 2\theta).$

46. $r=a\tan\theta.$

47. $r^2=a^2\sin\theta.$

48. $r^2=a^2\sin\frac{\theta}{2}.$

49. 求四葉玫瑰綫 $r=a\sin 2\theta$ 之楷托方程式.

50. 求心臟曲綫 $r=a(1-\cos\theta)$ 之楷托方程式.

51. 求卡新黎卵狀曲綫 $r^4-2a^2r^2\cos 2\theta+a^4-b^4=0$ 之楷托方程式.

52. 求蝸綫 $r=a\cos\theta+b$ 之楷托方程式.

53. 求康可曲綫 $r=a\sec\theta+b$ 之楷托方程式.

54. 求對數螺綫 $r=e^{a\theta}$ 之楷托方程式.

55. 試證與拋物綫之軸成 30° 之焦弦之長.爲其與軸成 90° 之焦弦之四倍.

56. 一慧星之軌道爲拋物綫.而以日爲焦點.當慧星距日爲 100,000,000 哩時.其動徑與軌道之軸成 60° 之角.問此慧星之軌道如何.幷求在其軌道上距日最近之點.

57. 一慧星在一拋物綫形之軌道繞日而運動.今於其途中觀測兩點.此兩點之焦點距離爲 5,000,000, 及 15,0000,000 哩.二焦弦之夾角爲 90° 求軌道上距焦點最近之點.

58. 過雙曲綫之焦點引一直綫與一漸近綫平行.交雙曲綫於 P.求證 FP 之長爲垂直於橫軸之焦弦四分之一.

59. 延長一拋物綫之諸焦點半徑.使其較原長增一倍.求此等直綫之端點軌跡.

60. 如 P_1 及 P_2 爲自任一點 O 引一直綫與定圓之交點.求證 $OP_1 \cdot OP_2$.爲常數.

61. 如 P_1 及 P_2 爲自任一點 O 引一直綫與一定圓之交點.Q 爲此直綫上他一點得使 $OQ=\dfrac{2OP_1 \cdot OP_2}{OP_1+OP_2}$.求 Q 之軌跡.

62. 自圓上一點作若干割綫.延長之令其在圓外之部分各等於夾於圓內之部分.求此等直綫之端點軌跡.

63. 自一點 O 引一直綫交定圓於 P.今於此直綫上取另一點 Q.使 $OP \cdot OQ=k^2$.求 Q 之軌跡.

64. 如以圓錐曲綫之軸爲始綫.頂點爲極.求其極方程式.

65. 求圓錐曲綫諸焦點弦之中點軌跡.

66. 求圓錐曲綫諸焦點半徑之中點軌跡.

67. 設P_1FP_2及Q_1FQ_2爲一圓錐曲綫上兩互爲垂直之焦弦求證$\dfrac{1}{P_1F\cdot FP_2}+\dfrac{1}{Q_1F\cdot FQ_2}$爲常數.

68. 求證雙紐綫上任一點之動徑與法線所夾之角,爲此動徑與始綫所夾角之二倍.

69. 試證極方程式所代表之任一曲綫.其r之極大值與極小值通常爲在動徑爲垂直於其切綫之時.

70. 設經過極O引一直綫垂直於動徑OP.與其切綫相交於A而與其法綫相交於B.試證$OA=\dfrac{r^2}{\dfrac{dr}{d\theta}}$, $OB=\dfrac{dr}{d\theta}$.

OA名爲極次切綫.OB名爲極次法綫.

71. 設p爲自極至一切綫之垂直距離.求證$p=\dfrac{r^2}{\sqrt{r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}}$.

72. 當一質點以等角速度經跡一曲綫$r=f(\theta)$.求r之改變率及質點沿曲綫之速率.

73. 一質點以等速度沿曲綫$r=f(\theta)$而運動.求r與θ之改變率.

74. 當θ之改變爲均匀時.求一點在蝸綫上運動之速度.

75. 一質點以常速度a沿一動徑而運動.而動徑復以常角速度ω繞O而旋轉.求此點之路程.

76. 求曲綫$r^2=a^2\sin\theta$所夾之全面積.

77. 求曲綫$r^2=a^2\sin 3\theta$一環形之面積.

78. 求亞基默德螺綫之動徑由0至π所經掩之面積.

79. 求對數螺綫之動徑由0至π所經掩之面積.

80. 求曲綫$r=a\sin\frac{\theta}{2}$之動徑由0至2π所經掩之面積.

81. 求曲綫$r=a\tan\theta$之動徑由0至$\frac{\pi}{4}$所經掩之面積.

82. 求蝸綫之全面積.$(b>a)$

83. 求心臟曲綫之全面積.

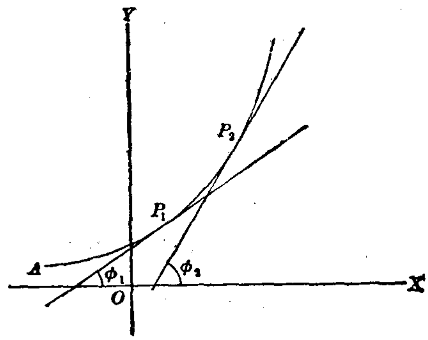
84. 求證對數螺綫之弧長與由弧之兩端所引動徑之長之差成比例.

85. 試證當一曲綫之切綫與過切點之動徑所夾之角等於動角之一半時.此曲綫爲一心臟曲綫.

第十六章　曲率

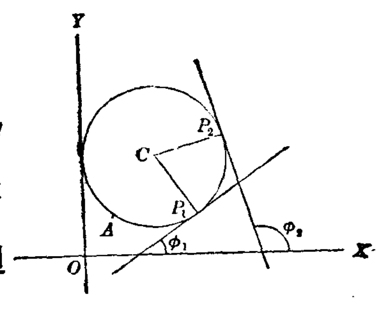
190. 曲率之定義　設有一動點經跡一曲綫.欲求其在運動時所改變之方向.可卽計算角ϕ所改變之量(第五十九節).

例如第二百十二圖之曲綫.設$AP_1=s$, $P_1P_2=\Delta s$, ϕ_1及ϕ_2爲ϕ在P_1及P_2時之值.則$\phi_2-\phi_1$卽爲曲綫在P_1及P_2間方向改變之全量.設以弧度表$\phi_2-\phi_1=\Delta\phi$.則$\dfrac{\Delta\phi}{\Delta s}$爲$P_1P_2$弧每一單位長之平均方向變換.今視$\phi$爲$s$之函數.當$\Delta s$趨於零爲限極時.取$\dfrac{\Delta\phi}{\Delta s}$之極限爲$\dfrac{d\phi}{ds}$.名爲曲綫在$P_1$點之曲率(*Curvature*).故曲綫之曲率.卽爲該曲綫之方向對於弧長之改變率(第一百零九節)



第二百十二圖

設$\dfrac{d\phi}{ds}$爲常數.曲率卽爲常數.例如第二百十三圖之圓.其中心爲C半徑爲a. $\Delta\phi=P_1CP_2$. $\Delta s=a\Delta\phi$, 故$\dfrac{\Delta\phi}{\Delta s}=\dfrac{1}{a}$取其極限爲$\dfrac{d\phi}{ds}=\dfrac{1}{a}$.故圓之曲率常等於其半徑之反商.



第二百十三圖

191. 曲率半徑　曲率之反商.名爲曲率半徑.常例皆以ρ表之.凡經過曲綫上任一點.以其ρ爲半徑.常可作一圓.此圓

與曲綫在該點爲同切綫且同在切綫之一邊.因圓之曲率爲常數而等於其半徑之反商.曲綫在此爲與該圓同曲率.故此圓表示曲綫之曲率.與切綫表示曲綫之方向.其情形完全相同.因即名爲曲率圓(*Circle of curvature*).

因曲率爲 $\frac{d\phi}{ds}$.故

$$\rho=\frac{1}{\frac{d\phi}{ds}}=\frac{ds}{d\phi}.\qquad\text{(第九十六節6式)}$$

設用直角坐標表此曲綫之方程式.則

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.\qquad\text{(第一百零五節)}$$

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)\qquad\text{(第五十九節)}$$

從而

$$\frac{d\phi}{dx}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

$$\therefore\ \rho=\frac{ds}{d\phi}=\frac{\frac{ds}{dx}}{\frac{d\phi}{dx}}.\qquad\text{(第九十六節8式)}$$

$$=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

此式因有一根號.故其符號顯然有二.若僅須計 ρ 之數值時.則負號可擯除不用.

例. 求橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$之曲率半徑.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

$$\therefore\quad \rho=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

此外尚有一式.即

$$\rho=\frac{\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x}{dy^2}}.$$

爲視ϕ爲OY與切綫所夾之角.而將上式諸微係數中x與y互換而成.

192. 按照$\rho=\frac{ds}{d\phi}$之定義.得知如取s使s與ϕ同時幷增.ρ即爲正.如其中有一爲增而他一爲減.ρ即爲負.惟求簡便起見.常假設s爲沿曲綫自左向右漸增.(第二百十四圖至第二百十七圖)故ϕ常在第一及第四象限.即$\sec\phi$常爲正.

惟$\sec\phi=\sqrt{1+\tan^2\phi}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. 故於範式.

$$\rho=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

中ρ之符號與$\frac{d^2y}{dx^2}$相同.即當曲綫爲上凹嚮時ρ爲正.下凹嚮時ρ爲負.

