

501  
25

180349

507

Sir Isaac Newton 著  
鄭太朴 譯

漢譯世界名著

# 自然哲學之數學原理

傅震  
子光

商務印書館發行

## 原 序

古人在自然研究方面，把力學看得很重要，近人則拋棄了物性形式及潛在屬性的理論以後，已開始將自然現象歸宿到數學定理上去。所以本書內，於物理學的範圍中儘量將數學演出，看來是有意義的事。

古人用兩種方法演述力學，其一是純理的，用論證精確的前進，其一是實用的。一切技術方面的事均屬於後者，力學之名實在亦由此得來。技術家之工作不能十分精確，故力學與幾何學即被分開，凡精確者均歸之幾何學，較不精確者則歸之力學。不過所遇的差失，實在不能盡歸之技術，而當歸之技術家。蓋凡工作不精確的，是不完全的力學家，其能極精確的工作者，方是完全的力學家。

直線與圓之演述，爲幾何學之基礎，但亦屬於

力學範圍。在幾何學上，我們不能知道此項線如何作成，祇當作已知先假定好而已。初學者沒有開始正式的幾何學之前，必須先學習此項線之精確作法。幾何學上所敍者，是如何用此項方法以解決問題。至於如何作成直線與圓，這是力學上的問題，非幾何問題。幾何學上教人應用此項線，故幾何學能應用極少的別處來的原則以收這許多成就，這真是可稱頌的。所以幾何學之基礎在實用力學方面，而幾何學為廣大力學之一部分，能建設並證明其方法。

因為技術上的事主要的在物體運動方面應用到，故普通將幾何學與量相關連，而力學則屬於運動。在這個意義上，純理力學為極精確演述出來而且已證明的科學，其任務在研究如何由某種力發生運動，以及反之，某種運動所需要的力如何。古人於五種力內曾從事過於此。古人之視重力（因為不是人手之力）除重量以外沒有其他，但我們的研究不在技術而在科學。不在人手之力而在自然之

力，故必須主要的研究關於重，輕，彈力，流體抵抗力以及其他吸引的運動的力之狀況；所以我們的研究是自然理論之數學的原理。

物理學上的一切困難，看來是在於這裏：由運動的現象以推論自然之力，再由此項力以說明其他的現象。關於此，有好些普遍的定理，於第一及第二篇中論之，第三編內是其應用，將宇宙系統說明了。於此，由天空中所發見的現象，用前二編內數學上所已證明的定理，推論出重力，此力能使物體傾向太陽及行星接近。同此，我們並用數學定理由此項力以推論行星，彗星，月球，海洋之運動。

或者自然中之其他現象，亦可如是由數學原理中推論出來罷！好多理由使我發生一種推想，以為此項現象均與某項力有關。由此項力，物體之分子，以某種尙未知的的原因，互相傾向而成爲正則的物體，或亦可相離而飛散。一直到現在，物理學者尙無法用此項力以說明自然。我希望本書內所樹立的原則能對於此項或其他正確的方法作一先

引。

本書之出版，哈雷 (*Edmund Halley*) 君，這位深刻而博學的學者，盡力極多。他不僅負校閱及畫圖之責，而且他實在是推動我作這書的人。他要我證明天體軌道之形狀，請我將此證明報告給皇家學會，由其要求於是使我想編著本書。我開始時先從事於月球運動上之差失，即從事於重力之定律及量以及其他的力，物體按照某種定律被吸引時所作之軌道，若干物體本身間之運動，物體在有抵抗的中介物內之運動，此項中介物之力，密度及運動，以及彗星之軌道，及其相似的研究等等。我曾想，這書的編著必須尚待若干時，乃能將其他的補充與開始的研究相合發表。關於月球之運動（實在不很完備），我將其總括在 § 107 之系內，俾別人家不要以為我太將零碎的事多敘了，特別將其提出來，使其餘的定理之系統為之混亂。後來發見的零碎事實寧可將其按插在不適當的處所，免得將定理及所引之數目改變。

---

希望一切能得到人們的細心閱讀，在這樣的困難材料方面，有缺點之處，其可責備當較之可引起新研究及有趣的補充為多！這是我所極屬望於讀者的。

一六八六年五月八日於劍橋。

伊薩克 牛頓。

## 第二版序言

在這第二版內，好多已訂正，並增入了好多。第一編之第二章內，我已將能使物體在一定軌道內運動的力之決定法較容易較詳盡的敘出。第二編之第七章內，流體之抵抗力的理論我亦已較詳細的研究過，並有新的試驗爲之證明。第三編內之月球理論及歲差則更完備的由其原則中推出，並引入好多精確算好的軌道之例以證明彗星之理論。

一七一三年三月二十八日於倫敦。

伊薩克 牛頓。

## 第三版序言

這第三版是由這方面極有經驗的人，亨利，丕姆白爾頓 (*Heinrich Pemberton*) 所備就，其中第二編內之論中介物之抵抗力，已較前為詳盡，並有關於重物之抵抗力的新試驗增入。第三編內月球因重力而保持其軌道的理由已更詳盡的敘出；增加入的，有旁德 (*Pound*) 氏所得關於木星對徑之相互關係的新觀察。此外，這裏新添入若干對於1680年所出現的彗星之觀察，係由德人開而希 (*Kirch*) 所作，最近纔入於我們之手。由此可知彗星運動方面拋物線的軌道是如何的接近。該彗星之軌道亦按照哈雷的推算較前更詳細的以橢圓表出，可知彗星經過九個宮在此橢圓的軌道內進行，與行星在天文學上所測定的橢圓軌道內運行差不多的正確。1723年所出現的彗星之軌道亦按照巴

得來 (*Bradley*) 的推算增加入了。

一七二五年正月十二日於倫敦。

伊薩克 牛頓。

# 目次

原序

第二版序言

第三版序言

說明 ..... 1

運動之基本定理或定律 ..... 21

第一編 第一章 論首末比之方法用此可

證明以後之理者 ..... 45

第二章 論向心力之求法 ..... 64

第三章 論圓錐曲線上物體之運動 ..... 91

第四章 論一個焦點已知時求圓錐曲線的軌道之法 ..... 113

第五章 論焦點均未知時求軌道之法 ..... 129

---

第六章	求已知軌道內運動之法.....	185
第七章	論物體之直線的上昇及下墜.....	199
第八章	論物體受向心力之推動而運行時求其軌道之法.....	218
第九章	論動的軌道內物體之運動以及回歸點之運動 ..	228
第十章	論物體在已知面上之運動及擺錘運動.....	254
第十一章	論球形物體之運動其間有向心力互相吸引.....	279
第十二章	論球形物體之吸引力...	324
第十三章	論非球形物體之吸引力.....	362
第十四章	論傾向大物體的向心力所推動的小物體之運	

---

	動.....	386
第二編 第一章	論某項物體之運動此項 物體受一種與速度相比 的抵抗力者.....	401
第二章	論某項物體之運動此項 物體所受之抵抗力與速 度之平方相比.....	419
第三章	論物體在抵抗力下之運 動此抵抗力之一部分與 速度相比一部分則與其 平方相比.....	476
第四章	論物體在中介物內之循 環運動.....	496
第五章	論流體之密度及壓榨以 及流體靜力學.....	509
第六章	論擺錘之運動及抵抗...	534
第七章	論流體之運動及拋出的 物體之抵抗力.....	578

---

第八章	論流體內之傳達運動…	645
第九章	論流體之圓形運動……	671
第三編	論宇宙系統……………	691
	研究自然之規律……………	692
	現象……………	696
第一章	論宇宙系統之原因……	706
第二章	論月球差失之大小……	765
第三章	論海潮之大小……………	829
第四章	論歲差……………	844
第五章	論彗星……………	856

# 說 明

說明 1. 物質之量，以其密度及體積聯合度之。

倍大空間內倍密之空氣，其量加四倍；雪或塵埃同此，可經融化或壓使其加密。一切物體方面亦均如此，可由某種原因以種種方法使其加密。至於可自由透入各部分間空隙之中介物，這裏我沒有計入。

此項物質之量，以後我將以物體或質量名之，所由以知之者，則為各該物體之重量。至質量與重量之為相比的，此則我曾以很精確的擺錘試驗得之，其詳見後。

說明 2. 運動之量，以速度及物質之量聯合度之。

全體之運動，為其各部運動之和。故速度等而物體倍大，則運動量加倍，速度與物體均加倍，則運動量加四倍。

說明 3. 物質有抵抗之能力；故每個物體，如其所已然者，保持其靜止狀況或等速的直線運動。

此項力恆與物體為比例，其與物質惰性之差，祇是看法之不同而已。物質之惰性，能使每個物體不易出離其靜止的或運動的狀態，故此項為物質所固有的力，亦可用“惰性力”這個很確切的名稱以稱之。因此，物體祇在改變其狀態時，纔顯出其此項力，而其狀態則可由一其他外來與之接觸的力影響之，且由不同的觀點看來，前者或為抵抗力或為進攻力。如物體為保持其狀態對於外來的力相抗，則為抵抗的；如物體對於當前的障礙力不易退讓，而欲使後者之狀態變動，則為進攻的。尋常均以抵抗力屬之靜的物體，進攻力則屬之動的物體；不過如尋常所說的動與靜，則其區別祇在關係之方式，而尋常所視為靜的，實際上不一定是靜的物體。

說明 4. 外來的力是對於物體所施的推動，使其

狀態改變，此狀態可爲靜止或等速的直線運動。

此項力祇在推動中，及其施出後，並不留於物體中。蓋物體之保持其新狀態，祇爲惰性力之作用。此附加的力其來源不一，例如由於撞，壓，向心力。

說明 5. 向心力之影響，使一物體向一爲心的任何點被吸引或被推開，或以任何方式求達到該處。

屬此者有重力，能使物體求與地球之中心接近；磁力，能將鐵向磁極吸引；以及尙有一種力，不問其爲何，能使行星恆離開直線運動而以曲線進行。一塊在投石器內旋轉的石，有離開使其旋轉的手之企圖：因此，這石使投石器緊張，且其旋轉愈速，則緊張愈甚，如將他釋放，則即飛去。與該項飛去企圖相反的力，能使石恆不離開手而在圓上者，我名之爲向心力，因此力以手爲圓之中心而向之。在圓上旋轉的物體均是如此。此項物體均有離開

軌道中心之企圖，如無一與此相反的力，使物體受牽制不能出離其軌道，則必循一直線以等速運動脫去；此力我名之爲向心力。一拋出之物，倘不受重力之牽制，則不會向地轉下，而以直線向天空飛去，且如沒有空氣之阻力，其運動爲等速的。祇因重力之故，使其離開了直線運動而傾向地球，而其強弱之度，則與其重量及速度有比例，與物質之量相比其重量愈小，拋出時的速度愈大，則其離直線的軌道愈少。保持直線的軌道愈久。假如一鉛的球以一定的速度循一地平的線由山巔上放射出來，在曲線上進行，於二英里外始落地，則速度加倍或加十倍，所及之遠亦約加倍或加十倍，不過須假定空氣之抵抗力於此不生作用。將速度增加，即可任意的增加所及之遠并減少所作軌道之曲度，使其於10或30或90里距離以外纔落下，或使其繞地球運動，或向天空脫去以至於無限。所拋之物可使其入一軌道繞地球運行；同樣的，月球如有重量，則亦可由重力使其離開直線道路傾向地球入於他

的軌道內，不則亦可由一種其他壓迫月球的力使其如此。如無此項力，即不能使其守此軌道。倘此力比較上太小，即不足使月球離開其直線道路，反之，如太大，則將超過傾向地球繞之以行之度。故此力必須恰恰適當纔好。數學的任務，是在求出這個力，能使一物體在已知的軌道內以一定的速度繼續保持其狀態者；反之，一物體自一已知的處所以一定的速度出發為一已知的力所迴折時，要求得其曲線的道路，此亦為數學之任務。

向心力之量分為三種：絕對的，加速的以及運動的。

說明 6. 向心力之絕對量，即是其較大或較小之分量，視其發生作用的根源為定，而此則由中心點向其四周的部分發出。

例如磁力在各個磁石方面不同，視磁石之大小以及其力之強弱而定。

說明 7. 向心力之加速量，與其在一定時間內所產生之速度相比。

例如同一磁石之力，距離近則力大，距離遠則力小。重力在深谷較大，於高山之巔較小（此則由擺錘試驗所證明），而於離地較遠之處更小（此於後明之）。在距地相等之處重力均相等，因將以太之抵抗力消去後，重力所給予一切下墜物體（重或輕，大或小者）之加速，其強均相等。

說明 8. 向心力之運動量，與其在一定時間內所產生之運動相比。

例如大物體之重量大，小物體之重量小，而於同等的物體方面則近地球時大，在空中遠地時小。此力即是全物體之向心傾向（可說是）他的重量。而由與此相反相等能阻此物體下墜之力乃能知之。

為簡單計，此項分作三種研究過的力之量，可名之為絕對的，加速的以及運動的力，并可將其彼此分別與向中心的物體，物體之處所以及力之中心相屬。運動的力對於物體，為一整個之向心的企圖及傾向，而此心則由各部之傾向合成。加速力對

於物體之處所，爲發生作用之根源，由中心出發向其四周之各處所發出，推動在其中之物體。絕對的力則對於中心，而此則帶有一根源，沒有這個，運動力便不會透過四周的空間而發出。此根源可爲任何一中心物體（如磁石之在磁力中心，地球之在重力中心）或因某種關係爲不可見者。這至少是數學上的概念，而物理上的根源及力之所在則我此處不欲論之。

因此，加速力之與運動力猶如速度之與運動。運動之量於速度乘質量之積求之，運動力則於加速力乘質量之積，而加速力在物體之各部中所生作用之和則爲全物體之運動力。所以，在地面之附近，加速力，即重力，於一切物體方面均等，重力之運動力或重量即與物體一致。試攀登至重力之加速力減少的處所，則重量亦即相當的減少，而恆與重力之加速力乘物體之積相比。例如在加速力減半之處，物體之重量亦減半。又，吸引與推開我用之與加速的運動的同其意義。所謂吸引，推開或傾

向中心這幾個名稱，我沒有分別混雜的用之，蓋我之研究此項力，純就其數學的意義而非物理的。所以讀者由此項解釋中不能推論出來，說我欲說明作用之種類及方式或物理的根源，而如我說及中心點吸引或有中心力時，亦不能說我對於中心點（這是幾何的點）附加了真實的物理的力。

## 附 說

一直到現在，我所欲說明的，是以後所欲用的不習慣名稱，其意義是如何。時間，空間，處所及運動是人所共知，我不須解釋了。我祇須說明，此項量平常是藉官覺來感知的，故不免發生某種偏見，而為免此項偏見起見，可適當的將其分別為絕對的與相對的，真的與貌似似的，以及數學的與尋常的。

I. 絕對的，真的及數學的時間，是自身在那裏流，而因其性質，是等速的且不與外界任何對象

有關係。此時間亦可名之爲綿延 (*Dauer*)。

相對的，貌似及平常的時間，是綿延之可感的及外界的度量，可精確或不齊，而尋常則多用此而不用真時間，如年，月，日，鐘點均是。

II. 絕對的空間，因其性質且無關於外物，恆爲等的且不動的。

相對的空間爲前者之度量或其動的一部分，而由其與其他物體之對待，吾人之感覺乃有以標識之，且尋常即視之爲不動的空間。例如地面內之一部分空間；大氣之一部；天空之一部，以其與地球相對之位置爲定。就類與量而言，絕對的與相對的空間相同，但就數而論則不必恆如此。例如地球運動，則大氣之空間，對於地球而言雖不變，但在絕對空間中則屢易其位置，隨其所至而爲絕對空間之此部分或彼部分。

III. 處所爲物體所佔的空間之部分，就空間之相關可爲絕對的或相對的。

處所爲空間之部分，但並非物體之位置或地

位，亦非其四圍之面。蓋等的固體之處所恆相等，但其面則因形狀可有不同，故不必相等。物體之地位實在並沒有量可言，謂之爲處所，不如謂之爲處所之關係。全體的運動與其各部運動之和相同，故全體的處所改變，與其各部的處所改變之和相同。故處所在全物體之內。

IV. 絕對運動是物體由一個絕對處所至一個其他的絕對處所之轉移。相對運動則爲由一相對的處所至其他一相對的處所之轉移。

在行駛的舟中，物體之相對的處所卽爲其於舟中所在之處，亦卽是物體所佔據的舟中空間之一部因而與舟同時進行者。所謂相對的靜止，卽是物體繼續在此舟中同一的地方，所佔的舟中之空間部分不變。真的靜止，則爲物體繼續在不動的空間中之同一的部分，舟本身以及舟所佔之空隙及其一切內容，亦均在此不動的空間中運動。故如地球爲靜止的，則對於舟爲相對靜止的物體，將實在的絕對的與舟以同樣的速度運動。但如地球亦爲

運動的，則該物體之真的絕對的運動，即由各部所構成，其中有舟在地球上之相對運動，地球在不動空間中之真運動，以及物體在舟中之運動等。由舟在地球上之運動及物體在舟中之運動二者，可得物體在地球上之相對運動。

例如舟所在之地球部分向東運動，其速度為 10010，舟則以風力及駛力向西運動，速度為 10，而舟上的舟子則以速度 1 向東行，如是則舟子實在的絕對的在不動空間中以速度 10001 向東行，而對於地球則相對的以速度 9 向西行。

在天文學上，絕對時間與相對時間用時間方程來區別。自然的日子，尋常用之為時間的度量是看作相等的，但實際上並不相等。天文學家於是按照準確的時間以測量天體運動，因而改正此項不相等。用以準確測量時間的等速運動，簡直可為沒有的事，這是可能的；一切運動可有加速或退遲；惟絕對時間之流則不能有所改變。一切事物的存在，均有此項相同的綿延及保持，不問其運動為速

爲遲或爲零。又，此項綿延可與其感覺所能知的度量區別，而用天文的方程則可由之推得，此方程於測定現象上之必要，在應用擺錘鐘方面，以及木星之衛星有蝕時，均可證明。

與時間段落之次序相似，空間部分之次序亦不變。試將其由其處所運動之，則(可說)將與其自己相離。時間與空間爲其自己的及一切事物的處所；在時間中，所對是相繼次序，在空間中則爲一切事物之位置。空間之真相，在其爲處所中；說原來的處所運動了，這是不合理的。所以這些是絕對的處所，而絕對運動則爲由一處所至其他一處所之轉移。

因此項空間之部分既不能見亦不能藉我們感官之力區分之，故我們不取此而取可見的度量。由事物之位置及其與我們所視爲不動的物體間之距離，我們說明一切處所。我們估量一切運動亦均對於固定的處所而言，蓋我們看見物體之離開這些處所。故我們在人事方面，不用絕對的處所及運動

而用相對的，這不能說不當；但在自然研究上，則必須由感官抽象出來。真正的靜止物體，可用以作爲處所及運動之標識者，事實上很可以沒有。

絕對的及相對的靜止，運動，由其屬性，原因及作用區別之。絕對靜止之屬性在於這裏，即，真正靜止的物體本身間靜止着。不過很可以有這樣的事，一任何物體在恆星之附近或在其很遠以外絕對的靜止着，祇因我們附近物體間相互位置之關係，遂不能知道是否其中之一對於該遠處的仍保持其原有的位置；如是，真正的靜止，由此項物體本身間不能推得。

運動之一屬性在於這裏，即，對於全體保持其原有位置的諸部分，參加其全體之運動，旋轉的物體之一切部分均有離開其運動的軸之傾向，而運動的物體之撞擊，則爲其各部分之聯結的撞擊所成。故如運動的物體旋轉，則對於物體爲相對靜止的諸部分亦均運動。因此，絕對的真正的運動不能自離開視爲靜止的物體之附近中推論得。外界的

物體，我們不能僅視之爲靜止的，必須真爲靜止的纔可；不則一切包含在內的部分，除非將脫離旋轉者之附近的，均將參與後者之真正的運動。如無此項脫離，則亦不能爲真的靜止，祇是視爲靜止而已。蓋旋轉的部分之與包含在內的，猶如全體之外部與其內部或如皮殼之與心核。如皮殼運動則心核亦動，不脫離皮殼之附近，爲整個之部分亦然。

與上述屬性相關者有這樣的屬性。倘如一處所運動，則在其中的物體亦與之運動。脫離一運動的處所之物體，亦參與其處所之運動。因之，一切由運動的處所出發之運動，祇爲整個的及絕對的運動之部分。每個整個的運動，是由物體從其第一處所之運動，該處所自其原來處所之運動，等等所構成，而其最後者則爲一不動的處所，如前所舉舟子之例。所以整個的及絕對的運動祇能用不動的處所來說明，故我將其與不動的處所相屬而相對的運動則與動的相屬。但不動的處所祇有那些永遠保持其同一的相互位置者纔是，故恆爲不動的，

並構成一空間，我名之爲不動的空間。

真正的與相對的運動之所以異，其原因在於影響物體使其發生運動的力。真正的運動，祇當力影響及物體之本身時，纔能發生或改變；但相對的運動之發生或改變，則不必有力影響於物體上，祇須有力影響於其他與此物相關的物體上便行。蓋如該其他物體後退，則其間之相關亦變，而此則卽爲相對的靜止與運動之內容。反之，倘受力影響，則真正的運動必會改變，但相對的運動則不必改變。蓋如此力同時並影響該相關的其他物體，俾其相對的位置仍照原來不變，則由以發生相對運動之關係亦不變。故相對運動變時，真正的運動可不變，而相對運動不變時，真正的運動卻可變。故真正的運動不在此類的關係中。

絕對運動與相對運動所由以分的根源，是離開運動軸之飛力，在僅僅爲相對的旋轉運動方面，此項力不存在；但此項力隨運動之量而小或大。

試懸一器皿於一很長的線上，而使其恆在圓

上旋轉，以至於線成爲很緊張。於是盛之以水而使其並水靜止。如突然的因力之作用使其作相反的旋轉運動，而因線之鬆釋，此運動能保持許久，則水之表面初則爲平的，與器皿旋轉以前無異，繼則力漸漸的影響及於水，器皿使水亦開始旋轉了。於是可見水漸漸的脫離其中心而由器皿之壁上昇而成一中空的樣子。（此項試驗我自己曾做過）。運動愈強則其昇亦愈高，以至於與器皿同速而與之相對的靜止。此項上昇可表明一種傾向，求與運動之軸相脫離，而由此項試驗，可認識水之真正的絕對的旋轉運動並測量之；在相對的方面與此是不同的。在開始時候，水在器皿中之相對運動爲最大，但無此項求離開運動軸之傾向，水並不求緣壁上昇，而爲平的，故真正的旋轉運動尙未發生。嗣後水之相對運動減退，則其緣壁上昇，可表明求離開軸之傾向，且由此傾向可看到水之真正的旋轉運動繼續增加，以至於水在器皿中相對的靜止時，此項運動達於最高度。該項傾向，與水對於其四周物

體之移動無關，故真正的旋轉運動不能用如是的移動以說明之。每個旋轉的物體之實在的運動，簡單的與該項傾向相呼應，爲其特殊的切當的作用。相對的運動，隨其與外物之複雜關係而爲無盡，僅爲關係之影跡，故無有若何真正的作用，除非含有該項簡單的真正的運動在內，則卽不然。

所以照或種見解，我們的太陽系在恆星天內旋轉並有行星隨之行，行星與天體之各個部分，雖對於在其附近的部分爲靜止，實則是運動的。他們的相互位置變動（此與真正靜止的方面不同），且與天體各部分之進行同時參與該項運動。他們既爲旋轉的整個系統之部分，故有離開其軸之傾向。

所以相對的量不是名副其實的量之本身，而是其可感知的度（真的或錯誤的），我們恆用此以代度得的量。如欲由應用上以定字之義，則所謂時間，空間，處所及運動，實在所指爲可感知的度，倘取其度得的量，則語意卽成爲異常而爲純粹數學的了。

有的人將此項名詞由其原來所用度得的量轉譯出來，實對於聖經有不合之處了，但將真的量與其相對的尋常的度相混淆，此亦模糊了數學與自然理論。

欲認識各個物體之真運動，並嚴格的與偽的相分開，固為極難之事，蓋物體於其中作真運動的不動空間之部分，非可由感官知之。不過此事亦非完全無望。所需要的工具，一部分可由與真運動相別的偽運動得之，一部分則可由與真運動不能相分而為其原因的力得之。例如用一線將距離有定的兩球體相連結，而以其公共的重心為中心旋轉之，則將見線緊張，球有離開運動軸之傾向，且可由此以計算旋轉運動之量。試同時於球之兩側施之以任意的但同量的力，使運動增大或減小，則由線之緊張之增加或減小，可知運動之增加或減小，且由此並可認識力必須由球之何側施入，乃能使運動增加最甚；即是，須由球之後側，或，於運動中居後之側施入乃可。但如能認識其後側以及在前

而與之相反之側，則亦必已知道了運動之方向了。如是，無限的空的空間中雖沒有可認識的外物在，足與球資比較，但我們用以上之法，即可認出該項運動之量及方向了。倘該空間中有若干距離很遠的物體，相互間有一定的位置，如天區內之恆星，則由球在該項物體間之相對運動上，不能辨別其運動者究爲此或彼。然如注意於線，觀其有無緊張，如球運動時所必有者，則不難由此推知球運動而其他物體爲靜止的，且可由球在物體間之運動，推論得運動之方向。由原因，作用及表面的區別以推知真正的運動，以及反之，由真正的或貌似運動以推論原因及作用，此爲以下所欲詳明者，本書之作其目的亦在於是。



# 運動之基本定理或定律

第一定律。每個物體倘非有外力影響之使其改變狀態，則該物體仍保持其原來靜止的或等速直線運動的狀態。

礮彈倘非為空氣之阻力所滯礙及重力所改變方向，則仍保持其運動不失。陀螺之各部分，因其凝聚力關係，恆與直線運動相遠，但陀螺之旋轉，倘非空氣之阻力（及摩擦）有以滯礙之，則不會停止。不過行星及彗星等大的物體，在阻力較弱的媒介中，能保持較長時間的直進及循環運動。

第二定律。運動之變化，與動力之作用相比，其所循方向則為力施作用的方向。

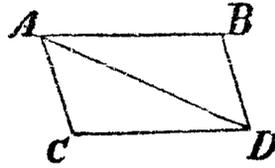
任何一力產生一運動時，其倍大之力產生倍大之運動，三倍者產生三倍，至此項力之作用為一次同時的或為相繼數次的可不問。因運動所向之

目的，恆循產生此運動的力所定之方向，故如物體早即在運動中，則當方向一致時，即增加運動，而如其間有斜角時，則結果隨二方向之和。

第三定律。作用恆與其反作用相等，或，二物體之相互作用恆等，方向則恰相反。

每個對象壓迫或吸引一其他對象時，必被該對象所同其強的壓迫或吸引。如人用手指壓一石，則手指亦受石壓。馬拽一繫於繩上之石時，馬對於石亦同其強的被後拽，因為向兩端緊張的繩，能由使馬向石，石向馬的力鬆釋之；其阻止馬之前進與牽拽石之後退實同其強。設如一物體撞擊一其他者，使後者之運動變化，則前者自身之運動，亦必受後者之力（因二者之交互壓力相等）而變化，其方向恰相反。所與此項作用相等者，非為速度而為運動之變化（假如該物體不受其他的阻滯）。至於速度之變化（向相反的方向），則因運動之變化相等，故與各該物體成反比。此定律在吸引方面亦適用，以下即有說明。

系 1. 二力連結時，物體即循一平行方形之對角線，其所用時間，一如力單獨時循各邊所需者。



第一圖

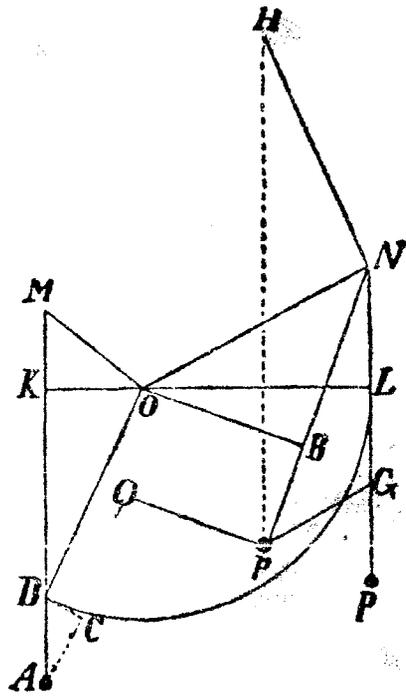
假如一物體單受力  $M$  時由  $A$  引至  $B$ ，單受力  $N$  時由  $A$  引至  $C$ ，則可作平行方形  $ABDC$ ，如兩力連結，在同時間內該物體即由  $A$  引至  $D$  了。因  $N$  緣  $AC$  與  $BD$  平行生作用，故按第二定律，此力不能變化物體因  $M$  而向  $BD$  之速度。緣此，不問  $N$  是否於此生作用，物體必仍於同時間內達到  $BD$ ，而在該時間之末，物體必落在  $BD$  之任何處。仿此，並可知在該時間之末，物體亦必落在  $CD$  之任何處；故知該物體必在二線之交點  $D$  處。按第一定律，該物體以直線由  $A$  至  $D$ 。

系 2. 由此，即知以直線生作用的力  $AD$ ，可由任何二斜生作用的力  $AB$  與  $BD$  所合成；反之，直線的力  $AD$  亦可析成爲二任意的斜力  $AB$  與  $BD$ 。此項合成與解析

在力學上可完全證實。

例如由輪之中心  $O$  作不等的半徑  $OM, ON$ ，並用線  $MA, NP$  懸以重量  $A$  與  $P$ ，則可一究此項重量推動該輪所產生之力。試作一直線  $KOL$  經過  $O$ ，在  $K$  與  $L$  處，此直線與  $MA, NP$  正交。

以  $O$  為心，於  $OK, OL$  二距離中取其長者（此處為  $OL$ ）為半徑作一圓，與  $MA$  線相交於  $D$ 。又作  $OD$  線，以及與之垂直的  $DC$ ，且  $AC$  與  $OD$  平行線上  $K, L, D$  點是否固着於輪之平面



第二圖

內殊無關係，故將重量繫於  $K, L$  或  $D, L$ ，其作用均同。重量  $A$  之力用  $AD$  段表之，並將其析成爲  $AC$  與  $CD$  二支力。 $AC$  支力使  $DO$  半徑直線的離心，故於旋轉輪子上無關，但  $DC$  則垂直的推

動  $DO$ , 故其作用與垂直的作用於  $OL=OD$  上同。

故如

$$P : A = CD : DA,$$

則其作用即與  $P$  之作用相等。因

$$\triangle ADC \sim \triangle DOK,$$

故有  $CD : DA = KO : OD = KO : OL$ 。

從可知  $A, P$  二重量, 其相比適與在同一直線內之  $OK$  與  $OL$  之比相反, 其強度則可相等因而成爲均勢。(此卽是我人所熟知的秤, 槓杆及轆轤之屬性)。倘二重量中有一較大, 不能與該比例相當, 則其推動輪使其旋轉之力亦將較大。

設如重量  $p=P$  一部分懸於  $Np$  線上, 一部分則在斜面  $pG$  上, 則可作  $pH$  與地平線垂直以及  $NH$  與  $pG$  垂直,  $p$  力倘用  $pH$  表之,  $p$  即可析成爲  $pN$  與  $HN$  二支力。今如  $pQ$  平面與  $pN$  線垂直, 並與  $pG$  面相交於與地平相平行之線上, 又如  $p$  僅在  $pQ$  與  $pG$  二面上, 則  $p$  對此二面之壓力爲  $pN$  及  $HN$ 。故如將  $pQ$  面撤去, 俾重量能使線

緊張，則該線即代替了所撤去的面，而其所受之力即為前此壓  $pQ$  面之  $pN$ 。因此，斜線  $pN$  之緊張，與  $PN$  之緊張相比，猶如

$$pN : pH.$$

設  $OB$  與  $pN$  垂直，而

$$p : A = OK : OB,$$

且同時  $p : A = pH : pN$ ,

則二者於旋轉輪子上其效用相等，因而成均勢，此則所易為試驗者。

在二斜面上之重量  $p$ ，其所處地位與楔子在已劈開的物體之內層中間相同，故名為楔與椎之力。楔子向  $pQ$  及  $pG$  之壓力，其與垂直的椎力相比，猶如

$$pN : pH,$$

以及  $HN : pH$ 。

因之， $pQ$  與  $pG$  所受之力其相比亦如

$$pN : HN.$$

螺旋釘之力，亦可以如是之分力法決定之，因

螺旋釘實爲一利用槓杆來推動的楔子。

此系應用之廣，於此可明；著作家用各種方法來敘述的全部力學，與上所述者均有關係，故該定理之真理，實可由各方面證明之。由此，不難推知由輪子，槓杆，動的轆轤，旋螺釘，緊帶等等所構成的機器之力。至動物神經之力，由之以運動其骨骼者，亦同此理。

系 3. 自某一方向的運動之總和上，減去其相反方向的運動之總和，所得的運動之量，不以物體之互相作用而有變。

按第三定律作用恆與其反作用相等，而按第二定律，則二者在運動中所引起之變化適相等相反。故如運動在同方向內進行，則其增加於在前的物體者，適於在後者減去，而其總量不變。若二物體相撞，則二者所失之運動等，而此向相反方向的二運動之差仍不變。

設如一球體  $A$ ，大於一其他球體  $B$  三倍，前者之速度 = 2，後者之速度則爲 10，而後者隨着前

者，則  $A$  之運動量與  $B$  者相比，猶如

$$2 \cdot 3 : 1 \cdot 10 = 6 : 10,$$

其和爲 16. 二者相撞時，如  $A$  獲得 3, 4 或 5 部分，則  $B$  亦必失去如許，因而  $A$  有 9, 10 或 11 部分， $B$  祇有 7, 6 或 5 部分了，但其和則仍爲 16. 倘  $A$  獲得 9, 10, 11 或 12 部分，相撞後仍以同方向前進，其運動量則爲 15, 16, 17 或 18 了，則  $B$  亦失去如許，相撞後或則以 1 部分仍向原方向前進，或則靜止了，或則以 1 或 2 部分向後退，因其全部運動全失，且多失了 1 或 2 部分. 二物體運動之和，於是爲

$$15+1, 16+0, 17-1, \text{ 或 } 18-2,$$

故仍爲 16. 與相撞前無異.

物體分開後前進之運動量如爲已知，則每物體之速度可求得，其方法在假定，相撞前後之速度與相撞前後之運動量爲比較的. 舉例以明之. 在上舉事實中.

相撞前  $A$  之運動量爲 6

相撞後  $A$  之運動量爲 18

相撞前其速度爲 2

相撞後其速度爲  $x$

故  $6 : 18 = 2 : x$ , 即  $x = 6$ .

假如物體非爲球形者，或其運動所循直線不同，因而斜的相撞，則欲求其反擊後之運動時，必須先求在相撞點與二物體相切的平面之位置。於此，在二物體之運動方面須分別其二種，一與此平面相垂直一與之相平行者。因二物體祇在與平面相垂直的方向內互相作用，故後者在二物體方面相撞前與相撞後不變，但前者，即垂直的運動，則起了相等相反的變化，而向同目標的運動之和以及向相反目標的運動之差與前仍無異。

由於此項反擊，亦可發生物體繞中心之循環運動，但在下文內我不想研究此項事實，且欲將一切屬於此範圍內者證明之，亦太寬泛了。

系 4. 二物體或多物體之公共重心，不以物體本身間之作用而變更及其靜止或運動之

狀態，因而該重心（如無外來作用或阻礙）或則靜止或則以直線作等速運動。

例如有二點以等速直線運動前進，今按一定比例將其間之距離分之，則此分點或則靜止着，或則以直線作等速的運動。以後 § 58 及系內，當證明其適用於同平面內之運動；用相同的方法，並可推廣之至於空間中之運動。故如有任何多的物體以直線作等速運動前進，則其中任何二者之公共重心或則靜止或則直線的等速前進，因為連結該二物體之線，以一定比例為其公共重心所分。仿此，此二物體及一第三者之公共重心或則靜止或則以直線等速的前進，因為此重心將連結第三者之重心及前二者之公共重心的線以一定的比例分割了。此三物體之公共重心與一第四者其關係亦如此，等等，以至於無窮。

一系統的物體，既無相互間的作用亦無一切外來的作用，因而各個物體均以直線作等速運動者，則其公共的重心亦即或為靜止或以直線作等

速運動。

在二物體所成之系統內，如二物體間有相互作用，則因二物體重心及其公共重心間之二距離相比與物體自身之相比適反，故其向公共重心或離此的相對運動亦必相等。因運動方面之相等相反的變化，亦即因此項物體相互間之作用，該重心既不會加速亦不會遲緩，且其靜止或運動的狀態亦不致受變化。在一多物體所成之系統內，如每二物體間有相互作用，其全系統的公共重心之靜止或運動狀態絕不會變化。因為該項作用不能改變該二物體的公共重心之狀態，而其餘的重心則並不受其影響，蓋與此是無關的。此二特殊重心之距離，被所有全數物體之公共重心所分成爲段，而此項段則與物體之總和成反比。因該二重心之靜止或運動狀態仍保持，故所有全數物體之公共重心亦必如此。但在此項系統內，一切作用或則爲每二物體中間者，或則由此項每二物體間之作用所合成，故對於其公共重心之靜止或運動狀態不能發

生若何作用。因而該公共重心，如物體間無相互作用一樣，或則靜止或則以直線作等速運動前進，物體與物體自身間之作用，不能對之有所障礙，除非有外來的力將其狀態變更了。所以在保持靜止或運動的狀態方面，多物體所成的系統與單獨的物體適用同樣的定律。不問單獨物體或多物體所成的系統，其前進運動必須以其重心之運動為估計之方。

系 5. 不問一空間靜止着或以等速作直線運動，但如不作循環運行，則該空間內所涵之物體，其本身間之運動，不受影響。

向同方向的各運動之差以及向異方向的運動之和，(按假定)開始時在二種狀況下相同，而由此項差或和發生運動及相撞，由之即有物體間之相互作用。故按第二定律，在二種狀況下其相遇之作用必等，所以一種狀況下本身間之運動與他種狀況下者仍相等。此可用試驗以明白的證明之。在舟內，不問舟靜止着或以直線作等速運動，其一切運

動均同等進行。

系 6. 倘物體本身間以任何方法運動，而有相等的加速力以平行的方向向之生作用，則物體本身間仍繼續以同法運動，一若未受此項力之作用者然。

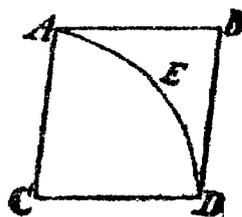
該項力既同其強弱（與所推動的物體之量相比）且以平行的方向生作用，故對於一切物體（以速度而言）按之第二定律作相等的推動，因而不會變更其相互間之運動及位置。

## 附 註

以上所敘的原理，均為數學家所採取，而有各種試驗為之證明的。由第一第二二定律以及第一第二二系，加里賴 (*Galilei*) 曾發見重體之下墜與時間之平方相比，而拋出的物體則以拋物線運動；倘該項運動不受空氣抵抗力之阻滯，則與經驗即切合。基於時鐘方面之日常經驗而作的擺錘振動

之歷久試驗，其證明亦與此項定律及系有關。當物體下墜時，整勻的重力即以等的力影響之（因在各個相等的時間段內，重力之作用相等），因而產生相等的速度。在全部時間內，重力以全個的力影響之而產生全個的速度，二者均與時間相比。在相比的時間內所作之軌道相比，猶如速度與時間之合相比，即是，與時間之平方相比。倘將一物體向上拋擲，則整勻的重力對之發生影響，而減少其與時間相比的速度。上昇至最高度的時間其比猶如着着減少的速度，而該項所及之高度則如速度與時間之聯合，或可說與速度之平方相比。由拋擲所產生緣直線而發出的物體之運動，必與由重力而生的運動相組合。

倘單由拋擲的運動，一物體  $A$  於一定時間內能經過直線  $AB$ ，而單由下墜運動在同時間內能經過  $AC$ ，則在組合的運動方面，於該

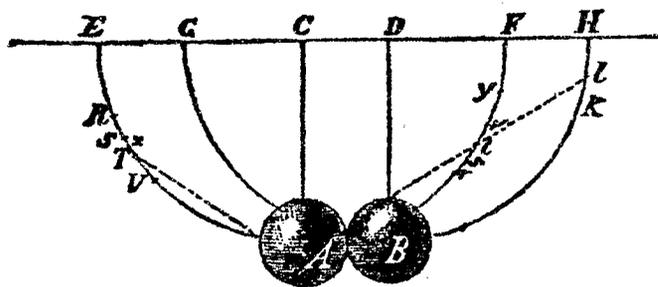


第三圖

時間之末，物體即至  $D$  點。其所作的  $AED$  曲線，

是一拋物線，此線與  $AB$  相切於  $A$ ，其縱坐標  $BD$  則與  $AB^2$  成比例。由以上定律及第三定律，雷氏 (*Christoph Wren*)，華里士 (*Johann Wallis*) 及許金司 (*Christian Huygens*) 三人(本世紀最初的幾何學者) 曾各不相謀的各自發見了兩物體相撞及反擊的規律，并差不多在同時向皇家學會提出，而關於其定律，則三人所發見者完全相同。先發表此的為華里士，次為雷氏，然後為許金司，雷氏并給學會作了一個擺錘試驗以證明其所發見者之無謬，而著名的馬利亞 (*Mariotte*) 則認此試驗為有價值。但欲知此試驗與理論之切合，必須顧及空氣之阻力以及相撞物體之彈性。

今懸二物體  $A$  及  $B$  於二相平行並相等的線



第 四 圖

$CA$  及  $DB$  上, 下端在中心點  $C$  及  $D$ . 由此中心點并用此項半徑作半圓  $EAF$  及  $GBH$ , 各爲其半徑  $CA$  及  $DB$  所平分. 試將  $A$  移至  $EAF$  之任何點  $R$ , 并將  $B$  移開, 然後放之使下. 經一次振動後  $A$  或者回到  $V$  點, 如是則  $RV$  卽爲因空氣阻力所發生之沮滯. 今設  $ST = \frac{1}{4}RV$ , 并在  $RV$  之中間, 則

$$RS = TV,$$

以及  $RS : ST = 3 : 2$ ,

而  $ST$  弧可很近似的表出由  $S$  至  $A$  時空氣阻力所發生之沮滯. 於是將  $B$  重復移於原處. 倘  $A$  由  $S$  下來, 則其至反擊點  $A$  時之速度可無甚大差與在真空中自  $T$  下來者相同. 此速度可以  $TA$  弦表之, 蓋幾何學上有一定理, 卽擺錘在最低點之速度其比猶如所經過的弧上之弦. 此二物體相擊以後,  $A$  到了  $s$ ,  $B$  則至  $k$ , 如將  $B$  移開,  $A$  卽由  $v$  下來, 經過一次振動後回至於  $r$ . 今如

$$st = \frac{1}{4}rv$$

且在  $rv$  之中間, 俾

$$rs = tv,$$

則  $sA$  弦可近似的表出  $A$  反擊後在  $A$  點之速度，而  $t$  則為  $A$  不受空氣阻力時所可達到的真處所。用同法可修正  $k$  點，以得  $l$  點，為不受空氣阻力時所可昇到者。如是，我們作試驗時，可彷彿如在真空中一般。在決定剛剛相撞前物體  $A$  在  $A$  點之運動，須用代表其速度的弦  $TA$ ，至剛剛相撞後之運動則用  $tA$  弦。仿此，欲得  $B$  剛剛相撞後之運動，須用  $lB$  弦。

用同樣的方法，假如物體由不同的處所下來，我們就得考究兩物體在反擊前後之運動，再將其作一比較，以研究相撞之影響。

我曾用此法以 10 尺長的擺錘作過試驗，而且所用的物體有相等有不相等。於此，我曾這樣做法，使物體由很大的距離，8, 12 或 16 尺者，相撞，結果知道倘物體直接的互相碰到，則所得差率沒有一次有 3 寸者，不問兩物體運動向相反方向之變化為如何大；他方面并知作用與反作用恆相等。

倘  $A$  以 9 成運動落於靜止的  $B$  上，經反擊後失去 7 成而以 2 成前進，則  $B$  必以 7 成躍回。

設如  $A$  以 12 成， $B$  以 6 成相遇，而  $A$  以 2 成倒回，則  $B$  即以 8 成回去，兩方同失去 14 成。蓋如  $A$  失去 12 成，則已無餘者，再失去 2 成，即向相反的方向以 2 成運動了；同此， $B$  失去 14 成後所負為 8，故以 8 成向相反的方向運動。

倘兩物體向同方向運動， $A$  較速以 14 成， $B$  較遲以 5 成，前者相撞後以 5 成仍向前進，則  $B$  之運動，即成為 14，因  $A$  之 9 成轉讓於  $B$  了，等等。兩物體相撞後，運動之量絕不會有所變，此則可由同向的運動之和以及異向的運動之差知之；縱有 1 至 2'' 之錯，我寧可歸之於不容易精細審量各節目的困難上。例如欲將擺錘同時放下，俾二物體於最低點  $A, B$  相遇，以及將相撞後物體所昇到的  $s, k$  點畫出，這些都是難事。即球的本身，亦有各部分密度不勻以及由其他原因而產生的組織之差等等，可發生差失於其間。

因爲或有人要反對，說此項試驗所欲證明的規律，實在是先假定了絕對堅硬或至少完全彈性的物體，而在自然中則此項物體是沒有的，所以我須補明，即，該項所述的試驗在柔的或硬的物體方面均可，與硬的條件實無關係。倘用不完全硬的物體作試驗，則須按彈力之大小減少其反擊至一定比例。雷氏及許金司之理論中，絕對堅硬的物體以相遇時之速度相折回。在完全彈性的物體方面可更確的證明之。在不完全彈性的物體方面，折回的速度須同時與彈力減少，蓋此（除非物體之部分在相撞時受傷，或如在椎下之受擴張）爲確定的，其影響則使物體以或種相對的速度折回，此速度與相撞之相對速度有一定之比。我曾用球試驗過此，球爲棉所製成，但已經壓之甚堅。

我先將擺錘釋去，量其反擊之量，即得彈力之量。用此力再求別的相撞方面反擊之量，試驗結果完全相符。球折回時之相對速度與相撞之速度相比約如

5 : 9.

在鋼球方面，其速度與此略同，但在柔木所製者方面，則較少了。在玻璃的方面，約略為

$$15 : 16.$$

用此項方法，第三定律之關於撞擊及反擊者，已為理論所證明，經驗所得亦與之切合。

在吸引的方面，此事我如下的指明之。我們設想在互相吸引的二物體  $A$  與  $B$  中間，有一阻物存在，因而使此二物體不能相遇。倘  $A$  向  $B$  較強的被吸引，則阻物之被  $A$  所壓較之被  $B$  所壓為甚，因而不能成均勢。如是，一面過重的壓力能使此三者（二物體及其間之阻物）所成之系統向  $B$  的方向運動，在無阻的空間內，其加速的運動可直至於無限。然此為不合理之事，與第一定律相乖違；蓋按第一定律，此系統必保持其靜止或等速直線運動之狀態。緣此，可知二物體之壓其中間阻物，力必相等，是即相吸之強亦相等。我曾用一磁石及鐵條作過一試驗。這磁石與鐵條均各置於器皿中，將其浮在靜止的水上，相距不遠，於是二者

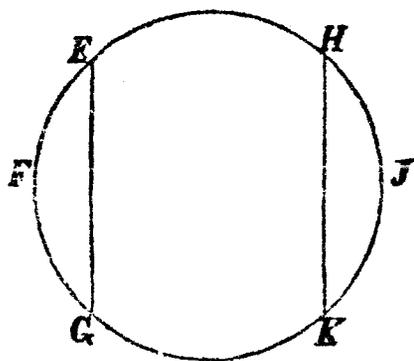
不相排斥，而因互相吸引的關係，漸漸的相接近，及至均勢狀態下，二者均靜止了。地球與其部分間之交互重力作用亦是如此。試設想用一平面  $EG$  將地球  $FJ$  切成爲  $EGF$  與  $EGJ$  之二部，如是則其交互的重量必相等。試用一其他平面

$HK$  與  $EG$  相平行，

將大的部分  $EJG$  切成爲  $EGKH$  及  $HKJ$  二部，使

$$HKJ = EGF,$$

則其中間的部分  $EGKH$  因其本身的重量不會向兩旁之任何一部相傾，而在其中間以均勢浮着并靜止着。但其一旁的  $HKJ$  則以其全部重量置在此中間之部分上，推之使其向其他一旁的



第五圖

$HGF$ 。因此， $HKJ + EGKH$  或即  $EGJ$  全部傾向  $EGF$  而被其吸引的力，必等於  $HKJ$  之重，即是，等於  $EGF$  之重。所以  $EGJ$  與  $EGF$  兩部分

之交互的重量是相等的。要不然，則在無阻的以太中浮着的地球必對於較大的重量退讓，而飛入無限遠去了。

物體之速度其比如其內在的力之反者，當撞擊及反擊時其所含之能性相等；在機械的器物中其運動的力亦是如此，倘速度之比如力之反，則在相反的傾向，即互相成爲均勢，兩個重量能同樣的動秤之桿，祇須在後者振動時，其比如其上下速度之反，即是，以直線上下的兩個重量，倘其比與其懸點與軸間距離之比相反，則此兩重量之能性相等。倘在斜面或其他對象上斜的上昇或下降，而如其比如垂直的上昇下降之反，則亦爲能性相等，至於須垂直者，則因此爲重力之方向。在轆轤或槓杆機械方面，拉住繩索及使重物不下墜的手之力，假使其與直上或斜上的重物之反比，猶如手之速度與垂直上昇的重物之速度相比，則亦如上所說之理。在小輪所構成的機器如鐘錶及類此之具方面，推動輪子前進及其阻力，倘其比如輪子速度之

反，則即相互成均勢。壓力機之螺旋釘，其力與旋轉此釘之手力相比。猶如後者之旋轉運動與壓力機向物體施壓之速度相比。楔子向已劈開的木內兩面所施之壓力，與椎擊楔之力相比，猶如後者施擊方向內之速度與木之部分離楔而開之速度相比。一切機械之動作均如是。機械之效用即在於減少速度以增加力，以及反之，因而每種適當的器械能解決這問題：用一已知的力以運動一已知的重物，或，用一已知的力以制勝任何一已知的阻力。

倘機械如是構造，使作用的部分之速度與阻滯的部分之速度相比，猶如力之反比，則作用的力即與阻力成均勢，而如前者較大，即能將後者制勝了。如能充分的較大，俾可制勝一切阻力，如相觸物體及相摩物體之摩擦阻力，相接物體或須相分開的物體之結合阻力，以及所欲舉起的重量之阻力等，則每種制勝後所存之餘力，即產生與自己相比的加速，此加速之一部分在機械之各部，一部分則在阻力的物體方面發現出來。

這裏的用意，并不想將力學拿來研究，我們祇想指出這第三定律之所及範圍及其所至之確定性。蓋如我們就其發生作用的原因，力及速度聯合的以量此作用，而就各部之速度，及由摩擦，結合力，重量及加速等所產生之阻力以量其反作用，則每種機械之應用方面，此作用與其反作用恆相等。不問發生作用的原因藉機械之媒介而能推及如何的遠，以及後來能及於何種阻力的物體，但就最後的計量言之，恆與其反作用為相等的。

# 論物體之運動

## 第一編

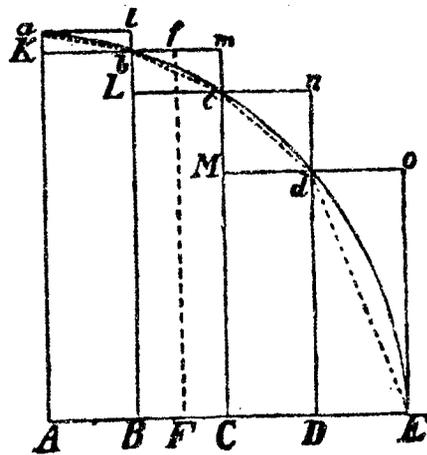
### 第一章 論首末比之方法

#### 用此可證明以後之理者

§1. 補題。 量以及量之比，在一定時間內恆趨向相等且在該時間未修以前能互相接近，至於其差小於任何已知之量者，最後必相等。

設如不然，可設其最後之差為  $D$ 。如是則其互相接近之度決不能超過此已知之差，此則與所設不合。

§2. 補題。 設  $AacE$  為任何一圖形，由  $Aa$ ， $AE$  直線以及曲線  $acE$  所構成，今於



第 六 圖

其上作若干長方形  $Ab, Bc, Cd,$  等等, 其底線  $AB, BC, CD,$  等等均相等, 其邊為  $Bb, Cc, Dd,$  等等; 又作若干長方形  $aKbl, bLem, cMdn,$  等等. 倘將此項長方形之底線  $AB = BC = CD$  等等縮小, 同時並增加其長方形之數以至於無限, 則最後該內切形即與其外切形及原來的曲線形相等, 即是

$$AKbLcMdD = AalbmendoE = AabcdE.$$

蓋內切形與外切形之差為

$$aKbl + bLem + eMdn + dDEo = AalB,$$

因為  $AB = BC = CD = DE$ . 將  $AB$  減小至無限小時,  $AalB$  即小於任何可知之數, 所以(按 §1.) 內切形與外切形最後相等, 而在其中間的曲線形更可相等了. 此即所欲證者

§3. 補題. 即使  $AB, BC, CD,$  等等不相等, 祇須將其減小至無限時, 該三個圖形之最後比率亦仍相等.

設  $AF$  為最大之底線, 則可完成  $FAKf$  長方形. 此長方形固較內切形及外切形之差為大, 但如

將  $AF$  減小至無限，則此長方形亦即小於任何可作的長方形了，此即所欲證者。

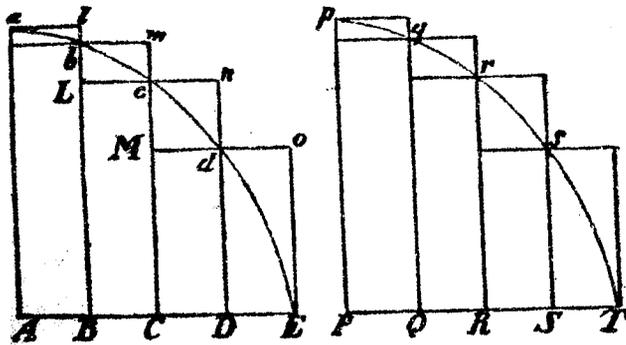
系 1. 所以將成爲零的各長方形之最後總和，在任何關係下恆與原來之曲線形相合。

系 2. 並且，各該弧之所屬弦  $ab, bc, cd$  等等所包含之直線形，亦與曲線形最後相合。

系 3. 與弦相當的切線所構成的直線形亦適用此理。

系 4. 所以就其周  $acE$  言之，這些最後的圖形不是直線的，而是直線之曲界。

§4. 補題. 倘於  $AacE$  及  $PprT$  二圖形內，仿前作二列長方形，其多寡之數相等，並將其底線減



第七圖

第八圖

小至無限，而如其一圖形內各個長方形與他圖形內各個之最後比均相同，則  $AacE$  與  $PprT$  二形之相比亦同此。

蓋各個長方形之和其比與長方形之比同，而按 §3. 每個圖形內長方形之和與圖形本身為相等，故二形亦同此相比。

系. 所以將二個任何種類之量，分之為同多的部分，而如將其數增加至無限，將其量減小至無限時，此項部分間，即第一個對第一個，第二個對第二個，等等，其比有定，則整個量之相比亦同此。

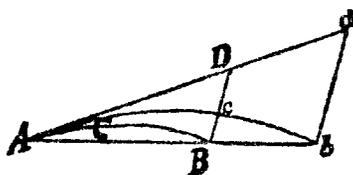
蓋如將以上補題內圖形之長方形作為此處所論之部分，則該項部分之和亦可視為長方形之和。所以當其數增加至無限，長方形之大減小至無限時，此項和之比與長方形之比同，亦即是一個部分與他部分之最後比(按照所設)。

§5. 補題. 相似形之相當邊均為比較的，直線的與曲線的均然，而其面積相比則如邊之平方相比。

§6. 補題. 設位置已完的一弧  $ACB$  爲其弦  $AB$  所綑緊, 而在其某一點  $A$ , 在連續的曲率之中, 有一直線  $AD$  與之相切, 則如  $A$  與  $B$  二點相接近而終至相合時, 該弦與切線間之角  $BAD$  即減小至無限終至於成爲零。

蓋如該角不成爲零, 則  $ACB$  弧與  $AD$  切線間必含有角, 而此與直線所成者相等, 如是則  $A$  點之曲率即不連續, 與所設相違。亦可如是明之: 將  $A$   $B$  引長至  $b$ ,  $AD$  引長

至  $d$ , 則當  $A, B$  相合時,  $Ab$  已無  $AB$  部分在曲線內, 故必  $Ab$  與  $Ad$  相



第九圖

合或  $Ab$  在  $Ad$  與曲線之間, 後者與曲率之性質相違, 故祇能爲前者, 此即所欲證者。

§7. 補題. 在同樣的假定下, 弦, 弧及切線間相互之最後比爲相等的比。

當  $B$  向  $A$  接近時, 試將  $AB$  及  $AD$  各向  $b$  及  $d$  引長, 並作

$bd$  與  $BD$  相平行,

而且恆

$$ACB \sim Acb.$$

今如  $A$  與  $B$  相合, 則按 § 6.  $dAb$  角即成爲零, 因此,  $Ab, Ad$  及在其間的  $Acb$  弧即相合而相等. 所以與此相比的直線  $AB, AD$  及  $ACB$  弧亦即成爲零, 而其最後的比即爲相等的, 此即所欲證者。

系 1. 倘作

$BF$  與  $AD$  相平行,

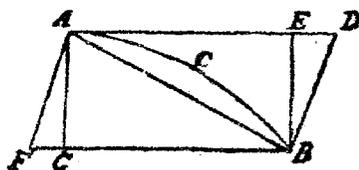
而如  $BF$  與  $AF$  相交於

$F$ , 則  $BF$  與將成爲零的

$AB$  弧之比最後爲相等的比. 蓋如將  $AFBD$  平行  
方形作成後, 即有

$$BF = BD.$$

系 2. 經過  $B$  與  $A$  作若干直線  $BD, BE, AF, AG$ , 與切線  $AD$  及與此平行的直線  $BF$  相交於  $D, E, F, G$ , 則一切橫段  $AD, AE, BF, BG$  及  $AB$  弦以及  $ACB$  弧之最後比爲相等的比。



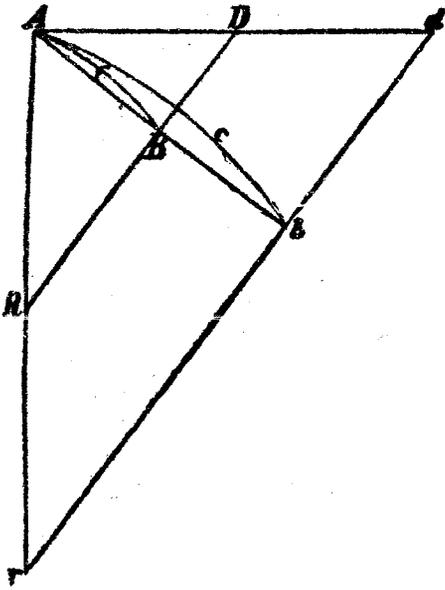
第十圖

系 3. 所以在任何一個關於此項最後比之證明方面, 此項直線每條均可代其他一條而應用之。

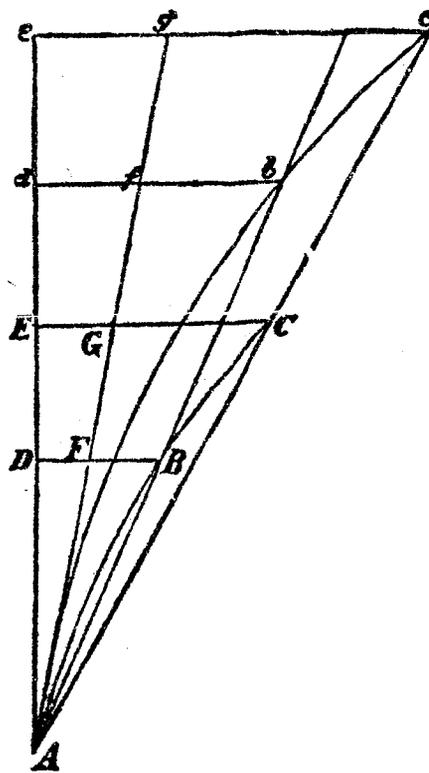
§8. 補題. 設已知直線  $AB, BR$  與  $ACB$  弧,  $AB$  弦及  $AD$  切線作成以下之三角形:

$$ACBR, ABR, ADR,$$

而  $A$  與  $B$  點互相接近, 則其最後形式必成爲相似, 而其最後比則爲相等的比。



第十一圖



第十二圖

試將  $AB, AD, AR$  引長至  $b, d, r$ , 並作

$rbd$  與  $RBD$  平行,

以及

$$\sphericalangle Acb \sphericalangle \sphericalangle ACB.$$

今如  $A$  與  $B$  相合, 則  $bAd$  角即成爲零, 故

$$Acbr, Abr, Adr$$

三個三角形即相合, 而與之相似的三角形

$$ACBR, ABR, ADR$$

亦即相合。此即所欲證者。

系. 所以凡論其最後比之處, 此項三角可不分彼此通用。

§9, 補題. 位置已知的曲線  $ABC$  及直線  $AE$  相交於  $A$ , 與橫坐標  $AD, AE$  相當的有縱坐標  $DB, EC$ . 今使  $B$  及  $C$  點向  $A$  接近, 則三角形  $ADB$  及  $AEC$  相比, 最後成爲邊之平方相比。

試於引長的線  $AD$  上取二點  $d$  及  $e$ , 使

$$AD : AE = Ad : Ae,$$

則相當的即有

$$DB : db = EC : ec.$$

又將  $AC$  引長至  $c$ , 作

$$Abc \rightsquigarrow ABC,$$

並作  $Ag$  切線於二曲線, 與縱坐標相交於

$$F, G, f, g,$$

今如  $B$  及  $C$  與  $A$  相合, 則  $cAg$  即成爲零, 而曲線形

$$Abd, Ace$$

即與直線形

$$Afd, Age$$

相合. 按 § 5. 其比即如

$$Ad^2 : Ae^2.$$

但  $Abd, Ace$  之面積恆與  $ABD, ACE$  之面積相比,  $Ad, Ae$  邊亦恆與  $AD, AE$  邊相比. 故其最後比爲

$$ABD : ACE = AD^2 : AE^2.$$

此即所欲證者。

§ 10. 補題. 物體受某種有限的力之作用而作

軌道時，不問該力爲一定不變的或爲恆增或恆減的，其所作軌道在開初運動時與時間之平方相比。

蓋如將時間用  $AD$ ,  $AE$  (前圖) 表出，所產生的速度則以  $DB$ ,  $EC$  表之，則  $ABD$  與  $ACE$  面積即表出以此項速度所作的軌道，而此則在運動之始(按 § 9.) 與時間  $AD$ ,  $AE$  之平方相比。此即所欲證者。

系 1. 由此不難得以下之推論：在相比的時間內，物體作出相似形之相似部分，而如有同等的力在該項部分以相似的方法侵入，則產生軌道之更動，其量法則可以圖形方面(倘無該項力侵入)物體本來所可達的處所爲出發。所以此項更動之比，約略如產生此項更動的時間之平方相比。

系 2. 但由相比的力以相似的方法侵入者，其更動之比，如力與時間之平方二者並用之比。

系 3. 物體在各種力之作用下所作的任何空間均適用此。此項空間，在運動之開始，其比如力及時間之平方二者並用之比。

系 4. 所以在運動之開始，力之比如所作的軌道之正而如時間之平方之反。

系 5. 又，時間之平方如所作之軌道之正，如力之反。

§ 10a. 附註 如將不同種類的不定量相比較，而說：其中某一個之比猶如其他一個之正或反比，則此語之意義當如是了解之：前者之增加或減小，其比猶如後者或其倒數。又如說：其中之一，其比猶如其他二個或多個之正比或反比；則其意義為：前者增加或減小之比，為後者或其倒數的增加或減小之諸比之組合。例如  $A$  之比，如  $B$  之正， $C$  之正， $D$  之反，則  $A$  之增加或減小，其比如

$$BC \cdot \frac{1}{D},$$

此即是說， $A$  與  $\frac{BC}{D}$  之間有一定的比。

§ 11. 補題. 設  $AD$  為  $AbB$  曲線上之切線， $BD$  則為自  $B$  所作之任意直線，如是則  $BD$  當成爲零時，最後與其所屬弦  $AB$  之平方相比。

第一事。 設  $BD$  與  $AD$  相垂直，試作  $BG$  與

$AB, AG$  與  $AD$  垂直, 使此二垂直線於  $G$  相交. 於是使  $D, B, G$  點向  $d, b, g$  點退,  $J$  則為  $D$  與  $B$  向  $A$  接近時  $AG$  與  $BG$  二線之最後交點. 於此, 不難知  $GJ$  可小於任何可知之數.

試設想經過  $A, B, G$  及  $A, b, g$  各作圓, 而因  $B, b$  處有直角, 故  $AG, Ag$  為其半徑; 如是則

$$AB^2 = AC \cdot AG = BD \cdot AG,$$

$$Ab^2 = Ac \cdot Ag = bd \cdot Ag,$$

因而

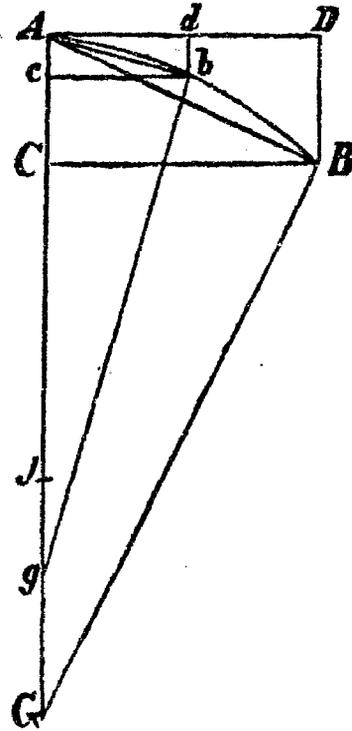
$$AB^2 : Ab^2 = AG \cdot BD : Ag \cdot bd. \quad (A)$$

但  $JG$  可使其小於任何可知之數, 故亦可使  $AG$  與  $Ag$  之差小於任何小之數, 故按 (A)

$$AB^2 : Ab^2$$

與

$$BD : bd$$



第十三圖

之差亦可小於任何可知之數。故按 § 1. 最後即得

$$AB^2 : Ab^2 = BD : bd. \quad (B)$$

此即所欲證者。

第二事。使  $BD$  線對於  $AD$  線取一任意的  
位置，例如  $BD'$ ，則如  $bd'$  與  $BD'$  平行，有

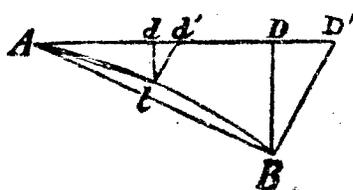
$$BD' : bd' = BD : bd,$$

因而亦有

$$AB^2 : Ab^2 = BD' : bd' \quad (C)$$

此即所欲證者。

第三事。倘  $D$  角非爲已知者，而  $BD$  線向  
一某點收斂，或按一某種定  
律而作者，則  $D$  與  $d$  二角仍  
互相接近，其差可小於任何  
已知數。故按 § 1. 二者最後



第十四圖

必相等，而  $BD$  與  $bd$  之比仍如前。此即所欲證者。

系 1. 因切線  $AD, Ad,$

弧  $AB, Ab,$

以及正弦  $BC, bc,$

最後均與弦  $AB, Ab$  可相等,故其平方最後相比亦如

$$BD : bd.$$

系 2. 因

$$\triangle ADB : \triangle Adb = AD \cdot DB : Ad \cdot db,$$

而最後  $AD^2 : Ad^2 = DB : db,$

故最後亦即有

$$(D) \begin{cases} ADB : Adb = AD^3 : Ad^3 = DB^{\frac{3}{2}} : Db^{\frac{3}{2}} \\ ABC : Abc = BC^3 : bc^3. \end{cases}$$

系 3. 因最後

$$DB \text{ 與 } Db \text{ 平行,}$$

而  $DB : db = AD^2 : Ad^2.$

故曲線形  $ADB, Adb$ , 按之拋物線之性質, 爲直線形  $ADB, Adb$  之  $\frac{2}{3}$ , 而其段  $AB, Ab$  爲同三角形之  $\frac{1}{3}$ . 故此項曲線形以及此項段之比, 猶如

$$AD^3 : Ad^3 = \frown AB^3 : \frown Ab^3 = \text{弦 } AB^3 : \text{弦 } Ab^3.$$

§ 12. 附註. 在一切這些命題內, 我們均預先假定, 相切角既非無限的大於亦不無限的小於圓

與其切線所作之相切角，即是說， $A$  點之曲率既不為無限大亦不為無限小，而  $AJ$  距離則為有盡的。

我們亦可設  $DB$  與  $AD^8$  相比，如是則不能經過  $A$  點在切線  $AD$  與曲線  $AB$  之間作一圓，而相切角將較圓方面之相切角為無限小。由同樣的理由，倘依次使  $DB$  與

$$AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, \text{ 等等}$$

相比，即得依次直下至於無窮的一列相切角，其在後的每一個較之在其前的為無限小。反之，倘使  $DB$  依次與

$$AD^2, AD^{\frac{3}{2}}, AD^{\frac{4}{3}}, AD^{\frac{5}{4}}, \text{ 等等}$$

相比，則所得之一列相切角，其第一個與圓方面者相同，其第二個以下，每個較在其前者大無限。但在每二個此項角之中間，我們還可以作一其他的列加入，此列向二方均伸入無限，其中每在後的一個較之其前者大無限。例如在  $AD^2$  與  $AD^3$  之間，可插入

$$AD^{\frac{13}{6}}, AD^{\frac{11}{5}}, AD^{\frac{9}{4}}, AD^{\frac{7}{3}}, AD^{\frac{5}{2}}, \text{等等.}$$

在此列之每二項中間又可插入一新列，為介在中間的角所成，相差可無限。於此，自然界中實沒有限制。

在曲線及其所圍的面積方面所已證明者，均不難應用之於固體的曲面及固體本身。我所以將這些補題先證出，是要避免以後之冗長的所謂矛盾證法，如古代之幾何者所應用的。用不可分的量這個方法，論證實可簡略多了。但不可分的量這個方法較為生硬，被看作較遠於幾何的，故我之證以下諸定理，寧可用將成爲零的量之最後和數及比率，以及用正增加的量之最先和數及比率；所以我將該項界限之論證儘簡單的先一述之。凡用不可分的量之法所可得者，此亦可得之；我們對於既得原則之應用，亦更可確實。

又，以下我們將量看作由極微的部分所成，或不用直線而用無限小的曲線，則我的意思，在指將成爲零的小部分而非爲不可分的部分，在用和數

及比率之極限而非確定的部分之和數及比率；我希望常常回到以前諸補題方面所用之方法以求此項證法之核心。

或者有人可以批評，所謂將成爲零的量之最後比是沒有的，因爲在成爲零之前，即非最後，而在既成爲零以後，則又簡直無所謂比了。但根據同樣的理由，我們亦可說，一個向某處進行的物體，沒有最後的速度，因爲在未達該處之前，即非最後，在既達之後則又沒有速度了。對於此項批評的回答甚簡。所謂最後速度，是物體在達到該處取消其運動以前所不能有的運動之速度，不是在達到以後之速度，而是剛剛在達到該處時的速度，物體於以接觸該處而停止其繼續運動者。同此，所謂將成爲零的量之最後比，是指以此成零，而非在成零之前或後的。又所謂方產生的量之最先比，亦卽是以此纔產生量的比；而所謂最先及最後和數則爲以此開始或以此終止的和數（或將成爲較大或較小）。在運動之末，其速度有一界限，爲此所不能超

出者；此即是最後速度。在一切正開始將終止的量及比方面，亦有此項界限。因為此界限是固着而有定的，故求此項界限乃是真正的幾何上之職務。但一切屬於幾何的，均可在旁的幾何求法或證法方面適當的應用之。

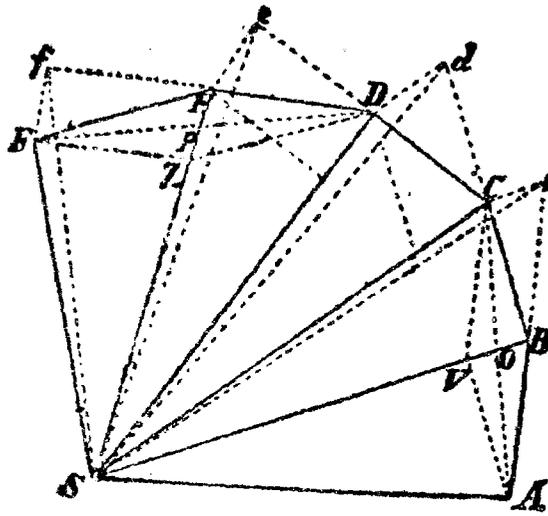
或者亦可以說，倘將成爲零的量之最後比已知，則其最後量亦必已知，因而每一量均由不可分的一部分所成，但歐几里得在他所著的提要之第 10 卷中剛剛有相反的證明。但是這一個批評，實在樹立在不正確的假設上。量與之成爲零的最後比，在事實上並非爲最後量之比，而爲某種界限，爲恆向減小的量之比所恆向之接近者，其接近之度，可使其差小於任何可知之數，但終不能超出此界限，且在此項量減小至無限以前，亦不能早先達到此界限。在無限大的量方面，此理較爲易見。倘二個量之差已知，而此二量均增加至無限，則其最後的比亦已知，即相等的比；但該項量之最後或其極大量則非已知（惟其比則爲上述的已知者）。

---

所以我以後爲便利敘述計而用極小的，將成爲零的或最後的量，則所指並非爲其量已定的量，而爲必須無限減小之的量。

## 第二章 論向心力之求法

§ 13. 定理。 倘物體在軌道內運動，而其半徑恆向不動的力之中心，則其所作的面，在固定的平面內而與時間相比。



第十五圖

試將時間分爲均段，則因有力影響之，故物體在時間之第一段內作一線， $AB$ 。倘沒有什麼其他阻礙，即此物體在第二時間段內即直線的向  $c$  進

行,而

$$Bc = AB;$$

今作  $AS, BS, cS$  半徑向力之中心  $S$ , 則

$$(A) \quad \triangle ASB = \triangle BSc.$$

但當物體到  $B$  時, 向心力很強的影響之, 使其不循直線  $Bc$  而由  $BC$  前進. 今作

$$cC \text{ 與 } BS \text{ 平行,}$$

並使  $cC$  與  $BC$  相交於  $C$ , 則在第二時間段之末 (按定律, 系 1) 物體即到  $C$  點, 且與  $SAB$  在同一平面內. 今再作  $SC$ , 則因

$$cC \text{ 與 } BS \text{ 平行,}$$

故

$$\triangle SBC = \triangle SBc.$$

按前(A)有

$$SBc = ASB,$$

所以

$$(B) \quad \triangle SBC = \triangle SAB.$$

同樣的理由, 向心力依次在  $C, D, E$ , 等等各點發生作用, 故物體在各段時間內, 依次作  $CD, DE$  等

諸線。此項線均在同平面內，且

$$(C) \quad \begin{cases} \triangle SCD = \triangle SBC, \\ \triangle SDE = \triangle SCD, \text{ 等等。} \end{cases}$$

所以在等的時間段內，不動的平面內作成了相等的面積，將此項面積組合時，即知  $SACS$ ,  $SAES$  面積相比，猶如作此的時間相比。今將此項三角形之數增加至無限，並將其底線減小至無限，則按 § 3 之系 4，其周  $ADE$  即成爲一曲線。所以向心力之作用不絕（由於此向心力物體乃恆離開曲線上切線之方向），而與時間相比的面積  $SABCS$ ,  $SABCDES$ ，於此亦仍與之相比。此即所欲證者。

系 1. 在無阻力的空間中恆向一不動的中心而運動的物體之速度，其比猶如由該中心至軌道上切線的垂線之反比，在  $A, B, C, D$  諸點，其比猶如  $AB, BC, CD, DE$  而此則與其高爲反比。

系 2. 物體在無阻力的空間中所作的弧上之弦  $AB, BC$ ，今補充之使成爲一平行方形  $ABCV$ ，試

將其對角線  $BV$  如是引長之，且使其位置成爲弧減小至無限時最後所取者，則該對角線即經力之中心。

系 3. 試將弦  $AB, BC$  以及  $DE, EF$  補充成爲平行方形  $ABCV, DEFZ$ ，則當該項弧成爲無限小時， $B$  與  $E$  處之力相比，猶如  $BV, EZ$  對角線之最後比。

蓋  $BC, EF$  二運動是由  $Bc, BV$  以及  $Ef, EZ$  所合成，而  $BV=Cc, EZ=Ef$  二運動，則按本節之證是由  $B$  及  $C$  點之向心力所產生；所以與之相比。

系 4. 使物體在無阻的空間中不能直線運動而作曲線軌道的力，其相比如等時間內所作弧之矢相比，當弧減小至無限，此項矢即向力之中心收斂，並平分其弦。

此處所謂矢，蓋卽是前系中所稱之對角線之半。

系 5. 此項力與重力之比，猶如此項矢與(同時時間內拋物所作的)拋物線弧之垂直矢相比。

系 6. 倘物體在其內運動的平面以及其中的中心非為靜止而以直線作等速運動，此一切按之運動定律均仍適用。

§ 14. 定理. 在任何一曲線上運動的物體，倘其半徑向着一靜止的或以直線作等速運動的點，且環此點掠過與時間相比的空間，則此物體為一向該點的向心力所推動。

第一事。在曲線上運動的物體，按第一定律必有外來的力影響之，纔使其離開直線的軌道。使物體離開直線軌道並使其不能不以不動的點  $S$  為中心而於等時間內作甚小而相等的三角形

$SAB, SBC, SCD, SDE,$  等等，

的這個力，在  $B$  點所發生的作用，其方向係沿着與  $cC$  相平行的線（按提要第一卷，定理 40，以及第二定律），即是，沿着  $BS$  線；在  $C$  點則沿着  $CS$  線，等等。所以該力之作用，恆沿着向固定點  $S$  的線，此即所欲證者。

第二事。按定律，系 5，物體在其內作曲線形

運動的面，不問其爲靜止或與物體及其所作圖形並中心點  $S$  以直線作等速運動，均無關係。

系 1. 在無阻的媒介內，倘所掠過的面積不與時間爲比例，則其力亦不向各半徑之交點，並且倘運動加速，則向運動的方向前傾，如不加速而遲緩則後傾。

系 2. 且在有阻力的媒介內，倘運動加速，則力之方向亦離開半徑所相交的點而傾於運動的方向。

§ 15. 附註. 物體所受之向心力可由數個力所組成；如是，則該項定理須如此看法，即，由各個力所組成的力是向中心點  $S$  的。

倘一個力的作用恆向着與所作的面相垂直的一方向，則其影響必使物體離開其軌道所在的平面；不過所作的面之大小則不以此而有所增加或減小，所以在力之組成一方面可以略之不計。

§ 16. 定理. 任何物體，倘有一半徑向着其其他運動的物體之中心點而繞之掠成爲面積，且此

項面積與時間成比例者，此物體必為一種力所推動，此力由傾向該其他物體的向心力以及推動該其他物體的全個加速力所組成。

蓋如此二物體  $L$  與  $T$  受其他新的力所推動，此新的力與推動第二物體的力相等相反，因而在平行的方向內生作用，則按定律，系 6，該第一物體  $L$  仍如前的繞  $T$  作成面積，無有變動。但此新的力能將原來推動第二物體的力抵消，所以按第一運動定律， $T$  將自由而可靜止着或以直線作等速運動，而  $L$  則為二力之差所推動仍繞第二物體作成與時間相比的面積，按 § 14. 可知此力之差是以  $T$  為中心而傾向之。

系 1. 倘物體  $L$  有一半徑向着一其他物體  $T$ ，而作成與時間相比的空間面積，則如由推動  $L$  的全力，(此可為單純或按定律，系 2 為諸力所合成者)上，減去推動  $T$  的加速力，所餘的力即完全以後者為中心而傾向之。

系 2. 倘所作之面積儘接近的與時間相比，則

所餘的力亦儘接近的傾向第二物體  $T$ 。

系 3. 反之，倘所餘的力儘接近的傾向第二物體，則所作的面積亦儘接近的與時間相比。

系 4. 倘物體  $L$  有一半徑向着一第二物體  $T$ ，但其所作面積與時間相較甚不相稱，而  $T$  則爲靜止或以直線作等速運動，則向第二物體之向心力或則爲零，或則與其他力之很強的作用相和雜，而此由各力（倘存在）所組成的整個的力，傾向着一其他動或不動的中心，面積的掠成，卽以此爲中心等速的進行。倘該第二物體  $T$  作任何的運動，亦是如此，不過所謂向心力應指該項力，卽，除去影響  $T$  的一切力後所得之餘力。

§ 17. 附註. 由等速的掠成面積，可知有一中心存在，對於物體生作用最強的力卽向着此心，所以可說每個循環的運動必繞着一個中心，而由此中心的力，物體乃離開直線的運動而保持其軌道。但是我們在下面爲什麼不把等速的掠成面積看作爲有中心存在而爲循環運動所環繞的標識？

§ 18. 定理. 以等速運動作成不同的圓的諸物體之向心力，其方向係向着此項圓之中心，其相比，則與等速作成的弧之平方為正比，與半徑為反比。

按 § 14 及 § 13, 系 2, 此項力係向着中心點，而其相比，則如極小而相等的時間內所作弧之矢相比(按 § 13, 系 4)即是，如該項弧之平方為圓之徑所除(按 § 7)相比。但此項弧之比，猶如任何相等時間內所作弧之相比，而徑之相比，則如半徑相比，所以該項力與任何等時間內所作弧之平方，為圓之半徑所除，相比。此即所欲證者。

系 1. 因弧與速度相比，故向心力相比，猶如速度之平方為圓之半徑所除相比。

系 2. 因環繞之時間，與半徑為複合的正比，與速度為反比，故向心力之比，與環繞時間之平方相反，與半徑為正。

系 3. 倘環繞的時間相等，則向心力與速度均與半徑為同比；反之亦然。

系 4. 倘環繞時間之平方，及速度之平方其比

如半徑，則向心力均相等；反之亦然。

系 5. 倘環繞時間與半徑相比，則向心力相比與半徑相比為反；反之亦然。

系 6. 倘環繞時間之平方與半徑之三方相比，則向心力之相比，與半徑之平方相反，但速度則與半徑之平方根相比為反。反之亦然。

系 7. 廣之，倘環繞時間與

$$R^n$$

相比，於此， $n$  為一任何數，則速度之比，與

$$R^{n-1}$$

相反，而向心力則與

$$R^{2n-1}$$

相反。

系 8. 物體作成相似圖形之相似部分（其中心點之位置亦相似）時，其所須時間，速度，及力亦均適用以上之定理；祇須應用以上之證法於此，即能推得。在應用時，須用恆相等的面積之掠成以代等速運動，用物體與中心點間之距離，以代半徑。

系 9. 由同樣的證法中並可知道，物體受向心力之作用在一定時間內等速的所作之圓弧，為圓徑與高（在此同時時間內物體受該力所可墜下之高）之中比。

§ 19. 附註. 系 6 內所述之事項，在天體運動方面發生（此為雷氏 Wren，霍克 Hook 及哈雷最初所發見的），所以關於向心力以半徑之平方減少的一事，以下我將較詳細的研究之。

又，應用上述定理及其系時，我們亦可推論到向心力與某種已知力如重力之比。蓋如物體因其重力而於與地球同心的圓上運動，則可知重力即為其向心力。按 § 18 系 9，可由物體之下墜，以知環繞的時間，以及所作的弧。許金司在他所作論擺鐘的名著中，即是用類此的定理將重力與環行的物體之離心力相比較。

上所述的亦可如是明之。試設想於圓內作一內切多邊形，其邊數任多。倘物體緣此項邊運動，而在各個角被圓所反擊，則反擊時物體所影響於

圓的力其比如速度之比。所以一定時間內力之總和，其比如速度及反擊之次數的組合，即是，倘多邊形之性質已知，則如該已知時間內所作之軌道，用圓之半徑來除。因而此總和之比，猶如其軌道之平方用半徑來除。倘將多邊形之邊數增加至無限，俾與圓相合，則總和之比，猶如弧之平方用半徑來除。但此總和即為物體影響於圓上之力，故與圓反擊物體使其恆向中心的力相等相反。

§ 20. 問題。 物體受力之作用作成一已知的形，此項力均向一共同的中心，其運動之速度則均已知；今欲求得此中心。

設已知的圖形有三切線  $PT$ ,  $TQV$  及  $VR$ , 與圖形相切於  $P, Q, R$  三點，此三切線並相交於  $T$  及  $V$ . 今於切點作三垂線,  $PA, QB, RC$  與切線相垂直，且與該項點處之速度成反比。倘用  $\varphi(P), \varphi(Q), \varphi(R)$  表三點  $P, Q, R$  處之速度，則有

$$\varphi(Q) : \varphi(P) = PA : QB,$$

$$\varphi(R) : \varphi(Q) = QB : RC.$$

經過  $A, B, C$  作

$AD$  與  $PT$  相平行,

$CE$  與  $RV$  相平行,

並延長  $TD, VE$  使其相交於所求之中心。

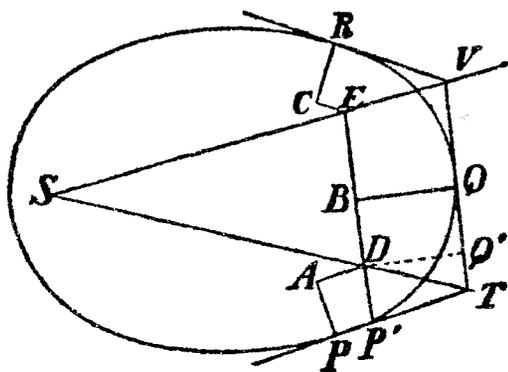
由中心點  $S$  向  $PT$  及  $QT$  所作之垂線, 按 § 13.