193. 曲率中心之坐標 第一百九十一節所述之圓.其中心之坐標.即為曲綫在該點之曲率中心之坐標.設 $C(\alpha, \beta)$ (第二百十四圖)為相當於曲綫上一點 $P(x, y)$ 之曲率中心.今引 CL 及 PM 與 OY 平行.過 P 引 NR 與 OX 平行.則

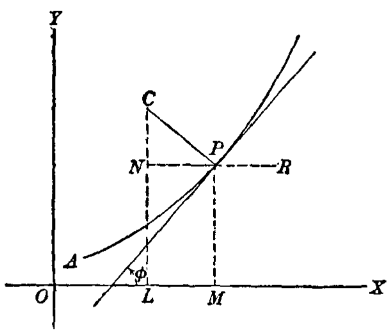
$$OL=OM+ML=OM+PN.$$

$$LC=LN+NC=MP+NC.$$

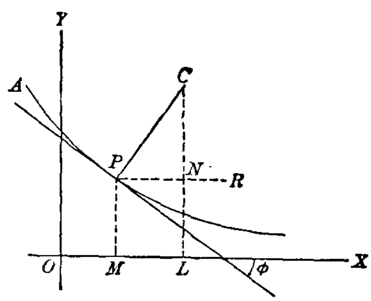
今因曲綫為上凹嚮, $\rho>0$, 故

$$\angle RPC=\phi+90^\circ.$$

$$PC=\rho.$$



第二百十四圖



第二百十五圖

則由而三角函數之定義.

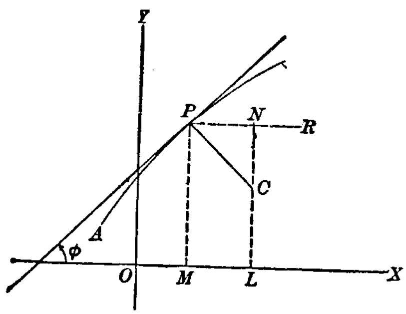
$$PN=PC\cos RPC=\rho\cos(\phi+90^\circ)=-\rho\sin\phi,$$

$$NC=PC\sin RPC=\rho\sin(\phi+90^\circ)=\rho\cos\phi.$$

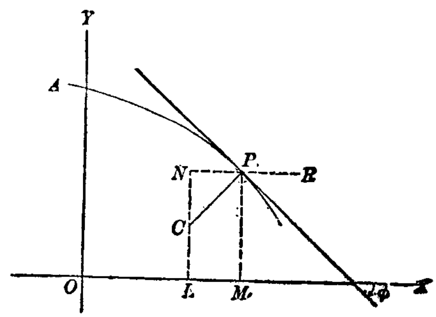
$$\therefore\quad \alpha=x-\rho\sin\phi,$$

$$\beta=y+\rho\cos\phi.$$

第二百十五圖至二百十七圖之作法.與第二百十四圖完全相同.第二百十五圖之證明.與上所述無異.惟其餘二圖.因曲綫爲下凹嚮.$\rho<0$. 在此 $\angle RPC=\phi-90°$ 而 $PC=-\rho$. 故以上求 α 及 β 之範式無論何時皆眞.



第二百十六圖



第二百十七圖

惟因

$$\cos\phi=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$$

$$\sin\phi=\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

α, β 之範式亦可書爲

$$\alpha=x-\frac{\frac{dy}{dx}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$\beta=y+\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

例. 求橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任一點之曲率中心坐標.

於第一百九十一節之例已求得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y} \text{ 及 } \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

代入上式而簡單之.得

$$\alpha=\left(\frac{a^2-b^2}{a^4}\right)x^3, \quad \beta=-\left(\frac{a^2-b^2}{b^4}\right)y^3.$$

194. 漸屈綫及漸伸綫

除 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$. 則 ρ 成爲無窮大.此外曲綫上任一點常有一曲率中心.此等曲率中心之軌跡.名爲漸屈綫 (*Evolute*).原有之曲綫.則名爲漸伸綫 (*Involute*).例如第二百十八圖(1)爲漸伸綫而(2)爲漸屈綫.求漸屈綫之方法.可求得以 x 及 y 表曲率中心之坐標.再以原有曲綫方程式之助.以消去此二式中之 x 與 y.

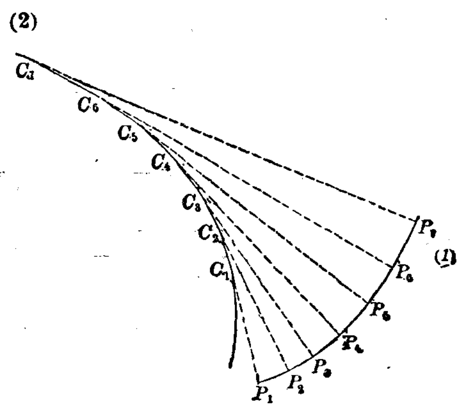
例. 求橢圓之漸屈綫.可由前節之例.自

$$\alpha=\frac{a^2-b^2}{a^4}x^3.$$

$$\beta=-\frac{a^2-b^2}{b^4}y^3.$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

三方程式中消去 x 與 y 由上二式得

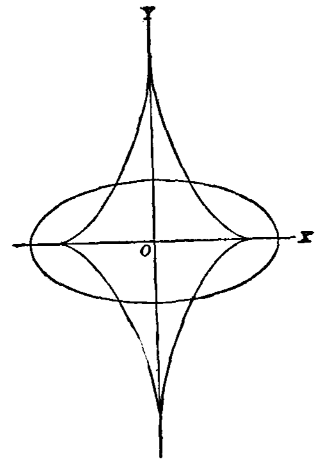


第二百十八圖

$$\frac{x}{a}=\left(\frac{a\alpha}{a^2-b^2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{y}{b}=-\left(\frac{b\beta}{a^2-b^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

代入第三式而簡單之.求得漸屈綫之方程式爲$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$.此橢圓.及其漸屈綫均表示於第二百十九圖.



第二百十九圖

注意.以前求 α 及 β 之方程式.即爲漸屈綫之通徑表示. x 與 y 爲二獨立通徑而以原有曲綫之方程式連絡之.

195. 漸伸綫及漸屈綫之性質 自 $\alpha=x-\rho\sin\phi$ 及 $\beta=y+\rho\cos\phi$ 二方程式中.可假設 α,β,x,y,ρ, 均爲 s 之函數.(s 爲沿漸伸綫之弧長)以求得漸屈綫上任一點之斜度.由九十六節之(8)

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{ds}&=\frac{dx}{ds}-\rho\cos\phi\frac{d\phi}{ds}-\sin\phi\frac{d\rho}{ds}\\&=\cos\phi-\rho\cos\phi\left(\frac{1}{\rho}\right)-\sin\phi\frac{d\rho}{ds}\\&=-\sin\phi\frac{d\rho}{ds}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\beta}{ds}&=\frac{dy}{ds}-\rho\sin\phi\frac{d\phi}{ds}+\cos\phi\frac{d\rho}{ds}\\&=\sin\phi-\rho\sin\phi\left(\frac{1}{\rho}\right)+\cos\phi\frac{d\rho}{ds}\\&=\cos\phi\frac{d\rho}{ds}.\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \frac{d\beta}{d\alpha}=\frac{\frac{d\beta}{ds}}{\frac{d\alpha}{ds}}=-\cot\phi.$$

如 $\tan\phi'$ 爲漸屈綫上該點之斜度.則 $\frac{d\beta}{d\alpha}=\tan\phi'$. 故得 $\tan\phi'=-\cot\phi$. 可知 ϕ' 與 ϕ 二角之差爲 90°.即漸屈綫上任一點之切綫與漸伸綫上相當點之切綫互爲垂直(第二百十八圖).

設將上式自乘且相加.可得.

$$\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2=\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2.$$

如令 s' 爲沿漸屈綫之弧長. s 爲沿漸伸綫之弧長.視 s',α,β 均爲 s 之函數.則

$$\frac{ds'}{d\alpha}=\sqrt{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}.$$

即
$$\frac{\frac{ds'}{ds}}{\frac{d\alpha}{ds}}=\sqrt{1+\frac{\left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2}{\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2}}.$$

從而
$$\frac{ds'}{ds}=\sqrt{\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2}.$$

故
$$\left(\frac{ds'}{ds}\right)^2=\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2.$$

$$\frac{ds'}{ds}=\pm\frac{d\rho}{ds}.$$

$$s'=\pm\rho+c. \qquad \text{(由第一百十節).}$$

由此得一定理爲當曲率中心沿漸屈綫而運動時.曲率半徑之增減適等於其中心所經過之距離.

從以上兩種性質可知如以繩繞於一漸屈綫上.漸次解放令其放出之部分.常取漸屈綫之切綫方向.則繩端所經過之路程卽爲一漸伸綫.凡在任一漸屈綫.由改變其繩之長.可得漸伸綫無限.

196. 以通徑表示曲率中心 設以任一通徑t表示x與y則曲率半徑可依下求法得.

$$\rho=\frac{ds}{d\phi}=\frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{d\phi}{dt}}. \qquad \text{(由第九十六節8式)}$$

惟 $$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}. \qquad \text{(由第一百七十四節4式)}$$

$$\phi=\tan^{-1}\frac{dy}{dx}=\tan^{-1}\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{d^2y}{dt^2}-\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(1+\left[\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right]^2\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

故 $$\rho=\frac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}.$$

例. 求擺綫之曲率半徑.

$$x=a\phi-a\sin\phi,$$

$$y=a-a\cos\phi.$$

$\therefore\quad \dfrac{dx}{d\phi}=a-a\cos\phi,\qquad \dfrac{dy}{d\phi}=a\sin\phi,$

$\qquad \dfrac{d^2x}{d\phi^2}=a\sin\phi,\qquad \dfrac{d^2y}{d\phi^2}=a\cos\phi.$

故
$$\rho=\frac{[a^2(1-\cos\phi)^2+a^2\sin^2\phi]^{\frac{3}{2}}}{a(1-\cos\phi).a\cos\phi-a\sin\phi(a\sin\phi)}$$

$$=-2^{\frac{3}{2}}a(1-\cos\phi)^{\frac{1}{2}}$$

$$=-2^{\frac{3}{2}}a\left(2\sin^2\frac{\phi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=-4a\sin\frac{\phi}{2}.$$

197. 以極坐標表示曲率半徑 任一曲綫之極方程式.在理論上皆可以 $r=f(\theta)$ 表之.因 r 爲 θ 之函數.故 $x=r\cos\theta$ 及 $y=r\sin\theta$ 二方程式.卽爲曲綫之通徑表示.由此可代入前節之範式以求極坐標之 ρ.其法如次.

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta,$$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2}=\frac{d^2r}{d\theta^2}\cos\theta-2\frac{dr}{d\theta}\sin\theta-r\cos\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta,$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}=\frac{d^2r}{d\theta^2}\sin\theta+2\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta.$$

代入以上之值於前節範式簡單之.得所求之範式爲

$$\rho=\frac{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\,\frac{d^2r}{d\theta^2}}.$$

例. 求心臟曲綫 $r=a(1-\cos\theta)$ 之曲率半徑.

因 $\quad \frac{dr}{d\theta}=a\sin\theta,\quad \frac{d^2r}{d\theta^2}=a\cos\theta.$

$$\therefore\qquad \rho=\frac{[a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta]^{\frac{3}{2}}}{a^2(1-\cos\theta)^2+2a^2\sin^2\theta-a(1-\cos\theta)\,a\cos\theta}.$$

$$=\frac{[2a^2(1-\cos\theta)]^{\frac{3}{2}}}{a^2(3-3\cos\theta)}=\frac{2^{\frac{3}{2}}a}{3}(1-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}(2ar)^{\frac{1}{2}}.$$

問　題

1. 求懸鏈綫 $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ 之曲率半徑.

2. 求蔓葉綫 $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ 之曲率半徑.

3. 求四歧點內擺綫 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 之曲率半徑.

4. 求曲綫 $a^4y^2=a^2x^4-x^6$ 在 $(0,\ 0)$,$(a,\ 0)$ 二點之曲率半徑.

5. 求曲綫 $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ 在原點之曲率半徑.

6. 求曲綫 $y^2=ax(x-3a)$ 在其經過 x 軸處之曲率半徑.

7. 求曲綫 $e^x=\sin y$ 在 $(x_1,\ y_1)$ 點之曲率半徑.

8. 求曲綫$y+log(1-x^2)=0$在坐標原點之曲率半徑及斜度.

9. 試證曲綫 $r=a(sin\,\theta+cos\,\theta)$ 之曲率半徑爲常數.

10. 求曲綫$r=a(2\,cos\,\theta-1)$之曲率半徑.

11. 求曲綫 $r=a\,sin^3\dfrac{\theta}{3}$ 之曲率半徑.幷求曲率半徑之極大值及極小值.

12. 求曲綫$r^2=2a^2\,cos\,2\theta.$之曲率半徑.

13. 已知曲綫爲$x=2\,cos\,t-cos\,2t,\ y=2\,sin\,t-sin\,2t.$ 求以t表曲率中心.且證明當$t=\pi$時曲率中心爲最大值.

14. 求抛物綫$y^2=4px$之漸屈綫.

15. 求屈拉克屈利克司曲綫

$$y=\frac{a}{2}\,log\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\sqrt{a^2-x^2}.$$

之曲率半徑.

16. 求證屈拉克屈利克司曲綫之漸屈綫爲一懸鏈綫.

17. 求證擺綫之漸屈綫仍爲一相等之擺綫.

18. 求四歧點內擺綫$x=a\,cos^3\phi,\ y=a\,sin^3\phi$之漸屈綫.

19. 求橢圓$x=a\,cos\,\phi,\ y=b\,sin\,\phi$之漸屈綫.

20. 求證對數螺綫任一點之曲率中心爲其法綫與過極且垂直於其動徑之直綫之交點.

21. 當$x=0$時求曲綫 $y=e^{-x^2}$之曲率圓.

22. 試證懸鏈綫$y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$與抛物綫 $y=1+\dfrac{1}{2}x^2$當在其交點時.二曲綫爲同切綫且同曲率圓.

23. 求曲綫$y=log\,x$上曲率最小之點.

24. 求曲綫 $y=\sin x$ 上曲率最大及最小之點.

25. 求楕圓上曲率最大及最小之點.

26. 試證拋物綫 $y=ax^2+bx+c$ 在頂點之曲率爲最大.

27. 問求曲率 k 之極大値及極小值之要件如何.已知

$$k=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

28. 問曲綫 $y=\log\sin x$ 上何點之曲率半徑爲 1. 曲率中心爲在此點之何方.

29. 試證曲綫 $y=ae^{-\frac{x}{a}}$ 在 $x=\pm a$ 兩點之曲率半徑之乘積爲 $a^2(e+e^{-1})^3$.

30. 當至切點之動徑與自極至切綫所引垂綫之夾角爲極大或極小之時.求證 $\rho=\dfrac{r^2}{p}$. p 爲所引垂綫之長.

問題答案

第 一 章 (27－32)頁

1. $9.$ **2.** $x-y.$

3. $x-x^2.$ **4.** $4.$

5. $17.$ **6.** $-18.$

7. $1.$ **8.** $2abc.$

9. $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2.$ **10.** $ab^2+bc^2+ca^2-ac^2-ba^2-cb^2.$

11. $7x-6y-5.$ **12.** 3

13. $2a_1a_2c_1c_2+a_1b_1b_2c_2+a_2b_1b_2c_1-a_1^2c_2^2-a_2^2c_1^2-a_1b_2^2c_1-a_2b_1^2c_2.$

24. $\dfrac{13\pm\sqrt{61}}{2}.$ **25.** $0,\ 6\pm\sqrt{39}.$

26. $8x+y-13=0.$ **27.** $x^2+y^2-x-y=0.$

28. $x^2+y^2-3x+y-4=0.$ **29.** $x^2-(a+b)x+ab-h^2=0.$

30. $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca-f^2-g^2-h^2)x-abc-2fgh+af^2+bg^2+ch^2=0.$ **31.** $x=1,\ y=2.$

32. $x=2,\ y=-1,\ z=3.$ **33.** $x=\dfrac{2}{3},\ y=-2,\ z=\dfrac{2}{5}.$

34. $x=-5,\ y=0,\ z=4.$ **35.** $x=-1,\ y=0,\ z=0.$

38. $x=\dfrac{1}{3}(a-2b+c+d),\ y=\dfrac{1}{3}(a+b-2c+d),\ z=\dfrac{1}{3}(a+b+c-2d),\ w=\dfrac{1}{3}(-2a+b+c+d).$ **39.** $x_1:x_2:x_3=3:-5:-2.$

40. $x_1:x_2:x_3=1:-2:3.$ **41.** $x_3=0,\ x_1:x_2=-2:1.$

42. $x_1: x_2: x_3: x_4 = 4: -3: 2:5.$

43. $x_1 = 0, x_2 = 0.\ x_3: x_4 = 3:2.$

49. $1, \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$

50. $2y^2 + 6y - 3 = 0.$

51. $y^2 + 11y + 12 = 0$

52. $y - 4 = 0.$

53. $b^2 - (a+c)^2 = 0.$

第二章 (48—53)頁

1. $5 + 3\sqrt{5}.$

5. $\left(1\frac{1}{18}, 3\frac{17}{18}\right).$

6. $\left(\frac{17}{18}, 3\frac{17}{18}\right).$

7. $\left(-\frac{1}{3}, 0\right).$

8. $\left(-2\frac{3}{4}, -1\frac{3}{8}\right), \left(-1\frac{3}{8}, \frac{11}{16}\right).$

9. $(5, 3 \pm \sqrt{7}).$

10. $\left(-1, -3\frac{1}{2}\right), \left(1, -4\frac{1}{2}\right).$

11. $\left(-\frac{2}{5}, 1\frac{2}{5}\right).$

12. $\left(-\frac{1}{4}, -1\frac{1}{4}\right)$

14. $(5, -1).$

15. $(-14, 17).$

16. $(-10, 31).$

17. $(2, 1), (4, -1)$

18. $\frac{1}{2}\sqrt{89}, \frac{1}{2}\sqrt{53}, \sqrt{26}.$

19. $(15, -3).$

第三章 (68—73)頁

21. $\tan^{-1}\frac{7}{4}.$

22. $\tan^{-1}\frac{4}{7}.$

23. $\frac{\pi}{4}.$

25. $5x - 4y + 40 = 0.$

26. $x - y - 4 = 0.$

27. $8x + 9y + 83 = 0.$

28. $5x - 6y = 0.$

29. $7x - 2y + 8 = 0.$

30. $3x - y - 7 = 0.$

31. $x + 1 = 0.$

32. $\tan^{-1}\frac{9}{13}$.

33. $2x+8y-17=0$.

34. $9x-6y-2=0$.

35. $x-y+2=0$.

36. $4x-6y+15=0$.

37. $25x+15y-24=0$.

38. $5x-2y-10=0$.

39. $7x+4y+28=0$.

41. $12x-15y-8=0$.

42. $3x-2y-7=0$.

43. $x+4y-4=0$.

44. $2x+3y+1=0$.

45. $\frac{3}{2}$

46. $(0, 2), (0, 7), (3, 5)$. $\frac{\pi}{4}$, $\tan^{-1}\frac{3}{2}$, $\tan^{-1} 5$.

47. $\frac{1}{17}\sqrt{17}$.

48. $\frac{10}{13}\sqrt{13}$.