系 1, 其相比為物  
體在  $P, Q$  之速度  
相比之反, 所以如

$$AP : BQ$$

之正, 亦即是如

$$DP' : DQ',$$

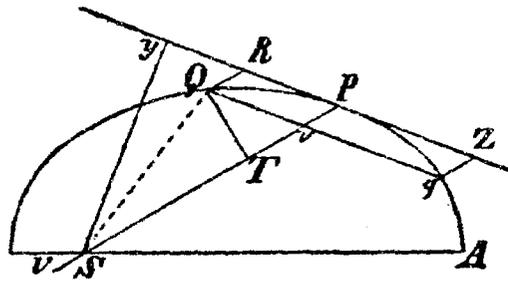


第十七圖

於此,  $DP', DQ'$  為由  $D$  至切線之垂線。由此, 即不難知  $S, D, T$  三點均在一直線上。仿此, 並可證明  $S, E, V$  三點亦均在一直線上, 所以中心點  $S$  必在二線之交處。此即所欲明者。

§ 21. 定理. 一物體於無阻力的媒介中運動, 繞一不動的中心, 其軌道任意。在很小的時間內, 此物體作成一弧, 其矢為  $Pv$ , 將該弧之弦平分,

並將其延長後經過  
力之中心。如是則  
弧中心之向心力與  
矢爲正比，與時間  
之平方爲反比。倘



第十八圖

作成  $QPq$  弧之時間爲  $t$ ，則該力即與

$$\frac{Pv}{t^2}$$

相比。

蓋按 § 13, 系 4, 在一定時間內  $Pv$  之比如力之比，而弧之增加則與時間之增加爲同率，但（按 § 11, 系 2 及 3） $Pv$  矢則與時間之平方同增加，所以與力及時間之平方相比。反之，亦可知力與矢成正比，而與時間之平方成反比。用 § 10, 系 4 亦易明此。

系 1. 物體繞中心  $S$  作成一曲線  $APQ$ ,  $ZPR$  直線則與該曲線相切於  $P$ 。今自一其他任意點  $Q$  作

$QR$  與  $SP$  相平行，

並使  $QT$  與  $SP$  相垂直，則向心力與

$$\frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR}$$

成反比。

蓋  $QR = Pv.$

即，等於  $PQ$  弧二倍之矢， $P$  在其中間。但三角形

$$SQP = SP \cdot QT$$

與作成弧  $PQ$  之二倍的時間相比，故可視為代表時間者。

系 2. 倘  $SY$  與切線  $PR$  相垂直，則向心力為

$$\frac{SY^2 \cdot QP^2}{QR}$$

之反比。

蓋(弧將成爲零時)

$$SY \cdot QP = SP \cdot QT.$$

系 3. 倘軌道本身爲一圓，或與圓作同心的相切或相交，即是，軌道所有與圓之切角或交角儘可能的小，且在  $P$  點之曲率及曲率半徑均相同；又， $PV$  爲該圓之弦，由物體經過力之中心者，則向心力與

$$SY^2 \cdot PV$$

成反比。

此理蓋可由

$$PV = \frac{QP^2}{QR}$$

知之。

系 4. 在同樣的條件下，向心力與速度之平方成正比，與垂線  $SY$  成反比(按 § 13, 系 1)。

系 5. 倘有任何曲線形  $APQ$  及其內的一點  $S$  已知，向心力則恆向該點，則可求得後者之定律，物體恆受此定律之支配而離開其直線的軌道，在該形之邊上運動。

欲知此，我們可計算

$$\frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR} = SY^2 \cdot PV,$$

蓋此與力為反比者。以下之問題內含有此項例。

§ 22. 問題. 一物體在圓之周上運動，試求向心力之定律，此向心力則向着一任意點。

今設  $VQPA$  為圓之周， $S$  為向心力之中心，在周上運動的物體在  $P$  點， $Q$  則為其即可達到的

處所。今於  $P$  點作圓之切線  $PRZ$ ，並作弦  $VP$  經過  $S$ ，以及徑  $VA$ ，且將  $A$  與  $P$  連結。今使

$PK$  與  $VA$  垂直，

$QT$  與  $VP$  垂直，

又作  $LR$  經過  $Q$  與  $VP$  平行，而前者與圓之交點則為  $L$ ，與切線  $PR$  之交點為  $R$ 。又如將  $QT$ ， $PR$  延長而其交點為  $Z$ ，則

$$\triangle ZQR \sim \triangle ZTP \sim \triangle VPA,$$

因而  $RP^2 : QT^2 = VA^2 : VP^2$ 。

又因  $RP^2 = RQ \cdot RL$ ，

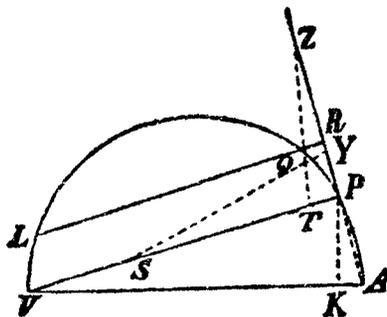
故  $QT^2 = \frac{RQ \cdot RL \cdot VP^2}{VA^2}$ 。

試用  $\frac{SP^2}{QR}$

乘上方程之兩端，則有

$$\frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR} = \frac{SP^2 \cdot VP^2 \cdot RL}{VA^2}。$$

在  $P$  與  $Q$  相合時，



第十九圖

$$RL = VP,$$

故 
$$\frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR} = \frac{SP^2 \cdot VP^3}{VA^2}.$$

按 § 21, 系 1 與 5, 可知向心力與

$$\frac{SP^2 \cdot VP^3}{VA^2}$$

成反比, 或因  $VA$  爲常數, 與

$$SP^2 \cdot VP^3$$

成反比。

第二證。 今作  $PR$  之垂線  $SY$ , 則因

$$\triangle SYP \sim \triangle ZTP \sim \triangle VPA,$$

$$AV : VP = SP : SY,$$

故 
$$SY = \frac{VP \cdot SP}{AV},$$

而 
$$\frac{SP^2 \cdot VP^3}{AV^2} = SY^2 \cdot VP.$$

按 § 21, 系 3 及 5, 即知向心力與

$$\frac{SP^2 \cdot VP^3}{AV^2}$$

成反比, 或因  $AV$  爲常數, 故與

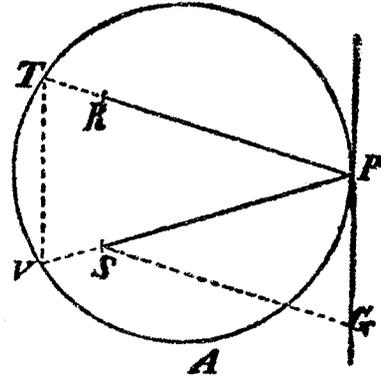
$$SP^2 \cdot VP^3$$

爲反比。

系 1. 倘  $S$  在圓周上與  $V$  相合, 則向心力即與  $SP^5$

成反比。

系 2. 使物體在圓周上以  $S$  爲中心而繞行的力, 與能使物體在同周上於同時間內以他心作繞行的力相比, 如



第二十圖

$$RP^2 \cdot SP : SG^3,$$

於此,  $SG$  爲自  $S$  至切線  $PG$  之線, 與  $RP$  相平行。

按此節第一力與第二力之比, 如

$$RP^2 \cdot PT^3 : SP^2 \cdot PV^3,$$

即是, 如

$$SP \cdot PR^2 : \frac{SP^3 \cdot PV^3}{PT^3}.$$

但因  $\triangle PGS \sim \triangle PTV,$

故  $PT : PV = PS : SG,$

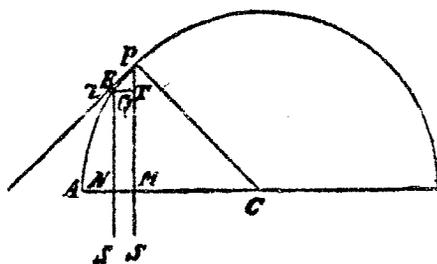
因而  $\frac{SP^3 \cdot PV^3}{PT^3} = SG^3.$

系 3. 使物體在任何軌道上以  $S$  為中心運動的力，與使物體在同軌道上以同的環繞時間但與中心  $R$  相當的力相比，如

$$SP \cdot PR^2 : SG^3.$$

此處所用  $SP, PR, SG$  之意義，在任意的軌道上與在圓上相同。任何軌道上之力與曲率相等的圓上者相同。

§ 23. 問題. 一物體在  $PQA$  圓上運動，試求向心力之定律，此向心力向着一甚遠的點  $S$ ，故一切向此的直線  $PS, RS$  可視為互相平行者。



第二十一圖

今由圓心  $C$  作一半徑  $CA$ ，與該項平行線垂直的交於  $M, N$ ，並將  $C$  與  $P$  連結之。

因  $\triangle CPM \sim \triangle TPZ$

而按 § 8

$$\triangle CPM \sim \triangle TPQ,$$

故  $CP^2 : PM^2 = PQ^2 : QT^2$ .

按 § 7

$$CP^2 : PM^2 = PR^2 : QT^2,$$

又按圓之性質

$$PR^2 = QR(RN + QN).$$

倘  $Q$  與  $P$  相合, 則

$$RN + QN = 2PM,$$

故此處

$$CP^2 : PM^2 = 2PM \cdot QR : QT^2,$$

以及  $\frac{QT^2}{QR} = \frac{2PM^3}{CP^2}$ ,

並  $\frac{QT^2 \cdot SP^2}{QR} = \frac{2PM^3 \cdot SP^2}{CP^2}$ .

按 § 21, 系 1 與 5, 即知向心力與

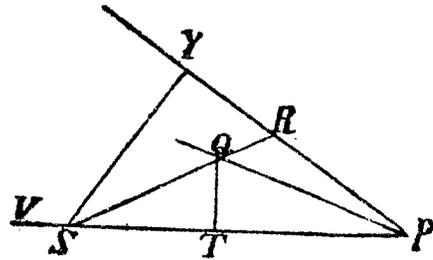
$$\frac{2PM^3 \cdot SP^2}{CP^2} \text{ 或 } PM^3 \left( \text{因 } \frac{2SP^2}{CP^2} \text{ 爲常數} \right)$$

相反比。

由 § 22 亦不難得此項結果。

§ 24. 附註。用無多異的方法，可以知道在橢圓，拋物線或雙曲線上運動的物體，其所受的向心力，與向很遠的力之中心的縱線成反比。

§ 25. 問題。一物體在盤旋線 (*Spirallinie*)  $PQ$  上運動，其一切半徑  $SP, SQ$  等等均與之以一常角相交。今求向着該旋線中心  $S$  的向心力之定律。



第二十二圖

設不定小的角  $PSQ$  為已知，則因其他角亦為已知，故即知該形之形狀，而  $\frac{QT}{QR}$  亦即為已知，而因其形狀為已知， $\frac{QT^2}{QR}$  與  $QT$  即  $SP$  相比。

今將  $PSQ$  角變動之，則  $QR$  線（與切角  $QPR$  相對者）亦變，按 § 11，其率為  $PR$  之倍。故

$$\frac{QT^2}{QR}$$

為常數而等於  $SP$ ，並知

$$\frac{QT^2 \cdot SP^2}{QR} \text{ 與 } SP^3 \text{ 相比。}$$

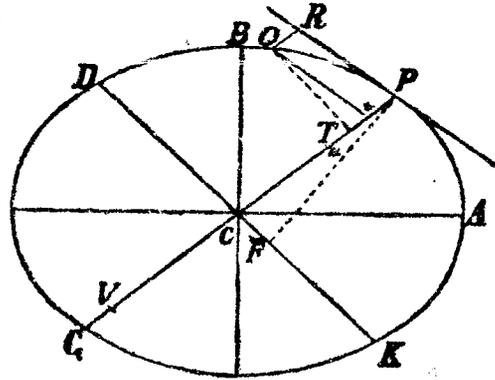
按 § 21, 系 1 及 5, 卽是與向心力成反比。

第二證。 垂在切線上之垂線  $SY$ , 以及與旋線同心而相交的圓上之弦  $PV$ , 與半徑  $SP$  之比爲常, 故  $SP^3$  與  $SY^2 \cdot PV$  爲相比, 而按 § 21, 系 3 及 5 亦卽是與向心力成反比。

§ 26. 補題。 一切外切於橢圓的平行方形均相等。在雙曲線內作於其徑上的平行方形亦如是。此二者均在圓錐曲線理論方面所已知者。

§ 27. 問題。 一物體在一橢圓上運動; 試求向橢圓中心點的向心力之定律。

今設  $CA$  與  $CB$  爲橢圓之半軸,  $GP$  與  $DK$  爲其二共軛徑,  $PF$



第二十三圖

及  $QT$  則爲垂於後者之垂線, 而以  $GP$  爲橫坐標時,  $Q$  之縱坐標爲  $Qv$ . 今作成  $QvPR$  一平行方形, 則按圓錐曲線之理論, 有

$$(A) \quad Pv \cdot vG : Qv^2 = PC^2 : CD^2.$$

但  $\triangle QvT \sim \triangle PCF,$

$$\text{故 } (B) \quad Qv^2 : QT^2 = PC^2 : PF^2,$$

而如將此二個比例連結之，即有

$$(C) \quad Pv \cdot vG : QT^2 = PC^2 : CD^2 \cdot PF^2,$$

$$\text{或 } (D) \quad vG : \frac{QT^2}{Pv} = PC^2 : \frac{CD^2 \cdot PF^2}{PC^2}.$$

按 § 26,

$$(E) \quad \begin{cases} CD \cdot PF = BC \cdot CA, \\ Pv = QR, \end{cases}$$

而如  $P$  與  $Q$  相合，則

$$(F) \quad vG = 2 \cdot PC.$$

今將 (E) 與 (F) 內之值，代入 (D) 內，則有

$$(G) \quad \frac{QT^2 \cdot PC^2}{QR} = \frac{2BC^2 \cdot CA^2}{PC}.$$

故按 § 21, 系 5, 向心力與

$$\frac{2BC^2 \cdot CA^2}{PC}$$

成反比，而因  $2BC^2 \cdot CA^2$  為常數，故與  $\frac{1}{PC}$  為反

比,或即與  $PC$  成正比。

第二證。 在  $PQ$  線上與  $T$  相反之側取一點  $u$ , 使

$$Tu = Tv,$$

以及一點  $V$ , 使

$$uV : vG = DC^2 : PC^2.$$

按圓錐曲線理論,

$$Qv^2 : Pv \cdot vG = DC^2 : PC^2,$$

故  $uV : vG = Qv^2 : Pv \cdot vG$ ,

或  $Qv^2 = Pv \cdot uV$ ,

今於此方程之兩端加

$$uP \cdot Pv = uP \cdot Pv,$$

即有  $VP \cdot Pv = PQ^2$ .

從可知與圓錐曲線相切於  $P$  的圓,經過  $Q$  亦經過  $V$ . 今如  $P$  與  $Q$  相合,則

$$uV : vG (= DC^2 \dots PC^2)$$

一比,即成爲

$$PV : PG \text{ 或 } PV : 2PC.$$

所以有

$$PV : 2PC = DC^2 : CP^2$$

而

$$PV = \frac{2DC^2}{PC}.$$

由此可知，使物體在橢圓上運動的力，與

$$\frac{2DC^2 \cdot PF^2}{PC}$$

成反比，而因  $2DC^2 \cdot PF^2$  為常數，亦即與  $PC$  成正比。

系 1. 從可知力與物體距離橢圓心之距離相比，而如力與離心之距離相比，則物體在橢圓上運動，其圓心即為力之中心，或在一圓上，此圓能為橢圓所轉成。

系 2. 同心的一切橢圓上之環繞時間均相等。在相似的橢圓方面，該項時間均相等，此則按 § 18，系 3 與 8 所可知。在大軸相同的橢圓方面，其環繞時間相比，如全個面積之正，而為同時間內所作該項面積部分之反，即是說，為小軸之正，為大軸終點物體速度之反，或亦可說，為小軸之正，為以

大軸爲橫坐標軸的縱坐標之反。所以因正反比之相等，如 1 : 1.

§ 28. 附註。倘橢圓之中心在無限處。則橢圓變成爲拋物線，而物體在拋物線上運動；向無限遠處中心點之力亦成爲常。此卽是加里賴的定理。

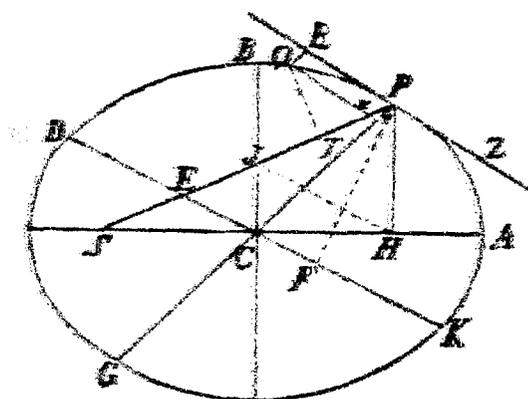
倘拋物線成爲一雙曲線，則物體在雙曲線上運動，而向心力成爲離心力。

### 第三章 論圓錐

#### 曲線上物體之運動

§ 29. 問題. 一物體在一橢圓上運動；向心力向着其焦點，今試求此力之定律。

今設  $S$  為橢圓之焦點，試作  $SP$ ，與徑  $DK$  相交於  $E$ ，與  $QO$  相交於  $r$ ，並完成  $QxPR$  平行方形。首先可知者，為  $EP = AC$ 。



蓋如由其他一焦點  $H$  作  $HJ$  與  $BC$  平行，則因

$$CH = CS$$

$$EJ = ES,$$

第二十四圖 以及

$$EP = EJ + JP = \frac{1}{2} (2EJ + 2JP)$$

$$= \frac{1}{2} (ES + EJ + JP + JP),$$

$$EP = \frac{1}{2} (SP + JP).$$

但  $HJ$  與  $RP$  相平行,

故  $\angle PJH = \angle JPR = \angle HPZ = \angle PHJ,$

而  $JP = PH,$

所以(1)  $EP = \frac{1}{2} (SP + PH) = AC.$

今作  $QT$  線垂於  $SP$  上, 並設橢圓之通徑爲

$$(2) \quad \frac{2BC^2}{A} = L,$$

則有  $L \cdot QR : L \cdot Pv = PE : PC = AC : PC,$

而因  $L \cdot Pv : Gv \cdot Pv = L : Gv,$

故將二比聯合時, 得

$$(3) \quad L \cdot QR : Gv \cdot Pv = L \cdot AC : Gv \cdot PC.$$

但  $Gv \cdot Pv : Qv^2 = PC^2 : CD^2,$

所以

$$(4) \quad L \cdot QR : Qv^2 = L \cdot AC \cdot PC : Gv \cdot CD^2.$$

按 § 8, 倘  $Q$  與  $P$  相合時, 有

$$Qv^2 = Qx^2,$$

故亦

$$(5) \quad L \cdot QR : Qx^2 = L \cdot AC \cdot PC : Gv \cdot CD^2.$$

又因  $Qx^2 : QT^2 = PE^2 : PF$ ,

(於此,  $PF$  與  $CK$  相垂直) 而按 § 26

$$PE^2 : PF^2 = DC^2 : CB^2,$$

所以  $L \cdot QR : QT^2 = L \cdot AC \cdot PC : Gv \cdot CB^2$ ,

或因  $L \cdot AC = 2BC^2$  (方程 2),

故 (6)  $L \cdot QR : QT^2 = 2PC : Gv$ .

倘  $P$  與  $Q$  相合, 則

$$2PC = Gv,$$

所以 (按方程 6) 在這裏

$$(7) \quad L \cdot QR = QT^2,$$

而如兩端用  $\frac{SP^2}{QR}$  乘之, 有

$$(8) \quad \frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR} = L \cdot SP^2.$$

按 § 21, 系 1 與 5, 即知向心力與

$$L \cdot SP^2,$$

或因  $L$  爲常數, 與

$$SP^2$$

爲反比。

第一證。 因推動物體使其在橢圓上運動且向着橢圓心的力（按 § 27, 系 1）與物體離圓心之距離相比，故可作  $CE$  與切線  $PR$  相平行。如是，則推動物體使其繞橢圓內任何點  $S$  的力（倘  $CE$  與  $PS$  在  $E$  相交）與

$$\frac{PE^3}{PS^2}$$

相比；而如  $S$  為焦點，則  $PE$  為常數，故與

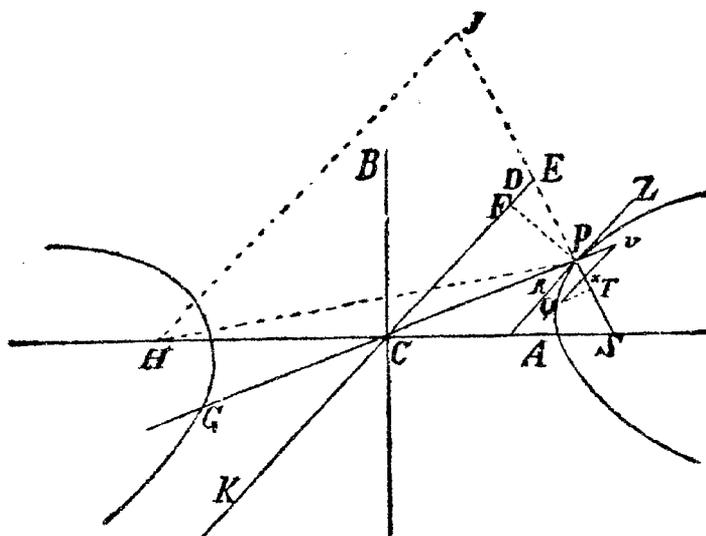
$$PS^2$$

成反比。

我們本可仿 § 27 簡單的推廣至拋物線與雙曲線，但因此問題之重要以及以後應用之廣，故我們可不憚煩的另用證法證明之。

§ 30. 問題。 一物體在雙曲線上運動，試求向心力之定律，該向心力係向着其焦點。

今設  $CA$  與  $CB$  為雙曲線之半軸， $PG$  與  $KD$  為其共軛徑， $PF$  則為垂於  $KD$  上垂線，而如以  $GP$  為橫坐標軸， $Qv$  即為  $Q$  點之縱坐標。今作  $SP$  線使其與  $DK$  相交於  $E$ ，與  $Qv$  相交於  $x$ ，并



第二十五圖

完成  $QRPx$  平行方形，在這裏，不難知

$$EP = AC.$$

蓋如由其他一焦點  $H$  作

$HJ$  與  $EC$  相平行，

則因  $CS = CH$ ,

亦即  $ES = EJ$ .

所以有  $EP = ES - PS = \frac{1}{2}(2 \cdot ES - 2PS)$

$$= \frac{1}{2}(EJ + EP - PS - PS)$$

$$= \frac{1}{2}(PJ - PS).$$

但  $HJ$  與  $PR$  相平行，

故  $\angle PJH = \angle ZPJ = \angle RPH = \angle PHJ,$

$$JP = PH,$$

而 (1)  $EP = \frac{1}{2}(PH - PS) = CA.$

今作  $QT$  垂於  $SP$  上, 則如設

$$(2) \frac{2 \cdot BC^2}{CA} = L,$$

即有  $L \cdot QR : L \cdot Pv = QR : Pv = Px : Pv$

$$= PE : PC = AC : PC.$$

又可知  $L \cdot Pv : Gv : vP = L : Gv,$

因而 (3)  $L \cdot QR : Gv \cdot Pv = L \cdot AC : Gv \cdot PC.$

但  $Gv \cdot Pv : Qv^2 = PC^2 : CD^2,$

故亦 (4)  $L \cdot QR : Qv^2 = L \cdot AC \cdot PC : Gv \cdot CD^2.$

按 § 8, 倘  $Q$  與  $P$  相合, 有

$$Qv = Qx,$$

故并有

$$(5) L \cdot QR : Qx^2 = L \cdot AC \cdot PC : Gv \cdot CL^2.$$

此外

$$Qx^2 : QT^2 = EP^2 : PF^2 = CA^2 : PF^2$$

$$= CD^2 : CB^2 (\text{§ 26})$$

故  $L \cdot QR : QT^2 = L \cdot AC \cdot PC : Gv \cdot CB^2$ ,

又因  $L \cdot AC = 2BC^2$  (方程 2),

即有 (6)  $L \cdot QR : QT^2 = 2 \cdot PC : Gv$ .

倘  $P$  與  $Q$  相合, 則

$$2PC = Gv,$$

所以在這裏 (按方程 6)

$$(7) \quad QT^2 = L \cdot QR.$$

將此方程兩端用

$$\frac{SP^2}{QR}$$

乘之, 有

$$\frac{QT^2 \cdot SP^2}{QR} = L \cdot SP^2.$$

按 § 21, 系 1 及 5, 即知向心力與

$$L \cdot SP^2,$$

而因  $L$  爲常數, 亦即與  $SP^2$

成反比。

第二證. 試求向雙曲線中心  $C$  之力; 按 § 27 系 1, 知此力與距離  $CP$  相比. 如是, 按 § 22 系 3, 即知向焦點  $S$  的力與

$$\frac{PE^3}{PS^2}$$

或因  $PE$  為常數，故與

$$PS^2$$

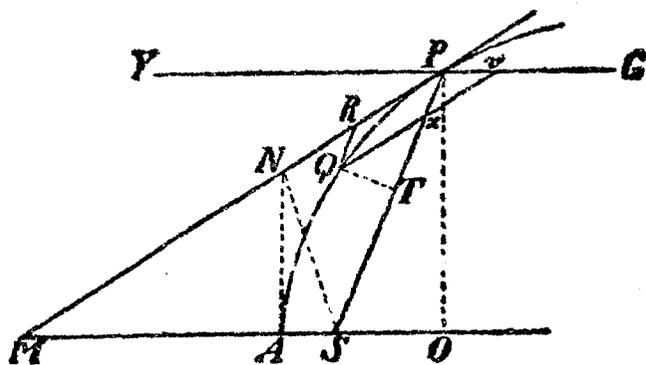
成反比。

同此并可證明如向心力變成爲離心力，則物體即在相反的雙曲線上運動。

§ 31. 補題。 拋物線之通徑，不問其所相關之頂點如何，恆與頂點距焦點之四倍相等。

此爲圓錐曲線之理論上所已知者。

§ 32. 補題。 曲焦點垂於拋物線之切線上的垂線，爲焦點與切點距離及焦點與重要頂點距離之中比。



第二十六圖

今設  $AQP$  爲拋物線， $S$  爲其焦點， $P$  爲一切點， $PO$  則爲其縱坐標， $AO$  爲軸， $PM$  爲切線與軸相交於  $M$ ；又， $SN$  爲由  $S$  至  $PM$  之垂線，并作  $AN$  線。因

$$MS = PS,$$

$$MN = NP,$$

以及  $MA = AO,$

故  $AN$  與  $PO$  相平行，

而  $\angle SAN = 90^\circ,$

因而  $\triangle SAN \sim \triangle SMN \sim \triangle SPN.$

以及  $PS : SN = SN : SA.$

此即所欲證者。

系 1.

$$PS^2 : SN^2 = PS : SA.$$

系 2. 因  $SA$  爲常數，故  $SN^2$  與  $PS$  相比。

系 3. 任何切線與由焦點至其上的垂線之交點，落在重要頂點之切線內。

§ 33. 問題. 一物體在拋物線上運動；試求向

着焦點的向心力之定律。

今如前圖內  $P$  爲在拋物線上之物體， $Q$  則爲即將達到的點，今由此作

$QR$  與  $SP$  相平行，

$QT$  垂直於  $SP$  上，

以及  $Qv$  與  $PM$  相平行，

且  $Qv$  交  $YPG$  徑於  $v$ ，交半徑  $PS$  於  $x$ 。

因  $\triangle Pxv \sim \triangle MSP$ ，

以及  $SM = SP$ ，

故亦

$$(1) \quad Pv = Px = RQ.$$

按 § 31,

$$Qv^2 = 4PS \cdot Pv = 4PS \cdot QR.$$

今如  $P$  與  $Q$  相合，則按 § 8,

$$Qv = Qx,$$

而在此處

$$(2) \quad Qx^2 = 4PS \cdot QR.$$

但  $\triangle QxT \sim \triangle PSN$ ,

所以

$$\begin{aligned} Qx^2 : QT^2 &= PS^2 : SN^2 \\ &= PS : AS \\ &= 4PS \cdot QR : 4AS \cdot QR. \end{aligned}$$

按方程 2

$$Qx^2 = 4PS \cdot QR,$$

故得

$$(3) \quad QT^2 = 4AS \cdot QR.$$

用  $\frac{SP^2}{QR}$  乘此方程之兩端，即有

$$(4) \quad \frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR} = 4AS \cdot SP^2,$$

故按 § 21, 系 1 及 5, 向心力與  $4AS \cdot PS^2$ , 而因  $4AS$  為常數, 即與

$$PS^2$$

成反比。

系 1. 由末後三問題, 可得以下之結果, 倘一物體由  $P$  出發, 緣任何一線  $PR$  以任何速度前進, 而如有一向心力影響之, 此力與物體離心力之距

離平方成反比，則此物體在圓錐曲線上運動，其焦點即為力心；反之亦然。

蓋如焦點，切點及切線之位置已知，則可作一圓錐曲線，其曲率在該點為已知。但此曲率則可由已知的向心力及物體之速度知之，且兩個相切的軌道，決不能由同樣的向心力及同樣的速度得之。

系 2. 倘物體由  $P$  出發的速度如是大，能於極短的時間內經過那個極小的線  $PR$ ，且向心力能使其於同時間內經過空間  $QR$ ，則物體作一圓錐曲線，其通徑

$$\frac{QT^2}{QR}$$

之  $QT$  與  $QR$  二者均可視為已減小至無限者。

於此，我將圓視為橢圓，但物體向力之中心的運動，這裏不論。

§ 34. 定理. 倘有若干物體繞一公共的心運動，而向心力之減小與離心之距離平方成反比，則其軌道之通徑與諸物體以向心的半徑於同時間內所作的面積之平方相比。

按 § 33 系 2, 此通徑爲

$$L = \frac{QT^2}{QR},$$

於此,  $QT$  及  $QR$  之值爲  $P$  與  $Q$  相合時之最後值. 但如時間已知, 則極小的線  $QR$  與產生此的力, 按假定即與

$$SP^2$$

成爲反比. 所以

$$\frac{QT^2}{QR} \text{ 與 } QT^2 \cdot SP^2$$

相比, 此即是說通徑與  $QT \cdot SP$  面之平方相比.

系. 由此可知橢圓之面積以及與之相比在二軸上的長方形爲通徑及環繞時間二者之平方根之複合的比.

蓋整個的面積, 是與環繞時間乘一定時間內所作的面  $QT \cdot SP$  之積相比.

§ 35. 定理. 在同假設下, 環繞時間與大軸之<sup>3</sup>/<sub>2</sub>次方相比.

今設  $2a, 2b$  爲橢圓之大小軸,

則  $2a : 2b = 2b : L,$

故  $2b = \sqrt{2aL},$

$$2a \cdot 2b = (2a)^{\frac{3}{2}} \sqrt{L},$$

即  $4ab$  與  $(2a)^{\frac{3}{2}} \sqrt{L}$  相比。

但按 § 34 系

$$4ab \text{ 亦與 } T\sqrt{L} \text{ 相比,}$$

故  $T$  與  $(2a)^{\frac{3}{2}}$  相比。此即所欲證者。

系。所以倘圓之徑與橢圓之大軸相等，則橢圓方面之環繞時間與圓方面者相等。

§ 36. 定理。所設的假定仍與前同，并作線經過諸物體所在之點，即於此與軌道相切，又自共同的焦點作垂線至此項切線，則其速度與

此項垂線成反比，

而與其通徑之平方根成正比。

今由焦點  $S$  作  $SY$  垂線於切線  $PR$ ，則按定理物體之速度當與

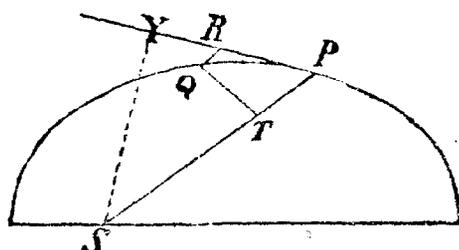
$$\frac{\sqrt{L}}{SY}$$

相比。蓋此速度實與一定時間內所作之極小的弧  $PQ$ ，按 § 7，即與切線相比。但

$$PR:QT = PS:SY,$$

故該項速度與

$$\frac{QT \cdot PS}{SY} \text{ 相比,}$$



而按 § 34 則

第二十七圖

$$QT \cdot PS \text{ 與 } \sqrt{L} \text{ 相比.}$$

此即所欲證者。

系 1. 通徑與垂於切線上之垂線及速度之平方二者之合相比。

系 2. 諸物體之速度，在與共同焦點相距最大及最小處，與距離成反比，與通徑之平方根成正比。

蓋在這裏距離與垂線是相同的。

系 3. 所以圓錐曲線上之速度，在距焦點之最遠或最近處，與圓上之速度相比（圓之半徑與此最大或最小距離相等），如通徑之平方根與距離 2 倍之平方根相比。

系 4. 在橢圓內運動的物體，當其與共同焦點之距離適中時，其速度與以此適中距離為半徑的

圓上之運動速度相同。按 § 18 系 6 卽是與該項距離之平方根成反比。

蓋此處垂線等於小軸之半，而此則與通徑及距離中間之中比同其比。

系 5. 在同圖形或相等的圖形，乃至於不相等的圖形內，倘其通徑相等，則其速度與由焦點至切線之垂線成爲反比。

系 6. 在拋物線方面，速度與距離之平方根成反比，在橢圓方面該項比較大，在雙曲線方面則較小。

蓋按 § 32 系 2，由焦點至切線的垂線，其比與距離之平方根相同，在雙曲線方面較小，在橢圓方面較大。

系 7. 在拋物線方面，物體距焦點任何遠處之速度，與圓方面（圓之半徑與該項距離相等）之速度相比，如

$$\sqrt{2} : 1.$$

在橢圓方面此項比較小，在雙曲線方面則較

大。

蓋按系 2, 拋物線頂點之速度適爲此比, 而按系 6 以及 § 18 系 6, 此項比在任何距離內均如此, 所以在拋物線方面速度與圓方面者相等, 而該圓之半徑則爲拋物線方面距離之半。在橢圓方面較小, 而在雙曲線方面則較大。

系 8. 任何圓錐曲線方面之速度, 與圓(其半徑等於通徑之半)方面者相比, 如圓之半徑與由焦點至切線的垂線相比。

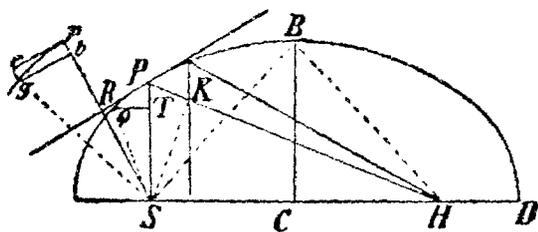
此可由系 5 得之。

系 9. 按 § 18 系 6, 此項圓方面之速度與他圓方面之速度相比, 爲其半徑平方根相比之反, 故圓錐曲線方面之速度與圓(其半徑等於曲線方面之距離)方面速度之比, 如該項共同距離及通徑之半二者中間之中比與(由共同焦點至切線所作)垂線之比。

§ 37. 問題. 向心力與離心之距離平方成反比。並知道該力之絕對量; 今欲求物體自一定處

所，以一定速度，向一定方向發出所作之線。

今設向  $S$  的  
向心力使物體  $p$   
在任何軌道  $pq$   
內運行，其  $p$  點



第二十八圖

之速度則為已知。由  $P$  點出發物體線  $PR$  以一定的速度進行，然後為向心力所影響入於  $PQ$  圓錐曲線。因此，該曲線於  $P$  點為  $PR$  所切。同樣， $pr$  切曲線  $pq$  於  $p$ 。試設想由  $S$  作二線垂於二切線上，則按 § 36 系 1，圓錐曲線之通徑與已知曲線者相比，其率為由垂線之平方及速度之平方所合成。前者為已知，今設其  $=L$ 。

又，圓錐曲線之焦點亦為已知；今設  $\angle RPH = 180^\circ - \angle RPS$ ，則其他一焦點在其內的線  $PH$  之方向為已知。今作  $SK$  垂於  $PH$  上。則

$$\begin{aligned} (1) \quad SH^2 &= 4CH^2 = 4BH^2 - 4BC^2 \\ &= (SP + PH)^2 - L(SP + PH) \\ &= SP^2 + 2SP \cdot PH + PH^2 \end{aligned}$$

$$-L(SP+PH).$$

但 (2)  $SH^2=SP^2+PH^2-2PH\cdot PK,$

所以  $-2PH\cdot PK=2SP\cdot PH-L(SP+PH)$

或  $L\cdot(SP+PH)=2PH(PS+PK),$

而 (3)  $(SP+PH) : PH=2(PS+PK) : L.$

由此,  $PH$  之位置及量已知. 倘  $P$  點物體之速度能使

$$L < 2(PS+PK)$$

則亦  $PH < SP+PH$

而  $PH$  與  $PS$  同在切線  $PR$  之一面, 圖形即為橢圓, 其大軸  $=SP+PH$ , 為已知者.

倘速度使

$$L = 2(PS+PK)$$

則  $PH = PH = PS,$

而  $PH = \infty$ , 圖形即為拋物線, 其軸為

$$SH \text{ 與 } PK \text{ 相平行,}$$

亦即為已知者.

又如

$$L > 2(PS + PK),$$

則  $PH > PH + PS,$

而  $PH$  必在切線之另一旁。如是，因切線能通過二焦點之間，該曲線必為雙曲線，其主要軸為

$$SP - PH \text{ 或 } PH - PS,$$

亦為已知者。

倘物體在此處所提的圓錐曲線內運動，則因 § 29, 30, 32 諸節之理，其向心力亦即與物體離心之距離平方成反比，所以物體因該項力而作的線  $PQ$ ，如物體由一定的處所以一定的速度緣一定的線進行，則能準確的表出。

系 1. 由此，我們不難由已知的主要頂點  $D$ ，通徑  $L$  及其一焦點  $S$ ，以求得其他的焦點  $H$ 。

蓋以前所得的方程 (3)，於此成爲

$$\begin{aligned} (SD + DH) : DH &= 2(DS + DS) : L \\ &= 4DS : L, \end{aligned}$$

而由此即有

$$SD : DH = (4DS - L) : L;$$

$DH$  即可由此以知之。

系 2. 所以倘物體在重要頂點之速度已知，則不難求得整個軌道。

蓋按 § 36. 系 3,

$$L : 2DS$$

如已知速度之平方與半徑為  $DS$  的圓方面速度之平方相比，故可得  $DS$ . 而由

$$SD : DH = 4DS - L : L$$

亦即可得  $DH$ .

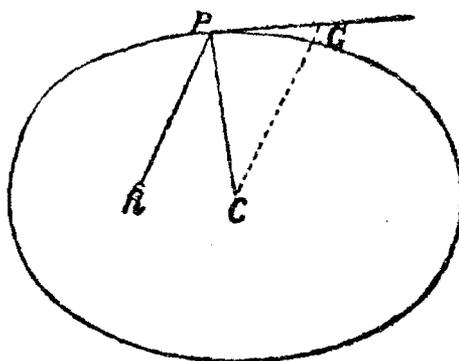
系 3. 一物體在圓錐曲線內運動，經一撞擊將其脫出軌道後，物體以後所循之新軌道亦能求得。

我們可將物體原來的運動，與單由撞擊所可產生的運動相組合，則所得者即為物體由撞擊處出發所將作之運動。

系 4. 倘物體為外來的力所繼續的擾動，則可擇定若干點求此處之變動，而由相似的列以推其間之變動，因而近似的求得物體之運行。

§ 37 a 附註. 倘一物體受一向任何點  $R$  的向

心力之推動而在任  
 何一圓錐曲線上運  
 動，此曲線之中心  
 在  $C$ ；如欲求向心  
 力之定律，則可作  
 $CG$  與方向半徑  $RP$



第二十九圖

相平行，并將前者延長，使其與  $P$  處之切線  $PG$   
 相交於  $G$ 。如是，則該力即與（按 § 27 系 1, § 28  
 及 § 22 系 3）

$$\frac{CG^3}{RP^2}$$

## 第四章 論一個焦點已

### 知時求圓錐曲線的軌道之法

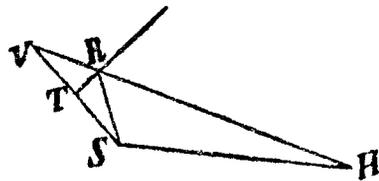
§ 38. 補題。  $S$  與  $H$  爲橢圓或雙曲線之二焦點， $V$  爲一第三點。試由  $S$  與  $H$  作二線至  $V$ ， $SV$  及  $HV$ ，且使  $HV$  與大軸相等， $SV$  則被  $TR$  垂線於  $T$  點所平分。如是則此垂線必與曲線相切；反之，倘此線與曲線相切，則  $VH$  即等於圖形之軸。

蓋垂線與  $HV$  相交於  $R$ ，故可作  $SR$ ，則因

$$TS = TV,$$

故  $SR = VR,$

而  $\angle TRS = \angle TRV.$



從可知  $R$  在圓錐曲線

第三十圖

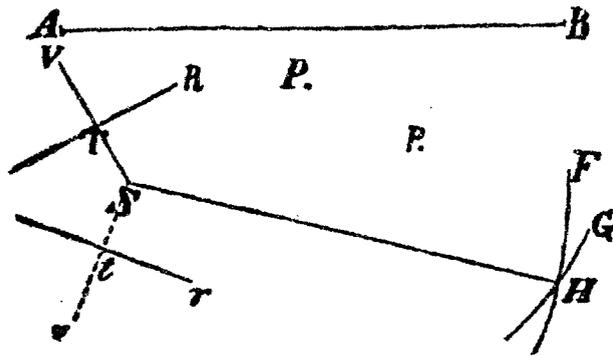
上，而  $TR$  與之相切；反之亦然。此即所欲證者。

§ 39. 問題。 設有一焦點及其主要軸爲已知；

今欲作一橢圓或雙曲線，使其經過若干已知點，并與若干已知線相切。

今設  $S$  為共同的焦點， $AB$  為大軸之長， $P$  為曲線所應經過之點， $TN$  則為其所應相切之線。

在橢圓方面，可用  $AB-SP$  為半徑，由  $P$  作一圓弧  $HG$ ，在雙曲線方面則可用  $AB+SP$  為半徑。試再作  $ST$  垂於  $TR$ ，并延長之，使  $ST=TV$ ；



第三十一圖

由  $V$  以  $AB$  為半徑作  $HF$  弧。用這個方法，我們恆可作兩個圓。

今設  $P$  與  $p$  二點為已知者， $TR$  與  $tr$  二切線亦為已知，倘  $H$  為二圓弧之交點，則可以  $S, H$  為焦點， $AB$  為大軸作該曲線；如是，此曲線即能

適合該項條件。蓋因

$$PH + SP = AB \text{ (在橢圓方面)}$$

$$PH - SP = AB \text{ (在雙曲線方面)}$$

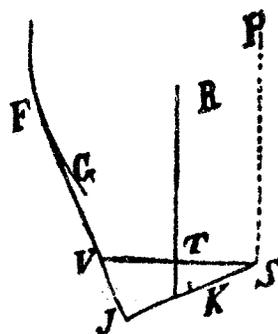
故該曲線必經過  $P$  點，而按 § 38 且與  $TR$  相切。

用同樣的方法，可使其經過  $P$  與  $p$  或與  $TR$  及  $tr$  相切。

§ 40. 問題。 設有一焦點已知，今欲作一拋物線，使其經過一已知點并與已知線相切。

設  $S$  為焦點， $P$  為已知點， $TR$  為所求的曲線之已知切線。試以  $P$  為中心，以  $PS$  為半徑作圓弧  $FG$ ，并由  $S$  作線  $ST$  垂於切線上，延長之，使

$$TV = ST.$$



第三十二圖

用同樣方法，可作一其他弧  $fg$ ，祇須有一其他點  $p$  為已知，或有一其他點  $v$  可於一其他已知切線  $tr$  上求之。於是可作  $JV$ ，俾於  $P$  及  $p$  為已知時與  $FG$  及  $fg$  二圓弧相切，而如二切線為已

知，則經過  $V$  與  $v$  二點，或如  $TR$  及  $P$  爲已知，則亦可經過  $V$  并與  $FG$  相切。

於  $JF$  上作垂線  $SJ$ ，平分之於  $K$ ，并以  $KS$  爲主要軸，以  $K$  爲主要頂點作一拋物線。如是，即得所欲求者。

$$\begin{aligned} \text{蓋因} \quad SK &= JK, \\ SP &= FP, \end{aligned}$$

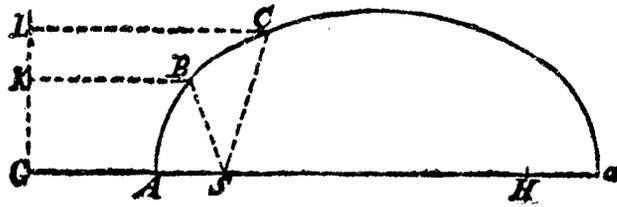
故拋物線經過  $P$ ，而因

$$\begin{aligned} ST &= FV, \\ \angle STR &= 90^\circ, \end{aligned}$$

按 § 32 系 3，拋物線即與  $TR$  相切。

§ 41. 問題。 有一焦點已知，今以之作一曲線；此曲線之種類爲已定者，且須其經過已知點并與已知直線相切。

第一事。焦點  $S$  爲已知，所求之曲線欲其經過  $B$  與  $C$  點。因曲線之種別已定，故其大軸與二焦點距離之比亦即已知。如是，說  $H$  爲其他一焦點， $Aa$  爲大軸，則



第三十三圖

$$Aa : SH \quad (1)$$

爲已知。今試作

$$\left. \begin{aligned} KB : BS &= Aa : SH, \\ LC : CS &= Aa : SH, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

并以  $B, C$  爲中心, 以  $BK, CL$  爲半徑作圓弧, 引  $KL$  與之相切, 且作一垂線  $SG$  垂於  $KL$  上。於  $SG$  之方向內, 求其二點  $A$  及  $a$ , 使

$$SA \cdot AG = SB : BK = Sa : aG \quad (3)$$

如是, 則以  $Aa$  爲軸,  $A$  及  $a$  爲頂點之圖形, 卽所求者。

$H$  爲其他一焦點, 故由 (3)

$$SA : AG = Sa : aG,$$

得  $Sa - SA : aG - AG = SA : AG$

或  $SH : Aa = SA : AG \quad (4)$

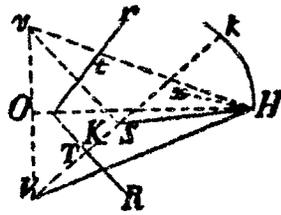
此即二焦點之距離與大軸之比為所求之比率。又按(2)

$$KB : BS = Aa : SH = LC : CS,$$

故按圓錐曲線之理論，該圖形必經過  $B$  與  $C$  點，

第二事。焦點  $S$  為已知，試作該曲線，使其與  $TR$  及  $tr$  二線相切。

由  $S$  出發，作  $ST$  及  $St$  二垂線垂於二切線上，并延長之，使



第三十四圖

$$VT = TS, \quad vt = tS.$$

於  $O$  點將  $Vv$  平分，作一不定的垂線  $OH$  垂於  $Vv$  上，并截  $VS$  線於  $K$  及  $k$ ，使

$$VK : KS = Vk : kS = a : e;$$

於此， $a$  為主要軸， $e$  為二焦點之距離。今以  $Kk$  為徑作一圓，與  $OH$  相交於  $H$ ，於是以  $S, H$  為焦點， $VH$  為大軸作一圖形，即為所求者。

將  $Kk$  於  $X$  平分之，作  $HX, HS, HV$ ，以及  $Hv$ 。因

$$VK : KS = a : e = Vk : kS \quad (1),$$

故亦有

$$VK + Vk : KS + kS = a : e \quad (2),$$

$$Vk - VK : kS - KS = a : e \quad (3).$$

但  $VK + Vk = 2VK + 2KX = 2VX \quad (4),$

$$Vk - VK = 2KX = 2HX \quad (5),$$

$$KS + kS = 2KX = 2HX \quad (6),$$

$$\begin{aligned} kS - KS &= kK - 2KS = 2KX - 2KS \\ &= 2SX \quad (7), \end{aligned}$$

故按 (2), (3), (4) 及 (6),

$$2VX : 2HX = 2HX : 2SX$$

或  $VX : HX = HX : SX \quad (8),$

因而  $\triangle VXH \sim \triangle HXS$

以及  $VH : SH = VX : HX$

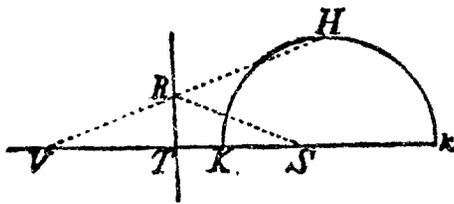
$$= VX - HX : XH + SX$$

$$= VK : KS = a : e;$$

由此可知所求圖形之大軸  $VH$  與其二焦點之距離  $SH$  相比即為所欲之比。又因  $VH$  與  $vH$

均等於大軸， $VS$  與  $vS$  爲  $TR$  與  $tr$  所直角的平方，故按 § 38，後者即爲所作圖形之切線。

第三事。焦點  $S$  已知，今求作該曲線，與  $TR$  相切於已知點  $R$ 。



第三十五圖

於  $TR$  上作垂線  $ST$ ，并延長之使  $VT = ST$ 。

於是作  $VR$ ，并在  $VS$  線內求  $K$  與  $k$  二點，使

$$VK : KS = Vk : kS = a : e;$$

於此， $a$  與  $e$  之意義如前。今以  $Kk$  爲徑作一圓，與  $VR$  相交於  $H$ ，即以  $S, H$  爲焦點， $HV$  爲軸作一圖形，則此即所求者。

用前第二事的證法，可知

$$VH : SH = VK : SK = a : e,$$

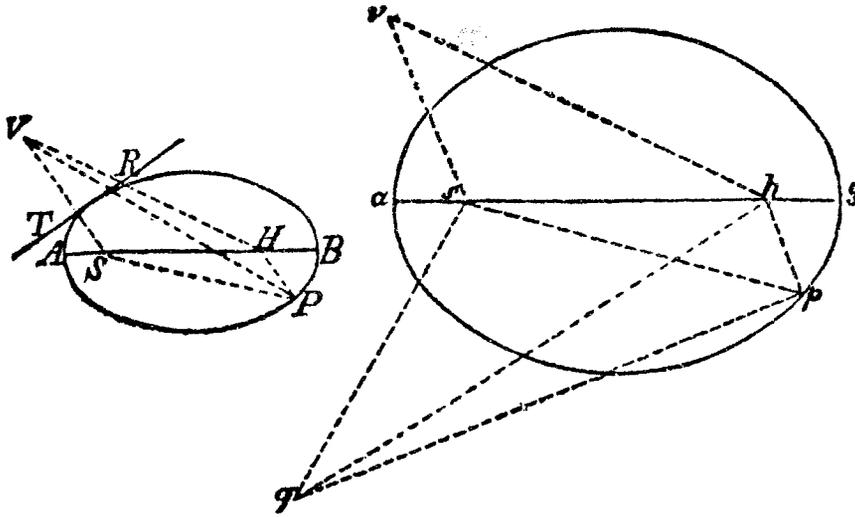
故所作之圖形即爲所求者。而由圓錐曲線的理論，亦可知平分  $VRS$  角的  $TR$  線與曲線相切於  $R$ 。

第四事。焦點  $S$  爲已知，今欲作一曲線  $APR$ ，與  $TR$  相切，經過切線外之一點  $P$ ，并與一其他曲線相似。此後者之曲線  $apb$  以  $ab$  爲大軸， $s$  與  $h$  爲焦點。

於切線  $TR$  上作垂線  $ST$ ，使其延長得

$$VT = ST.$$

於是作



第三十六圖

$$\angle hsq = \angle VSP,$$

$$\angle shq = \angle SVP,$$

并由  $r : ab = SP : SV$  (1)

比例中求得  $r$ , 以之爲半徑於  $q$  作一圓弧, 與  $apb$  相交於  $p$ . 再作  $sp$ , 并由

$$sp : SP = sh : SH \quad (2)$$

中求得  $SH$ , 如是則

$$\angle PSH = \angle psh,$$

$$\angle VSH = \angle psq.$$

於是作  $VH$ , 并以之爲大軸,  $S, H$  爲焦點作一橢圓, 則此卽爲所求之圖形.

$sv$  線如爲

$$sv : vp = sh : sq \quad (3)$$

所決定, 則

$$\angle vsp = \angle hsq,$$

$$vsh = psq,$$

而

$$\triangle svh \sim \triangle spq,$$

所以

$$vh : pq = sh : sq \quad (4)$$

因

$$\triangle VSP \sim \triangle hsq,$$

故卽

$$vh : pq = VS : SP$$

$$= ab : r = ab : pq, \quad (5)$$

而有  $vh = ab.$

又因  $\triangle VSH \sim \triangle vsh,$

故亦  $VH : SH = vh : sh \quad (6)$

所作之圖形與原有者為相似已可知，因二者之大軸及焦點之距離均為相比的。

又因  $\triangle PSH \sim \triangle psh,$

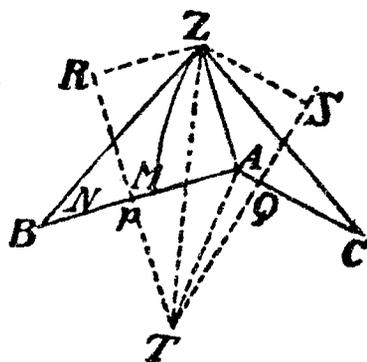
故所得之圖形經過  $P$  點；而因  $VH$  等於大軸， $VS$  為  $TR$  所垂直的平分，故  $TR$  與曲線相切。

§ 42. 問題. 有三點為已知，另求一未知點，使由已知的三點作三直線至該未知點時，其差或則為已知，或則等於 0.

第一事。今設此已知三點為  $A, B, C$ ，所求之點為  $Z$ 。因

$$BZ - AZ = MN$$

為已知，故  $Z$  當在一雙曲線上，該雙曲線之焦點為



第三十七圖

$A, B$ , 其大軸爲  $MN$ . 今於  $AB$  上如是求一點  $P$ , 使

$$PM : MA = MN : AB \quad (1),$$

并作  $PR$  垂於  $AB$  上,  $ZR$  垂於  $PR$  上, 則按雙曲線方面之定律, 有

$$ZR : AZ = MN : AB \quad (2).$$

由同樣的理由, 可知  $Z$  亦在一其他的雙曲線上, 其焦點爲  $A, C$ , 其大軸等於

$$CZ - AZ.$$

今作  $QS$  垂於  $AC$  上, 又自  $Z$  作  $ZS$  垂於  $QS$  上, 則如前有

$$ZS : AZ = CZ - AZ : AC \quad (3).$$

從可知  $ZR : AZ$  以及  $ZS : AZ$  均爲已知者, 因而  $ZR : ZS$  亦爲已知。

故如  $RP$  與  $QS$  相交於  $T$ , 並作  $TZ, TA$ , 則  $TRZS$  圖形以及  $TZ$  線之形狀位置均已知。  $TA$  及  $ATZ$  角亦均已知, 而因  $AZ : ZS$  以及  $TZ : ZS$  亦然; 故  $AZ : TZ$  亦即已知。所以  $ATZ$  三角形亦爲已知者。

第二事。倘三線中有二者相等，例如

$$AZ = BZ,$$

則  $Z$  即在  $AB$  之平分垂直線上；而其第二直線的軌跡，於是亦可如前由  $\triangle ATZ$  求之。

第三事。倘三線均相等，則  $Z$  即為經過  $A, B, C$  三點的圓之中心。

這問題的解法，已見於維太 (*Vieta*) 所編的 *Liber Tac'ionum Appollouii* 內。

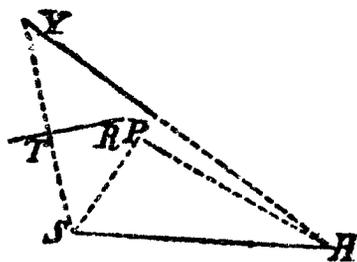
§ 43. 問題。一焦點已知，今欲求作一曲線，經過已知的若干點或與已知的若干線相切。

今設  $S$  為已知焦點， $P$  為已知點， $TR$  為切線，今求其他一焦點  $H$ 。

由  $S$  作一垂線  $ST$  於  $TR$  上，延長之使

$$TY = TS,$$

$$YH = 2a;$$



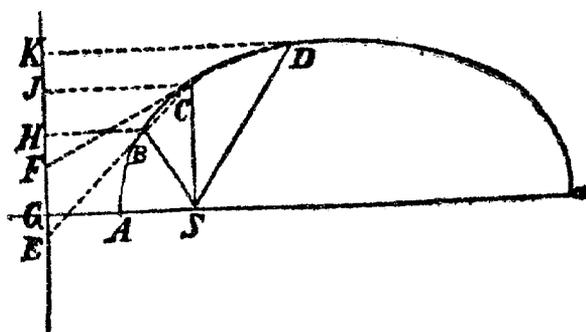
第三十八圖

於此， $2a$  為大軸。於是將  $P$  與  $S$  相連結，并與  $H$  相連結，則

$$SP = 2a - PH.$$

所以倘有若干切線已知，則即知道如許相等的線  $YH$ ，如有若干點已知，則亦可知如許  $PH$ ，其與  $2a$  之差為已知的  $SP$ 。按 § 42 即可由此以知其他的焦點  $H$ 。既有二焦點及大軸（此大軸 =  $YH$ ，在橢圓方面 =  $PH + PS$  而在雙曲線方面則 =  $PH - PS$ ），即得其曲線了。

§ 44. 附註。倘有三點已知，則其解法可簡如下。今設  $B, C, D$  為此三點，則可將  $B$  與  $C, C$  與  $D$  相連，並將  $BC, CD$  引長，至於  $E, F$ ，使



第三十九圖

$$EB : EC = SB : SC \quad (1)$$

$$FC : FD = SC : SD \quad (2).$$

於是作  $EF$ ，并作  $SG, BH$  垂於其上。在  $SG$  方向

內,使

$$GA : AS = HB : BS \quad (3)$$

$$Ga : aS = HB : BS \quad (4);$$

如是則  $A$  即為曲線之頂點,  $Aa$  為其大軸. 其為橢圓, 拋物線或雙曲線, 則視

$$\begin{array}{c} > \\ GA = SS \\ < \end{array}$$

而定. 在第一事內,  $a$  點之位置與  $A$  之與  $GK$  同, 在第二事內落在無限遠處, 在第三事內在與前相反之一面.

倘作  $CJ$  與  $DK$  垂於  $GF$  上, 則

$$JC : HB = EC : EB = SC : SB \quad (5)$$

$$JC : SC = HB : SB = GA : AS \quad (6).$$

從可知  $B, C, D$  三點在一圓錐曲線內, 其焦點之一即為  $S$ , 而且此三點與焦點之連線與  $GK$  之垂線相比即為已知之比.

拉伊爾 (*La Hire*) 在其所著“圓錐曲線論”一書內, 亦有此問題之一解法, 與此處所用略有不

同。

倘該曲線爲一雙曲線，則我僅用其一線，因物體在繼續運動中不能躍入其他一線的。

## 第五章 論焦點

### 均未知時求軌道之法

§ 45. 補題.  $P$  爲圓錐曲線上之點,  $ABDC$  爲在其內的四角形; 今自  $P$  作四線  $PQ, PR, PS, PT$  至該四角形之四邊, 其所夾角均已知, 則二相對邊之二線所成之直角形

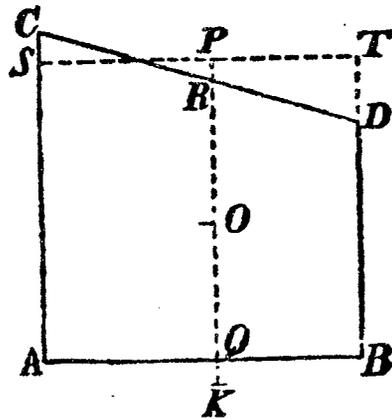
$$PQ \cdot PR$$

與其他二對邊之二線所成者

$$PS \cdot PT$$

相比, 恆爲一定.

第一事. 今設  
 $PQ$  與  $AC$  平行,  
 $PR$  亦與  $AC$  平行,  
 $PS$  與  $AB$  平行,  
 $PT$  亦與  $AB$  平行,



第四十圖

以及  $AC$  與  $BD$  平行。

如是，平分平行邊之直線，即為圓錐曲線之徑，且並平分  $RQ$ 。今設  $O$  為此平分點，則以該直徑為橫坐標軸時， $PO$  即為一縱坐標。今將  $PO$  引長至  $K$ ，使

$$OK = OP.$$

如是則  $OK$  為直徑他面之縱坐標。因  $A, B, P, K$  在圓錐曲線之周上，而且  $PK$  與  $AB$  相交之角有定故，

$$\frac{PQ \cdot QK}{AQ \cdot QB} = \text{Const.} \quad (1)$$

但  $OP = OK$ ,

$$OR = OQ,$$

故  $PR = KQ$ ,

以及  $PQ \cdot QK = PQ \cdot PR$ .

又因  $AQ = PS$ ,

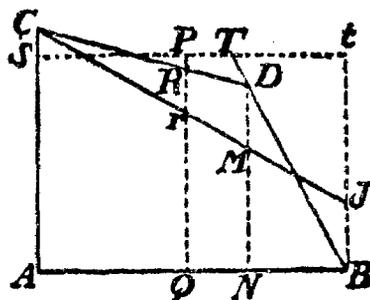
$$QB = PT,$$

故  $AQ \cdot QB = PS \cdot PT$ .

如是  $PQ \cdot PR$  與  $PS \cdot PT$  之比是一常數，如所欲

證者。

第二事。倘  $AC$  不與  $BD$  相平行，則可作  $Bd$  與  $AC$  平行，且與  $ST$  相交於  $t$ ，與圓錐曲線相交於  $d$ 。於



第四十一圖

是作  $Cd$ ，與  $PQ$  相交於  $r$ ，以及作  $DM$  與  $PQ$  平行，且交  $Cd$  於  $M$ ，交  $AB$  於  $N$ 。因

$$\triangle BTt \sim \triangle DNB,$$

$$\triangle CRr \sim \triangle CDM,$$

故有

$$\begin{aligned} Bt : Tt &= DN : BN, \\ Rr : AQ : DM : AN, \end{aligned} \tag{1}$$

而由之復可得

$$Bt \cdot Rr : Tt \cdot AQ = DN \cdot DM : BN \cdot AN \tag{2}.$$

但  $Bt = PQ$ ， $AQ = PS$ ，故 (2) 可作

$$PQ \cdot Rr : Tt \cdot PS = DM \cdot DN : AN \cdot BN \tag{3}.$$

倘將  $D$  視為曲線內之點，則按第一事有

$$DM \cdot DN : AN \cdot BN = PQ \cdot Pr : PS \cdot Pt \tag{4}.$$

因而  $PQ \cdot Pr : PS \cdot Pt = PQ \cdot Rr : Tt \cdot PS \tag{5}.$

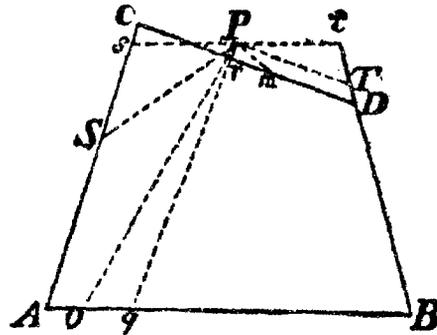
而由此復可得

$$PQ \cdot (Pr - Rr) : PS \cdot (Pt - Tt) \\ = PQ \cdot Rr : Tt \cdot PS,$$

亦即  $PQ \cdot PR : PS \cdot PT = DM \cdot DN : AN \cdot BN$   
 $= Const. (6).$

此即所欲證者。

第三事。今設  
 $PQ, PR, PS, PT$   
 四線並不與  $AC, AB$   
 相平行, 其位置完全  
 隨意。



第四十二圖

今作  $Pq$  與  $AC,$   
 $Pr$  與  $AC,$   
 $Ps$  與  $AB,$   
 $Pt$  與  $AB$  } 相平行,

則因  $PQq, PRr, PSs, QPt$  諸角均為已知, 故  
 $PQ:Pq, PR:Pr, PS:Ps,$  以及  $PT:Pt$  諸比亦均  
 可知。按以前之證, 已知  $Pq \cdot Pr : Ps \cdot Pt$  為常數,

故  $PQ \cdot PR : PS \cdot PT$  亦必如此。

此即所欲證者。

§ 46. 補題。 在前題之假定下，倘

$$PQ \cdot PR : PS \cdot PT$$

爲常數，則  $P$  點即在圍於  $ABCD$  之圓錐曲線上。

今設想作一圓錐曲線，經過  $A, B, C, D$  及一

其他不定點  $p$ ,

如是則可肯定

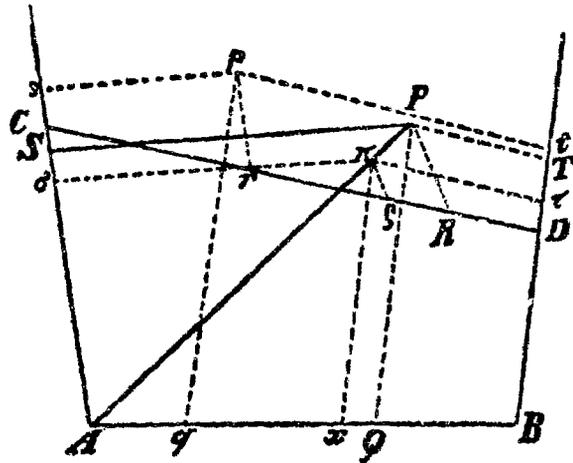
$P$  亦在於其上。

假如不然，可

作  $AP$  線，與

圓錐曲線相交

於一其他點  $\pi$ 。



第四十三圖

今由  $p$  與  $\pi$  向四角形之邊以一定的角度作諸直線

$$pq, pr, ps, pt; \pi q, \pi r, \pi s, \pi t,$$

則按 § 45. 有

$$\pi q \cdot \pi r : \pi s \cdot \pi t = pq \cdot pr : ps \cdot pt \quad (1),$$

而按所設，並有

$$\pi\chi \cdot \pi\rho : \pi\sigma \cdot \pi\tau = PQ \cdot PR : PS \cdot PT \quad (2).$$

因  $\pi\chi A\tau \sim PQAS$ ，故

$$\pi\chi : \pi\sigma = PQ : PS. \quad (3)$$

如是，(2)即成爲

$$\pi\rho : \pi\tau = PR : PT \quad (4)$$

而  $D\rho\pi\tau \sim DRPT$ ，

所以其對角線  $D\pi$  及  $DP$  必相合。從可知  $\pi$  落在  $AP$  與  $DP$  之相交點，即在  $P$  點，而此則即在圓錐曲線上。

系。倘  $PQ, PR, PS$ ，三線，由共同點  $P$  向其他位置已定的三線  $AB, CD, AC$  引出，其夾角有定，而如

$$PQ \cdot PR : PS^2$$

爲常數，則  $P$  在一圓錐曲線上， $AB, CD$  爲該曲線  $A$  及  $C$  點之切線。反之亦然。蓋  $BD$  與  $AC$  相合時，則  $PT$  與  $PS$  亦必相合，而  $PS \cdot PT$  即成爲  $PS^2$ 。以前  $AB, CD$  與曲線相交之點  $A, B, C, D$ ，

現在不能相交而相切了。

§ 47. 附註。 本題內所用之圓錐曲線一名稱，所涵甚廣，經過錐體頂點的直線形切面，以及與底平行的圓形切面均包括在內。

蓋如  $p$  落在連結  $A, B, C, D$  四點中二者之直線上，則圓錐曲線即變成爲二直線，其一有  $p$  在其上，其他則連結其餘二點。

倘四角形之相對角爲餘角， $PQ, PR, PS, PT$  諸線或則垂直，或則其角均等，而

$$PQ \cdot PR = PS \cdot PT,$$

則圓錐曲線即爲一圓。又如該四線之角隨意，但

$$PQ \cdot PR : PS \cdot PT = \sin S \cdot \sin T : \sin Q \cdot \sin R,$$

則亦得一圓；於此， $S, T, Q, R$  表四線與邊所作之角。

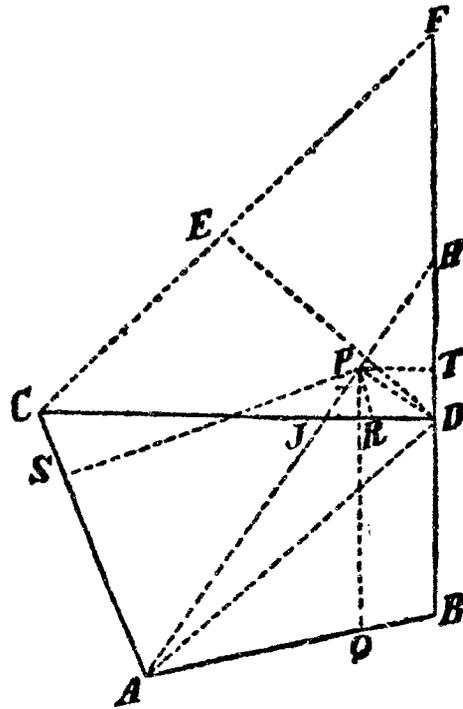
在其餘狀況下， $P$  之軌跡爲尋常所知的圓錐曲線三形式之一。但不用四角形而用一其他代之時，亦可。

又  $A, B, C, D$  四點中可有其一或二落入無限

遠處；如是，則四邊中即有其二或多者相平行。如是，該圓錐曲線即經過其餘的點而伸至於無限。

§ 48. 補題。 今

欲求一點  $P$ ，自此至位置已定的四線  $AB, BD, DC, AC$  作四線  $PQ, PT, PR, PS$  時，其所得之比  $PQ \cdot PR : PS \cdot PT$  爲一已知之常數。



第四十四圖

$AB, CD$  爲直

角形  $PQ \cdot PR$  與之相當的線，與其他二已知線相交於  $A, B, C, D$ 。今由其中之任何一點  $A$ ，作一任意線  $AH$ ，而於其上求  $P$  之所在。 $AH$  與  $CD$  之交點爲  $J$ ，與  $BD$  之交點則即爲  $H$ 。因圖形上一切角均爲已知，故可求得其比

$$PQ : PA \text{ 以及 } PA : PS,$$

因而亦可求得  $PQ : PS$ .

今由已知之比

$$PQ \cdot PR : PS \cdot PT$$

上除去以上者，則得

$$PR : PT,$$

而將其與

$$PJ : PR \quad PT : PH$$

結合時，即得

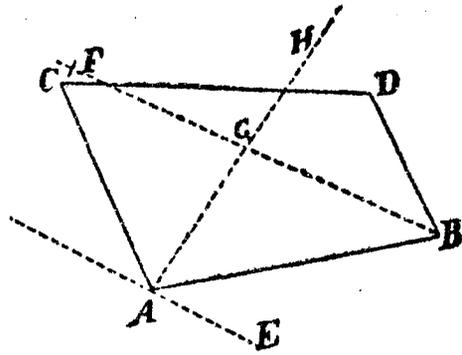
$$PJ : PH,$$

因而亦可得  $P$  點之所在。

系 1. 由此我們亦可於一不定點  $D$  作一切線；因如  $AH$  經過  $D$ ，則  $P$  與  $D$  相合，而  $PD$  弦成爲切線了。於此，將成爲零的線  $JP$  與  $PH$  之最後比可如上求之。今作  $CF$  與  $AD$  平行，俾  $CF$  交  $BD$  於  $F$ ，而在該最後比時，相交於  $E$ ；則  $DE$  即成爲切線，因  $CF$  與將成爲零的  $JH$  相平行，而與二者以等比於  $P$  點相交。

系 2. 我們亦可求得一切  $P$  點之軌跡。經過  $A$ ，

$B, C, D$  中四點之一, 可作一切線; 例如經過  $A$  作  $AE$ , 又經過一其他點例如  $B$  作



第四十五圖

$BF$  與  $AE$  相平行,

且遇軌跡於  $F$ . 今將  $BF$  於  $G$  平分, 並作  $AG$ , 則其方向即為一直徑之向,  $BG$  與  $AG$  為所屬之縱坐標. 今如  $AG$  遇軌跡於  $H$ , 則  $AH$  即為直徑之長, 其通徑與

$$\frac{BG^2}{AG \cdot AH}$$

相比。

倘  $AG$  不與軌跡相遇, 則  $AH = \infty$ , 而軌跡為一拋物線, 其通徑為

$$\frac{BG^2}{AG}.$$

倘與之於任何處相遇, 則軌跡為一雙曲線, 祇須  $A$  與  $H$  在  $G$  之同一面; 而如  $G$  在其中間, 則為一橢

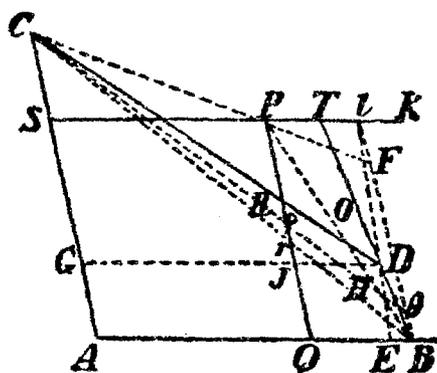
圓，如爲後者，且

$$\angle AGB = 90^\circ, \quad BG^2 : AG \cdot GH,$$

則得一圓。

如是自歐几里得開始經愛普羅尼 (*Apollonius*) 繼續，古人均用四線解決問題，不須運算，但用求作。

§ 49. 補題。  $ASPQ$  爲一任意的平行方形，其相對的二點  $A$  與  $P$  與一圓錐曲線相遇，其引長的二邊  $AQ, AS$  與該曲線相遇於  $B$  及  $C$  二點。又自曲線上任一點  $D$  作  $BD, CD$ ,



第四十六圖

與其他二引長的邊  $PS, PQ$  相交於  $T, R$ . 如是則邊上所截下之段  $PR$  與  $PT$ , 其比有定. 反之, 倘此二段之比有定, 則  $D$  在圓錐曲線上, 此圓錐曲線係經過  $A, B, P, C$  四點者。

第一事。 作  $BP$  與  $CP$ , 並由  $D$  作

$DG$  與  $AB$  平行,

$DE$  與  $AC$  平行,

而且  $DG$  與  $BP, PQ, AC$  相交於  $H, J, G,$

$DE$  與  $PC, PS, AB$  相交於  $F, K, E,$

如是則按 § 45

$$DE \cdot DF : DG \cdot DH \quad (1)$$

爲一常數, 且

$$PQ : JQ = PB : BH, \text{ 或因 } JQ = DE,$$

$$PQ : DE = PB : BH$$

$$= PT : DH,$$

或即  $PQ : PT = DE : DH \quad (2)$

此外并有

$$PR : DF = RC : DC$$

$$= JG : DG$$

$$= PS : DG,$$

或  $PR : PS = DF : DG. \quad (3)$

將(2)與(3)相結合, 卽有

$$PQ \cdot PR : PT \cdot PS = DE \cdot DF : DG \cdot DH, (4),$$

而由(1)知

$$PQ \cdot PR : PS \cdot PT \text{ 爲常數。}$$

因已知  $PQ : PS$  爲常數，故

$$PR : PT \text{ 亦必爲常數。}$$

此即所欲證者。

第二事。 倘

$$PR : PT$$

爲已知，則用逆論之法，可推知

$$DE \cdot DF : DG \cdot DH$$

亦必爲已知者。故按 § 46,  $D$  必在經過  $A, B, P, C$  之圓錐曲線上。此亦即欲證者。

系 1. 作  $BC$  使與  $PQ$  相交於  $r$ , 并於  $PT$  上取一點  $t$ , 使

$$Pt : Pr = PT : PR,$$

則  $Bt$  爲圓錐曲線上之一切線，其切點在  $B$ 。

蓋我們可設想  $D$  與  $B$  合，則  $BD$  變成爲切線，而  $CD$  與  $BT$  即各與  $CB$  及  $Bt$  相合。

系 2. 反之，倘  $Bt$  爲切線， $BC$  與  $CD$  在曲線

上之任何點相遇，則

$$PR : PT = Pr : Pt.$$

又如  $Bt$  爲切線，而

$$PR : PT = Pr : Pt,$$

則亦必  $BC$  與  $CD$  在曲線上之一點相遇。

系 3. 一圓錐曲線與一其他圓錐曲線相交，不能多於四點。

蓋如不然，二圓錐曲線可有

$$A, B, C, P, O$$

五點相共，而  $BD$  與二曲線相遇於  $D$  及  $d$ ，且  $PQ$  與  $Cd$  相交於  $g$ ，則可得

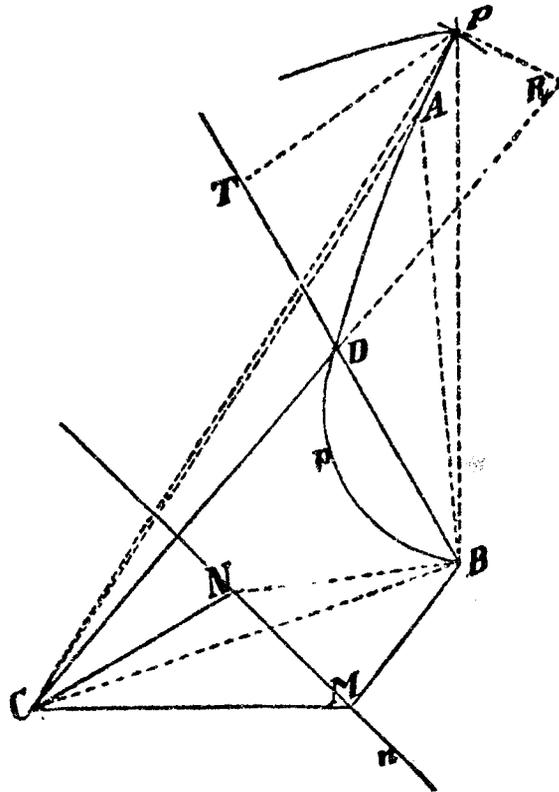
$$PR : PT = Pg : PT,$$

因而  $PR = Pg$ ,

此則與所設不合矣。

§ 50. 補題.  $BM$  與  $CM$  爲二能動且不定的直線，以  $C$  與  $B$  爲極點動之，使其作出一第三線  $MN$ ；此第三線之位置爲已定者。同時，尙有其他二直線  $BD$  與  $CD$ ，與原來之二線於  $B$  及  $C$  作一

定的角  $DBM$   
 及  $DCM$ ; 此二  
 線亦動轉之。  
 如是則後者二  
 線之交點  $D$   
 作出一圓錐曲  
 線, 經過  $B$  與  
 $C$  二點. 反之,  
 倘後者二線之  
 交點  $D$  作成  
 一圓錐曲線經



第四十七圖

過  $B, C$  及  $A$  點, 而且恆

$$\angle DBM = \angle ABC,$$

$$DCM = ACB,$$

則  $M$  必在一位置已定的直線上.

在直線  $MN$  上有一點  $N$ , 而當  $M$  至  $N$  時,  
 能動的點  $D$  可至於  $P$  點. 今作

$$CN, BN, CP, BP$$

諸線,并使

$$\angle BPT = \angle BNM,$$

$$CPR = CNM,$$

且引長  $BD, CD$ , 使與  $PT, PR$  相遇, 則按所設

$$\angle MBD = \angle NBP,$$

即  $MBN + NBD = NBD + DBP,$

因而  $MBN = DBP.$

又因  $\angle BMN = \angle BPT,$

故  $\triangle MBN \sim \triangle BPT$  (1)

按所設又有

$$\angle MCD = \angle NCP,$$

即  $MCN + NCD = NCD + DCP,$

或  $\angle MCN = \angle DCP,$

及  $\angle CMN = \angle CPR,$

故  $\triangle MCN \sim \triangle CPR$  (2)

按 (1), (2) 即有

$$PT : MN : BP : BN,$$

$$PR : MN = CP : CN,$$

因  $B, C, N, P$  均爲定點，故  $PT$  與  $PR$  對於  $MN$  之比爲一定，因而相互間亦一定。按 § 49 即可知  $D$  與一經過  $B, C, P$  之圓錐曲線相遇。此即所欲證者。

反之，若  $D$  與經過  $B, C, A$  之圓錐曲線相遇，

而恆  $\angle DBM = \angle ABC,$

以及  $\angle DCM = \angle ACB,$

但如  $D$  卒與二任何點  $p$  及  $P$  相遇， $M$  仍在固定的  $N$  與  $n$  上，則可作直線  $nN$ ，動點  $M$  將永不能離此。試假定  $M$  在任何曲線上運動，則  $D$  即與經過

$C, p, P, B, A$

之圓錐曲線相遇，而  $M$  則恆在所假定的曲線上。

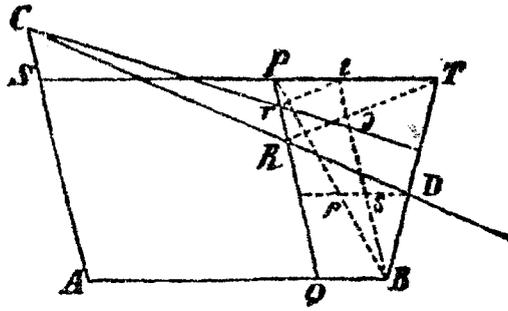
但按以前所用的證法， $D$  亦遇經過該五點的圓錐曲線， $M$  則作出一直線。如是，則當有二圓錐曲線，均經過該五點，此即違 § 49 系 3。所以假定  $M$  在曲線上運動實爲不合理者。此即所欲證的。

§ 51. 問題。 試作一經過五已知點之曲線。

設此五已知點爲

$A, B, C, D, P$

今由其一點  $A$  向  
其他二點  $B, C$  作  
直線  $AB, AC$ , 卽  
以  $B, C$  爲極點, 並  
作  $SPT$  與  $PRQ$  二



第四十八圖

線與之平行, 均經過  $P$  點. 於是由  $B, C$  經過  $D$   
作無限直線  $BDT, CRD$ , 與  $SPT, PRQ$  相交於  
 $T, R$ . 又由任何一點  $t$ , 但須在  $PT$  上者, 作  $bt$  與  
 $TR$  平行, 使

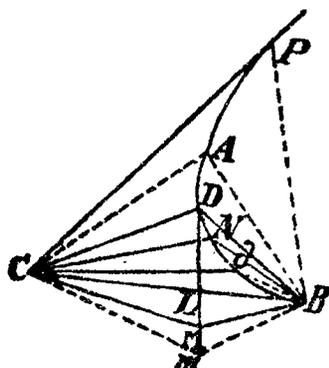
$$Pt : Pr = PT : PR.$$

再由  $B, C$  作  $Bt, Cr$  至  $t, r$ , 則其交點  $d$  卽在所  
求之曲線上.