49. $\frac{b^2-a^2-ab}{\sqrt{b^2+a^2}}$.

50. $\frac{1}{13}\sqrt{13}$.

51. $5\sqrt{2}$, $\frac{37}{10}\sqrt{2}$.

52. $\frac{2}{5}$.

58. $(3, 0)$.

59. $2x-y-4=0$.

60. $\left(-2\frac{1}{7}, -1\frac{3}{7}\right)$.

61. $\left(\pm\frac{21}{13}\sqrt{13}, \pm\frac{14}{13}\sqrt{13}\right)$.

63. $(1, 1), (-3, 3)$.

64. $5x-y-3=0$; $2\sqrt{26}$.

65. $17x+6y+34=0$, $x+18y+2=0$.

66. $5x+y-12=0$, $x-5y+8=0$.

67. $3x-4y-2=0$, $x-2=0$.

第四章 (100–103)頁

7. $a=\frac{9}{28}$, $x=-4\frac{2}{3}$.

8. $\frac{2a}{c^2}$.

10. (1) $k=\frac{7}{8}$; (2) $k>\frac{7}{8}$; (3) $k<\frac{7}{8}$.

11. (1) $k=0$ 或 4; (2) $k<0$ 或 $k>4$; (3) $0<k<4$.

12. (1) $k=-3$ 或 $-\frac{1}{3}$; (2) $-3<k<-\frac{1}{3}$;

(3) $k<-3$ 或 $k>-\frac{1}{3}$.

25. $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{4}(-3\pm 3\sqrt{-3})$.

26. 2, $-\frac{1}{2}$, $-1\pm\sqrt{-3}$, $\frac{1}{4}(1\pm\sqrt{-3})$.

27. 0, $\frac{1}{2}(\pm 1\pm\sqrt{13})$. **28.** 0, 0, $\pm\sqrt{-3}\pm\sqrt{-6}$.

29. 0, $-2a$, $\frac{a}{13}(-1\pm 5i)$.

30. $\pm(a+1)$, $\pm(a-1)$. **31.** $6x^3-13x^2+6x=0$.

32. $x^3-ax^2-(a^2+b)x+a^2-ab=0$.

33. $x^6-4ax^5+(4a^2-b^2-2b)x^4+8abx^3-(8a^2b-2b^3)x^2=0$.

34. $x^2-4x+13=0$.

35. $(2x+2-\sqrt{11})(2x+2+\sqrt{11})$.

36 $(2x+3+\sqrt{-2})(2x+3-\sqrt{-2})$.

37. $(2ax+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3})(2ax+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3})$.

38. $(x+a+\sqrt{a})(x+a-\sqrt{a})$.

39. $(ax+b+\sqrt{a+b^2})(ax+b-\sqrt{a+b^2})$.

40. $(ax+b+i\sqrt{b})(ax+b-i\sqrt{b})$.

41. p^2-2q. **42.** $3pq-p^3$.

43. $-\frac{p}{q}$.

44. $\frac{p^2-2q}{q^2}$.

45. $\frac{p^2-2q}{q}$.

46. p^2-3r.

47. pr.

48. $\frac{p}{r}$.

62. $1,\ \frac{1}{2}(3\pm\sqrt{29})$.

63. $2,\ 2,\ -1$.

64. $2,\ 2,\ -\frac{5}{3}$.

65. $-3,\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{2}$.

66. $-3,\ \frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3})$.

67. $\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2}$.

68. $\frac{1}{2},\ \frac{7}{2},\ -\frac{1}{3}$.

69. $\frac{2}{3},\ -2\pm\sqrt{-2}$.

70. $-\frac{4}{3},\ -1\pm\sqrt{3}$.

71. $-1,\ -1,\ \pm\frac{1}{2}$.

72. $3,\ -2,\ \frac{3}{2},\ -\frac{2}{3}$.

73. $2,\ \frac{5}{3},\ 1\pm\sqrt{-2}$.

74. $4,\ -\frac{5}{2},\ \frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$.

75. $\pm\frac{2}{3},\ \frac{1}{4}(3\pm\sqrt{-7})$.

76. $\frac{1}{2},\ -\frac{5}{2},\ \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{6})$.

77. $2,\ 3,\ -1,\ -1\pm\sqrt{-2}$.

78. $-2,\ \pm\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3}$.

79. $\frac{1}{3},\ \pm\frac{3}{2},\ -2\pm\sqrt{5}$.

80. $1,\ -2,\ -\frac{1}{2},\ 2\pm\sqrt{3}$.

87. 1·41.

88. −1·52.

89. 2·05, ·59

90. 1·18, 2·87

91. ·16, 2·93, −2·09.

第五章 (127−131)頁

1. 12.　　2. -3.

3. 0.　　11. $32x+y+45=0$.

14. $\left(4\frac{2}{3},\ 55\frac{2}{3}\right)$.　　15. $tan^{-1}\frac{6}{17}$.

16. $10\frac{2}{3}$.　　17. $(2,9),(-2,5)$.

18. $4x+y+2=0$. $108x+27y+58=0$.

19. $(-1,-6),\left(\frac{1}{3},\ -5\frac{23}{27}\right)$.

20. 當$x>-2$時為增. 當$x<-2$時為損.

21. 當$x<0$或$x>\frac{4}{3}$時為增. 當$0<x<\frac{4}{3}$時為損.

22. 當$x>-\sqrt[3]{2}$時為增. 當$x<-\sqrt[3]{2}$時為損.

23. 當$x>1$或$-1<x<0$時為增. 當$0<x<1$或$x<-1$時為損.

24. $\left(\frac{4}{3},\ \frac{5}{3}\right)$.　　25. $\left(0,\ \frac{1}{4}\right),\left(\pm 2,\ -3\frac{3}{4}\right)$.

26. 極大值$\frac{643}{243}$；極小值-3.

27. 極大值-12，-66；極小值-34，-88.

29. $\frac{1}{6}(a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab})$.　　30. 高$\frac{h}{2}$，底$\frac{b}{2}$.

31. 高$\frac{2}{3}a\sqrt{3}$；底之半徑$\frac{1}{3}a\sqrt{6}$.

32. 高為圓錐體高之三分之一.

33. $\left(1\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$.

34. 圓之半徑等於扇形周邊四分之一.

35. 高等於底邊之一半.

37. (1)矩形之高等於半圓之半徑. (2)半圓之半徑爲$\frac{a}{\pi}$.

38. $\frac{1}{2}a$.

39. 長爲寬之二倍.

40. $.06Cl^4$.

44. 當$x>1$時上凹. 當$x<1$時下凹.

45. 當$x>0$時上凹. 當$x<0$時下凹.

46. $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$.

48. $(0, -8)$.

49. $(1, -27)$

51. $0{\cdot}45$, $1{\cdot}80$, -125.

52. $-2{\cdot}21$.

53. $2{\cdot}09$.

54. $1{\cdot}20$, $3{\cdot}13$, $-1{\cdot}33$.

55. $1{\cdot}51$, $-1{\cdot}18$.

56. $2, 2, -3$.

57. $1, 1, -a\pm\sqrt{a^2-a}$.

58. $b(b+4a^3)=0$.

59. $b^2(27a^4-b)=0$.

60. $b^3-27a^4=0$.

61. 參看第一章問題23.

第七章 (167－174)頁

5. $x^2+y^2\pm 2ax=0$.

6. $x^2+y^2\pm 2ax+2ay+a^2=0$.

7. $x^2+y^2+3x-2y=0$.

8. $(-2, 5)$, $\sqrt{65}$.

9. $(-2, 3)$, $2\sqrt{3}$.

10. $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$, $\frac{1}{6}\sqrt{141}$.

11. $\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$, 0.

14. $x^2+y^2-3x-3y=0$.

15. $x^2+y^2-3x-4=0$.

16. $x^2+y^2+26x+16y-32=0$.

17. $x^2+y^2-5x+4y-46=0$.

18. $x^2+y^2-20x-20y+100=0$, $x^2+y^2-4x-4y+4=0$.

19. $x^2+y^2-12x-12y+36=0$, $25x^2+25y^2+60x-60y+36=0$.

20. $x^2+y^2+2x+10y+1=0,\quad x^2+y^2-12x-4y+15=0.$

21. $2x^2+2y^2+6x+3y-10=0.$

22. $x^2+y^2+22x-34y+121=0,\quad x^2+y^2-2x-10y+1=0.$

23. $x^2+y^2-10x-28y+217=0.$

24. $x^2+y^2+22x-44y-20=0,\quad x^2+y^2+2x-4y-20=0.$

25. $4x^2+4y^2\pm 7y-36=0.$

26. $7x^2+16y^2-112=0.$

27. $9x^2+5y^2-45=0.$

28. $5x^2+9y^2-180=0.$

29. $\frac{1}{7}\sqrt{385},\ \frac{1}{3}\sqrt{165}.$

30. $16x^2+25y^2-400=0.$

31. $5x^2+9y^2-80=0.$

32. $16x^2+25y^2-400=0.$

33. $196x^2+132y^2-14553=0.$

34. $4,\ 3;\ \frac{1}{4}\sqrt{7};\ (\pm\sqrt{7},\ 0).$

35. $\frac{1}{2},\ 3x^2+4y^2-3a^2=0.$

36. $5x^2+9y^2-405=0.$

37. $x^2+4y^2-a^2=0,\ \frac{1}{2}\sqrt{3}.$

38. $\frac{1}{2}\sqrt{2}.$

39. $3x^2+5y^2-30=0.$

40. $\frac{1}{2}\sqrt{2},\ \frac{1}{3}\sqrt{3};\ (\pm\frac{1}{6}\sqrt{6},\ 0);\quad 2x\pm\sqrt{6}=0.$

41. $5x^2-4y^2-20=0.$

42. $3y^2-x^2-12=0.$

43. $28x^2-36y^2-175=0.$

44. $24x^2-25y^2-384=0.$

46. $3x^2-y^2-3a^2=0.$

47. $8x^2-y^2-16=0,\quad 8y^2-x^2-124=0.$

48. $x^2-y^2-21=0.$

49. $x^2-8y^2+4=0.$

50. $25x^2-144y^2-3600=0.$

51. $25y^2-9x^2-16=0.$

52. $\cos^{-1}\left(\frac{2-e^2}{e^2}\right)$.

53. $\frac{1}{2}\sqrt{5}$, $\frac{2}{5}\sqrt{5}$.

54. $\frac{1}{5}\sqrt{29}$, $(\pm\sqrt{29}, 0)$, $2x\pm5y=0$.

55. $52x^2-117y^2-576=0$.

57. $3x^2-4y^2-84=0$.

58. $\frac{1}{3}\sqrt{13}$, $(\pm\sqrt{13}, 0)$, $13x\pm9\sqrt{13}=0$, $2x\pm3y=0$.

61. $p=1\frac{1}{8}$.

62. $\frac{29}{2}\sqrt{2}$.

63. $38\frac{49}{72}$.

64. $x^2+y^2-5px=0$.

65. $x^2+y^2+3x-6y=0$.

66. $7x-3y+2=0$.

67. $y\pm5x=0$.

68. $x^2-8y^2-6y+9=0$.

69. $y^2+4y-2x+11=0$.

70. $91x^2+84y^2-24xy-364x-152y+464=0$.

71. $y^2-10x+25=0$.

72. $(y-2)^2\pm x^3+x^2=0$.

73. $4x+3y-31=0$, $4x+3y+19=0$.

74. $5x+y-5=0$, $x-5y+7=0$.

80. 圓.　81. 圓.　82. 圓.

83. 同心圓.　84. 直綫.　85. 直綫.

86. 圓.　87. 兩直綫.　90. 抛物綫.

91. 抛物綫.　93. 兩抛物綫.　94. 圓.

95. 抛物綫.　96. 雙曲綫.　97. 抛物綫.

98. 雙曲綫.　99. 維尺曲綫.　101. $8p\sqrt{3}$.

第八章 (191—194)頁

1. $(1, 1)$, $(-2, 3)$. **2.** $(0, 1)$.

4. $(0, 0)$, $(-1, -2)$. **5.** $\left(1, 2\frac{1}{2}\right)$.

6. $(1, 3)$, $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$. **8.** $(2\pm\sqrt{5}, 2\mp\sqrt{5})$.

9. $\frac{6}{13}\sqrt{13}$. **10.** $2x-y+2=0$.

11. -3. **12.** $2x+3y\pm6\sqrt{2}=0$.

13. $bx-ay+ab\pm ab\sqrt{2}=0$. **15.** $(0, 0)$, $\left(\frac{4}{5}, 1\frac{1}{5}\right)$.

16. $\left(\pm1\frac{3}{5}, \pm5\right)$, $\left(\pm1\frac{1}{5}, \pm3\frac{3}{4}\right)$.

17. $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $(1, -1)$. **18.** $(2, 2)$.

19. $(0, 0)$, $\left(\pm\sqrt{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$. **20.** $(2, 2)$, $\left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$.

21. $(0, 0)$, $\left(\frac{2am^2}{1+m^2}, \frac{2am^3}{1+m^2}\right)$.

22. $(2, 1)$ **23.** $(0, 0)$, $(-1, 0)$.

24. $(1, \pm2\sqrt{3})$, $(6, \pm6\sqrt{2})$.

25. $\left(\pm\frac{1}{9}\sqrt{48\mp3\sqrt{13}}, \frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}\right)$.

26. $(b-a, \pm2\sqrt{ab})$. **27.** $(\pm2a, a)$.

28. $(0, 0)$, $(-2a+2a\sqrt{3}, \pm2a\sqrt{2\sqrt{3}-2})$.

29. $(0, 0)$, $\left(\frac{4}{3}a, \pm\frac{4}{3}a\sqrt{2}\right)$. **30.** $(2a, a)$.

31. $(\pm2a, a)$. **32.** $(\pm2a, a)$.

33. $5x+4y+6=0.$ **34.** $2x+5y-13=0.$

35. $3x+y-1=0.$ **36.** $5x^2+5y^2+28x+42y=0.$

38. $3x^2+3y^2+13x+13y-4=0.$ **39.** $x^2+8y^2-9=0.$

第　九　章　(229−240)頁

1. $9x^2+14x+5.$

2. $20(x+1)(3x^2+6x+2).$

3. $\dfrac{2a}{(x+a)^2}.$

4. $-\dfrac{6x^2}{(x^3-1)^2}.$

5. $\dfrac{14(1-x)}{(3x^2-6x+1)^2}.$

6. $-\dfrac{1}{(x+1)^2}.$

7. $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{x^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{3}{x^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{2}{x^{\frac{4}{3}}}-\dfrac{10}{x^{\frac{5}{3}}}\right).$

8. $2(4x-3)+\dfrac{1}{x^3}(6-7x).$

9. $\dfrac{x+1}{2x\sqrt{x}}.$

10. $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{x^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{1}{x^{\frac{4}{3}}}+\dfrac{2}{x^{\frac{5}{3}}}\right).$

11. $2(3x^2-5x+6)(6x-5).$

12. $6x(x^2+1)^2.$

13. $\dfrac{8x+5}{2\sqrt{4x^2+5x-6}}.$

14. $\dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x-1)^2}}.$

15. $-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}.$

16. $-\dfrac{5(3x^2+2x)}{(x^3+x^2+1)^2}.$

17. $-\dfrac{5x}{\sqrt[4]{(x^2+1)^5}}.$

18. $5(2x-1)(2x-3)(x+1)^2.$

19. $(3x-5)(12x^2-55x+31).$

20. $\dfrac{2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}}.$

21. $\dfrac{3x^4-10x^3+6x^2+x-2}{(x^2-4x+3)^{\frac{1}{2}}(x^3+1)^{\frac{1}{3}}}.$

22. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\right).$

23. $1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$

24. $2x\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x^2+1)^2}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x^2+1)^4}}\right).$

25. $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$.　　26. $-\dfrac{x+1}{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}}$.

27. $\dfrac{x-x^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x^3+1)^{\frac{4}{3}}}$.　　28. $\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}-2x$.

29. $\dfrac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.　　30. $\dfrac{x-\sqrt{a^2+x^2}}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$.

31. $\dfrac{4x(2y^2-x^2)}{y(3y-8x^2)}$.　　32. $\dfrac{5x^4-3x^2}{5y^4-1}$.

33. $\dfrac{3[x^2y^4+(x-y)^2]}{3(x-y)^2-4x^3y^3}$.　　34. $\dfrac{3x^2-5x^4}{4y^3-1}$.

35. $-\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^4}}{y}$.　　36. $\dfrac{y}{x-y(x-y)^2}$.

37. $-\dfrac{5x}{2y}$，$-\dfrac{25}{2y^3}$.　　38. $-\dfrac{x^6}{y^6}$，$-\dfrac{6a^7x^5}{y^{13}}$.

39. $-\dfrac{b^2x}{a^2y}$，$-\dfrac{b^4}{a^2y^3}$.　　40. $\dfrac{a^2}{3y^2-a^2}$，$\dfrac{6a^4y}{(a^2-3y^2)^3}$.

41. $\dfrac{3x^2}{3y^2+1}$，$\dfrac{6x(1-3y^2)}{(1+3y^2)^3}$.　　42. $\dfrac{2(3x^2-2y)}{3y^2+4x}$，$\dfrac{128xy}{(3y^2+4x)^3}$.

43. 切綫 $3x+y+5=0$，法綫 $x-3y+5=0$，切綫 $3x-y+9=0$.
法綫 $x+3y-7=0$.

44. $x-6y+17=0$，$6x+y-9=0$.

45. $x+2y-2=0$.　　46. $4x-3y-1=0$.

47. $x+2y-1=0$.

48. $(3y_1^2-x_1)y-y_1x-x_1y_1-3a=0$.

49. $x-3y_1^2y+2x_1-3=0$.　　50. $2y_1y-3x_1^2x+x_1^3=0$.

51. $(2-x_1^3)x+x_1^3y-3x_1=0$.　　52. $x_1^{-\frac{1}{2}}x+y_1^{-\frac{1}{2}}y=a^{\frac{1}{2}}$.

53. $x_1^{-\frac{1}{3}}x+y_1^{-\frac{1}{3}}y=a^{\frac{2}{3}}$.

54. $5y+\sqrt{10}x-5\sqrt{5}=0$, $10y-5\sqrt{10}x+4\sqrt{5}=0$.

55. 切綫 $4x-y-6=0$, 法綫 $x+4y-10=0$, 切綫 $4x-y+6=0$, 法綫 $x+4y+10=0$.

56. $\dfrac{y}{\dfrac{dy}{dx}}$, $y\dfrac{dy}{dx}$.

57. $\dfrac{y}{\dfrac{dy}{dx}}\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$, $x\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$.

61. $(-0{\cdot}57,\ 2{\cdot}08)$.

62. $(\pm\frac{1}{2}a\sqrt{2},\ \pm\frac{1}{2}b\sqrt{2})$.

63. $\left(\pm\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \pm\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

73. $\sqrt{p(p+x_1)}$.

76. $a^2y_1x-b^2x_1y=0$, $\dfrac{a^2b^2}{\sqrt{b^4x_1{}^2+a^4y_1{}^2}}$

77. $\dfrac{\pi}{4}$, $\tan^{-1}\dfrac{1}{3}$.