按 § 49 蓋已可知  $d$  在經過  $A, B, P, C$  四點  
之圓錐曲線上, 而如  $Rr$  與  $Tt$  成爲零, 則  $d$  與  $D$   
相合. 故此圓錐曲線卽經過  $A, B, P, C, D$  五點.  
此卽所欲證者.

第二解法. 將已知點中之任何三者  $A, B, C$

相連之，以  $B, C$  為極點，旋轉  $ABC, ACB$  角，使  $BA$  與  $CA$  初則至  $D$  繼則至  $P$ 。  $M, N$  則為  $CL, BL$  相交之處。今作無限



第四十九圖

止的線  $MN$ ，並將動的角於極點  $B, C$  旋轉之，且按照一定的規律，使  $BA, CA$  或  $BD, CD$  之交點  $d$ ，作成一  $PADdB$  曲線，則此

即為所求者。

按 § 50，可知  $d$  遇經過  $B, C$  的圓錐曲線，而當  $m$  至  $M, L, N$  時， $d$  即達到  $D, A, P$ 。故由此法可得一圓錐曲線經過  $A, B, C, D, P$  五點者。

系 1. 由此，不難作一直線，使與所求之曲線相切於  $B$ 。

蓋如使  $d$  與  $B$  合，則  $Bd$  即為所求之切線。

系 2. 此處曲線之中心點，直徑，通徑等均可如 § 48 系 2 求之。

§ 52. 附註. 第一個作法內，如引  $BP$  線，於

其上(或於其引長上)取

$$Bp : BP = PR : PT,$$

再經過所求得之  $p$  作

$$p\delta \text{ 與 } SPT \text{ 平行,}$$

$$p\delta = Pr,$$

并引  $B\delta, Cr$  使相交於  $d$ , 則此作法可簡單些。

蓋因

$$Pr : Pt = PR : PT$$

$$= Bp : BP,$$

而且  $p\delta : Pt = Bp : BP,$

故  $P\delta = Pr.$

倘不用第二法機械的畫出曲線, 則用此處之法甚易求得曲線上之點。

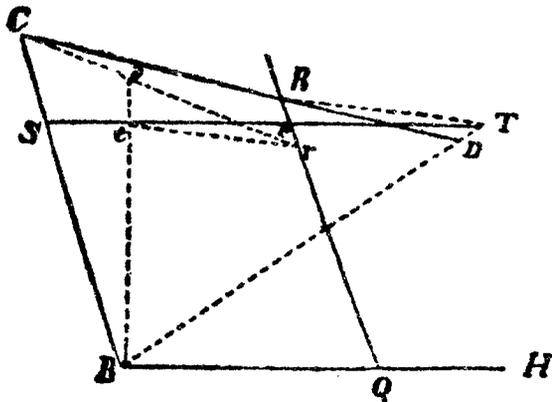
§ 53. 問題. 求作一曲線, 經過四已知點, 并與一位置已定的直線相切。

第一事。設  $HB$  爲所定之切線, 切點在  $B, C, D, P$  爲其他三點。

今作  $BC$ , 以及

$PS$  與  $BH$  平行,

$PQ$  與  $BC$  平行,



第五十圖

於是作  $BD$ , 與  $SP$  相交於  $T$ ,  
以及  $CD$  與  $QP$  相交於  $R$ ,  
並將  $R$  與  $T$  連之. 再於  $SP$

上取一點  $t$ , 作

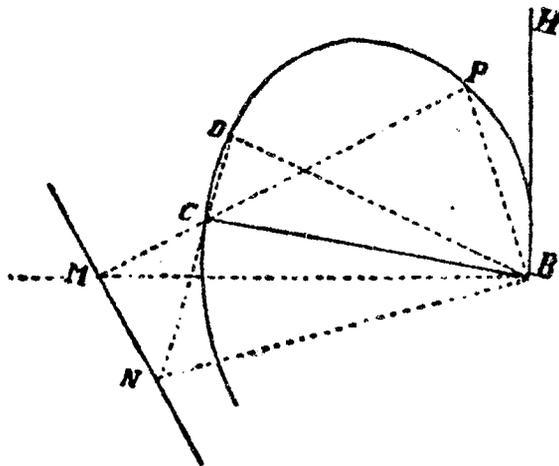
$tr$  與  $TR$  平行,

則  $Pr : Pt = PR : PT$ .

又作  $Bt$  與  $Cr$ ,  
相交於  $d$ , 則  
按 § 49 系 2,  
後者恆在所求  
之曲線上.

第二解法.

以  $B$  為極點



第五十一圖

旋轉  $CBH$  角, 并以  $C$  爲中心, 旋轉  $DC$  半徑, 同時, 并引長  $DC$ . 當  $BH$  之位置爲  $BP, BD$  時,  $BC$  之位置即爲  $BM, BN$ , 後者與引長且相當的半徑  $CP, CD$  相遇, 此項半徑與  $BH$  之交點即爲所求曲線上之一點。

蓋如前題內圖形上之  $A$  點與  $B$  點相合, 則  $CA$  與  $CB$  亦相合, 而  $AB$  線最後即成爲  $BH$  切線了. 於是該處所用的作法即與此處者相同。

所以  $BH$  與  $CD$  之交點作出一圓錐曲線經過  $C, D, P$  并以  $BH$  爲切線。

第二事. 設  $B, C, D, P$  四點在切線  $HJ$  之外。

今作  $BD, CP$ , 相交於  $G$ , 并與切線相交於  $H$  及  $J$ . 於是將切線於  $A$  點分割之, 使

$$\begin{aligned} HA : AJ &= \sqrt{BH \cdot HD} \cdot \sqrt{CG \cdot GP} \\ &: \sqrt{PJ \cdot JC} \cdot \sqrt{DG \cdot GB}. \end{aligned}$$

如是則  $A$  即爲切點。

蓋如作

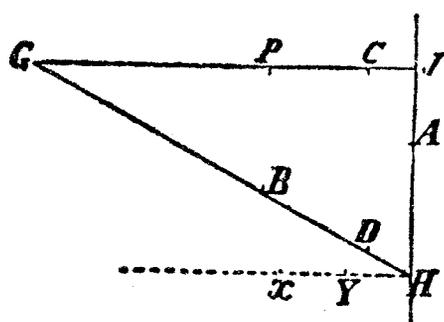
$XH$  與  $PJ$  平行,

使  $HX$  與曲線相交於  $X, Y$ , 則按圓錐曲線理論

$$HA^2 : AJ^2 = (HX \cdot HY) (BH \cdot HD) \\ : (BH \cdot HD) (PJ \cdot JC).$$

或因  $HX \cdot HY : BH \cdot HD = CG \cdot GP : DG \cdot GB$ ,

$$\text{故有 } HA^2 : AJ^2 = (CG \cdot GP) (BH \cdot HD) \\ : (PJ \cdot JC) \cdot (DG \cdot GB).$$



第五十二圖

切點  $A$  既求得，  
 曲線即可如第一事中之方法求得之。 $A$  可在  $H$  與  $J$  之中間，亦可在其外，故畫出曲

線之法亦可有二。

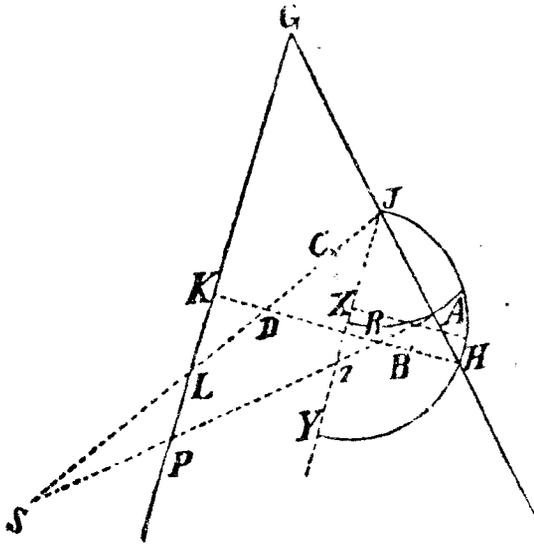
§ 54. 問題。 求作一曲線，經過三已知點，并與二位置已定的直線相切。

今設  $HJ, KL$  爲二已知切線， $B, C, D$  爲三已知點。今作  $BD$  線與切線相交於  $H$  及  $K$ ，又作  $CD$  線與之相交於  $J$  與  $L$ 。於是將此項線於  $R$  及

S 割之,使其

$$HR : KR = \sqrt{BH \cdot HD} : \sqrt{BK \cdot KD} \quad (1)$$

$$JS : LS = \sqrt{CJ \cdot JD} : \sqrt{CL \cdot LD} \quad (2)$$



第五十三圖

今姑不問此交  
點在  $K, H$  及  $J, L$   
之間, 或在其外. 再  
作  $RS$ , 與切線相交  
於  $P, A$ ; 於是後者  
即為切點.

今設  $A, P$  為  
切點, 並經過  $H, J,$   
 $K, L$  中四點之一,

例如  $J$ , 作

$JY$  與  $KL$  平行,

俾  $JY$  與曲線相交於  $X$  及  $Y$ , 並於其上取

$$JZ = \sqrt{JX \cdot JY} \quad (3),$$

則按圓錐曲線理論有

$$JX \cdot JY : LP^2 = CJ \cdot JD : CL \cdot LD,$$

或按幾何作法有

$$JZ^2 : LP^2 = JS^2 : LS^2,$$

故  $JZ : LP : JS : LS$ . (4)

從可知  $S, P, Z$  三點在一直線上。倘二切線相交於  $G$ , 則按圓錐曲線理論有

$$JX \cdot JY : JA^2 = GP^2 : GA^2 \quad (5)$$

但按 (3)

$$JZ^2 = JX \cdot JY,$$

故  $JZ : JA = GP : GA$  (6),

從可知  $P, Z, A$ , 在一直線上, 故  $S, P, A$  亦然。

用同法可證明  $R, P, A$  亦在一直線上; 故切點  $A, P$  在  $SR$  直線上。

既得此後, 即不難仿 § 53 第一事之法作出該曲線。

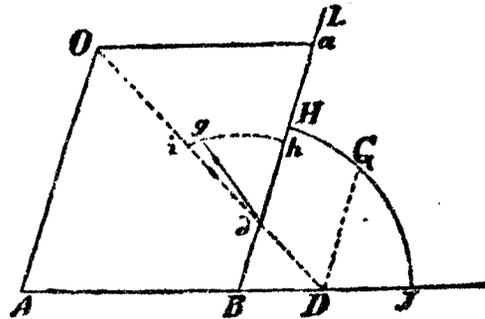
本節及前節之第二事內, 不問  $XY$  是否與曲線相交於  $X, Y$ , 其作法均同; 蓋作法并不與交點有關。

其餘詳盡的說明, 姑從略了。

§ 55. 問題。 求將已知之圖形變為同類的他圖

形。

今設  $HGJB$  為  
 所欲改變的圖形；  
 今先任作二平行線  
 $AO, BL$ , 與一第三  
 位置已定的線  $AB$



第五十四圖

相交於  $A$  及  $B$ . 又自圖形上任一點  $G$  作  
 $GD$  與  $OA$  平行,

使其與  $AB$  相交於  $D$ . 再自  $AO$  上一點  $O$ , 作  $OD$ ,  
 與  $BL$  相交於  $d$ , 又作  $gd$  與  $BL$  作成一已知角,  
 且使  $g$  之位置能

$$gd : Od = GD : OD \quad (1).$$

如是則  $g$  為新圖形  $hgi$  內之點, 與舊圖形內之  $G$   
 相當. 用此種方法, 可由舊圖形方面之若干點以求  
 得新圖形方面之相當的若干. 因此, 我們可設想當  
 舊圖形上  $G$  點連續的於舊形上運動將其走完時,  
 $g$  亦必連續的描出新圖形。

爲區別計，今稱

$DG$  爲原來之縱坐標，

$dg$  爲新縱坐標，

$AD$  爲原來之橫坐標，

$ad$  爲新橫坐標，

$O$  爲極點，

$OD$  爲分割的半徑，

$OA$  爲原來之縱半徑，

$Oa$  爲新縱半徑。

倘  $G$  在一位置已定的直線上，則  $g$  亦在如是一直線上。倘  $G$  與圓錐曲線遇，則  $g$  亦必如是，而且在這裏我將圓亦算在圓錐曲線內。又如  $G$  與一三次曲線相遇，則  $g$  亦與一同次的曲線相遇。在高次的曲線方面亦如此，故  $G$  與  $g$  所遇之曲線其次數恆同。

$$\begin{aligned} \text{蓋 } ad : OA &= Od : OD \\ &= dg : DG, \\ ad : OA &= AB : AD, \end{aligned}$$

$$\text{故 } AD = \frac{OA \cdot AB}{ad}, \quad DG = \frac{OA \cdot dg}{ad}.$$

倘  $G$  與一直線相遇，即連結  $AD, DG$  的方程爲一次的，則將以上所得  $AD, DG$  之值代入方程內，所得的新方程亦爲  $ad, dg$  之一次式，故亦爲一直線。

倘  $AD, DG$  在原來之方程內其次數爲二，則新方程中  $ad, dg$  之次數亦然；三次，四次等方面均無不同。故新方程中  $ad, dg$  之次數，恆與原來方程中  $AD, DG$  之次數同，因而  $G$  與  $g$  所遇之曲線，其解析的次數亦恆相同。

倘原來之圖形內，有一直線與曲線相切，則此直線經轉過去後，在新圖形中亦與曲線相切；反之亦然。蓋原來圖形內曲線上任何二點相接近相合時，新圖形內之相當點亦即相接近相合，故原來圖形與新圖形內連結此二點之線均成爲切線了。

欲證明此，可用幾何方法明之；爲簡單計，今姑從略了。

所以我們如欲將直線形轉變成一其他直線形

時，則祇須將其直線之交點轉過去便行，得此便可將直線畫出來了。如欲轉變一曲線形，則可將決定此曲線的點，切線，及其他直線轉過去可矣。

此題可用於解決困難的問題方面。其法即將已知的圖形化成為簡單者可矣。任意的收斂的直線，可化之成為平行的；其法將原來的縱半徑  $AO$  易以一直線，經過收斂的直線之交點。如是，交點化到無限遠處去了，蓋向無限遠點收斂的直線是平行的。於是可將問題在新圖形內求其解決，再經過一倒轉變為原來的以得其解。

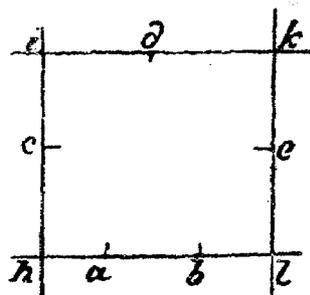
在關於物體的問題方面，此題亦很有用。蓋如有二圓錐曲線相交，而問題可於此解之，則可將其中之一，如為雙曲線或拋物線，化成為橢圓，至橢圓則可化之為圓。故在平面內求解時，一直線與一圓錐曲線的問題，可化之為一直線與一圓。

§ 56. 問題。 求作一曲線，經過二已知點并與三位置已定的直線相切。

經過二切線之交點以及連二已知點的線與第

三切線之交點作一不定的直線，即用之為原來的縱半徑；如是則按 § 55 即得一新圖形，其中二切線相平行，第三切線則與連

二已知點之線平行。今設  $hi$   $kl$  為平行的二切線  $ik$  為第三切線， $hl$  為與此平行的線，經過  $a$  與  $b$  二點，而



第五十五圖

此二點則亦為所求之圓錐曲線所當經過的。如是， $hikl$  即成為完全的平行方形了。

今於  $c, d, e$  點割  $hi, ik, kl$  三線，使其

$$\begin{aligned} hc : \sqrt{ah \cdot hb} &= ic : id \\ &= ke : kd, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} hc : \sqrt{ah \cdot hb} \\ &= hi + kl : ik + \sqrt{ah \cdot hb} + \sqrt{al \cdot lb} \quad (1), \end{aligned}$$

則  $c, d, e$  即為切點。

蓋按圓錐曲線理論有

$$\begin{aligned} hc^2 : ah \cdot hb &= ic^2 : id^2 = ke^2 : kd^2 \\ &= el^2 : al \cdot bl, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } hc : \sqrt{ah \cdot hb} &= ic : id = ke : kd \\ &= el : \sqrt{al \cdot bl}. \quad (2), \end{aligned}$$

或經綜合後

$$\begin{aligned} hc + ic + ke + el : \sqrt{ah \cdot hb} + id + kd + \sqrt{al \cdot lb} \\ = hc : \sqrt{ah \cdot hb} = ic : id = ke : dk \\ = el : \sqrt{al \cdot lb}. \end{aligned}$$

$$\text{因 } hc + ic = hi,$$

$$ke + el = kl,$$

$$id + kd = ik,$$

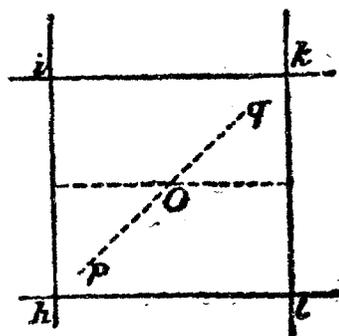
$$\begin{aligned} \text{故 } hi + kl : ik + \sqrt{ah \cdot hb} + \sqrt{al \cdot lb} \\ = hc : \sqrt{ah \cdot hb} = ic : id \\ = ke : kd = el : \sqrt{al \cdot lb}. \end{aligned}$$

如是，即可得新圖形之切點  $c, d, e$ 。用 § 55 之法再將此項轉到原來的圖形內去，即可按 § 51 第一作法作出該曲線。

隨  $a, b$  之在  $h, l$  內或外， $c, d, e$  亦必在  $h, i$  及  $i, k$  以及  $k, l$  之間或在其外。倘  $a, b$  中其一在  $h, l$  之間，其一則在其外，則此問題即不能解。

§ 57. 問題. 求作一曲線, 經過一已知點, 并與四位置已定之直線相切.

由二切線之交點, 作一線至其他二切線之交點, 并按 § 55 之法將其化成爲一新圖形. 如是則每二切線相平行. 今設  $hi$ ,  $kl$ , 以及  $ik$ ,  $hl$  爲此諸切線, 內含一平行方形  $hikl$ . 又設  $p$  爲新圖形內之點, 與原圖形內之已



第五十六圖

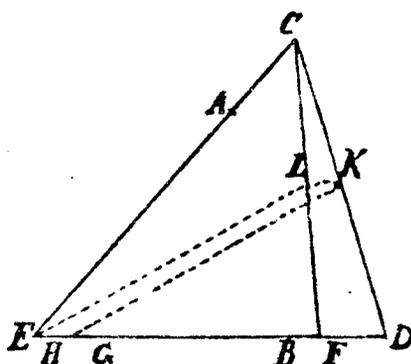
知點相當者. 今由  $p$  作一線經過圖形之中心點  $Q$ , 并使

$$Qq = Qp,$$

則  $q$  卽爲新圖形內之第二點, 爲圓錐曲線所當經過者. 於是用 § 55 內倒轉之法, 將此點仍轉到原圖形內, 則卽得二點, 爲曲線所當經過者. 如是卽可按 § 56 之法作出圓錐曲線.

§ 58. 補題.  $AC$ ,  $BD$  爲二位置已定之線,  $A$   $B$  爲其界限, 且此二線之比爲已知. 今將  $C$  與  $D$

連結之，并於  $K$  分割  $CD$  線，使其比與  $AC$ ,  $BD$  之比相等；如是則  $K$  在一位置已定之直線上。



第五十七圖

今設  $BD$  與  $AC$  相交之點爲  $E$ ，於  $BE$  上取一點  $G$ ，使

$$BG : AE = BD : AC \quad (1)$$

而且恆  $FD = EG$ 。

如是則

$$AE + AC : BG + BD = AC : BD \quad (2),$$

而因  $AE + AC = CE$ ,

$$BG + BD = GD = GF + FD$$

$$= GF + GE = EF,$$

故  $CE : EF = AC : BD \quad (3)$

從可知  $EFC$  三角形就其位置而論爲已知者。

今將  $CF$  於  $L$  分割之，使其

$$CL : CF = CK : CD \quad (4),$$

則  $EFL$  三角形之位置亦為已定，而  $L$  則在位置已定的直線  $EL$  上。今作  $KL$ ，則因  $FD$  以及

$$LK : FD$$

均為已知，故  $LK$  亦為已知。又作

$$EH = KL,$$

則  $ELKH$  為一平行方形，而  $K$  則在位置已定的邊  $HK$  上。此即所欲證者。

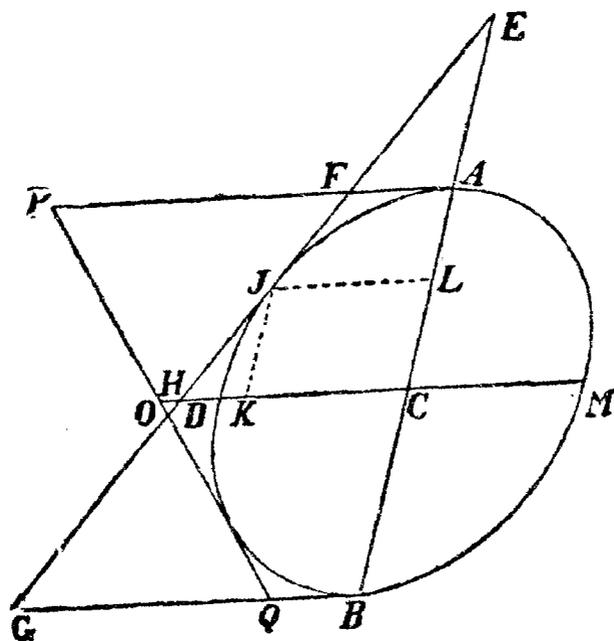
系。關於位置已定的圖形  $EFLC$ ，其  $EF$ ， $EL$ ， $EC$  三直線或

$$GD, HK, ED,$$

之相互比為一定。

§ 59. 補題。設有三直線，其中之二相平行且其位置為已定，與一任意的圓錐曲線相切，則與此二切線相平行的曲線之半徑，為在二切點及第三切線中間二段之中比。

今設  $AF, BG$  為二平行的曲線，其與圓錐曲線相切之點為  $A, B$ ， $EF$  則為一其他直線，與曲線相切於  $J$ ，并與前二切線相交於  $F, G$ 。又  $CD$



第五十八圖

爲與二切線相平行之半徑，則題上所說的，爲

$$AF : CD = CD : BG,$$

蓋如共軛徑  $AB, DM$  與切線  $FG$  相交於  $E, H$ ，并自己相交於  $C$ ，則可完成  $JKCL$  平行方形。

按圓錐曲線理論卽有

$$CA : LC = EC : CA, \quad (1)$$

而由此，可得

$$EC - CA : CA - LC = EC : CA,$$

卽  $EA : AL = EC : CA \quad (2).$

又  $EA : EA + AL = EC : EC + CA,$

故  $EA : EL = EC : EB$  (3)

但因  $\triangle EAF \sim \triangle ELJ \sim \triangle ECH \sim \triangle EBG,$

故  $AF : JL = CH : BG$  (4).

又按圓錐曲線理論, 如前有

$$CK : CD = CD : CH, \quad (5)$$

故將 (4), (5) 相連後, 因  $CK = JL,$

$$AF : CD = CD : BG.$$

此即所欲證者。

系 1. 設  $FG, PQ$  二切線與平行的切線相交於  $F, G,$  以及  $P, Q,$  并自己相交於  $O,$  則

$$AF : CD = CD : BG,$$

$$BQ : CD = CD : PA,$$

故  $AF : BQ = PA : BG$  (6),

或  $AP - AF : AP = BG - PQ : BG,$

即  $PF : AP = GQ : BG$  (7),

或  $AF : BQ = PF : GQ$   
 $= FO : GO$  (8).

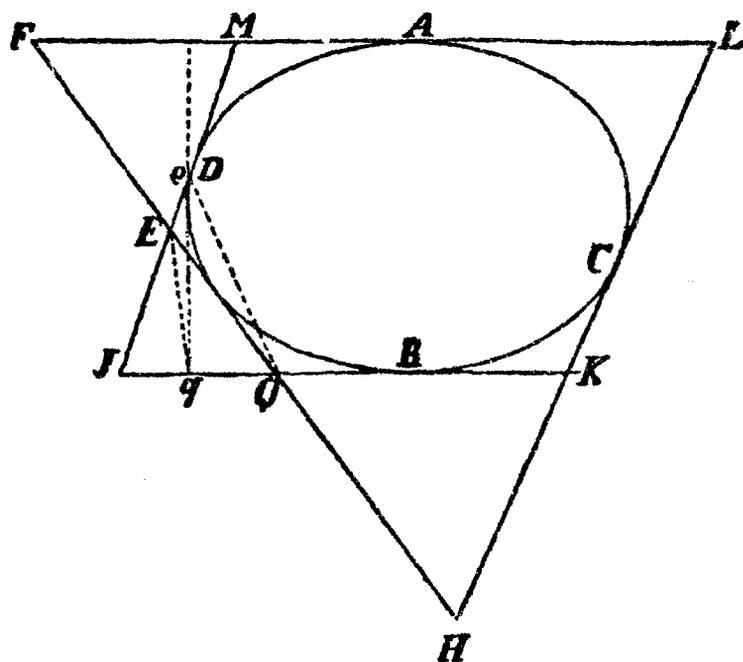
系 2.  $P$  與  $G$  之連結線, 以及  $F, Q$  之連結線, 相交於  $ACB$  線上, 此線則經過圖形之中心以及切點  $A, B$ .

§ 60. 補題. 一平行方形之四邊  $ML, JK, KL, MJ$  與一圓錐曲線相切, 并將其引長之, 使四邊均與一切線  $FQ$  相交, 則有

$$ME : MJ = BK : KQ,$$

$$KH : KL = AM : MF.$$

蓋按 § 59 系 1, 有



第五十九圖

$$ME : EJ = BK : BQ.$$

故  $ME : ME + EJ = BK : BK + BQ,$

即  $ME : MJ = BK : KQ.$

仿此,  $KH : HL = BK : AF,$

而因  $BK = AM,$

故  $KH : HL = AM = MF.$

此即所欲證者。

系 1. 倘  $MJKL$  平行方形爲已知, 則亦可求得  $KQ \cdot ME$  以及與之相等的  $HK \cdot MF$ .

蓋因  $\triangle HKQ \sim \triangle EFM.$

故此二直角形相等。

系 2. 倘再作一其他切線  $eq$ , 使與  $JK, JM$  相交於  $q, e$  則

$$KQ \cdot EM = Kq \cdot eM,$$

故  $KQ : eM = Kq : EM,$

或  $KQ : Kq - KQ = eM : EM - eM,$

即  $KQ : eM = Qq : Ee.$

系 3. 倘作  $Eq, eQ$  并平分之, 則連結其平分

點之線經過圓錐曲線之中心點。

蓋按  $Qq : eE = KQ : eM,$

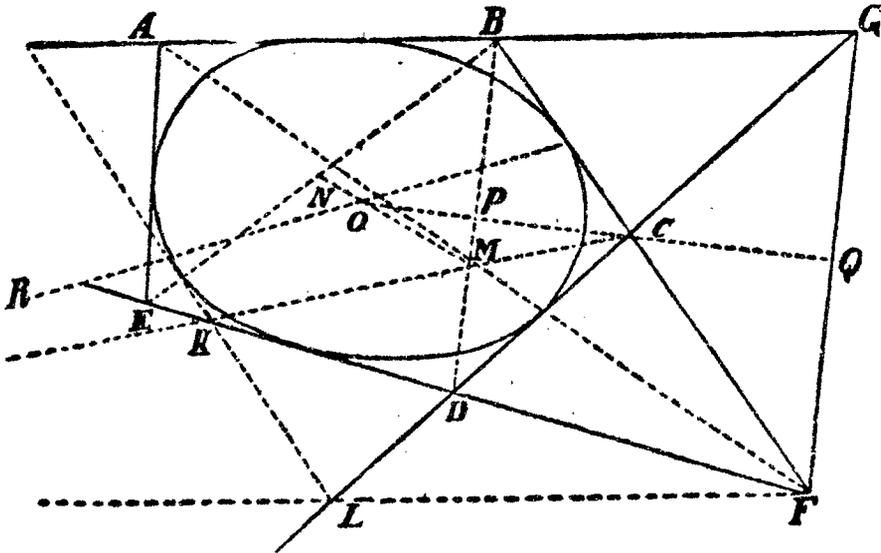
可知該線必經過  $Eq, eQ, MK,$  之中心點, 而  $MK$  之中心點即為圓錐曲線之中心點。

§ 61. 問題. 求作一曲線, 與五位置已定之直線相切。

今設此五已知切線為

$ABG, BCF, GCD, FDE, EA,$

其中四線構成一四角形  $ABEF,$  今將其對角線  $AF, BE$  於  $M, N$  平分之, 如是則按 § 60 系 3,



第 六 十 圖

$MN$  直線即經過曲線之中心。於是再將其他四切線所成之四角形  $BGDF$  之對角線  $BD, FG$ , 再於  $P, Q$  平分之, 則  $PQ$  直線亦必經過該中心點。因此,  $MN$  與  $PQ$  之交點即為中心點, 今以  $O$  表之。

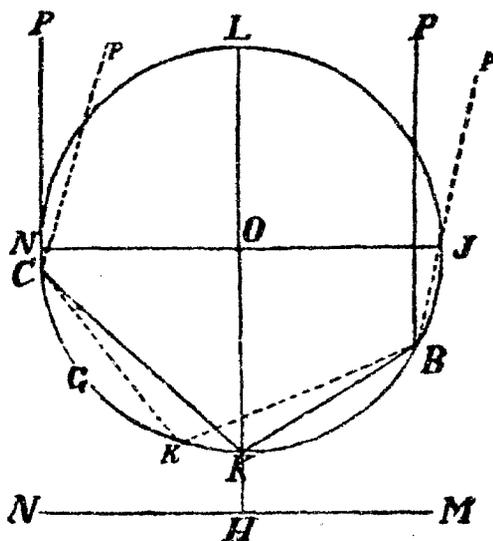
今作  $KL$  使與  $BC$  平行, 并與  $O$  相離與  $BC$  之離  $O$  等, 則  $KL$  亦必與曲線相切。今如此切線與  $GCD, FDE$  相交於  $L, K$ , 則可經過此項點作  $CK, FL$ , 相交於  $R$ 。於是作  $OR$  線, 則此線與切線  $CF, KL$ , 相交於其切點 (按 § 59 系 2)。用同法可求得其他切點, 再按 § 51 之第一事作出該曲線。

§ 62. 附註。 中心點或漸近線已知的問題, 亦已包括入以上諸題內。蓋如有切線, 點及中心點已知, 則在中心點對面且與之等遠的切線及點, 亦即有等多的可以求得。漸近線於此須視之為切線, 惟切點乃在無限遠處。試設想任何一切線之切點移至無限遠處, 則該切線即成為漸近線, 而 § 51, 及 § 53 內之作法即成為求作漸近線已知的問題之

法。

曲線既得之後，即可如下法求其軸及焦點。在 § 50 內之作法中，我們曾使動角  $PBN, PCN$  之

二邊  $BP, CP$  (其交點能畫出曲線者) 相平行，而在保持此位置中，並使其以  $B, C$  為極點旋轉。如是則其他角之邊  $BN, CN$  於其交



第六十一圖

點  $K$  或  $k$  作出一圓  $JBKGC$ ，其中心點在  $O$ 。

今由  $O$  垂一線  $OH$  於  $MN$  上 (此後者即為  $CN, BN$  之相交處)，與圓相交於  $K, L$ 。倘  $CK$  與  $BK$  相遇於  $K$ ，則  $BP$  與  $CP$  所表示者為大軸之方向，蓋後者與  $BP$  相平行而小軸則與此相垂直。倘  $BK$  與  $CK$  不在  $K$  而在較遠之點  $L$  相遇，則所得適反。所以如曲線之中心點已知，則其軸即可

求得，於是亦不難求得其焦點了。

二軸之平方相比，猶如

$$KH : LH,$$

故欲作一種類已定之曲線經過四點實非難事。蓋我們可將其中之二，如  $C, B$ ，作為極點，則其第三點即作出  $PCK, PBK$  動角，於是即不難求得  $BKGC$  圓。又因曲線之種類已知，故

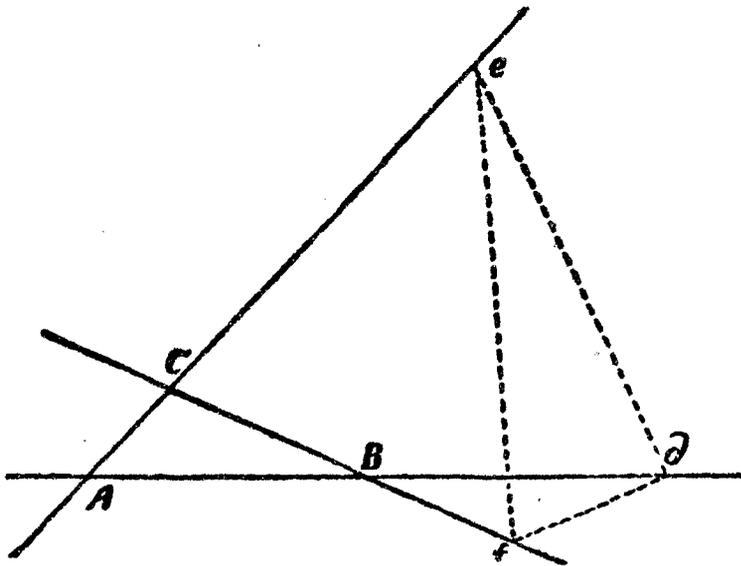
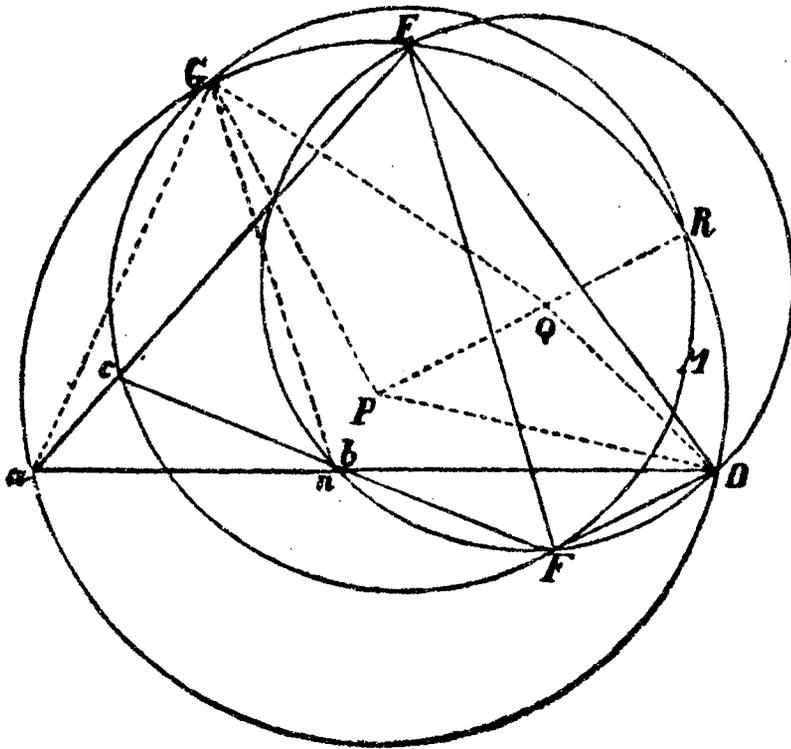
$$OH : OK$$

一比亦即易知， $OH$  本身亦可知了。

今以  $O$  為中心點，以  $OH$  為半徑，作一圓，並經過第四點作一切線至該圓，即可得導線  $MN$ ，由此，即可求得其曲線。所以我們亦可於一任意圓錐曲線內作一性質已定之四角形。

除此以外，尚有其他補題，可用之以求得特殊的曲線，使其適合已知的點及切線。今姑從略。

§ 63. 補題。 有一三角形，其形狀及大小均已定，今欲將其三角各落入一直線，此項直線之位置均已定，且不能均相平行。



第六十二圖

今設  $AB, AC, BC$

爲三直線，其位置均已定。今欲將  $DEF$  如是安置，使其

$D$  角落入  $AB$  線內，

$E$  角落入  $AC$  線內，

$F$  角落入  $BC$  線內。

今於  $DE, DF, EF$  上各作一圓分，有  $DRE, DGF, EMF$  三者，而且此項圓分在  $DE, DF, EF$  之該面，使

$D, R, E, D$  之次序與  $B, A, C, B$  同，

$D, G, F, D$  之次序與  $A, B, C, A$  同，

$E, M, F, E$  之次序與  $A, C, B, A$  同。

於是將圓分補充爲圓。首二圓之交點爲  $G$ ，其中心點爲  $P, Q$ 。今作  $GP, PQ$ ，並如是決定  $Ga$ ，使

$$Ga : AB = GP : PQ \quad (1)$$

於是再作一圓，以  $G$  爲中心， $Ga$  爲半徑，與  $DGE$  圓相交於  $a$ 。今將  $abcDEF$  一形完成，則此形與  $ABCdef$  相似相等。再作  $cF$  線，與  $aD$  相交於  $n$ ，

並引  $aG, bG, PD, QG, QD$  諸線, 將  $PQ$  引長至  $R$ ,

則  $\angle EaD = \angle CAB,$

$$\angle acF = \angle ACB,$$

故  $\triangle anc \sim \triangle ABC.$

於此可知

$$\angle anc = \angle FnD = \angle ABC = \angle FbD,$$

而  $n$  與  $b$  相合. 又

$$\angle GPQ = \frac{1}{2} \angle GPD = \angle GaD,$$

$$\angle GQR = \frac{1}{2} \angle GQD = \angle GbD,$$

故  $180^\circ - GQR = 180^\circ - GbD,$

即  $PQG = abG,$

因而  $\triangle GPQ \sim \triangle abG.$

所以可得

$$Ga : ab = GP : PQ \quad (2).$$

由 (1), (2) 可知

$$ab = AB,$$

以及  $\triangle abc \cong \triangle ABC.$

因  $DEF$  三角形之  $D, E, F$  點在  $ab, ac, bc$

上,  $abc$  爲一三角形, 故可完成

$$ABCdef \cong abcDEF,$$

而問題於是解決了。

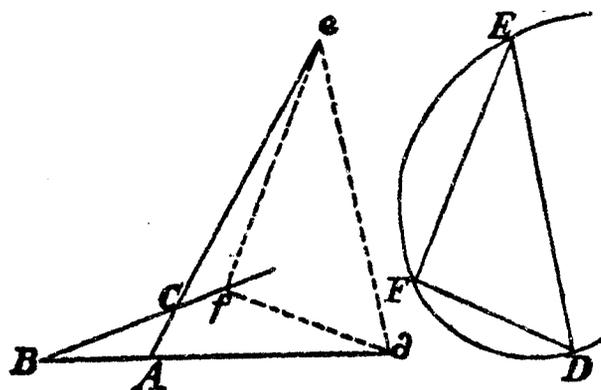
系。由此, 我們可作一直線, 使其部分有一定的長, 在位置已定之直線間。

我們可設想三角形  $DEF$  之  $D$  點與  $EF$  漸接近,  $DE$  與  $DF$  邊合成爲一直線, 因而三角形本身成爲一直線, 其  $DE$  部分落在  $AB, AC$  之間,  $DF$  則在  $AB, BC$  之間。今將以前之作法應用於此, 則即得問題之解法。

§ 64. 問題。求作一形狀大小已定的曲線, 使其一定的部分落在位置已定的直線之間。

今欲作一曲線, 與  $DFE$  相合, 並爲位置已定的三直線  $AB, AC, BC$  分成爲部分, 與  $DF, FE$  部分相合。

今作  $DE, EF, DF$  三直線, 並將此三角形之三角按照 § 63 之法置於位置已定的直線上。於是可圍三角形作一與  $DFE$  曲線相合的第二曲線。



第六十三圖

§ 65. 補題. 求作一形狀已定的四角形，其各頂點各在一位置已定的直線上，此項直線不能均相平行亦不能均向一點收斂。

今設  $ABC, AD, BD, CE$  為位置已定的四線，其第一線交第二線於  $A$ ，交第三線於  $B$ ，交第四線於  $C$ 。於是須作

$$fghi \cong FGHI,$$

使 角點  $f$  在  $ABC$  上，

角點  $g$  在  $AD$  上，

$h$  在  $BD$  上，

$i$  在  $CE$  上。

今作  $FH$ ，並在  $FG, FH, FJ$  之上各作一圓

分  $FSG, FTH, FVJ$ , 其所含之角爲  $BAD, CBD, BCE$ . 但此項圓分必須在線之該面, 使

$F, S, G, F$  之順序與  $B, A, D, B$  者同,

$F, T, H, F$  之順序與  $C, B, D, C$  者同,

$F, V, J, F$  之順序與  $A, C, E, A$  者同.

於是將此項圓分補充成圓, 並設  $P$  爲  $FSG$  之中心點,  $Q$  爲  $FTH$  之中心點. 將  $P, Q$  連結之, 引長  $PQ$  線, 於其上決定一點, 使

$$QR : PQ = BC : AB.$$

又取  $QR$  在  $Q$  之該面, 使

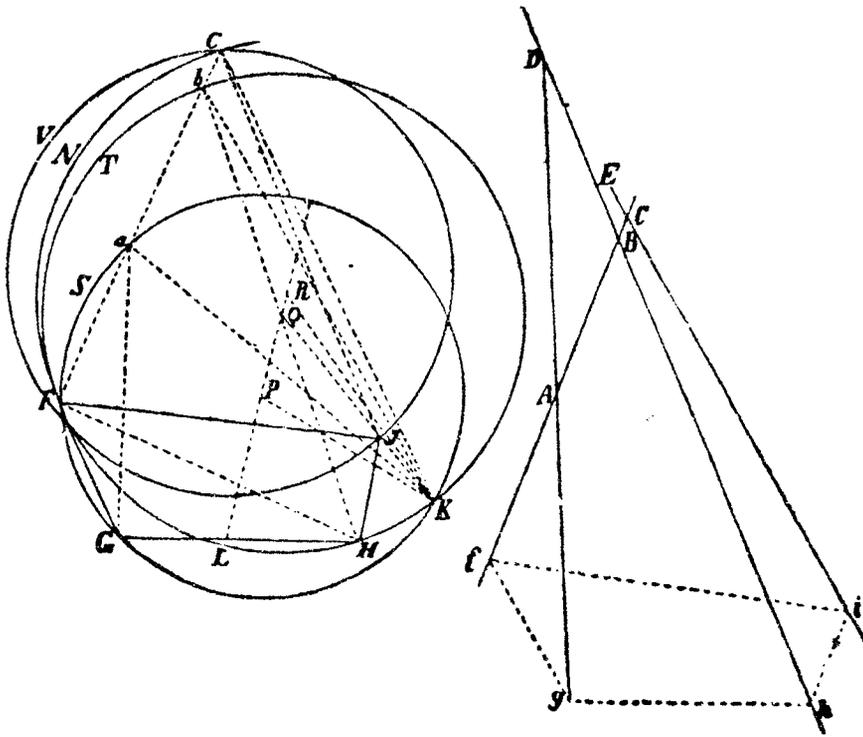
$P, Q, R$  之順序與  $A, B, C$  者同,

而以  $R$  爲中心點,  $RF$  爲半徑, 作一第四圓  $FNc$ , 與第三圓  $FVJ$  相交於  $c$ . 於是再作  $Fc$ , 與第一圓相交於  $a$ , 第二圓相交於  $b$ , 並引  $aG, bH, cJ$  諸線, 作一圖形

$$ABCihgf \sim abcJHGF;$$

如是則  $fghi$  卽爲所求之四角形.

今設  $FSG$  與  $FTH$  相交於  $K$ , 作



第 六 十 四 圖

$PK, QK, RK, aK, bK, cK,$

諸線，並引長  $QP$  至  $L$ 。如是則

$$\angle FaK, FbK, FcK$$

等於

$$\angle FPK, FQK, FRK$$

之半，所以等於

$$\angle LPK, LQK, LRK.$$

因此，

$$PQRK \sim abcK$$

而  $ab : bc = PQ : QR = AB : AC.$

此外,  $\angle fAg, fBh, fCi$   
 等於  $\angle FaG, FbH, FcJ,$   
 故可完成

$$ABCfghi \sim abcFGHJ,$$

而  $fghi \sim FGHJ;$

因而  $f, g, h, i$

各在  $ABC, AD, BD, CE$

上.∴

系. 由此, 我們可作一直線, 其在位置已定的四線間之部分, 相互間有一定之比.

我們可放大  $FGH, GHJ$  角, 使  $FG, GH, HJ$  落在一直線內, 於是按問題求作法, 以得一直線  $fghi$ , 其部分  $fg, gh, hi$ , 落在

$AB$  與  $AD, AD$  與  $BD, BD$  與  $CE$  之間,  
 且其相互之比, 如  $FG, GH, HJ$  間之相互比, 其順序亦相同. 用下法更可較簡的得之.

今將  $AB$  引長至  $K, BD$  至  $L$ , 使

$$BK : AB = HJ : GH \quad (1),$$

$$DL : BD = GJ : FG \quad (2),$$

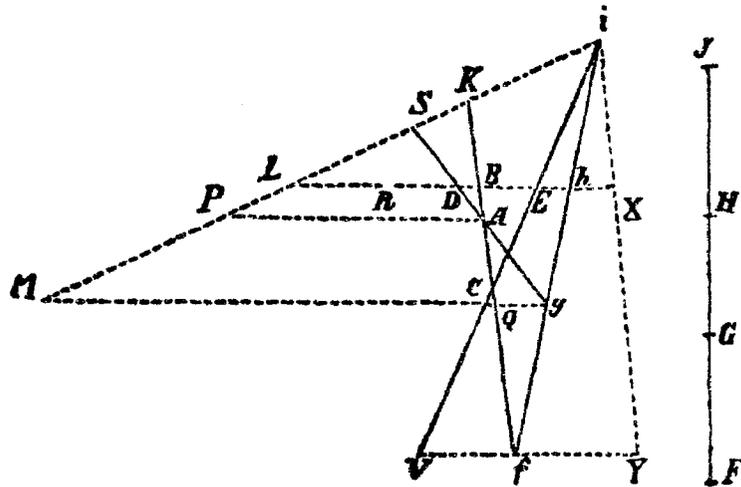
並作  $LK$ , 引長之, 使與  $CE$  相交於  $i$ . 於是再將  $iL$  引長至  $M$ , 使

$$LM : iL = GH : HJ \quad (3).$$

又作  $MQ$  與  $LB$  平行,

並使其與  $AD$  相交於  $g$ . 如是則與  $BD$  相交於  $h$  與  $AB$  相交於  $f$  的  $gi$  線即為所求之線。

$Mg$  與  $AB$  相交於  $Q$ ,  $AD$  與  $KL$  相交於  $S$ , 今作  $AP$  與  $BD$  相平行, 並與  $iL$  相交於  $P$ ,



第 六 十 五 圖

則  $Mg : Lh = Mi : Li = gi : hi$   
 $= AK : BK = AP : BL$  (4).

於是將  $DL$  於  $R$  分之,使

$$DL : RL = Mg : Lh$$
 (5),

而因  $gS : gM = AS : AP = DS : DL$ ,

$$gM : Lh = AP : BL = DL : RL,$$

故可得  $gS : Lh = AS : BL = DL : RL$  (6),

或  $BL - RL : Lh + BL = AS - DS : gS - AS$ ,

即  $BR : Bh = AD : gA = BD : gQ$  (7),

或  $BR : BD = Bh : gQ = fh : fg$  (8).

按作法可得

$$DL : RL = AK : BK,$$

故  $DR : DL = AB : AK = GH : GJ$  (9).

但  $DL : BD = GJ : FG$ ,

故  $DR : BD = GH : FG$  (10),

而由此,復可得

$$BR : BD = FH : FG$$
 (11).

由 (8), (11) 有

$$fh : fg = FH : FG,$$

而按 (3), (4),

$$ig : ih = Mi : iL = GJ : HJ,$$

故可知  $FJ$  於  $G, H$

$fi$  於  $g, h$

相似的被分了。

在此系之作法方面，亦可於  $LK$  引長至與  $CE$  相交之  $i$  點後，將  $CE$  於  $C$  端引長，使

$$EV : iE = FH : FJ,$$

再作  $Vf$  與  $BD$  平行。

此外，我們亦可如是作之，所得均同。我們以  $i$  為中心點， $JH$  為半徑，作一圓與  $BD$  相交於  $X$ ，再作  $iX$  引長至  $Y$ ，使

$$iY = JF,$$

然後再作  $Yf$  與  $BD$  相平行。

雷 (Wren) 氏及華里士 (Wallis) 並曾想出過其他解法。

§ 66. 問題。 求作一曲線，其形狀為已知，且用

四線將其分成爲若干段後，其段之順序，形狀，及其比亦均爲已知。

今欲作一曲線  $fg$   
 $hi$ ，與已知者  $FGHJ$   
 相似，其部分  $fg, gh, hi$   
 與該曲線者  $FG, GH,$   
 $HJ$  相似相比，各在  
 $AB$  與  $AD$ ， $AD$  與  
 $BD$ ， $BD$  與  $CE$  之  
 間。

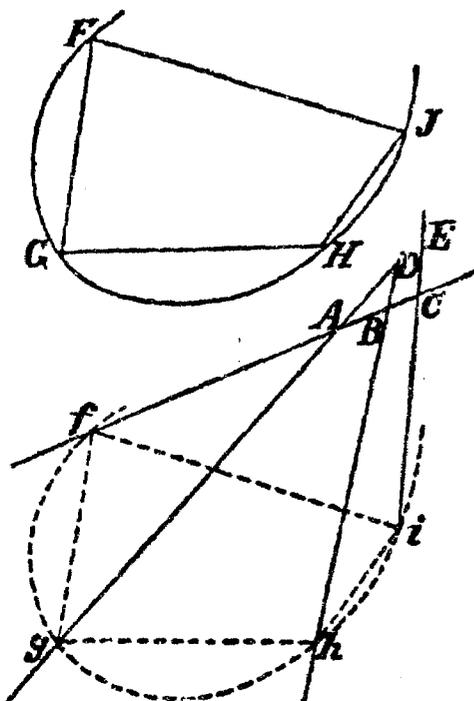


Fig. 66.

今作  $FGHJ$  四

第六十六圖

角形，並作

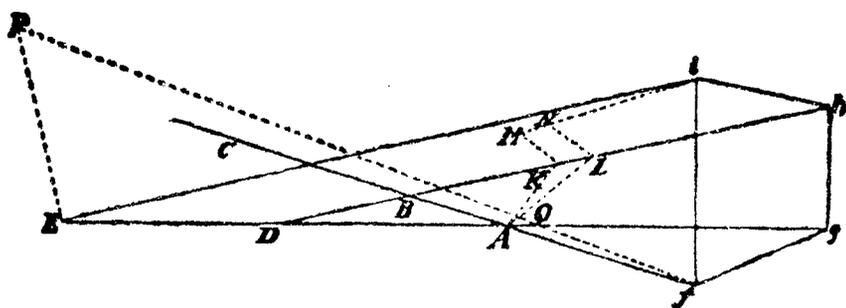
$$fghi \sim FGHJ,$$

使其角在

$$AB, AD, BD, CE$$

上，按已定之順序 (§ 65). 於是按 § 64 圍此四角形  
 作一曲線，與  $FGHJ$  相似。

§ 67. 附註. 此問題亦可如下解之。

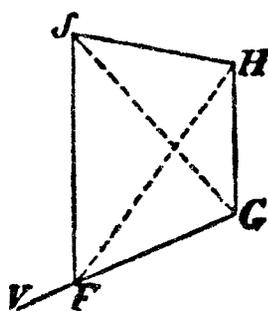


第六十七圖

作  $FG, GH, HJ, JF$  諸線，  
將  $FG$  引長至  $V$ ，並作  $FH,$   
 $JG$ ，於是使

$$\angle CAK = \angle FGH,$$

$$DAL = VFH.$$



第六十八圖

設  $AK, AL$  交  $BD$  於  $K, L$ ，作  $KM, LN$  線，使

$$\angle AKM = \angle GHJ,$$

$$ALN = FHJ,$$

以及  $KM : AK = HJ : GH,$

$$LN : AL = HJ : FH.$$

但作  $AK, KM, AL, LN$  諸線，須在  $AD, AK,$   
 $AL$  之該側，使

$C, A, K, M, C; A, L, K, A; D, A, L, N, D$  之順

序如  $F, G, H, J, F$  者。

今作  $MN$ , 並使其與  $CE$  相交於  $i$ , 然後作

$$\angle iEP = \angle JGF,$$

$$PE : Ei = FG : GJ,$$

並引  $PQf$  線經過  $P$ , 與  $ADE$  成一角

$$PQE = FJG,$$

以及與  $AB$  相交於  $f$ . 又作  $fi, PE, PQ$ , 但須在  $CE, PQ$  之該側, 使

$$P, E, i, P; P, E, Q, P$$

之順序與  $F, G, H, J, F$  者同。

於是再就  $fi$  作一四角形

$$fghi \sim FGHI,$$

並圍此作一形狀已定之曲線, 則問題即解決了。

關於軌道之求法已如上所述。於是須論以上所得軌道內物體之運動。

## 第六章 求已

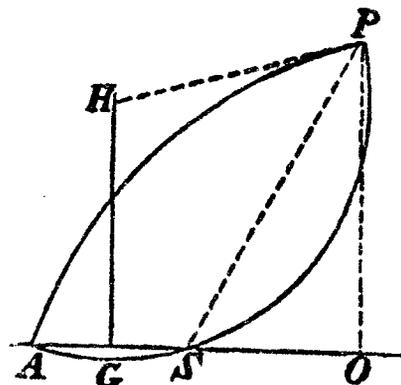
### 知軌道內運動之法

§ 68. 問題。 一物體在一已知拋物線內運動，  
今求其一定時間時之所在。

今設  $S$  為焦點， $H$  為主要之頂點，其扇形  
 $APS$  之面積

$$= 4AS \cdot M;$$

此項面積為方向半徑  
 $SP$  於出離頂點後或達  
到頂點時所作成者。由  
與之相比的時間，可以  
求得此面積。



第六十九圖

今將  $AS$  於  $G$  平分之，作垂線  $GH$ ，並使其

$$= 3M,$$

如是則以  $H$  為中心， $HS$  為半徑所作之圓，與拋物

線相交於所求之點  $P$ .

今由  $P$  作垂線  $PO$ , 則

$$\begin{aligned} HG^2 + GS^2 &= HS^2 = HP^2 = GO^2 + (PO - HG)^2 \\ &= GO^2 + PO^2 - 2PO \cdot HG + HG^2 \quad (1) \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} 2HG \cdot PO &= GO^2 + PO^2 - GS^2 \\ &= (GO + GS)(GO - GS) + PO^2, \end{aligned}$$

$$2HG \cdot PO = AO^2 - 2AG \cdot AO + PO^2 \quad (2).$$

按拋物線之方程

$$\begin{aligned} PO^2 &= 4AS \cdot AO \\ &= 8AG \cdot AO \quad (3), \end{aligned}$$

故

$$AO = \frac{PO^2}{4AS}$$

因而按 (2)

$$\begin{aligned} 2HG \cdot PO &= AO \cdot \frac{PO^2}{4AS} - \frac{1}{2}PO^2 + PO^2 \\ &= AO \cdot \frac{PO^2}{4AS} + \frac{3}{4}PO^2, \end{aligned}$$

而

$$8GH \cdot AS = AO \cdot PO + 3PO \cdot AS \quad (4)$$

或

$$\frac{4}{3}GH \cdot AS = \frac{AO + 3AS}{6} \cdot PO \quad (5).$$

因

$$GH = 3M,$$

$$\begin{aligned} AO + 3AS &= AO + 3(AO - OS) \\ &= 4AO - 3OS, \end{aligned}$$

故按(5)

$$4 \cdot AS \cdot M = \frac{4AO - 3OS}{6} \cdot PO,$$

或  $4AS \cdot M = \frac{2}{3}AO \cdot PO - \frac{1}{2}OS \cdot PO$  (6)

但  $\frac{2}{3}AO \cdot PO =$  拋物線形的面積

$$AOPA,$$

$$\frac{1}{2}OS \cdot PO = \triangle SOP,$$

故最後可得

$$APS = 4 \cdot AS \cdot M \quad (7)$$

此即所欲證者。

系 1. 所以  $GH : AS$

等於物體作成  $AP$  弧之時間，與由  $A$  至屬於  $S$  的縱坐標之點所用時間相比。

系 2. 因  $ASP$  圓恆經過運動的物體，故  $G$  之速度與物體在頂點時之速度相比，如

$$3 : 8.$$

$GH$  與  $AP$  線之比亦如是；於此， $AP$  表物體由

$A$  至  $P$  之時間內以頂點之速度所可作之直線。

系 3. 反之，我們亦可求得一物體作一已知弧  $AP$  所需之時間。

我們可作  $AP$  線，於其中點作一垂線，與  $GH$  相交於  $H$ 。

§ 69. 補題. 橢圓形之面積，不能用任意的直線分割，廣之，不能用項數次數有限的方程以得之。

在橢圓形之內取其任何一點，即以之為極作一直線恆等速的旋轉。於此線上由極點出發有一點運動，其速度與圓內線長之平方相比。如是，該點即畫出一盤旋線，其匝數無定。

倘該線所分割的圓面，可用一有限的方程表出，則該點與極點之距離，與此面相比者，亦可用此方程表出。於是盤旋線之每一點可用此項有限方程得之，而每一位置已定的直線與該曲線之交點，亦可如是得之。但每一無限的直線與盤線相交之點無限，而用以決定任何二線交點之方程，均須根數與交點數相同而後可，故此方程必須有如是

高之次數。

二圓相交點之數爲二，故欲求其一交點時，須用二次的方程，而此方程同時並指出其他一交點。

二圓錐曲線之交點可有四，故就普通而論，須用四次方程以求得其一交點，但同時其他三交點亦即可得之。蓋如分開的各求其交點，則因其所須定律及條件每次相同，故各次之運算無異。所以同一的運算法同時可得其一切交點，圓錐曲線與一三次曲線之交點共有六，故可一次用一六次方程得之；但二三次曲線之交點，則須用九次的方程以求之。倘不必定是如此，則空間內一切問題，均可析爲平面內之問題了。我這裏祇須提出某項曲線，其方程之次數不能析之使其低者。倘方程可使其析爲較低之次，則此曲線即非爲單純，面由數曲線所合成者，其交點於是可分開各各求之。

同樣的理由，可知一直線與一圓錐曲線之二交點，須自一二次方程求之；一直線與一三次不可降低的曲線之三交點，須自一三次方程求之，與四

次不可降低的曲線之四交點則須自四次方程求之，等等。所以一直線與一盤旋線之無限多的交點，因此曲線係一單純而非複合者，故必須由無限次的方程求之。

今由極點作一垂線至該線，將此垂線并其相交線以極點為中心旋轉之，則盤旋線之交點即相互易地，而其原來之第一點最近點經一轉後即成為第二點，經二轉後即成為第三點，等等。

方程之變，以割線所由以決定的量之變為度。因該項量經旋轉後能回至原值，故方程亦即會復其原狀。所以一切交點均已包含在方程內，而其根之數無限多。從可知一直線與一盤旋線之交點，普通不能用有限的方程以求得之，故亦不能有此項橢圓形，其由一定線所界之面可用此種方程以表出之者。

假如極點與盤旋線上點間之距離，與所割的橢圓形之周相比，則可知周之長亦不能以有限方程表出之。我此處所指之橢圓形，係不與共軛的，

伸入無窮的圖形相切者。

系。 所以由焦點至運動點的方向半徑以作之橢圓，其面積不能由已知時間用有限的方程表出，故不能用幾何上有理的圖形之作法以求之。我之所謂幾何上有理的圖形者，係指其一切點均可用方程所決定的長，即用長之複合關係，以決定之者。其不能如是者（如盤旋線），我名之為幾何上無理的。蓋長之相比能如一數目與他數目之相比或不如是者，即為算術上的有理或無理。所以與時間相比的橢圓之面，我用一幾何上無理的曲線分割之，其法如下：

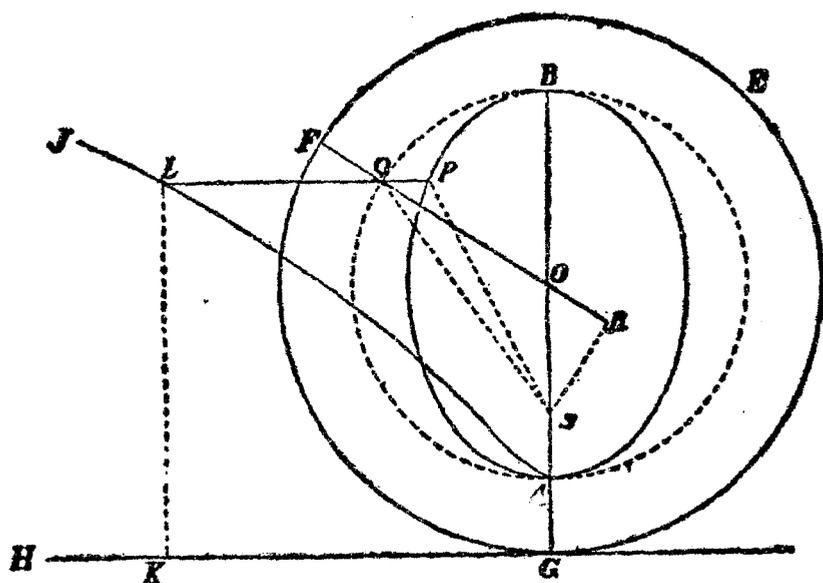
§ 70. 問題。 一物體於一橢圓上運動，今求其一定時間時之所在。

設  $APB$  為此橢圓， $A$  為其主要頂點， $S$  為焦點， $O$  為中心點， $P$  則為所求的物體之所在。今將  $OA$  引長至  $G$ ，使

$$OG : OA = OA : OS \quad (1),$$

並作  $GH$  與  $AG$  垂直，以  $O$  為中心， $OG$  為半

徑作圓  $EFG$ . 今使  $EFG$  圓以  $GH$  為底線於其上旋轉前進, 則  $A$  點所作曲線為 *Trochoide*  $ALJ$ . 取  $GK$  長, 使其與  $GEFG$  圓周之比, 如物體經過  $AP$  橢圓弧所用之時間與環繞全橢圓之時間相



第七十圖

比. 今再作  $KL$  垂線, 與  $ALJ$  相交於  $L$ , 並引

$LP$  與  $GK$  相平行,

則第一線與橢圓之交點  $P$ , 即為所求之點.

蓋如以  $O$  為中心,  $OA$  為半徑作一半圓  $AQB$ , 使其與  $LP$  相交於  $Q$ , 並作  $SQ$  與  $OQ$  線, 後者與

$EFG$  圓相交於  $F$ , 且作  $SR$  與  $OQ$  垂直, 則橢圓之  $APS$  扇形與圓之扇形  $AQS$  相比。

$$\text{但 } AQS = OQA - OQS,$$

$$AQS = \frac{1}{2}OQ \cdot QA = \frac{1}{2}OQ \cdot RS \quad (2),$$

而因  $\frac{1}{2}OQ$  爲已知兼爲常數, 故  $APS$  之面積與  $QA - RS$  相比。

$$\begin{aligned} \text{又因 } SR : \sin AQ &= OS : OQ = OS : OA \\ &= OA : OG = AQ : GF \quad (3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故亦 } AQ - SR : GF - \sin AQ &= AQ : GF \\ &= OS : OA \quad (4) \end{aligned}$$

$$\text{以及 } QA - SR = \frac{OS}{AO}(GF - \sin AQ),$$

而  $AQS$  與  $GF - \sin AQ$  相比。

此卽所欲明者。

§ 71. 附註. 因該曲線之不易畫出, 故在實用上用其他作法爲便, 此項作法與真理甚相接近。

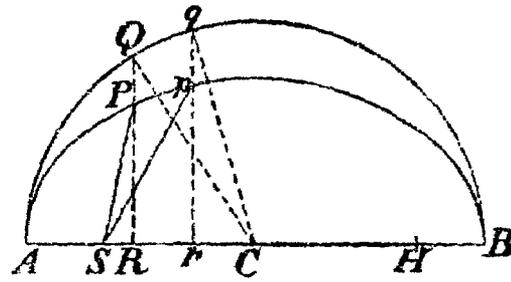
先作一角  $B$ , 使其

$$B : 57^{\circ}, 29578 = SH : AB \quad (1).$$

又作一線  $L$ , 使其與半徑相比, 如

$$AB : SH \quad (2).$$

既得此二者後  
即可用下法解決此  
問題。



第七十一圖

於作圖後，先

求  $P$  之所在，儘量與  $p$  相接近。今由  $P$  作一縱線  $PR$  至橢圓之軸，則切於橢圓外的  $AQB$  圓之縱線  $QR$  亦可由橢圓二軸之比得之。於是有

$$QR = AC \cdot \sin ACQ \quad (3)$$

而由此即可得  $ACQ$  角之值，但祇須計算得其近似值可矣。與時間相比之角，於是亦可知之；此角與  $360^\circ$  相比，如經過  $Ap$  所須之時間與環繞全橢圓之時間相比。今設此角爲  $N$ ，並假定有一角  $D$ ，能

$$D : B = \sin ACQ : \text{半徑} \quad (4)$$

者；兼取一角  $E$ ，使

$$E : N - ACQ + D = L : L \mp \sin(ACQ + D) \quad (5)$$

干隨  $ACQ < 90^\circ$  而定。

又決定  $F, G$  二角，使

$$F : B = \sin(ACQ + E) : \text{半徑} \quad (6),$$

$$G : N - ACQ - E + F = L : L \mp \sin(ACQ + E)$$

$$\mp \text{隨 } ACQ + E \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 90^\circ \text{ 而定} \quad (7).$$

於是又作  $H$  與  $J$ , 使

$$H : B = \sin(ACQ + E + G) : \text{半徑} \quad (8),$$

$$J : N - ACQ - E - G + H$$

$$= L : L \mp \sin(ACQ + E + G) \quad (9)$$

$$\mp \text{隨 } ACQ + E + G \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 90^\circ \text{ 而定.}$$

此法可繼至於無限; 最後可取

$$ACq = ACQ + E + G + J + \dots, \quad (10)$$

而由其餘弦及自

$$pr : \sin ACq = \text{小軸} : \text{大軸} \quad (11)$$

所得之  $pr$  值, 即可得物體之較近似的處所  $p$ .

倘在某個事項內

$$N - ACQ + D$$

角為負者, 則  $E$  之  $+$  號必須改為  $-$  號, 反之, 亦當

將其  $-$  號改為  $+$  號.  $G, J$  角之符號亦是如此, 倘

$$N - ACQ - E + F \text{ 及 } N - ACQ - E - G + H$$

之符號爲負。

無限級數  $ACQ + E + G + J + \dots$

之收斂性甚大，故實際上並不須計算到第二項以外。至運算之法，則其根據在於以下之定理： $APS$  面積與  $\widehat{AQ} - SR$  相比；於此， $\widehat{AQ}$  爲弧， $SR$  爲由  $S$  至  $CQ$  之垂線也。

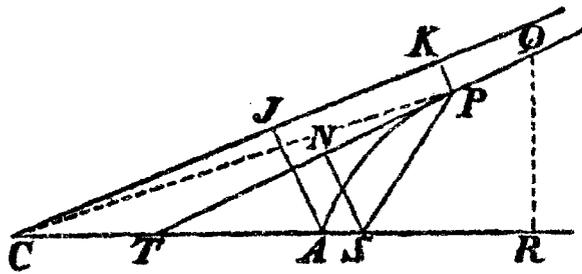
用一大致相似的方法，雙曲線方面問題亦易解決。今設  $C$

爲其中心點，

$A$  爲頂點， $S$

爲焦點， $CK$

爲其漸近線。



第七十二圖

與時間相比的  $APS$  之面積，我們可以求得；今設其爲  $A$ 。作  $CP$  線，並由  $A, P$  作  $AJ, PK$  線，與其他漸近線相平行。如是則用對數表時即可知  $AJPK$  之面積以及與之相等的  $CPA$  之面積，後者自  $\triangle CPS$  減去時即餘  $APS$  之面積。今由焦點  $S$  作  $SN$  至切線  $PT$  上與之相垂，並加上

$$\frac{1}{2}APS - \frac{1}{2}A \text{ 或 } \frac{1}{2}(A - APS),$$

則得  $PQ$  之長。  $PQ$  須在  $A$  與  $P$  之間，或在  $P$  之背面，此則隨

$$APS \begin{cases} > \\ < \end{cases} A \text{ 而定。}$$

如是則  $Q$  點即為較正確之處所，而繼續用此法後，其所得亦能較正確。

用此項運算法，普通即可將問題解析的解決了。但在天文的應用上，以下特別的方法更為便利。

倘已得橢圓

之半軸

$AO, BO, OD$

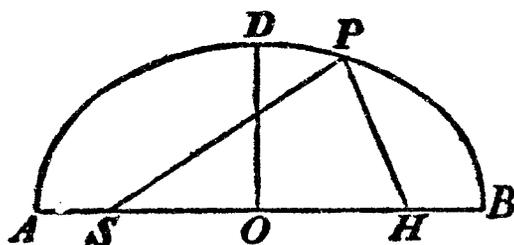
以及其通徑  $L$ ,

則可求  $Y$  角及

$Z$  角，根據以下之比例

$$\left. \begin{aligned} \sin Y : \text{半徑} &= D(AO + OD) : AB^2 \\ \sin Z : \text{半徑} &= 2D(SH) : 3 \cdot AO^2 \end{aligned} \right\} (12),$$

於此， $D = OD - \frac{1}{2}L$ 。既求得之後即可取  $T$  角與



第七十三圖

作成  $BP$  弧之時間相比，或等於所謂平均運動，並設

$$V : Y = \sin 2T : \text{半徑} \quad (13),$$

$$X : Z = \sin T^3 : \text{半徑} \quad (14).$$

於是再設

$$\angle BHP = T + X + V \quad (\text{倘 } T < 90^\circ)$$

或 
$$= T + X - V \quad (\text{倘 } T > 90^\circ, < 180^\circ)$$

倘  $HP$  遇橢圓於  $P$ ，則  $SP$  線所割扇形  $BPS$  與時間相比甚接近。

此實用方法甚為簡單，因為  $V$  與  $X$  均係極小角，故祇須求其前三位已足。在行星理論方面，此亦可用：即在火星軌道方面，其最大的中心方程等於  $10^\circ$ ，但其錯誤不會大於  $1''$ 。祇須  $BHP$  角既得之後， $HSP$  角及  $SP$  距離即可用尋常之法求之。

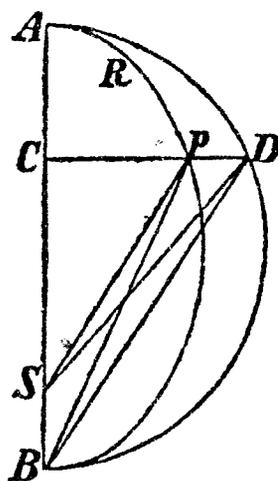
關於物體在曲線軌道內之運動，姑即止於此了。但物體之直線的下墜或上昇亦是常有之事，我今略論此方面的運動。

## 第七章 論物體

### 之直線的上昇及下墜

§ 72. 問題. 今設向心力與物體距心之遠之平方成反比；求物體在一定時間內作直線的下墜時所作之軌道。

第一事。設物體不垂直的下墜，則所作軌道爲一圓錐曲線，其在下之焦點與力之中心點相合。此由 §§ 29, 30, 33 及其系即可知之。今設此圓錐曲線爲  $ARPB$ ， $S$  爲其在下之焦點。倘此圖形爲一橢圓，則可在其大軸  $AB$  之上作半圓  $ADB$ ，並作  $DPC$  線



第七十四圖

經過下墜物體  $P$  與  $AB$  相垂直。再作  $DS$  與  $PS$ ，則  $ASD$  面與  $ASP$  相比，因而亦與時間相比。今

將  $AB$  不變，但恆減小橢圓之寬；如是則  $ASD$  面恆能與時間相比。將其寬減至無限小時，則  $APB$  軌道即與  $AB$  相合而  $S$  落入  $B$  點。於是物體即在直線內運動下墜，而  $ABD$  面與時間相比。所以  $AC$  軌道，即物體於一定時間內由  $A$  作直線下墜時所成者，即可求得，祇須  $ABD$  面假定其與時間相比，而由  $D$  作垂線  $DC$  至  $AB$  上便行。

第二事。設前述之圖形係一雙曲線  $RPB$ ，則可仍就原來主要軸  $AB$  作一直角的雙曲線  $BED$ 。

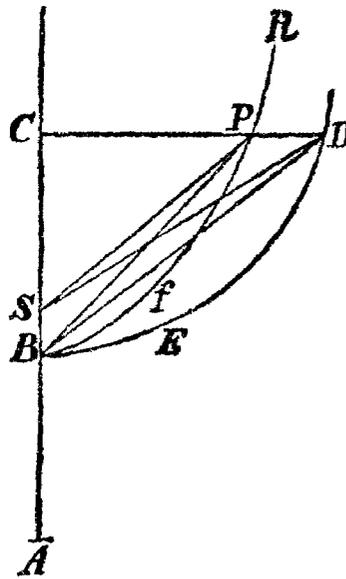
因

$$\begin{aligned} CSP &: CSD \\ &= CBfP : CBED \\ &= SPfB : SDEB \\ &= CP : CD, \end{aligned}$$

面積  $SPfB$  又與時間相比

(與物體作成  $PfB$  弧所須

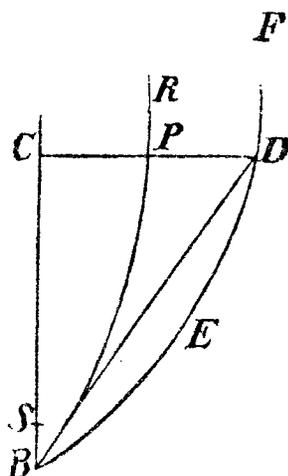
之時間相比)，故  $SDEB$  面亦與該時間相比。



第七十五圖

今將雙曲線之通徑減小至無限，其主要軸則不變，則  $PB$  弧與  $CB$  直線相合，焦點  $S$  則與  $B$  點合， $SD$  直線與  $BD$  相合。 $BDEB$  面又與物體直線下墜時作成  $CB$  線之時間相比。

第三事。倘  $RPB$  爲一拋物線，則可用同法於原來的主要頂點作一其他拋物線  $BED$ 。此新拋物線可不變，但原來的則可將其通徑減至於無限小，使其與  $CB$  線相合。如是則拋物線的曲線形  $BDED$  恆與物體  $P$  由  $C$  至  $B$  之時間相比。



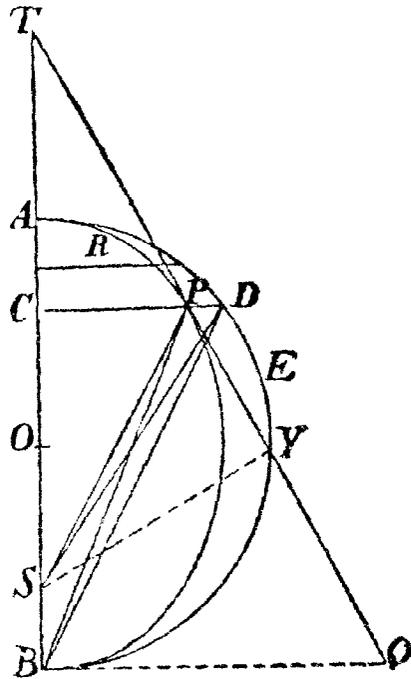
第七十六圖

§ 73. 定理。 既得此後，我現在可以斷定，一下墜物體在某點  $C$  之速度，與一其他之物體速度相比，等於

$$\sqrt{CA} : \sqrt{\frac{1}{2}AB},$$

於此，該其他物體所作之軌道爲一圓，其中心點爲  $B$ ，半徑爲  $BC$ 。

因  $CD$  與  $CP$  相比,故  $AB$  爲與  $RPB, DEB$  二形之共同直徑,今將其於  $O$  平分之,並引  $PT$  線,與  $RBP$  相切於  $P$ ,且與直線之方向相交於  $T$ . 又作  $SY$  與  $PT$  垂直,  $BQ$  與  $AB$  垂直,並設  $RPB$  曲線之通徑爲  $L$ .



第七十七圖

由 § 36 系 9. 可知在  $RPB$  上以  $S$  爲中心的物體之運動速度,與一其他在圓 (中心爲  $S$ , 半徑爲  $SP$ ) 上運動的物體之速度相此,等於

$$\sqrt{\frac{1}{2}L \cdot SP} : SY \quad (1)$$

按圓錐曲線之理論,又有

$$AC \cdot CB : CP^2 = 2 \cdot AO : L$$

或 
$$L = \frac{2CP^2 \cdot AO}{AC \cdot CB} \quad (2).$$

按 (1), (2) 卽有

$$\sqrt{\frac{CP^2 \cdot AO \cdot SP}{AC \cdot CB}} : SY \quad (3).$$

又按圓錐曲線理論，

$$CO : BO = BO : TO \quad (4),$$

故  $BO + CO : BO = BO + TO : TO$

或  $BC : BO = BT : TO \quad (5),$

以及  $CO : BO = BC : BT \quad (6).$

由(6)可得

$$BC - CO : BO = BT - BC : BT,$$

或  $AC : AO = CT : BT = CP : BQ;$

因而  $CP = \frac{AC \cdot BQ}{AO} \quad (7),$

以及

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{CP^2 \cdot AO \cdot SP}{AC \cdot CB}} &= \sqrt{\frac{AC^2 \cdot BQ^2 \cdot AO \cdot SP}{AO^2 \cdot AC \cdot CB}} \\ &= \sqrt{\frac{BQ^2 \cdot AC \cdot SP}{AO \cdot BC}}. \end{aligned}$$

(3)於是成爲

$$\sqrt{\frac{BQ^2 \cdot AC \cdot SP}{AO \cdot BC}} : SY \quad (8).$$

今將  $RPB$  圖形之寬  $CP$  減小之至於無限，

則最後  $P$  與  $C$  相合,而

$S$  與  $P$  相合,

$SP$  與  $BC$  相合,

$SY$  與  $BQ$  相合.

如是,物體在  $CB$  線下墜時, (8) 內

$SP$  與  $BC$ ,

$BQ$  與  $SY$  相消,

而 (8) 即成爲

$$\sqrt{AC} : \sqrt{AO} = \sqrt{AC} : \sqrt{\frac{1}{2}AB} \quad (9)$$

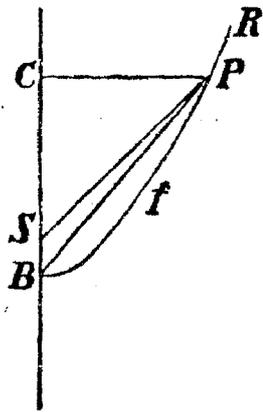
此即所欲證者.

系 1. 倘  $B$  與  $S$  相合,則有

$$TC : ST = AC : AO.$$

系 2. 在圓內與心相距任何遠而運動的物體,當其向上運動時,昇高與心距之倍.

§ 74. 定理. 設  $BfP$  爲一拋物線,則一下墜物體在任何一點  $C$  之速度,等於一物體作成一中心在  $B$  半徑爲  $\frac{1}{2}BC$  的圓時所須之速度(在等速的運動下).



物體以  $S$  為中心作成拋物線  $RPB$  時之速度, 按 § 36 系 7, 在任何點  $P$  時, 等於一其他物體之速度, 此物體以  $S$  為中心,  $SP$  為半徑, 等速的作成一圓. 今將  $CP$

減至於無限, 使  $PfB$  與  $CB$  相

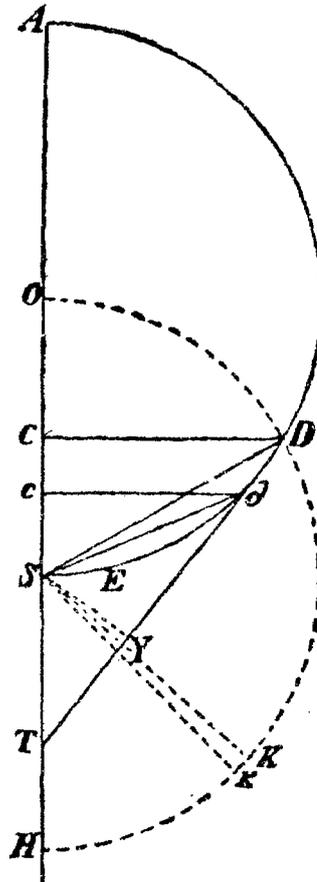
合,

$S$  與  $B$  相合,

$SP$  與  $BP$  相合,

則即得此定理之證。

§ 75. 定理。 在同樣的假定下,  $SD$  無定半徑所作之圖形  $DES$ , 其面積等於一其他面積, 此面積為一物體在一圓內等速運動時所作, 而此圓之中心則在  $S$ , 半徑則為該曲線之通徑之半。



試設想此物體  $C$  於一

第七十九圖

極短時間內經過一短線  $Cc$ ，同時，一其他物體  $K$  以等速運動，在以  $S$  為中心的  $OKk$  圓上經過  $Kk$  弧。今作  $CD, cd$  二垂線，與  $DES$  相交於  $D, d$ ，又作  $SD, Sd, SK, Sk, Dd$ ，而  $Dd$  則與  $AS$  相交於  $T$ ，且引  $SY$  與  $DT$  垂直。

第一事。設  $DES$  為一圓或直角的雙曲線，則其大軸  $AS$  可在  $O$  平分之，而  $SO$  為通徑之半。

$$\text{因} \quad TC : TD = Cc : Dd \quad (1)$$

$$\text{以及} \quad DT : TS = CD : SY \quad (\text{因} \triangle SDT = \frac{1}{2}DT \cdot SY \\ = \frac{1}{2}ST \cdot CD) \quad (2),$$

$$\text{故} \quad TC : TS = CD \cdot Cc : Dd \cdot SY \quad (3).$$

按 § 73, 系 1,

$$CT : TS = AC : AO,$$

(當  $D$  與  $d$  相合時取其最後之比)，故

$$AC : AO = CD \cdot Cc : Dd \cdot SY,$$

$$\text{而因} \quad AO = SK,$$

$$\text{即得} \quad AC : SK = CD \cdot Cc : Dd \cdot SY \quad (4).$$

又按 § 73, 下墜的物體在  $C$  點時之速度，與

其他一物體以  $S$  為中心  $SC$  為半徑在圓上運動時之速度相比, 如

$$\sqrt{AC} : \sqrt{AO} = \sqrt{AC} : \sqrt{SK}.$$

後者之速度與作成  $OKk$  圓的物體之速度相比, 按 § 18 系 6 為

$$\sqrt{SK} : \sqrt{SC},$$

而前者速度與後者相比亦然, 此即

$$\begin{aligned} Cc \text{ 線} : Kk \text{ 弧} &= \sqrt{AC} : \sqrt{SC} \\ &= AC : CD, \end{aligned}$$

因而  $CD \cdot Cc = AC \cdot Kk$  (5)

而按 (4)

$$AC : SK = AC \cdot Kk : Dd \cdot SY.$$

所以  $SK \cdot Kk = SY \cdot Dd,$

或  $\frac{1}{2}SK \cdot Kk = \frac{1}{2}SY \cdot Dd,$

即  $KSk \text{ 面} = SDd \text{ 面}$  (6).

如是, 在各個短時間內所作的二圖形之部分  $KSk, SDd$  將其大小減至無限, 但同時其數增至無限時, 可以相等. 按 § 4 之系, 即知全部同時產生

的面均可相等。此即所欲證者。

第二事。設  $DES$  爲一拋物線，則如前可得

$$CD \cdot Cc : SY \cdot Dd$$

$$= TC : ST = 2 : 1,$$

故  $\frac{1}{4}CD \cdot Cc = \frac{1}{2}SY \cdot Dd.$

按 § 74 一下墜物體在  $C$  點時之速度，等於作成一半徑爲  $\frac{1}{2}SC$  的圓所須之速度，而此速度與作成半徑爲  $SK$  之圓的速度相比，又如

$$Cc : Kk = \sqrt{SK} : \sqrt{\frac{1}{2}SC},$$

$$Cc : Kk = SK : \frac{1}{2}CD,$$

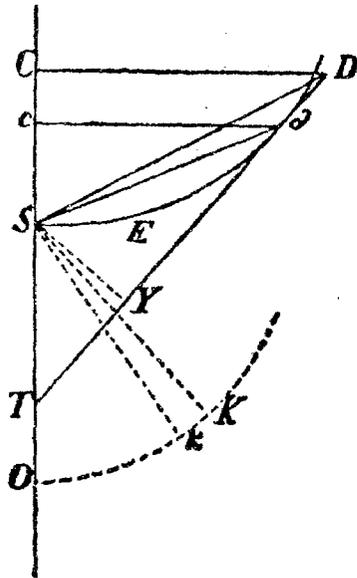
故  $\frac{1}{2}SK \cdot Kk = \frac{1}{4}CD \cdot Cc,$

$$\frac{1}{2}SK \cdot Kk = \frac{1}{2}SY \cdot Dd,$$

此即  $KS k$  面 =  $SDd$  面，

與前同。

§ 76. 問題。一物體由一已知的處所下墜：今



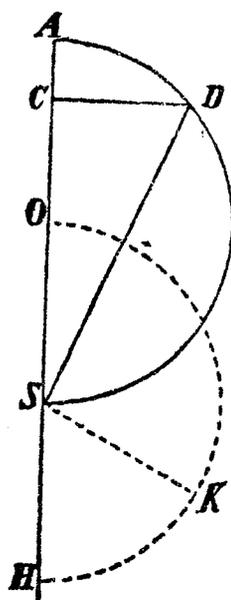
第八十圖

求其下墜之時間。

今設此已知之處所為  $A$  在直徑(物體開始時與力之中心之距離)下作一半圓  $ADS$ , 又以  $S$  為中心, 作一與此相等的半圓  $OKH$ . 又於物體之任一處所  $C$  作  $CD$  線, 並引  $DS$ , 使

$$OSK \text{ 面} = ASD \text{ 面}.$$

由 § 75 可知一物體在下墜時經過  $AC$  之時間, 等於一其他物體以等速運動在以  $S$  為中心的圓上作成  $OK$  弧所須之時間。



第八十一圖

§ 77. 問題. 一物體由一已知的處所向上或向下的拋出; 今求其上昇或下墜所須之時間。

今設此物體由  $G$  緣  $GSA$  線以任何一速度出發; 又設此速度與物體在圓(中心點為  $S$  半徑為  $SG$ )上運動的速度之平方比等於

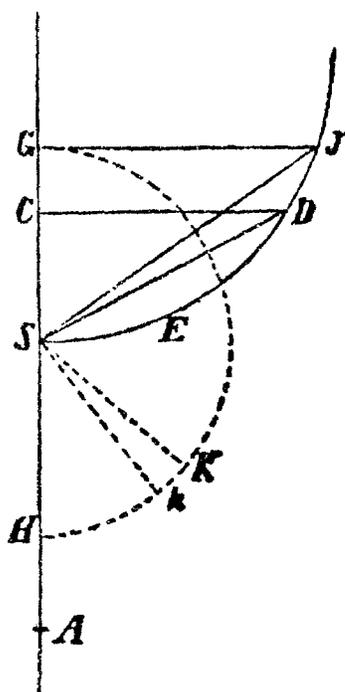
$$AG : \frac{1}{2}AS.$$

倘此比 = 2 : 1, 則  $A$  落入無限遠處, 而可得一拋物線, 其頂點為  $S$ , 軸為  $AS$ , 其通徑無定. 此由 § 74 所可知者.

倘該比

$$\begin{array}{l} < \\ > \end{array} 2 : 1,$$

則在第一事內須作一圓, 在第二事內一直角的雙曲



第八十二圖

線, 以  $AS$  為其直徑. 此可由 § 73 知之.

於是可以用  $S$  為中心點, 以與通徑之半相等的量為半徑作一圓  $HkK$ , 並於物體所至之任何二點  $G, C$ , 作  $GJ, CD$  二垂線, 與圓錐曲線或圓相交於  $J, D$ . 再作  $SJ, SD$  後, 可設

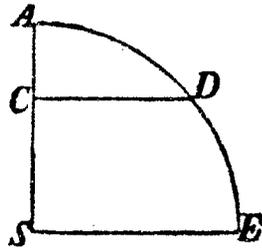
$$HSK = SEJS,$$

$$HSk = SEDS.$$

於是, 按 § 75, 該物體  $G$  作成  $GC$  軌道之時間, 即為物體  $K$  作成  $Kk$  弧之時間.

§ 78 定理。 假定向心力與所在處離力心之高或遠相比，則時間，速度，及所作之軌道，各與弧，弧之正弦及矢相比。

一物體由一任何處  $A$  緣直線  $AS$  下墜；今以  $S$  為中心作象限  $AE$ 。設  $CD$  為  $AD$  弧之正弦，則物體於  $AD$  時間內下墜時經過  $AC$  軌道，而在  $C$



第八十三圖

點之速度為  $CD$ 。此可由 § 27 知之，一如 § 72 內之由 § 29 知之。

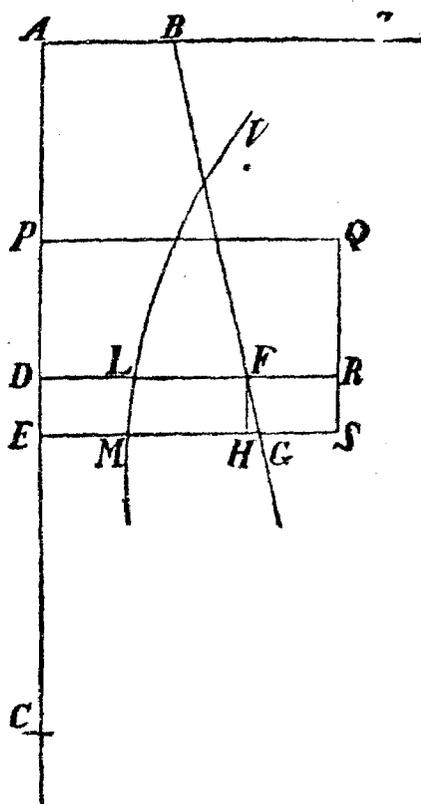
系 1。 從可知一物體由  $A$  下墜至  $S$  所須之時間，等於一其他物體經過  $ADE$  弧所須者。

系 2。 又物體由任何處所至中心點所須之時間均等。蓋按 § 18 系 3，旋轉的物體之週期的時間均相等。

§ 79. 問題。 有一任何種類之向心力已知，又假定能求得曲線形之面積。今求一向上或向下直線運動的物體之各處的速度，以及至任何一點之

時間。

一物體由一任何點  $A$  沿直線  $ADEC$  下墜，今於  $E$  處作一垂線  $EG$ ，與向中心點  $C$  的向心力相比。設  $BFG$  為一曲線， $G$  恆在其上，而在運動之開始  $EG$  與  $AE$  相合。如是則物體在任何點  $E$  之速度，與一平方



第八十四圖

形之邊相比，此正方形之積為  $ABGE$ 。今於  $EG$  上取  $EM$  與此正方形邊成反此，而  $VLM$  則為一曲線， $M$  恆在其上，其漸近線為  $AB$  之引長。如是則物體下墜經過  $AE$  時所須之時間，其比如曲線形  $ABTVME$ 。

今於  $AE$  線上取極小的段  $DE$ ，其長有定，又設物體在  $D$  時  $EMG$  之處所為  $DLF$ 。倘向心力

有如是屬性，能使與  $ABGE$  面積相等的平方之邊，其比如下墜物體之速度，則此面積本身即與速度之平方相比。所以倘

$D$  處之速度為  $V$

$E$  處之速度為  $V+J$ ,

則  $ABFD : ABGE = V^2 : (V+J)^2$ .

今再作其首項與第二項以及第三與第四項之差，則

$$DFGE : ABFD = (2V+J)J : V^2, \quad (1)$$

而因  $ABFD$  與  $V^2$  相比， $\frac{ABFD}{V^2} = \text{Const.}$  故

$$\frac{DFGE}{DE} \text{ 與 } \frac{2J(V+\frac{1}{2}J)}{DE} \text{ 相比。} \quad (2)$$

今取(2)中生長的量之首比，則

$$DF \text{ 與 } \frac{2J \cdot V}{DE} \text{ 或亦與 } \frac{JV}{DE} \text{ 相比。}$$

但物體下墜經短線  $DE$  時所須之時間  $t$ ，與

$DE$  成正比，

$V$  (速度) 成反比，

故  $t$  與  $\frac{DE}{V}$  相比。

又,力與速度之增加  $J$  成正比,

時間  $t$  成反比,

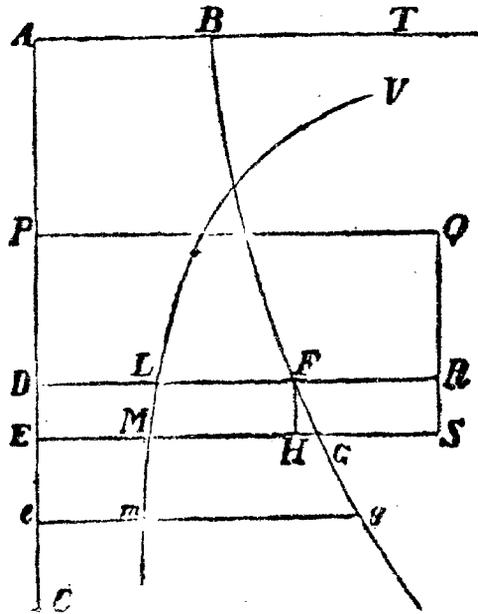
故 力  $f$  與  $\frac{J}{t}$  相比,

而於該項首比有:

力與  $\frac{V \cdot J}{DE}$  相比,亦即與  $DF$  相比。

從可知與  $DF$  或  $EG$  相比的力;其影響能使物體下墜之速度,與一平方之邊相比,此平方之面積等於  $ABGE$  之面積。此即所欲證者。

經過任意短的線  $DE$  所須之時間與速度成反比,即與  $\sqrt{ABFD}$  成反比,又因  $DL$  以及  $DLME$  均與  $\sqrt{ABFD}$  成反比,故此面之時間以及此項時間之和與此



第八十五圖

項面之和均相比。按 § 4 之系,可知經過  $AE$  線所

需之全部時間與全部面積  $ATVME$  相比。此即所欲證者。

系 1. 設  $P$  爲一處所，物體在某種已知的整齊向心力作用之下必由此點下墜乃能於  $D$  點達到一某種速度，而此速度則又等於一其他受力而下墜的物體在  $D$  時之速度，則可於  $DF$  取一段  $DR$ ，使其與  $DF$  之比，等於上所述二力之比；又作  $PDRQ$  直角形使與  $ABFD$  之面積相等。如是則  $A$  爲第二物體所由之下墜的處所。

蓋將  $EDRS$  補充後，有

$$ABFD : DFGE = V^2 : 2VJ = \frac{1}{2}V : J,$$

即，等於全速度之半與速度之增加相比，此增加即爲物體受不整齊的力下墜而得者。

又，  $PQRD : DRSE$ ,

亦等於等速下墜物體之全速度之半與其增加相比。但增加相比則等於產生此的力相比，即等於

$$DF : DR,$$

故亦等於  $DFGE : DRSE$ 。

所以  $ABFD, PQRD$  二全面相比, 等於二全速度之半相比, 而因後二者相等, 故

$$ABFD = PQRD.$$

系 2. 設有任何一物體由任何一點  $D$  出發以一定的速度向上或向下拋出, 其向心力之定律又為已知, 則求其任何一其他點  $e$  之速度, 在作  $eg$  線, 並設

$$e \text{ 點之速度} : D \text{ 點之速度}$$

$$= \sqrt{PQRD \pm DFge} : \sqrt{PQRD},$$

± 隨  $e$  在  $D$  下或上而定。

系 3. 求時間之法, 可作  $em$

與  $\sqrt{PQRD \pm DFge}$  成反比, 然後設

{物體經過  $De$  的時間} 與

{一其他物體受整齊的力由  $P$  至  $D$  的時間}

$$\text{相比} = DLme : 2PD \cdot DL.$$

蓋等速下墜的物體經過  $PD$  之時間, 與經過  $PE$  的時間相比, 猶如

$$\sqrt{PD} : PE = \sqrt{PD} : \sqrt{PD + DE}$$

$$= \sqrt{PD} : \sqrt{PD + \frac{1}{2}DE} + \dots,$$

即，猶如  $PD : PD + \frac{1}{2}DE = 2PD : 2PD + DE$ .

所以經過  $PD$  所須之時間，與經過  $DE$  所須者相

比，如  $2PD : DE = 2PD \cdot DL : DE \cdot DL$

$$= 2PD \cdot DL : DL \cdot ME.$$

今以  $PD^{(t)}$  等表經過  $PD$  等所須之時間，則前所得之比亦可作

$$PD^{(t)} : DE^{(t)} = 2PD \cdot DL : DL \cdot ME.$$

又以  $De^{(t)}$  表第二物體以不等速運動經過  $De$  時所須之時間，則亦有

$$De^{(t)} = 2DL,$$

$$DE^{(t)} : De^{(t)} = DLME : DLme,$$

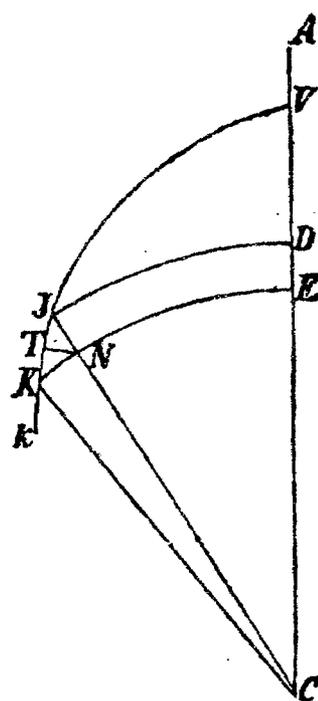
而經組合時，得

$$PD^{(t)} : De^{(t)} = 2PD \cdot DL : DLme,$$

## 第八章 論物體受向心力 之推動而運行時求其軌道之法

§ 80. 定理. 一物體受向心力之作用以任何方式運動，又有一其他物體直線的上昇或下降，此二者之速度在某種事項下等高時相等，則此二速度在一切高度下均相等。

今有一物體由  $A$  經過  $D, E$  至中心點  $C$  下墜，一其他物體則由  $V$  出發在  $VJKk$  曲線上運動。由  $C$  出發以任意的半徑作同心圓  $DJ, EK,$



第八十六圖

與  $AC$  直線相交於  $J, K$ . 今作  $JC$  半徑，與  $EK$  弧相交於  $N$ ，並作  $NT$  垂於  $JK$  上。  $DE$  之距離，或

$JN$  之距離可儘量的使其小，而且二物體於  $D, J$  之速度相等。

因  $CD = CJ$ ,

故  $D, J$  二點之向心力相等；今用  $DE, JN$  二線表之。按根本定律系 2 將  $JN$  析之爲  $NT, JT$  二支力，則因  $NT$  與物體之方向  $JTK$  相垂直，故與其運動之速度無關，其作用僅使物體離開其直線運動，不在軌道之切線上進行，而恆在軌道  $JTKk$  上運動。但其他一力  $JT$ ，則在物體之方向內生作用，故能使物體加速，而在一定的極小時間內，產生與之相比的加速，又，在同一時間內二物體所得之加速，與  $DE$  及  $JT$  相比，在不同時間內則與此項線及時間之合相比。

因速度相等，故時間相比等於所經過的路  $DE, JK$  相比。故加速相比，如

$$DE : JT \text{ 及 } DE : JK,$$

即，如  $DE^2 : JT \cdot JK$ 。

但  $JT \cdot JK = JN^2 = DE^2$ ,

故當二物體經過  $DE, JK$  時，即產生同樣的加速。所以二物體在  $E, K$  點之速度亦均等。仿此，在一切以後的相等的距離上亦均相等。

此即所欲證者。

系 1. 一物體或擺錘作振動，或一物體由某種牽制，在一曲線上運動，另有一物體則作直線的上昇或下降。此二物體之速度在一任何的等高處相等。如是則此二速度於一切等高處均相等。

蓋擺錘線或阻礙物之牽制，其作用等於以前之  $NT$  橫力，物體因此便不能不離開其直線運動，但不致使其加速或滯遲（空氣及阻礙物之阻力另是一事）。

系 2. 設如一振動的或在曲線內運動的物體，由一點以當時所有的速度上昇，其所可達的離心之最高度為  $P$ 。又設  $A$  為物體在軌道上任何一點時與心之距離，向心力則恆與  $A$  之方數，例如  $A^{n-1}$ ，相比，則任何高處之速度，與

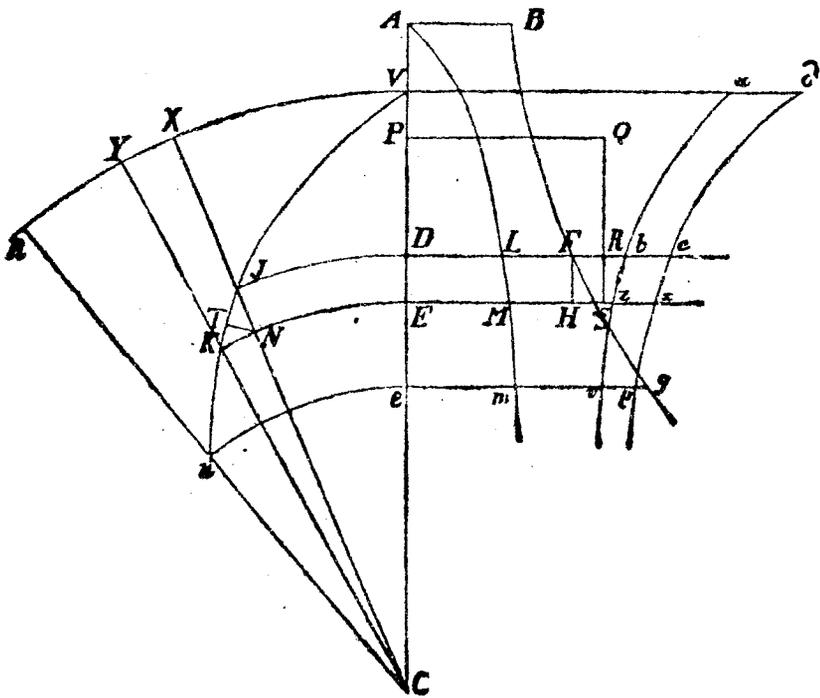
$$\sqrt{nP^n - nA^n}$$

相比，故爲已知者。

此可由 § 79 知之。

§ 81. 問題。 設有一任何種類的向心力爲已知，又假定能求曲線形之面積。今求物體在其上運動的曲線，以及在此項曲線上運動之時間。

今設此任意的力向中心  $C$ ，求  $VJTKk$  曲線。已知的是一圓  $VXYR$ ，其中心在  $C$ ，其半徑爲  $CV$ 。



第 八 十 七 圖

又作其他任意的圓  $JD, KE$ ，與曲線相交於  $J, K$ ，

與直線  $CV$  相交於  $D, E$ , 並引  $CN, JX$  線, 與  $KE, VY$  二圓相交於  $N, X$ , 以及引  $CKY$  線與  $VY$  相交於  $Y$ . 設  $J, K$  相距甚近, 物體則由  $V$  經過  $J, T, K$  向  $k$  運動. 如  $A$  爲一高度, 該其他物體必須由此下墜, 乃能於  $D$  點達到一速度, 與第一物體在  $J$  點時之速度相等. 在與 § 79 內之同樣的假設下, 可知在極短時間內所經過之極短線與速度, 即與

$$\sqrt{ABFD}$$

相比.

三角形  $JCK$  與時間相比而爲已知者, 故  $KN$  與  $JC$  成反比, 即, 如有一常數  $=Q$  爲已知, 並設  $JC=A$ , 則

$$KN \text{ 與 } \frac{Q}{A} = Z \text{ 相比.}$$

今如是選擇  $Q$ , 使在某種狀況下

$$\sqrt{ABFD} : Z = JK : KN,$$

則此比例恆適用. 如是, 即有

$$ABFD : Z^2 = JK^2 : KN^2$$

或  $ABFD - Z^2 : Z^2 = JK^2 - KN^2 : KN^2,$

即  $ABFD - Z^2 : Z^2 = JN^2 : KN^2,$

或  $\sqrt{ABFD - Z^2} : Z = JN : KN,$

故  $A \cdot KN = \frac{A \cdot Z \cdot JN}{\sqrt{ABFD - Z^2}} = \frac{Q \cdot JN}{\sqrt{ABFD - Z^2}}.$

又,  $YX \cdot XC : A \cdot KN = YC^2 : KC^2,$

故  $YX \cdot XC = \frac{Q \cdot JN \cdot YC^2}{KC^2 \sqrt{ABFD - Z^2}}$   
 $= \frac{Q \cdot JN \cdot XC^2}{A^2 \sqrt{ABFD - Z^2}}.$

今於  $DF$  上取

$$Db = \frac{Q}{2\sqrt{ABFD - Z^2}},$$

$$Dc = \frac{Q \cdot CX^2}{2A^2 \sqrt{ABFD - Z^2}},$$

並經過  $b, c$  作  $ab, cd$  曲線, 再於  $V$  作  $Vad$  垂線至  $AC$ , 與  $VDb a, VDcd$  曲線形相割, 於是再作  $Vz, Ex$ , 則有

$$Db \cdot JN = DbzE = \frac{1}{2} A \cdot KN = \triangle CKJ,$$

$$Dc \cdot JN = Dcx E = \frac{1}{2} YX \cdot XC = \triangle XCY.$$

由  $VDb a$  所產生的  $DbzE$  部分,

以及由  $VJC$  所產生的  $JCK$  部分，  
 乃至由  $VDcd$  所產生的  $DcxE$  部分，  
 與由  $VCX$  所產生的  $XOY$  部分，  
 恆相等，故亦

$$VDb a = VJC$$

$$VDcd = VCX,$$

而此二式左端之面與時間相比。因此，倘物體由  $V$  出發後之時間已知，則與之相比的面  $VDb a$  亦已知，而由此復可知物體之高  $CD, CJ$ ，以及  $VDcd$  面並與之相等的扇形  $VCX$ ，同時，其角  $VCJ$  亦即已知。反之，倘  $VCJ$  角與其高  $CJ$  已知，則即知其處所  $J$ ，為物體經過該時間後所必到者。

系 1. 由此可求得物體之最高點及最低點，即，軌道上之回歸點。此項點落入經過中心的  $JC$  線與曲線  $VJK$  相垂直之處，而當

$$JK = KN$$

時，即  $ABFD = Z^2$

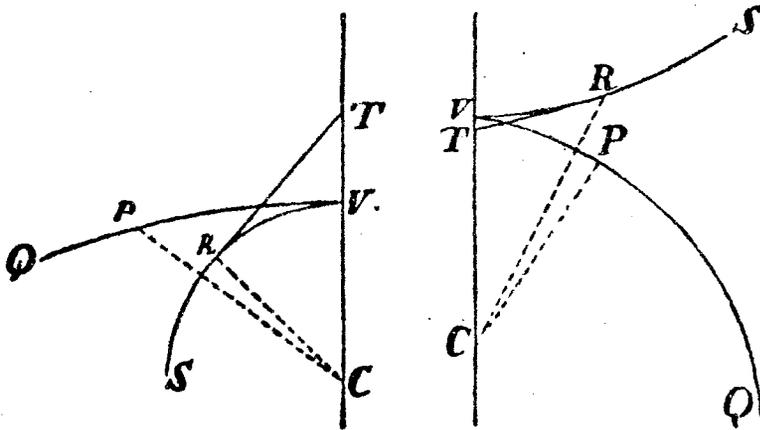
時，即是如此了。

系 2. 由  $JC$  高, 設

$$\begin{aligned} \sin KJN : \text{半徑} &= KN : JK \\ &= Z : \sqrt{ABFD}, \end{aligned}$$

即可求得曲線與  $JC$  線相交之角。

系 3. 以  $C$  為中心,  $V$  為主要頂點作一圓錐曲線  $VRS$ , 並於其任一點  $R$  作切線  $RT$ , 與  $CV$  軸之延長相交於  $T$ . 於是作  $CR$ , 使  $CP = CT$ ,



第 八 十 八 圖

以及使  $\angle VCP$  與  $VCR$  曲線形相比, 並假定向中心  $C$  的向心力, 與物體距心之三方成反比. 設物體由  $V$  點以正確的速度出發, 並沿與  $CP$  垂直的線進行, 則其所循軌道為  $VPQ$ ,  $P$  恆在

其上，故如該圓錐曲線爲一雙曲線，則物體向中心點下來，倘爲一橢圓，則與之離開而向無限遠處。反之，倘一物體由  $V$  以一定的速度出發，於是向中心點下來或離開之，則  $VRS$  爲一雙曲線或橢圓。求其軌道之法，可將  $VCP$  角相當的放大或減小之。

即如向心力轉變爲離心力，物體亦在曲線上上昇；求此曲線之法，在設  $VCP$  角與橢圓的扇形  $CVRC$  相比，並使  $PP=CT$ 。這些一切均由以前之定理，用求曲線形面積之法得之，其求法爲簡單計今不詳述了。

§ 82. 問題. 向心力之定律爲已知；今求一物體之運動，此物體由一已知的處所，以一定的速度沿一定的直線出發。

在與前相同的假定下，此物體由  $J$  沿  $JK$  線出發，其速度等於一其他物體受向心力由  $P$  下墜時於  $D$  點所可達到者。此力與開始時影響於物體  $J$  之力相比，如

$$DR : DF$$

於是物體前進向  $k$  運動，而我們可用  $C$  為中心， $Ck$  為半徑作  $ke$  弧，與  $PD$  線相交於  $e$ ，並作  $em, eg, ev, ew$  諸線。由已知的直角形  $PDRQ$  以及已知的向心力（即推動第一物體之力），即可知  $BFGg, ALMm$  曲線。於是由  $CJK$  角可知  $JK$  與  $KN$  之比，而由此則又可知  $Q$  以及  $abzv, dexw$  二曲線。如是，經過一任何時間後，即可求得  $Ce = Ck$ （物體之高），以及  $Dcwe$  面 = 扇形  $XCy, Jck$  角以及物體所達到的處所  $k$  於是亦即易知。

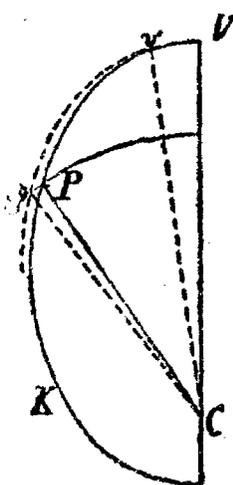
在這些定理內，我們假定當離心之遠變動時，向心力亦按照某種規律變動，但在相等的距離下，恆為一樣。

以上所研究的是不動的軌道內物體之運動；所尚須補充者，是物體在軌道內運動，但軌道本身則亦繞着力之中心旋轉的這個問題。

## 第九章 論動的軌道內物 體之運動以及回歸點之運動

§ 83. 問題. 今欲使一物體, 能於一繞力之中  
心旋轉的軌道內運動, 與一其他的  
物體在相同但靜止的軌道內運動一  
樣.

今設  $VPK$  為位置已定的軌  
道, 物體  $P$  於其內運動, 其方向則  
由  $V$  向  $K$ . 由中心點  $C$  出發, 作



第八十九圖

$$C_p = CP,$$

以及  $\angle VC_p$  與  $\angle VCP$  相比. 如是則  $C_p$  所作  
之面, 與  $CP$  同時所作者相比, 猶如  $C_p$  線之速  
度與  $CP$  之速度相比, 即, 如

$$\angle VC_p : \angle VCP.$$

所以其比為已知, 而與時間相比. 因  $C_p$  在不動的

平面內所作之面，與時間相比，故物體因向心力之作用，能與  $p$  點同時在該曲線內旋轉，而此曲線則即為該點在前所述之比下於靜止的平面內所作者。今作

$$\angle VCv = \angle PCp,$$

$$Cv = CV,$$

$$\text{圖形 } vCp = VCP,$$

則恆在  $p$  處之物體，即於旋轉的圖形  $vCp$  之邊上運動，其作  $vp$  弧所須之時間，與一其他物體  $P$  作

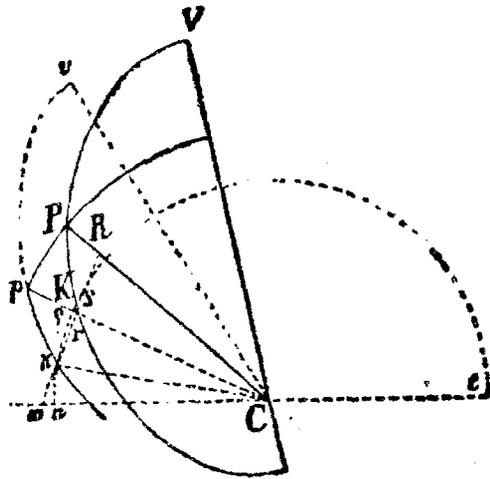
$$VP \text{ 弧 } (\cong vp)$$

之時間同；此  $VP$  弧即為靜止的圖形上者。

如是，可按 § 21 系 5，求得使物體於該曲線上運動之向心力，此曲線亦即為  $p$  點於不動的平面內所作者。問題於是解決了。

§ 84. 定理。 今有二力於此，其一使一物體在靜止的軌道內運動，其他則使另一物體在動的軌道內運動，此二軌道相同，且運動之法亦同，則此二力之差，與共同的高之三方成反比。

今設靜止的軌道內之  $VP$  與動的軌道內之  $vp \cong$ ；又，靜的軌道內之  $PK$  與動的方面之  $pk$  亦  $\cong$ ，且  $PK$  爲儘可能的小。



第九十圖

由  $k$  作  $kr$  垂於  $pC$  上，並將其引長之至  $m$ ，使

$$(1) \quad mr : kr = \angle VCP : \angle VCP.$$

因  $PC = pC,$   
 $KC = kC,$

即  $PC$  與  $pC$  之增加或減少相等，故（按定律系 2）可將物體在  $P, p$  之運動析成爲二部分，其一向中心，沿  $PC$  與  $pC$ ，其他則向與此相垂直之線，向中心的運動係相等，但

$$p \text{ 之橫運動} : P \text{ 之橫運動} = \angle VCP : \angle VCP,$$

即是， $= pC \text{ 之角運動} : PC \text{ 之角運動}.$

如是，在一時間內，當  $P$  達到  $K$  時， $p$  亦以同樣的運動向中心  $C$ ，在該時間之末達到  $mk$  線上之任何點，此線係經過  $k$  且與  $pC$  相垂直。 $p$  之橫運動使其與  $pC$  成一距離，此距離與  $P$  之離  $PC$  相比，猶如前者之橫運動與後者之橫運動相比。故在該時間之末，物體  $P$  與  $pC$  之距離為  $kr$ ，而因

$$mr : kr = \angle VCP : \angle VCP$$

(即為  $p$  之橫運動與  $P$  之橫運動相比)，故在該時間之末， $p$  即達到  $m$  處。倘  $P$  與  $p$  沿  $PC$  與  $pC$  運動，因而為相等的力於此線上所推動，則即如此。

今取

$$(2) \quad \angle pCn : \angle pCk = \angle VCP : VCP,$$

以及 (3)  $nC = kC$ ，

則當該時間之末，物體  $p$  即實在達到  $n$ ，并為一較大的力所推動，祇須

$$\angle nCp > \angle kCp,$$

即是， $vpk$  軌道向前運動，或以一速度向後退，此

速度大於  $CP$  向前進之速度一倍。反之，倘軌道緩的向後，則  $p$  即為較小的力所推動。此項力之差，與處所之距離  $mn$  相比，而此距離則為物體  $p$  因該力之作用於該時間內所必須經過者。

今設想以  $C$  為中心，

$$Cn = Ck$$

為半徑，作一圓，與  $mr$ ,  $mn$  之引長之相交於  $s$ ,  $t$ ；如是則

$$(4) \quad mn \cdot mt = mk \cdot ms,$$

即 
$$mn = \frac{mk \cdot ms}{mt}.$$

倘時間已知，則  $pCk$ ,  $pCn$  二三角形之大小亦即已知，故  $kr$ ,  $mr$  或其和  $ms$  及差  $mk$  與高  $pC$  成反比，因而

$$mk \cdot ms \text{ 與 } pC^2 \text{ 成反比.}$$

又， $mt$  與  $pC$  相比。但此處所用，均係方發生的線之最初的比，故

$$\frac{mk \cdot ms}{mt} = mn.$$

而與後者相比的力之差,均與

$$pC^3$$

成反比。此即所欲證者。

系 1. 由此可知  $P$  與  $p$  或  $K$  與  $k$  方面力之差,與其他一力(此力使物體在圓內由  $R$  至  $k$  運動,其所用時間等於  $P$  於靜止的軌道內經過  $PK$  弧所須者)之比,猶如

$$\begin{aligned} \text{古} \quad mn \cdot \sin \cdot \text{vers} RK &= \frac{mk \cdot ms}{mt} : \frac{rk^2}{2kC} \\ &= mk \cdot ms : rk^2, \end{aligned}$$

而如

$$(6) \quad F : G = \angle VCP : \angle VCp,$$

$$\text{即有} \quad G^2 - F^2 : F^2.$$

故如以  $C$  為中心,以

$$CP = Cp$$

為半徑,作一圓分使其等於  $VPC$  面(此面為  $P$  於一任何時間內在靜止的軌道上所作者),則使  $P$  在靜止的,  $p$  在動的軌道內運動的力之差,與使物體在同時間內等速的作成該圓分之中心力相

比, 猶如

$$G^2 - F^2 : F^2.$$

蓋該圓分及  $pCk$  面之比, 猶如作成此項面的時間之比。

系 2. 設  $VPK$  爲一橢圓, 其焦點在  $C$ , 其上回歸點在  $V$ , 又設另一橢圓

$$(6) \quad vpk \cong VPK,$$

且恆

$$(7) \quad \begin{cases} pC = PC, \\ \angle VCp : \angle VCP = G : F, \end{cases}$$

則可設  $PC = pC = A$ , 橢圓之通徑  $= 2R$ , 如是, 則使物體在動的橢圓內運動之力, 與

$$\frac{F^2}{A^2} + \frac{R \cdot G^2 - R \cdot F^2}{A^3}$$

相比; 反之亦然。

蓋如以

$$\frac{F^2}{A^2}$$

表一力, 能使物體在靜止的橢圓內運動者, 則此力

在  $V$  點即為

$$\frac{F^2}{CV^2}$$

但使物體在圓內(此圓之半徑為  $CV$ )以一種速度(此速度為在橢圓內進行的物體於  $V$  點所有者)運動的力,與一其他的力(此力對後者於回歸點  $V$  生作用)相比,猶如橢圓通徑之半與圓之半徑相比,即,如

$$R : CV,$$

因而  $\frac{F^2}{CV^2}$  之強度為

$$\frac{R \cdot F^2}{CV^3}$$

與此力相比,猶如

$$G^2 - F^2 : F^2$$

的力,為

$$\frac{R \cdot G^2 - R \cdot F^2}{CV^3}$$

而此則按系 1 為  $V$  點之力之差(即使  $P$  在靜止的,  $p$  在動的橢圓內運動的力之差).按以上之定

理,任何一高度  $A$  方面此力之差與  $CV$  高者相比,猶如

$$\frac{1}{A^3} : \frac{1}{CV^3},$$

故在  $A$  高時,該差爲

$$\frac{R \cdot G^2 - R \cdot F^2}{A^3}.$$

所以使物體在同時間內能經過動的橢圓之全部的力,與

$$\frac{F^2}{A^2} + \frac{R \cdot G^2 - R \cdot F^2}{A^3}.$$

相比。

系 3.  $VPK$  爲一橢圓,其中心在力之中心點  $C$ ,又設  $vpk$  與之相合并同心.倘設通徑爲  $2R$ ,大軸爲  $2T$ ,且恆  $VCp : VCP = G : F$ ,

則可同樣的推論得:使二物體在同時間內經過一靜止的一動的橢圓之力,其比如

$$\frac{A \cdot F^2}{T^3} : \frac{A \cdot F^2}{T^3} + \frac{R \cdot G^2 - R \cdot F^2}{T^3}.$$

系 4. 今設物體之最高度以  $T$  表之,  $VPK$  軌

道  $V$  點之曲率半徑為  $R$ , 又, 使物體在靜止的橢圓  $VPK$  內運動的向心力, 於  $V$  點時為

$$\frac{F^2}{T^2} \cdot V$$

但在其他處所  $P$  時, 設  $CP = A$ , 則為  $X$ , 并恆設

$$\angle VCP : \angle VCP = G : F$$

如是, 則使物體在循環運動的橢圓  $vpk$  內運動 (在同時間內) 的向心力, 與力之總和

$$X + \frac{V \cdot R \cdot G^2 - V \cdot R \cdot F^2}{A^3}$$

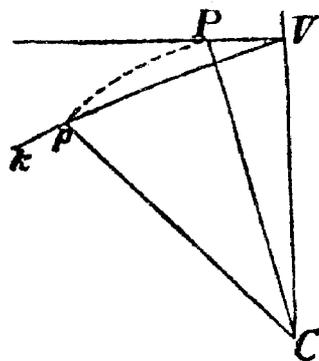
相比。

系 5. 所以, 如物體在一靜止的軌道內之運動已知, 則可將其繞力心之角運動放大或減小至一定之比, 以求得其他靜止的軌道, 此軌道為物體受新的向心力時於其內運動者。

系 6. 設  $CV$  直線之位置已知, 今於其上作一垂線  $VP$ , 其長無定, 又作  $PC$  及  $pC = PC$ , 并使  $\angle VCP : \angle VCP$  之比有定。如是, 則使物體在曲線  $Vpk$  內運動之力, 與  $CP^3$  成反比; 於此,  $p$  為一

動點。

蓋因惰性力之作用，如無其他力於此影響，則物體  $P$  即在直線  $VP$  上等速前進。今如於中心點  $C$  置一力，與  $CP$  或  $Cp$  之三方成



第九十一圖

反比，則直線運動即變為曲線  $Vpk$  上的運動。但後者與  $VPK$  相同，而物體受該項力時即於其內運動。

§ 85. 問題。 求某種軌道的回歸點之運動，此項軌道與圓形甚相近。

此問題可算術的解之，其法在使物體（於動的橢圓內運動時）在靜的平面內所作之軌道，儘量與該項軌道之形狀相接近（即與求其回歸點的軌道之形狀相接近），於是即求靜平面內軌道之回歸點。但欲軌道之形狀相似，則在使物體作成軌道的向心力，相較時於同距離內能相比。

今設  $V$  為上回歸點，并設

$$CV = T,$$

$$CP = Cp = A,$$

以及  $CV - CP = T - A = X.$  (1)

使物體在橢圓內以焦點  $C$  為中心繞之運動的力(如 § 84, 系 2), 與

$$(2) \quad \frac{F^2}{A^2} + \frac{R \cdot G^2 - R \cdot F^2}{A^3} = \frac{A \cdot F^2 + R \cdot G^2 - R \cdot F^2}{A^3}$$

相比, 今按(1)使上式分子中之  $A$  取該植, 即

$$A = T - X,$$

則得

$$\frac{R \cdot G^2 - R \cdot F^2 + T \cdot F^2 - X \cdot F^2}{A^3} \quad (3),$$

是即向心力與之相比者。

同樣的方法, 將其他的向心力亦以分式表之, 此分式之分母為  $A^3$ , 並用比較相當的項之法, 使分子為恆等。

可舉例以明之。

例 1. 設向心力為整齊的, 則與

$$\frac{A^3}{A^3}$$

相比。倘分子中之  $A$  代以  $T-X$  則上式成爲

$$\frac{T^3 - 3T^2X + 3TX^2 - X^3}{A^3}.$$

於是用相當項比較之法，使已知者與已知者未知者與未知者相較，即得

$$\frac{R \cdot G^2 - R \cdot F^2 + T \cdot F^2}{T^3} = \frac{-X \cdot F^2}{-3X \cdot T^2 + 3T \cdot X^2 - X^3}$$

或

$$\frac{R \cdot G^2 - R \cdot F^2 + T \cdot F^2}{T^3} = \frac{-F^2}{-3T^2 + 3T \cdot X - X^2} \quad (4),$$

今設軌道與圓形甚相接近，則

$$R = T \text{ 而 } X \text{ 成爲無限小,}$$

於是其最後比爲

$$R \cdot G^2 : T^3 = -F^2 : -3T^2,$$

或

$$G^2 : T^2 = F^2 : 3T^2,$$

即

$$G^2 : F^2 = 1 : 3, \quad (5)$$

因

$$G : F = \angle V C_p : \angle V C P,$$

故

$$\angle V C_p : \angle V C P = 1 : \sqrt{3} \quad (6).$$

所以當物體在靜止的橢圓內由上回歸點至下

回歸點，作一角

$$VCP = 180^\circ$$

時，其他在動的橢圓內之物體亦作一角

$$VCP = \frac{180^\circ}{\sqrt{3}}$$

物體受整齊的向心力之作用而作出的軌道，與其在動的橢圓上運動時於靜的平面內所作之軌道相似，故必如此。由以上將各項比較之法，可使此項軌道相似，但非一般的，僅僅在此項軌道與圓形相接近時纔行。受整齊的向心力之作用而在與圓形近似的軌道內運動的物體，當其由上回歸點至下回歸點時作一角

$$\frac{180^\circ}{\sqrt{3}} = 103^\circ, 55', 23''.$$

當其由下回歸點回至上回歸點時，重復作此角，如此以至於無限。

例 2. 設離心力與距離  $A$  之若干次方，例如

$$A^{n-8} = \frac{A^n}{A^8}$$

相比（於此， $n$  爲一任何整數或分數，有理數或無

理數，正數或負數均可)，則按前法，

$$A^n = (T - X)^n, \text{ 即}$$

$$A^n = T^n - nXT^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} X^2 T^{n-2} + \dots \quad (7)$$

今將此與 (3) 中之分子

$$R \cdot G^2 - R \cdot F^2 + T \cdot F^2 - XF^2$$

相較，即有

$$\begin{aligned} & (R \cdot G^2 - R \cdot F^2 + T \cdot F^2) : T^n \\ &= -F^2 : \left( -nT^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} X \cdot T^{n-2} + \dots \right) \quad (8). \end{aligned}$$

倘軌道與圓形相合，而取其最後之比，則得

$$R \cdot G^2 : T^n = F^2 : nT^{n-1},$$

或  $G^2 : F^2 = T^{n-1} : nT^{n-1},$

$$G : F = 1 : \sqrt{n} \quad (9),$$

即，如前

$$\angle VCP : \angle VCP = 1 : \sqrt{n} \quad (10).$$

物體由上回歸點至下回歸點時所作之角  $VCP = 180^\circ$ ，故物體因向心力（此力與  $A^{n-2}$  相比）之作用在與圓形相接近的軌道內由上回歸點至下

回歸點時所作之角  $VCp$  爲

$$\frac{180^\circ}{\sqrt{n}}$$

當其由下回歸點回至上回歸點時， $VCp$  亦如是大；  
如此以至於無限。

倘向心力與物體之離心距離

$$A = \frac{A^4}{A^3}$$

相比，則  $n=4$ ， $\sqrt{n}=2$ ，而

$$VCp = 90^\circ.$$

所以在經過第四部分後，物體即達到下回歸點，經過一半後則達到上回歸點，等等。

此理亦可由 § 27 知之。蓋因此向心力之作用，物體在一固定的橢圓內運動，其中心點則即爲力之中心點，今設向心力與距離成反比，即是，與

$$\frac{1}{A} = \frac{A^2}{A^3}$$

相比，則  $n=2$ ，而上回歸點與下回歸點間之角爲

$$\frac{180^\circ}{\sqrt{2}} = 127^\circ 16' 45''.$$

所以因該項向心力之作用，使物體循環運動時，恆須經過此角，乃能由上回歸點至下回歸點，及由下回歸點復至上回歸點，等等，以至於無限。

又如向心力與

$$\frac{A^{\frac{1}{2}}}{A^3}$$

相比，則  $n = \frac{1}{2}$ ,  $\sqrt{n} = \frac{1}{2}$ , 故

$$VCp = \frac{180^\circ}{\frac{1}{2}} = 360^\circ.$$

如是，則物體由上回歸點至下回歸點時，須作一完全的環繞，由下回歸點至上回歸點時亦然，如此以至於無限。

例 3. 設  $m, n$  為任何二乘方之次數， $b, c$  為已知之數，并設向心力與

$$\frac{b \cdot A^m + c \cdot A^n}{A^3} = \frac{b(T-X)^m + c(T-X)^n}{A^3}$$

相比，用前法將其算出後，則知向心力與

$$(10) \quad \frac{bT^m - mbXT^{m-1} + \frac{m^2-m}{2}bX^2T^{m-2} + \dots}{A^3} + \frac{cT^n - ncXT^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}cX^2T^{n-2} + \dots}{A^3}$$

相比。今將此中之項與以前之(3)相較，即得

$$\begin{aligned} (R \cdot G^2 - R \cdot F^2 + T \cdot F^2) &: (bT^m + cT^n) \\ &= -F^2 : (-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} \quad (11) \\ &\quad + \frac{m^2 - m}{2} bXT^{m-2} + \frac{n^2 - n}{2} cXT^{n-2} + \dots) \end{aligned}$$

設軌道轉變成爲圓形，而取其最後比，則得

$$\begin{aligned} G^2 &: bT^{m-1} + cT^{n-1} = F^2 \\ &: (mbT^{m-1} + ncT^{n-1}). \quad (12) \end{aligned}$$

今以算術上的單位表此最高度

$$T = CV,$$

則由上式可得

$$\angle VC_p : \angle VCP = \sqrt{b+c} : \sqrt{mb+nc} \quad (13).$$

從可知，倘固定的橢圓內上回歸點與下回歸點間之角  $VCP$  爲  $180^\circ$ ，則在此處  $VC_p$  爲

$$180^\circ \sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}} \quad (14).$$

仿此，倘向心力與

$$\frac{b \cdot A^m - c \cdot A^n}{A^3}$$

相比，則其角爲

$$180^\circ \sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}} \quad (15).$$

在較困難的狀況下，此項問題亦可如是解決之。與向心力相比的量，恆須化之成爲收斂的級數，其分母恆爲  $A^3$  於是須將分子之已知部分

$$R \cdot G^2 - R \cdot F^2 + T \cdot F^2 - X \cdot F^2$$

與其未知部分相比，將其不必要的項略去，并設

$$T = 1$$

即得  $G : F$  .

系 1. 所以，倘向心力與距離之任何次方相比，則可由回歸點之運動以推得此方數；反之亦然。

蓋如整個的角運動（經過此以後物體退回至原來的回歸點），與環繞一週的角運動，即  $360^\circ$  相

比，如  $m : n$ ,

并設距離爲  $A$ ，則向心力即與

$$\frac{n^2}{Am^2} - 3$$

相比。此可由例 2 知之。

由此可知該項力之減少不能超過距離三次方之比。蓋如不然，則物體由上回歸點出發，不能再至下回歸點及距離最小之處，而直至中心點了，所作曲線即為 § 81. 系 3 中所論過者。反之，倘由下回歸點出發，并稍向上，則亦不能達到上回歸點，而直至於無限去了，其所作曲線亦為該系及 § 84 系 6 中所論過者。

又如力之減少，其比超過距離之三次方，則物體由上回歸點出發稍傾下時，即直向無限下去；反之，倘出發時由下回歸點稍向上，即直向無限上昇。但如力之減少，其比小於距離之三次方，或與其任何次方為比相增加，則物體永不能達到中心，但可一次達到下回歸點。反之，倘物體交互的由一回歸點至他回歸點上昇或下降時永不能遇中心，則該項力必與距離相增加或其減小之度小於三次方，且物體由一回歸點達到他回歸點愈速，則其與三次方之比相差愈遠。

當物體交互的上昇下降時，經過

$$8, 4, 2 \text{ 或 } 1\frac{1}{2}$$

次的旋轉由上回歸點回至下回歸點，則各關的有

$$m : n = 8 : 1,$$

$$= 4 : 1,$$

$$= 2 : 1,$$

$$= \frac{3}{2} : 1.$$

所以  $\frac{n^2}{m^2} - 3 = \frac{1}{64} - 3,$

$$= \frac{1}{16} - 3,$$

$$= \frac{1}{4} - 3,$$

$$= \frac{4}{9} - 3,$$

而力與

$$A^{\frac{1}{64}-3}, A^{\frac{1}{16}-3}, A^{\frac{1}{4}-3}, A^{\frac{4}{9}-3},$$

成正比，與

$$A^{3-\frac{1}{64}}, A^{3-\frac{1}{16}}, A^{3-\frac{1}{4}}, A^{3-\frac{4}{9}},$$

成反比。

如物體經各別的旋轉後回至原來的固定回歸點，則

$$m : n = 1 : 1,$$

故 
$$A^{\frac{n^2-3}{m^2}} = A^{-2} = \frac{1}{A^2}.$$

所以力之減少與距離之平方相比，此則以前所已證明者。

倘物體經

$$\frac{3}{4}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{3}, \quad \text{或} \quad \frac{1}{4}$$

環繞後回至原來的回歸點，則得

$$m : n = \frac{3}{4} : 1,$$

$$= \frac{2}{3} : 1,$$

$$= \frac{1}{3} : 1,$$

$$= \frac{1}{4} : 1,$$

$$A^{\frac{n^2-3}{m^2}} = A^{\frac{1^2}{9}-3},$$

$$= A^{\frac{9}{4}-3},$$

$$= A^{9-3},$$

$$= A^{16-3},$$

而力與

$$A^{\frac{11}{9}}, A^{\frac{3}{4}}, A^{-6}, A^{-13},$$

成反比, 與

$$A^{-\frac{11}{9}}, A^{-\frac{3}{4}}, A^6, A^{13},$$

成正比,

倘物體由上回歸點回至下回歸點時, 經過一環繞并  $3^\circ$ , 回歸點則當旋轉時直接經過  $3^\circ$ , 則得

$$m : n = 363 : 360,$$

故

$$A^{\frac{n^2}{m^2}-3} = A^{-\frac{265707}{131769}}.$$

如是, 力與

$$A^{\frac{265707}{131769}} \text{ 近似的} = A^{2+\frac{4}{243}}$$

成反比。所以力之減小, 其比較距離之二次方稍

大，但與三次方較遠，其相差之度，則視二次方差

$$\frac{4}{239} = \frac{100}{5975}.$$

系 2. 倘物體受向心力之作用，在橢圓內運動，此向心力與距離之平方成反比，力之中心在其焦點，而如此向心力自外被增大或減小了，則我們即可按例 3 求得其回歸點之運動；此運動即為該項外力所引起者。反之亦然。

今設該向心力為

$$\frac{1}{A^2}$$

其外來使之減少的力與

$$cA$$

相比，則所餘的力為

$$\frac{1}{A^2} - cA = \frac{A - cA^4}{A^4}.$$

按例 3，即有

$$b = 1, m = 1, n = 4,$$

而二回歸點間之角為

$$180^\circ \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$$

今設  $c = \frac{100}{35745}$

$$\begin{aligned} \text{則 } 180^\circ &= \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}} = 180^\circ \sqrt{\frac{35645}{35345}} \\ &= 180^\circ, 45', 44''. \end{aligned}$$

如是，物體由上回歸點出發時，經

$$180^\circ, 45', 44''$$

後即達到下回歸點，再經過此後重復至上回歸點。

所以在一週內上回歸點直接經過

$$1^\circ, 51', 28''.$$

月球的回歸點，其運動之速度約一倍於此。

關於物體在軌道內之運動，其軌道之平面經過力之中心者，大約於此論過了。我們尚須一論偏心的軌道內之運動。

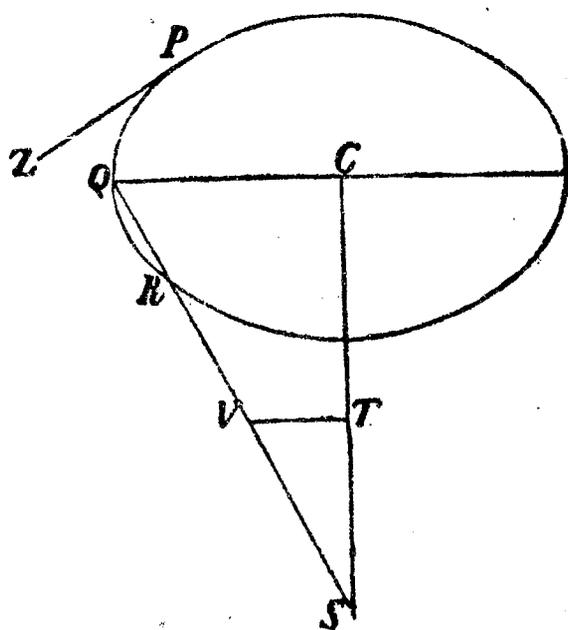
研究重物體的運動之著作家，必須一討論其在任何平面內之斜上昇及下降，以及垂直的昇降。又，物體以某種力而向中心的運動，以及在偏心的

軌道內之運動，我們亦均須研究及之。所用的平面可假定其極光滑，俾物體不致受若何阻滯，在這些證法方面，亦可不用物體在其上并與之接觸的平面，而用與此相平行的面，物體之中心點即在內運動，而軌道亦即於此時畫出。又。我們并將根據同樣的定律，以研究物體在曲面上之運動。

## 第十章 論物體在已知面上之運動及擺錘運動

§ 86. 問題. 設有一任何種類之向心力為已知; 力之中心以及物體在其內運動的平面亦為已知. 又假定曲線形之面積亦可求得. 今求一物體之運動; 此物體由一已知的處所, 以一定的速度沿一直線出發; 該直線在該平面內且亦為已知.

今設此力之中心為  $S$ , 其與該已知平面之最小距離為  $SC$ ,  $P$  為物體



第九十二圖

由之出發的處所， $PZ$  爲其所沿之線， $Q$  爲在其軌道內運動的物體， $PQR$  則爲在該已知平面內所作之軌道，即所欲求者。作  $CQ, QS$  線，又設  $SV$  與向心力相比；此力在使物體傾向中心  $S$ 。

今作

$VT$  與  $QC$  相平行，

$VT$  與  $CS$  之交點爲  $T$ ，則可將  $SV$  力析成爲  $ST, TV$  二部分，其中之  $ST$  力與物體在平面內之運動無關。但  $TV$  力則使物體傾向  $C$ ，其使物體在該平面內運動之作用猶如沒有  $ST$  力一樣，故如物體單受  $TV$  力之作用，則即以  $C$  爲中心在自由的空間內運動。但如  $TV$  爲已知，則按 § 82 即可得軌道  $PQR$ （此軌道爲將畫出者），以及處所  $Q$ （物體在某時間所達到者），並可得該處之速度。反之亦然。

§ 87. 定理。 設向心力與物體離心之遠相比，則一切在任意平面內運動的物體作出橢圓軌道，且以相等的時間完全經過之。但在直線上往返運

動的物體，則其完成往返週期之時間亦相等。

在與前節相同的假定下，使  $PQR$  平面內之運動物體  $Q$  傾向  $S$  的力，與  $SQ$  距離相比，因

$$SV : SQ = TV : CQ,$$

故  $TV$  力（此力使物體傾向在軌道的平面內之  $C$  點）與距離  $CQ$  相比。因此，使平面內物體向  $C$  的力，按距離之比，與使物體在各處傾向  $S$  之力相等。所以物體繞  $C$  運動所須之時間等於在自由空間內繞  $S$  所須者。按 § 27 系 2, § 78 系 2, 此項物體於恆等的時間內所作之軌道，或則為該平面內之橢圓，以  $C$  為中心，或則為週期的直線軌道，經過中心  $C$  在該平面內。此即所欲證者。

§ 88. 附註。 與此相關的，有物體在曲面上之上升下降。

試設想於平面內作若干曲線，將其按一經過力心的軸旋轉之，以得若干曲面；當物體運動時，其中心點恆在此項面上。倘物體斜上或下，在此面或該面運動時，此項運動恆在平面內，而平面本身

則經過軸；故亦即在曲線上，即產生該項曲面的曲線。所以在此種狀況下，我們祇須研究該項曲線內之運動便行。

§ 89. 定理。 一輪子直立於一球之外面，並沿一最大圓滾轉。如是則輪周上任何一點由接觸時開始所作之曲線，其長與輪弧之半之矢 (*sinus versus*) 二倍相比，猶如球與輪二者直徑之和，與前者之半徑相比。

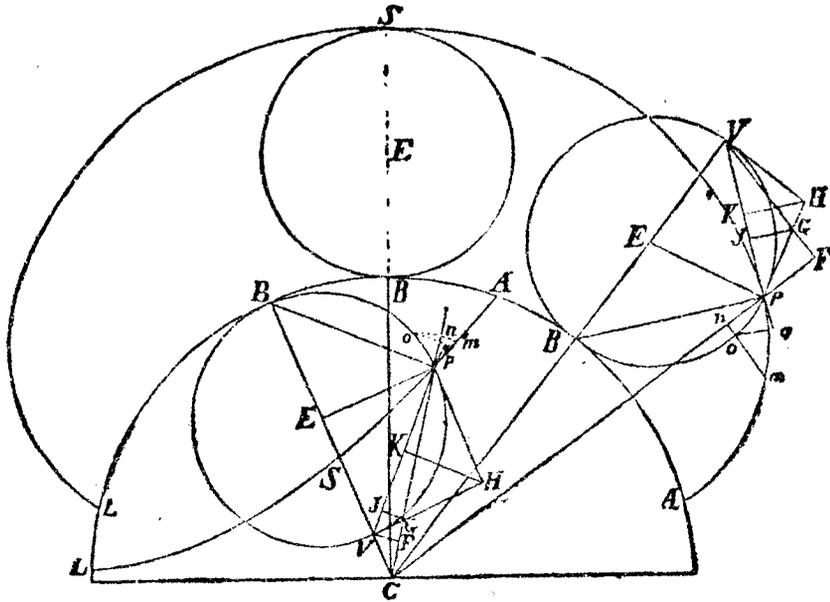
§ 90. 定理。 反之，倘輪子在球之內面滾轉作一曲線，則其長與該項矢之二倍相比，猶如球與輪二者直徑之差，與前者之半徑相比。

今設  $ABL$  為上所述之球， $C$  為中心點， $BPV$  為在其上的輪子， $E$  為輪之中心點， $B$  為接觸點， $P$  則為輪周上之一點。試設想輪子在最大圓  $ABL$  上滾轉，而且

$$\frown AB = \frown BP,$$

於此時內， $P$  作一曲線  $AP$ 。今所欲證者，即是

$$AP : 2\sin vers \frac{1}{2}PB = 2CE : CB.$$



第九十三圖

今如  $CE$  (必要時可引長之) 遇輪周於  $V$ , 則  
 可作  $CP, BP, EP, VP$ ,  
 並作  $VF$  垂於  $CP$  之引長上。於是作切線  $VH$ ,  
 $PH$  於  $V, P$  點, 使其相交於  $H$ ; 並作  $VF$  線, 與  
 $PH$  相交於  $G$ , 再由  $G$  與  $H$  二點作二線  $GJ, HL$   
 垂於  $PV$  上。又以  $C$  為中心, 以  $Co$  為半徑作圓弧  
 $nom$ ; 此弧與  $CP, BP, AP$  相交於

$n, o, m,$

於是再以  $V$  爲中心點，以  $Vo$  爲半徑作  $oq$  弧，與  $Vp$  (或其引長) 相交於  $q$ 。

當輪子滾轉時以  $B$  爲中心旋轉，故  $BP$  此時與  $AP$  曲線垂直，因而亦與  $VP$  切線在  $P$  點相垂直。倘將圓弧之半徑顯明的放大或減小之，則可與  $CP$  相等，而因將成爲零的圖形

$$Pnomq \sim PFGVJ,$$

故將成爲零的直線

$$Pm, Pn, Po, Pq$$

之最後比，即是，

$$AP, CP, \text{及} \sim BP$$

之同時的增加以及  $VP$  之減小之比，

$$\text{與} \quad PV, PF, PG, PJ$$

諸直線之比各各相同。

因  $VF$  與  $CF$  相垂直，而且  $VH$  亦與  $VC$  相垂直，故

$$\angle HVG = \angle VCF;$$

又因  $HVEP$  四角形內  $V, P$  二角均爲直角，因

而 
$$\begin{aligned}\angle VHP &= 180^\circ - VEP \\ &= CEP,\end{aligned}$$

故 
$$\triangle VHG \sim \triangle CEP.$$

於是可得以下之比：

$$\begin{aligned}EP : CE &= HG : HV = HG : HP \\ &= KJ : KP,\end{aligned}$$

而因 
$$EP = EB,$$

由此即可得

$$CE - BE : CE = JP : PK,$$

$$CB : CE = JP : KP,$$

亦即 
$$\begin{aligned}CB : 2CE &= JP : VP, \\ &= Pq : Pm.\end{aligned}$$

從可知  $VP$  之減小，亦即  $BV - VP$  之增加。

與  $AP$  曲線之增加相比恆為

$$CB : 2CE,$$

而由之產生的長  $BV - VP$  及  $AP$ ，其相比亦同此。倘以  $BV$  為半徑，有

$$VP = \cos BVP = \cos \frac{1}{2} BEP.$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad BV - VP &= 1 - \cos \frac{1}{2}BEP \\ &= \sin \text{vers} \frac{1}{2}BEP. \end{aligned}$$

在以上之輪子方面，其半徑為  $\frac{1}{2}BV$ ，故

$$BV - VP = 2 \sin \text{vers} \frac{1}{2}BEP.$$

於是最後可得

$$AP : 2 \sin \text{vers} \frac{1}{2}BP = 2CE : CB.$$

此即所欲證者。

爲分別計，我們稱第一事內之  $AP$  曲線爲球外擺線 (*Cycloide*)，其第二事內者則爲球內擺線。

系 1. 試作擺線  $ASL$  之全部，於  $S$  平分之，則  $PS$  曲線與  $VP$  線相比，如

$$2CE : CB.$$

所以二者之比爲一常數。

系 2. 半個擺線  $AS$  之長，與輪子之徑  $BV$  相比，如

$$2CE : CB.$$

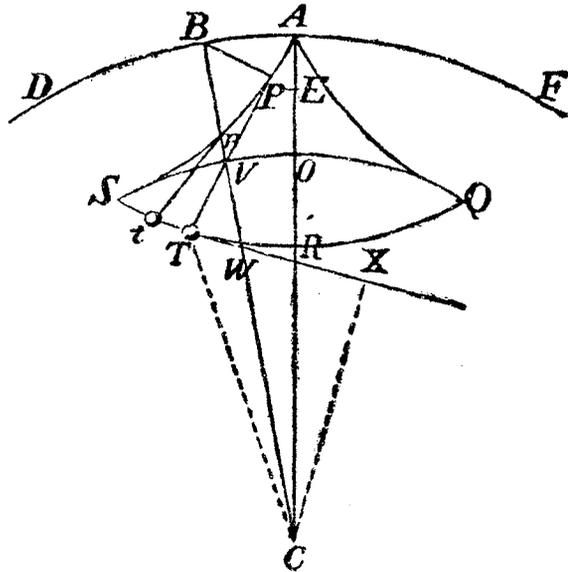
系 3. 所以倘視球之半徑爲已知，則該項長與

$$RE \cdot EC$$

相比。

§ 91. 問題。 今欲使一擺錘之線在一已知擺線內運動。

今於  $QVS$  球(其中心為  $C$ ) 之內部作一擺線  $QRS$ . 此擺線於  $R$  被平分, 其兩端  $Q, S$  與球之面相接觸。



第九十四圖

試作  $CR$  線, 將  $QS$  弧於  $O$  平分, 並將  $CR$  引長至  $A$ , 使

$$CA : CO = CO : CR \quad (1).$$

於是以  $C$  為中心點,  $CA$  為半徑作一外球  $ABD$ . 在此球之內部, 用一直徑為  $AO$  的輪子作二擺線  $AQ, AS$ , 與內面的球相切於  $Q, S$ , 與外球則於  $A$  相遇. 由  $A$  點往下懸一線  $APT$ , 其長  $= AR$ ;  $T$  處繫一物體, 於是, 使其在  $AQ$  與  $AS$  之間擺動. 當擺動向  $APS$  擺線進行時, 線之  $AP$  部分即合

在  $APS$  上,其餘  $PT$  部分則與擺線尙不接觸,因而仍爲直線;如是,  $T$  即在已知的擺線  $QRS$  上擺動。

$PT$  線與  $QRS$  擺線相交於  $T$ , 與  $QOS$  圓則交於  $V$ . 今作  $CV$  線, 引長後與  $ABD$  圓相交於  $B$ , 並於  $P, T$  二點作垂線  $PB, TW$ , 與  $CV$  相交於  $B, W$ . 由擺線之產生, 可知此項垂線在  $CV$  上割下

$$VB=OA, VW=OR, \quad (2)$$

故  $B$  必在  $ABD$  圓上. 於是有

$$\begin{aligned} TP : VP &= BW : BV \\ &= BV + VW : BV, \end{aligned}$$

$$TP : VP = OA + OR : OA. \quad (3)$$

由 (1) 可得

$$\begin{aligned} CA - CO : CO - CR &= AO : OR \\ &= CA : CO, \end{aligned}$$

因而  $OA + OR : AO = CA + CO : CA$ ,

$$OA + OR : AO = 2CE : CA \quad (4).$$

按 (3), (4) 卽有

$$TP : VP = 2CE : CA \quad (5),$$

$$VP = 2 \cdot \frac{1}{2} BV \sin VBP \quad (6).$$

又按 § 90 系 1, 2, 卽得

$$\left. \begin{array}{l} PT = PS, \\ APT = APS, \\ APT = AR \end{array} \right\} (7).$$

故如線之長恆爲  $AR$ , 則  $T$  在擺線  $QRS$  上運動。

此卽所欲證者。

系.  $AR$  線等於  $APS$  擺線, 故其與  $AC$  半徑相比, 猶如  $SR$  擺線與  $CO$  半徑相比。

§ 92. 定理. 倘恆向球心  $C$  的向心力, 在各處均與其離心之遠相比, 物體  $T$  僅以此力之作用如前於擺線  $QRS$  上擺動, 則任意的不等的擺動之時間均相等。

今作  $CX$  垂線, 垂於  $TW$  之引長上, 並引  $CT$  線, 使物體  $T$  向中心  $C$  的向心力, 與距離  $CT$  相比, 故可將其析成爲二支力  $CX, TX$  此中之第

一力使物體離開  $P$ , 故其作用使線緊張, 而因後者之抵抗, 適相抵消. 其第二力則使物體向  $X$ , 因而使其在擺線內之運動加速. 此項與力相比的加速, 其各時間內之增減, 猶如  $TX$ , 而因

$$TX : TW = CV : VW,$$

又  $CV = CO$ ,  $VW = OR$  均為常數, 故如  $TW$ , 或, 按 § 90 系 1, 如  $TR$  弧.

倘有二擺錘,  $APT$  及  $Apt$ , 其與  $AR$  之距離不同, 則將其同時放下後, 其加速恆與所當經過的弧  $TR$ ,  $tR$  相比. 在開始時所作的部分, 其比與加速同, 即是, 與開始時所當作的全弧之比同; 所以其餘的部分, 其比亦與全軌道之比同, 而在後與此項部分相比的加速亦然.

從可知加速, 其所產生的速度, 以此項速度作出的部分, 以及所當作的部分, 恆與全弧同其比.

所當作的部分, 其相互間之比恆不變, 故必於同時間內成爲零, 此即是說, 二個擺動的物體於同時間內達到  $AR$  線. 反之, 擺錘之由最低點  $R$  上

昇，其在各點被阻滯的力，等於下降時使其加速的力，故可知經過同樣的弧時，上昇及下降之速度相等，因而後者所須之時間相等。

因擺線之二部  $RS$  及  $RQ$  相合，故二擺錘之經過其全振動以及經過其半，其所須時間均同。

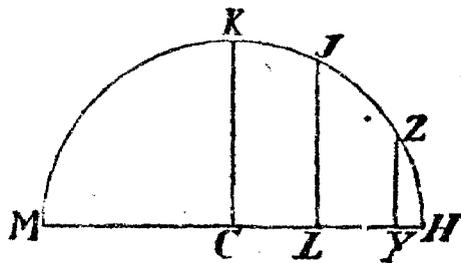
此即所欲證者。

系。物體在擺線上任何處  $T$  時，使物體加速或遲緩的力，與物體在最高處  $S$  或  $Q$  時之全重量相比，如

$$\sphericalangle TR : \sphericalangle QR.$$

§ 93. 問題。求擺錘在各處之速度，以及經過全振動及其部分時所須的時間。

1. 以一任何點  $G$  為中心，用半徑  $GH$  ( $=RS$  弧，參觀第 94 圖) 作半圓  $HKM$ ，與  $GK$  相交並為其



第九十五圖

所平分。與距離心之遠相比的向心力，假定其傾向

中心點  $G$ . 在同一時間內, 當擺錘  $T$  由其最高點  $S$  下來時, 一物體  $L$  由  $H$  到  $G$ . 在開始時推動物體的力均相等, 且與所當經過的軌道  $TR, GL$  相比, 故如

$$TR = LG,$$

則在  $T$  與  $L$  點亦相等. 如是可知該項物體在開始時經過相等的軌道  $ST, HL$ , 以後則繼續的為相等的力所推動, 並且所經過的空間亦恆相等.

按 § 78 可知物體經過  $ST$  弧的時間, 與一全振動之時間相比, 猶如  $HJ$  弧 (物體由  $H$  至  $L$  所須時間) 與  $HKM$  半圓 (物體經過  $HM$  軌道所須時間) 相比.

又, 擺錘在  $T$  點之速度與其最低點  $R$  之速度相比 (即是, 物體  $H$  在  $L$  點之速度與其  $G$  點之速度相比, 或亦即,  $HL$  線之當前的增加與  $HG$  之增加相比, 但須  $HJ, HK$  弧以等速度增加), 如

$$JL : GK \text{ 或如}$$

$$\sqrt{SR^2 - TR^2} : SR.$$

因在不等的振動方面，在等時間內所作之弧與全部振動弧相比，故由已知的時間可得速度及所作之弧。

2. 今設擺錘在不同的擺線內振動，此項擺線在不同之球之間，而且其絕對的力亦為不同。與  $QOS$  球相當的絕對力，今以  $V$  表之。如是，則推動球面上擺錘的加速力，與

$$CO \cdot V$$

相比。與此力相比的  $HY$  線於是即在已知的時間內畫出，而如作  $YZ$  垂線，與圓周相交於  $Z$ ，則  $HZ$  弧即表該時間。但此弧與

$$\sqrt{GH \cdot HY} \text{ 即是 } \sqrt{GH \cdot CO \cdot V}$$

相比，故  $QRS$  擺線內全振動之時間（因其與代表該全振動的半周  $HKM$  成正比，與代表一已知時間的弧  $HZ$  成反比）與

$$GH \text{ 半徑成正比，}$$

$$\text{與 } \sqrt{GH \cdot CO \cdot V} \text{ 成反比，}$$

$$\text{或因 } GH = SR,$$

與  $\sqrt{\frac{SR}{CO \cdot V}}$

或按 § 91 之系，與

$$\sqrt{\frac{AR}{AC \cdot V}}$$

相此。

所以在球內及擺線內受某種絕對的力而發生的振動，其比為線長之根之正，始點離中心的根之反，以及絕對力之根之反三者所合成。

系 1. 由此，我們可將振動的，下墜的及旋轉的物體之時間互相比較。

蓋如設球內產生擺線的輪子之徑等於球之半徑，則擺線即成為直線，而此直線則經過球心。於是擺線上之振動，即轉變為該直線上之往返上昇下降，由此可求得由任何一處至中心之下降時間，以及與此相等的時間之段，於此段內，一物體能以等速的旋轉運動，在一任意的距離處，以球心為中心作一象限。蓋此時間與任意擺線  $QRS$  內之半振動時間相比，如

$$1 : \sqrt{\frac{AB}{AC}}.$$

系 2. 由此，尚可推得以前雷氏(*Wren*)及許金司(*Huygens*)於尋常擺線方面所得的結果。

蓋如我們將球之徑放大至無限，則其球形的面即轉變成為平面，向心力之作用方向，於是在與平面垂直的線內，而此處的擺線乃成為尋常的擺線了。在這裏，該平面及產生此線的點中間之擺線段之長，等於輪子上弧之半之矢(*sinus versus*)四倍，此弧亦在該平面及該點之間。此結果即雷氏所得者。又如一擺錘在此項二擺線之中間，則其振動在一相合的擺線上，其時間亦等，此為許金司所證明的結果。許氏並曾用此理，說明重物在一振動時間內之下墜。

我們所證明的定理，可以與地球之真的屬性相適合，其適合之故在這裏，即，輪子在其大圓上前進時，輪之邊即在球外作出擺線。而如將擺錘懸於地面之下，例如在地穴中，則其振動亦即在球內之擺線上，故一切振動均有等時性。

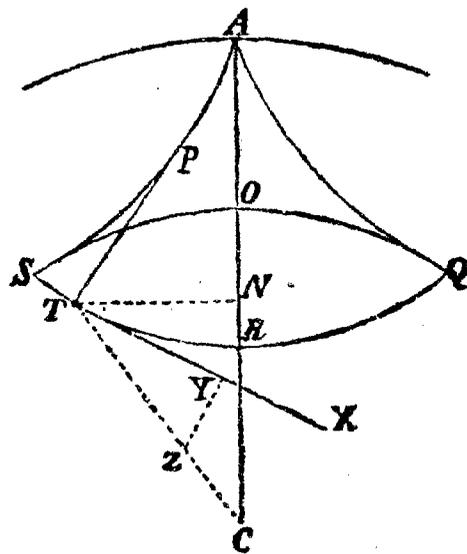
§ 94. 問題. 假定我們能求曲線之長, 今欲求該項力, 能使物體在已知的曲線上恆作等時的振動.

今設物體  $T$  在任意的曲線  $STRQ$  上振動, 此曲線之軸  $OR$  係經過力之中心點  $C$  者. 試作  $TX$ , 與曲線相切於  $T$ , 並於其上取

$$TY = TR.$$

因假定我們可求曲線之長, 故  $TR$  弧之長可用尋常之法求之. 於  $TX$  上取一點  $Y$ , 於此作一垂線  $YZ$ , 並引  $CT$  與  $YZ$  相交於  $Z$ . 如是, 則向

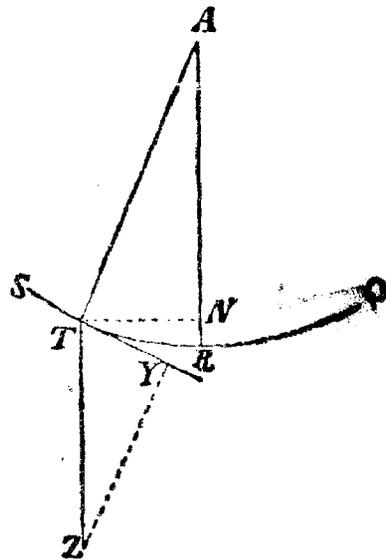
心力即與  $TZ$  線相比. 使物體由  $T$  向  $O$  的力既用  $TZ$  線表出, 即可將其析成爲二支力  $TY, YZ$ . 後者之支力, 在  $PT$  方向內(即線的方向內)對於物體生作用, 故



第九十六圖

於物體之運動上不能生若何變化，但  $TY$  力則能使  $STRQ$  內之物體運動加速或遲緩。又因此力與所當經過的軌道  $TR$  相比，故二振動（一較大一較小）之所當作的部分內之加速或遲緩，恆與此項部分為同比。所以其作用，使該項部分在同一時間內作成。但物體倘能於同一時間內作成與整個道路相比的部分，則亦即能於同一時間內作成整個的道路。此即所欲證者。

系 1. 倘將一物體  $T$  懸於一直線  $AT$  上，而此物體作一弧  $STRQ$ ，則各個振動之時間均相等，但須此物體受一力向平行的方向被往下的吸引，而且此力與整齊的重力相比。



如  $\sphericalangle TR : \sin TR$   
 ( $\sin TR = TN$ ).