78. 0, $\tan^{-1}\dfrac{9}{2}$.

79. $\dfrac{\pi}{2}$.

80. $\dfrac{\pi}{3}$.

81. $\tan^{-1}\dfrac{5}{3}\sqrt{3}$.

85. $\dfrac{\pi}{2}$, $\tan^{-1}\dfrac{3}{4}$.

86. $\tan^{-1}3$.

88. $\dfrac{\pi}{2}$, $\tan^{-1}\sqrt{2}$.

89. $\tan^{-1}\dfrac{9}{13}$.

90. $\tan^{-1}\dfrac{3}{4}$.

91. 0, $\tan^{-1}3\sqrt{3}$.

92. 0, $\dfrac{\pi}{2}$, $\tan^{-1}\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}$.

93. 長爲寬之二倍.

94. 步行 2·86 哩.

95. 8 路得,12 路 ‥

96. 截口爲一正方形.

97. 其長相等.

98. 距岸上至 A 最近之處 4 哩.

99. $FD=(\sqrt{2}-1)AB$.

103. 橢圓面積 $=\dfrac{\pi}{2}$矩形面積.

104. 扇形之中心角爲 $\dfrac{2}{3}\pi\sqrt{6}$.

105. 寬 a, 深 $a\sqrt{3}$.

106. 寬 $\dfrac{2}{3}a\sqrt{3}$, 深 $\dfrac{2}{3}a\sqrt{6}$.

107. 在靜水中之速爲每時 $\dfrac{3}{2}a$ 哩.

108. 底之半徑與高相等。 109. 高爲球之半徑三分之四。

110. 陸上 $a-\dfrac{bm}{\sqrt{n^2-m^2}}$ 哩，水內 $\dfrac{bn}{\sqrt{n^2-m^2}}$ 哩。

111. 高 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$ 半圓之半徑。

112. 高爲自拋物綫之頂點至直綫之距離三分之二。

113. (b, a). 114. $\left(\pm\dfrac{1}{3}\sqrt{3}, \dfrac{3}{4}\right)$

115. 當 $x=\dfrac{1}{5}$ 時爲極大值， 當 $x=1$ 時爲極小值，

彎點爲在 $x=-1$ 或 $\dfrac{1\pm\sqrt{6}}{5}$.

116. 最短縱綫爲 $x=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$， 最長縱綫爲 $x=-\dfrac{a}{\sqrt{3}}$，

彎點爲 $(0, 0)$，$(\pm a, 0)$. 117. $\left(\pm\dfrac{2}{3}\sqrt{3}, \dfrac{3}{2}\right)$.

119. $\left(\pm\dfrac{a}{6}\sqrt{27-3\sqrt{33}}, \pm\dfrac{a}{12}\sqrt{5\sqrt{33}-21}\right)$.

120. $\left(\pm\dfrac{a}{2}\sqrt{2}, \pm\dfrac{b}{4}\sqrt{2}\right)$. 121. $(1, 3)$，$(5, -5)$.

122. 當 $t=0, 4$, 或 8 爲固定不動， 當 $t=1{\cdot}69$ 時速度最大，

當 $4<t<8$ 時爲向後方運動。

123. 20，$10\sqrt{5}$，$(100, 20)$. 124. 當 $x=\dfrac{1}{2}$ 時，平行。

125. 頂之速度:底之速度 = 底至牆之距離:頂至地之距離。

126. 每時 54π 立方呎。 127. 每分 389 呎。

128. 每秒 41·9 呎。 129. 每秒 15 呎。 130. 每秒 0·2 吋。

131. 每時 17.9 哩。 132. $3y=x^3+9x-19$. 133. $3x-2xy-2=0$.

134. $3y=2x^{\frac{3}{2}}+11$. 136. $\dfrac{1}{y}-1=k(1-x)$. 137. $90{,}000{,}677\dfrac{1}{12}$.

138. 108.　**140.** $\frac{hk}{n+1}$.　**141.** $\frac{1}{6}a^2$.

142. $85\frac{1}{3}$.　**143.** $\frac{16}{3}a^2$.　**144.** $10\frac{2}{3}$.

145. $17\frac{1}{15}$.

第　十　章　(250—255)頁

1. $(-1,5),(-7,7),(2,-5)$.　**2.** $x^2+4y^2-4=0$.

3. $y^3-15y^2+3x^2+75y-6x-106=0$.

4. $b^2x^2+a^2y^2-2a^2by=0$.　**5.** $b^2x^2+a^2y^2-2ab^2x=0$.

6. $b^2x^2-a^2y^2-2ab^2x=0$.　**7.** $y^2=-\frac{x(a+x)^2}{2a+x}$.

8. $y^2=\frac{(x-a)^2(2a-x)}{x}$.　**9.** $y=-\frac{2ax^2}{x^2+4a^2}$.

10. $y=-\frac{4a^3-ax^2}{x^2+4a^2}$.　**11.** $y^2=-\frac{(2a+x)^3}{x}$.

12. $y^2=\frac{(a+x)^3}{a-x}$.　**13.** $y^2=4px+4p^2$.

14. $y^2=4px-4p^2$.　**15.** $y^2=8x$.

16. $2x^2+3y^2-6=0$.　**17.** $ab-c$.

18. $\frac{c^2}{4a}+\frac{d^2}{4b}-e$.　**20.** $x^2+9y^2+6x-36y+36=0$.

21. $196x^2+900y^2+784x+5400y+8875=0$.

22. $x^2-4y^2-2x-16y-19=0$.　**23.** $2x^2-6y^2-8x+36y-47=0$.

24. $y^2+4y-8x+28=0$.　**25.** $x^2-8x+16y-64=0$.

26. $3x^2+4y^2-12x-24y-27=0$.　**27.** $8x^2+9y^2-16x-64=0$.

28. $5x^2-4y^2+10x-16y-31=0$.　**29.** $y^2+4y-x=0$.

30. $\frac{1}{3}\sqrt{5}$, $(-1, 2)$, $(2, 2)$, $(-4, 2)$, $(-1\pm\sqrt{5}, 2)$,

$5x+5\pm 9\sqrt{5}=0.$ **31.** $\frac{1}{5}\sqrt{10}$, $(-3, 2)$, $(-3\pm\sqrt{5}, 2)$, $(-3\pm\sqrt{2}, 2)$, $2x+6\pm 5\sqrt{2}=0.$

32. $\frac{1}{2}\sqrt{13}$, $(3, -4)$, $(5, -4)$, $(1, -4)$, $(3\pm\sqrt{13}, -4)$, $13x-39\pm 4\sqrt{13}=0$, $3x-2y-17=0$, $3x+2y-1=0.$

33. $\frac{1}{2}\sqrt{10}$, $(-1, 2)$, $(-1\pm\sqrt{2}, 2)$, $(-1\pm\sqrt{5}, 2)$, $5x+5\pm 2\sqrt{5}=0$, $\sqrt{3}(x+1)\pm\sqrt{2}(y-2)=0.$

34. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{3}{8}\right)$, $3x+1=0$, $8y-7=0.$

35. $(-2, -3)$, $\left(-\frac{3}{4}, -3\right)$, $y+3=0$, $4x+13=0.$

36. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right).$

37. $x^2-4y^2-4=0.$ **38.** $y^2=\frac{x^2(3a\sqrt{2}-2x)}{3a\sqrt{2}+6x}.$

40. $x^2+14y^2-14=0.$ **42.** $xy=-18$ 或 $xy=18.$

43. $17x^2+7y^2-2=0$ 或 $7x^2+17y^2-2=0.$

44. $x^2\pm y=0$ 或 $y^2\pm x=0.$ **45.** $2x^2-y^2-1=0.$

46. $5x^2+8y^2=40.$ **47.** $4xy=7.$

48. $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2=\frac{a\sqrt{2}-x+y}{a\sqrt{2}+x-y}.$ **49.** $5x^2-6y^2=30.$

第十一章 (273–275)頁

1. 雙曲綫；中心，$(-7, 2)$；軸之斜度，2 與 $-\frac{1}{2}$.

2. 抛物綫；軸之斜度，$\frac{1}{3}$；頂點，$\left(\frac{22}{35}, -4\frac{16}{35}\right)$.

3. 無曲綫.

4. 雙曲綫;中心,$(-1,0)$;軸之斜度,1與-1.

5. 雙曲綫;中心,$\left(2,-\frac{3}{2}\right)$;軸之斜度,1與$-1$.

6. 二直綫$x-y+1=0$合一.

7. 橢圓;中心,$(-1,2)$;軸之斜度,1與-1.

8. 一雙直綫相交於$(3,-2)$,其斜度各爲$-1\pm\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

9. 一雙直綫相交於$(3,-2)$,其斜度爲$\frac{2}{3}$及$-\frac{3}{2}$.

10. 拋物綫;軸之斜度,1;頂點,$\left(-\frac{47}{32},-\frac{19}{32}\right)$.

11. 平行直綫$x+3y-5=0$, $x+3y-1=0$.

12. 橢圓;中心,$(2,-1)$;軸之斜度,$-\frac{3}{4}$及$\frac{3}{4}$.

13. 點,$(0,2)$。 20. $\tan^{-1}\frac{2\sqrt{H^2-AB}}{A+B}$.

23. $2x^2+3xy+y^2+12x-13y-50=0$.

24. $xy-2y^2-2x+4y=0$. 25. $x^2-xy+y^2-a^2=0$.

26. $6x^2+5xy+y^2-29x-13y+30=0$.

27. $9x^2-12xy+4y^2-117x+78y+380=0$

或$49x^2-56xy+16y^2-621x+354y+1964=0$.