蓋因

第九十七圖

$TZ$  與  $AR$  相平行，

故  $\triangle ANT \sim \triangle TYZ,$

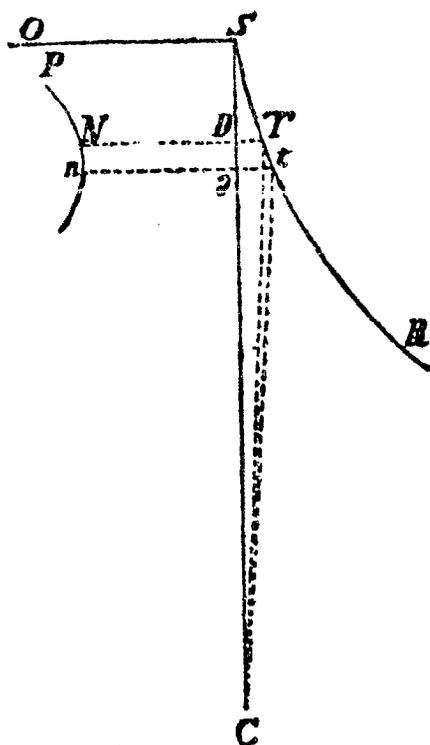
因而  $TZ : AT = TY : TN.$

系 2. 所以在擺錘鐘內，由機器方面所施於擺錘使其繼續運動的力，倘能將其如是與重力結合，俾其全個向下的合力，與

$$\frac{TR \cdot AR}{\sin TR}$$

相比，則一切振動即均為等時的。

§ 95. 問題。 如前，我們假定能求得曲線形之面積。今所欲求者是時間，在此項時間內，物體受某種向心力之作用在任意的曲線內上昇及下降；至曲線本身，則在經過力之中心的平面內。設有一物體由  $S$  點出發，在任意的曲線  $STtR$  內下降，此曲線則在經過力之中心  $C$  的平面



第九十八圖

內。今作  $CS$  線，將其均分成爲無數段，其中之一段爲  $Dd$ 。於是以  $C$  爲中心， $CD, Cd$  爲半徑，作圓弧  $DT, dt$ ，將  $SR$  曲線於  $T, t$  分割。由已知的向心力定律及  $CS$  高，可按 § 79 以得任何高  $CT$  之速度。物體經過極短的線  $Tt$  所須之時間，與  $tTC$  成正比，與速度成反比。今設  $DN$  與此時間相比，則因  $Dd$  爲已知，故此時間亦與

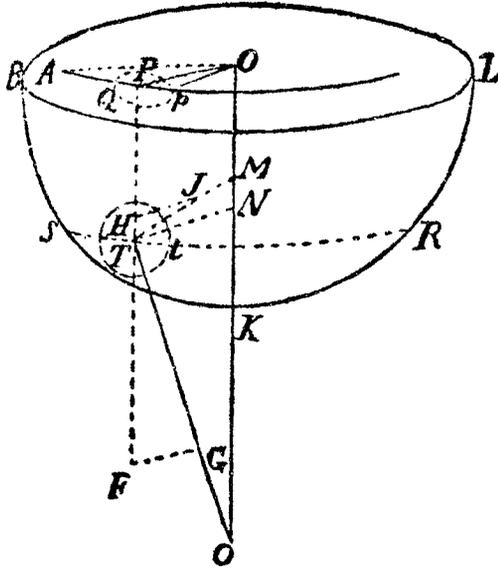
$$Dd \cdot DN$$

相比，即是，與長方形  $DNnd$  相比。故如  $PNn$  爲  $N$  所恆在其上的曲線， $QS$  與  $CS$  相垂直，且爲該曲線之漸近線，則

$$SQPNDS$$

面積與一時間相比，在此時間內下降的物體經過  $ST$  曲線。故如求得該面積，則亦可求得此時間。

§ 95. 定理。 一物體在一任意的曲面上運動，此曲面之軸經過力之中心。今由物體作一垂線至軸，並於軸上取一點，由此作一線與前者相平行並相等，則此線作成一面，與時間相比。



第九十九圖

今設  $BSKL$  爲一曲面， $T$  爲在其上運動的物體， $STtR$  爲物體於其上所作之軌道， $S$  爲此軌道之出發點， $OMNK$  爲曲面之軸， $TN$  爲由

物體至軸上之垂線。又設

$OP$  與  $TN$  相平行又相等，

且爲一動的線， $AOP$  爲其平面， $AP$  則爲  $P$  點在該平面內所作軌道之一段， $A$  爲此軌道之始點，與  $S$  相當。 $TC$  爲由物體至中心點  $C$  之線， $TG$  爲其一部分且與使物體傾向中心的力相比。 $TM$  爲一與曲面相垂直的線，其上一部分  $TJ$  與壓力相比，此壓力即爲物體所施於曲面以及曲面所施於物體者。又， $PHTF$  爲一與軸相平行的線，經過

物體之本身， $GF$  與  $JH$  則爲由  $G, J$  垂於此線上之垂線。

今所欲證者，是  $OP$  半徑自開始運動起所作之面  $AOP$  與時間相比。

按定律系 2，我們可將  $TG$  力析成爲  $TF, FG$  二支力，並將  $TJ$  力析成爲  $TH$  及  $JH$  二支力。 $TF$  及  $TH$  二力沿  $PF$  線生作用，此線係垂直於  $AOP$  平面上，故對於物體之運動，祇能在此方向內影響之。但對於物體在該平面內之運動，則此二力  $TF, TH$  完全無關，與沒有此二者而單爲  $FG, HJ$  所推動一樣。所以此種狀況，與一其他狀況完全一樣，即是，物體在  $AOP$  平面內受一向心力之作用作一曲線  $AP$ ，此向心力傾向中心  $O$  且等於  $FG, HJ$  二力之和。按 § 13. 即可知所作之面  $AOP$  與時間相比。

此卽所欲證者。

系。用此方法尙可證明以下之理：倘物體受力之推動，此項力傾向  $CO$  線上之若干中心點，物體

則在無阻的空間內作曲線  $ST$ ；如是， $AOP$  面即恆與時間相比。

§ 97. 問題。 假定我們能求曲線形之面積。已知者為向一固定心的向心力之定律，以及一曲面，其軸經過該心。倘一物體由一已知的點以一定的速度向一定的方向在面上出發，則可於此作一曲線；今欲求此線。

用一與前節相同的作法，則可知物體  $T$  由  $S$  出發在所欲求的軌道  $STQR$  上進行，此軌道在  $BOL$  平面內之蹤跡為  $AP$  曲線。由  $SC$  高之已知速度可求得一任何高  $TU$  之速度，以此，物體於一極短的已知的時間內作出其軌道之極小部分  $Tt$ ，其  $AOP$  平面內之蹤跡為  $Pp$  線。今作  $Op$  線。又設以  $T$  為心  $Tt$  為半徑所作的小圓，在  $AOP$  平面上之橢圓的投影為小橢圓  $pQ$ 。因小圓與軸之距離  $TN=PO$  為已知，故該橢圓之形狀與大小為已知，其與  $PO$  之相對位置亦已知。又因  $POp$  面與時間相比，故時間已知則此面亦可求得，所以

---

$\angle POp$  及  $Op$  之位置可推得，而由此又可得其與橢圓之共同交點  $p$  以及  $\angle OPp$ ，此角即為  $APp$  軌道與  $OP$  線之交角。於是可用 § 81 內之法以求得  $APp$  軌道本身。在軌道上之各點作垂線  $PT$ ，與曲面相交於  $T$ ，即可求得所欲求的軌道上之各點  $T$ 。

## 第十一章 論球形物體之 運動其間有向心力互相吸引

以前所論者，是傾向中心的物體之運動，此項中心係靜止不動的；在自然界中此種狀況實可說不會有。蓋物體固可受引力之吸引，但按第三定律吸引與被吸引的物體之作用恆為相互間的，而且恆相等，故吸引者與被吸引者二者均不能靜止；倘祇有二個，則此二者必按定律系 4 以共同的重心為心，環之而轉。倘有多數物體，其間祇有一個吸引其他一切或相互間均相吸引，則此項物體必如是運動，其共同的重心或則靜止或則以等速作直線運動。在這個基礎上，我將繼續說明物體之運動，此項物體均相互吸引；於此，我將向心力視為吸引，雖然我們用物理學上的語言時，或者應當說是推撞 (*Anstoss*) 較妥。我們現在是在數學的範圍

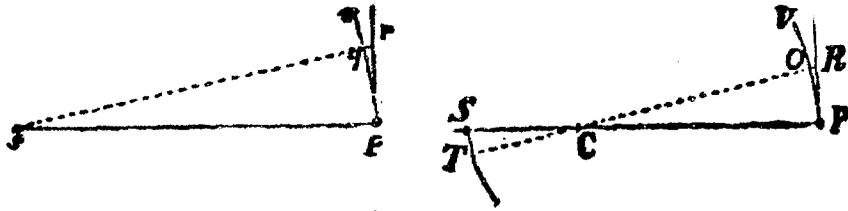
內從事，所以我們可放開物理上的爭論，應用我們所習慣的名稱，俾我們的意思更易為有數學知識的讀者所易解。

§ 98. 定理。 互相吸引的物體，一面以共同的重心為中心，一面交互的以一物體為中心，作出相似的圖形。

離重心之遠相比，猶如物體相比之反，所以此項距離之間以及與二物體本身之距離間均有一定之比。此項距離可繞其共同的一端，以相等的角運動旋轉，因在直距離內之二物體，其相互的傾向不變。但相互間有一定比的直線，以其端以相等的角運動旋轉時，其所作之圖形必相似。所以由此項距離旋轉而成的圖形為相似的。

此即所欲證者。

§ 99. 定理。 倘二物體以某種力互相吸引，並繞其共同的重心旋轉，則可以此種力，以一視為固定的物體作中心，作一圖形，此圖形與二物體在前所述之運動下作出者相合。



第一百圖

今設  $S$  與  $P$  二物體以共同的重心  $C$  環繞運動，其方向為由  $S$  至  $T$  及由  $P$  至  $Q$ 。由已知的點

$s$  作  $sp$  與  $SP$  相等並相平行，

$sq$  與  $TQ$  相等並相平行，

如是，則  $p$  點繞固定點  $s$  時所作之曲線  $pqv$ ，與一其他曲線相等相似，此曲線即為物體  $S, P$  互相環繞而作出者。又按 § 98，該曲線並與  $ST, PQV$  二曲線相似，此二曲線即為該二物體環繞其共同的重心時所作者。因  $SC, CP$  及  $SP$  或  $sp$  諸線相互間之比為已知，故必如此；而共同的重心或則靜止着，或則以等速在直線上進行。今設

第一事。該重心靜止着。 $s$  及  $p$  處有二物體， $s$  處的為靜止的， $p$  處的則為運動者，此二者與  $S, P$  二物體相等相似。設  $PR$  及  $pr$  與曲線

$PQ, pq$  相切於  $P$  及  $p$ , 並將  $CQ, sq$  引長至  $R$  及  $r$ .

因  $CPRQ \sim sprq$ ,

故有  $RQ : rq = CP : sp$ ;

所以前二者之比為常數並為已知者。

又如使物體  $P$  傾向物體  $S$  (因而亦傾向其中間的重心  $C$ ) 的力, 與使物體  $p$  傾向  $s$  的力相比亦為該已知的比, 則在相等的時間內, 此項力恆使物體由切線  $PR, pr$  傾向  $PQ, pq$  弧. 第二力之作用, 則使物體  $p$  在曲線  $pqv$  上進行, 此曲線與一其他曲線  $PQV$  (物體  $P$  以第一力之作用在此曲線上運動) 相似, 而其環繞時間則亦相同. 不過該項力相比, 不等於

$$CP : sp,$$

而為相等 (因  $S \cong s, P \cong p, SP = sp$ ). 所以二物體在等時間內離切線之度相等.

因第二物體  $p$  所經過的空間  $rq$  較大, 故其所須時間亦較多, 其比則為空間之平方根, 因按 § 10, 在開始時候所作的道路, 其比猶如時間之平

方。所以我們可假定，物體  $p$  之速度與物體  $P$  者相比，如

$$\sqrt{sp} : \sqrt{CP},$$

俾於時間段內(其比與此相同)，作成  $PQ, pq$  弧時，

其比如

$$CP : sp.$$

如是則物體  $P$  與  $p$  恆被相等的力所吸引，以靜止的中心  $C$  與  $s$  為心，作出相似的圖形  $PQV, pqv$ 。在此二圖形中， $pqv$  與一其他圖形相合，該圖形即為物體  $P$  繞動的物體  $S$  作成者。此即所欲證者。

第二事。我們假定該共同的重心，與(物體在其內運動的)空間同時作等速的直線進行；如是，則按定律系 6，該空間內之一切運動均與前無異，所以物體相互環繞而作成之圖形亦仍如前，故仍與  $pqv$  圖形相合。此亦即所欲證者。

系 1. 由此可知，如二物體互相吸引，其力與二物體之距離相比，則此二物體即環繞其共同重心及互相環繞作成同心的橢圓。反之，倘所作圖形如是，則力亦必與距離相比。

系 2. 又如該項力與距離之平方成反比，則二

物體環繞其共同重心及互相環繞作成圓錐曲線，其一焦點在圖形所繞的力之中心。反之，倘所作之圖形如是，則該項力亦必與距離之平方成反比。

系 3. 二任何物體繞其共同的重心運動時，其向重心及連結二物體之方向半徑，作出與時間相比的面積。

§ 100. 定理. 環繞共同重心  $C$  的兩個物體  $S$ ,  $P$  之環繞時間，與二物體中其一（例如  $P$ ）物體環繞其他物體之時間相比，如

$$\sqrt{S} : \sqrt{S+P};$$

於此， $P$  所作之軌道，與二物體互相環繞所作之圖形相合。

按以上所證明之理，作成相似弧  $PQ, pq$  之時間，其相比如

$$\sqrt{CP} : \sqrt{SP} = \sqrt{CP} : \sqrt{sp},$$

即是，如

$$\sqrt{S} : \sqrt{S+P}.$$

將此項比相加，即可知作成整個相似圖形的

時間，其比亦是如此。此即所欲證者。

§ 101. 定理。二物體互相吸引，其力與其距離之平方成反比，此二物體並環繞其共同重心運動。如是則二物體中其一物體  $P$ ，在此項運動中環繞其他物體  $S$  所作之橢圓，其大軸與一其他橢圓（此橢圓為  $P$  環繞靜止的  $S$  時於同時間內所可作成者）之大軸相比，如

$$\sqrt[3]{S+P} : \sqrt[3]{S}.$$

蓋如所作的二橢圓相等，則按前節其環繞時間相比，如

$$\sqrt{S} : \sqrt{S+P}.$$

今用  $T$  與  $t$  表此項時間，用  $A$  與  $a$  表大軸，則於  $A=a$  時，有

$$(1) \quad T : t = \sqrt{S} : \sqrt{S+P}.$$

將第二橢圓之環繞時間減少之，以

$$\sqrt{S+P} : \sqrt{S}$$

為度，並設如是所有之環繞時間為  $t'$ ，俾

$$(2) \quad t : t' = \sqrt{S+P} : \sqrt{S},$$

則按 (1), 卽有

$$T = t'.$$

今以  $a'$  表第二橢圓之新軸, 則按 § 35, 有

$$a : a' = t^{\frac{2}{3}} : t'^{\frac{2}{3}} = (S+P)^{\frac{1}{3}} : S^{\frac{1}{3}},$$

而因  $a' = A$ , 有

$$(3) \quad a : A = \sqrt[3]{S+P} : \sqrt[3]{S}.$$

此卽所欲證者。

§ 102. 定理. 二物體以某種力互相吸引, 其運動爲任意的, 不受其他方面之推動或阻滯. 在這種狀況下, 物體之運動方式, 一若相互間並不吸引, 但爲一第三物體所吸引者然; 此第三物體在二物體之共同重心處. 對於此項吸引力, 就物體之相互距離及其與共同重心之距離而言, 其適用的定律相同.

二物體相互吸引的力, 係向物體本身, 因而亦向在其中間的共同重心. 所以其作用, 猶如由一在其間的物體出發的一樣.

又, 一物體與共同重心之距離, 與二物相互距

離之比爲已知，故前者之任何次方與後者同次方之比可以求得，前者與任何已知數量之結合與後者之同數量同方法的結合之比亦可求得。

所以一物體被他物體所吸引的力，倘其比如二物體距離之正或反，或如該距離之任何次方之正或反，或如其與任何已知數之結合之正或反，則使物體向共同重心的力，其比亦如該物體與該重心之距離之正或反，或如此距離之某次方（方數與前同），或如其與某項已知數之結合（此項已知數與前相類，其結合法亦相似）之正或反。故對於二種距離，吸引力所適用的定律均相同。

此即所欲證者。

§ 103. 問題。 二物體互相吸引，其力與二物體間距離之平方成反比，今由某二個已知的處所將此二物體放出之，試求其運動。

按前節所已證明者，可知此二物體之運動方式，一若被一第三物體所吸引者然；此第三物體在二物體之共同重心。因爲在開始運動時候此重心

係靜止的，故按定律系 4，此重心必恆靜止着。所以欲求此相互吸引的二物體之運動時，祇須將二物體視為被某項力所推動，此項力則向着該重心者便得。

§ 104. 問題。 二物體互相吸引，其力與二物體間距離之平方成反比；此二物體由已知的處所，向一定的方向以一定的速度出發；今欲求其運動。

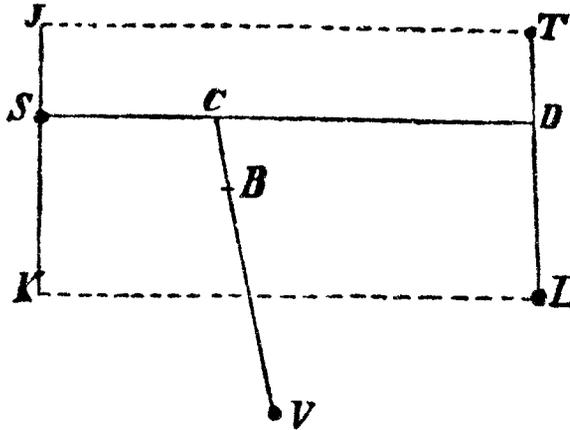
由物體開始時之已知運動，我們可求得其共同重心之等速運動，以及空間與該重心之同時的等速直線運動，並可知物體對於該空間之開始的運動。以下該空間內之運動，則其方式猶如後者本身與該重心均靜止着，物體相互間並無吸引力，但被一第三物體所吸引，此第三物體則在共同重心處。此二物體中其一物體在該動的空間內之運動，因其由一定的處所，向一定的方向，以一定的速度出發並被一向重心的力所影響，故可按 §§ 37, 77 求之；於是同時即可求得該其他物體之運動。以前所得者，須將其與此運動結合；而前者則於該空間

及其中之物體所合成的系統方面適用。如是，即可求得物體在不動的空間中之絕對運動。

§ 105. 問題。 諸物體互相吸引的力，與物體離



第一〇一圖



第一〇二圖

重心之距相比；今欲求諸物體本身間之運動。

試先取  $T, L$  二物體，其共同的重心為  $D$ 。按 § 99 系 1，此二物體所作之軌道為橢圓，其中心點在  $D$ ，其大小可自 § 27 求之。

今有一第三物體  $S$ ，對於前二者施以吸引並使其加速，其力為  $ST, SL$ ；同時，此物體本身亦被前二物體所吸引。試將  $ST$  力析為  $SD, DT$  二支力，並將  $SL$  析為  $SD, DL$  二力。 $DT$  與  $DL$  二力

與其和相比，故與加速的力相比； $T, L$  二物體即以此互相吸引。今將此二力加於  $T, L$  二物體之力上（前者加於前者，後者加於後者），則所得之力與  $DT, DL$  距離相比，但較之以前為大了。所以其作用則使物體仍如前作出橢圓，但其速度則增加。其餘的力  $SD, SD$  與（與物體相比的）運動力

$$SD \cdot T, SD \cdot L$$

一同吸引物體，其所循方向為  $JT, KL$  二線；此二線均與  $SD$  相平行，故對於物體之相互位置並無影響，惟能使二物體等齊的與  $JK$  線接近，此  $JK$  線係經過物體  $S$  之中心，並與  $SD$  相垂直者。欲使其不能與  $JK$  線接近，則須使  $T, L$  二物體以及  $S$  物體以相當的速度環繞共同重心  $C$  運行。如是， $S$  即繞  $C$  作一橢圓， $D$  作一相似的橢圓， $T$  與  $L$  二物體則以  $SD \cdot T, SD \cdot L$  之作用環繞動的點  $D$  作成橢圓如前。

今再加入一第四物體  $V$ ，則用相似的推論法可知此物體與  $C$  點環繞共同的重心  $B$  作成橢圓；

$T, L, S$  諸物體於此仍保持其環繞  $D, C$  之運動，但其速度則較大。用此項方法，尚可加入許多物體。

$T, L$  二物體間之吸引雖可較大或較小（按距離之比例，此二物體之互相吸引力可較其他諸物體為大或小），但其關係仍如此。倘諸物體間之相互吸引，其比如連結吸引物體之距離，則由以前所證明之定理中，可知諸物體於相等的環繞時間內，以諸物體之共同重心  $B$  為中心，作成不同的橢圓，且均在一平面內。

§ 106. 定理。 有若干物體，其力隨着離重心之遠之平方而減少，則此項物體可很近似的在橢圓內運動，其向橢圓焦點的方向半徑所作之面積，很近似的與時間相比。

前節內所證明者，係正確的橢圓內之若干運動。倘力之定律與前所述者相去愈遠，則物體對於其運動上之變動亦愈甚，故在此處所假定的相互吸引定律下，祇有物體之相互距離間保有一定的

比例，纔能在正確的橢圓內運動。在以下諸事內，軌道與橢圓之相差甚微。

第一事。 今設有若干小的物體環繞一大的物體運動，其距離不等，向着各個物體有絕對的力生作用，此項力與各個物體爲比較的。因諸物體之共同重心或則靜止着或則以等速運動在直線上進行，故可假定該項小物體如是之小，俾大物體與該共同重心之距離甚微，簡直不能分別。於是大物體可視爲靜止的或以等速作直線運動者，而小物體則環繞大物體在橢圓內運動，其向大物體所作之方向半徑，作成與時間相比的面積；不過在這裏，我們係假定大物體與共同重心之距離及小物體間之相互作用，不致發生什麼影響於運動上。我們可將小物體如是縮小之，使該距離及小物體間之相互作用小至於任何已知小的數量，並使其軌道之面積與橢圓之面積相等。如是則面積即與時間相當，其差可小於任何小的已知數量。

第二事。 我們試設想一系統，含有若干小物

體，按以前所述的方式，環繞一極大的物體運動；又設想一其他系統，爲二物體所成，此二物體相互環繞，但此系統則等速的在直線上進行，並被一極大但距離很遠的物體之力所影響，使其向側進行。因爲在平行的線上推動物體的相等的力，不能改變物體相互間之位置，但能使物體所成的整個系統，在保持其各部相互間之運動下，向前進行，所以傾向此極大物體的引吸力，不能使被吸引的物體相互間之運動有所改變，除非該項吸引有所偏畸，或平行的線有所傾斜。

因此，我們可假定一切加速的吸引力（傾向該極大物體的吸引），與距離該物體之遠之平方成反比，並將該距離如是放大之，使由該物體至各物體之線，其差及其互相傾向之度小於任何可知之數。如是則系統內各部分間之運動仍保存着，其差小於任何小的已知數。又因各部分間之距離甚小，故整個的系統之被吸引，猶如一個物體然，而其運動亦即如一個物體之運動，即是，此系統之重心環繞

該大物體作一圓錐曲線(倘吸引弱,則爲一雙曲線或拋物線,吸引強時即爲橢圓)。其向大物體所作的方向半徑,則作成與時間相比的面積,其所能發生的差率,不能超過部分間之距離所引起者(此項差率甚微,並可任意減小之)。

用同樣的方法,可將各種複合的事項研究,以至於無限。

系 1. 在以上之第二事項內,大物體與二物體或多物體所成之系統愈接近,則系統內各部分間運動之失調愈甚,因爲由各部分至大物體所作各線間之相傾較大而且不能相等了。

系 2. 但如假定系統內各部分傾向大物體的吸引不與距離之平方成反比,則各部分間運動之失調即更甚,尤其是,當此項力之參差不等較之各距離之不等更大時,失調特爲利害。

蓋如該項力能使物體間之運動失調,則由不等的作用上,必然發生一種失調,其大小隨該項作用之大小而異。較大的諸動力之盈餘,能作用於若



間相比的面積並作一圖形；倘大物體由此項吸引所推動，一若不受小物體所吸引而靜止者然，則該圖形與橢圓甚相近，而此橢圓之焦點則在半徑之交點。

此事實不難由 § 106 系 2 以知之；但亦可用某種較廣的證法以證明其理。

第一事。小物體  $P, Q$  與大物體  $S$  同在一平面內，而且  $P$  的軌道  $PAB$  較在內， $Q$  的軌道  $EQE$  則較在外。今設  $P$  與  $Q$  的平均距離為  $QK$ ， $P$  傾向  $Q$  的吸引力，在此平均距離上亦即以此線表之。試取

$$QL : QK = QK^2 : QP^2,$$

則  $QL$  所表者為  $P$  傾向  $Q$  之  $QP$  距離內的吸引。今作  $PS$ ，並作

$$LM \text{ 與 } PS \text{ 相平行，}$$

而且  $LM$  與  $QS$  之引長相交於  $M$ ，如是則  $QL$  吸引力（按定律系 2）可析成爲  $QM$  與  $LM$  二者。

如是，物體  $P$  爲一三重的吸引力所推動，其

中之一係向着  $S$  而由  $S$  與  $P$  二物體之互相吸引所發生。單由後者之力所推動時， $P$  必須繞  $S$  ( $S$  或則不動或則因此項吸引力之推動而前進) 作成與時間相比的面積以及橢圓，而此橢圓之焦點則在  $S$  點。此可由 § 29, § 99 系 2, 3 以知之。

其第二力係  $LM$ 。此力之方向係由  $P$  向  $S$ ，故與前所述之力同向，可相加之。按 § 99 系 3 可知其作用亦在作成與時間相比的面積。但因其不與距離  $PS$  之平方成反比，故與第一力相結合時得一新力；倘  $LM$  力與第一力之比愈大，則此新力與該比例之相差愈甚。又按 § 33 系 1, § 99 系 2，使物體環繞焦點  $S$  作成橢圓的力係傾向該點，且必與  $PS$  距離之平方成反比，故該項新力既與該比例不相當，其作用必使所作的軌道  $PAB$  與焦點在  $S$  的橢圓相差。倘該力與該比例之相差愈大，則軌道之去橢圓亦愈甚。又因第三力  $QM$  之吸引物體，係沿着與  $QS$  相平行的線，故其與前二力相結合而得的新力，不再由  $P$  向  $S$ ，而且第三力與

前二者之比愈大，則其去此方向亦愈遠。此力之作用，使物體  $P$  之方向半徑所作之面積不再與時間相比，而且與前相同，第三力與前二者之比愈大，則此項相差亦愈遠。 $PAB$  軌道之去上述的橢圓，因此第三力之影響而愈甚，其理由有二，一因其不由  $P$  向  $S$ ，一因其不與距離  $PS$  之平方成反比。倘第三力儘可能的小，其餘二力不變，則所作之面積亦能儘與時間相比。倘第二力與第三力，尤其是第三力儘量的小，第一力不變，則  $PAB$  軌道亦能與前述的橢圓儘相接近。

物體  $S$  傾向  $Q$  的吸引力可用  $QN$  線以表之。假如吸引力  $QM$  與  $QN$  相等，則因其在相平行的線上同等的吸引物體  $S$  及  $P$ ，故於二物體之相互位置上不能有若何影響。按定律系 6，物體之運動仍照常前進，一若未受該項力之作用者然。倘  $QN$  較之  $QM$  為小，則其一部分  $QN$  被抵消，所餘者祇有  $MN$ ，此部分即使時間與面積之相比以及軌道之橢圓形式失調。又如  $QN$  較  $QM$  為大，則亦

如此，祇有其差  $MN$  使比例性及軌道失調。

由此，以前所提的第三力  $QM$  恆因  $QN$  而減為  $MN$ ，而第一第二兩吸引則不變。倘  $MN=0$  或儘量的小，則面積與時間之相比性，以及軌道之橢圓形式亦儘量的接近。祇須  $P, S$  傾向  $Q$  之吸引儘可能的相等，即是， $QN$  不等於 0，而且較之  $QM$  中之最小者不更小，但在最大的  $QM$  及最小的  $QM$  之中間，亦即是，較之  $QK$  不過大或過小，則即得上述之事項。此亦即所欲證者。

第二事。今設小物體  $P$  與  $Q$  環繞大物體於不同的平面內旋轉，則  $LM$  仍在  $APB$  軌道的平面內之  $PS$  線上生作用，其效果一如以前，不能使物體  $P$  出離其軌道之平面。其他的力  $MN$  則在與  $QS$  相平行的線上生作用，故除了以前說過的長的方面之失調作用外，兼在寬的方面亦發生此項影響，因為此力使物體  $P$  出離其軌道的平面。不問  $P$  與  $S$  之位置如何，此項失調恆與  $MN$  力相比，故如  $MN$  極小則此失調亦極小，或亦可說，

如  $QN$  較之  $QK$  不過大或過小，則失調之程度亦即甚小。即此所證者。

系 1. 由此可知，倘有多個小物體  $P, Q, R,$  等環繞大物體  $S$  運動，則在最裏面的物體  $P$  之運動不致因在其外的物體之吸引而有大的失調，祇須該大物體  $S$  之被其他物體所吸引及推動，其強度與諸物體間之互相吸引相同便可。

系 2. 今有一系統為三物體所成，倘其中之任何二者對於第三者之吸引與距離之平方成反比，此三物體為  $P, Q, S,$  則  $P$  之方向半徑  $PS,$  在  $A, B$  之附近作成面積所須之時間較短，在  $C, D$  之附近較長。

蓋因對於  $P$  生作用，但不能影響  $S$  的力，不在  $PS$  線上生作用，故能使面積之作成加速或緩遲，至其分別則在該力之作用於運動方向，在其前或後而定。 $NM$  即為此項力之一。在  $P$  由  $C$  至  $A$  時，此力之作用與運動同向，故使其加速；但由  $A$  至  $D$  時，則在與運動相反之方向內生作用，故使

運動遲緩；由  $D$  至  $B$  時亦加速，由  $B$  至  $C$  時則亦遲緩。

系 3. 由同法，我們可以知道，在一切均仍舊的狀況下， $A, B$  處之運動，較  $C, D$  處之運動為速。

系 4. 在一切其他均如常的狀況下，物體  $P$  之軌道在  $C, D$  處之曲率較強， $A, B$  處之曲率較弱，因為物體運動速時，其離直線方向之度即較弱。此外， $KL$  或  $NM$  力在  $A, B$  處，與  $S$  吸引  $P$  的力相反，故能使後者之力減小。但  $P$  之傾向  $S$  既弱，則其離直線之度亦愈弱。

系 5. 在一切其他均如常的狀況下，物體  $P$  在  $C, D$  處離  $S$  較遠，在  $A, B$  處離  $S$  較近。除了偏心的運動以外，恆是如此。

蓋如物體  $P$  之軌道為偏心的，則當回歸點落在對衝點 (*Syzygien*) 時，其偏心率即為最大。所以物體  $P$  到上回歸點時，在該處與  $S$  相距較之在  $C, D$  處與  $S$  相距為遠。

系 6. 使物體  $P$  不能出離其軌道的中心物體

$S$  之向心力, 在  $C, D$  處因  $LM$  力之補充故增大, 在對衝點則因  $KL$  之抵消故減小, 且因  $KL$  力之大, 故減小較之增加為多. 按 § 18 系 2, 該項向心力之比, 如  $SP$  半徑之正, 如環繞時間之反. 所以此複合的比例, 能為  $KL$  之作用所減小, 而在  $SP$  半徑不變的狀況下, 環繞時間隨該項減小而增加, 以其平方根為度. 倘此半徑增大或減小, 則環繞時間之增加, 其比大於  $R^{\frac{3}{2}}$ , 或則以一比例減小, 此比例小於  $R^{\frac{3}{2}}$ . 如中心物體之力稍減, 則物體  $P$  之被吸引即稍弱, 其與中心  $S$  之距離亦即較遠. 反之, 倘力增加, 則其與中心之距離亦即逼近. 所以能使該項力減小的  $Q$  之效率, 如交互的增加或減小, 則  $SP$  半徑亦即同時增加或減小, 同樣為交互的, 而環繞時間亦隨之增加或減小, 其比為半徑之  $\frac{3}{2}$  次方與增加或減小的平方根之組合, 此增加或減小亦即為中心物體  $S$  受  $Q$  之增加的或減小的影響而發生者.

系 7. 由以上所明, 並可知物體  $P$  所作的橢圓

之回歸線必交互的前移或後退；但其前移之度較爲強，故在物體之環繞中，此線以物體運動之方向前進。

蓋因使物體  $P$  於  $C, D$  處傾向物體  $S$  的力，是由  $LM$  力與  $S$  對於  $P$  之向心力所合成。 $LM$  力當距離  $PS$  增大時差不多以同比增加，但第二力則以其平方爲比而減小，所以二者之和，仍是減小，惟其比則小於平方，因而其作用能使上回歸點向後退。在  $A, B$  處使物體  $P$  傾向  $S$  的力，等於由  $S$  至  $P$  的向心力與  $KL$  力之差，而因  $KL$  差不多以同比與  $PS$  一同增加，故此差之減小，其比大於  $PS$  之平方，其結果使上回歸點向前運動。在對衝點與  $C, D$  之中間處，回歸點之運動與二個理由有關，故隨着其一理由或其他之較有力，回歸點本身即向前或向後運動。因  $KL$  力在對衝點較之  $C, D$  處之  $LM$  約大一倍，故在一整個的環繞內  $KL$  較有力量，而其結果使上回歸點向前進。

我們如設想一二物體  $S, P$  所成的系統，爲

$EQE$  軌道上若干物體所包圍，則本節與前節之理，更易明白了。蓋因後者之作用，物體  $S$  之力即大為減小，其比較之距離之平方為大。

系 8. 回歸點之前進或後退與以下之事實有關，即當物體由下回歸點至上回歸點時，向心力之減小，其比大於或小於距離  $SP$  之平方，而當物體回至下回歸點時，則與其相似的增加有關。所以，倘上回歸點之力與下回歸點之力相比，儘可能的與距離之平方之反比相差，則其前進或後退亦即最大。很明顯的，回歸點在對衝點時，因

$$KL = NM - ML$$

之作用，故較速的前進，而在  $C, D$  時則因  $LM$  之作用，因而較遲的後退。又因較速的向前與較遲的向後有一較長時間的繼續，故此項不等能很明顯的表現出來。

系 9. 設有任何一物體受某種力之作用，在一橢圓內運動，此力則與物體離心之遠之平方成反比；倘由上回歸點至下回歸點時，該力恆增加，且

其比較之距離之平方爲大，則因該物體受增加的力之作用，故與中心更相接近，較之僅受一力（此力以距離之平方爲比增加）之推動尤甚。其所作之軌道，在橢圓之內面，而在下回歸點較之以前更與中心相接近。所以新的力增加時，軌道之偏心率亦更大。倘物體由下回歸點復回至上回歸點時，該力逐漸減小，其程度與以前之增加相同，則其距離亦恢復以前之狀；假如其減小之度較大，其距離亦即因吸引力之減小而較遠，軌道之偏心率因之亦更大了。所以在各個環繞內，力之增加與其減小之比如增加，則偏心率亦增大，反之，倘該比減小，偏心率亦即減小。

在  $S, P, Q$  三物體所成的系統內，倘其回歸點 ( $PAB$  軌道之回歸點) 在  $C, D$  點，則該項增加與減小之比爲最小；反之，倘回歸點在對衝點，則其比爲最大。試設想回歸點在  $C, D$  點，則該比於回歸點之附近較之距離之平方爲小，而於對衝點之附近，較其爲大；由較大的比，可知上回歸點之直接

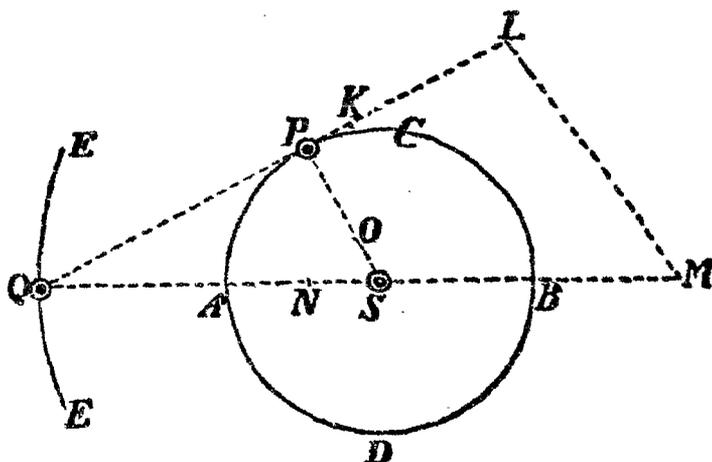
運動，此亦為前所說過者。試研究回歸點間運動時之整個的增加與減小之比，即可知此比較之距離之平方為小。下回歸點之力，其比小於一其他比，此比由上回歸點距橢圓焦點之遠之平方與下回歸點距該點之遠之平方所成。試另設想回歸點在對衝點，則下回歸點之力與上回歸點之力相比，其率大於距離之平方。因為  $LM$  在  $C, D$  點時與  $S$  之力相加後，得一合力，其比較小。反之，對衝點之力  $QL$  由  $S$  之力減去後得一新力，其比較大。所以在回歸點中間的運動方面，整個的增加與減小之比，於  $C, D$  點為最小，於對衝點為最大。當回歸點由  $C, D$  轉移至對衝點時；此比恆增加，因而橢圓之偏心率亦增加；反之由對衝點至  $C, D$  時，該比與偏心率均減小。

系 10. 為研究寬的方面失調之比，我們可設想， $QES$  軌道之平面為靜止不動的。由以前所說明的失調之原因，可以知道，使失調發生的  $NM$ ,  $NL$  二力中，後者之作用恆在  $PAB$  平面內，故對

於寬的方面之運動，全無影響。反之，倘黃道交切點落在對衝點，則  $NM$  亦在該平面內生作用，故亦不生失調影響。但如黃道交切點落在  $C, D$  處，則此力對於運動之失調作用為最甚，而且此力使物體  $P$  恆出離其軌道之平面，故能減小物體由  $C, D$  至對衝點時之平面的傾斜，反之，當物體由對衝點至  $C, D$  時，兼能使傾斜增加。倘物體在對衝點，傾斜於是成為最小，而當物體達到其次的黃道交切點時，該傾斜亦即恢復其原來的大小。今如將黃道交切點置於  $C$  與  $A, D$  與  $B$  之間，則由以上之說明，可知物體由其一黃道交切點轉至離此  $90^\circ$  時，傾斜恆減小，再經  $45^\circ$  時又增加，於是又復減小，至次一黃道交切點為止。所以減小之度恆較之增加為甚，而在以下的黃道交切點恆較之在以前的為小。反之亦可知倘黃道交切點在  $A$  與  $D, B$  與  $C$  之間，則傾斜之增加多於減小；而如交切點在對衝點時，傾斜即為最大。當交切點由對衝點至  $C, D$  時，物體經過各個的交切點之際，傾斜

即減小；但最小的，是交切點在  $C, D$  處物體則在對衝點。自此以下，傾斜重復增加，其度與其以前之減小一樣，而當交切點達到次對衝點時，仍復其原來之大小。

系 11. 倘黃道交切點落在  $C, D$  點，則物體  $P$  恆被吸引而出離其軌道之平面，且當其由  $C$  經過  $A$  向  $D$  運動時，物體恆向  $Q$  的一面傾向；反之，倘運動由  $D$  經過  $B$  至  $C$ ，則即向其相反之面被吸引。當物體由  $C$  運動時，一直至  $D$  為止，物體



第一〇四圖

恆出離其軌道之平面  $CD$ ，而因其在此點與  $CD$  平面相離最遠，故物體經過  $QES$  軌道之平面，不

在該平面內之其他交切點，而在一其他點，此點稍傾向  $Q$ ，且爲交切點之新的較在後的處所。在物體由一至其他時，交切點以同樣的方法後退。故如我們設想黃道交切點在  $C, D$  處，則恆退後；在對衝點時靜止着，在中間的處所則因二者兼而有之，故緩緩的向後，所以在各個環繞中，或則後退，或則緩緩的向後移動。

系 12. 此處所述之一切運動，均於  $A$  點爲較大，於  $B$  點爲較小，其原因則因  $NM$  與  $ML$  爲較大。

系 13. 因此處各系內所說明的狀況與物體  $Q$  之大小無關，故如將此物體放大，使  $S$  與  $P$  均繞之運行，以上所證明者亦均可適用不變。倘將  $Q$  並其向心力放大，則此項一切，在相同的距離下，均將較以前  $Q$  繞  $S, P$  時爲大。

系 14. 倘  $Q$  與  $S$  相距甚遠，則  $NM$  與  $ML$  二力，很接近的與  $QK$  及  $PS : QS$  之組合相比。

所以倘  $PS$  距離以及  $Q$  之絕對力爲常數，則

此項力與  $QS^3$   
成反比。

但如前各系內所已說明者， $NM$  與  $ML$  二力實為引起一切失調及作用之原因，故如  $S, P$  仍舊，祇有  $SQ$  距離及  $Q$  之絕對力改變，則該項一切作用之比均將很近似的如

$Q$  之絕對力之正，  
 $QS$  距離之三次方之反。

倘  $S$  與  $P$  所成之系統繞很遠的物體  $Q$  運動，則該項力  $NM, ML$  及其作用，其比如環繞時間之平方之反。所以倘  $Q$  之大小與其絕對力相比，則  $NM, ML$  二力以及其作用，其比如遠處物體  $Q$  之徑之三方，惟此徑係由  $S$  出發望  $Q$  時所得者，故不必符於事實；反之亦然。此比是與以前之比相同者。

系 15. 今如軌道  $EQE, PAB$  之相互傾向，形狀，及比例均不變，祇變其大小。 $Q, S$  之力或則不變，或則按照一定的比例稍變，則此項力之作用仍

如舊，其比例亦仍不變。所必須者是一切作用均相似相比，且其所須時間亦為相比的；此即是說，一切直線的失調，其比如軌道之徑，角的失調與前相同，相似的直線失調或相等的角失調，其時間與整個軌道之環繞時間相比。

系 16. 所以，倘軌道之相互傾向及形狀為已知，而且可用某種方法將大小，力，及距離改變之，則可由某種狀況下之已知的失調及其所需時間，以推知任何他種狀況下之失調及時間，其差失不致很大。用以下之方法較為簡單。

倘一切其他均不變，則  $NM$  與  $ML$  二力之半徑  $SP$  相比；前者之週期的影響，其比如力與  $P$  之環繞時間之平方之組合。此係  $P$  之直線的失調，其由  $S$  出發所可望見的角失調，在  $P$  之每一環繞方面，其比與環繞時間之平方甚相接近。今將此項比與系 14 中之比相結合，則在每個  $S, P, Q$  所成之系統方面（於此， $P$  繞其較近的物體  $S$  運行， $S$  則繞遠物體  $Q$  運行），對於中心  $S$  而言的  $P$

之可見的角失調，在  $P$  之各個環繞內，其比如

$P$  之環繞時間之平方之正，

$S$  之環繞時間之平方之反。

將偏心率放大或減小時，並將  $PAB$  軌道之傾斜亦放大或減小時，黃道交切點與近日點之運動不會顯著的改變。

系 17. 因  $LM$  有時大於  $PS$  有時則較之為小，故可取其平均值，且即以  $PS$  半徑表之。如是則此力與平均的力  $QK$  或  $QN$  相比，猶如  $PS$  比  $QS$  ( $QS$  即為  $QK$  或  $QN$  之平均值)。又， $QS$  為使物體  $S$  恆在其軌道內繞  $Q$  運行之力，故此力與使  $P$  繞  $S$  之力相比，猶如  $QS : PS$  以及  $P$  繞  $S$  的時間之平方與  $S$  繞  $Q$  的時間之平方相比二者之合。

仿此， $LM$  之平均力，與使物體  $P$  在其軌道內繞  $S$  運行的力相比，亦等於該項環繞時間之平方相比，所以倘環繞時間與距離  $PS$  均為已知，則平均的力  $LM$  亦即可求得，此力求得後，又可自

$PS$  與  $MN$  之比例內以求得  $MN$  力,但爲近似的。

系 18. 按照  $P$  環繞  $S$  的定律,可設想有若干流體的物體,亦環繞  $S$  運動,且其距離相等。今設此項物體互相接觸,因而發生一流體的,圓的圈環繞着  $S$ , 則其各部分之運動均按照  $P$  之定律,而與  $S$  稍接近,在  $A, B$  點運動較速,在  $C, D$  則較遲。圈與  $Q$  或  $S$  之軌道平面之交點,在對衝點時靜止着,在此外則向後退,而且在  $C, D$  時爲最速,其他點時較遲。圈之傾斜可以變動,其軸在各個環繞時擺動,但在一環繞之末仍回復其原處。

系 19. 試設想由非流體的物質所成之物體  $S$ , 漸漸的放大擴張至於此圈。此物體之週上有一溝,其中含有水,以同等的週期運動旋轉。如是,此流體即交互的加速及遲緩,在對衝點時較速,在  $C, D$  時較緩,故必在溝內流蕩,猶如海潮一般。倘水繞靜止的中心點運動,則當  $Q$  之吸引力消失時,水不會再有流蕩運動。此種狀況,在球之等速直線進

行，並同時自身旋轉上亦是如此，倘球漸漸的等速的出離其直線運動，此種狀況亦保存着（按定律，系 5, 及系 6）。

倘  $Q$  逼近，則其不等的吸引力即使水失調。逼近愈甚，則其被吸引亦愈甚，稍遠時即較弱。 $LM$  力使水在  $C, D$  點被向下吸引，一直到對衝點恆向下退，但  $KL$  力則於對衝點使水向上，因而適使向下被阻，一直到  $C, D$  點恆向上。自然，水之流蕩可為溝及摩擦所阻滯，則此又當別論。

系 20. 倘圈固定，球稍小，則流蕩的運動即消失，但傾斜的擺動以及黃道交切點之前移均保存。今設球之軸與圈之軸同，並在同時間內經過其軌道，又設球之面與圈之內環相接觸並繫於其上；如是則球參與圈之運動，而此兩體所成之系統擺動，交切點則後退。當交切點達對衝點時，圈之傾斜角為最大；交切點再前進到  $C, D$  時，此角即漸減，並因整個的球之推進，有一運動參加。此項運動，直至圈有相反的推進將前者消失時方停止，於是有

一新的運動在相反的方向內進行。當交切點達到  $C, D$  時，傾斜減小的強制力亦爲最大，傾角本身則在  $C, D$  後之階段內爲最小。過此後，傾斜又復有增加之勢，在對衝點時爲最大，而傾角本身亦於對衝點後之階級內爲最大。在沒有圈的球方面，此種道理亦適用，不過須假定球之赤道較高，其兩極略低，或亦可假定赤道之物質較密，蓋其重量之增加，亦可視爲一圈。雖然球之向心力增大時，其上一切部分猶如地球上之重物一樣，均向下傾，但前系及本系內之一切現象均不致有變動。水於是恆在其軌道內流動，不過使其不出離軌道者非爲向心力而爲溝之作用。此外， $KL = NM - LM$  一力吸引水向上，於對衝點爲最甚， $LM$  則吸其向下，於  $C, D$  點爲最甚。二力相合時能使向下被吸引停止，在對衝點之前階段時使其向上的被吸引；反之，在其後時即使其向下的被吸引。所以最大的潮，是在對衝點之後的階段內，最小的潮則在  $C, D$  之後；於此，自須假定水本身所有之力以及溝之阻力不

致會發生大的阻礙，使其受影響而變動。

系 21. 赤道上物質過多的作用，使交切點後退，故如將物質再增加，則其後退亦愈甚，減少其分量後，亦即能使後退較弱，而如繼續減少其物質，使赤道上物質較平常狀況下更少，因而赤道陷下兩極伸出，則交切點即前移。

系 22. 反之，我們亦可由交切點之移動以知球之形狀。蓋如兩極不變，而其移動向後，則必赤道之物質過多，不然，赤道即無過多量之物質。試設想一均勻的全圓的球，開始時在空間內靜止着。於是此球經一斜的撞擊而運動了，一方面以直線進行，一方面則旋轉。因為此球對於經過其中心的一切軸之關係均同，不對於某個軸有傾斜，故不會將其軸改變。今將此球再斜的撞擊一下，其方向一如前，則因撞擊之先後次序並無關係，故此二撞仍可組合成為一撞，其運動一如此一次的撞擊所產生。即使第二次撞擊落在赤道上之任何點，或第一次撞擊落在赤道上之一點，均無若何關係。

一個均勻的整圓，不會將若干不同的運動同時保存着，而將其組合成爲一單純的運動。其軌道恆爲單純的等速的運動所作成，其軸亦祇有一個，軸之傾斜亦爲已知不變者。向心力之作用，不能改變軸之傾斜亦不能改變其旋轉速度。

試設想此球爲一經過其中心點及力之方向點的平面所分割成爲二半球，則該力對於此兩半球之作用恆相等，故就旋轉運動而言，球不會有偏向。今試於兩極及赤道之間的任何處加一堆新物質，猶如山一樣，則因此堆有離心傾向，故能使球之運動失調，其結果則兩極亦運動，而且每極均繞其自己並其他極運動作成圓。欲免去此項不規則，祇有將山移至兩極中之任何一極，如是則赤道之交切點即向前移動，或亦可將山移在赤道上，則交切點即後退。尚有一第三方法亦可糾正此不規則，即是，再加一個山於軸之對面，使其對於運動上之作用相抵消。如是則交切亦必前移或後退，視山之離兩極或赤道何者較爲近而定。

§ 108. 定理. 在同前的吸引定律之假定下，物體  $Q$  對於  $S$  與  $P$  之共同重心  $O$ ，所作與時間相比的面積及以  $O$  為焦點的橢圓，較之其僅繞  $S$  所作者為正確。

$S$  與  $P$  二物體對於  $Q$  之吸引，其組合傾向於  $O$  者較之僅傾向於  $S$  者為多，故與  $QO$  之平方相比較之與  $QS$  之平方成反比為接近。此種道理當很易明白。

§ 109. 定理. 仍在以前的假定下，而如最在內並最大的物體與其他物體一樣，同為此項吸引力所推動，並不是完全未被吸引而靜止着，或其被吸引較強或較弱因而被推動亦較多或較少，則在外的物體  $Q$  繞  $O$  時所作的與時間相比之面及以  $O$  為焦點的橢圓較為正確。

此定理之證法差不多與 § 107 中之證法相同，但太冗長了，故不再贅，祇於以下略述便足。

由前節之證，可知  $Q$  所被吸引而推動的中心，與該二物體之共同重心甚相接近。倘此中心落在

共同重心處，且此三物體之共同重心靜止着，則一方面  $Q$  本身，他方面其餘二物體之共同重心，環繞此三物體之共同重心作成較正確的橢圓。此理可由 § 99 系 2，與 §§ 105, 106 諸節知之。因  $Q$  所傾向的點與其他二物體之共同重心微有差，故該項橢圓運動亦微有失調。又如三物體之共同重心非為靜止而運動，則其失調亦更甚；靜止時，此項失調即為最小。

系。倘有若干小物體環繞一極大物體運動，則由以上所證明者，可知所作的軌道之接近橢圓，以及面積作成時之均齊性，在一切物體間有力互相吸引並推動的狀況下（此項力與絕對力成正比，與距離之平方成反比），而且每個軌道之焦點在其內面的軌道之共同重心點時，較為正確（所謂焦點在共同重心點，亦即是說，第一而且最在內的軌道之焦點，在極大物體與最在內的物體之共同重心點，第二軌道之焦點，在最在內的二物體之共同重心點，第三軌道之焦點，在最在內的三物體之共同重

心點等等), 而如最在內的物體靜止着不動且爲一切軌道之共同焦點, 則較不正確。

§ 110. 定理.  $A, B, C, D$ , 等諸物體所成的系統內, 倘有其一物體  $A$  以加速的力吸引其餘一切物體(此項力與距離之平方成反比), 而且對於  $A, C, D$ , 等物體而言, 物體  $B$  亦有此屬性, 則  $A$  與  $B$  之絕對力相比, 如物體  $A$  與  $B$  本身相比。

按所設,  $B, C, D$  等對於  $A$  之吸引力, 在相等的距離下爲相等者; 各物體對於  $B$  之吸引亦然。 $A$  之絕對吸引力與  $B$  之絕對吸引力相比, 猶如一切物體對於  $A$  之吸引與一切物體對於  $B$  之吸引相比; 此二者均在相等的距離下用之。在  $B$  對於  $A$  以及  $A$  對於  $B$  之吸引方面, 亦適用此比例。但  $B$  對於  $A$  之吸引與  $A$  對於  $B$  之吸引相比, 如  $A$  之質量與  $B$  之質量相比, 因爲運動的力係由(對於被吸引的物體而言) 加速的力所成, 而爲相等者。所以  $A$  之絕對的吸引力與  $B$  之絕對的吸引力相比, 猶如  $A$  之質量與  $B$  之質量相比。此即所欲

證者。

系 1. 所以倘  $A, B, C, D$  等各個物體均能以加速的力吸引其餘一切物體，此項力與距離之平方成反比，則該項物體之絕對力相比，如該項物體之本身相比。

系 2. 倘系統內各個物體均能以加速的力吸引其餘一切物體，此項力與距離之任何次方成反比或正比，而且可按照某種共同的定律由距離以決定之，則該項物體之絕對吸引力相比，猶如前者相比。

系 3. 設有一物體所成的系統，其力隨距離之平方而減小，其中小物體環繞一極大物體在儘可能接近橢圓的軌道內運動，此項軌道之共同焦點在大物體之中心點，而且由物體至大物體所作的方向半徑，其作成的面積很接近的與時間相比，則該項物體之絕對力相比，或則正確的或則很近似的如該項物體本身相比；反之亦然。

此可由 § 109 之系與本節之系 1 以知之。

§ 111. 附註。 由此項定理，我人乃得到了中心力與中心物體間之相似處（中心物體即為中心力所傾向者）。與我們理性上所推知者一貫，該項傾向物體的力，與前者之性質大小有關，此在磁的方面亦然。此項事實既常遇到，故我們必須能估量物體之吸引力，其法在給予物體之各部分以力，然後求其總和。所謂吸引者，我此處用以廣泛的指物體間相互接近的企圖，不問此項企圖之出於物體本身抑或出於物體中間媒介物，例如以太，空氣或任何有體無體的媒介物之作用。推撞這個用語的意義，其廣泛亦略同此，蓋在這書內，我並不想論力之物理的種類及屬性，我祇想研究及其數學的量及關係而已，此則我於說明內所已經弄清楚了的。

在數學內，我們研究力之量，以及在某種假定的狀況下之力的關係。倘進入物理學的範圍，則須將此項關係與現象相較，以知某種能吸引的力有某種狀況。於是可論及力之種類以及其物理的原因與關係。

---

今試再一研究球形物體（此項物體係由上所述能吸引的部分所合成）間互相作用的力以及其所發生的運動是如何。

## 第十二章

### 論球形物體之吸引力

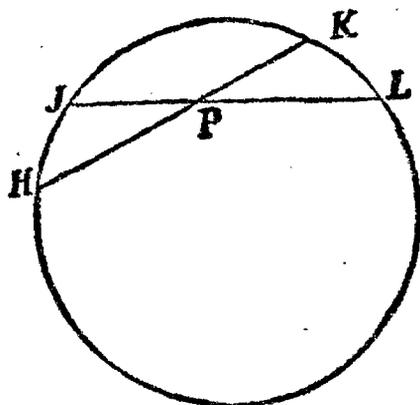
§ 112. 定理. 倘向一球面之各點作諸向心力，此項力與離點距離之平方相減小，則在球面內的小物體不會受此項力之作用而向某一方面被吸引。

今設  $HJKL$  爲此球面， $P$  爲在其內的小物體。試作  $HK, JL$  二線經過  $P$  至球面，其間函有  $HJ, KL$  二短弧。按 § 7 系 3，

$$\triangle HPJ \sim \triangle KPL,$$

故該項弧與  $HP, LP$  相比，而  $HJ, KL$  處的任

何球面部分，爲經過  $P$  的直線所界者，其相比爲

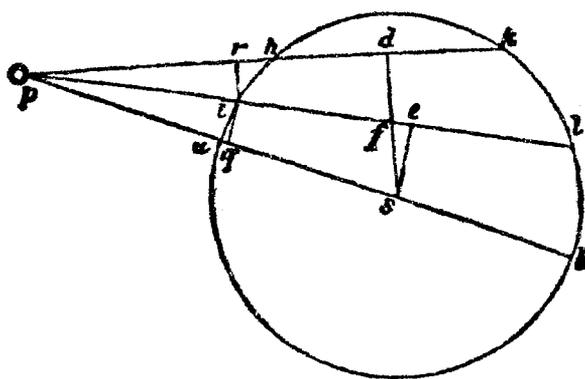


第一〇五圖

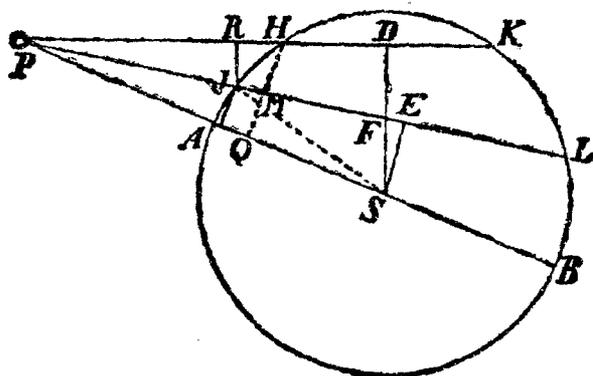
該項距離之平方相比。所以對於  $P$  生作用的該項球面部分之力，必均相等，因為此項力與部分成正比，與其距離之平方成反比，而將此二比相結合時即得一等比。緣此，向不同方向的相反吸引適相等，而互相抵消。

仿此，可知全球面上一切吸引力均有相反相等者與之抵消，故物體  $P$  不會受此項吸引之作用而向某一方面被吸引。此即所欲證者。

§ 113. 定理。 在同樣的條件下，一在球面外的小物體能為一方向球心被吸引，此力與物體離球心距離之平方成反比。



第一〇六圖



第一〇七圖

今設  $AHKB$ ,  $ahkb$  爲二個相等的球面，其中心爲  $S$ ,  $s$ ，徑爲  $AB$ ,  $ab$ 。又設  $P$  與  $p$  爲二小物體，在球外直徑之引長上。試由物體出發作  $PHK$ ,  $PJK$ ,  $PHL$ ,  $PJK$ ,  $PHL$ ,  $PJK$  諸線，與大圓  $AHB$ ,  $ahb$  相交，得所函之弧爲

$$HK, hk, JL, il.$$

試作垂線

$$SD, sd, SE, se, JR, jr$$

垂於該項線上，此垂線中之首二者與  $PL$ ,  $pl$  相交於  $F$ ,  $f$ 。又作垂線  $JQ$ ,  $iq$  垂於直徑上。

$$\text{因} \quad \left. \begin{array}{l} DS = ds \\ ES = es \end{array} \right\} (1),$$

而將成爲零的角  $DPE = dpe$ , 故可設

$$\left. \begin{array}{l} PE = pe \\ PF = pf \\ DF = df \end{array} \right\} (2),$$

蓋  $DPE$  與  $dpe$  同時等於零時, 此項線之最後比爲等比. 既設此後, 卽有

$$PJ : PF = RJ : DF$$

$$pf : pi = df : ri$$

而因  $df = DF$ , 故將此二比結合時, 得

$$\begin{aligned} PJ \cdot pf : PF \cdot pi &= RJ : ri \\ &= \sphericalangle JH : \sphericalangle ih. \end{aligned} \quad (3)$$

又,  $PJ : PS = JQ : ES$ ,

$$ps : pi = es : iq,$$

而  $es = ES$ , 故可得

$$PJ \cdot ps : PS \cdot pi = JQ : iq \quad (4).$$

又將(3)與(4)結合時, 卽得

$$\begin{aligned} PJ^2 \cdot ps \cdot pf : pi^2 \cdot PS \cdot PF \\ = JQ \cdot JH : iq \cdot ih, \end{aligned} \quad (5)$$

於此，該比之最後二項，表圓形的面，此項面爲  $JH, ih$  二弧以  $AB, ab$  爲軸旋轉半圓  $AKB, akb$  時所作成者。

按所設，該項面沿向此的線以吸引  $P, p$  的力，與

此項面成正比，

物體離後者距離之平方成反比，

此卽是說，如

$$pf \cdot ps : PF \cdot PS \quad (6).$$

又此項力與支力(此項支力係按定律系 2 所析成，沿  $PS \cdot ps$  線向中心者)相比，

如  $PJ : PQ$  以及  $pi : pq$ ,

而因  $\triangle Pjq \sim \triangle PSF$ ,

如  $PS : PF$  以及  $ps : pf$  (7).

所以  $P$  向  $S$  之吸引與  $p$  向  $s$  之吸引相比，

$$\begin{aligned} \text{如} \quad \frac{PF}{PS} \cdot pf \cdot ps &: \frac{pf}{ps} \cdot PF \cdot PS \\ &= ps^2 : PS^2 \quad (8). \end{aligned}$$

仿此可知  $KL, kl$  弧旋轉時所成成的面，其吸

引物體的力相比，如

$$ps^2 : PS^2.$$

一切圓形的面之力，其比均同此；經組合後，即知整個的球面所影響於小物體的力，其比亦同此。

§ 114. 定理。 倘向一球之各點作諸向心力，此項力與離點距離之平方相減小，同時，球之密度，以及球徑與小物體離球心之距離之比為已知，則小物體被吸引的力，與球之半徑相比。

試設想二小物體，分別的為二球所吸引，並假定離中心之距離各與直徑相比，球則析成為各部分，均相似而且對於物體而言其所在處所相同。如是，其一物體對於一球各部分之吸引與其他物體對於其他球相當的各部分之吸引相比，如

部分之和之正，

距離之平方之反。

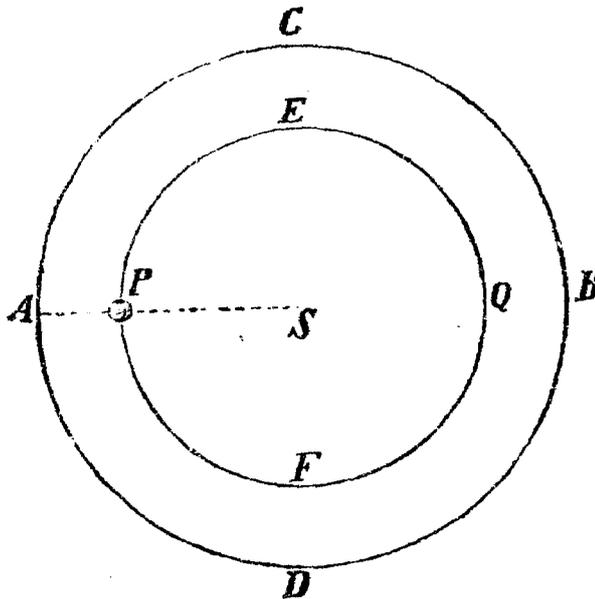
但部分之和與球相比，亦即與直徑之三次方相比，距離則與直徑相比，故力與直徑相比。

系 1. 倘物體繞球在圓內旋轉，球則由吸引相

等的物質所成，而且其距中心之距離與直徑相比，則諸環繞時間必均相等。

系 2. 反之，倘環繞時間均相等，則該項距離亦必與直徑相比。

系 3. 倘向二物體之各點作相等的向心力，此二物體為任意的，但相似而且其密度亦相等，力則隨距點之距離平方而減小，則其吸引小物體（此項小物體對於該固定物體之位置相似）的力，其比如吸引物體之直徑。



第一〇八圖

§115. 定理.

倘向球之各點作相等的向心力，此項力隨距點之距離平方而減小，則在球內的小物體即被一力所吸引，此力與

物體離心之距離相比。

今設  $ACBD$  爲球，其心爲  $S$ ，在其內的物體爲  $P$ ，試設想仍以  $S$  爲心，作一內球  $PEQF$ ，其半徑爲  $SP$ 。按 § 112 可知同心的球面不能對於  $P$  發生作用，因爲其吸引力相等相反故適相抵消。所以祇有內球  $PEQF$  的吸引力餘下，而按 § 114 此則與距離  $PS$  相比。此卽所欲證者。

§ 116. 附註。 此處所述構成固體的面，並不是純粹數學的，乃是極薄的片，其厚簡直等於零。此項等於零的片，其數目增至無窮，其厚亦減至無窮時，即可構成一球面，此種方法，開始時在補題內已說明過了。仿此，構成線，面，體的點。亦須視爲其量無限小的微粒。

§ 117. 定理。 在與前相同的假定下，一在球外的小物體能爲一力所吸引，此力與物體離心距離之平方成反比。

試設想將球分割成爲無數同心的球面，如是，則按 § 113，每面所影響於物體的吸引，與離中心

點距離之平方成反比。所以經組合後，其總和，亦即是整個的球之吸引，亦同此比。此即所欲證者。

系 1. 所以等質的球於等距離內所施之吸引，其比與球之比同。

蓋如該項距離與直徑相比，則按 § 114，力之比與直徑之比同。今如將較大的距離按該項比例減小之，則吸引力即以其平方增加，所以與其他吸引相比，為三次方的比，亦即是與球同比。

系 2. 在任意的距離內，吸引力與  
球成正比，  
離中心距離之平方成反比。

系 3. 倘一在等質球外的小物體被一力所吸引，此力與物體距中心距離之平方成反比，球本身亦由吸引的部分所成，則每一部分之力，均以其距離之平方為比而減小。

§ 118. 定理. 倘向一球之各點作諸向心力，此項向心力均相等，且以距離之平方為比而減小，則一其他相似的球即被一力所吸引，此力與二球中

心之距離之平方成反比。

蓋每一部分之引吸力，其比均如其（距吸引的球之中心的）距離平方之反，所以其作用，猶之此力出於該球心處之物體者然。此力之大小恰如該物體自身被其他球吸引時所當受者然，因而後者亦與距離之平方成反比。所以與之相等的力亦為同比。此即所欲證者。

系 1. 球對於其他球所施之吸引，與

吸引的球成正比，

二球中心間距離之平方成反比。

系 2. 倘被吸引的球亦能吸引，其關係仍如此。

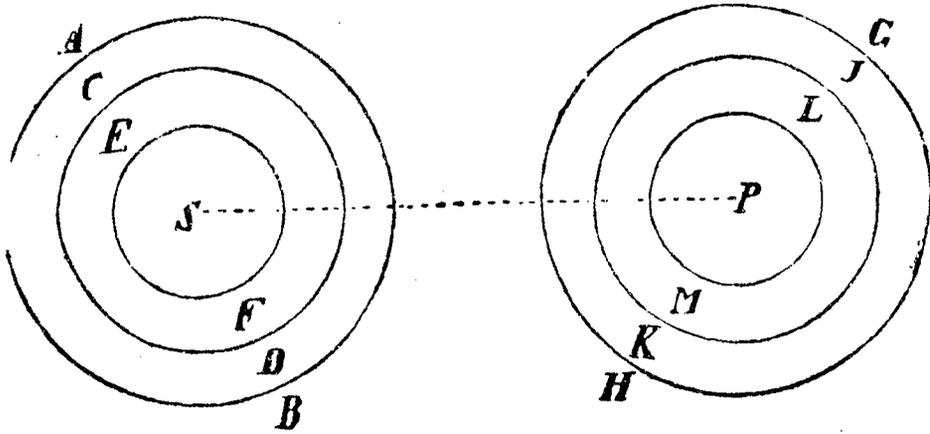
蓋後者各點所施於前者各點之吸引，其力等於後者自身被吸引時所受之力。按定律 3 在每個吸引方面吸引者與被吸引者均被推動，故交互吸引的力即加倍，而其比則仍不變。

系 3. 倘吸引的力在焦點，物體在球之外運動，則以前所證明的一切關於物體繞圓錐曲線焦點而運動的定理，於此均仍適用。

系 4. 但如物體在球內運動，則祇有關於繞圓錐曲線中心而運動的一切纔能保存其適用。

§ 119. 定理. 倘有若干球體，其由中心至面的方向內為任意不相似者，但在與心之同距離內則均相似，其每一點之吸引力隨其離被吸引物體的距離之平方而減小。如是則此項球吸引一其他此種球的全力，與兩球中心距離之平方成反比。

今設  $AB, CD, EF$  等為若干同心球，其中在裏面的一個為向心較密的物質，或反之，倘將其取去後，即餘下較疏的物質在內。按 § 118, 此中每個球，均對於其他相似的同心球  $GH, JK, LM$  等以某種力吸引之，此項力與距離  $SP$  成反比。經組合或分割後可知一切該項力之總和或其一與其他之差均為此同比。今將同心球之數增加至於無限，使物質之密度與吸引力同時（在由面至中心的方向內）按照某種定律增加或減小。其密度不足之度，可用不能吸引的物質補充之，使球之形狀能如我們所欲者。如是則其一吸引其他的力亦即與距



第一〇九圖

離之平方成反比。此即所欲證者。

系 1. 倘有若干同類的球互相吸引，則每個球對於其他球在相等的距離內所施之吸引，其比如吸引的球相比。

系 2. 在不等的距離內，其比如  
吸引的球之正，  
距離的平方之反。

系 3. 但各球對於其他球之重量或其運動的吸引，在相等的距離內，其比如吸引者與被吸引者之合，即是，如其乘積。

系 4. 在不等的距離內，其比如

該項乘積之正，

其中心距離之平方之反。

系 5. 倘吸引是由二球之吸引的交互生作用的力所成，此項定理仍適用。

蓋由於二力吸引即增加一倍，其比則仍不變。

系 6. 倘有若干此類的球環繞其他靜止的旋轉，其中每個環繞其他一個，而且旋轉的與靜止的球之中心距離與後者之直徑相比，則其環繞時間均相等。

系 7. 反之，倘環繞時間相等，則其距離與直徑相比。

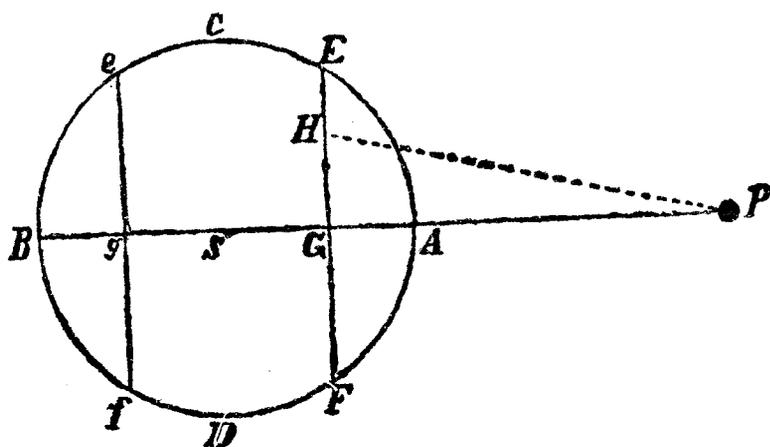
系 8. 以前關於物體繞圓錐曲線之焦點而運動的一切，此處仍適用，祇須吸引的球（其形式及狀況如上所述）在此焦點便行。

系 9. 倘運動的球，自身為上述屬性的球，能吸引者，此亦均適用。

§ 120. 定理. 倘向球之各點作向心力，此項力與點離被吸引的物體之距離相比，則二球相互吸

引的力之合，與二球中心距離相比。

第一事。今設  $ACBD$  為一球，其中心點為  $S$ ， $P$  為被吸引的小物體， $PASB$  為經過小物體之中心的球軸。又設  $EF$  與  $ef$  為二平面，與球相割，其離球心之距離亦等，且與上所述的球軸相



第一一〇圖

垂直。  $g, G$  為此二平面與球軸之相交點，  $H$  為  $EF$  平面內之任何點。

$H$  點對於  $P$  沿  $PH$  線所施之向心力，與  $PH$  距離相比，而按定律之系 2，沿  $PG$  線傾向中心  $S$  的力，亦與  $PG$  線相比。所以  $EF$  平面內一切點（亦即是全平面）使物體傾向  $S$  的力，與該項點之數相比，並與  $PG$  距離相比，亦即是與  $EF$  平

面本身乘  $PG$  距離之積相比。仿此， $ef$  平面使物體  $P$  向中心  $S$  的力，亦與  $ef$  平面乘  $Pg$  距離之積相比，而因

$$ef = EF,$$

亦即是與  $EF \cdot Pg$

相比。由此可知二平面合起來使物體  $P$  傾向中心  $S$  的力與

$$EF(PG + Pg) = 2 \cdot EF \cdot PS$$

相比。

用同法，可知球內兩旁距心等遠的一切平面之力，與一切平面之和乘  $PS$  距離之積相比，

亦即是說，與球乘  $PS$  距離之積相比。

此即所欲證者。

第二事。倘物體  $P$  亦吸引  $ABCD$  球，則亦可知球被吸引的力亦與  $PS$  距離相比。

此亦即所欲證者。

第三事。試設想有一第二球，為無數小物體  $P$  所成。因每一物體被吸引的力，與其距吸引的球

之心之距離乘其本身之積相比，因而此力之作用猶如由球心之單一物體所出發者然，所以第二球被吸引的全力，一若由第一球中心之小物體所出發者然。故此力與二球之中心距離相比。

此即所欲證者。

第四事。倘二球互相吸引，則其倍大的力之比仍如前不變。

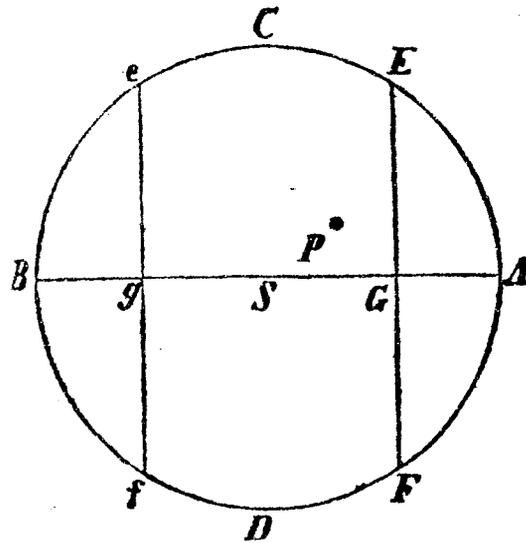
此即所欲證者。

第五事。

今設物體  $P$  在  $ACBD$  球之內  
部。如是則  $ef$  吸  
引物體的力與

$$ef \cdot PG$$

相比；而  $EF$  之  
相反力，與



第 一 一 一 圖

$$EF \cdot PG$$

相比。此二者相合而得的力，即與二乘積之差相

比，亦即是與

$$\begin{aligned}
 & \pm [EF \cdot PG - ef \cdot Pg] \\
 & = \pm EF [PG - Pg] \quad (\text{因 } EF = ef) \\
 & = \pm 2EF \cdot PS \\
 & = \pm (EF + ef) \cdot PS \text{ 相比。}
 \end{aligned}$$

由此可知全球之吸引與球乘  $PS$  距離之積相比。

此亦即所欲證者。

第六事。試設想有一第二球，為無數小物體  $P$  所成，在  $ACBD$  之內，則如前所證明者，可知一球所施於他球之單純吸引，以及兩球互相影響之雙倍吸引，均與距離  $PS$  相比。

此亦即所欲證者。

§ 121. 定理。 設有二球，在中心至面的方向內不相似且不相等，但在距心相等之處均相似，其每點之吸引力則與其離被吸引的物體之距離相比。如是，此類的二球之互相吸引力，與其中心之距離相比。

此定理之證可由 § 120 得之，一如前節之證可得自 § 118 一樣。

系。 §§ 27 及 105 內所證明關於物體繞圓錐曲線之中心而運動的一切，於此亦均適用，祇須一切吸引均由上所述的球形物體之力所產生者而且被距離的物體亦如是便可。

§ 122. 附註。 兩種吸引力之特殊狀況，已詳細說明了，此即是：向心力隨距離之平方而減小，以及向心力隨距離而增加。在兩種狀況下，向心力均能使二物體在圓錐曲線內運動，並將球形力之向心力組合，此項力亦按照相同的定律在向心的方向內增加及減小。此為可注意者。

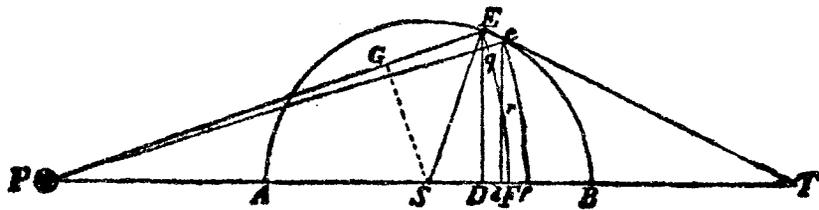
其餘諸事項不能有若何可觀的推論，故為避繁冗計，不須詳論了。以下我僅用一廣泛的方法將其總括的一論之。

§ 123. 定理。 以  $S$  為中心作一圓  $AEB$ ，並以  $P$  為心作圓弧  $EF, ef$ ，與以上之圓相交於  $E, e$ ，與  $PS$  線相交於  $F, f$ 。再作垂線  $ED, ed$  垂於  $PS$

上，則將  $EF$  與  $ef$  之距離減至無限小後，將成爲零的線  $Dd$  與將成爲零的線  $Ff$  之最後比，即等於  $PE : PS$ 。

$Pe$  線與  $EF$  弧相交於  $q$ ，我們並設想將  $Ee$  線（此線與將成爲零的弧  $Ee$  相合）引長，使其與  $PS$  相交於  $T$ 。再由  $S$  作  $SG$  垂於  $PE$  上，則

$$\triangle EDT \sim \triangle edT \sim \triangle EDS.$$



第一一二圖

因而  $Dd : Ee = DT : ET = DE : ES$  (1).

按 §8 及 §7, 系 3, 有

$$\triangle Eqe \sim \triangle ESG,$$

故  $Ee : eq = ES : GS$  (2),

而因  $eq = Ff$  故將此二比相結合時，即得

$$Dd : Ff = DE : GS$$
 (3),

又因  $\triangle PDE \sim \triangle PGS,$

並有  $Dd:Ff=PE:PS$  (4).

此即所欲證者。

§ 124. 定理。將成爲零的面  $EFfe$  (參觀前節之圖) 以  $PS$  爲軸旋轉時產生一凹凸的球; 今向其各部分作相等的向心力。如是, 此球對於  $P$  處小物體之吸引力, 其比爲

$$DE^2 \cdot Ff$$

與一其他力所合成, 此力即爲  $Ff$  上一部分吸引該物體之力。

試先研究球面  $EF$  之力 (此球面係由弧  $EF$  旋轉時所產生者),  $EF$  弧則爲  $de$  線於  $r$  點相割。如是,  $rE$  弧旋轉時所產生的面之一部分即與  $Dd$  線相比, 祇須  $PE$  半徑不變。(此爲亞几默德 Archimedes 於其研究球及圓柱體之著作內所證明者)。

沿  $PE$  或  $Pr$  線生作用的力, 其比與  $rE$  所產生的面之部分同, 即是說, 與  $Dd$  之比同, 亦即

是與  $PE$  乘  $Dd$  之比同。沿  $PS$  線向中心  $S$  生作用的力則與

$$PE \cdot Dd \cdot \frac{PD}{PE} = PD \cdot Dd$$

相比。

試設想將  $DF$  線分割成爲無數小段，其每段均以  $Dd$  名之。如是，則  $EF$  面亦即分割成爲等多的圈，其力與一切  $PD \cdot Dd$  之和相比。因一切  $Dd$  均相等，故可視爲已知者；所以該力與一切  $PD$  之和乘  $Dd$  相比，即是，與

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(FP^2 - PD^2) &= \frac{1}{2}(PE^2 - PD^2) \\ &= \frac{1}{2}DE^2, \end{aligned}$$

或簡單的與

$$DE^2$$

相比。

今將  $EF$  面與  $Ff$  相乘，則  $EFfe$  物體所施於  $P$  的吸引力，與

$$DE^2 \cdot Ff$$

及一其他力之組合相比，而此其他力倘爲已知者，

即係  $Ff$  上一部分所施於  $P$  的吸引力。倘非已知，則第一吸引力與  $DE^2 \cdot Ff$  乘此未知力之積相比。

此即所欲證者。

§ 125. 定理。以  $S$  為中心作一球  $AEB$ ，向其各相等的部分作相等的向心力。在球之軸  $AB$  上有一小物體  $P$ ，今於其上取諸點  $D$  作垂線  $DE$ ，與球面相交於  $E$ ；於此項垂線上並取  $DN$  長，其比與

$$\frac{DE^2 \cdot PS}{PE}$$

及一其他力之組合同，此力為  $PE$  距離內軸上球之部分所施於  $P$  的力。如是則  $P$  被球所吸引的全力與一面相比，此面為  $AB$  軸及  $ANB$  曲線所圍。

今用與前二節內之相同的作法，設想將  $AB$  軸分割成爲無數相等的段  $Dd$ ，同時，整個的球亦被分割成爲等多的凹凸層  $EFfe$ ，並作  $DN$ ， $dn$  垂線。按 § 124， $EFfe$  層吸引小物體  $P$  的力，其

比如  $DE^2 \cdot Ff$

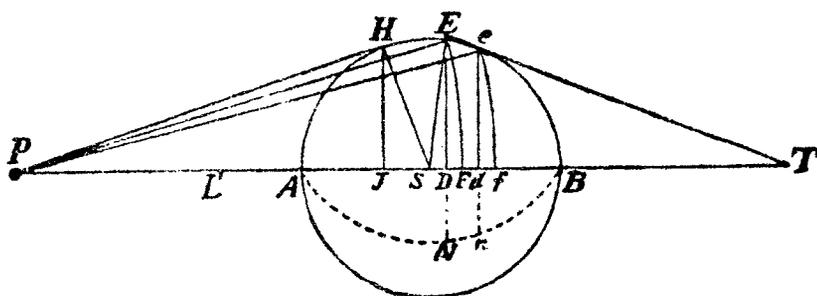
及一其他力之組合，此其他力為  $PE$  或  $PF$  距離內一部分所施者。按 § 123, 有

$$Dd : Ff = PE : PS,$$

故 
$$Ff = \frac{PS \cdot Dd}{PE},$$

而 
$$DE^2 \cdot Ff = Dd \cdot \frac{DE^2 \cdot PS}{PE}.$$

從可知  $EFfe$  層之力其比如



第一一三圖

$$Dd \cdot \frac{DE^2 \cdot PS}{PE}$$

及一其他力之組合，此其他力即為一部分於  $PF$  距離內所施者。

按所設  $DN$  與

$$\frac{DE^2 \cdot PS}{PE}$$

相比,故前一力之比如

$$Dd \cdot DN,$$

即此是說,如將成爲零的面  $DNnd$ .

所以由一切層所施於  $P$  的力,與全面  $ABNA$  相比。

此即所欲證者。

系 1. 倘向各部分的向心力不問距離之如何均相等,而且  $DN$  與

$$\frac{DE^2 \cdot PS}{PE}$$

相比,則小物體被球所吸引的力,其比如  $ABNA$  面。

系 2. 倘各部分之向心力,與其距被吸引的物體之距離成反比,而且  $DN$  與

$$\frac{DE^2 \cdot PS}{PE^2}$$

相比,則球吸引物體  $P$  的全力,其比如  $ABNA$  面。

系 3. 倘各部分之向心力與距離之三方相比,而且  $DN$  與

$$\frac{DE^2 \cdot PS}{PE^3}$$

相比，則全球之力與  $ABNA$  面相比。

系 4. 倘由各部分所施於物體之向心力與  $V$  成反比，而且  $DN$  與

$$\frac{DE^2 \cdot PS}{PE \cdot V}$$

相比，則物體被球所吸引的全力，其比如  $ABNA$  面。

§ 126. 問題. 在以前所假定的狀況下，試求  $ABNA$  之面積。

今由  $P$  作切線  $PH$  至球，由  $H$  作垂線  $HJ$  垂於  $AB$  軸上。於是於  $L$  平分  $PJ$  線，則有

$$PE^2 = PS^2 + SE^2 + 2PS \cdot SD \quad (1).$$

因  $\triangle SPH \sim \triangle SHJ$ ,

故  $SE^2 = SH^2 = PS \cdot JS \quad (2),$

因而  $PE^2 = PS^2 + PS \cdot JS + 2PS \cdot SD$

$$= PS [PS + JS + 2SD]$$

$$= PS [PL + LJ + JS + JS + 2SD].$$

又因  $PL = JL, PL + JS = LJ + JS = LS,$

故  $PE^2 = PS [2 \cdot LS + 2SD],$

即  $PE^2 = PS \cdot 2LD$  (3).

又,

$$\begin{aligned} DE^2 &= SE^2 - SD^2 \\ &= SE^2 - LD^2 + 2LD \cdot LS - LS^2 \end{aligned}$$

而  $LS^2 - SE^2 = LS^2 - SB^2 = LB \cdot LA$ ,

故  $DE^2 = 2LD \cdot LS - LD^2 - LB \cdot LA$  (4).

從可知

$$\begin{aligned} \frac{DE^2 \cdot PS}{PE \cdot V} &= \frac{2LD \cdot LS \cdot PS}{PE \cdot V} \\ &\quad - \frac{LD^2 \cdot PS}{PE \cdot V} - \frac{LA \cdot LB \cdot PS}{PE \cdot V} \end{aligned}$$

試以向心力之反比代替  $V$ , 又以  $PS$  與  $2LD$  之中比代  $PE$ , 則以上之三部分即轉成爲等多的曲線之縱坐標, 而此項曲線之面積即可按常法求之。

第一例. 倘向球各部分的向心力, 其比如距離之反, 則可設

$$V = PE, PE^2 = 2PS \cdot LD,$$

於是  $DN$  與

$$\begin{aligned} & \frac{2LD \cdot LS \cdot PS}{2PS \cdot LD} - \frac{LD^2 \cdot PS}{2PS \cdot LD} - \frac{LB \cdot LA \cdot PS}{2PS \cdot LD} \\ & = LS - \frac{1}{2}LD - \frac{LA \cdot LB}{2AD} \end{aligned}$$

相比。

今設  $DN$  與此式之二倍相等，即

$$DN = 2LS - LD - \frac{LA \cdot LB}{LD},$$

則  $2LS$  經過  $AB$  長而作成

$2LS \cdot AB$  長方形。

其餘不定的部分  $LD$  則在連續的經過  $AB$  時作成一面

$$LS \cdot AB = \frac{LB^2 - LA^2}{2}.$$

將此由以前所得的  $2LS \cdot AB$  減去後，尚餘

$LS \cdot AB.$

第三部分  $\frac{AL \cdot LB}{LD}$  經過  $AB$  時，作成一雙曲

線的面，將其自  $LS \cdot AB$  減去後，即可得  $ABNA$  之面積。

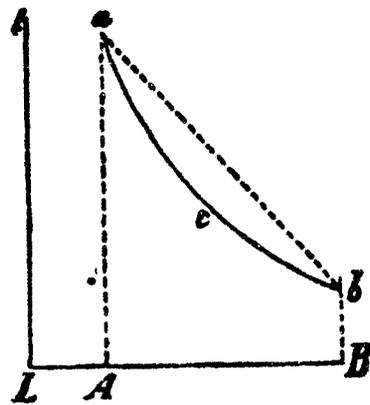
所以問題之作法如下。於

$L, A, B$  點作垂線

$Ll,$

$Aa = LB,$

$Bb = LA,$



並以  $Ll, LB$  爲漸近線作

第一一四圖

雙曲線經過  $a, b$ , 並引弦線  $a, b$ , 如是則

$$acba \text{ 面} = ABNA.$$

第二例. 倘向各部分的向心力與距離之三方成反比, 或即是, 與

此項三方成反比,

一不變的面成正比,

則可設

$$V = \frac{PE^3}{2 \cdot AS^2},$$

$$PE^2 = 2PS \cdot LD.$$

如是則  $DN$  與

$$\frac{2LS \cdot LD \cdot PS}{PE \cdot \frac{PE^3}{2AS^2}} - \frac{LD^2 \cdot PS}{PE \cdot \frac{PE^3}{2AS^2}} - \frac{LA \cdot LB \cdot PS}{PE \cdot \frac{PE^3}{2AS^2}}$$

$$= \frac{LS \cdot AS^2}{PS \cdot LD} - \frac{AS^2}{2PS} - \frac{LA \cdot LB \cdot AS^2}{2PS \cdot LD^2}$$

相比，或因

$$PS : AS = AS : SJ, \frac{AS^2}{PS} = SJ,$$

與 
$$\frac{LS \cdot SJ}{LD} - \frac{1}{2}JS - \frac{LA \cdot LB \cdot SJ}{2LD^2}$$

相比。

此三部分經過  $AB$  長時，其第一部分產生一雙曲線形的面，其第二部分產生一長方形

$$\frac{1}{2}AB \cdot JS,$$

其第三部分則產生一面

$$\begin{aligned} & \frac{AL \cdot LB \cdot JS}{2LA} - \frac{AL \cdot LB \cdot JS}{2LB} \\ & = \frac{1}{2}(LB - LA)JS = \frac{1}{2}AB \cdot JS. \end{aligned}$$

後二者之和為

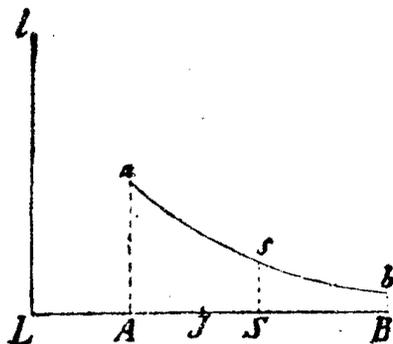
$$AB \cdot JS = 2AS \cdot JS,$$

今將其自第一面減去之，則所餘者即為  $ABNA$  之面積。

由此即可得問題之作法如下。

於  $L, A, S, B$  諸  
點作垂線

$Ll, Aa, Ss = JS, Bb,$   
以  $Ll, LB$  爲漸近線經  
過  $S$  作雙曲線  $asb,$  與  
 $Aa, Bb$  相交於  $a, b.$  今



第一一五圖

由雙曲線形的面  $AasbB$  減去長方形  $2AS \cdot JS,$  則  
所餘者即爲  $ABNA$  之面積。

第三例. 倘向球之各部分的向心力與距離之  
四次方成反比, 則可設

$$V = \frac{PE^4}{2AS^3}.$$

而  $PE = \sqrt{2PS \cdot LD},$

於是  $DN$  即與

$$\frac{LS \cdot JS^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2} \cdot LD^{\frac{3}{2}}} \quad \frac{JS^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2} \cdot LD^{\frac{1}{2}}} \quad \frac{LA \cdot LB \cdot JS^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2} \cdot LD^{\frac{5}{2}}}$$

相比. 仍將此三部分各經過  $AB$  時, 則得以下之三  
面:

$$\frac{\sqrt{2} \cdot LS \cdot JS^{\frac{3}{2}}}{LA^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sqrt{2} \cdot LS \cdot JS^{\frac{3}{2}}}{LB^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{LB^{\frac{1}{2}} \cdot JS^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{1}{2}} \cdot JS^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{LA \cdot LB \cdot JS^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}LA^{\frac{3}{2}}} - \frac{LA \cdot LB \cdot JS^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}LB^{\frac{3}{2}}}.$$

將後二者由前一式減去後，即得

$$\frac{4 \cdot SJ^2}{3 \cdot LJ}.$$

從可知物體  $P$  傾向中心被吸引的力，因

$$LJ = \frac{1}{2}PJ,$$

與  $\frac{SJ^3}{PJ}$

相比，或因

$$SJ = \frac{AS^2}{PS}, \text{ 即 } \frac{SJ^3}{PJ} = \frac{AS^6}{PS^3 \cdot PJ},$$

( $AS$  為常數)，

故與  $PS^3 \cdot PJ$  成反比。

用同樣的方法，可求得一在球內的物體之吸引。用以下之定理尤為簡單。

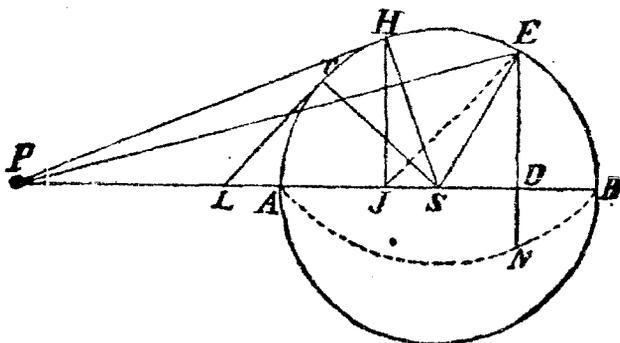
§ 127. 定理. 試取連續的相比的諸線

$SJ, SA, SP$

(用前節之圖), 則在球之內部  $J$  點之物體, 其所受的吸引與  $P$  點者相比, 如

$J$  與  $P$  之平方根以及  $P$  點與  $J$  點之向心力之平方根。

倘球各部分之向心力與其距所吸引的物體之距離平方成反比, 則物體在  $J$  點被球吸引的力, 與



第一一六圖

其在  $P$  點被吸引的力相比, 如

$$\sqrt{JS} : \sqrt{PS},$$

以及如

$$\frac{1}{\sqrt{JS}} : \frac{1}{\sqrt{PS}}.$$

此二比之合爲

$$1 : 1,$$

故由全球出發施於  $J, P$  的吸引爲相等的。

倘球各部分之力相比，如距離之平方之反，則用相似的方法，可知  $J$  點的吸引與  $P$  點者相比，

如  $SP : SA$ 。

倘該項力與距離之三方相比，則  $J, P$  點之吸引，其相互的比爲

$$SP^2 : SA^2$$

倘該項力與距離之四次方相比，則其比爲

$$SP^3 : SA^3.$$

在此最後的事項內， $P$  點之吸引與  $SP^3 \cdot PJ$  成反比，即是，與

$$\frac{1}{SP^3 \cdot PJ}$$

成正比。

因此， $J$  點的吸引與

$$\frac{SP^3}{SA^3} \cdot \frac{1}{SP^3 \cdot PJ} = \frac{1}{SA^3 \cdot PJ}$$

相比, 而因  $SA^3$  爲常數, 即與  $PJ$  成反比. 用相似的方法, 可推至於無限.

此定理可如下證之.

今如在以前的作法下, 物體在任何點  $P$ ; 如是則  $DN$  縱坐標與

$$\frac{DE^2 \cdot PS}{PE \cdot V} \quad (1)$$

相比.

今試作  $JE$  線, 則對於與  $J$  點相當的縱坐標, 有以下之比:

$$\frac{DE^2 \cdot PS}{JE \cdot V} \quad (2).$$

但如假定, 由任意點  $E$  所發生的向心力, 在  $JE, PE$  的距離內相比時, 如

$$PE^n : JE^n,$$

則該項縱坐標即與

$$\frac{DE^2 \cdot PS}{PE \cdot PE^n} \quad \text{及} \quad \frac{DE^2 \cdot JS}{JE \cdot JE^n}$$

相比, 所以此二縱坐標相比, 如

$$PS \cdot JE \cdot JE^n : JS \cdot PE \cdot PE^n. \quad (3)$$

但  $\triangle SPE \sim \triangle SEJ,$

故  $JE : PE = JS : SE = JS : SA,$

而  $PE \cdot JS = JE \cdot SA \quad (4)$

今將  $PE \cdot JS$  之值代入 (3) 內, 即得

$$PS \cdot JE^n : SA : PE^n \quad (5).$$

但  $PS : SA = \sqrt{PS} : \sqrt{SJ},$

而  $JE^n : PE^n$

爲  $PS, JS$  距離內力之半比, 所以縱坐標, 其所作的面積以及與此相比的吸引, 其相比如

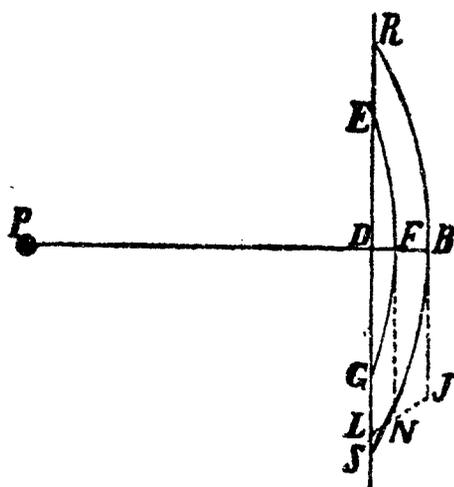
$$\begin{aligned} & \sqrt{PS} \cdot JS^{\frac{n}{2}} : \sqrt{JS} \cdot PS^{\frac{n}{2}} \\ & = \sqrt{PS} \cdot \frac{1}{PS^{\frac{n}{2}}} : \sqrt{JS} \cdot \frac{1}{JS^{\frac{n}{2}}}. \end{aligned}$$

此即所欲證者。

§ 128. 問題. 試求一力, 能使在球心處之小物體被吸引而向球之一弓形。

今設  $P$  爲球心之物體,  $RBSD$  爲球之弓形, 其界爲  $RDS$  平面及球面  $RBS$ . 今以  $P$  爲心再作

一球面  $EFG$ ，交  
 $DB$  於  $F$  並將原  
 來的弓形分割成爲  
 $BREFGS$ ， $FEDG$   
 二部分，此球面非  
 爲純粹數學的，而  
 爲物理的，但甚薄，



第一一七圖

其厚可以 0 表之。如是，則按亞几默德所證明者。

此面與

$$PF \cdot DF \cdot 0$$

相比。

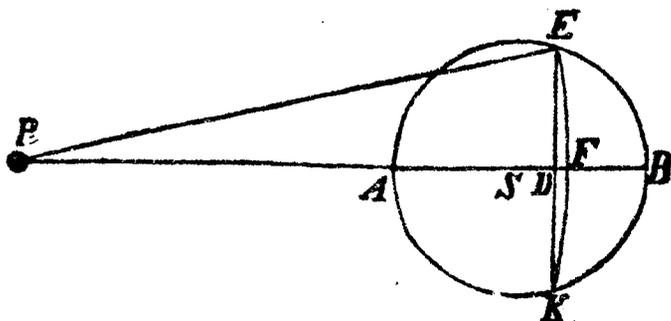
今如假定球各部分之吸引力，與距離之  $n$  次  
 方成反比，則  $GFE$  面吸引物體  $P$  的力，按 § 125

與 
$$\frac{DE^2 \cdot 0}{PF^n} = \frac{2DF \cdot 0}{PF^{n-1}} - \frac{DF^2 \cdot 0}{PF^n}$$

相比。

今如垂線  $FN$  乘 0 之積與此值相比，則  $FN$   
 連續的運動經過  $DB$  時所作的面  $BDLJB$ ，其比  
 如  $RBSR$  弓形吸引  $P$  的力。

§ 129. 問題。 試求一力，能使一小物體被球之一弓形所吸引者；此小物體在中心點之外，並在球軸上，弓形之位置，亦屬於此軸。



第一一八圖

在  $ADB$  軸上的物體  $P$ ，能為弓形  $EBK$  所吸引。今以  $P$  為中心以  $PE$  為半徑，作球面  $EFK$  將弓形分成為  $EBKFE$ ， $EFKE$  二部分。與第一部分相當的力可按 § 126 求之，與第二部分相當者則可按 § 128 求之，其和即為全部分  $EBKE$  之力。

§ 130. 附註。 我們既將球形物體之吸引敘述過後，即可進而研究某項其他物體之吸引定律，此項物體係由相似的吸引的部分所成。但按本書之計劃，實在不能專研究這些問題，所以我們祇能略

---

一論及此項物體方面的力之一般的定律，以及由此所發生的運動，因為這些在物理學上都須應用。

## 第十三章

### 論非球形物體之吸引力

§ 131. 定理. 倘一物體與其他一吸引的物體相接觸時，其被吸引較之二者間有極小的距離時遠爲大，則吸引物體之力，當被吸引物體離開時，其減小之比，大於距離之平方。

蓋如此項力以距離之平方減小，則其對於球形物體之吸引不會因接觸而有顯然的增加，因此項吸引係與離球心距離之平方成反比者。倘吸引之減小，其比小於距離之平方，則更不會有增加的現象發生。所以在吸引的球體方面，此定理之無誤，可以了然。

在凹形的球層方面，倘球層吸引在其外的物體，其理亦同此。如球層吸引在其內的物體，其理更明，因爲球層各部分所施之吸引爲其他部分之

相反吸引所抵消，故在接觸時反而成爲零。

今於此項球及球層方面，在其與接觸點相距離之處，任意取去其若干部分并任意補上一些新部分，則此項吸引物體之形狀可任意改變，但被取去或新增加的部分，因其與接觸點相距離，不會顯然的增加接觸時之吸引。

所以此定理於任何形式之物體均了然可見。此卽所欲證者。

§ 132. 定理。 設有一吸引的物體，爲各部分所合成，其各部之力，在被吸引的物體距離較遠時，以距離之三次方或多次方爲比而減小，則當吸引者與被吸引者相接觸時，其吸引遠較之二物體間有一些距離時爲大。

當被吸引的物體向吸引的球接近時，吸引可放大至於無限，此則可由 § 126 第二第三例知之。將此項例與 § 127 相比較時，卽可知在物體對於凹凸層的吸引方面，此理亦易證明；不問物體在彎處之內或外均無關係。

今如於此項球或層之距離接觸點處，任意取去或加上若干物質，則此項球或層可成爲任意的形式。如是，此定理在一切物體方面均可適用。此即所欲證者。

§ 133. 定理：今有二物體，由同樣吸引的物質所成而且相似，此二物體各自吸引若干小物體，而此項小物體則與其自身相比，其位置亦相似。如是則小物體之加速的吸引，其比如前者對於後者各部之加速的吸引。

試設想將此項物體割成爲部分，與其全體相比，而且其位置相似。如是則對於第一物體各部分之吸引與對於第二物體之相當者相比，如對於第一物體任何一部分之吸引與對於第二物體之相當者相比。經組合後，對於整個的第一物體之吸引與對於整個的第二者相比亦同此比，此即所欲證者。

系 1。倘將被吸引的小物體之距離放大，而各部分之吸引力以距離之某次方減小，則對於全物體之加速的吸引，其比如

後者之正，

距離之該次方之反。

今如各部分之力以距離之平方爲比減小，而物體相比則如

$$A^3 : A^3,$$

卽，與之相等的立方體之邊以及被吸引的小物體與吸引者之距離均如

$$A : B,$$

則對於物體之加速的吸引，其比如

$$\frac{A^3}{A^2} : \frac{B^3}{B^2} = A : B.$$

倘各部分之力以距離之三次方減小，則對於全物體之加速的吸引，其比如

$$\frac{A^3}{A^3} : \frac{B^3}{B^3},$$

卽是說，爲相等者。

倘前者以距離之四次方減小，則後者之比，如

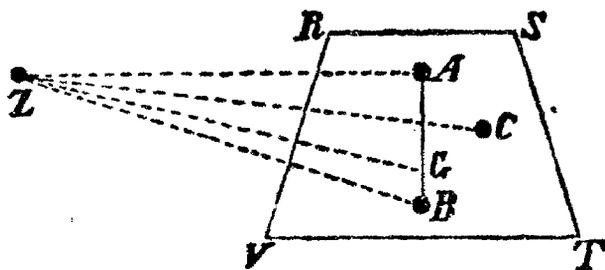
$$\frac{A^3}{A^4} : \frac{B^3}{B^4} = \frac{1}{A} : \frac{1}{B}$$

此即是說，如立方體邊之反，餘不再贅。

系 2. 所以，由相似物體之吸引其他(對之亦相似的)小物體的力，可以推知一種比例，此項比例，在被吸引的物體移開時，為各吸引部分之力隨之減小的比。至力之減小，須以距離之某次方為正或反的比。

§ 134. 定理. 倘一任何物體之相等的部分，其吸引力之比如此項部分方面被吸引的點之距離，則全物體之力係傾向其重心，而且與一力相等，此力為一中心點在物體之重心而由相似相等的物質所成的球所當有者。

$A$  與  $B$  為物體  $RSTV$  上之二部分， $Z$  為一任意的小物體，被其所吸引，其力之比在



第一一九圖

$$A = B$$

時爲  $AZ : BZ, (1)$

在  $A > B$

時, 爲  $A \cdot AZ : B \cdot BZ. (2)$

所以此二力均可以  $A \cdot AZ, B \cdot BZ$  表之。今作  $AB$  線, 并於  $G$  分割之, 使

$$AG : BG = B :: A, (3)$$

則  $G$  即爲  $A, B$  之共同重心。

$A \cdot AZ$  一力可析之爲

$$A \cdot GZ \text{ 與 } A \cdot AG$$

二支力,  $B \cdot BZ$  可析成爲

$$B \cdot GZ \text{ 與 } B \cdot BG.$$

按 (3) 有

$$A \cdot AG = B \cdot BG.$$

而因此二力之方向適相反, 故即相抵消, 而祇餘下

$$A \cdot GZ \text{ 及 } B \cdot GZ$$

二力。此二力係由  $Z$  向  $G$  者, 相合時得

$$(A + B) \cdot GZ,$$

此即是說，猶如  $A$  與  $B$  二部分合在其共同重心點  $G$  而在該處構成一球一般。

用同法加入一第三部分  $C$  并將其力與向  $G$  的力

$$(A+B) \cdot GZ$$

相加，則所得的合力，其方向係向  $G$  及  $C$  之共同重心，亦即是向

$A, B$  與  $C$  三部分

之共同重心，而此則猶如該三部分合在其共同重心而於此構成一較大的球一般。用此方法可推至於無限。所以該任意物體一切部分之全力，與保存其原來重心而成爲球形後無異。

系。由此可知倘吸引的物體  $RSTV$  成爲一球形時，被吸引的物體之運動狀況亦是如此。所以倘吸引者靜止着或以直線作等速運動，則被吸引者即在一橢圓內運動，此橢圓之中心在吸引者之重心點。

§ 135. 定理。倘有若干物體爲相等的部分所

成，其各部分之力與其距被吸引點之距離相比，則由一切此項部分所合成之力，能吸引任意物體者，係向着此項部分之共同重心，而且其作用與各部分保持其共同重心而合成爲一球時一般。

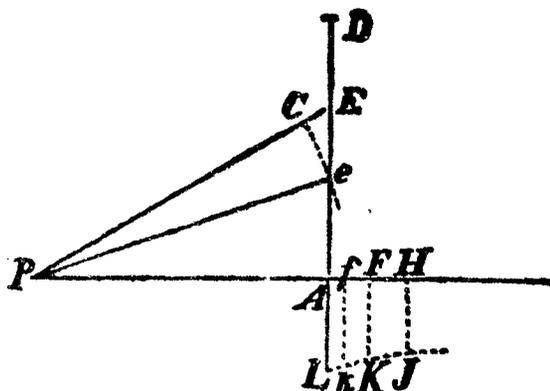
此定理可仿前節之法證之。

系。 所以被吸引的物體之運動狀況，一如該吸引者保持其共同重心而成爲一球形無異。倘此重心靜止着或以直線作等速運動，則被吸引的物體在橢圓內運動，此橢圓之中心在吸引的物體之共同重心點。

§ 136. 問題。 向圓之各點作諸相等的向心力，此項力以距離之某次方增加或減小。今欲求一力，能使一小物體恆在一直線上被吸引，此直線係與圓之平面相垂直而且經過其中心點。

今設想以  $A$  爲中心點， $AD$  爲半徑作一圓，其平面與  $AP$  相垂直。所欲求者是一力，能使物體  $P$  向之被吸引者。

今由圓上任何一點  $B$  向被吸引的物體  $P$  作



第一二〇圖

$PE$  線，並於  $PA$  上取

$$PF = PE,$$

於  $F$  點作垂線  $FK$ ，與  $E$  點吸引  $P$  之力相比。

又設  $JKL$  為一曲線， $K$  點恆在其內，與圓之平面則相交於  $L$ 。再取

$$PH = PD,$$

并作  $HJ$  垂線，與上述的曲線相交於  $J$ ，則小物體  $P$  向圓之吸引，即與  $AHJL$  面相比。

今於  $AE$  上取極短的線  $Ee$ ，作  $Pe$  并於  $AP$  上作

$$Pf = Pe = PC.$$

按所設， $E$  點吸引物體  $P$  之力與  $FK$  線

相比,故該點吸引  $P$  使其向  $A$  的力與

$$\frac{AP}{PE} \cdot FK$$

相比,而諸  $E$  點所成的圓圈,其吸引  $P$  之力,與

$$\text{圓圈及} \frac{AP}{PE} \cdot FK$$

之合相比,

但此圓圈係與一長方形相比,此長方形之邊爲  $AE$  及  $Ee$ , 而因

$$PE : AE = Ee : CE,$$

故此長方形

$$= PE \cdot CE = PE \cdot fF.$$

所以該圓圈吸引物體  $P$  使其向  $A$  的力,與

$$PE \cdot fF \cdot \frac{AP}{PE} \cdot EK$$

$$= fF \cdot AP \cdot FK$$

相比,亦即是與  $FKkf$  面乘  $AP$  之積相比,而此項一切圓圈吸引  $P$  使其向  $A$  的力與全面  $AHJKL$  乘  $AP$  之積相比.此即所欲求者.

系 1. 倘力以距離之平方減小，即是， $FK$  與  $\frac{1}{PF^2}$  相比， $AHJKL$  面與

$$\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$$

相比，則  $P$  向圓之吸引與

$$1 - \frac{AP}{PH} = \frac{AH}{PH}$$

相比。

系 2. 倘  $D$  距離內點之力與該距離之某次方成反比，即是  $FK$  與  $\frac{1}{D^n}$  相比， $AHJKL$  與

$$\frac{1}{AP^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$$

相比，則  $P$  向圓的吸引力與

$$\frac{1}{AP^{n-2}} - \frac{AP}{PH^{n-1}}$$

相比。

系 3. 倘將圓之徑放大至於無限，而

$$n > 1,$$

則  $P$  向此無限平面之吸引如

$$AP^{n-2}$$

之反；因為在這裏，

$$\frac{PA}{PH^{n-1}}$$

成爲零了。

§137. 問題。 一固着的圓物體之軸上有一小物體，今欲求此小物體由此物體所受之吸引；向該物

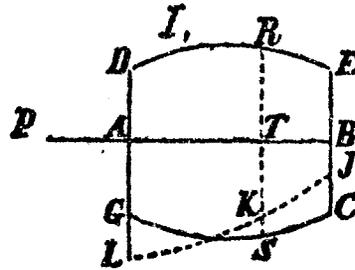
體之各點則作

(1)

有向心力，以

距離之某種比

減小。



今設  $DE-$

(2)

$CG$  爲固着的

物體 (Fig I),

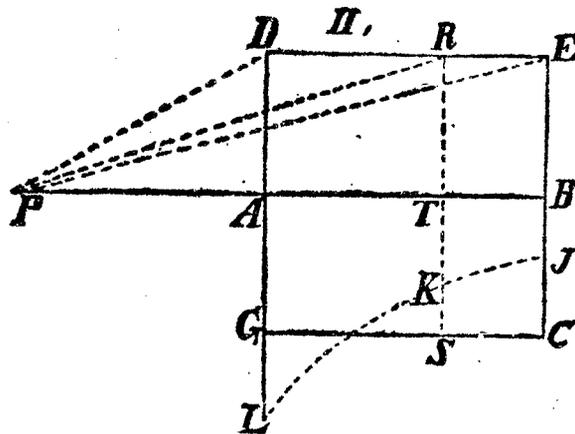
$AB$  爲其軸,  $P$

爲一小物體在

其上, 向固着的

物體被吸

引, 又設  $RTS$



第一二一圖

爲一任意的圓與此軸垂直，將該物體分割成爲二部，今於  $TS$  上取  $TK$  長，須在  $PALJB$  平面內；此長與使  $P$  向圓被吸引的力相比。但  $K$  點在  $LKJ$  曲線上，此曲線則與最在外的圓  $DG, EC$  之平面相交於  $L, J$ 。如是則  $P$  向固定物體之吸引與  $LABJ$  面相比。

系 1. 倘固定的物體爲一圓柱，由旋轉  $ADEB$  平行方形(以  $AB$  爲軸，見 *Fig II*)所成，而向其各點的向心力與距離之平方成反比，則  $P$  向此圓柱之吸引，其比如

$$BA - PE + PD.$$

蓋  $TK$  與

$$1 - \frac{PT}{PR}$$

相比，而將其第一部分經過  $AB$  時(見 § 136 系 1)，

得一面積  $1 \cdot AB$ ,

其第二部分經過  $PB$  時，作成

$$1 \cdot (PE - AD)$$

面(將  $LKJ$  曲線之面積求出時即易知之)。同樣

的，倘將其經過  $PA$  時，即得

$$1 \cdot (PD - AD)$$

面，故如將其經過

$$PB - PA = AB$$

時，即有

$$1 \cdot (PE - PD)$$

面。

今由第一面  $1 \cdot AB$  上減去第二面  $1 \cdot (PE - PD)$  所餘爲

$$LABJ = 1 \cdot (AB - PE + PD),$$

故與此面相比的力，其比如

$$AB - PE + PD.$$

系 2. 由此，我們亦可求得  $AGBCD$  卵狀物體吸引物體  $P$  之力。此物體在前者之外兼在其軸  $AB$  上。

今設  $NKRM$  爲一圓錐曲線，其與  $EP$  相垂直的縱線  $ER$  恆與  $PD$  相等，此後者之線係向  $D$  引出者，而  $D$  點則爲該縱線與卵狀物體之相交

處。今於卵狀物體之頂點  $A, B$  作

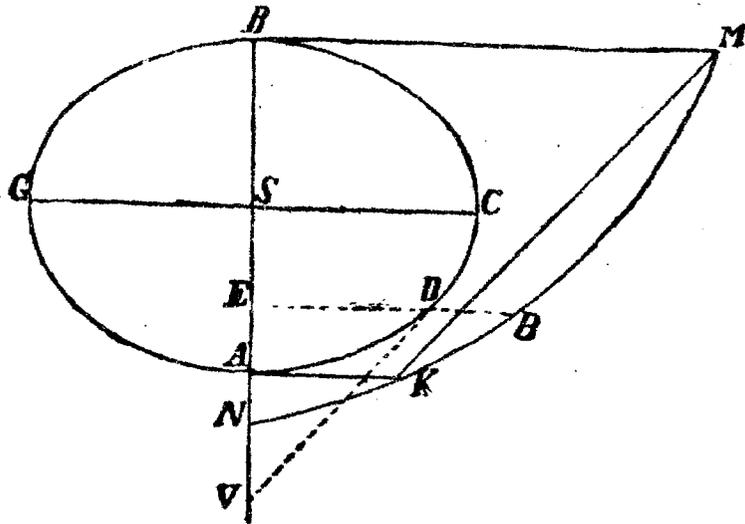
$$AK=PA,$$

$$BM=PB$$

二垂線與  $AB$  軸相垂直，且與圓錐曲線相交於  $M, K$ 。今再作  $KM$  線，則可得一弓形  $KMRK$ 。設  $S$  為該物體之中心點， $SC$  為其大軸之半，則卵狀物體吸引  $P$  之力，與  $AB$  上所作球吸引  $P$  之力相比，如

$$\frac{AS \cdot CS^2 - PS \cdot KMRK}{PS^2 + CS^2 - AS^2} : \frac{AS^3}{3PS^2} \cdot$$

用同樣的方法，並可求得卵狀物體方面弓形之力。



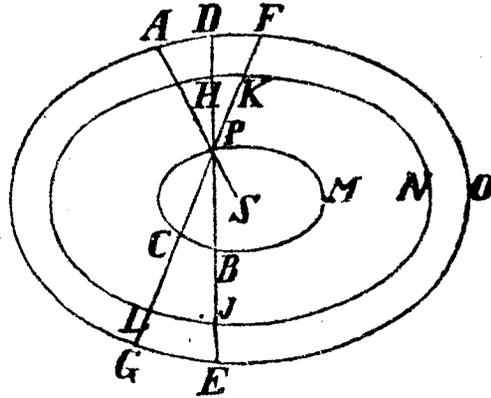
第一二二圖

系 3. 倘小物體在卵狀物體之內部且在其一定的徑上, 則其吸引與其距中心點之距離相比。

此可如下證明

之。

設  $AGOF$  爲能吸引的卵狀物體,  $S$  爲其中心點,  $P$  爲被吸引的物



第一二三圖

體. 今作半徑  $APS$  經過  $P$ . 並作二任意直線  $DE$   $FG$ , 與卵狀物體相交於  $D, E, F, G$ . 又設  $PCM$ ,  $HLN$  爲二在內的卵狀物體之面, 與在外者相似而且同心; 此二者中之第一個係經過  $P$ , 且與  $DE$ ,  $FG$  相交於  $B, C$ ; 第二個則交此二線於  $H, J, K, L$ . 倘諸卵狀物體有一共同軸, 則二面所割下的直線之部分均相等, 即

$$DP = BE,$$

$$FP = CG,$$

$$DH = EJ,$$

$$FK = GL,$$

因爲  $DE, Pb, HJ$  諸線均在同一點被平分。今試設想  $DPF, EPG$  所表者爲二相反的圓錐體， $DH$  與  $EJ$  則爲無限小。由卵狀物體所割下的錐體之部分  $DHKF, GLJE$ ，因

$$DH = EJ,$$

故其相比如其離物體  $P$  距離之平方，而其吸引力則等強。由同樣的理由，我們如設想將  $DPF, EGCB$  用無數相似，同心而且同軸的卵狀物體之面分割之，則所得的一切部分均由兩面吸引物體  $P$ ，其力相等相反。所以  $DPF, EGCB$  之力適相等相反而互相抵消。在  $PCBM$  卵狀物體之外的一切物質，其力之關係均同此。

所以物體  $P$  祇被在內的卵狀物體所吸引，而其吸引力與  $AGOD$  全體吸引  $A$  之力相比，如

$$PS : AS.$$

§ 138. 問題。 今有一能吸引的物體爲已知；向其各點的向心力以某種比減小，試求此比。

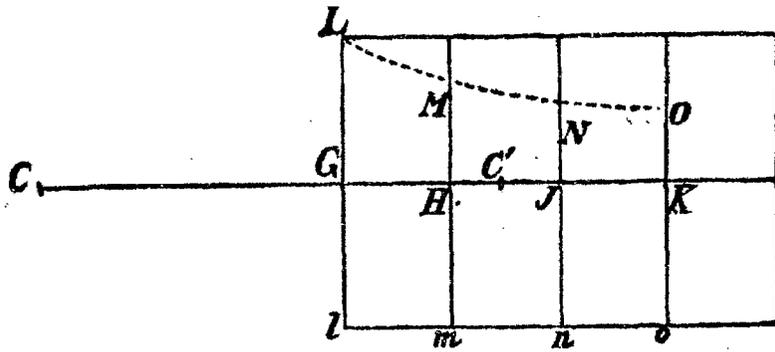
今將此物體構成爲一球，或圓柱體，或其他有規則的物體，其以某種比減小的吸引定律，可求而得。於是用試驗之法於各種距離內測定吸引力，如是所得的向全物體之吸引定律，可用以求得減小之比，此項關係，亦即爲其各部分之力所有者。

§ 139. 定理。 今有一固定的物體，其一面爲一平面所界，其餘各面均沒有界，此物體爲相等的各部分所成，其各部分之吸引亦相等。當距此物體之距離增加時，其力之減小大於此項距離平方之比。在平面之一面或他面有一小物體，爲該物體之全部所吸引。如是則在距平面之任何距離內，固定物體之吸引力以被吸引的物體距該平面距離之某次方減小，其方數較距離之方數小 3。

第一事。今設  $LGL$  爲此平面，與固定體相界，後者則在平面之  $J$  面，並析之成爲無數的平面

$$mHM, nJN, \text{ 等等,}$$

均與  $LGL$  相平行。試先假定被吸引的物體  $C$  在



第一二四圖

固定物體之外。今作  $CGHJ$  垂於該項無數平面上，並假定固定物體之點，其吸引力以其距離之  $n$  次方減小， $n$  爲不小於 3 的數。按 § 136 系 3，可知  $mHM$  平面吸引物體  $C$  的力，與

$$CH^{n-2}$$

成反比。今於  $mHM$  上取  $HM$  長與  $CH^{n-2}$  成反比；如是則該力即與  $HM$  相比。仿此，並於

$lGL, nJN, oKO$ ，等各平面內

取  $GL, JN, KO$ ，等諸長，

使其各與

$$CG^{n-2}, CJ^{n-2}, CK^{n-2}，等$$

成反比。如是則此項平面之力與該項長相比，所以

其和亦與線之和相比，此即是，全個固定物體之力與  $GLOK$  面相比，此面向  $OK$  可推至於無限。但此面與

$$CG^{n-3}$$

成反比，所以全物體之力亦與

$$CG^{n-3}$$

成反比。此即所欲證者。

第二事。設物體  $C$  在固定體內部的  $lGL$  之面上，在於  $C^1$  處，今取

$$C^1K = C^1G.$$

固定體之  $LGlOKO$  部分，為  $lLG, oKO$  二平面所界者，不能吸引在中間的小物體  $C^1$  使其傾向任何方面，因為相反的點之相反作用適相等，故互相抵消。所以祇有在  $OK$  平面以外的固定物體，其力能吸引  $C^1$ ，而此力則與  $C^1K^{n-3}$  成反比，或因

$$C^1G = C^1K,$$

與

$$C^1G^{n-3}$$

成反比。此即所欲證者。

系 1. 倘固定體  $LGJN$  兩面均為無限的平面  $LG, JN$  所界, 此二平面相平行, 則由全個無界的物體  $LGKO$  之吸引力上減去  $NJKO$  部分 (此部分在平面以外, 向  $KO$  可推至於無限) 之吸引力後, 所得即為該固定體之吸引力。

系 2. 倘在平面外的固定體之部分, 其吸引力與平面內者相較簡直不足算可以略去, 則當距離增加時, 平面內的部分之吸引力, 很近似的以  $CG^{n-3}$  為比而減小。

系 3. 今有一物體, 為界所限, 其一面為平的; 另有一小物在該平面之區域內被其所吸引, 被吸引的物體離該平面之距離與吸引者之大小相較為甚小者。吸引的物體本身係由均勻的部分所成, 其吸引力以大於距離之四次方的比減小。如是則全物體之吸引力, 其減小之比, 與一方數甚相接近, 此方數之根為該甚小的距離, 其指數較之以前的小 3。

倘物體之部分, 其吸引力以距離之三次方減

小，則此定理不能適用，因為在這裏，在平面外的部分之吸引（如系 2 中所說過者）較之在內者可為無限大。

§140. 附註。 一物體垂直的向一平面被其所吸引。今欲由已知的吸引定律上，求其運動。

解此問題的方法，可先求以直線向此平面的物體之運動，將其與一其他等速運動相組合，此等速運動係沿着與平面相平行的直線進行。與平面垂直的線上之吸引，可在物體於已知曲線上運動的條件下求其定律；如是，此問題即可仿 § 23 之例以解之。

倘將縱坐標析成爲收斂的級數，運算方法即可簡便。在任意的坐標角下，對於橫坐標  $A$ ，有一縱坐標  $B$  與之相當，且與  $A$  之任何方數

$$A^{\frac{m}{n}}$$

相比。今求物體在一曲線上運動的力，而縱坐標之上端則恆在該曲線內。假定將橫坐標放大一些，其量爲 0；如是則其相當的縱坐標，

$$(A+0)^{\frac{m}{n}}$$

即可化成為一級數

$$A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} A^{\frac{m-n}{n}} \cdot 0 + \frac{m^2 - mn}{2n^2} A^{\frac{m-2n}{n}} \cdot 0^2 \\ + \dots,$$

並設  $\frac{m^2 - mn}{2n^2} A^{\frac{m-2n}{n}} \cdot 0^2$

與力相比。如是則所求的力與

$$\frac{m^2 - mn}{2n^2} A^{\frac{m-2n}{n}} = \frac{m^2 - mn}{2n^2} B^{\frac{m-2n}{n}}$$

相比。

倘就一拋物線而言，則

$$m = 2, \quad n = 1,$$

而力與  $2B^0$

相比，故為常數。所以倘力為常數，則物體即在拋物線內運動，此為葛里雷 (Galilei) 所已經證明者。

倘就雙曲線而言，則

$$m = -1, \quad n = 1,$$

而力與

$$2B^{-3} = \frac{2}{B^3}$$

相比。所以力與  $B$  之三次方成反比時，物體即在雙曲線內運動。

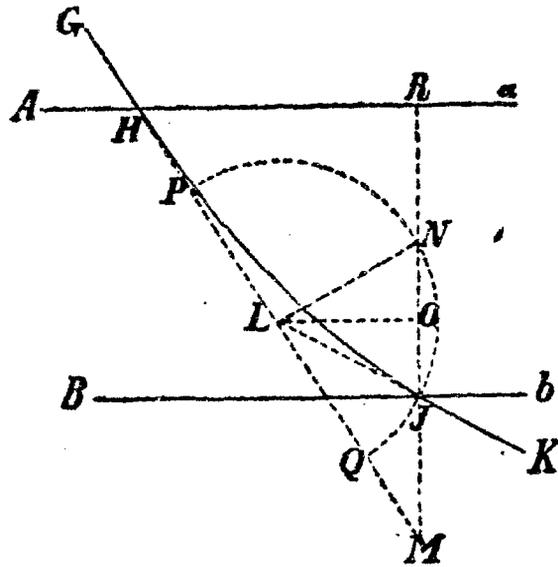
此項定理之敘述，姑以此爲止；我今進而研究運動之其他定理，此項定理尙未經提出過。

## 第十四章 論傾向大物體的 向心力所推動的小物體之運動

§ 141. 定理。 兩個相似的中介物爲一空間所隔開，此空間之兩旁均有平面爲其界。當一物體經過此空間時，垂直的向其一中介物被吸引或被撞擊，於此，該物體不爲其他的力所推動或阻礙。倘在距離兩平面之相等處，其吸引恆相等，則投入其一平面時投入角之正弦，與出離其他平面時出離角之正弦相比，其數爲常。

第一事。今設  $Aa, Bb$  爲二平行的平面。物體由  $GH$  線投入第一平面，當其通過中間的空間時，該物體被吸引或被推動，所以其軌道成爲曲線  $HJ$  而出離時則沿着  $JK$  線。今於出離的平面  $Bb$  上作垂線  $JM$ ，與  $GH$  之引長相交於  $M$ ，與投入面  $Aa$  相交於  $R$ ； $JK$  之引長並與  $HM$  相交於  $L$ 。

今以  $L$  爲中心  
點， $LJ$  爲半徑  
作一圓，與  $HM$   
相交於  $P, Q$ ，與  
 $MJ$  之引長相  
交於  $N$ 。



第一二五圖

今先假定  
吸引爲均勻的，

則如葛里雷所證明者， $HJ$  曲線即爲一拋物線，此  
拋物線有此屬性，即， $HM^2$  等於一通徑乘  $JM$  之  
積，而且  $HM$  線於  $L$  被平分。

今於  $MN$  上作垂線  $LO$ ，則即有

$$MO = OR,$$

而因  $NO = OJ$ ,

即有  $MN = RJ$ 。

但  $RJ$  爲已知常數，故  $MN$  亦必如此，

而  $MN \cdot MJ : P \cdot MJ = MN \cdot MJ : HM^2$  (1)

亦然。

然  $MN \cdot MJ = PM \cdot MQ$

$$= (LM + PL)(LM - PL)$$

$$= LM^2 - PL^2,$$

或  $MN \cdot MJ = LM^2 - JL^2$  (2),

故  $LM^2 - LJ^2 : HM^2$  爲常數。

因  $HM^2 = 4 \cdot LM^2$ , 故  $HM^2 : LM^2$  亦是如此,  
而經組合後

$$LM^2 - LJ^2 : LM^2$$

或  $JL^2 : LM^2$

亦即  $JL : LM$  亦爲常數。 (3)

在  $LMJ$  三角形內有

$$\sin LMR : \sin LJR = LJ : LM$$
 (4),

故此式前端之比爲常數; 然  $LMR$  卽爲投入角而  
 $LRJ$  則爲出離角, 故如定理所明。

第二事。 物體繼續通過若干爲平行面所界  
的空間

$$AabB, BbcC, \text{ 等等,}$$

並被一力所推動, 此力在各個空間之內部爲一致

的，但在不同的空間內則互異。按上所證明者，可

知投入第一平面

$Aa$  時投入角之

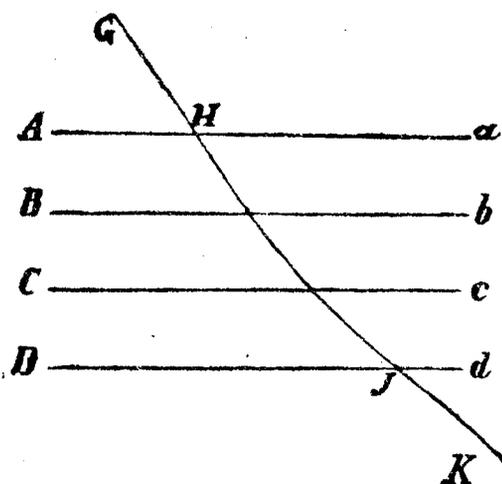
正弦與出離第二

平面  $Bb$  時出離

角之正弦相比，

其數為常。這裏

的第二個正弦，



第一二六圖

同時亦即為投入第二平面時投入角之正弦，故其

與出離第三平面  $Cc$  時出離角之正弦相比，亦為

常數；如此可類推至於無限。經組合後可知投入第

一平面時投入角之正弦與出離最後平面時出離角

之正弦相比，亦為常數。

今將平面間之相互距離減小，將其數增加至

於無限，使吸引的作用可按一某定律成為連續。如

是，投入第一平面時投入角之正弦與出離最後平

面時出離角之正弦相比，亦仍為常數。此即所欲證

者。

§ 142. 定理. 在同樣的假定下, 物體投入前之速度與出離後之速度相比, 如出離角之正弦與投入角之正弦相比。

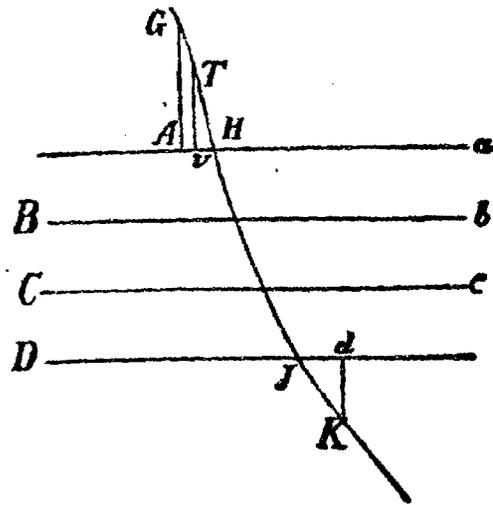
今設

$$AH = Jd,$$

並作  $AG, dK$  二垂線, 與投入線及出離線  $GH, JK$  相交於  $G$  及  $K$  在  $GH$

上取

$$TH = JK,$$



第一二七圖

再作  $Tv$  線垂於  $Aa$  平面上. 按定律系 2, 可將物體之運動析成爲二, 其一與  $Aa, Bb$  等相垂直, 其他則與之相平行. 吸引力之作用在垂直的方向內, 故與平行的方向內之運動無關, 而在此運動方面, 物體於等時間內沿此項平行線所經過之空間相等; 而此項空間則在  $AG$  線,  $H$  點以及  $dK$  線,  $J$  點之中間. 所以在等時間內, 其所作的線爲

$GH$  及  $JK$ .

在投入以前之速度與出離以後者相比，

$$\begin{aligned} \text{如} \quad & GH : JK \\ & = GH : TH \\ & = AH : vH \\ & = Jd : vH \end{aligned}$$

而因  $JK = TH$ ，如

$$\frac{Jd}{JK} : \frac{vH}{TH},$$

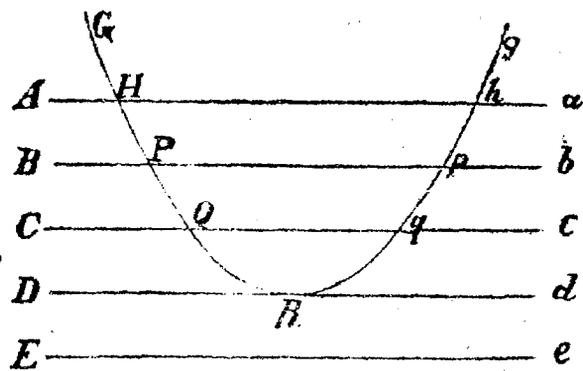
此即是，如出離角之正弦與投入角之正弦相比。此即所欲證者。

§ 143. 定理。 在同樣的假定下，倘投入前之運動較之以後為速，則物體最後必被反射出來，而反射角等於投入角。

試設想物體仍如前在平行面  $Aa$ ,  $Bb$ ,  $Cc$  等之間作成拋物線的弧，今設  $HP$ ,  $PQ$ ,  $QR$ , 等為此項弧。又設投入線  $GH$  對於  $Aa$  平面之傾斜如是，能使投入角之正弦與圓之半徑（與之相當的）相比，如投入正弦與出離  $Dd$  平面時之出離正弦相

比。既如此，則出離正弦與半徑相等，而角本身即為一直角，故

出離線與  $Dd$  平面相合。物體在此平面內達到  $R$  點，而



第一二八圖

因出離線與此相合，故物體不能再向  $Ee$  平面進行。在出離線  $Rd$  上前進亦為不可能者，因為此物體恆向投入的中介物被吸引。所以此物體即在  $Cc, Dd$  平面之間轉彎，作成拋物線的弧  $QRq$ ，其主要頂點在  $R$ 。此弧與  $Cc$  平面之二交角，即  $Q$  處的與  $q$  處的，相等，而當物體經過  $qp, ph$ ，等諸弧（此項弧與  $QP, Ph$  等諸弧相合）時，其與其他平面在  $p, h$  等處相交之角亦等於以前  $P, H$ ，等處之角，及至  $h$  處即以相等的傾斜出離。

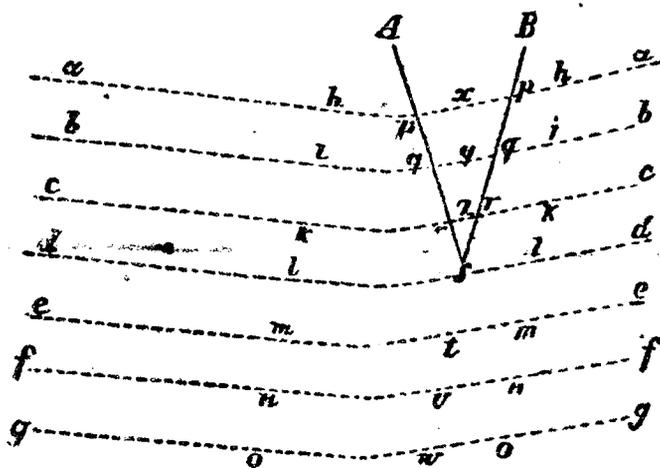
今設想  $Aa, Bb, Cc, Dd, Ee$  等中間之空間減至無限小，其數增至無限多，則吸引力之作用即按

照一某種定律而成爲連續的，出離角與投入角亦仍保持其相等。

此卽所欲證者。

§ 144. 附註。 光之反射及屈折與此處所論者頗有相似處；如司奈爾 (*Snellius*) 所發見，前者方面之正割，其比恆爲一定，因而其正弦之比亦爲常數，此則爲笛卡爾 (*Cartesius*) 所證明者，至於光之傳達亦爲有時間的，由太陽達到地球須經  $7^m$  或  $8^m$  時間，此則近來由木星方面的現象所可證知者，天文學者曾作觀察證明之。在空氣中的光線，當其接近黑暗或透明物體之邊而經過時，能沿此物體彎曲，好像後者能吸引之一樣（此種現象，格利馬地 *Grimaldi* 曾於由小孔中透入光線至暗室內時發見，我自己亦曾經驗過）。在這些光線中，祇有其最接近物體者，其被彎曲特甚，好像其被吸引亦特甚一樣；此亦我自己所屢屢觀察過者。距離較遠的光線，其彎曲卽小，其更遠者則向其他面而於此構成三顏色圖。

圖中  $s$  爲刀之口或一楔子  $AsB$  之口,  $gowog,$   
 $fnvnf, dlsl d,$  爲光線, 在刀處彎曲成爲弧, 并隨其  
 距離之大小而較多或較少彎曲。因此項彎曲係在



第一二九圖

刀外空氣中發生, 故透入刀的光線本身, 當其未與  
 刀接觸時, 亦必已在空氣中彎曲了。倘投入玻璃  
 時, 亦必如此。從可知光之屈折, 不在投入點發生,  
 而爲一種連續的漸屈, 一部分在空氣中未與玻璃  
 接觸時已屈, 一部分 (倘我沒有錯誤) 在玻璃內屈  
 折; 在圖中

$ckzkc, biyib, ahaha$

諸線方面, 其投入點爲  $r, q, p,$  此項線在  $k$  與  $z, i$

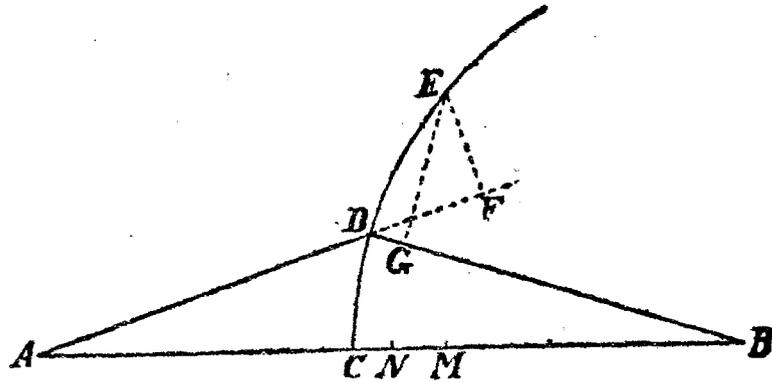
與  $y, h$  與  $x$  之間已彎曲。

因爲光之傳達與小物體之前進中間有類似處，故爲光學上的應用起見，可增加加入以下諸定理，於此，我對於該項放射線之性質（爲物體或非物體）并無所主張，祇假定物體之軌道與光線甚相似而已。

§145. 問題。 假定投入任何面時投入角之正弦與其出離角之正弦相比，其數爲常，而且物體軌道在該面之附近發生彎曲時係在一極短的空間內，此空間可視爲一點。今欲求一面，其影響能使一切由一已知處所陸續出發的物體，向一其他已知的處所收聚。

今設  $A$  爲一處所，諸小物體由此出發分散， $B$  則爲應向之收斂的處所， $CDE$  爲一曲線，將此按  $AB$  軸旋轉時即可得所求之面。又設  $D, E$  爲該曲線上之任意點， $EF, EG$  則爲物體之軌道  $AD, DB$  上之垂線。今設  $D$  點與  $E$  點相接近，則  $DF$  與  $DG$  之最後比，將與投入正弦與出離正弦之比

相等。因此， $AD$  之增加與  $BD$  之減小，其比為常數；故如於  $AB$  軸上任取一點  $C$ ，使曲線經過此點，並使  $CM$  與  $CN$  相比與前相等，則可以  $A, B$



第一三〇圖

為中心點， $AM, BN$  為半徑作二圓，相交於  $D$ 。如是， $D$  點即在所求之曲線  $CDE$  內而可由此以決定曲線。

系 1. 倘使  $A$  或  $B$  一回遠至無限，一回達到  $C$  之不同部分，則即可得一切圖形，如笛卡爾於其光學及幾何學內研究折光時所已敍過者。因為他極注重其求法而且將其秘而不宣，故特於此補明之。

系 2. 倘一物體沿  $AD$  線投於  $CD$  面上，再沿

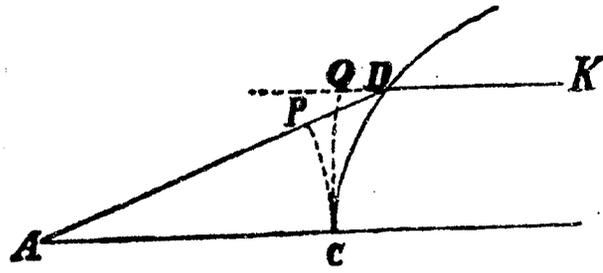
一其他線  $DK$

出離，並設想由

$C$  出發作曲線

$CP, CQ$ ，各與

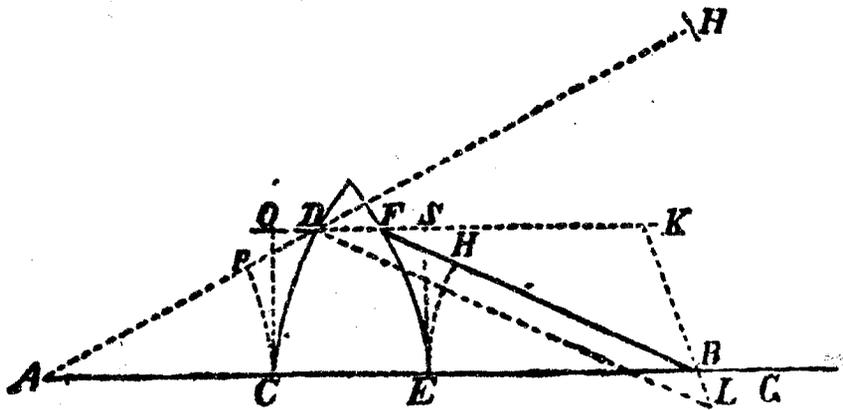
$AD, DK$  相垂



第一三二圖

直，則  $PD, QD$  之增加，因而  $PD, QD$  本身，其比均如投入正弦與出離正弦之比；反之亦然。

§ 146. 問題。 在同樣的假定下，試設想於  $AB$  軸作一有規則或不規則的面  $CD$ ，能吸引物體，而且由  $A$  出發的物體須經過之。今欲求一其他能吸引的面  $EF$ ，其影響能使該項物體均向一固定的處所  $B$  收聚。



第一三二圖

$AB$  線與第一面相交於  $C$ , 與第二面交於  $E$ ,  $D$  則為任意所取的點。今假定投入正弦與第一面之出離正弦相比, 以及出離正弦與第二面之投入正弦相比, 如

$$M : N \quad (1).$$

試將  $AB$  引長至  $G$ , 使

$$BG : CE = M - N : N \quad (2),$$

又將  $AD$  引長至  $H$ , 使

$$AH = AG \quad (3),$$

並將  $DF$  引長至  $K$ , 使

$$DK : DH = N : M \quad (4).$$

再作  $BK$  線, 以  $D$  為中心,  $DH$  為半徑作一圓, 與  $KB$  之引長相交於  $L$ , 引

$$BF \text{ 與 } DL \text{ 相平行} \quad (5)$$

如是則  $F$  即為  $EF$  曲線上之點, 而將此曲線按  $AB$  軸旋轉時, 即可得所求之面。

試設想  $CP$  與  $AD$ ,  $CQ$  及  $ES$  與  $FD$ ,  $ER$  與  $BF$  相垂直, 則

$$QS = CE \quad (6),$$

而  $PD : QD = M : N,$

故按(4)

$$PD : QD = DL : DK,$$

$$PD : QD = FB : FK \quad (7).$$

由此可知

$$\begin{aligned} PD : QD &= DL - FB : DK - FK \\ &= PH - PD - FB : DF \\ &= PH - PD - FB : FQ - QD, \\ PD : QD &= PH - FB : FQ \quad (8). \end{aligned}$$

而因  $PH = CG, QS = CE,$

$$\begin{aligned} PD : QD &= CE + BE + BG - BF : CE - FS \\ &= CE + BG - FR : CE - FS. \end{aligned}$$

但  $CE + BG : CE = M : N,$

故  $CE + BG - RF : CE - FS = CE + BG : CE$   
 $= M : N,$

$$FR : FS = M : N \quad (9).$$

按 § 145 系 2, 可知  $EF$  面能使沿  $DF$  向其

投入的物體，於  $PR$  上向  $B$  進行。此即所欲證者。

§ 147. 附註. 用同法可進而求三個或多個面。但在光學方面的應用上，恆以球形的圖為適用。倘用二片球形的玻璃，其間含有水者，以構造望遠鏡之對物鏡，則由水之屈折，可將玻璃外面的屈折差失儘量的改正。這樣的對物鏡較之橢圓的及雙曲線的為好，不僅因其易於製造，亦且因其能將玻璃軸之外的光線束較正確的屈折。

但因不同的光線之屈折性亦不同，故光學儀器終不能用球形或其他圖形來改至於完美。倘無法將由此所得的差失改正，則一切改正其餘差失的努力均將落空。

# 論物體之運動

## 第二編

### 第一章 論某項物體之運動

#### 此項物體受一種與速

#### 度相比的抵抗力者

§ 1. 定理。 倘物體於其運動上受一種抵抗力，此力與其速度相比，則此物體失去其運動之一部分，此部分與其所經過的軌道相比。

蓋因各個相等時間內所失去的運動與速度相比，即是說，與所經過的道路之部分相比，故經組合後，即可得全部時間內所受的損失，知其與全部道路相比。此即所欲證者。

系。 故如一不受若何重力支配的物體，以某種推撞而在自由空間內運動，而且開始時的全部運動，以及經過若干道路後所餘下的運動均為已知，

則物體於任何時間內所可經過的全部道路，亦均可求得。

蓋最後的道路與先前所經過者相比，猶如開始時的全部運動與其已失去的部分相比。

§ 2. 定理。 倘有若干量，與其差相比，則此項量本身亦成爲連比。

蓋由

$$A : A - B = B : B - C = C : C - D = \dots,$$

可知  $A : B = B : C = C : D = \dots$

此即所欲證者。

§ 3. 補題。 今有一物體，其所受抵抗與其速度相比；此物體僅受一力之撞擊而運動，其所在的中介物爲等質的，而且各時間部分爲相等的。如是則開始時各時間部分內之速度，成爲一幾何級數，而各時間內所經過的道路，其比如速度之比。

第一事。今將時間均分爲若干段，在每段之開始，與速度相比的抵抗力即以一撞擊發生其影響；如是則各個時間段內速度之減小與速度本身

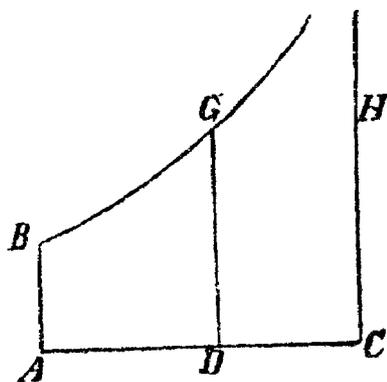
相比。因此，諸速度均與其差相比，而本身成爲一連比。今用等多的時間段，合成爲諸相等的時間，則在此項時間開始時，其速度之比，猶如一連比之諸項之比，此諸項係於連比內每越過幾項（其數相等）而取得者。但此諸項之比，可自中間諸項之等比組合而得，故亦爲相等者。因此，與此等項相比的速度，成爲一幾何級數。今將該項時間段縮爲無限小，同時其數亦增加至無限多，俾抵抗力之作用成爲連續的，則在各等時間之開始時的連比速度，於此亦仍成爲連比。此即所欲證者。

第二事。由以上所明，可知速度之差，即是，在各個時間內所失去的速度之部分，與全部速度相比。但在各時間內所作的道路與速度所失去的部分相比，故與其本身相比。

此即所欲證者。

系。  $ADC, CH$  爲二直角的漸近線，今作其雙曲線  $BG$ ，並引  $AB, GD$  與  $AC$  相垂直。今如用  $AC$  以表運動開始時之速度以及中介物之抵

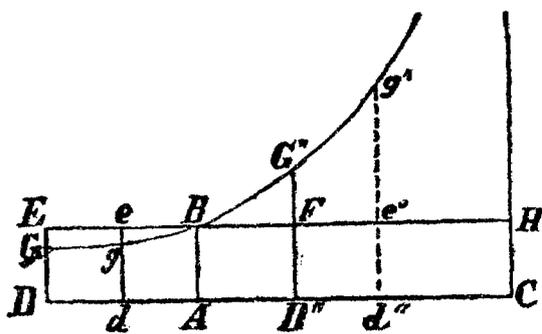
抗力，經過若干時後  
則用不定的線  $DC$  表  
之；如是，則時間可用  
 $ABGD$  面表之，在此  
時間內所作的道路用  
 $AD$  表之。



第一三三圖

蓋如將該面積按時間等速的以  $P$  之運動放大  
之，則  $DC$  即以幾何的比按速度減小，而在等時間  
內所作的  $AC$  之部分，其減小之比亦如此。

§ 4. 問題。 一物體在一相似的中介物中作直  
線的上昇與下降，此中介物之抵抗力與速度相比，  
對於該物體發生  
影響者尚有整齊  
的重力。今欲求  
其運動。



第一三四圖

當物體上昇  
時，重力可用直  
角形  $BACH$  表之，而在開始上昇時，中介物之抵抗

則可用其他一面的直角形  $ABED$  表之. 今就  $AC$ ,  $CH$  二直角的漸近線作一雙曲線經過  $B$  點, 與  $DE$  及  $de$  相交於  $G$  及  $g$ . 如是則物體

上昇時在  $DGgd$  時間內經過空間

$$EGge,$$

在  $DGBA$  時間內經過空間

$$EGB,$$

下降時在  $ABG''D''$  時間內經過空間

$$BFG'',$$

在  $B''G''g''d''$  時間內經過空間

$$FG''g''e''$$

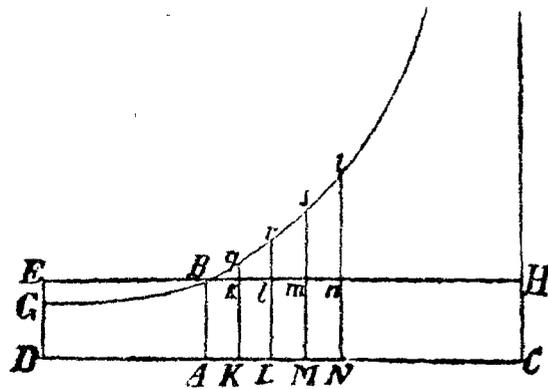
而物體之速度, 在此項時間之週期內, 各為

$$ABED, ABed,$$

$$\text{零, } ABFD'',$$

$$ABe''d''.$$

物體於其下降中所可達到的最大速度, 為



第一三五圖

$ABHC$ .

今將  $ABHC$  直角形析成爲無數小者。

$Ak, Kl, Lm, Mn$ , 等等,

其相比,如等多的相等時間內速度之增加相比.如是,則

零,  $Al, Am, An$ , 等等,

與全部時間相比,即是,與各個相等時間開始時中介物之抵抗力相比。

$AC$  與  $AK$  或  $ABHC$  與  $ABkK$  相比,猶如重力與第二時間段開始時之抵抗力相比.今由重力上每次將抵抗力減去,則所餘者爲

$ABHC, KkHC, LlHC, MmHC$ , 等等,

而其比則如各個時間段開始時推動物體之絕對力相比,因此,如速度之增加之比,亦即是,如直角形

$Ak, Kl, Lm, Mn$ , 等等,

之比。

按 § 2. 即可知其成爲一幾何級數。

今設

$Kk, Ll, Mm, Nn,$  等

諸線之引長與雙曲線相交於

$q, r, s, t,$  等

點, 則

$ABqK, KqrL, IrrsM, MstN,$  等

諸面均相等, 所以與時間及相等的重力均相似。

但按第一編 §7 系 3 及 §8, 有

$$\begin{aligned} ABqK \text{ 面} : BqB \text{ 面} &= Kq : \frac{1}{2}qk \\ &= AC : \frac{1}{2}AK, \end{aligned}$$

即是, 等於重力與第一時間段中間之抵抗相比。

同樣的理由, 可知

$qKlr, rLMs, sMNT,$  等等

諸面與

$qklr, rlms, smnt,$  等等

諸面相比, 如重力與第二, 第三, 第四, 等等時間段中間之抵抗相比。

又因相等的面

$BAKq, qKlr, rLMS, sMNt$ , 等等

與每次的重力相似,故

$Bkq, qklr, rlms, smnt$ , 等等

諸面與各時間段中間之抵抗力相比,即是,與速度相似,因而亦與所作的軌道相似.今取各相似的量之和,則

$Bkq, Blr, Bms, Bnt$ , 等等

諸面與所作的全部軌道相似,而

$ABqK, ABrL, ABsM, ABtN$ , 等等

諸面與時間相似.

所以在下降時,於任何時間

$ABrL$

內經過空間

$Blr$ ,

而於  $LrtN$  時間內則作成軌道  $lrtn$ . 此即所欲證者.

當上昇時,其運動狀況亦可如是證明之.

系 1. 物體在下降時所可達到的最大速度,與

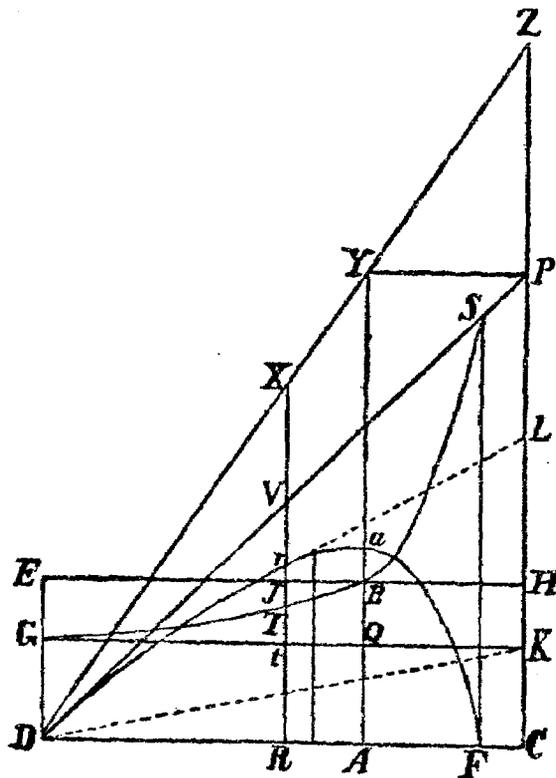
每個一定時間內所達到者相比，如恆影響於其上的常的重力與該時間末之抵抗力相比。

系 2. 倘時間以算術級數增加，則其最大速度及上昇時之速度之和，以幾何級數減小。

系 3. 在相等的時間段內所作之軌道，其差亦以同幾何級數減小。

系 4. 一物體所經過的空間與二空間之差相等，此二空間中之其一與開始下降後之時間相比，其他一空間則與速度相比，而在開始下降時此二空間相等。

§5. 問題. 假定在一相似的中介物內重力之影響為整齊的，其方向係與地平面相垂直。今欲求



第一三六圖

一拋出的物體之運動，此物體在中介物中受一與速度相比的抵抗。

設拋出的物體由  $D$  點出發沿一直線  $DP$  進行，其長則表運動開始時之速度。今由  $P$  點作  $PC$  垂線垂於地平線  $DC$  上，並與  $DC$  相交於  $A$ ，使  $DA$  與  $AC$  相比，如開始向上運動時之抵抗力與重力相比，或即是，

$$AD \cdot PD \text{ 與 } AC \cdot CP$$

相比，如開始運動時之全部抵抗力與重力相比。

今作一任意的雙曲線  $GTBS$ ，與垂線  $DG$ ， $AB$  相交於  $G$ ， $B$ ，並完成平行方形  $DGKC$  其一邊  $GK$  與  $AB$  相交於  $Q$ 。今試作一線  $N$ ，使

$$N : QB = DC : CP \quad (1),$$

並於  $DC$  上之任何點  $R$  作垂線  $RT$ ，與雙曲線相交於  $T$ ，與  $EH$ ， $GK$ ， $DP$  相交於  $J$ ， $t$ ， $V$ ；又取

$$Vr = \frac{tGT}{N}, \quad Rr = \frac{GTJE}{N} \quad (2),$$

則在  $DRTG$  時間內物體即達到  $r$  點，並作成  $DraF$  曲線， $r$  恆在此曲線內。以後，此拋出的物體於  $AB$

線內達到最高點  $a$ , 而恆與  $PC$  漸近線相接近。其任何點  $r$  之速度, 與該點之切線  $rL$  相比。因

$$N : QB = DC : CP = DR : RV,$$

故 
$$RV = \frac{DR \cdot QB}{N} \quad (3)$$

而 
$$Rr = RV - V_r = \frac{DR \cdot QB - tGT}{N}$$

$$= \frac{DR \cdot AB - RDGT}{N} \quad (4).$$

今用  $RDGT$  表時間, 並將物體之運動析成爲二支運動, 其一垂直的向上, 其他地平的向旁邊。又因抵抗力與運動相比, 故亦可將其析成爲二, 與上所述的支運動相比相反。地平方向內的支運動與  $DR$  線相比, 向上的支運動則與

$$DR \cdot AB - RDGT, \text{ 即是, 與 } Rr \text{ 相比。}$$

在運動開始的時候, 有

$$RDGT = DR \cdot AQ,$$

故在此處

$$Rr = \frac{DR \cdot AB - DR \cdot AQ}{N},$$

$$\begin{aligned} \text{或} \quad \frac{Rr}{DR} &= \frac{AB - AQ}{N} \\ &= BQ : N = CP : DC \quad (5) \end{aligned}$$

即是， $Rr$  與  $DR$  相比，如開始時的上昇運動與地平運動相比。

因  $Rr$  恆與向上的運動相比， $DR$  則恆與地平運動相比，又因在開始時  $Rr$  與  $DR$  相比，如前者與後者相比，故

$$Rr : DR$$

所表者必恆為二支運動之比，而物體在  $DraF$  曲線內運動， $r$  點則恆在此曲線上。此即所欲證者。

系 1. 所以有

$$Rr = \frac{DR \cdot AB - RDGT}{N}.$$

今將  $RT$  引長至  $X$ ，使

$$RX = \frac{DR \cdot AB}{N}, \quad (6)$$

即是，將  $ACPY$  平行方形完成，使  $DY$  與  $CP$  相交於  $Z$ ，並將  $RT$  引長，使其與  $DY$  相交於  $X$ ，則

$$X_r = \frac{RDGT}{N} \quad (7),$$

故與時間相比。

系 2. 今取無限多的線  $CR$ , 亦即是, 使  $ZX$  成爲幾何級數, 則即得等多的線  $X_r$ , 成爲一算術級數。

如是,  $DraF$  曲線即不難用對數表以作之。

系 3. 今作一拋物線, 其頂點爲  $D$ , 向下引長的直徑爲  $DG$ , 其通徑與  $2 \cdot DP$  相比, 猶如運動開始時全部抵抗力與重力相比。如是則物體由  $D$  出發沿  $DP$  線進行在有抵抗(整齊的抵抗)的中介物中作成  $DraF$  曲線所須的速度, 等於物體由同點出發沿  $DP$  進行在無抵抗的中介物中作成該拋物線所須之速度。

蓋在運動開始時此拋物線之通徑

$$= \frac{DV^2}{V_r},$$

而

$$V_r = \frac{tGT}{N} = \frac{DR \cdot Tt}{2N} \quad (8).$$

倘作一直線, 與雙曲線  $GTS$  相交於  $G$ , 則此

直線與  $DK$  相平行,故

$$Tt : KC = DR : DC,$$

或 
$$Tt = \frac{CK \cdot DR}{DC} \quad (9).$$

又按 (1), 有

$$N = \frac{QB \cdot DC}{CP},$$

所以 
$$V_T = \frac{DR^2 \cdot CK \cdot CP}{2 \cdot DC^2 \cdot QB},$$

或因 
$$DR : DC = DV : DP,$$

$$V_T = \frac{DV^2 \cdot CK \cdot CP}{2 \cdot DP^2 \cdot QB}.$$

如是,通徑

$$\frac{DV^2}{V_T} = \frac{2 \cdot DP^2 \cdot QB}{CK \cdot CP},$$

或因 
$$QB : CK = DA : AC,$$

$$\frac{DV^2}{V_T} = \frac{2 \cdot DP^2 \cdot DA}{AC \cdot CP} \quad (10).$$

所以 通徑 :  $2DP = DP \cdot DA : PC \cdot AC,$

或 通徑 :  $2DP = \text{抵抗力} : \text{重力} \quad (11).$

系 4. 所以,倘將一物體由一已知的處所  $D$ , 以

一定的速度，沿一位置已定的線  $DP$  拋出，而中介物之抵抗力在運動開始時亦為已知，則其所作的曲線  $DraF$  亦可求得。

蓋由已知的速度，可得拋物線之通徑，而由 (11)，即可求得  $DP$ 。今將  $CD$  於  $A$  如是分割之，使

$$CP \cdot AC : DP \cdot DA = \text{重力} : \text{抵抗力},$$

則即得  $A$  點，而由此乃可求曲線  $DraF$ 。

系 5. 反之，倘曲線  $DraF$  為已知，則亦可求得各點  $r$  之物體速度以及中介物之抵抗力。

由已知的比

$$CP \cdot AC : DP \cdot DA,$$

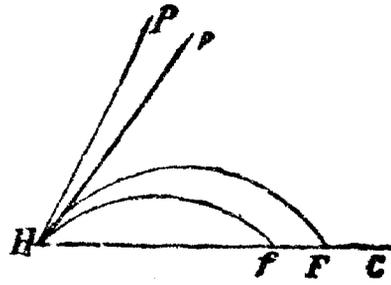
即可求得運動開始時中介物之抵抗以及拋物線之通徑，由此並可知運動開始時之速度。由  $Lr$  切線之長，可推得與之相比的速度以及任何點之抵抗力，因為抵抗與後者是相比的。

系 6. 設  $2DP$  與拋物線之通徑相比，如  $D$  點之重力與抵抗力相比。倘速度增加，則抵抗力與之相比的增加，而通徑則以其平方增加。如是， $2DP$  仍

以該項簡單的比增加，故恆與速度相比，即  $CDP$  角變動，倘速度不變，亦恆是如此。

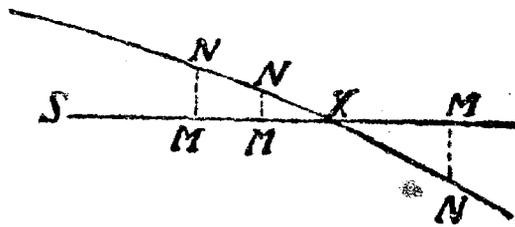
系 7. 由此，可得到一種方法，用此方法可由現象中很近似的求得曲線  $DraF$ ，然後再由此求其抵抗及速度。

今設將二個相等相似  
的物體以相等的速度由已  
知的處所  $D$  拋出，但其角  
度則不相同，一為  $CDP$ ，  
一則為  $cDp$ 。物體達到地



第一三七圖

平面  $DC$  時，其  
落在的點為  $F, f$ ，  
此亦為可知者。



第一三八圖

今使  $DP$  或  $Dp$   
取一任何的長，並設想  $D$  點之抵抗與重力相比，  
其數可用  $SM$  長表之，由所取的  $DP$  之長，可用運  
算以推得  $DF, Df$  之長，於是可自運算所得的比

$$\frac{Df}{DF}$$

上，減去由試驗所得的比，並用垂線  $MN$  表其差。此種方法可繼續用至數次，一面假定新的抵抗力與重力之比，新的差於是亦用新的  $MN$  表之。正的差與負的差可各在  $SM$  之一邊，並用有規則的曲線連結諸  $N$  點，此項曲線即用  $NNN$  表之，其與  $SMMM$  之交點則為  $X$ 。如是， $SX$  即為抵抗力與重力之真正的比，為我們所欲求者。由此比，可用運算以求得  $DF$  之長，此  $DF$  之長與用試驗所得者相比亦即等於  $DP$  之真正的長與其假定的長相比。既得此後，即得曲線  $DraF$ ，為物體所作者，並可求其各點之速度及抵抗力。

§ 6. 附註。 所謂抵抗力與速度相比這個假定，與其說是與自然界中實況相合者，不如說是數學的假設為妥。倘物體在較固的中介物內作很遲的運動，則其狀況與此相近。但在完全沒有固性的中介物內，抵抗力與速度之平方相比。物體之速度較大後，能對於同量的中介物，在較短的時間內使其感受較大的運動，而在相等的時間內則使其感受

更大的運動（以平方爲比）；抵抗力即與所感受的運動相比。我們現在欲研究，由此項抵抗定律，可得若何的運動。

## 第二章 論某項物體之運動

### 此項物體所受之抵抗

### 力與速度之平方相比

§ 7. 定理. 一物體受一抵抗力，此力與速度之平方相比；物體之運動係在等質的中介物內，而且祇受一力之推撞。於此，其時間可成爲一向上的幾何級數。在此狀況下，各時間段開始時之速度，成爲一幾何級數，此級數與前相同，但適爲其倒。其在各時間段內所作的軌道，係均相等。

蓋中介物之抵抗力與速度之平方相比，而速度之減小，其比如抵抗力。故如將時間均分成爲無數的段，則各段開始時速度之平方，其比如各速度之差。

今設  $CD$  線上所取的諸段

$AK, KL, LM,$  等等

爲該項時間段；今作垂線

$AB, Kk, Ll, Mm,$  等等，

與雙曲線  $BklmG$  相交於

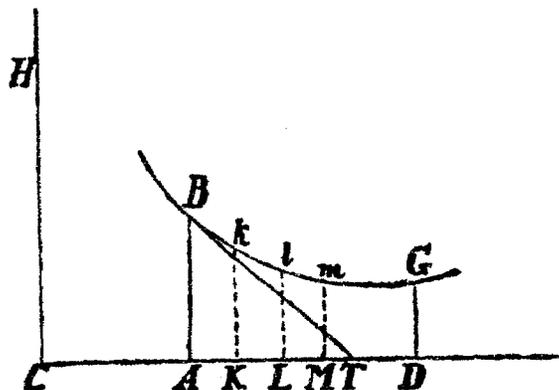
$B, k, l, m$  等點。

此雙曲線之中心

點爲  $C$ ，其直角

的漸近線爲  $CD,$

$CH.$



如是，

第一三九圖

$$AB : Kk = CK : CA \quad (1),$$

或  $AB - Kk : Kk = AK : CA,$

$$AB - Kk : AK = Kk : CA,$$

以及  $AB - Kk : AK = AB \cdot Kk : AB \cdot CA \quad (2).$

因  $AK, AB \cdot CA$  均爲常數而且已知，故  $AB - Kk$  與  $AB \cdot Kk$  相比；最後，倘

$AB$  與  $Kk$  相合，

$AB - Kk$  與  $AB^2$  相比。

用此方法,可推知

$$Kk - Ll, Ll - Mm, \text{等等},$$

各與  $Kk^2, Ll^2, \text{等等}$  相比。

由此可知

$$AB, Kk, Ll, Mm \text{ 等線}$$

之平方與其差相比,而因速度之平方亦如後者之差相比,故二者之級數必相似。既證明此後,即可知此項線所作之空間亦成爲一級數,此級數與速度所作之軌道所成者相似。

所以,倘用  $AB$  表第一時間段  $AK$  開始時之速度,  $Kk$  表第二段  $KL$  開始時之速度;又用  $AKkB$  面表第一時間段內所作之道路,則以下的速度可用

$$Ll, Mm, \text{等線}$$

表之,而所作的道路,則可用

$$KLlk, LMml \text{ 等面}$$

表之。今將其組合,用  $AM$  表全部時間,則所作的全部道路,亦可用  $AMmB$  面表之。

今設想將時間  $AM$  析成爲

$AK, KL, LM,$  等諸段,

使  $CA, CK, CL, CM,$  等等

成爲一幾何級數,則該項段亦成爲此幾何級數,而  
速度

$AB, Kk, Ll, Mm,$  等等

亦成爲此級數,但係倒的.諸空間

$AKkB, KLLk, LMml$  等

則均相等.

此卽所欲證者.

系 1. 故如用漸近線上之任何部分  $AD$  表時間,而在此時間開始時之速度用  $AB$  表之;則該時間末之速度卽可用  $GD$  表之,其所作的全部道路則爲  $ABGD$  面積.直角形

$$AB \cdot AD$$

可表物體於  $AD$  時間內以開始的速度  $AB$  在無抵抗的中介物內所作的道路.

系 2. 故如欲求有抵抗的中介物內所作之道

路,則可先求以  $AB$  速度在無抵抗的中介物內所作者,然後將此與所求者相比,使其如

$$AB \cdot AD : ABFD.$$

系 3. 欲求中介物之抵抗力,可先假定此力在運動開始時與一整齊的向心力相等,此向心力對於在無抵抗的中介物內下墜的物體,能使其於  $AC$  時間內產生  $AB$  速度.

蓋如作  $BT$  線,與雙曲線相切於  $B$ ,與漸近線相交於  $T$ ,則

$$AT = AC,$$

而此處之第一線表一時間,在此時間內該抵抗力能將全部速度  $AB$  抵消.

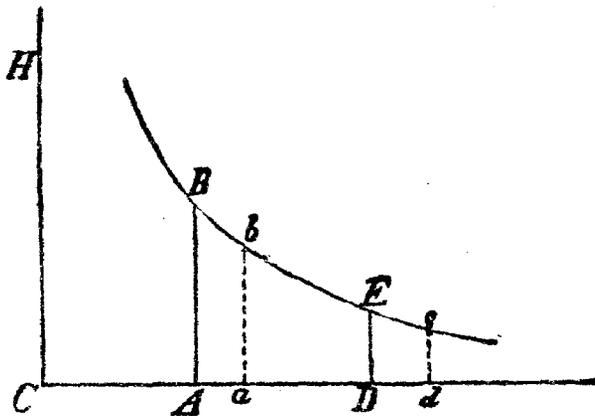
系 4. 由此亦即可求得此抵抗與重力或任何其他已知向心力之比.