28. 若$\tan\frac{\beta}{2}<1$,則爲$\sqrt{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}$,若$\tan\frac{\beta}{2}>1$,則爲$\frac{\sqrt{\tan^2\frac{\beta}{2}-1}}{\tan\frac{\beta}{2}}$.

第十二章 (296-299)頁

1. $5x-y+3=0;(0,3),(-1,-2)$. 2. $x+y-3=0;(0,3),(1,2)$.

3. $x-y+1=0;\left(-\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$. 4. $y-2x+5=0;(1,-3),(2,-1)$.

5. $(0,3)$. **6.** $\left(\frac{4}{9}, -\frac{1}{3}\right)$. **7.** $(2,3)$. **8.** $(1,-2)$.

9. $3x-2y=0,\quad x-y+1=0.$ **10.** $x=0.\quad x-y+1=0.$

11. $3x+y-1=0.$ **12.** $2x-y=0,\quad x+2y-10=0.$

13. $x+2y-2=0,\quad x-3y-2=0.$ **14.** $x-3y-2=0,\ 2x-y+1=0.$

21. $\frac{b^2}{a^2}$ **24.** 在無窮遠處.

25. $bex-ay=0,\quad bx+aey=0.$ **30.** $-e.$

31. $a^2=2b^2.$ **47.** $\left(ae, \pm\frac{b^2}{a}\right)$; $tan^{-1}(\pm e)$.

第十三章 (333–341)頁

21. $acos2ax.$

22. $a[sec^2(ax+b)ctn(ax+c)-tan(ax+b)csc^2(ax+e)].$

23. $-8csc^2 4x.$ **24.** $\frac{2(2ctn2x-1)}{csc2x}$.

25. $\frac{3sec3x(tan3x-1)}{(tan3x+1)^2}$. **26.** $sec^2x.$

27. $mnsec^m nxcsc^n mx(tannx-ctnmx).$

28. $2sec^2 2x(2tan2x+1).$ **29.** $-2csc2x(2csc^2 4x+ctn4xctn2x).$

30. $cos(xcosx)(cosx-xsinx).$ **31.** $5sin^2xcos^3x.$

32. $8sec^5x-3secx.$ **33.** $\frac{1}{\sqrt{2}}cosx.$

34. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}sin\sqrt{1-x^2}.$ **35.** $secxtanx.$

36. $\frac{1}{1+x^2}$. **37.** $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **38.** $-\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$.

39. $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ **40.** $-\frac{1}{a+x}\sqrt{\frac{a}{x}}$. **41.** $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$.

42. $-\dfrac{2}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x-1}}$.　**43.** 0.

44. $\dfrac{1}{a+b\cos x}$.　**45.** $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$　**46.** $\dfrac{1}{(2x-1)\sqrt{x^2-x}}$.

47. $\dfrac{1}{2x^2+2x+1}$.　**48.** $-\dfrac{4x}{x^4+1}$.　**49.** $2(x+1)e^{x^2+2x}$.

50. $\dfrac{2a^2x}{x^4-a^4}$.　**51.** $e^{\sqrt{1-x^2}}\,a^{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}\left(\dfrac{\log a}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

52. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$.　**53.** $e^x\sqrt[x]{a}\left(1-\dfrac{\log a}{x^2}\right)$.　**54.** $a^{\tan x}\log a\cdot\sec^2 x$.

55. $2x(1+2\log x)$.　**56.** $\log a\cdot\sec^2 x(\sec^2 x+2\tan^2 x)\,a^{\tan x\sec^2 x}$.

57. $2\sec 2x(\sec 2x+\log a\cdot\tan^2 2x)\,a^{\sec 2x}$.

58. $[2(a+x)\sin mx+m\cos mx]e^{(a+x)^2}$.

59. -2.　**60.** $\left(1+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a}{x}}\right)e^{\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}}$.

61. $\dfrac{2}{e^{2x}+e^{-2x}}$.　**62.** $\dfrac{8}{3+5\sin 2x}$.　**63.** $\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$.

64. $e^{x\cos x}\cos(a+x\sin a)$.　**65.** $\dfrac{4x}{\sin(2x^2+2a^2)}$.

66. $\cos^{-1}x$.　**67.** $\sec ax$.　**68.** $(a^2+1)e^{a\sin^{-1}x}$.

69. $\operatorname{ctn}^{-1}x$.　**70.** $\dfrac{\cos^{-1}x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.　**71.** $e^{ax}\sin mx$.

72. $2x\operatorname{ctn}^{-1}\dfrac{a}{x}$.　**73.** $\dfrac{\sin^{-1}x}{x^2}$.

74. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.　**75.** $\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}}$.

76. $\dfrac{(x-1)\log(x-1)}{(x^2-2x)^{\frac{3}{2}}}$.　**77.** $\dfrac{1}{a+b\cos x}$.

78. $4\csc(4x+2)[1-\operatorname{ctn}(4x+2)]$.　**79.** $-\dfrac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}$.

80. $2\sqrt{a^2+x^2}$. **81.** $\frac{sec^{-1}2\sqrt{x}}{\sqrt{x(4x-1)^3}}$. **82.** $\sqrt{2ax-x^2}$.

83. $\frac{2-\sqrt{x^2-1}}{2x(x^2-1)}$. **84.** $-\frac{1}{(e^x+2)\sqrt{e^{2x}+2e^x-1}}-\frac{(e^{2x}+e^x)log(e^x+2)}{\sqrt{(e^{2x}+2e^x-1)^3}}$.

85. $xtan^{-1}\sqrt{1-x^2}$. **86.** $\frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}$.

87. $\frac{y}{2\sqrt{x}}(sec^2\sqrt{x}\,logsin\sqrt{x}+1)$. **88.** $\frac{y}{x^2}(xctnx-logsinx)$.

89. $yx^x\left[\frac{1}{x}+logx+(logx)^2\right]$. **90.** $ye^x\left(\frac{1}{x}+logx\right)$.

91. $yx^x(1+logx)$. **92.** $y\left[\frac{tan^{-1}(a+x)}{a+x}+\frac{log(a+x)}{1+(a+x)^2}\right]$.

63. $\frac{y\left(tanxy-\frac{1}{x}\right)}{lonx-xtanxy}$. **94.** $\frac{2x+\frac{y}{1+x^2}}{2y-tan^{-1}x}$.

95. $\frac{ycosx+sin(x-y)}{sin(x-y)-sinx}$. **96.** $\frac{my}{(ny+1)x}$.

97. $\frac{e^ysinx+e^xsiny}{e^ycosx-e^xcosy}$. **98.** $\frac{y(1-cosx)-cosy}{sinx-x(1+siny)}$.

99. $\frac{xsiny-y}{xlogx-x^2cosy}$. **100.** $\frac{y(1-x^2-y^2)}{x(1+x^2+y^2)}$.

101. $\frac{x+y}{x-y}$, $\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$, $\frac{4(x+2y)(x^2+y^2)}{(x-y)^5}$.

102. $-e^{x-y}, -e^{x-y}(1+e^{x-y}), -e^{x-y}(1+e^{x-y})(1+2e^{x-y})$.

103. $\frac{1-y^2}{x^2-1}$, $\frac{2(x+y)(y^2-1)}{(x^2-1)^2}$, $\frac{6(x+y)^2(1-y^2)}{(x^2-1)^3}$.

104. $\frac{x+y-1}{x+y+1}$, $\frac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$, $\frac{8(x+y)(1-2x-2y)}{(x+y+1)^5}$.

105. $\frac{y-x}{x(1-logx)}$, $\frac{y(1+logx)-2x}{[x(1-logx)]^2}$, $\frac{2y[1+logx+(logx)^2]-3x(1+logx)}{[x(1-logx)]^3}$.

103. $x=cos^{-1}\frac{-1\pm\sqrt{33}}{8}$. **107.** 1 或 2.

108. $\tan^{-1}2\sqrt{2}$.　**109.** $\tan^{-1}\left(2\tan\frac{a}{2}\sec\frac{a}{2}\right)$.

110. $\tan^{-1}\frac{1}{3}$，$\tan^{-1}3$.　**112.** $x=k\pi$, $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

113. $\left(ae^{\frac{3}{2}},\ \frac{3}{2}ae^{-\frac{3}{2}}\right)$.　**114.** $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

116. $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$時爲極大，$x=\kappa\pi$時爲極小，

$x=(2k+1)\frac{\pi}{4}$時爲彎點.

117. $x=\left(2k+\frac{7}{4}\right)\pi$時爲極大，$x=\left(2k+\frac{3}{4}\right)\pi$時爲極小；

$x=k\pi$時爲彎點.

118. $x=n$時爲極大，$x=0$, $(n=2k)$時爲極小；

$x=n\pm\sqrt{n}$, $(n\neq1)$; $x=2$, $(n=1)$; $x=0$, $(n=2\kappa+1)$，爲彎點.

119. 圓.　**120.** $2\sqrt{(s-3)(5-s)}$，$4(4-s)$.

122. a.　**123.** $\frac{ab}{2\sqrt{b^2-a^2t^2}}$.

126. AB速度之$-b\sin\theta-\frac{b^2 six\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2-b^2\sin^2\theta}}$倍，$\theta=CAB$.

127. $\frac{500}{\sqrt{10,000-x^2}}$，$x$爲自中心之距離.

128. $\frac{500\sin a}{\sqrt{10,000-x^2\sin^2 a}}$，$x$爲自中心之距離.

129 15平方呎；每秒鐘9.03平方呎.

130. 兩角各爲$\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}$.　**131.** 23.7.

132. 當在與地面成角$\tan^{-1}\kappa$.　**133.** 8吋.