系 5. 反之,倘抵抗力與任何一已知向心力之比為已知,則即可求得時間  $AC$ ,在此時間內,與抵抗力相等的向心力能產生一速度  $AB$ ;由此,復可得一點  $B$ ,為雙曲線所必須經過者(此雙曲線之

漸近線爲  $CH$  與  $CD$ )。此外,復可得物體以該速度  $AB$  運動時在  $AD$  時間內於等質的抵抗中介物內所可作的道路  $ABGD$ 。

§ 8. 定理。 今設均勻的相等的球體受一抵抗力,此抵抗力與速度之平方相比;又,此項物體祇受一力之衝動而運動。如是,物體在(與開始速度成爲反比的)一定時間內,作成相等的軌道,其所失去的速度之部分,與全部相比。

今以  $CD$ ,  
 $CH$  爲漸近線  
 作雙曲線  $Bb$ 。  
 $Ee$  與垂線  $AB$ ,  
 $ab$ ,  $DE$ ,  $de$ , 相  
 交於  $B, b, E, e$



第一四〇圖

諸點;開始時的速度用垂線  $AB, DE$  表之。時間則用  $Aa, Dd$  如是則

$$\begin{aligned} Aa : Dd &= DE : AB \\ &= CA : CD, \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{因而 } Aa : Dd &= CA + Aa : CD + Dd \\ &= Ca : Cd \quad (2), \end{aligned}$$

$$Aa : Dd = de : ab \quad (3).$$

而由(1)與(3)有

$$AB : DE = ab : de \quad (4).$$

從可知  $ABba$ ,  $DEed$  二面相等, 即是, 所作的軌道相等, 而開始時的速度  $AD$ ,  $DE$  相比, 如最後的速度  $ab$ ,  $de$  相比。

又因

$$AB : DE = AB - ab : DE - de \quad (5),$$

故開始時速度亦與其失去的部分相比。此即所欲證者。

§ 9. 定理。 倘抵抗力與速度之平方相比, 則受此項力的球體, 在一定的時間內(此項時間與開始時的運動成正比, 與開始時的抵抗力成反比), 所失去的運動之部分與其全部相比, 而其所作的道路, 則與該項時間及開始速度之合相比。

蓋所失去的運動之部分與抵抗力及時間之合

相比。倘所失去的運動與全部運動相比，則必抵抗力與時間之合與運動相比，即是，時間與運動成正比，與抵抗力則成反比。今即以此為比取各個時間段，則物體所失去的運動之部分與全部運動相比，並保持其原來比例的速度。因速度之比為已知的而且不變的，故其所作軌道恆與開始時的速度及時間之合相比。此即所欲證者。

系 1. 故如運動同速度的物體所受之抵抗力與其對徑之平方相比，則以任何速度運動的等質球體所作之軌道亦與對徑相比，而所失去的運動之部分與運動相比。

蓋每個球之運動與其速度相比並與其質量相比，即是，與其運動之速度及徑之三次方相比。按所設，抵抗力與徑之平方相比並與速度之平方相比。又，時間與運動成正比，與抵抗力成反比，即是，與徑成正比，與速度成反比。因此，與時間及速度相比的道路，與徑亦相比。此即所欲證者。

系 2. 倘等速的物體所受之抵抗力與徑之  $\frac{3}{2}$  次

方相比，則以任何速度運動的等質球體所作之軌道，亦與徑之 $\frac{3}{2}$ 次方相比，其所失去的運動之部分與運動之全部相比。

蓋時間之增加，其比與抵抗力之減小同，而軌道則與時間相比。

系 3. 廣之，倘等速的物體所受之抵抗，與徑之任何次方相比，則以任何速度運動的等質球體，其所作之軌道與一商數相比，此商數由徑之三次方被上所述的方所除，而其所失去的運動之部分則與全部運動相比。

設  $D, E$  為徑，則抵抗力與  $D^n, E^n$  相比，而所作的軌道與  $D^{3-n}, E^{3-n}$  相比。軌道既與  $D^{3-n}, E^{3-n}$  相比，故速度相比仍如開始時一樣。

系 4. 倘球非為等質者，則較密的球所作之軌道亦較為大，且其較大之度與密度相比。

蓋如速度相等，則運動之大小與密度相比，而時間與運動以同比例增加，軌道則與時間以同比例增加。

系 5. 倘球體在不同的中介物內運動，則在抵抗力較強的中介物內，其所作之軌道較小，且其度亦與抵抗力之強相比。

蓋時間與抵抗力成反比，而軌道則與時間相比。

§ 10. 補題。 欲求函數 (*Genita*) 之差率 (*Moment*)，可將各個量之差率與其指數及係數相乘，然後將所得的乘積相加之即得。

任何一個量，倘由若干項所成，用算術上之乘除，開方以及幾何上之求積求邊等法所產生者，我名之為函數。屬於此類的量，有：乘積，商數，根數，直角形，平方，立方，平方邊，立方邊以及相似的量。在這裏，我將此項量視為無定的可變的，能由一種常久的運動或流動繼續增加或減小之。其當前的增加或減小，我稱之為差率；增加為正的差率，減小為負的差率。當其得到一有限的值後，差率即不再為差率。故所謂差率者，其意是指有限的量之剛發生的萌芽，而在此補題內所研究者非為

差率之大小，而爲其比。倘不用差率，我們亦可用增加或減小之速度(我們亦可稱之爲量之運動，變動或流動)或與該項速度相比的有限值。

每個產生的項之係數是一個商數，此商數係將函數用此項去除所得。

所以此補題之意義如下：

今有若干量

$A, B, C,$  等等

能以繼續的運動，增加或減小；其差率或變動之速度則爲

$a, b, c,$  等等。

如是則  $AB$  直角形之差率爲

$$Ab + aB,$$

$ABC$  乘積之差率爲

$$ABc + AbC + aBC.$$

各次乘方

$$A^2, A^3, A^4, A^{\frac{1}{2}}, A^{\frac{3}{2}}, A^{\frac{1}{3}}, A^{\frac{2}{3}},$$

$$\frac{1}{A}, \frac{1}{A^2}, \frac{1}{A^3}.$$

之差率爲

$$2aA, 3aA^2, 4aA^3, \frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}, \frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}, \frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}, -aA^{-2}, -2aA^{-3}, -\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$$

廣之,任何方數

$$A^{\frac{n}{m}}$$

之差率爲

$$\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}.$$

此外,  $A^2B$  之差率爲

$$2aAB + A^2b,$$

$A^3B^4C^2$  之差率爲

$$3aA^2B^4C^2 + 4A^3bB^3C^2 + 2A^3B^4cC,$$

$\frac{A^3}{B^2}$  之差率爲

$$3aA^2B^{-2} - 2A^3bB^{-3},$$

等等.

此補題之證法可如下得之.

(譯者按此處所謂差率蓋卽今之所謂微分,觀

上諸例已可無疑;又補題內之 *Genita* 一字,

實即今之所謂函數，雖其定義模糊，固不妨即譯之爲函數耳。)

第一事。一個以繼續的運動增加的直角形

$$AB,$$

當  $A, B$  邊方面尙缺乏  $\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b$  時。

$$\begin{aligned} &= (A - \frac{1}{2}a)(B - \frac{1}{2}b) \\ &= Ab - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}Ab + \frac{1}{4}ab, \end{aligned}$$

而當  $A, B$  上增加了  $\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b$  時，

$$\begin{aligned} &= (A + \frac{1}{2}a)(B + \frac{1}{2}b) \\ &= AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}Ab + \frac{1}{4}ab, \end{aligned}$$

故由後者減去前者時，尙餘

$$aB + Ab.$$

所以在直角形  $AB$  內，全部的增加  $a$  與  $b$ ，產生了

$$aB + Ab.$$

此即所欲證者。

第二事。試設  $AB = G$ ，則  $ABC$  之差率，即  $GC$  之差率

$$= gC + Gc.$$

因  $G = AB, g = aB + Ab,$

故  $ABC$  之差率爲

$$aBC + AbC + ABc.$$

任何多的因子所成之積亦可仿此求其差率。此即所欲證者。

第三事。設  $B=C=A$ ，則  $AB$  之差率，即  $A^2$  之差率

$$= aA + Aa = 2aA,$$

而  $ABC$  之差率，即  $A^3$  之差率，

$$= aA^2 + aA^2 + aA^2 = 3aA^2;$$

廣之， $A^n$  之差率爲

$$naA^{n-1}.$$

此即所欲證者。

第四事。因  $\frac{1}{A} \cdot A = 1$ ，故

$$A \text{ 乘 } \frac{1}{A} \text{ 之差率} + a \cdot \frac{1}{A} = 1 \text{ 之差率} = 0;$$

因之，

$$\frac{1}{A} \text{ 之差率，即是 } A^{-1} \text{ 之差率爲}$$

$$a \cdot \frac{1}{A} - \frac{1}{A} = -\frac{a}{A^2} = -aA^{-2}.$$

廣之, 因  $\frac{1}{A^n} \cdot A^n = 1,$

故  $A^n$  乘  $\frac{1}{A^n}$  之差率 +  $\frac{1}{A^n} \cdot naA^{n-1} = 0,$

而  $\frac{1}{A^n}$  之差率 =  $A^{-n}$  之差率  
 $= -\frac{na}{A^{n+1}} = -naA^{-n-1}$

此即所欲證者。

第五事。 又因

$$A^{\frac{1}{2}} \cdot A^{\frac{1}{2}} = A,$$

故按第三事

$$2A^{\frac{1}{2}} \text{ 乘 } A^{\frac{1}{2}} \text{ 之差率} = a,$$

而  $A^{\frac{1}{2}}$  之差率 =  $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$

廣之, 設  $A^{\frac{m}{n}} = B,$

則  $A^m = B^n,$

故  $maA^{m-1} = nbB^{n-1},$

經除過後，可得

$$\begin{aligned} maA^{-1} &= nbB^{-1} \\ &= \frac{nb}{A^{\frac{m}{n}}}, \end{aligned}$$

故  $b = \frac{m}{n} a A^{\frac{m-n}{n}}$ ，亦即是

$$A^{\frac{m}{n}} \text{ 之差率} = \frac{m}{n} a A^{\frac{m-n}{n}}$$

此即所欲證者。

第六事。 一任何函數

$$A^m \cdot B^n$$

之差率為

$$\begin{aligned} &B^n \text{ 乘 } A^m \text{ 之差率} + A^m \text{ 乘 } B^n \text{ 之差率} \\ &= B^n \cdot maA^{m-1} + A^m \cdot nbB^{n-1}, \end{aligned}$$

而且不問  $m, n$  為整數或為分數，為正數或為負數均可用。倘乘積由多因子所成，每因子均為乘方，其理亦同此。此即所欲證者。

系 1. 設有若干量成爲一連比，其中有一爲常數，則其餘各量之差率相比，如該量本身被一數所乘之積相比，此數爲該量與常數項相隔之項數。

例如

$$A, B, C, D, E, F$$

爲若干成爲連比的量,  $C$  爲常數, 則其餘諸量之差率相比, 如

$$-2A, -B, D, 2E, 3F$$

相比。

系 2. 倘有四個量相比, 而其二中項爲常數, 則其餘二外項之差率相比, 如其本身相比, 在任何一个常數的直角形方面, 其邊亦適用此理。

系 3. 倘二個平方之和或差爲常數, 則其邊之差率相比, 如邊本身相比之反。

§ 11. 附註. 在我寫給哥利尼 (*Collinius*) 的信 (一六七二年十二月十日) 中, 我曾經敘述過一種切線方法, 在我推想來, 此法實與司羅齊 (*Slusius*) 所發見但彼時尚未發表的方法相同的。我今錄其一段於下:

“這是一個特例或是普通方法之一個補充, 其應用範圍不僅限於幾何的, 力學的曲線之切

線作法或其他曲線方面之直線，並可用於解決其他種種困難問題，如關於曲率，求曲線形之面積，求曲線之長，以及求曲線之重心點等等，而且其可及的方程，亦不限於沒有未知數的一種（如赫德尼 *Huddenius* 之極大與極小值方法即有此限制）。我將此方法補於該項方法上，用此方法，我可將方程化爲無限級數然後研究之。”

這是當時那封信上的一段。最後數語是關於一篇文章，這文是我於一六七一年時所作專論關於此的問題者。這個普通方法之基本已在以上的定理內。

[註：本書第一二版內之 § 11 一節，措詞與此處不同；特補錄之，以備參考：

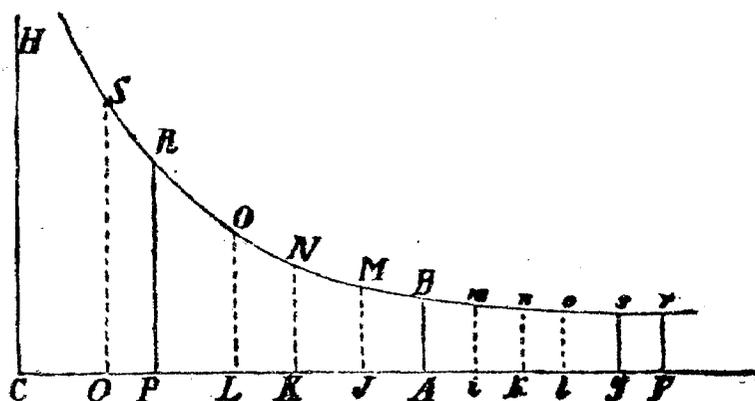
“十年以前，在我給很有學問的數學家萊伯尼茲 (*G. G. Leibniz*) 的信內，我亦曾指出，我發見了一種方法，可用之以求極大值與極小值，作切線，以及解決相似的問題，而且此種方法可用於無理

數,如用於有理數一樣.……這位有名的人答我一信,說他亦發見了相類的方法,並將他的方法寫給我看了.他的方法與我的相差不遠,除了用語,符號,算式以及量之產生方式外,實在沒有什麼分別.這兩種方法的根本,已在以上的補題內.”]

§ 12. 定理. 設有一物體在一均勻的中介物內,以重力之整齊的作用,直線的向上或向下運動;其所作的軌道,並均分之為若干段.今如於各段之開始將絕對力互相連結(在上昇方面將中介物之抵抗與重力相加,在下降方面則將其由重力減去),則此項力成爲一幾何級數.

今用不變的線  $AC$  表重力,用不定的線  $AK$  表抵抗力,下降時之絕對力則用  $KC$  表之.又,物體之速度以  $AP$  線表之(此線爲  $AK$  與  $AC$  之中比,故與抵抗力之平方根相比).

抵抗力於一定時間段內所產生的增加,可用短的線  $KL$  以表之,而其同時的速度之增加則命之爲  $PQ$ .



第一四一圖

今以  $C$  爲中心，以  $CA, CH$  爲二直角的漸近線，作一雙曲線  $SRNB$ ，與垂線  $AB, KN, LO, PR, QS$  相交於

$B, N, O, R, S$ 。

因  $AK$  與  $AP^2$  相比，故  $AK$  之差率(微分)即  $KL$ ，與

$2AK$  乘  $AP$  之差率，即是，與  $2AP \cdot PQ$

或  $AP \cdot KC$

相比。

蓋按運動之第二定律， $PQ$  與  $KC$  是相比的。

今將  $KL$  之比與  $KN$  之比相結合。則直角形  $KL \cdot KN$  與

$$AP \cdot KC \cdot KN$$

相比,即是,因  $KC \cdot KN$  爲常數,與

$$AP \text{ 相比.}$$

因雙曲線形的面積  $KNOL$  與直角形  $KL \cdot KN$  相比,當  $K$  與  $L$  將相合時,成爲相等的比,故將成爲零的面積  $KNOL$  與  $AP$  相比.所以整個的雙曲線形面積  $ABOL$  爲部分  $KNOL$  所合成,而此項部分則與  $AP$  恆相比.因之,此整個的面與以此速度所作的軌道相比.今將該面均分成爲若干部分

$$ABMJ, JMNK, KNOL, \text{ 等等,}$$

則絕對力

$$AC, JC, KC, LC, \text{ 等等}$$

成爲一幾何級數.此即所欲證者.

仿此,在物體之上昇方面,可於  $A$  之對方作相等的面積

$$ABmi, imnk, knol, \text{ 等等,}$$

則即可知絕對力

$AC, iC, kC, lC,$  等等

成爲一連比。

故如假定在上昇及下降方面一切軌道均相等，則亦必一切絕對力

$lC, kC, iC, AC, JC, KC, LC,$  等等

成爲一連比。此即所欲證者。

系 1. 所以所作的道路如用雙曲線的面  $ABNK$  表之，則重力，物體之速度以及中介物之抵抗力即可用

$AC, AP$  以及  $AK$

表之。反之亦然。

系 2. 物體每次所可達到的最大速度（當其遠離至無限時），可用  $AC$  線表之。

系 3. 倘在任何已知速度下可求得中介物之抵抗力，則亦可求得最大速度，其法在使該速度與已知速度相比，等於重力之平方根與已知的抵抗力之平方根相比。

§ 13. 定理. 今設圓之扇形之角以及雙曲線方

面扇形之角，其切線與速度相比，則以後上昇至最高處的全部時間，與圓之扇形相比，其過去由最高點下降的全部時間與雙曲線之扇形相比。

設  $AC$  線表重力，今作  $AD$  垂於其上，並使

$$AD = AC.$$

今以  $D$  為中心點，以  $AD$  為半徑，作象限  $AtE$ ，並作直角的雙曲線  $AVZ$ ，其軸為  $AX$ ，其主要頂點為  $A$ ，其漸近線為  $CD$ 。試引  $Dp$  及  $DP$  線，則圓之扇形  $AtD$  與以後上昇至最高點之全部時間相比，而雙曲線之扇形  $ATD$  與過去由最高點下降之全部時間相比，但於此，須  $Ap, AP$  切線與速度相比。

第一事。作  $Dvq$  線將  $ADt$  扇形及  $ADp$  三角形割去一部分  $tDv, pDq$ 。因該二部分有一共同的角  $D$ ，而且其相比等於其邊之平方相比，故  $tDv$  與

$$\frac{qDp}{pD^2} \cdot tD^2$$

相比，或因  $tD$  為常數，與

$$\frac{qDp}{pD^2}$$



$Ck$  力成反比,此力即為改變速度者

經組合後,可知一切部分  $tDv$  之和,與  $pq$  之相當的一切部分之和相比;因  $pq$  為漸減小的速度  $Ap$  之已失去的部分,故其和直至該速度成爲零爲止.所以全部扇形  $ADt$  與上昇至最高點之全部時間相比.此即所欲證者.

第二事. 作  $DQV$  線,使其割去扇形  $DAV$  三角形  $DAQ$  上之極小的部分  $TDV, PDQ$ . 如是則

$$TDV : PDQ = DT^2 : DP^2 \quad (1),$$

或如作  $TX$  與  $AP$  相平行,

$$\text{即有 } TDV : PDQ = DX^2 : DA^2 = TX^2 : AP^2,$$

$$\text{即是, } TDV : PDQ = DX^2 - TX^2 : DA^2 - AP^2 \quad (2)$$

按雙曲線之定律有

$$DX^2 - TX^2 = AD^2,$$

而按所設

$$AP^2 = AC \cdot AK = AD \cdot AK,$$

$$\text{所以 } TDV : PDQ = AD^2 : AD (AD - AK)$$

以及  $TDV : PDQ : AC : CK$ . (3).

由此可知

$$TDV = \frac{PDQ \cdot AC}{CK},$$

而因  $PDQ = \frac{1}{2}PQ \cdot AD$ , 而且  $AC = AD$  爲常數,

故  $TDV$  與  $\frac{PQ}{CK}$  相比.

由此可知  $TDV$  與速度之增加成正比, 與產生此增加的力成反比.

經組合後可知產生一切  $PQ$  的時間段之和與  $ADT$  一切部分之和相比. 所以, 全部時間與全個扇形是相比的. 此即所欲證者.

系 1. 今設

$$AB = \frac{1}{4}AC,$$

則物體下墜時於任何時間內所作之空間, 與以最大速度  $AC$  在同時間內等速的所作之空間相比, 等於代表下墜時所作軌道的面  $ABNK$  與代表時間的面  $ADT$  相比.

蓋因  $AC : AP = AP : AK$ ,

故  $KL : PQ = 2 \cdot AK : AP = 2AP : AC,$

或  $KL : \frac{1}{2}PQ = AP : \frac{1}{4}AC = AP : AB,$

又  $KN : AC = AB : CK,$

或因  $AC = AD,$

有  $LKNO : DPQ = AP : CK.$

按(3)有

$$DPQ : DTV = CK : AC,$$

故  $LKNO : DTV = AP : AC.$

由此可知  $LKNO$  與  $DTV$  相比,等於下墜物體之速度與該物體所可達到的最大速度相比。因  $LKNO$  與  $DTV$  相比,如速度相比,故該面積之一切同時產生的部分相比,如同時作成的軌道相比,而由開始以後所作成的全部面積  $ABKN$  及  $ATD$  相比,如由下降開始以後所作的全部軌道相比。

系 2. 在上昇時所作的軌道方面,亦適用此。

蓋該項全部所作的軌道,與同時間內以等速  $AC$  所作者相比,等於  $ABnK$  面與  $ADt$  扇形相比。

系 3. 在  $ADT$  時間內下墜的物體之速度，與其在同時間內於無抵抗的中介物中所可達到者相比，如  $APD$  三角形與  $ATD$  扇形相比。

蓋在無抵抗的中介物內速度與時間  $ADT$  相比，但在有抵抗的中介物內則與  $AP$  線或  $APD$  三角形相比。在下墜之開始時，該項速度是相等的，亦猶  $ATD$  與  $APD$  之相等一樣。

系 4. 仿此，可以知道上昇時的速度與物體在同時間內於抵抗的中介物內會將其全部運動失去的速度相比，如

三角形  $ApD$  : 圓之扇形  $AtD$  或如

$$Ap : \sim At.$$

系 5. 所以物體在有抵抗的中介物內下墜時達到  $AP$  速度所須的時間，與其在無抵抗的中介物內下墜時達到最大速度  $AC$  所須的時間相比，如

$ADT$  扇形比  $ADC$  三角形。

又，物體在有抵抗的中介物內上昇時失去  $Ap$  速度所須的時間，與其在無抵抗的中介物內失去

此同速度所須的時間相比,如

$$\sim At : Ap.$$

系 6. 由此,我們可由已知的時間內以推得上昇成下降時所作的軌道。

向無限直下的物體之最大速度可由 § 12, 系 2, 3 得之,而由此復可得物體以該速度在一定的時間內所作的道路,以及物體在無抵抗的中介物內下墜時達到該速度所須的時間。今設  $ADT$  扇形或  $ADt$  扇形與  $ADC$  三角形相比,如已知的時間與求得的時間相比,則可得速度  $AP$  或  $Ap$ , 以及面積  $ABKN$  或  $ABkn$ , 此項面積與  $ADT$  或  $ADt$  相比,如所求的軌道與一軌道相比,此軌道為物體於已知時間內以已求得的最大速度所可作成者。

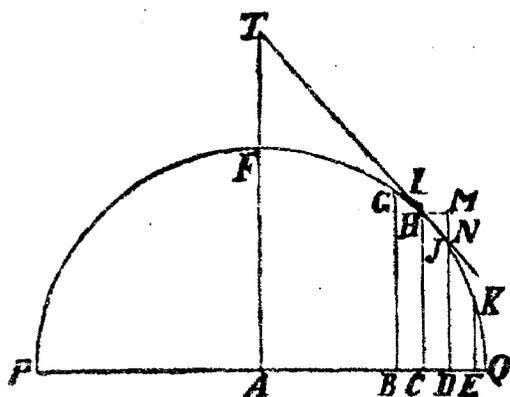
系 7. 反之,亦可由已知的軌道  $ABnk$  或  $ABNK$  以求得時間  $ADT$  或  $ADt$ 。

§ 14. 問題. 設整齊的重力係直線的向着地平面,抵抗力則與中介物之密度及速度之平方成比

例。今欲求各點之中介物之密度（此密度之影響能使物體在一任何已知的曲線上運動），物體之速度，以及該處中介物之抵抗力。

今設  $PQ$  為該平面，與紙的平面相垂直， $PFHQ$  為一曲線，與該平面相交於  $P, Q$  二點， $G, H, J, K$  為物體所到的四點，此物體則在曲線上由  $F$  向  $Q$  運動。又設

$GB, HC, JD, KE$  為四平行的線，與地平面  $PQ$  相垂直，其間之距離為  $BC, CD, DE$ 。由  $G, H$  作



第一四三圖

線  $GL, HN$ ，與曲線相切於  $G, H$ ，並與  $CH, DJ$  之向上的引長相交於  $L, N$ ，即完成  $HCDM$  平行方形。物體經過  $GH, HJ$  的時間相比，等於  $LH$  之平方根與  $NJ$  之平方根相比； $LH$  與  $NJ$  即為物體於同時間內由切線下墜時所可經過者。其速度相比則等於所作的軌道  $GH, HJ$  相比之正，時間

之反。今用  $T$  與  $t$  表時間，以  $\frac{GH}{T}$  與  $\frac{HJ}{t}$  表速度，則速度之減小(在  $t$  時間內所發生者)，可用

$$\frac{GH}{T} - \frac{HJ}{t} \quad (1)$$

表之。此減小之發生，在於抵抗力之超過加速的重力。至重力在下墜的物體方面所引起的速度，則可使其於同時間內作成等於  $NJ$  之二倍的道路，即是，此速度為

$$\frac{2NJ}{t} \quad (2).$$

此理最初為葛里雷所證明。

對於經過  $HJ$  弧的物體，此力祇能使其增加

$$HJ - HN = \frac{MJ \cdot NJ}{HJ} \quad (3),$$

故亦祇能產生一速度

$$\frac{2MJ \cdot NJ}{t \cdot HJ} \quad (4).$$

今將此加於(1)內之減小上，則得抵抗力所獨自產生的速度之減小

$$\frac{GH}{T} - \frac{HJ}{t} + \frac{2 \cdot MJ \cdot NJ}{HJ \cdot t} \quad (5).$$

因重力於同時間內在下墜的物體方面產生一速度  $\frac{2NJ}{t}$ ，故抵抗力與重力相比，如

$$\frac{GH}{T} - \frac{HJ}{t} + \frac{2MJ \cdot NJ}{IJ \cdot t} : \frac{2NJ}{t} \quad (6)$$

$$= \frac{t \cdot GH}{T} - HJ + \frac{2MJ \cdot NJ}{IJ} : 2 \cdot NJ.$$

今設

$$\left. \begin{aligned} CB = -\xi, CD = \xi, CE = 2\xi \\ CH = P \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

並設  $MJ = Q\xi + R\xi^2 + S\xi^3 + \dots \quad (8),$

則即有

$$\left. \begin{aligned} NJ &= R\xi^2 + S\xi^3 + \dots \\ DJ &= P - Q\xi - R\xi^2 - S\xi^3 + \dots \\ EK &= P - 2Q\xi - 4R\xi^2 - 8S\xi^3 + \dots \\ BG &= P + Q\xi - R\xi^2 + S\xi^3 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (9).$$

今將

$$BG - CH, CH - DJ$$

方之，並加  $BC$  及  $CD$  之平方於其上，則即得  $GH$   $IJ$  弧之平方。於是有

$$GH^2 = \xi^2 + Q^2\xi^2 - 2QR\xi^3 + \dots$$

$$HJ^2 = \xi^2 + Q^2\xi^2 + 2QR\xi^3 + \dots$$

而

$$\left. \begin{aligned} GH &= \xi\sqrt{1+Q^2} - \frac{QR\xi^2}{\sqrt{1+Q^2}} \\ HJ &= \xi\sqrt{1+Q^2} + \frac{QR\xi^2}{\sqrt{1+Q^2}} \end{aligned} \right\} (10).$$

今再由  $CH$  上減去  $BG, DJ$  之和之半, 由  $DJ$  減去  $\frac{1}{2}(CH + EK)$ , 則尚餘  $GJ, HK$  弧之矢, 而且

$$\left. \begin{aligned} \text{前者} &= R\xi^2 \\ \text{後者} &= R\xi^2 + 3S\xi^3 \end{aligned} \right\} (11).$$

此與  $LH, NJ$  爲比較的, 故其相比, 如  $T, t$  之平方相比, 即

$$\left. \begin{aligned} t : T &= \sqrt{R+3S\xi} : \sqrt{R} \\ &= R + \frac{3}{2}S\xi \dots \cdot R. \end{aligned} \right\} (12).$$

今將由 (12), (10), (8), (9) 內所得

$$\frac{t}{T}, GH, HJ, MJ, NJ$$

之值代入 (6) 內, 則抵抗力與重力相比, 如

$$\begin{aligned} \frac{3S\xi^2}{2R}\sqrt{1+Q^2} &: 2R\xi^2 \\ &= 3S\sqrt{1+Q^2} : 4R^2 \quad (13). \end{aligned}$$

而速度則等於一其他速度，此速度能使物體由  $H$  出發沿  $HN$  切線於空的空間內在一拋物線上運動，此拋物線之

$$\text{徑} = HC,$$

$$\text{通徑} = \frac{HN^2}{NJ} = \frac{1+Q^2}{R}.$$

抵抗力與中介物之密度及速度之平方相比；所以該項密度與抵抗力成正比，與速度之平方成反比，即是，與

$$\frac{3S\sqrt{1+Q^2}}{4R^2} \text{ 成正比,}$$

$$\frac{1+Q^2}{R} \text{ 成反比,}$$

或亦即與

$$\frac{S}{R\sqrt{1+Q^2}} \quad (14)$$

相比。

系 1. 將  $HN$  切線之兩端引長,使其與任意的線  $AF$  相交於  $T$ , 則

$$\frac{HT}{AC} = \sqrt{1+Q^2}.$$

所以在以上諸式內,我們可以用此商數以代  $\sqrt{1+Q^2}$  一式.按 (13) 即可得抵抗力與重力之比爲

$$3S \cdot HT : 4R^2 AC,$$

而速度則與

$$\frac{HT}{AC \cdot \sqrt{R}}$$

相比,中介物之密度與

$$\frac{S \cdot AC}{R \cdot HT}$$

相比。

系 2. 倘用  $AC$  及  $HC$  之關係以求曲線  $PFHQ$ , 並將  $HC$  之值化之成爲一收斂級數,則其開首諸項可簡單的用之以解決問題.試舉以下諸例明之。

例 1. 今設  $PFHQ$  爲一半圓,其底爲  $PQ$  徑. 今欲求中介物之密度,此密度能使拋出的物體在

該曲線上運動。

試先將  $PQ$  徑於  $A$  平分之，並設

$$AQ = r,$$

$$AC = x,$$

$$CH = y,$$

$$CD = \xi;$$

如是則

$$\begin{aligned} DJ^2 &= AQ^2 - AD^2 = r^2 - x^2 - 2x\xi - \xi^2 \\ &= y^2 - 2x\xi - \xi^2. \end{aligned}$$

今試用我們的方法求其方根，即得

$$DJ = y - \frac{x\xi}{y} - \frac{\xi^2}{2y} - \frac{x^2\xi^2}{2y^3} - \frac{x\xi^3}{2y^3} - \dots,$$

而如設  $x^2 + y^2 = r^2$ ,

$$\text{有 } DJ = y - \frac{x\xi}{y} - \frac{r^2\xi^2}{2y^3} - \frac{xr^2\xi^3}{2y^5} - \dots$$

在此項級數內，我可用以下之方法以區別其各不同的項：

沒有無限小的值  $\xi$  的項，我名之為第一項；項內  $\xi$  僅以一次方在內者為第二項，以二次方在內

者爲第二項，以三次方在內者爲第四項，等等，以至於無限。又，第一項所代表者恆爲  $CH$  縱線；在這裏卽爲  $y$ 。第二項所代表者爲  $CH$  與  $DN$  之差，卽， $MN$  線；在這裏爲  $\frac{x\xi}{y}$ 。所以此項恆能決定  $HN$  切線之位置；在此處，祇須設

$$MN : HM = \frac{x\xi}{y} : \xi = x : y$$

卽可知之。其第三項（在此處爲  $\frac{r^2\xi^2}{2y^3}$ ）代表  $JN$  線，此線在切線及曲線之中間，故可決定切角  $JHN$  或曲率，卽曲線  $H$  點之曲率。倘  $JN$  有一有限值，則此值可由第三項及以下一切項決定之；但如該線之值小至無限，則第三以下之一切項，其值較之第三項均無限小，故可均略去。至於第四項所代表者則爲曲率之變動，第五項爲變動之變動，等等，以至於無限。因此，我們可由之得到很有用的方法，能使我們解決與切線及曲率有關的問題。

今將

$$y - \frac{x\xi}{y} - \frac{r^2\xi^2}{2y^3} - \frac{xr^2\xi^3}{2y^6} - \dots$$

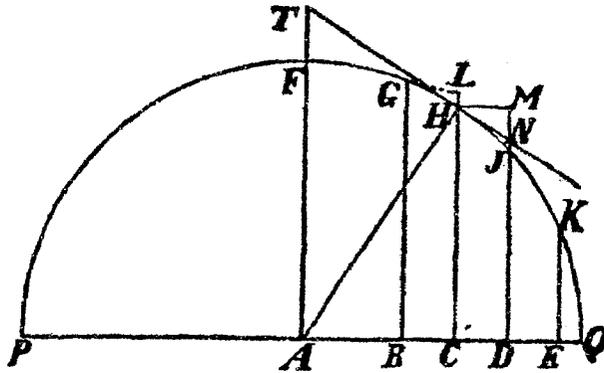
與 § 14 (9) 內者，即

$$P - Q\xi - R\xi^2 - S\xi^3 - \dots,$$

相比較，即有

$$P = y, Q = \frac{x}{y},$$

$$R = \frac{r^2}{2y^3}, S = \frac{xy^2}{2y^6},$$



第一四四圖

故 
$$\sqrt{1+Q^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{r}{y},$$

而按 (14)，可知中介物之密度與

$$\frac{x}{ry}$$

相比，或因  $r$  為常數與

$$\frac{x}{y} = \frac{AC}{CH} = \frac{HT}{AH}$$

相比,即是;與  $HT$  切線之長相比。

按 § 14 (12), 中介物之抵抗力與重力相比,

如  $3x : 2r$ , 或即是, 如  $3AC : PQ$ ,

速度則與  $\sqrt{HC}$  相比, 故如物體以一定的速度由  $F$  點出發, 沿一與  $PQ$  線平行的線進行, 各點  $H$  之中介物密度與  $HT$  切線之長相比, 而且  $H$  點之抵抗力與重力相比如

$$3AC : PQ,$$

則物體所經過之軌道爲圓之象限  $FHQ$ 。

但如物體由  $P$  出發, 沿一與  $PQ$  相垂直的線進行, 在半圓  $PFQ$  內運動, 則  $AC$  或  $r$  必須在  $A$  之另一面,  $x$  之符號必須改變。如是, 中介物之密度即與

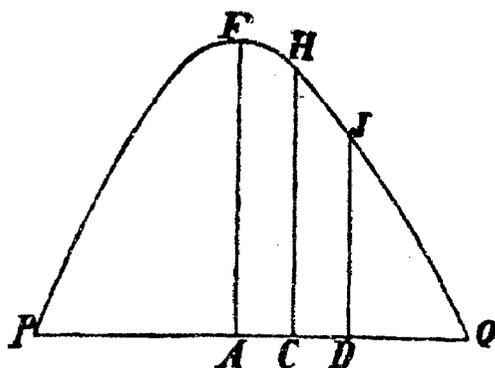
$$-\frac{x}{y}$$

相比: 因此處所得者爲負值, 而負的密度非自然中所有者, 故在這裏, 物體不能作成象限  $PF$ 。欲達到此, 物體必須爲能推動的中介物所加速, 不爲其所抵抗而後可。

例 2. 今設  $PFQ$  爲一拋物線, 其軸  $AF$  與

$PQ$  地平面相垂直。

今欲求中介物之密度，此密度能使拋出的物體在該曲線上運動。



按拋物線之性

第一四五圖

質，直角形

$$PD \cdot DQ$$

等於一其他直角形，此形由  $DJ$  及一其他不變的線所成。倘設後者為  $b$ ， $PC = a$ ， $PQ = c$ ， $CH = e$ ， $CD = \xi$ ，則

$$(a + \xi)(c - a - \xi) = b \cdot DJ,$$

或

$$DJ = \frac{ac - a^2}{b} + \frac{c - 2a}{b} \xi - \frac{1}{b} \xi^2.$$

以此與 § 14 (9) 內之級數相較，即有

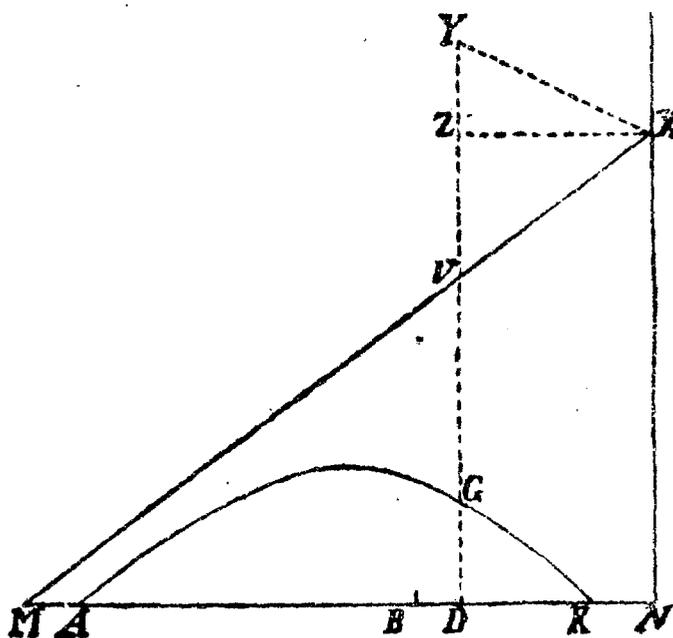
$$Q = \frac{c - 2a}{b},$$

$$R = \frac{1}{b},$$

$S$  及以下一切項之係數均  $= 0$ .

按 (14), 即可知中介物之密度  $= 0$ . 由此可知如拋出的物體能在拋物線上運動, 則必中介物之密度等於  $0$  而後可. 此理為葛里雷所已經證明過者.

例 3. 今設  $AGK$  為一雙曲線, 其漸近線  $NY$  與地平面  $AK$  相垂直; 今欲求中介物之密度, 此



第一四六圖

密度能使拋出的物體在該曲線上運動。

今設  $MX$  為其他一漸近線, 與  $DG$  相交於

V. 如是則按雙曲線之性質, 有

$$VX \cdot VG = \text{constans.}$$

但  $DN : VX = \text{constans},$

故  $DN \cdot VG = \text{constans} = b^2.$

今將  $DNXZ$  平行方形完成, 並設

$$BN = a,$$

$$BD = \xi,$$

$$Nx = c,$$

$$\frac{VZ}{ZX} = \frac{VZ}{DN} = \frac{m}{n}.$$

如是則

$$DN = a - \xi, VG = \frac{b^2}{a - \xi},$$

$$VZ = \frac{m}{n}(a - \xi), GD = NX - VZ - VG$$

$$= c - \frac{m}{n}a + \frac{m}{n}\xi - \frac{b^2}{a - \xi}$$

$$= c - \frac{m}{n}a - \frac{b^2}{a} + \frac{m}{n}\xi - \frac{b^2}{a^2}\xi - \frac{b^2}{a^3}\xi^2$$

$$- \frac{b^2}{a^4}\xi^3 - \dots$$

將此與 (9) 之係數相較, 卽有

$$Q = \frac{b^2}{a^2} - \frac{m}{n},$$

$$R = \frac{b^2}{a^3},$$

$$S = \frac{b^2}{a^4},$$

而按 (14), 卽可知中介物之密度與

$$\begin{aligned} \frac{S}{R\sqrt{1+Q^2}} &= \frac{\frac{b^2}{a^4}}{\frac{b^2}{a^3}\sqrt{1+\frac{m^2}{n^2}-\frac{2mb^2}{na^2}+\frac{b^4}{a^4}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+\frac{m^2}{n^2}a^2-\frac{2mb^2}{n}+\frac{b^4}{a^2}}} \end{aligned}$$

相比, 卽是, 倘設  $VY = VG$ , 與

$$\frac{1}{XY}$$

相比, 蓋在  $\xi = 0$  時,

$$\begin{aligned} XY^2 &= YZ^2 + ZX^2 \\ &= \left(\frac{b^2}{a} - \frac{m}{n}a\right)^2 + a^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{b^4}{a^2} - \frac{2mb^2}{n} + \frac{m^2}{n^2}a^2 + a^2.$$

抵抗力與重力之比為

$$3XY : 2YG,$$

速度則與物體在一拋物線上進行的速度相同，此拋物線之頂點為  $G$ ，徑為  $DG$ ，通徑為  $\frac{XY^2}{VG}$ 。

故如我們假定中介物在各點  $G$  之密度與距離  $XY$  成反比， $G$  之抵抗力與重力相比如  $3XY : 2YG$ ，則由  $A$  出發，以一定速度前進的物體作成該雙曲線  $AGK$ 。

例 4. 今假定  $AGK$  為雙曲線，其中心點為  $X$ ，漸近線為  $MX, NX$ ，而且  $XZDN$  直角形之邊  $ZD$  與雙曲線相交於  $G$ ，與漸近線相交於  $V$ ， $VG$  則與

$$\frac{1}{XZ^n} = \frac{1}{DN^n}$$

相比。今欲求中介物之密度，此密度能使拋出的物體在該曲線上進行。

$$\text{今設} \quad BN = A,$$

$$BD = \xi,$$

$$NX = C,$$

$$VZ : ZX = VZ : DN = d : e,$$

$$VG = \frac{b^2}{DN^n};$$

如是則

$$DN = A - \xi,$$

$$VG = \frac{b^2}{(A - \xi)^n},$$

$$VZ = \frac{d}{e}(A - \xi),$$

$$GD = NX - VZ - VG$$

$$= C - \frac{d}{e}(A - \xi) - \frac{b^2}{(A - \xi)^n}$$

$$= C - \frac{d}{e}A - \frac{b^2}{A^n} + \frac{d}{e}\xi - \frac{nb^2}{A^{n+1}}\xi - \frac{n^2 + n}{2A^{n+2}}b^2\xi^2$$

$$- \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{bA^{n+3}}b^2\xi^3 \dots\dots$$

與(9)相比較(DJ易為GD),有

$$Q = \frac{d}{e} - \frac{nb^2}{A^{n+1}},$$

$$R = \frac{n^2 + n}{2A^{n+2}}b^2,$$

$$S = \frac{n^3 + 3n^2 + 2nb^2}{6A^{n+3}} b^2,$$

故按 (14),  $G$  點之密度與下式相比:

$$\begin{aligned} \frac{S}{R\sqrt{1+Q^2}} &= \frac{n(n+1)(n+2)b^2}{6A^{n+3} \cdot \frac{n(n+1)}{2A^{n+2}} b^2 \sqrt{1 + \frac{d}{e^2} - \frac{2dnb}{eA^{n+1}} + \frac{n^2b^4}{A^{2n+2}}}} \\ &= \frac{(n+2)}{\sqrt{A^2 + \frac{d^2}{e^2} A^2 - \frac{2dnb^2}{eA^n} A + \frac{n^2b^4}{A^{2n}}}} \end{aligned}$$

今於  $VZ$  方向內取

$$VY = n \cdot VG,$$

則密度即與  $\frac{1}{XY}$

相比。蓋在  $\xi = 0$  或 = 無限小時,

$$XZ^2 = A^2, YZ^2 = (VY - VZ)^2$$

$$= \left( n \frac{b^2}{A^n} - \frac{d}{e} A \right)^2$$

$$= \frac{d^2}{e^2} A^2 - \frac{2dnb^2}{eA^n} A + \frac{n^2b^4}{A^{2n}}$$

故  $\sqrt{A^2 + \frac{d^2}{e^2} A^2 - \frac{2dnb^2}{eA^n} A + \frac{n^2b^4}{A^{2n}}}$

$$= \sqrt{YZ^2 + XZ^2} = XY.$$

$G$  點之中介物抵抗力與重力相比, 如

$$3S \cdot \frac{XY}{A} : 4R^2 = XY : \frac{2n^2 + 2n}{n+2} VG.$$

此外,  $G$  點之物體速度, 等於一其他速度, 此速度為物體在拋物線內前進時所有者, 而該拋物線之頂點則為  $G$ , 徑為  $GD$ , 通徑為

$$\frac{1+Q^2}{R} = \frac{\frac{1}{A^2} XY^2}{\frac{n^2+n}{2A^{n+2}}} = \frac{2 \cdot XY^2}{(n^2+n)VG}.$$

§ 15. 附註. 用以前系 1 內之方法, 可知若抵抗力與  $V^2$  相比, 則中介物之密度與

$$\frac{S \cdot AC}{R \cdot HT}$$

相比, 倘抵抗力與  $V^n$  相比, 中介物之密度即與

$$\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \cdot \left(\frac{AC}{HT}\right)^{n-1}$$

相比。

故如我們能求得一曲線, 其形狀能使

$$\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} : \left(\frac{HT}{AC}\right)^{n-1} \quad \text{或}$$

$$\frac{S^2}{R^{4-n}} : (1+Q^2)^{n-1}$$

成爲一常數，則物體卽在此曲線上於整勻的中介物內運動，其抵抗力與

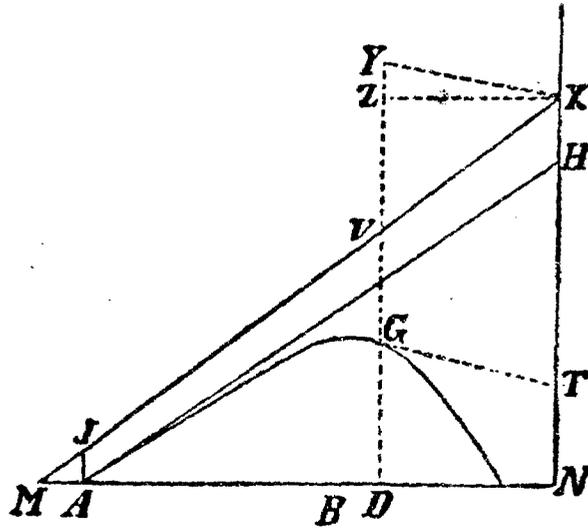
$$V^n$$

相比。

我們現在退而論較簡單的曲線。因爲祇在無抵抗的中介物內，物體纔能於拋物線上運動，而在繼續抵抗的中介物內，物體祇能在上所述過的雙曲線上運動，故如中介物之抵抗力爲整勻的，則拋出的物體所作之軌道必與雙曲線較爲接近。所以此項曲線之性質爲雙曲線的，但在頂點之附近，與漸近線相去較遠，而在與漸近線距離較遠之處，卽與之較接近。不過此項差別亦甚小，所以在實際上此處的曲線亦很可與前所述的雙曲線視爲相同。在實用上，我們可如下作之。

試將平行方形  $XYGT$  完成之，則由雙曲線

之性質上,可知  $GT$  線與曲線相切於  $G$ . 因此,中



第一四七圖

介物在  $G$  點之密度與  $\frac{1}{GT}$

相比,其速度與

$$\sqrt{\frac{GJ^2}{GV}}$$

相比,而其中介物之抵抗力與重力相比,則如

$$GT : \frac{2n^2 + 2n}{n+2} VG.$$

又如一物體由  $A$  出發沿  $AH$  線拋出作一雙曲線  $AGK$ ,  $AH$  之引長交漸近線  $NX$  於  $H$ ,  $AJ$  線則交其他漸近線  $MX$  於  $J$ , 則  $A$  點中介物之密

度與  $\frac{1}{AH}$

相比, 速度與

$$\sqrt{\frac{AH^2}{AJ}}$$

相比, 而該點之抵抗力與重力相比, 如

$$AH : \frac{2n^2 + 2n}{n+2} \cdot AJ.$$

由此, 我們可得以下之規律。

規律 1. 倘  $A$  點中介物之密度以及物體之速度保存不變, 但  $NAH$  角則變動, 則  $AH, AJ, HX$  諸線均不變。故如我們於任何狀況下能求得此項線, 則於任何已知角  $NAH$  即不難求其雙曲線。

規律 2. 倘  $NAH$  角以及  $A$  點中介物之速度均不變, 但用以拋出物體的速度已變, 則  $AH$  不變,  $AJ$  之變動等於速度變動之平方。

規律 3. 倘  $NAH$  角,  $A$  點物體之速度以及重力之加速力均不變, 但  $A$  點抵抗力與重力之比以某種比增加, 則

$$AH : AJ$$

亦以同比增加;於此,其通徑或與之相比的線

$$\frac{AH^2}{AJ}$$

亦仍不變。因此,  $AH$  以同比減小,  $AJ$  則以其比之平方減小。但如容積不變而比重減小,或中介物之密度增加,或容積減小時抵抗力之減小較之為小,則抵抗力與重量之比即增加。

規律 4. 因為中介物之密度在頂點處較  $A$  處為大,故如欲求一平均密度,必須先求  $GT$  切線與  $AH$  切線之比,然後按規律 3 以某種比例增加  $A$  處之密度,此比例較之切線之和之半與  $GT$  相比為稍大。

規律 5. 設  $AH, AJ$  為已知,而如欲作  $AGK$  圖形,則可將  $HN$  引長至  $X$ , 使

$$HX = (n+1)AJ.$$

於是以  $X$  為中心,  $MX$  及  $NX$  為漸近線作雙曲線,經過  $A$  點而且能使

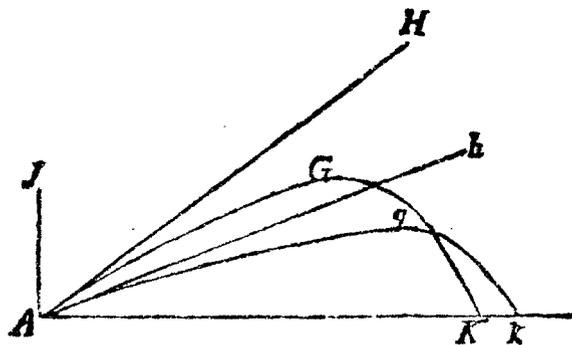
$$AJ : VG = XV^n : XJ^n.$$

律規 6. 倘  $n$  愈大,則當物體由  $A$  上昇時,此

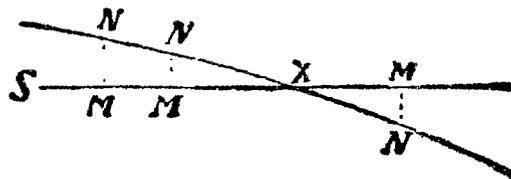
項雙曲線愈正確，而當其下降至  $K$  時亦愈不正確；反之亦然。圓錐體的雙曲線為其平均，較之其餘為簡單，所以曲線如為此項性質者，而且我們可求得拋出的物體與經過  $A$  的直線之相遇處  $K$ ，則設  $AB$  與  $MX, NX$  相交於  $M, N$  時，即可設

$$NK = AM$$

規律 7. 由此我們可得到一種方法，頗為簡單，使我們能用試驗以決定雙曲線。我們將兩個相似



第一四八圖



第一四九圖

相等的物體以同速度在不相等的角  $HAK$ ,  $hAK$  下拋出。今設此二物體與地平面相遇於  $K$ ,  $k$ , 而且

$$AK : Ak = d : e.$$

於是作垂線  $AJ$ , 其長可任意, 並任取  $AH$  或  $Ah$  長, 用規律 6 以求得  $AK$  及  $Ak$  線。倘

$$AK : Ak = d : e,$$

則  $AH$  之長已適用。如其不然, 則可於不定的直線  $SM$  上取

$$SM = AH,$$

並作垂線  $MN$ , 使其與

$$\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$$

乘一常數之積相等。用此方法可由如是所得的若干  $AH$  得等多的若干點  $N$ , 即經過此項點作有規則的曲線  $NNXN$ 。如是, 此曲線割下

$$SX = AH.$$

而且重復求得  $AK$  及其他線, 此項線與  $AJ$  及  $AH$  相比, 如試驗上所得的  $AK$  之長與求得的長相比, 所欲求的  $AJ$  及  $AH$  之真值亦即可得。既得

此後，亦即可求得  $A$  點中介物之抵抗力，此力與重力相比，如  $AH : \frac{1}{2}AJ$ .

按規律 4 我們必須將密度增加，而以上所得的抵抗力，如將其按同比例增加之，所得亦即較為正確。

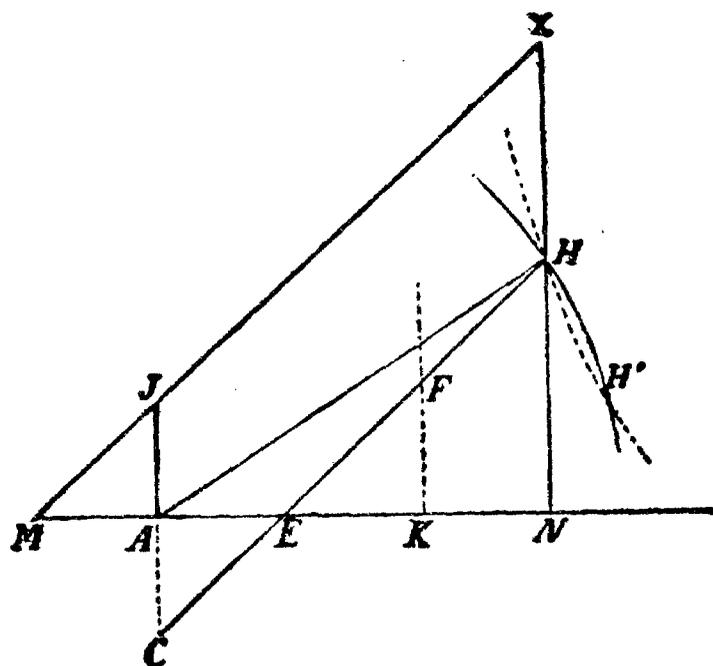
規律 8. 倘  $AH$  及  $HX$  之長為已知，今欲求  $AH$  之位置，俾能知以一定速度拋出的物體如何能與  $K$  點相遇，則可於  $A$  及  $K$  作垂線  $AC, KF$  垂於地平面上，並使

$$AC = AJ = \frac{1}{2}HX.$$

今以  $AK, KF$  為漸近線作一雙曲線，其共軛的分枝經過  $O$  點，並以  $A$  為中心， $AH$  為半徑作一圓，與該雙曲線相交於  $H$ 。如是則沿  $AH$  拋出的物體落於  $K$  點。

因  $AH$  之長為已知，故  $H$  點必在所作之圓上。今作  $CH$  線，與  $AK$  相交於  $E$ ，與  $KF$  相交於  $F$ ；如是則因

$$CH \text{ 與 } MX \text{ 平行，}$$



第一五〇圖

$$AC = AJ$$

故  $AE = AM = KN.$

又因  $CE : AE = FH : KN,$

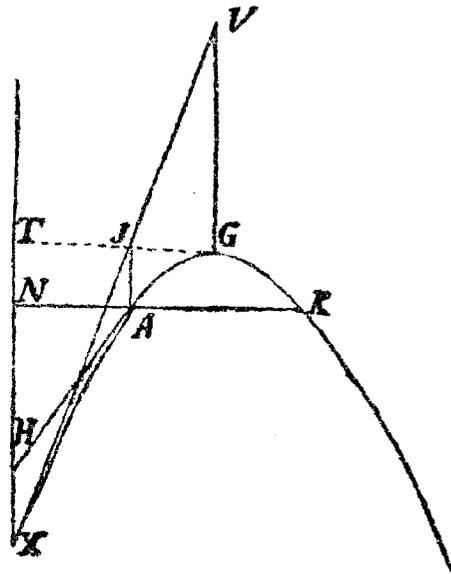
故亦  $CE = FH;$

所以  $H$  點在雙曲線上, 此雙曲線之漸近線為  $AK, KF,$  其共軛的分枝經過  $C$  點. 因之,  $H$  為雙曲線與圓之交點. 此即所欲證者.

尚須說明者, 即, 不問  $AKN$  直線與地平面相平行或與之作一任何的角, 此項方法恆是如此, 而

且由  $H$  及  $H^1$  點可得二角  $NAH$  及  $NAH^1$ , 我們須擇其較小者用之. 在應用機械的作法上, 可先作圓, 再作  $CH$  使其如是經過  $C$ , 俾其部分  $FH$  與  $CE$  相等; 於此,  $FH$  在圓及直線  $FH$  之中間,  $CE$  則在  $C$  與  $AK$  線之中間.

關於雙曲線方面所得的種種, 很容易推至於拋物線上去. 今設  $XAGK$  為一拋物線,  $XV$  線與之相切於  $X$  點, 並有



第一五一圖

$$\begin{aligned}
 JX'' : VX'' \\
 = JA : VG.
 \end{aligned}$$

試作  $XT$  與  $VG$  相平行,

於  $G$  及  $A$  點作切線  $GT$  及  $AH$ . 倘在各點  $G$ , 中介物之密度與切線成反比, 則由  $A$  出發沿  $AH$  線以一定速度拋出的物體即作成此拋物線.  $G$  點之

速度，與一其他速度相等，此速度爲一拋出的物體於無抵抗的中介物內在圓錐體的拋物線上所可有者，此拋物線之頂點爲  $G$ ，其徑爲  $VG$ ，其通徑則爲

$$\sqrt{\frac{2TG^2}{(n^2-n)VG}}$$

又， $G$  點之抵抗力與重力相比，如

$$GT : \frac{2n^2-2n}{n-2}VG.$$

故如以  $NAK$  表一地平線， $A$  點之中介物密度以及用以拋出物體之速度不變，但  $NAH$  角改變，則  $AH$ ， $AJ$  及  $HX$  不變，而拋物線之頂點  $X$  及  $XJ$  之位置即爲已知。如再設

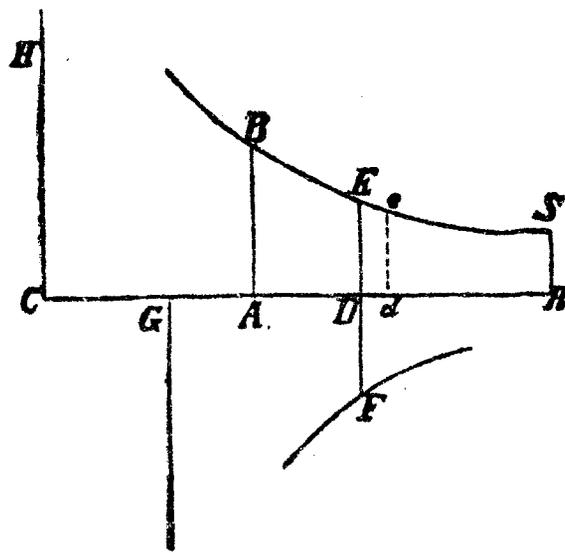
$$VG : JA = VX^n : XJ^n,$$

即可得拋物線之一切點  $G$ ，爲拋出的物體所必須經過者。

### 第三章 論物體在抵抗力

下之運動此抵抗力之一部分與  
速度相比一部分則與其平方相比

§ 16. 定理。 倘物體受一抵抗力，此抵抗力一  
部分與速度相比，一部分與其平方相比，物體之運



第一五二圖

動，僅為一施於其上的力所衝動，而且其中介物為  
整齊的，時間則成為一算術級數。如是，與速度成

爲反比的量，倘增加一某種量後，即成爲一幾何級數。

今以  $C$  爲中心，以  $CADd$ ,  $CH$  爲漸近線（此二線爲直角的），作雙曲線  $BEeS$ ，又設  $AB$ ,  $DE$ ,  $de$  與  $CH$  相平行。於  $CD$  漸近線上，有  $A$  與  $G$  二點爲已知。如是，倘時間可用等速增加的雙曲線之面  $ABED$  表之，則速度可用  $DF$  線之長表之，此線之長之倒爲  $GD$ ，與  $CG$  相結合後得  $CD$ ，爲以幾何級數增加的線。

蓋如  $DEed$  爲時間之已知的極小的增加，則  $DE$  與  $Dd$  成反比，而  $Dd$  與  $CD$  成正比。 $\frac{1}{GD}$  之增加 =  $\frac{Dd}{GD^2}$ ，故與

$$\frac{CD}{GD^2} = \frac{CG + GD}{GD^2} = \frac{1}{GD} + \frac{CG}{GD^2}$$

相比。

故如  $ABED$  時間，加上不變的部分  $EDde$  後，即以等速增加，則  $\frac{1}{GD}$  與速度以同比例減小。速度之減小，與抵抗力相比，即是，與二量所成之

和相比，此二量中之一與速度本身相比，其他係與其平方相比，而  $\frac{1}{GD}$  之減小則與

$$\frac{1}{GD} + \frac{CG}{GD^2}$$

相比，此和數之第一項為  $\frac{1}{GD}$  本身，其第二項係與  $\frac{1}{GD^2}$  相比。因其減小相似，故  $\frac{1}{GD}$  之比，如速度之比。今如  $GD$  增加一常數  $CG$ ，則其和  $CD$ ，當時間  $ABED$  等速增加時，即以幾何級數增加。此即所欲證明者。

系 1. 設  $A$  與  $G$  為已知，時間可用雙曲線之面  $ABED$  表之，則速度可用  $\frac{1}{GD}$  以表之。

系 2. 今設  $GA$  與  $GD$  相比，等於開始時的速度與  $ABED$  時間末之速度相比之反，則即可得  $G$  點。既得此後，即可由任何已知的時間內以推得速度。

§ 17. 定理. 在相同的假定下，倘所作的軌道成爲算術級數，則以某種量增加的速度成爲一幾何級數。

今設  $CD$  上之點  $R$  爲已知，作  $RS$  垂線與雙曲線相交於  $S$ ，而雙曲線的面積  $RSED$  則表所作之軌道。如是，速度即與  $GD$  相比，而經增加  $CG$  於其上後，即得  $CD$  線，以幾何級數減小，但  $RSED$  軌道則以算術級數增加。

因  $EDde$  爲常數，故極小的線  $De$  與  $ED$  成反比，與  $CD=CG+GD$  成正比。但速度之減小（此項減小在與速度相比的時間內發生，軌道之部分  $EDde$  亦於此時間內產生）與抵抗力及時間之合相比，即是，與二量所成之和成爲正比，與速度成爲反比，此二量中之一與速度本身相比，其他一量則與其平方相比，所以亦即與二量之和成爲正比，此二量中一爲常數，一與速度相比。從可知速度之減小以及  $GD$  之減小均與一和數相比，此和數由一常數及一減小的量所成。因其減小相似，故減小的量本身，即，速度與  $GD$  線相似。此即所欲證者。

系 1. 故如速度用  $GD$  線表之，則所作的軌道

與雙曲線的面  $DERS$  相比。

系 2. 倘任取  $R$  點，而如假定  $GR$  與  $GD$  相比，如上升時的速度與  $RSED$  軌道之末的速度相比，則即可得  $G$  點。既得  $G$  點後，即可由已知速度以求得軌道；反之亦然。

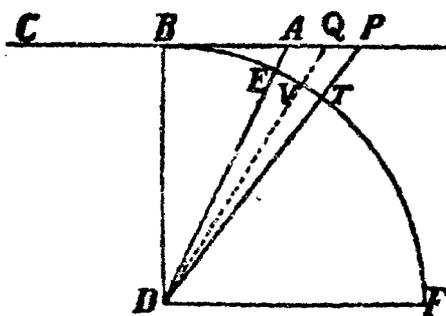
系 3. 按 § 16，由已知的時間可得速度，而按本節，由已知的速度亦可得軌道本身，故由已知的時間可得軌道；反之亦然。

§ 18 定理. 爲均勻的重力所向下吸引的物體，可上昇或下降，其所受的抵抗力一部分與速度本身相比，一部分與其平方相比。今由一圓之共軛徑或雙曲線之共軛徑之兩端作諸線，與徑相平行，而且速度與此項平行線上之某項段相比。如是，時間與某種面積相比，此面積係由連結中心點及該項段之諸端的直線所界。反之亦然。

第一事。設物體上昇，今以  $D$  爲中心， $DB$  爲半徑作象限  $BETF$ 。經過  $DB$  半徑之一端  $B$  作無限直線

$BAP$ 與 $DF$ 相平行。

設  $A$  爲  $BAP$  上之已知點，並取  $AP$  段與時間相比。因抵抗力之一部與速度本



第一五三圖

身相比，其他部分則與其平方相比，故  $P$  點之全部抵抗力與

$$AP^2 + 2AP \cdot AB$$

相比。

今再作  $DA, DP$  與圓相交於  $E, T$ ，並用  $DA^2$  表重力，使其與  $P$  點之抵抗力相比，如

$$DA^2 : AP^2 + 2AP \cdot AB,$$

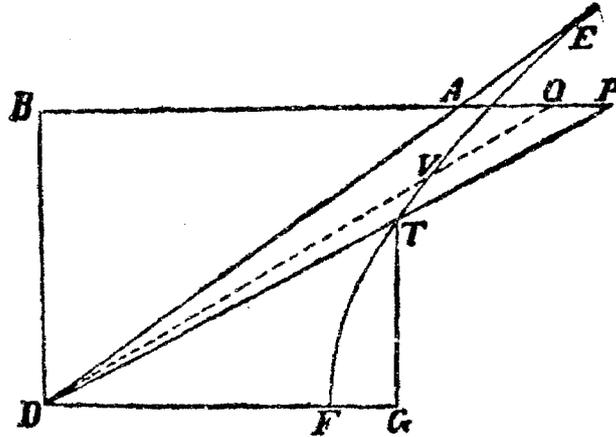
則以後全部上昇時間即與  $EDTE$  扇形相比。

又作  $DVQ$ ，使其由  $AP$  上割下  $PQ$ ，由  $DET$  上割下  $DVT$ 。  $PQ$  所表者爲速度之減小，與重力及抗抵力之和相比，即，與

$$DA^2 + AP^2 + 2AP \cdot AB = DP^2$$

相比。又  $DPQ$  面與  $PQ$  線相比，即，與  $DP^2$  相比，

而  $DTV$  面則與  $DT^2$  相比。因此， $EDT$  面按照以後的時間均勻的減小，所以與以後上昇的時間



第一五四圖

相比。此即所欲證者。

第二事。如前，仍用  $AB$  線表示物體上昇時之速度，並假定抵抗力與

$$AP^2 + 2AP \cdot AB$$

相比。倘重力過小，不足用

$$AD^2$$

以表之，則可取  $BD$  如是大，使此力與

$$AB^2 - BD^2$$

相比。今設  $DF$  與  $DB$  相垂直而且與之相等，即以  $F$  為頂點作雙曲線  $FTVE$ ，其共軛半徑為  $DB$

與  $DF$ , 與  $DA$  相交於  $E$ , 與  $DP$  相交於  $F$ , 與  $DQ$  相交於  $V$ . 如是, 以後全部上昇的時間與雙曲線的扇形  $DTE$  相比. 在某一時間段內所發生的速度之減小  $PQ$ , 與抵抗力及重力之和相比, 即,

$$\text{與 } AP^2 + 2AB \cdot AP + AB^2 - BD^2$$

$$\text{或 } BP^2 - BD^2$$

相比.

但  $DTV$  與  $DPQ$  相比, 如

$$DT^2 : DP^2,$$

即是, 倘作垂線  $TG$  垂於  $DF$  上, 有

$$\begin{aligned} DTV : DPQ &= GT^2 : BD^2 \\ &= GD^2 - DF^2 : BD^2 \\ &= GD^2 : BP^2 \\ &= DF^2 : PB^2 - BD^2 \end{aligned}$$

因  $DPQ$  與  $PQ$  相比, 即是, 與  $PB^2 - BD^2$  相比, 故  $DTV$  與  $DF^2$  相比.

從可知  $EDT$  面在各個相等的時間段內, 經減去等多的部分  $DTV$  後, 以等速減小, 因而與時



$$= DG^2 - DB^2 : BP^2$$

$$= DG^2 : DB^2$$

$$= DB^2 : DB^2 - BP^2.$$

因  $DPQ$  面與  $PQ$  或  $DB^2 - BP^2$  相比，故  $DTV$  面與常數  $DB^2$  相比。如是， $EDT$  面在各個時間段內，經加上等多的部分  $DTV$  後，以等速增加，故與下降的時間相比。此即所欲證者。

系。今以  $D$  為中心， $A$  為頂點作弧

$$At \sim ET,$$

其所有之角為  $ADT$ ，則  $AP$  速度與一其他（物體在  $EDT$  時間內於無抵抗的中介物中上昇時所可失去或下降時所可增加的）速度相比，如  $DAP$  三角形與  $DAt$  扇形相比。因此，我們可由已知的時間以求之。

蓋在無抵抗的中介物內，速度與時間相比，亦即與扇形相比，在有抵抗的中介物內則與  $DAP$  三角形相比。所以當其甚小時，在二中介物內可無分別而成為相等。在扇形與三角形方面亦是如此。



面積中之一係表示時間，其他一面則以算術級數增加或減小。

今作  $AC$  與重力相比， $AK$  與抵抗力相比，而如物體下降則二者均在  $A$  之一端，如上昇即分在  $A$  之二端；又作  $Ab$  垂線，使其

$$Ab : DB = DB^2 : 4AB \cdot AC \quad (1),$$

並以  $CH, CK$  爲直角的漸近線作  $bN$  雙曲線，引  $KN$  垂線垂於  $CK$  上。如是， $AbNK$  面即以算術級數增加或減小，而  $CK$  力則可成爲一幾何級數。今欲證明者，是物體離其最高點之距離與

$$AbNK - DET \quad (2)$$

相比。

因  $AK$  與抵抗力，即是，與

$$AP^2 + 2AP \cdot AB \quad (3)$$

相比，故可取一常數  $Z$ ，並設

$$AK = \frac{AP^2 + 2AP \cdot AB}{Z} \quad (4).$$

按第二編 § 10,  $AK$  之微分，即  $KL$



故 
$$LO = \frac{DB^3}{4AB \cdot LC} = \frac{DB^3}{4AB \cdot KC} \quad (6),$$

$$KLON = \frac{BP \cdot PQ \cdot DB^3}{2Z \cdot CK \cdot AB} \quad (7)$$

第一事。倘物體向上，則設  $BET$  爲一圓  
(*Fig. 157*), 重力與

$$AB^2 + BD^2$$

相比。如是則與重力相比的線  $AC$

$$= \frac{AB^2 + BD^2}{Z},$$

而 
$$DP^2 = AP^2 + 2AP \cdot AB + AB^2 + BD^2$$

$$= AK \cdot Z + AC \cdot Z = CK \cdot Z,$$

$$DTV : DPQ = DT^2 : DP^2$$

$$= DB^2 : CK \cdot Z.$$

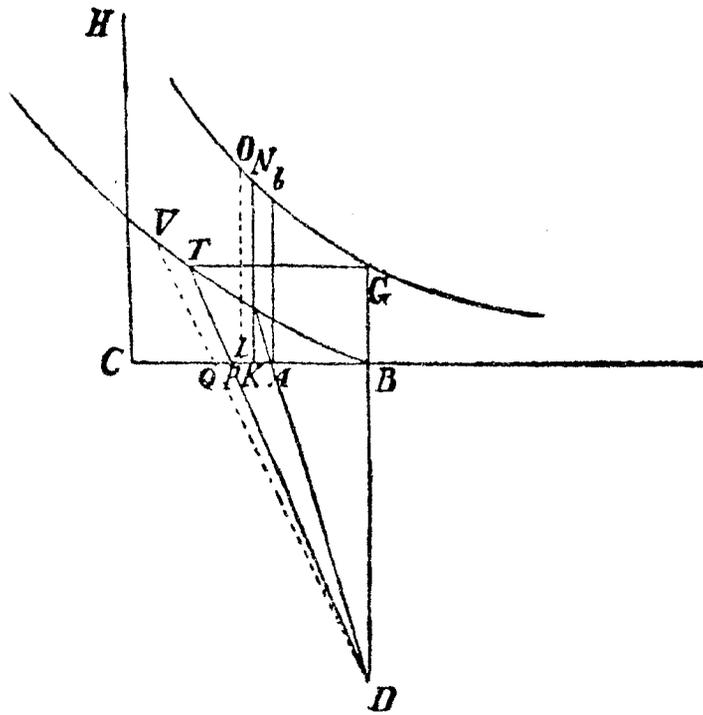
第二事。倘物體上昇，重力與

$$AB^2 - BD^2 \text{ (*Fig. 158*)}$$

相比，則 
$$AC = \frac{AB^2 - BD^2}{Z}.$$

又， 
$$DT^2 : DP^2 = DF^2 : BP^2 - BD^2$$

$$= DB^2 : BP^2 - BD^2$$



第一五八圖

$$\begin{aligned}
 &= DB^2 : AP^2 + 2AP \cdot AB \\
 &\qquad\qquad\qquad + AB^2 - BD^2 \\
 &= DB^2 : AK \cdot Z + AC \cdot Z \\
 &= DB^2 : CK \cdot Z,
 \end{aligned}$$

$$DTV : DPQ = DB^2 : CK \cdot Z.$$

第三事。 仿此，倘物體下降，重力與

$$BD^2 - AB^2 \text{ (Fig. 159)}$$

相比，故

$$AC = \frac{BD^2 - AB^2}{Z},$$

而  $DTV : DPQ = DB^2 : CK \cdot Z.$

因該項面之比恆相等，故可不用  $DTCV$  面而以一定的直角形代之，如

$$BD \cdot m;$$

如是，則因

$$\frac{1}{2}BD \cdot PQ : BD \cdot m = CK \cdot Z : DB^3,$$

故  $PQ \cdot BD^3 = 2BD \cdot mCK \cdot Z$

在  $AbNK$  面方面，以前所得的微分於此為

$$KLON = \frac{BP}{AB} \cdot \frac{PQ \cdot BD^3}{2CK \cdot Z} = \frac{BP \cdot BD \cdot m}{BA},$$

而因  $DTV = BD \cdot m,$

$$KLON = DTV + \frac{AP \cdot BD \cdot m}{AB}.$$

從可知二面積之差之微分為

$$\frac{AP \cdot BD \cdot m}{AB},$$

而因  $\frac{AD \cdot m}{AB}$  為常數，故與  $AP$  相比，亦即是與物體上昇或下降時所作軌道之微分相比，因此，該

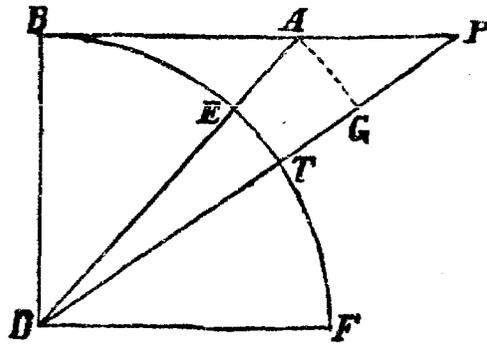
項面之差以及軌道之增加或減小，其微分相比，其開始及終末亦為同時的，所以二者本身相比。此即所欲證者。

系。今設

$$M = \frac{DET}{BD},$$

並取一線  $V$ ，使

$$V : M = DA : DE.$$



第一五九圖

則物體在有抵抗的

中介物內上昇或下降時所作的軌道，與其在同時間內於無抵抗的中介物內所作者相比，如

$$AbNK - DET : \frac{BD \cdot V^2}{AB}.$$

因此，倘時間已知，則前者亦為已知，而在無抵抗的中介物內所作之軌道與時間之平方，或，與  $V^2$  相比；因  $BD$  與  $AB$  為常數，亦即與

$$\frac{BD \cdot V^2}{AB} = \frac{DA^2 \cdot BD \cdot M^2}{DE^2 \cdot AB}$$

相比。今設  $M$  之差率為  $m$ ，則

$$\frac{DA^2 \cdot BD \cdot M^2}{DE^2 \cdot AB}$$

面之差率爲

$$\frac{2DA^2 \cdot BD \cdot M \cdot m}{DE^2 \cdot AB}$$

*AbNK-DET* 之差率爲

$$\frac{AP \cdot BD \cdot m}{BA}$$

與以上之差率相比,有

$$\begin{aligned} \frac{DA^2 \cdot BD \cdot M}{DE^2} &: \frac{1}{2}BD \cdot AP \\ &= \frac{DA^2}{DE^2} \cdot DET : DAP = 1 : 1 \end{aligned}$$

但須 *DET* 與 *DAP* 爲儘可能的小。

$\frac{BD \cdot V^2}{AB}$  面以及 *AbNK-DET* 差,倘此項面均爲甚小時,其差率均相等,故其本身亦必相等。因速度在開始下墜或上昇終了時於二中介物內均相等,故其所作軌道亦相等,所以其相比如

$$\frac{BD \cdot V^2}{AB} : AbNK - DET.$$

又因無抵抗的中介物內之軌道,恆與

$$\frac{BD \cdot V^2}{AB}$$

相比，而有抵抗的中介物內之軌道則與

$$AbNK - DET$$

相比，故在二中介物內同時所作的軌道，其相比如

$$\frac{BD \cdot V^2}{AB} : AbNK - DET.$$

此即所欲證者。

§ 19 a. 附註。球形物體在流體中所受的抵抗力，由三部分所成，一部分由於黏韌性，一部分由於摩擦，一部分則由於中介物之密度。由密度所發生的一部分抵抗力，如我們所述過，是與速度之平方相比的，由黏韌性所發生的部分為整齊的，與時間之差率相比。因此，我們可進而論物體之運動，此項物體所受之抵抗力，一部分由整齊的力所產生，與時間之差率相比，一部分則與速度之平方相比。此項問題之研究，在 § 12, § 13 及其各系內已啓其端，亦可謂已够了。在各節內，我們用中介物所產生的黏韌性之抵抗力以代替物體重力所發生的整齊的抵抗力，並無不可。在物體作直線的上昇時，此抵抗力可加於重力上，在下降時可由之減

去。

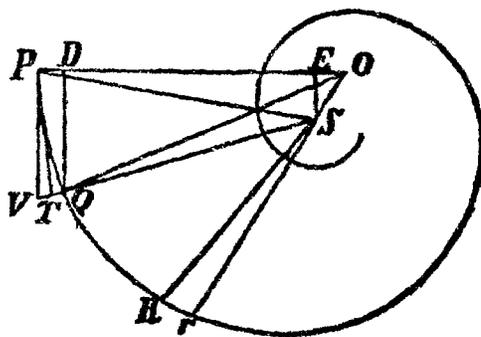
我們亦可進而研究物體之運動，此項物體所受之抵抗力，一部分為整齊的，一部分與速度相比，一部分則與速度之平方相比。關於此項研究，我亦於 § 18, § 19 內已啓其門徑；於此諸節內，由黏韌性所產生的整齊抵抗力可以代替重力，或與之相結合，均無不可。我今願進而作其他的研究。

## 第四章 論物體在 中介物內之循環運動

§ 20. 補題。今設  $PQRr$  爲一螺旋線，其與一切半徑  $SP, SQ, SR,$  等等之交角均相等。試作  $PT$  直線，與曲線相切於  $P$  點，與  $SQ$  之引長相交於  $T$ 。又作垂線  $PO, QO$  相交於  $O$ ，並引  $SO$  線。如是，則  $P$  與  $Q$  相

接近而至於相合時， $PSO$  角即成爲直角，而且最後，有

$$TQ \cdot 2PS = PQ^2.$$



第一六〇圖

因

$$OPQ = OQR = 90^\circ,$$

而

$$SPQ = SQR$$

故

$$\angle OPS = \angle OQS.$$

所以經過  $O, S, P$  三點的圓亦經過  $Q$  點。今如  $P$  與  $Q$  相合，則此圓即於相遇點與曲線相切，並與  $OP$  線垂直的相交。因此， $OP$  即爲此圓之直徑，而

$$OSP = 90^\circ.$$

今再作  $QD, SE$  垂於  $OP$  上，則諸線之最後比成爲

$$TQ : PD = TS : PE = PS : PE = 2PO : 2PS,$$

又因  $PD : PQ = PQ : 2PO,$

故經組合後

$$TQ : PQ = PQ : 2PS,$$

或  $PQ^2 = TQ \cdot 2PS.$

此即所欲證者。

§ 21. 定理。 設中介物各處之密度與該處距一不動的中心之距離成反比，向心力與密度之平方相比，則物體能在一螺旋線上運動，該線與一切由該中心出發的半徑，在一不變的角下相交。

今仍保存以上補題內的一切假定，將  $SQ$  引長至  $V$ ，使

$$SV = SP.$$

在相等的時間內，物體作成甚小的弧  $PQ$  與  $QR$ 。由中介物之抵抗力所發生的弧之減小，或此項弧與同時間內在無抵抗的中介物中所作者之差，其相比如時間之平方相比（即產生此的時間）。所  $PQ$  弧之減小，等於  $PR$  弧之減小之  $\frac{1}{2}$ 。今設

$$PSQ = QSr,$$

則  $PQ$  之減小

$$= \frac{1}{2}Rr,$$

故抵抗力與向心力相比，如

$$\frac{1}{2}Rr : TQ \quad (1).$$

因  $P$  點之向心力與  $SP^2$  成反比， $TQ$  則為其所產生，與該力及時間之平方相比（即，與產生  $PQ$  弧的時間之平方相比），故  $TQ \cdot SP^2$  與該項時間之平方相比，按 § 20，亦即是  $\frac{1}{2}PQ^2 \cdot SP$  與時間之平方相比。所以時間與

$$PQ\sqrt{SP} \quad (2)$$

相比，而物體在時間內用以作成  $PQ$  弧的速度與

$$\frac{PQ}{PQ\sqrt{SP}} = \frac{1}{\sqrt{SP}} \quad (3)$$

相比,亦即是,與距離  $SP$  之平方根成反比。仿此,亦可知物體作成  $QR$  弧的速度,與  $SQ$  之平方根成反比。但  $PQ$  與  $QR$  相比,如產生此的速度相比,故有

$$\begin{aligned} PQ : QR &= \frac{1}{\sqrt{SP}} : \frac{1}{\sqrt{SQ}} \\ &= QS : \sqrt{SP \cdot SQ} \quad (4). \end{aligned}$$

又因  $\angle SPQ = \angle SQR$ ,

而 面積  $PSQ = QSr$ ,

故亦  $PQ : QR = QS : SP \quad (5)$ .

將 (4) 與 (5) 組合後,即得

$$PQ : Qr - QR = QS : PS - \sqrt{PS \cdot QS},$$

或  $PQ : Rr = QS : \frac{1}{2}VQ \quad (6)$ ,

蓋當  $P$  與  $Q$  相合時,

$$SP - \sqrt{SP \cdot SQ} : \frac{1}{2}QV$$

成爲一相等的比。因中介物之抵抗力所產生的  $PQ$  之減小,即,  $\frac{1}{2}Rr$  與抵抗力及時間之平方相

比,故抵抗力與

$$\frac{Rr}{PQ^2 \cdot SP}$$

相比.按(6),可知

$$\frac{Rr}{PQ^2 \cdot SP} \text{ 與 } \frac{\frac{1}{2}VQ}{SQ \cdot PQ \cdot SP} = \frac{\frac{1}{2}OS}{OP \cdot SP^2} \text{ 相比 (7).}$$

倘  $P$  與  $Q$  相合,則

$$SP = SQ,$$

$$\angle PVQ = 90^\circ$$

又因  $\triangle PVQ \sim \triangle PSO$ ,

故  $PQ : \frac{1}{2}VQ = OP : \frac{1}{2}OS$  (8).