134. $1:\sqrt{2}$.　**135.** $5\sqrt{5}$.呎　**136.** 2.

137. $\sqrt{2}-1.$ **138.** $2.$ **139.** $e-1.$

140. $\frac{a^2}{e}(e^2-1).$ **141.** $log2.$ **142.** $x=2a.$

143. $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)+c.$ **144.** $y-3=klog\frac{x}{2}.$

145. $log\frac{y}{6}=k(x-a).$ **146.** $s=ce^{\kappa t}$ **147.** $k\pi+(-1)^k.6661.$

148. $2k\pi\pm.567,\ 2k\pi\pm2.206.$ **149.** $k\pi.$

150. $k\pi,\ (2k+1)\frac{\pi}{4},\ 2k\pi\pm\frac{\pi}{3}.$ **151.** $k\pi\pm\frac{\pi}{4},\ k\pi\pm\frac{\pi}{4}.$

152. $4.4934.$ **153.** $4.275.$ **154.** $0.199.$

155. $-$[illegible]$.7035.$ **156.** $1.857,\ 4.54.$

第十四章 (364–371)頁

2. 切綫：$x-ty+pt^2=0$; 法綫：$tx+y-2pt-pt^3=0.$

3. $x=\frac{4p}{t^2},\ y=\frac{4p}{t}.$

4. 切綫：$t^2x-2ty+4p=0$; 法綫：$2t^2x+t^3y-4pt^2-8p=0.$

5. $x=\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2t^2}},\ y=\pm\frac{abt}{\sqrt{b^2+a^2t^2}}.$

6. $x=\frac{a(b^2-m^2a^2)}{b^2+m^2a^2},\ y=\frac{2ab^2m}{b^2+m^2a^2}.$

7. $x=2asin^2\phi,\quad y=\frac{2asin^3\phi}{cos\phi}.$ **10.** $(1+3t^2)x-2t^3y-2a=0.$

11. $y^2=\frac{2x^2(a-x)}{2x-a}.$ **12.** $x^3+y^3-3axy=0.$

13. $y^2(ax-a^2)=x^2(a^2+k^2-ax).$ **14.** $3y^2-4xy+2y-1=0.$

15. $y=\frac{(x+1)(x-1)^2}{3x^2+1}.$ **16.** $(3y-x)^2=2\sqrt{x^2-y^2}.$

17. $9y=(x-y)^2-6(x-y).$ **18.** $(x^2+y^2)(ax+by)=cxy.$

19. $\sqrt{x^2+y^2}=a\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}-tin^{-1}\frac{y}{x}}.$

20. $x=a\cos^2\frac{\theta}{2}$, $y=\frac{a}{2}\left(\sin\theta+\tan\frac{\theta}{2}\right)$; $y=\frac{2x+a}{2}\sqrt{\frac{a-x}{x}}$.

21. $x=(a-c\tan\theta)\sin^2\theta$, $y=(a\cos\theta-c\sin\theta)$; $y(x^2+y^2)=x(ay-x)$.

22. $x=\frac{1}{a}(a^2+k^2\cos^2\theta)$, $y=\frac{1}{a}(a^2\tan\theta+k^2\sin\theta\cos\theta)$;

$a(x-a)(x^2+y^2)=k^2x^2$.

23. $x=a\tan\theta$, $y=a\cos 2\theta$, $y=\frac{a(a^2-x^2)}{a^2+x^2}$.

24. $x=a\sin\theta(\cos\theta+\sec\theta)$, $y=a\cos\theta(\cos\theta+\sec\theta)$; $y(x^2+y^2)=a(x^2+2y^2)$.

29. $bx\cos\phi+ay\sin\phi-ab=0$.

30. $\frac{\pi}{4}$.

31. $\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}$.

32. $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{gb}{v_0^2}$.

33. $\tan^{-1}\frac{v_0^2\pm\sqrt{v_0^4+2hgv_0^2-g^2b^2}}{gb}$.

34. $x=a\cos\theta+l\sqrt{b^2-a^2\sin^2\theta}$, $y=(1-l)a\sin\theta$, 傳動輪之中心爲原點, a 爲傳動輪半徑之長, b 爲連通竿之長, bl 爲沿此竿從輪至此點之距離.

35. 直綫.

37. $2a\omega\sin\frac{\phi}{2}$; $\omega\sqrt{a^2-2ah\cos\phi+h^2}$, ω 爲不變角速度.

38. $2a\omega\sin\frac{\theta}{2}$, $\omega\sqrt{a^2-2ah\cos\theta+h^2}$.

40. $a\theta\omega$, a 爲圓之半徑, $a\theta$ 爲繩端在輪上沿輪邊所行之距離, ω 爲不變角速速.

41. $x=a(\cos 2\theta+\sin 2\theta)$, $y=a(1+\sin 2\theta-\cos 2\theta)$;

$2\sqrt{2a}\omega$, $2a(\cos 2\theta-\sin 2\theta)\omega$, $2a(\sin 2\theta+\cos 2\theta)\omega$.

42. $y^2=\frac{x^2(3a+x)}{a-x}$.

43. 圓.

45. $y(x^2+y^2)=2a(x^2+2y^2)$.

47. $y=x-a$.

48. 維尺曲綫.

49. $x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta)$, $y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta)$.

50. $x=a(1+m^2)$, $y=ma(1+m^2)$, $ay^2=x^2(x-a)$.

53. 橢圓. 54. 雙曲綫. 55. 直綫.

56. 同心圓. 57. $x+2p=0, py^2=x^3$. 59. 同心橢圓.

61. 橢圓. 65. 拋物綫. 67. 同心圓.

70. 同心圓. 71. $y=x\,ctn\dfrac{\pi x}{2a}$.

72. $x=a(\phi+\sin\phi)$, $y=a(-1+\cos\phi)$.

74. $8a$. 75. $\dfrac{8a(a+b)}{b}$.

第十五章 (390–395)頁

26. $\left(1.0353a,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$. 27. $\left(\dfrac{a}{2}\sqrt{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(\dfrac{a}{2}\sqrt{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

28. $(0,0)$, $\left(\pm a, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pm\dfrac{a}{\sqrt[4]{2}}, \dfrac{\pi}{4}\right)$, $\left(\pm\dfrac{a}{\sqrt[4]{2}}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

29. $(0,0)$, $\left(a, \pm\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\left(a \pm\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

30. 圓. 31. $r=a\cos^2\theta$. 32. $r=\dfrac{a\cos 2\theta}{\cos^3\theta}$.

40. $r^3\sin^2\theta\cos\theta+(2a+r\cos\theta)^3=0$.

41. $r\cos\theta=a\cos 2\theta$, $(r^2+a^2)\cos\theta+2ar=0$.

49. $(x^2+y^2)^3-4a^2x^2y^2=0$. 50. $(x^2+y^2+ax)^2-a^2(x^2+y^2)=0$.

51. $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)+a^4-b^4=0$.

52. $(x^2+y^2-ax)^2=b^2(x^2+y^2)$. 53. $(x-a)^2(x^2+y^2)=b^2x^2$.

54. $\log(x^2+y^2)=2a\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$. 56. 25,000,000.

57. 1,200,000, 或 4,800,000. 59. $r=\dfrac{2c}{1-\cos\theta}$.

61. 直綫.　62. 圓.　63. 圓.

64. $r=\dfrac{2ce\cos\theta}{1-e^2\cos^2\theta}$.　65. $r=\dfrac{ce^2\cos\theta}{1-e^2\cos^2\theta}$.

66. $2r=\dfrac{ce}{1-e\cos\theta}$.　72. $\omega f'(\theta)$, $\omega\sqrt{[f(\theta)]^2+[f'(\theta)]^2}$.

73. $\dfrac{\omega f'(\theta)}{\sqrt{[f(\theta)]^2+[f'(\theta)]^2}}$, $\dfrac{\omega}{\sqrt{[f(\theta)]^2+[f'(\theta)]^2}}$.

74. $\omega\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}$.　75. 亞基默德螺綫.

76. $2a^2$.　77. $\frac{1}{3}a^2$.　78. $\frac{1}{6}\pi^3a^2$.

79. $\frac{1}{4a}(e^{2\pi a}-1)$.　80. $\frac{1}{2}\pi a^2$.　81. $\frac{1}{8}a^2(4-\pi)$.

82. $\frac{1}{2}\pi(a^2+2b^2)$.　83. $8a$.

第十六章 (406－408)頁

1. $\dfrac{y^2}{a}$.　2. $\dfrac{ax^{\frac{1}{2}}(8a-3x)^{\frac{3}{2}}}{3(2a-x)^2}$.　3. $3(axy)^{\frac{1}{3}}$.

4. $\frac{1}{2}a$, a.　5. $\dfrac{a^2}{3b}$.　6. $\frac{3}{2}a^2$, $\frac{3}{2}a^3$.

7. e^{-x_1}.　8. $0, \frac{1}{2}$.　10. $\dfrac{a(5-4\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}{9-6\cos\theta}$.

11. $\frac{3}{4}a\sin^2\frac{\theta}{3}$；最大值, $\frac{3}{4}a$；最小值, 0.　12. $\dfrac{2a^2}{3r}$.

13. $\frac{8}{3}\sin\frac{t}{2}$.　14. $y^2=\frac{4}{27p}(x-2p)^3$.　15. $\dfrac{a\sqrt{a^2-x^2}}{x}$.

18. $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$.　21. $x^2+y^2-y=0$.

23. $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$時爲最小曲率.

24. $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$時爲最大曲率; $x=k\pi$時爲最小曲率.

25. 最大曲率在長軸之兩端；最小曲率在短軸之兩端。

27. $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0.$

28. $(2k+1)\frac{\pi}{2}.$

中西名詞索引