從可知  $\frac{OS}{OP \cdot PS^2}$  與抵抗力相比,而抵抗力則

亦與  $P$  處中介物之密度及速度之平方相比.今如

由(7)內之式上取去  $\frac{1}{SP}$ ,則即可知  $P$  點之中介物密度與

$$\frac{OS}{OP \cdot SP} \quad (9)$$

相比.倘螺旋線為已知,則即可求

$$OS : OP,$$

而  $P$  點之密度與

$$\frac{1}{SP} \quad (10)$$

相比。所以中介物之密度如與  $SP$  成反比，則物體即可在螺旋曲線上運動。此即所欲證者。

系 1. 任何處  $P$  之速度，恆為物體於無抵抗的中介物內在圓上運動時所能有的速度；此圓之半徑為  $SP$ ，其向心力亦同前。

系 2. 倘距離  $SP$  為已知，則中介物之密度與

$$\frac{OS}{OP}$$

相比。設距離為未知，則密度與

$$\frac{OS}{OP \cdot PS}$$

相比。

由此可知螺旋線於任何密度均可適應。

系 3. 任何處  $P$  之抵抗力與該處之向心力相比，如  $\frac{1}{2}OS : OP$ 。

蓋該項力與

$$\frac{1}{2}Rr = \frac{\frac{1}{2}VQ \cdot PQ}{QS} \quad \text{及} \quad TQ = \frac{\frac{1}{2}PQ^2}{PS}$$

相比，所以其相比，如（設  $QS = PS$ ）

$$\frac{1}{2}VQ : PQ \text{ 或如 } \frac{1}{2}OS : OP.$$

故如螺旋線爲已知，則抵抗力與向心力之力亦即可知；反之，由已知的抵抗力與向心力之比，亦可求得螺旋線。

系 4. 所以，祇當抵抗力小於向心力之半時，物體乃能在螺旋線上運動。倘抵抗力等於向心力之半，則螺旋線與直線相合，即與  $PS$  相合，物體於其上向中心運動，其速度與一其他（物體在無抵抗的中介物內於拋物線上運動時所有的）速度相比，如

$$1 : \sqrt{2}.$$

所以下降的時間與速度成反比，因而爲不變的。

系 5. 因離心相等的距離內，螺旋線及直線  $SP$  上之速度相等，又因螺旋之長與直線之長相比，其數恆爲

$$OP : OS,$$

故螺旋線上下降與直線上下降之時間相比，其數亦爲常數。所以前者爲常數。

系 6. 倘以  $S$  爲中心，以二已知的半徑作圓，螺

旋線與  $PS$  半徑所作的角可任意改變，則物體在二圓間所可經過的環繞數，其比如

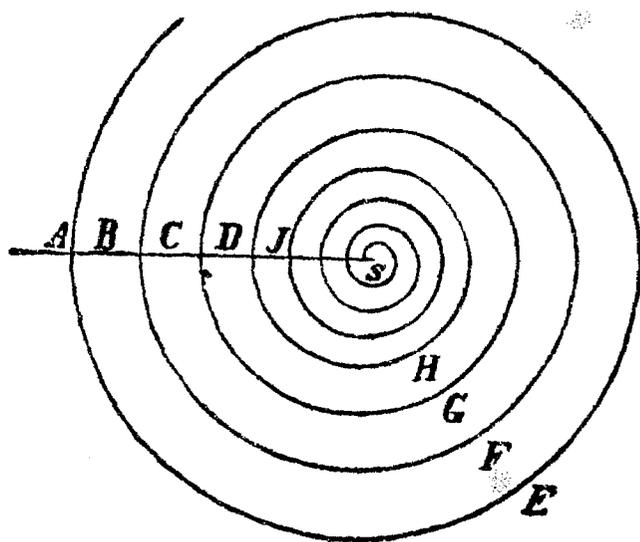
$$PS : OS,$$

或與角之正切相比，此角亦即為螺旋線與  $PS$  半徑所作者。但環繞的時間；則其比如

$$OP : OS,$$

即是，與該角之正割相比，或與中介物之密度成爲反比。

系 7. 一物體在一中介物內於一任意的曲線  $AEB$  上繞一中心運動，其與  $AS$  半徑在  $B$  處之交



第一六一圖

角等於  $A$  處之交角，中介物之密度則與離心之距離成反比。 $B$  點之速度與  $A$  點者相比，如

$$\sqrt{AS} : \sqrt{BS}$$

如是則物體不斷的經過無數環繞  $BFC, CGD$  等等，其在  $AS$  半徑上所割之段，

$$AS, BS, CS, DS, \text{ 等等。}$$

成爲一連比。其環繞時間與軌道之周

$$AEB, BFC, CGD \text{ 等等，}$$

成爲正比，與各開始點

$$A, B, C, \text{ 等等}$$

之速度成反比，即，與

$$AS^{\frac{3}{2}}, BS^{\frac{3}{2}}, CS^{\frac{3}{2}}, \text{ 等等}$$

成反比。又，物體達到中心所須的時間與第一環繞之時間相比，如

$$AS^{\frac{3}{2}} + BS^{\frac{3}{2}} + CS^{\frac{3}{2}} + \dots : AS^{\frac{3}{2}},$$

即是，如

$$AS^{\frac{3}{2}} : AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}},$$

或，很相近的如

$$\frac{2}{3}AS : AB.$$

由此，即不難推得該全部時間。

系 8. 由此，我們亦可推至物體在任何中介物內之運動，此項中介物之密度或則為整齊的或則服從某種已知定律。

我們可以  $S$  為中心，以（成為連比的段） $AS$ ,  $BS$ ,  $CS$ , 等等作半徑，作若干圓，並假定在以上的中介物內，任何二圓間之環繞時間，與在此處所新有的中介物內該二圓間之環繞時間相比，很接近的如此處二圓間新中介物之平均密度與原來中介物之平均密度相比。上所述的螺旋線在原來之中介物內與  $AS$  相交的角，其正割與新中介物內同角之正割相比，亦為以上之率。又，我們並可假定該二圓間之環繞匝數，與該項角之正切很近似的相比。倘任何二圓間有此關係，則一切圓間之運動均可如是推之。

物體在有規則的中介物內如何乃能運動以及其時間若何，我們均不難如是設想之。

系 9. 倘偏心的運動仍在螺旋線上，但螺旋線與橢圓形相接近，則我們亦可假定該項曲線之各匝，其相距均相等，其與中心之接近，如以前所述的螺旋線方面者一樣。如是，我們即不難知物體如何於該項螺旋線上運動。

§ 22. 定理. 設各處之密度，與該處離中心之距離相反比，向心力與該項距離之任何次方成反比，則物體在一螺旋線內運動，此螺旋線與由中心出發的一切半徑以相等之角相交。

此定理之證，與前相同。蓋如  $P$  點之向心力與

$$SP^{n+1}$$

成反比，則可如前推知，物體作成  $PQ$  弧的時間，

與  $PQ : SP^{\frac{1}{2}n}$

相比。

$P$  點之抵抗力與

$$\begin{aligned} \frac{Rr}{PQ^2 \cdot SP^n} &= \frac{(1 - \frac{1}{2}n)VQ}{PQ \cdot SP^n \cdot QS} \\ &= \frac{(1 - \frac{1}{2}n)OS}{OP \cdot SP^{n+1}} \end{aligned}$$

相比，即，與

$$SP^{n+1}$$

成反比。因速度與  $SP^{\frac{1}{2}n}$  成反比，故  $P$  點之密度與  $PS$  成反比。

系 1. 抵抗力與向心力相比，如

$$(1 - \frac{1}{2}n)OS : OP.$$

系 2. 設向心力與  $SP^3$  成反比，則  $1 - \frac{1}{2}n = 0$ ，故抵抗與密度均為 0。

系 3. 設向心力與  $SP^n$  成反比，而  $n > 3$ ，則正的抵抗力成爲負的抵抗力。

§ 23. 附註。 此處及以上所證明關於密度不同的中介物之定理，實在祇能在極小的物體方面適用，此項物體必須如是小，俾其兩旁的密度之差可不足計。又，我並假定抵抗力在平常狀況下是與密度相比的。故在某項中介物內，倘抵抗力不與密度相比，則須將後者增加或減小，俾其能相稱。

§ 24. 問題。 試求一種向心力及中介物之抵抗力；在此種力下，物體能在一已知的螺旋線上以某

種速度運動，此種速度服從一已知定律。

今設 (*Fig. 161*)  $PQR$  爲該螺旋線。由物體作成  $PQ$  弧的速度內，可求得其時間，而由  $TQ$  高（此高與向心力及時間之平方相比）可求此力。由此，復可由  $PSQ$  及  $QSR$  二面之差  $RSr$  以求得物體之遲退，由此遲退中即可求得中介物之密度。

§ 25. 問題。 向心力爲已知；今欲求各處之中  
介物密度，物體在此項密度下作成一已知的螺旋  
線。

由向心力可求各處之速度，再由速度之遲退  
求中介物之密度，如前節內之方法。

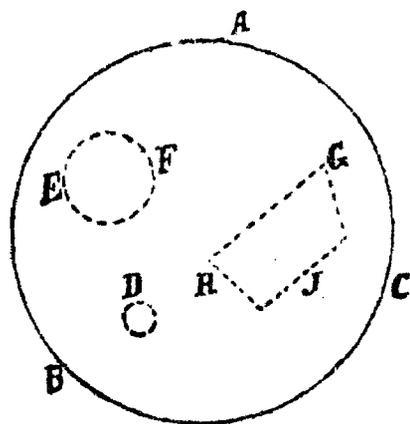
關於此項問題之研究法我於 §§ 14 及 10 內  
已論述過，所以不欲再在這裏討論此項冗長的問題了。尚須補充者，是使物體能加速的力以及中介物之密度及抵抗力；以上所述的運動及與此相關的運動即在此項中介物內進行。

## 第五章 論流體之密度及壓榨以及流體靜力學

§ 26. 說明。 每一個物體，倘其部分對於外來的力能退讓，因而本身相互間能運動者，謂之流體。

§ 27. 定理。 一等質的不動的流體，盛於一不動的任意的器皿內，其各面均受壓榨，則其一切部分所受之壓榨均相等，並留在其原處，不會發生因壓榨而起的運動（於此，我們對於其密度之增加，重力及向心力暫置不論）。

第一事。 設  $ABC$  爲一球形的器皿，其中盛有流體，其各面所受



第一六二圖

之壓榨均相等；如是，則沒有一部分能因該項壓力而運動。蓋如不然，而有一部分  $D$  能運動，則凡離中心等遠之該項部分，均能相同的同時運動，因為這些部分所受之壓力均相似相等，同時，凡非由該項壓力所產生之運動，亦均不能有。但如此項部分均向中心運動，則必流體向中心稠密化，此則與所設相違。因為各部分離中心等遠，故亦不能向任何一面運動；蓋如能向一面運動則因同樣的理由，亦必能向其相反之面運動，但一個部分決不能同時向二面運動。所以沒有一部分能離其所在之處。此即所欲證者。

第二事。我現在須證明，該流體之一切球形的部分，其各面所受之壓力均同。今設  $EF$  為流體之一球形的部分：試假定，此部分各面所受之壓力不相同。如是則較少的壓力能逐漸增加，直至各面所受之壓力相等為止，而按第一事其各部分均留在其原處，但新的壓力增加入後，又必須運動（按 § 26），如是，此二者即相矛盾。從可知假定  $EF$  各

面所受之壓力不等，係屬錯誤。此即所欲證者。

第三事。 我還須證明，各種不同的球形部分，所受之壓力均等。

互相接觸的球形部分，在其接觸點之互相壓迫係相等，此可由運動第三律知之。按第二事可知其各面所受之壓力均相等。所以二個球形的部分雖不相接觸，而其所受之壓力相等，因為在其中的球形部分能與二者相接觸。此即所欲證者。

第四事。 流體之一切部分，其所受壓力均相等。蓋其任何二部分能為球形的部分於任何點所接觸，對於後者在該處施相等的壓力，並由之受相等的壓力。此即所欲證者。

第五事。 流體內任何一部分  $GHJ$  被其餘部分所圍，猶之被器皿所圍一樣，其各面所受壓力亦均相等，而且其各部分之互相壓迫均相等，不能有所運動，故在任何一部分  $GHJ$  方面，其各部分之互相壓迫相等而不能有所運動。

第六事。 倘該流體不在一固體的器皿內，而

且各面所受之壓力不相等，則按 § 26 該流體必對於較強的壓力退讓。

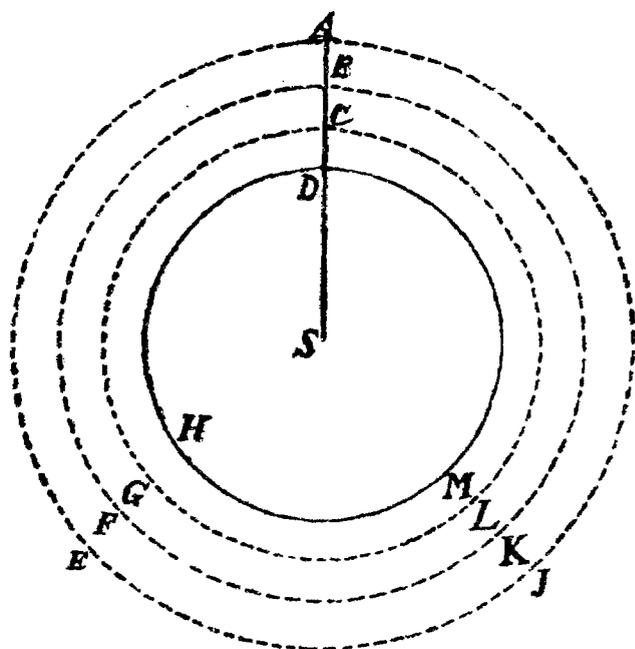
第七事。所以在固體的器皿內，流體由一面所受之壓力，不能較他面為強，流體對於器皿必退讓，而且為一時的，因為器皿之固體的面不會隨流體之退讓而更進。當流體退讓時能施壓力於對面，故各面之壓力必趨於相等。當流體由壓力較強的一面退讓時，因器皿對面之抵抗力能擋之，故各面來的壓力必向相等而不能有局部的運動。流體之各部分必互相同等的壓迫而本身間靜止着。此即所欲證者。

系。所以流體各部分相互間之運動，能為一流體表面上所受之壓力所改變，但須表面之形狀有所改變，或流體各部分互相間之運動有所改變。

§ 28. 定理。設有一球形的流體，在離心相等處為等質的，其各部分在一同心的球面上，其吸引力係向球之中心。在此種狀況下，底面所負擔者為一圓柱體之重量，此圓柱體之底等於該底面，其高

等於在上的面之高。

今設  $DHM$  為流體之底面， $AEJ$  為其最在外的面。用無數球面  $BFK, CGL$  等等，流體可分



第一六三圖

割成爲等厚的同心的球層。今試設想，重力祇對於每層之在上的面發生作用，而且其作用對於一切面之相等的部分均相等。所以最高的面  $AEJ$  祇爲其所固有的重力所壓，於是此力又對於上層之一切部分及第二面  $BFK$  施以相等的壓力。此外該第二面又受其自身重力之壓，故必須將其加於

第一力上而得一二倍的壓力，其第三面  $CGL$  於是即受一三倍的壓力，第四面受四倍的壓力，第五面受五倍的壓力，等等。從可知每一面所受之壓力，不與在上的流體之總量相比，而與直至表面的層數相比，所以與最下層重力乘層之數相等。

即是，等於一固體之重力，此固體之最後形式爲以前所說的圓柱體（我們可設想將層之數增至無限，將其厚減至無限，則最下層至最上層之重力作用成爲一連續的）。

所以最在下的面，其所負擔者爲前所述的圓柱體。此即所欲證者。

倘重力以距離中心之某種比減小，此定理之無誤亦可仿前知之。又如流體在上面較疏，下面較密，亦仍適用此理。

系 1. 所以底面所受之壓，非爲上面的流體之全重量，其所負擔者，祇爲定理中所述重量之一部分而已。

系 2. 在離心等遠之處，其壓力均相等，不問被

壓的面與地平面相平行，相垂直或相傾斜，亦不問流體由被壓的面垂直向上沿一直線射出或斜的由孔道放出，至於後者之有規則的，或無規則的，狹或廣均無關係。壓力並不以此種狀況而改變，此則可用 § 28 之論證方法以證明之

系 3. 用同樣的證法，並可知道流體之部分不能因上面之重量而本身間發生運動，不過增加密度的運動我們須另論。

系 4. 故如有一其他物體，比重相同，而且不能增加其密度者，投入此項流體內，則不會因上面重量之壓而運動。這物體既不會上昇，亦不會下降，且亦不會改變其形狀。倘此物體為球形的，仍保持其球形，為立方體，亦仍保持其立方體；此物體可為柔的或流體的，可在該流體內游泳或沈入底。流體之在內的部分，其狀況與投入的物體同，凡比重相同的一切投入的物體亦均如此。假如在流體內的物體，其重量不變，但成為流體了，則以前未成為流體時之上昇，下降或改變形狀，亦仍繼續，因

爲重力及其他運動之原因，於此並未改變。

系 5. 倘物體較其周圍之流體比重爲大，則物體必沈下，倘比重較小，即浮上，因而均能運動並能改變形狀，其原因則在重力之過多或缺少。蓋此項過多或缺少均爲力之事項，故能推動物體，此頗可與秤方面之狀況相比。

系 6. 所以在流體內的物體，其重力有二種，一爲真的，絕對的，一爲假的，尋常的，相對的。絕對的重力就是物體向下運動的全力，相對的或尋常的重力，是超過其周圍之流體的過剩重力，能使物體較其周圍的流體更強的向下。第一種重力使流體及物體之各部於其原來的處所發生吸引作用，故將其重量相加後，得全部之重量。此事可於盛有流體的器皿見之，欲得其全部重量，須將其各部分之重量相合。但第二種重力，則使物體不在其原來的處所發生引力作用，而能使其互求下降被阻，故如留在其原處時，猶如沒有重力一樣。

在空氣中的物體，如不較空氣爲重，則尋常視

之爲沒有重量的，倘較空氣爲重，則尋常視爲有重量的，實在是爲空氣所不能負擔的部分，所以尋常所稱的重，實在是物體之真重量超過空氣重量之過剩。故凡較空氣爲輕的物體，尋常稱之爲輕，因其對於空氣退讓，故能在空氣中上昇；在真理上，相對的輕物體不是真輕的，因而在真空中即能下降。在水中的物體亦是如此，隨其重量之大小能上昇或下降，此亦爲相對的輕或重，即，物體之重量超過或不及水之重量時，物體即在水內下降或上昇，而發生相對的重或輕。倘然物體既不較之水爲重而下降，亦不較其輕而上昇，則物體雖對於整個增加了重量，但在尋常說來，物體在水中是沒有重量的。

系 7. 在重力方面所證明的一切，均可推至於其他一切向心力。

系 8. 設物體在一中介物內運動，此中介物爲其自身之重量或向心力所推動，物體亦同被此力所推動但較爲強，則此二力之差，即爲運動的力。

在以前所述諸定理內，均稱之爲向心力。倘物體被該力所推動較弱，亦仍是如此。

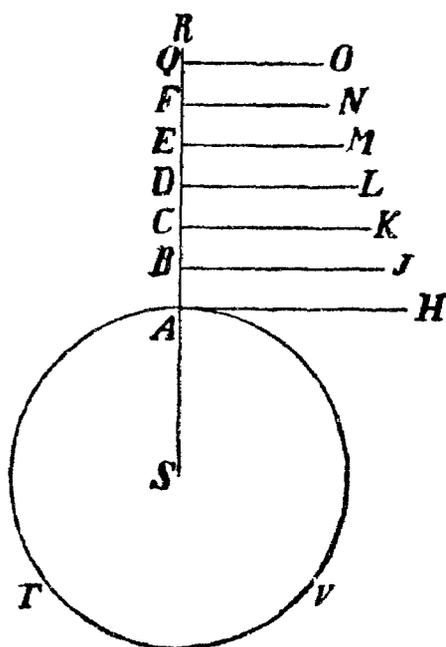
系 9. 因流體對於在其內的物體不能壓之使其改變形狀，故此物體之內部不會改變，此已可由 § 27 之系知之。所以，如將動物圍入流體內，而此項動物之感覺祇由其各部分之運動產生，則動物之身體既不受損傷，亦不會對之有所感覺，不過自須假定，動物之身體不會因四圍流體之壓榨而緊縮。

任何物體所成之系統，其在流體內之狀況均是如此。系統之各部分猶如在真空中一樣，祇保存其相對的重力，不過，同時，流體對其運動能發生抵抗。

§ 29. 定理. 設流體之密度與壓榨相比，其各部分爲一向心力所向下的被吸引，此力與各部分之離中心的距離成反比，又設該項距離成爲連比，則該項距離內之密度亦成爲連比。

今設  $ATV$  爲一球面，流體在此面上靜止着，

$S$  為其中心,  $SA, SB,$   
 $SC, SD, SE,$  等等為  
 各距離, 成爲一連比。  
 試作垂線  $AH, BJ,$   
 $CK, DL, EM$  等等,  
 與  $A, B, C, D, E,$  等  
 等, 各點中介物之密  
 度相比。如是則該項  
 點處之比重與



第一六四圖

$$\frac{AH}{AS}, \frac{BJ}{BS}, \frac{CK}{CS}, \text{等等}$$

相比, 或, 與  $\frac{AH}{AB}, \frac{BJ}{BC}, \frac{CK}{CD}, \text{等等}$

相比。

試先設想, 此項比重整齊的由  $A$  至  $B$ , 由  $B$  至  $C$ , 由  $C$  至  $D$ , 等等, 傳出去, 其減少則在  $B, C, D,$  等等各點。今將此項重量各與

$$AB, BC, CD, \text{等等}$$

相乘, 則得壓力之各部分

$AH, BJ, CK,$  等等,

此項部分對於底面  $ATV$  生作用。

所以  $A$  受一切壓力之量

$AH, BJ, CK, DL,$  等等,

$B$  所受者,須減去  $AH$ , 其餘與  $A$  均同;  $C$  則除  $AH, BJ$ ;  $D$  則除  $AH, BJ, CK$ ; 等等。因之,  $A$  之密度與  $B$  之密度相比,如

$$\begin{aligned} AH+BJ+CK+DL+\dots\dots : BJ+CK \\ +DL+\dots\dots = AH : BJ. \end{aligned}$$

仿此,並有

$$\begin{aligned} BJ+CK+DL+\dots\dots : CK+DL+\dots\dots \\ = BJ : CK, \end{aligned}$$

等等。從可知方程左端之和與其差

$AH, BJ, CK,$  等等

相比,故本身亦成爲連比。此即是,

$A, B, C, D,$  等等

各處與

$AH, BJ, CK, DL,$  等等諸線

相比的密度，本身亦成爲連比。倘越過一步，即可知，在成爲連比的距離

$SA, SC, SE,$  等等

內，其密度

$AH, CK, EM,$  等等

亦成爲連比。仿此，並可知與

$SA, SD, SQ,$  等等

相當的密度

$AH, DL, QO,$  等等，

亦成爲連比

今如  $A, B, C, D, E$  等等

諸點互相接近，使比重所成的級數成爲連續，則在成爲連比的距離

$SA, SD, SQ,$  等等

內之密度

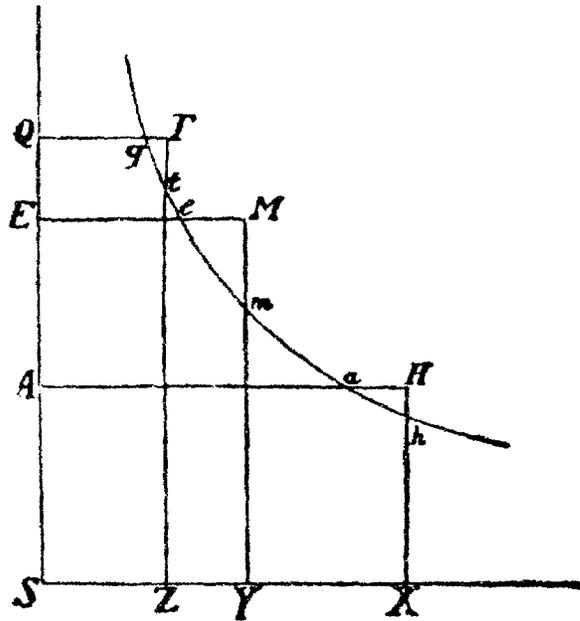
$AH, DL, QO,$  等等，

亦仍保持其連比性。此即所欲證者。

系。 所以，倘流體任何二點  $A, E$  之密度已

知，則可由此推知其他點  $Q$  之密度。

今以  $S$  為中心， $SQ$  及  $SX$  為直角的漸近線，



第一六五圖

作雙曲線，與  $AH, EM, QT$  相交於  $a, e, q$  點，  
與垂於  $SX$  上之垂線  $XH, MY, TZ$  相交於  $h,$   
 $m, t$ 。於是設

$$ZYmt : YmhX = EeqQ : EeaA,$$

而且此比例內之後三面積均為已知者。如是則  $Zt$   
之引長割下  $QT$ ，使其與密度相比。

蓋如  $SA, SE, SQ$  成爲一連比，則

$$EqQ = EeaA,$$

所以  $ZYmt = YmhX,$

而  $SX : SY = SY : SZ,$

$$AH : EM = EM : QT.$$

設  $SA, SE, SQ$  在一級成爲連比的量內，其位置改易，則  $AH, EM, QT$ ，於其他成爲連比的級內亦取同的位置，此則因相比的雙曲線面積使然。

§ 30. 定理。 設流體之密度與壓力相比，其各部分被向心力所向下的吸引，此向心力與離心距離之平方成反比。設各距離成爲一調和級數，則該項距離內之流體密度成爲一幾何級數。

今設  $S$  爲中心，

$SA, SB, SC, SD, SE$  等等

爲距離，成爲一幾何級數。作垂線

$AH, BJ, CK$ ，等等，

與  $A, B, C$ ，等等各點之流體密度相比。如是，則該項點之比重各與

$$\frac{AH}{SA'}, \frac{BJ}{SB^2}, \frac{CK}{SC^2} \text{ 等等}$$

相比。

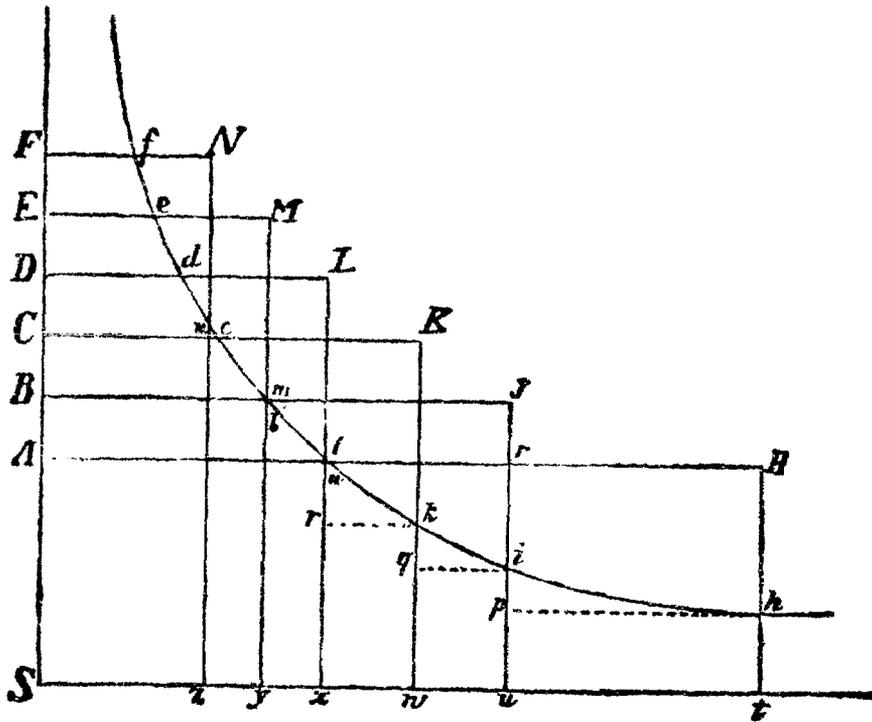
今設想此項比重係整齊的分配好，即，

第一比重自  $A$  至  $B$ ,

第二比重自  $B$  至  $C$ ,

第三比重自  $C$  至  $D$ ,

等等。今將此項比重與



第一六六圖

$AB, BC, CD,$  等等

相乘,或因相互間相比,故亦可與

$SA, SB, SC,$  等等

相乘;如是,即得全部壓力之相當的部分,可用

$$\frac{AH}{AS'} \frac{BJ}{BS'} \frac{CK}{CS'}, \text{ 等等}$$

表之。因密度與此項部分之和相比,故密度之差,即,

$$AH-BJ, BJ-CK, CK-DL, \text{ 等等}$$

與該項和之差相比,即,與

$$\frac{AH}{AS'} \frac{BJ}{BS'} \frac{CK}{CS'}, \text{ 等等}$$

相比。

今以  $S$  為中心,  $SA, Sx$  為直角的漸近線作雙曲線,與

$AH, BJ, CK,$  等等相交於  $a, b, c$  等點,

又與  $Ht, Ju, Kw,$  等等相交於  $h, i, k$  等點。

密度之差,即

$$tu, uv, wx, \text{ 等等與 } \frac{AH}{AS'} \frac{BJ}{BS'} \frac{CK}{CS'} \text{ 等等}$$

相比，而直角形

$$tu \cdot th, uv \cdot iu, \text{ 等等與 } \frac{AH}{AS} \cdot th, \frac{BJ}{BS} \cdot ui$$

等等相比。

由雙曲線之性質，可知

$$SA : St = th : Aa,$$

或  $SA : AH = th : Aa,$

故

$$\left. \begin{aligned} Aa &= \frac{AH}{AS} \cdot th \\ Bb &= \frac{BJ}{BS} \cdot ui \\ \text{等等} \end{aligned} \right\} (1).$$

但  $Aa, Bb,$  等等為連比的，故其相比如其差  $Aa - Bb, Bb - Cc,$  等等相比，所以直角形  $thpu, uiqw,$  等等亦與此項差相比，而此項差之和與直角形之和

$$thpu + uiqw + \dots$$

相比。今將項之數增加至無限，同時， $A, B, C$  等諸點之距離亦減至於無限，則該項直角形之和即成為雙曲線的面  $zthn,$  與  $Aa - Ff$  相比。

今如設

$$SA, SD, SF$$

距離成爲一調和級數，則

$$Aa - Dd = Dd - Ff$$

故與此項差相比的雙曲線面亦必相等，即  $thlx = xlnz$ ，因而密度  $St, Sx, Sz$  或  $AH, DL, FN$  成爲一連比。此即所欲證者。

系。故如流體之二任意的密度，例如， $AH, CK$  爲已知，則與其差相當的面  $thkw$  亦即可求得。由此，可用

$$thnz : thkw = Aa - Ff : Aa - Cc$$

比例，以求與任何高  $SF$  相當的密度。

§ 31. 附註。用相似的方法，可以證明，倘流體之各部分，其重力與距中心的距離之三次方相比

而減小，而此項距離之平方之倒，即， $\frac{1}{SA^2}, \frac{1}{SB^2}$

$\frac{1}{SC^2}$  等等成爲一算術級數，則密度

$$AH, BJ, CK, \text{ 等等。}$$

成爲一幾何級數。

又如重力以距離之四次方減小，而此項距離之三次方之倒，即， $\frac{1}{SA^3}$ ， $\frac{1}{SB^3}$ ， $\frac{1}{SC^3}$ ，等等，成爲算術級數，則密度

$$AH, BJ, CK, \text{ 等等}$$

成爲一幾何級數。仿此，可推至於無限。

倘流體各部分之重力均相等，距離成爲算術級數，則密度成爲幾何級數。此爲哈雷 (*Edmund Halley*) 所最初發見者。設重力與距離相比，距離之平方成爲一算術級數，則密度成爲一幾何級數。倘流體因壓榨而緊縮，其密度仍與壓榨的力相比，或卽是，倘流體所佔的空間與該項力成反比，則一切仍是如此。

我們尙可設想其他的緊縮定律，例如，壓榨的力之三次方與密度之四次方相比，或，壓榨的力之三次方與密度之四次方相等，等等。在這種狀況下，倘重力與距中心的距離之平方成反比，則密度卽與距離之三次方成反比。又如設想壓榨的力之

三次方與密度之五次方相比，重力與距離之平方成反比，則密度與距離之 $\frac{3}{5}$ 次方成反比

設壓榨的力與密度之平方相比，重力與距離之平方成反比，則密度與距離成反比。

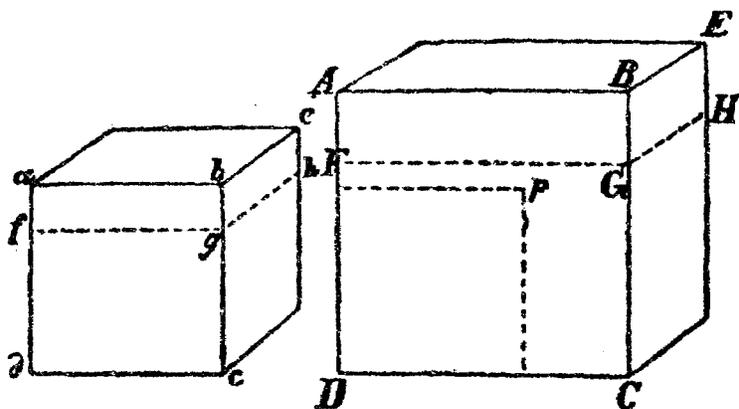
為避免繁冗計，不能一一縷述。用試驗的方法可知空氣之密度與壓榨的力很精確，或至少很接近的，成爲相比。所以地球上大氣內之空氣與密度，與在其上的全部空氣之重量相比，即是，與氣壓表中之水銀柱相比，

§ 32. 定理。 倘有若干部分，因某種力之作用而能散開，此力與距中心之距離成反比，則此項部分成爲一彈性的流體，其密度與壓榨相比。反之，倘由各部分所合成的流體，其密度與壓榨相比，則各部分之離心力與其離中心的距離成反比。

試設想將流體盛於立方體  $ACE$  內，於是用壓榨將其所佔空間縮小成爲  $ace$ 。倘兩空間內各部分之相互位置均同，則其相互距離與立方體之邊相比，即是，其相比如  $AB : ab$ 。但中介物之密度，

則其比如  $ab^3 : AB^3$ .

今於較大的立方體之面  $ABCD$  上取一平方形  $DP$ , 與較小的立方體之面  $db$  相等. 按所設, 可



第一六七圖

知  $DP$  所施於其內部的流體之壓力與  $db$  所施於其內部的流體者相比, 如

$$ab^3 : AB^3.$$

$DB$  正方形所施於其內部的流體之壓力, 與  $DP$  正方形所施者相比, 如  $DB : DP$ , 即, 如

$$AB^2 : ab^2.$$

將此二比相結合後, 即可知  $DB$  所施於流體的壓力與  $db$  所施者相比, 如

$$ab : AB.$$

今試設想用  $FGH$  及  $fgh$  平面將該項流體分成爲二部，此二部之相互壓榨力等於  $AC, ac$  二平面對之所施的壓力，卽是，其比爲

$$ab : AB.$$

能與該項壓力相抵抗的離心力，其比亦同此。因二立方體內之部分數量相同，其相互位置亦同，故  $FGH, fgh$  平面內各部分所施於一切部分之力，其相比如一部分所施於一部分的力相比。所以各部分沿  $FGH$  平面所施於各部分的力，與小立方體內之相當的力相比，如

$$ab : AB,$$

卽是，如各部分間相互距離之反。此卽所欲證者。

倘各部分之力相比，如其距離之反，卽，如

$$ab : AB,$$

則此項力之和，其比亦同此。 $DB$  與  $db$  之壓力，其相比亦與此和同，而

$$DP \text{ 之壓力} : DB \text{ 之壓力} = ab^2 : AB^2.$$

將此二比相結合後，即得  $DP$  之壓力與  $db$  壓力之比爲

$$ab^3 : AB^3,$$

即是，壓榨的力相比，如密度相比。此即所欲證者。

§ 33. 附註。 仿此，倘離心力與距離之平方成反比，則可知壓榨的力之三次方與密度之四次方相比。倘離心力與距離之三次或四次方成反比，則壓榨的力之三次方與密度之五次或六次方相比。

廣之，設

$$\text{部分間之距離} = D,$$

$$\text{被壓的流體之密度} = E,$$

$$\text{離心力與 } \frac{1}{D^n} \text{ 相比,}$$

則壓力與

$$\sqrt[n+2]{E^{n+2}}$$

相比；反之亦然。不過此處所云離心力，係限於相互間很接近的部分，或不能推至於甚遠者。

在磁體方面，我們可得到一個例。磁體之吸引力限於極近的物體，倘有一鐵片置在其間，則磁力

差不多爲其所凝聚，而完全限於此，較遠的物體差不多是爲鐵片所吸引的。

此處所云流體，其構造性質頗與之相似，其作用僅及於距離甚近的同種類的部分，對於遠的物體祇有藉媒介之力纔能生影響。倘任何一部分之力能及於無限，則須有一較大的力以緊縮較多的流體量乃可。

至於彈性的流體是否由互相求離的部分所成，此則爲物理學上的問題。在這裏，我們已用數學的方法將流體之屬性研究過了。至於該項問題，可讓之自然的研究者。

## 第六章

### 論擺錘之運動及抵抗

§ 34. 定理。 設有若干擺錘，其振動點與繫點之相距均等，則其物質之量相比，如真空內之重量及振動時間之平方之合相比。

一已知的力於已知的物質及時間內所能產生的速度，與力及時間成正比，與物質成反比。故如力或時間愈大，物質愈小，則所產生之速度亦愈大。此可由運動第二定律知之。今如各擺錘之長相等，則與繫點相距等遠之處，其運動力相比如重量相比。故如二振動的物體作成相等的弧，並將此項弧均分成爲段，則物體作成各段所須的時間，其比如整個的振動時間相比。各段內振動之速度，其比如運動的力之正，如整個的振動時間之正，如物質的量之反。所以此項物質之量與力及振動時間

成正比，與速度成反比，或因速度與時間成反比，故物質之量與運動的力成正比，與時間之平方亦成正比，即是，與重量及振動時間之平方成正比。此即所欲證者。

系 1. 故如時間均相等，則二物體內物質之量相比，如重量相比。

系 2. 倘重量相等，則物質之量與時間之平方相比。

系 3. 倘二物體內之物質均相等，則重量與時間之平方成反比。

系 4. 因為在尋常的狀況下，時間之平方與擺錘之長為比較的，故在相等的時間內及相等的物質下，重量與擺錘之長相比。

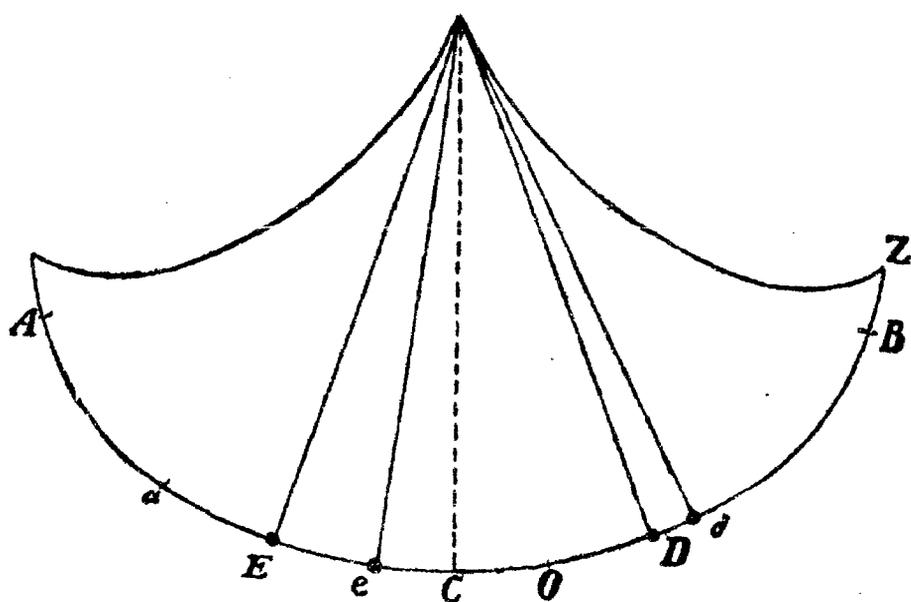
系 5. 廣之，擺錘物質之量，與其重量及時間之平方成正比，與擺錘之長成反比。

系 6. 在無抵抗的中介物內，擺錘物質之量與其相對的重量及時間之平方成正比，與擺錘之長成反比。蓋在任何重的中介物內，相對的重量即是

運動的力，此則我前已說明過。所以在無抵抗的中介物內，其作用與真空內之絕對重量相同。

系 7. 由此，我們可得到一種方法，用以比較若干物體之物質量，以及測定同一物體在不同的處所之重量之差，因而可求得重力之變動。用最精密的試驗，我所得的結果，恆為物質之量與其重量相比。

§ 35. 定理. 倘擺錘在一中介物內所受之抵抗力與時間之差率相比，則在比重相同的無抵抗的



第一六八圖

中介物內運動時，於等時間內在擺線上完成其振動，並作成弧之相比的部分。

今設  $AB$  為擺線上之弧，為物體於一任何時間內在無抵抗的中介物內振動時所作成者。試將此弧於  $C$  平分之，俾  $C$  為最低的點。如是則於任何點  $D, d$ , 或  $E$  推動物體的加速力相比，如  $CD$ ,  $Cd$  或  $CE$  相比。今即用該項弧以表該項力，而因抵抗力與時間之差率相比，為一常數，故可用擺線上已知的部分  $CO$  以表之，並用

$$Od : CD = OB : CB$$

以決定  $Od$  弧。在有抵抗的中介物內於  $d$  點推動物體的力，可用  $CD$  力超過  $CO$  抵抗力之餘以表之，即，用  $Od$  以表之。此力與無抵抗的中介物內在  $D$  點推動物體的力相比，如

$$Od : CD$$

與  $B$  點的力相比，如

$$OB : BB.$$

今如有二物體  $D$  與  $d$  由  $B$  出發，為此項力

所推動，則在開始時此項力相比，如

$$CB : OB,$$

其開始時的速度以及開始時所作的弧，其比均同此。今設  $BD$  與  $Bd$  爲此項弧，其餘的弧  $CD$  與  $Od$  亦同此比；又，與  $CD$  及  $Od$  相比的力亦仍保持其開始時比，因此，物體仍繼續進行作成與開始時同比的弧。所以該項力，速度及  $CD, Od$  弧之比，恆等於全弧  $CB, OB$  之比，而物體  $D$  與  $d$  同時達到  $C$  及  $O$  點，不過前者在無抵抗的，後者在有抵抗的中介物內而已。但  $C, O$  處之速度是與  $CB, OB$  弧相比的，故物體以後同時所作的弧亦仍同此比。今設此項弧爲  $CE$  與  $Oe$ 。使物體  $D$  在無抵抗的中介物內於  $E$  點發生遲緩的力，與  $CE$  是相比的，而使物體  $d$  在有抵抗的中介物內於  $e$  點發生遲緩的力，則與  $Oe$  相比。所以此項力相比，如

$$CE : Oe,$$

卽是，如

$$CB : OB.$$

因此，速度及以此所作的弧，其相互間之比恆

爲  $CB : OB,$

故如  $AB$  與  $aB$  之比亦同此，則  $D$  與  $d$  二物體在同時間內作成之，並於  $A$  及  $a$  同時失去其運動。從可知整個的振動爲等時的，而其任何部分  $BD$  及  $Bd$ ，或  $BE$  及  $Be$ ，倘在同時間內作成，則與整個的弧  $BA$  及  $Ba$  相比。此即所欲證者。

系。所以在有抵抗的中介物內，最大的速度不在最低點  $C$ ，而在  $O$  點，此  $O$  點即平分  $aB$  弧者。物體再向  $a$  時，即減少速度，其減小之程度與以前由  $B$  向  $O$  時之加速相等。

§ 36. 定理。擺線上之往返振動，有等時性；於此，抵抗力與速度相比。

設有二物體，其距繫點等遠，振動時作成之弧不相等，但相當的部分內之速度與整個的弧爲比較的，則與速度相比的抵抗力，亦與該項弧相比。今將此項抵抗力由運動的力減去或與之相加，則所得之差或和，其相比亦如該項弧相比。因所增加或減小者與此項差或和相比，故速度恆與整個的

弧相比。

速度在某種狀況下與整個的弧相比後，即恆相比，但在開始運動時，當物體開始下降將作該項弧時，與弧相比的力所產生的速度，亦同此比。所以此項速度恆與將作成的全部弧相比，故後者恆在同一時間內作成。此即所欲證者。

§ 37. 定理。 倘擺錘所受之抵抗力與速度之平方相比，則有抵抗的中介物內之振動時間與無抵抗但比重相同的中介物內之時間之差，很近似的與將作成的振動之弧相比。

今設相等的擺錘在有抵抗的中介物內作成不相等的弧  $A$  與  $B$ ，如是則  $A$  內物體之抵抗力與  $B$  內之相當者相比，很接近的如

$$A^2 : B^2$$

蓋如  $B$  內之抵抗力與  $A$  內者相比，如

$$AB : A^2$$

則按前節， $A$  與  $B$  內之時間將相等。如是， $A$  內之抵抗力  $A^2$  或  $B$  內的抵抗力  $AB$  能使  $A$  內發

生時間之超過，即，有抵抗的中介物內之時間超過無抵抗的中介物內者，而在  $B$  內則抵抗力  $B^2$  亦發生同樣的作用。但此項超過，與發生作用的力  $AB$  及  $B^2$  很近似的相比，即，時間之差，其相比很近似的如  $A : B$ 。

此即所欲證者。

系 1. 所以，由有抵抗的中介物內不等的弧上之振動時間，可求得無抵抗但比重相同的中介物內之振動時間。此二時間之差，與有抵抗的中介物內較小的弧之時間超過無抵抗的中介物內者之餘相比，如二弧之差與較小的弧相比。

系 2. 較小的振動之等時性較為正確，極小的振動所須時間，則與無抵抗的中介物內所須者甚相近。在較大的弧上振動時，所須之時間亦較多，因為延長時間的抵抗力亦較為大，而在物體下降時抵抗力較之上昇時為大，故所延長的較之其所縮短的為多。但振動的時間，看來亦能為中介物之運動所延長。被阻滯的物體，其所受抵抗力較小，

加速的物體則受較大的抵抗力，其度視速度而定。此其原因則因中介物能自物體獲得運動，其方向亦與物體之方向同，其運動之大小亦隨物體之運動而定，故與之一致。所以擺錘之抵抗在下降時較大，在上昇時較小，其度隨速度而定。此二原因均能使時間延長。

§ 38. 定理。 一擺錘在一擺線內振動，其所受抵抗力與時間之差率為比較的，則此抵抗力與重力相比，如下降時所作之弧超過其以後上昇時所作者之餘，與擺錘之長之二倍相比。

用 § 35 內之作法及證法，我們可用  $BC$  表下降時所作之弧， $Ca$  表上昇時所作者， $Aa$  則為二者之差。如是則物體於任何處所  $D$  被其所推動的力與抵抗力相比，如

$$CD : CO;$$

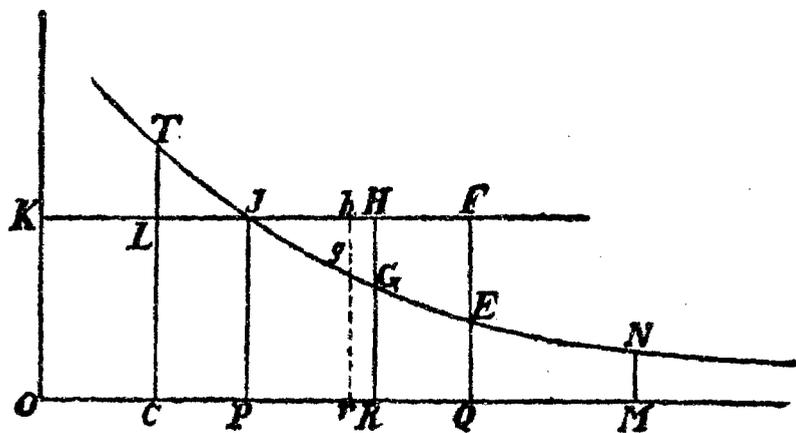
於此  $CO = \frac{1}{2}Aa$ 。所以在擺線之開始處推動物體的力，即重力，與抵抗力相比，如最高點與最低點間之擺線弧與  $CO$  弧相比，或，如全擺線與  $Aa$  相

比，亦即是，如擺錘之長之二倍與  $Aa$  相比。此即所欲證者。

§ 39. 問題。 今設物體在擺線上運動，其所受之抵抗力與速度之平方相比；今欲求各處之抵抗力。

今設  $Ba$  為一整個的振動內所作之弧 (Fig. 169),  $C$  為擺線之最低點  $CZ$  為擺線上全弧之一半，與擺錘之長相等。今欲求物體在  $D$  點所受之抵抗力。

今將不定的直線  $OQ$  於  $O, C, P, Q$  點分割之，並作  $OK, CT, PJ, QE$  諸垂線，以  $O$  為中心



第一六九圖

點， $OK$  及  $OQ$  爲漸近線，作雙曲線  $TJGE$ ，與  $CT, PJ, QE$  相交於  $T, J, E$  點，於是再作  $KF$  線經過  $J$  點與  $OQ$  相平行，與  $OK$  漸近線相交於  $K$ ，與  $CT$  及  $QE$  相交於  $L, F$ 。如是則

$$JEF \text{ 面積} : PJTC = BC \text{ 弧} : C\alpha;$$

於此， $BC$  爲下降時所作之弧， $C\alpha$  爲上昇時所作者。又設

$$JEF \text{ 面積} : JLT = OQ : OC, \quad (1)$$

并如是作  $MN$  垂線，使

$$PJNM \text{ 面積} : PJEQ = CZ \text{ 弧} : BC \quad (2).$$

又作  $RG$  垂線，使

$$PJGR \text{ 面積} : PJEQ = CD \text{ 弧} : BC \quad (3),$$

則  $D$  點之抵抗力與重力相比，如

$$\frac{OR}{QO} \cdot JEF \text{ 面積} - JGH : PJNM \quad (4).$$

由重力所發生的力於  $Z, B, D, \alpha$  諸點推動物體，此力與

$$ZC, BC, DC, \alpha C$$

諸弧爲比較的，而此項弧則又與雙曲線的面積

$$PJNM, PJEQ, PJGR, PJTC$$

相比。故該項力及弧均可用此項面積以表之。

又設  $Dd$  爲物體下降時所作極小的弧，我們亦用極小的面積  $RGgr$  以表之，此面積係在拋物線  $GR$  及  $gr$  之中間。最後，將  $rg$  引長至  $h$ ，使  $GHhg$  及  $RGgr$  爲  $JGH$  及  $PJGR$  之同時的減小。面積

$$\begin{aligned} & \frac{OR}{OQ} \cdot JEF - JGH \text{ 之增加爲} \\ & \frac{OR - rR}{OQ} \cdot JEF - [JGH - GHhg] \\ & \quad - \left[ \frac{OR}{OQ} JEF - JGH \right] \\ & = GHhg - \frac{rR}{OQ} \cdot JEF \\ & = Rr \cdot GH - \frac{rR}{OQ} \cdot JEF \quad (5) \end{aligned}$$

在同時間內， $PJGR$  面積之增加爲

$$Rr \cdot RG \quad (6),$$

所以前者與後者相比，如

$$GH - \frac{JEF}{OQ} : RG = OR \cdot GH$$

$$- \frac{OR}{OQ} \cdot JEF : OR \cdot RG$$

$$= OR \cdot GH - \frac{OR}{OQ} \cdot JEF : OP \cdot PJ,$$

而因  $OR \cdot HG = OR (HR - GR)$

$$= OR \cdot HR - OR \cdot GR,$$

$$OR \cdot HG = ORHK - OPJK = PJHR.$$

$$PJHR = PJGR + JGH,$$

亦即如

$$PJGR + JGH - \frac{OR}{OQ} \cdot JEF : OPJK. \quad (7)$$

故如設

$$\frac{OR}{OQ} \cdot JEF - JGH = Y,$$

而  $RGgr$  爲已知，則  $Y$  之增加與

$$PJGR - Y \quad (8)$$

爲比較的。

今設  $V$  爲於  $D$  點推動物體的力，係由重力

所發生且與  $CD$  弧相比，并設抵抗力  $= R$ ，則

$$V - R$$

爲在  $D$  點推動物體的全部力。所以速度之增加與  $V - R$  相比，并與產生此增加的時間亦相比。但速度本身則與在同一時間內所增加之道路成正比，與該項時間成反比。按所設，抵抗力  $R$  是與速度之平方爲比較的，故抵抗力之增加與速度及其增加相比，即是，與一定時間部分內所作的道路之差率及  $V - R$  相比。倘此項差率爲常數，則抵抗力之增加即與  $V - R$  相比，而如用  $PJGR$  面以代  $V$ ，用  $Z$  面以代  $R$ ，則該項增加即與

$$PJGR - Z \quad (9)$$

相比。經減去常數之差率後， $PJGR$  面積倘整齊的減小，則  $Y$  面以

$$PJGR - Y$$

爲比而增加， $Z$  則以

$$PJGR - Z$$

增加。故如  $Y$  與  $Z$  同時發生，而且在開始時爲相

等者，則經加上相等的差率後仍繼續相等，而減去相等的差率後，亦能同時趨於消滅。反之，倘同時發生并能同時消滅，則其差率亦相同而恆相等。

當抵抗力  $Z$  增加時，速度與弧  $Ca$  同時減小；於此， $Ca$  弧即物體於上昇時所作成者。倘物體之運動及抵抗力於此同時消滅的點向  $C$  接近，則抵抗力之消失較之  $Y$  為速。如抵抗力不如是之大，即得反的結果。

當抵抗力成爲零時，即，在運動之開始或終了， $CD$  與  $CB$  及  $Ca$  相等， $RG$  直線與  $QE$  及  $CT$  相垂直時， $Z$  正發生或消滅。

但  $Y$  面積，則

$$= \frac{OR}{OQ} \cdot JEF - JGH$$

故在 
$$\frac{OR}{OQ} \cdot JEF = JGH$$

時，即爲  $Y$  之發生或消滅時，於此， $RG$  亦與  $QE$  或  $CT$  相垂直。此二面之發生及消滅既爲同時的，故恆相等，所以

$$\frac{OR}{OQ} \cdot JEF - JGH = Z,$$

而因  $Z$  所表者為抵抗力,  $PJNM$  所表者為重力,

故 
$$\frac{OR}{OQ} \cdot JEF - JGH : PJNM$$

如抵抗力與重力相比. 此即所欲證者.

系 1. 所以在最低點  $C$ , 抵抗力與重力相比, 如

$$\frac{OR}{OQ} \cdot JEF : PJNM$$

相比.

系 2. 當

$$PJHR : JEF = OR : OQ$$

時, 抵抗力為最大.

蓋在此時, 其差率 = 0.

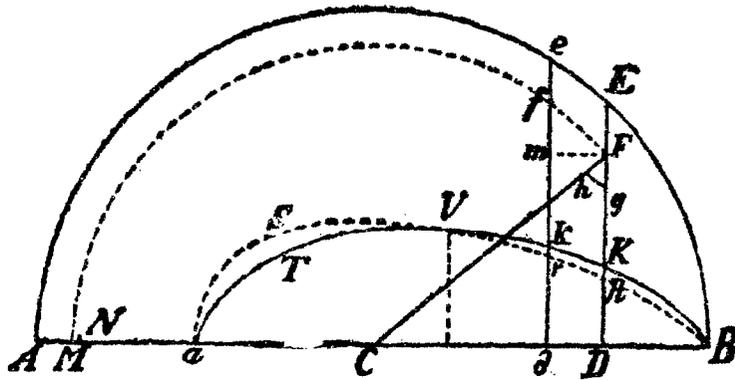
系 3. 由此, 亦不難求得各處之速度, 其法在設此速度與抵抗力之平方根相比, 而在開始運動時與一其他速度相等, 此速度為一物體於無抵抗的中介物內在擺線上振動時所有者.

因為運算殊難, 不易得抵抗力與速度之值, 故

可再立一定理如下。

§ 40. 定理. 今設  $aB$  線等於振動的物體所作之擺線弧, 試於其各點  $D$  作垂線  $DK$ ; 此垂線與擺錘之長相比, 等於物體在該項相當點所受之抵抗力與重力相比. 如是則上昇及下降時所作道路之差與其和之半相乘, 很接近的與  $BK$  面相等, 此面包有一切垂線  $DK$ .

在全振動內所作之擺線弧, 可用與之相等的線  $aB$  表之, 在真空中所能作的弧則用  $AB$  線表之. 今將  $AB$  於  $C$  平分之, 則  $C$  爲擺線之最低點, 而  $CD$  與重力所產生的力相比, 此力能使物體在  $D$  點沿擺線之切線前進. 此線與擺錘之長相



第一七〇圖

比，等於  $D$  點之力與重力相比。因之，我們可用  $CD$  線以表此力，用擺錘之長表重力。今於  $DE$  上取一長，使其與擺錘之長相比如抵抗力與重力相比，則  $DK$  即可表前者。於是以  $C$  為中心， $CA=CB$  為半徑作半圓  $BEeA$ 。

物體在極短時間內能作成道路  $Dd$ ；今作  $DE$  與  $de$ ，與圓周相交於  $E, e$ ；如是則此二線與二速度相比，此二速度為物體於真空中由  $B$  下降時在  $D$  及  $d$  點所能有者。此可由第一編 § 93 以知之。因之，我們即用該項垂線以表速度。並設  $DF$  為一速度，為物體於有抵抗的中介物內由  $B$  下降時在  $D$  點所可達到者。今再以  $C$  為中心點， $CF$  為半徑作圓  $FfM$  與直線  $de$  及  $AB$  相交於  $f$  及  $M$ 。如是則  $M$  為一處所，倘物體以後不受其他抵抗時，即可上昇至此， $df$  為其於  $d$  點所可達到的速度。故如物體經過極短的道路  $Dd$  時因抵抗力而失去的速度為  $Fg$ ，並取

$$CN = Cg,$$

則  $N$  即為物體以後不受其他抵抗時所可達到的處所，而  $MN$  為上昇高度之減少，即因上項速度之失去而發生者。

今作  $Fm$  線垂於  $df$  上，則速度  $DF$  之減小（由抵抗力  $DK$  所產生者）與其增加  $fm$ （由  $CD$  力所發生的）相比，如產生此的力相比。因此，得

$$Fg : fm = DK : CD \quad (1).$$

又因  $\triangle Fmf \sim \triangle Fhg \sim \triangle FDC$ ,

故  $fm : Fm = CD : DF \quad (2)$

而經組合後，因  $Fm = Dd$ ，有

$$Fg : Dd = DK : DF \quad (3).$$

又，  $Fg : Fh = CF : DF \quad (4).$

而  $Fh = MN$ ,  $CM = CF$ , 故

一切  $MN \cdot CM$  之和 = 一切  $Dd \cdot DK$  之和 (5).

$M$  為一運動的點；今試設想作一垂線  $MC$  於此點上，此線作連續的運動經過  $Aa$  長。如是，此運動所產生的面積，或與之相等的直角形  $Aa \cdot \frac{1}{2}aB$ ，與一切  $MN \cdot CM$  之和相等，因而亦等於一切

$Dd \cdot DK$  之和，即是，等於  $BKVTa$  面。此即所欲證者。

系。由此，我們可由抵抗力之定律及  $Aa = CB - Ca$ ，以求得抵抗力與重力之比之近似值。

設抵抗力  $DK$  爲整齊的，則  $BKTa$  圖形爲一直角形，即

$$\frac{1}{2}Ba \cdot Aa = Ba \cdot DK$$

或 
$$\frac{1}{2}Aa = DK.$$

因  $DK$  所表者爲抵抗力，擺錘之長所表者爲重力，故抵抗力與重力相比，如  $\frac{1}{2}Aa$  與擺錘之長相比；此與 § 38 內所證明者無異。

設抵抗力與速度相比，則  $BKTa$  形與橢圓甚相接近。蓋如物體在無抵抗的中介物內於一整個的振動下作成  $BA$  長，則任何點  $D$  之速度與  $DE$  相比。因物體於有抵抗的中介物內作成  $Ba$  與在無抵抗的中介物內作成  $BA$  差不多同時，即， $Ba$  上各點之速度與  $BA$  上相當的各點之速度相比，很近似的如

$$Ba : BA,$$

故  $D$  點之速度及有抵抗的中介物內之速度與屬於圓或橢圓之縱線 ( $BA$  爲圓之徑) 相比。所以  $BKVTa$  圖形與半橢圓很相接近。又既假定抵抗力與速度相比, 故  $OV$  所表者爲  $O$  點之抵抗力, 而  $BRVSa$  半橢圓 ( $O$  爲中心,  $OB$  及  $OV$  爲半軸) 與  $aBKVT$  (及與之相等的直角形  $Aa \cdot BO$ ) 很近似的相等。所以  $Aa \cdot BO$  與  $OV \cdot BO$  相比, 如此半橢圓之面與  $OV \cdot BO$  相比, 卽

$$Aa : OV = 11 : 7.$$

所以  $\frac{7}{11}Aa$  與擺錘之長相比, 如振動的物體在  $O$  點之抵抗力與重力相比。

倘抵抗力  $DK$  與速度之平方相比, 則  $BKVTa$  圖形很近似的爲一拋物線, 其頂點在  $V$ , 其軸爲  $OV$ . 因之。

$$BKVTa = \frac{2}{3}Ba \cdot OV,$$

而  $\frac{1}{2}Ba \cdot Aa = \frac{2}{3}Ba \cdot OV,$

或  $OV = \frac{3}{4}Aa,$

即，振動的物體在  $O$  點之抵抗力與重力相比，如  $\frac{1}{4}Aa$  與擺錘之長相比。

此種推論我認爲實用上已很精確。因橢圓或拋物線在  $V$  點與  $BKVTa$  圖形相合，而如於  $BRV$  或  $VSa$  二面中之一面超過後者，則在另一面被後者所超過，故仍很近似的相等。

§ 41. 定理。 設振動的物體之抵抗力在其所作的弧之各部分以某種已知的比放大或減小，則下降時與以後上昇時所作的弧之差，亦很近似的以此種比增大或減小。

蓋該項差係由抵抗力所產生，故與抵抗力相比。在前節內，已知直角形  $\frac{1}{2}aB \cdot Aa$  等於  $BKTa$  面。倘  $aB$  不變，則後者與  $DK$  同時增加或減小，即是，以抵抗力爲比增加或減小。因之，此面與  $aB$  長及抵抗力二者之合相比。所以，直角形

$$Aa \cdot \frac{1}{2}aB$$

與  $aB$  及抵抗力二者之合相比，而  $Aa$  與抵抗力相比。此即所欲證者。

系 1. 故如抵抗力與速度相比，則同中介物內弧之差與全部所作的弧相比；反之亦然。

系 2. 設抵抗力與速度之平方相比，則該項差與所作的全部弧之平方相比；反之亦然。

系 3. 廣之，倘抵抗力與速度之三次或任何次方相比，則所作的弧之差與全部弧之同次方相比；反之亦然。

系 4. 設抵抗力一部分與速度相比，一部分與其平方相比，則該項差一部分與全弧相比，一部分與其平方相比；反之亦然。凡抵抗力與速度間所適用之定律及比例，該項差及全弧間亦均適用之。

系 5. 所以擺錘如陸續作成不相等的弧，此項差之增加及減小與弧長之比如為已知，則抵抗力之增加及減小與速度之增加或減小之比即亦可求得。

§ 42. 一般的說明。 按此處所證明諸定理，我們可由擺錘振動以求得中介物之抵抗力。至於空氣之抵抗力，我曾經用以下的試驗測定之。

我用一木質的球，重  $57\frac{7}{8}$  盎司，對徑  $6\frac{7}{8}$  英寸，懸於一極牢固的釘上，繫點與球之振動點間相距為 10.5 英尺。在距離繫點 10 英尺 1 英寸處，我於線上作一點，並於其方向內按一刻有寸數的尺，用以測量擺錘所作弧之長。於是我計算振動之次數，在此項振動內，球失去其運動之  $\frac{1}{8}$ 。

開始時我將擺錘自其垂直方向內移出二英寸，於是釋放之，則第一振動內所作之弧，約為四英寸。經過 164 次振動後，擺錘之運動失去  $\frac{1}{8}$ ，在其最後上昇時，所作之弧為  $1\frac{3}{4}$  英寸。

倘將振幅加倍，則經過 121 次振動後，即失去其運動  $\frac{1}{8}$ ，其最後上昇時所作之弧為  $3\frac{1}{2}$  英寸。繼續將振幅加倍，使其第一次振動下降時所作之弧為

8, 16, 32, 64 英寸，

則在 69,  $35\frac{1}{2}$ ,  $18\frac{1}{2}$ ,  $9\frac{2}{3}$

次振動以後即失去其運動之  $\frac{1}{8}$ 。所以第一次振動下降時所作之弧與末次振動上昇時之弧相較，其

差為  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$ , 1, 2, 4, 8 英寸。

今用與之相當的振動次數除此項差，則得每振動所發生之差爲

$$\frac{1}{656'} \frac{1}{242'} \frac{1}{69'} \frac{4}{71'} \frac{8}{37'} \frac{24}{29'} \text{ 英寸.}$$

在較大的振動方面，此項數字之比爲所作的弧之平方相比，甚爲接近，但在較小的振動方面，則其比較大，所以球之抵抗力當運動較速時，亦接近的與速度之平方相比；但如運動較遲，則其比亦較大。此事與 § 41 之系內所證明者相同。

今設  $V$  爲每一振動內之最大速度， $A, B, C$  爲常數，並設弧之差爲

$$A \cdot V + B \cdot V^{\frac{3}{2}} + CV^2. \quad (1)$$

因爲擺線內之最大速度，其比如振動時所作弧之半相比，但圓內之最大速度則其比如該項半弧之弦相比，故在相等的弧下，擺線方面者較之圓方面者爲大，猶弧之大於其弦一樣，又因時間之圓方面較之在擺線方面爲大，其比與速度相反，故與抵抗力及時間之平方相比的弧之差，在二曲線內很近似的相等。在擺線方面該項差必須與抵抗力

同時放大，差不多以弧與弦相比之平方為度，因為速度以該項比增加，以其平方與時間之平方同時減小。所以如欲轉至擺線方面，則必取圓方面所有的弧之差，但最大的速度則須將其與全部弧或半弧相當，或與

$$\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16$$

相當。

今使  $V$  迭取 1, 4, 16 諸數，則即得以下之方程：

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{242} &= A + B + C, \\ \frac{4}{71} &= 4A + 8B + 16C, \\ \frac{24}{29} &= 16A + 64B + 256C \end{aligned} \right\} (2)$$

由此，可得

$$A = 0,0000916,$$

$$B = 0,0000847,$$

$$C = 0,0029558,$$

而弧之差與

$$0,0000916V + 0,0000847V^{\frac{3}{2}} + 0,0029558V^2 \quad (3)$$

相比。按 § 40 之系，球體在所作的弧之中間，其抵抗力（於此，其速度 =  $V$ ）與其重量相比，如

$$\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}B \cdot V^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}C \cdot V^2 \quad (4)$$

與擺錘之長相比，故將上項  $A$ ,  $B$ ,  $C$  之值代入後，即知球之抵抗力與其重量相比，如

$$0,0000583V + 0,0007953V^{\frac{3}{2}} + 0,0022169V^2 \quad (5)$$

比 121 英寸（繫點與所作點間之距離，亦即擺錘之長）。

在第二，第四及第六次試驗方面，

$$V = 1, 4, 16,$$

故球之抵抗力與其重量相比，於此為

$$0,0030345 : 121,$$

$$0,0417780 : 121,$$

$$0,6170544 : 121.$$

線上所作之點在第六次試驗時所經過的弧，為

$$120 - \frac{24}{29} = 119\frac{5}{29} \text{ 英寸.}$$

因所屬的半徑 = 121 英寸，繫點及球心間之距離爲 126 英寸，故球心所作之弧爲  $124\frac{3}{31}$  英寸。又因空氣之抵抗力，使振動的球之最大速度不落在最低點而在所作全弧之中點，故速度之狀況猶如下降時能經過該弧之一半一樣。所以此項速度與一其他速度相等，此其他速度爲一垂直下來的球經過一高所能達到者，此高與該弧之正矢相等。但此項正矢與弧之一半，即  $62\frac{3}{62}$  英寸，相比，如此弧與擺錘之長之二倍相比；因之，該正矢 = 15,278 英寸。如是，該速度即等於一其他速度，爲物體下墜經過 15,278 英寸時所能達到者；而在此項速度下，球所受之抵抗力與其重量相比，如

$$0,6170544 : 121 \quad (6),$$

或如

$$0,0022169V^2 : 121$$

$$= 0,0022169 \cdot 16^2 : 121$$

$$= 0,56752 : 121 \quad (7).$$

用流體靜力學的方法，我曾測得此木球之重量與同量的水之重量相比，如

$$55 : 97 \quad (8),$$

而  $\frac{97}{55} \cdot 121$  則為 213,4，故如該項水量以上述之速

度運動時，其所受抵抗力與其重量相比，如

$$\begin{aligned} 0,56752 : 213,4 \\ = 1 : 376,02 \quad (9). \end{aligned}$$

因水之重量在一時間內（於此時間內作等速運動時能經過 30,556 長的道路）能產生該項全部速度，故繼續生作用的抵抗力能抵消全速度之

$\frac{1}{376,02}$ 。所以球在一時間內（在此時間內以等速作運動時能經過  $3\frac{7}{16}$  英寸，即其半徑之長），失去其運動之  $\frac{1}{3342}$ 。

此外，我又曾計算過振動次數，經過此項次數以後，擺錘失去其運動之  $\frac{1}{4}$ 。在以下的表內，上列數目字表第一次振動內下降時所作之弧（以英寸為單位），中間一列表最末次振動內上昇時所作之

弧，在下的一列數目字則表振動之次數。在此項試驗內，我相信所得者較之以前為可靠。至於詳細的運算，喜歡者可自己試一道。

最初的下	2,	4,	8,	16,	32,	64
最後的上	$\frac{1}{8}$ ,	3,	6,	12,	24,	48,
振動次數	374,	272,	$162\frac{1}{2}$ ,	$83\frac{1}{3}$ ,	$41\frac{2}{3}$ ,	$22\frac{2}{3}$ .

後來我又用一鉛球作試驗，此球之對徑為二英寸；重量  $26\frac{1}{2}$  盎司；線之長仍舊，因而球心與繫點間之距離為  $10\frac{1}{2}$  英尺。以下二表內，第一表所明者為失去運動之  $\frac{1}{8}$ ，第二表則失去  $\frac{1}{4}$ 。

最初的下	1	2	4	8	16
最後的上	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{2}$	7	14
振動次數	226,	228,	193,	140,	$90\frac{1}{2}$ .

最初的下	1	2	4	8	16	32
最後的上	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	3	6	12	24
振動次數	510,	518,	420,	318,	204,	121

今於第一表中取其第三第五，其最大的速度用 1, 4, 16, 等表之，廣之，用  $V$  以表此，則得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\frac{1}{2}}{193} &= A + B + C \\ \frac{2}{90,5} &= 4A + 8B + 16C \\ \frac{8}{30} &= 16A + 64B + 256C \end{aligned} \right\} (10).$$

由此,可得

$$A = 0,001414,$$

$$B = 0,000297,$$

$$C = 0,000879.$$

所以,以速度  $V$  運動的球之抵抗力與其重量相比,如

$$0,0009 V + 0,000208 V^{\frac{3}{2}} + 0,000659 V^2 \quad (11)$$

與擺錘之長相比。

今如研究與速度之平方相比的一部分抵抗力,則此比成爲

$$0,000659 V^2 : 121.$$

此部分抵抗力在以前木球的試驗方面,與其重量  $57\frac{1}{2}$  盎司相比,如

$$0,002217V^2 : 121. \quad (12)$$

所以速度如相同則木球之抵抗力與鉛球之抵抗力相比,如

$$0,002217 \cdot 57\frac{7}{8} : 0,000659 \cdot 26\frac{1}{4},$$

即,如  $7\frac{1}{2} : 1 \quad (13)$

二球之對徑為  $6\frac{7}{8}$  及 2 英寸,其平方相比如

$$47\frac{1}{4} : 4 \text{ 或 } 11\frac{13}{16} : 1, \quad (14)$$

所以,以同速度運動的物體,其抵抗力相比較之對徑之平方相比為小。

以上我們未曾論及線之抵抗力;實在此抵抗力頗大,必須由以前之抵抗力上減去。線的抵抗力之詳細測定,我未能做到,但知其大於小球所受抵抗力之  $\frac{1}{3}$ 。將此減去後,則二球之抵抗力相比,與徑之平方相比甚相接近,蓋

$$7\frac{1}{2} - \frac{1}{3} : 1 - \frac{1}{3} = 7 : \frac{2}{3} = 10,5 : 1, \quad (15)$$

而此比則與(14)中所得者更相接近。

因為線之抵抗力在較大的球方面影響較小,故我曾用一對徑  $18\frac{3}{4}$  英寸的球作試驗,其繫點與

振動點之距離爲  $122\frac{1}{2}$  英寸，繫點與線上所作點間之距離爲  $109\frac{1}{2}$  英寸。第一次振動內下降時線上點所作之弧爲 32 英寸，徑 5 次振動後最末次之上升所作弧與之相差 2 英寸。故每次振動所發生之平均差爲  $\frac{2}{5}$ 。如是，繫點與線上點間之距離，與繫點與振動點間之距離相比，即，二半徑相比，爲

$$109\frac{1}{2} : 122\frac{1}{2} \quad (16),$$

等於線上點每次振動所作之平均弧 60 英寸與球心每次振動所作之平均弧  $67\frac{1}{8}$  英寸相比。前者之差  $\frac{2}{5}$  與後者之差 0,4475 相比亦如此。倘弧之長不變，擺錘之長以

$$126 : 122,5 \quad (17)$$

放大，則振動時間即以其平方根放大而速度亦以該比減小，上項差 0,4475 仍不變。倘再將所作之弧以

$$124\frac{3}{8} : 67\frac{1}{8} \quad (18)$$

放大，則 0,4475 即以其平方增加，因而成爲 1,5295。此種結果係由一假定推得，即，抵抗力與速度之平方相比。故如擺錘所作之全弧爲  $124\frac{3}{8}$  英寸，繫

點與振動點間之距離爲 126 英寸，則每次振動所發生之平均差爲 1,5295 英寸。今將此差與球之重量 208 盎司相乘，即得 318,136。在以前木球方面，繫點與振動點間之距離爲 126 英寸，所作全弧爲  $124\frac{3}{31}$  英寸，故其差爲  $\frac{126}{121} \cdot \frac{8}{9\frac{3}{4}}$ ，而如將此與球之重量  $57\frac{7}{2}$  盎司相乘，即得 49,396。我所以將此項差與球之重量相乘，是欲求其抵抗力，蓋此項差之發生是由於抵抗力且與抵抗力成正比，與重量成反比。所以，二球抵抗力相比，如

$$318,136 : 49,396 \quad (19).$$

小球抵抗力之一部分，與速度之平方相比者，與全部抵抗力相比，如

$$0,56752 : 0,61705$$

$$=x : 49,396,$$

所以  $x=45,430 \quad (20).$

大球抵抗力之該部分差不多與全部抵抗力相等，故其部分相比，如

$$318,136 : 45,430,$$

或近似的如

$$7 : 1 \quad (21).$$

球之對徑相比爲

$$18\frac{3}{4} : 6\frac{7}{8},$$

其平方相比爲

$$7,438 : 1, \quad (22)$$

故與二球之抵抗力相比甚相接近。

此二比之差不能大於由線之抵抗力所發生之差。所以，抵抗力內與速度之平方相比的部分，其相比在速度相等之狀況下，如球徑之平方相比。

不過在此項試驗中，所用的球中之最大者，不是完全球形的；但這裏我爲簡單計，將此項小的差失略去不計了。在不甚精確的試驗方面，此項小的差失略去不計，亦無甚關係，所以即放過了。我希望大家再用較多較大的球，作更精確的試驗。

今如使球之徑成爲幾何級數，即，4, 8, 16, 32 英寸，則可由所得的結果之級數中作推論；在較大的球方面，當較爲精確。

我又作了以下的諸試驗，以比較各種流體之抵抗力。我製了一個木箱。長四英尺，寬及高各一英尺。箱內盛以水，使其滿，並浸一擺錘於其內，使其在中間作振動的運動。所用擺錘之球，係鉛製，重  $166\frac{1}{6}$  盎司，對徑  $3\frac{3}{8}$  英寸，繫點與線上所劃點之間，相距 126 英寸，繫點與振動點間之距離為  $134\frac{3}{8}$  英寸。如是，其運動狀況可列為以下之表。

第一次振動內下	}	降時線上所作點	64, 32, 16, 8, 4, 2,
		所經過之弧	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ 英寸
最末次振動內上	}	昇時線上所作點	48, 24, 12, 6, 3, $\frac{3}{2}$ ,
		所經過之弧	$\frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}$ 英寸
與所失去的運動	}	相比的弧之差	16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$ ,
			$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ 英寸
振動次數	}	水內	$\frac{29}{60}, 1\frac{1}{3}, 3, 7, 11\frac{1}{4},$
			$12\frac{2}{3}, 13\frac{1}{3},$
振動次數空氣內	}		$85\frac{1}{2}, 287, 535.$

由此，可知空氣內經過 535 次振動後所失去之運動，與水內經過  $1\frac{1}{2}$  次後所失去者相等。前者之振動較速，後者較遲，但將其加速後，使二者內之振動等速進行，水內失去該項運動之振動次數亦仍不變，因為抵抗力以速度增加之平方而增加，時間則與該項增加同時減小。

所以，速度如相等，則在空氣內經過 535 次振動後所失去之運動，在水內經過  $1\frac{1}{2}$  次後即失去，故水內擺錘之抵抗與空氣內者相比，如

$$535 : 1\frac{1}{2} \quad (22).$$

按 (1)，一球在空氣內以最大速度運動時，下降及上昇所作之弧差為

$$AV + CV^2 \quad (23)$$

因第四行內之最大速度與第一行內者相比，如 1 : 8，其弧差相比，如

$$\frac{2}{535} : \frac{16}{85,5} = 85,5 : 4280,$$

故可設速度為 1 與 8,85,5 及 4280 為弧之差，則按

$$(23) \text{ 即有 } \left. \begin{array}{l} A+C=85,5 \\ 8A+64C=4280 \end{array} \right\} (24).$$

由此即可知

$$A=21\frac{2}{7}, C=64\frac{3}{14},$$

因而與  $\frac{7}{11}VA + \frac{3}{4}CV^2$  相比的抵抗力，即與

$$13\frac{6}{11}V + 48\frac{9}{56}V^2 \quad (25)$$

相比。在第四行方面， $V=1$ ，故全部抵抗力與（與速度之平方相比的抵抗力之）部分相比，如

$$13\frac{6}{11} + 48\frac{9}{56} : 48\frac{9}{56} = 61\frac{12}{17} : 48\frac{9}{56} \quad (26).$$

所以水內擺錘之抵抗力與空氣內抵抗力之一部分（此部分與速度之平方相比，而在較速的振動方面，亦可視之為全抵抗力）相比，如

$$61\frac{12}{17} : 48\frac{9}{56}$$

及  $535 : 1\frac{1}{2}$

之合，即，如  $571 : 1 \quad (27),$

在水內振動的擺錘，倘將其線亦浸入水內，則抵抗力又須增加；於是在水內振動的擺錘，其與速度之平方相比的抵抗力之部分（在速度較大的振動方

面，此亦可視為全部抵抗力)與空氣內振動時之全部抵抗力相比，約如  $850 : 1$  (28).

此比例與水之密度與空氣之密度相比，甚為接近。

在這個計算方面，所用者包括有與速度之平方相比的抵抗力之部分；不過實際上抵抗力之增加在水內較之平方為大（這個看來或者是很奇怪的）。我研究其原因，以為是水箱太小所致；蓋水箱小的結果，對於水之運動多所限制，因而能使抵抗力增加。倘若我們用一擺錘作試驗，其球之對徑僅為 1 英寸，則水箱相對的增大，而抵抗力即與速度之平方很接近的相比。我曾用繫有兩個球的擺錘作試驗，一較小的球在水內振動，較大的球則在水面上空氣內振動，如是，大球能保持擺錘之振動使其較長久。此種試驗所得之結果，可列為下表。

第一次下降所  
作之弧 } 16, 8, 4, 2, 1,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,

最末次上昇所  
作之弧 } 12, 6, 3,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{3}{8}$ ,  $\frac{3}{16}$ ,

與所失運動相  
比的弧之差 } 4, 2, 1,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{16}$

振動次數  $3\frac{3}{8}$ ,  $6\frac{1}{2}$ ,  $12\frac{1}{12}$ ,  $21\frac{1}{3}$ , 24, 53,  $62\frac{1}{2}$ .

此外，我並曾用過一鐵製的球在水銀內作試驗，以比較流體之抵抗力。擺錘之線，長約 3 英尺，球之對徑為  $\frac{1}{8}$  英寸。在擺錘上並繫一鉛球，使其於水銀面上振動，以保持擺錘之較長久的振動。我所用之器內，盛有水銀約三磅，以後則易以水，如是交換數次，以測驗二種流體之抵抗力。所得結果，大約水銀之抵抗力與水之抵抗力相比，如

13 或 14 比 1 (29);

此與其密度之相比亦甚接近。我又用較大的球作試驗，球徑約為  $\frac{2}{8}$  英寸，則所得之比亦較小，約為

12 或 10 比 1 (30)

此二試驗中，我意前者較為可靠，因為在後者之試驗中，器皿對於球之容積，已相對的減小，或已太小了。球既增大，器皿自亦須隨之增大方妥。我並想用較大的器皿，盛以溶解的金屬作試驗，可

惜時間不够，未能做到。

由此諸試驗中，我們已可推得一個較可滿意的結果，即，在流體中作急速運動的物體，其抵抗力與流體之密度很近似的相比。自然，這不是精確的。黏韌的流體，當其密度增大時，所發生之抵抗力自亦增大，這是無疑的。所以冷的油之抵抗力較熱者為大，熱油之抵抗力較之雨水為大，雨水較之酒精為大。不過在各種流體方面，如空氣，淡水及鹽水，酒精，水銀，油及溶解的金屬等，倘將其盛在器皿內動搖之，能保持其運動至若干時候，並能分為小滴，則在此項流體內，以上的規律均可適用，尤其是用較大的擺錘及運動較速時，所得結果亦較準確。

按照許多人所持的意見，空中尚有某種以太性質的極稀薄中介物，貫徹於一切物體中；此項中介物當亦能發生抵抗力。為研究此問題，必須測定物體在試驗內所受之抵抗力是否限於其表面上，或其內部亦受有抵抗力，為我們可測得者。我曾經

想了以下一種方法以試驗之。我用一線，長 11 英尺，結在一鋼圈以懸於一鉤上，線下端繫一束樅木，以成一擺錘。鉤與鋼圈接觸處爲一凹形的薄口，因而對圈之運動全無妨害。於是我將此擺錘移出其垂直方向六英尺，並使其在一平面內，此平面與鉤相垂直，俾鋼圈之運動不致發生震蕩，而鋼圈與鉤之接觸點，即，懸點，乃能成爲不動點。擺錘移出其垂直方向所至之點，我極細密的將其記出；經第一，第二及第三次振動後所回到的點，我亦均將其記出。我曾經重復過幾次，以求該項點之精確。於是，我用鉛及其他重金屬填滿入束內。但在以前，我曾將該沒有填滿金屬的束稱過，除繞在束上的線以外，並將鉤與束間之線之一半亦計在內，因爲此段線恆以其重量之半影響於擺錘。於此項重量上又加入束所能包括的空氣之重量。如是，沒有填滿金屬以前，其重量約等於填滿後之  $\frac{1}{8}$ 。經填滿後因重量增加，故線之長亦必增加；所以，我又將線稍縮短一些，以保其原來之長。於是我將擺錘移

至前所記出的點放下之使其振動，則經過 77 次振動後，始回到前所記的第二點，又經 77 次後，始到第三點，等等。由此，我推論到一個結果，即，填滿後的擺錘之全部抵抗力與未填滿前的全部抵抗力相比，不能超過 78 : 77。蓋如二者之抵抗力相等，則因填滿後的擺錘重量增加 78 倍，其力亦大 78 倍，故其振動之歷久亦必加如是多的倍，因而須在 78 次以後纔回到所記之點。但事實上 77 次以後已到該項點了。

今設  $A$  為束之外面所受之抵抗力， $B$  為其內部所受之抵抗力，而如等速的物體之內部所受抵抗力與物質之量相比，則填滿後的束，其內部所受之抵抗力為  $78B$ 。如是，未經填滿金屬的束所受之全部抵抗力為  $A+B$ ，已填滿的束之全部抵抗力為  $A+78B$ ；因之，得

$$A+B : A+78B = 77 : 78,$$

$$A+B : 77B = 77 : 1,$$

$$A+B : B = 77^2 : 1,$$

故  $A : B = 5928 : 1$  (31).

從可知束之內部所受之抵抗力小於其外面所受者約 6000 倍。這個推論，自然是從一個假設得來的，即，已填滿的束之較大的抵抗力，其來源並非由於某種不可知的原因，而由於某種極稀薄的流體之作用。

我做了這個試驗後，曾將此項結果記在一張紙上，但這張紙失去了，所以現在所敘者，僅靠記憶中所尚能想到的而已。因此，好多附帶的分數均不能不略去，祇有整數尚留在我的記憶內。又因時間關係，後來亦未能再試驗一次。

在這個試驗中，起初時曾因鉤不牢固，使填滿的束之振動不能歷如是之久。後來我察出此原因，乃易一很牢固的鉤再試驗。其所得結果，即以上所敘者。

## 第七章 論流體之運動及拋出的物體之抵抗力

§ 43. 定理. 今有二個相似的物體系統，其部分之數相同，而且一系統內之部分與他系統內相當的部分不僅各各相似，亦且相比，其位置亦相似，密度間亦有一定之比。在相比的時間內，此二系統之部分開始以相似的方法作相互間之運動（一系統之物體間相互運動，他系統之物體，相互間亦作相似的運動）。在同一系統內，其部分間亦祇在撞擊反射時發生接觸，其相互吸引或相互排斥之力與對徑成反比與速度之平方成正比。在此種狀況下，兩系統內各部分即繼續以相似的方法作相互間之運動。反之亦然。

相似的物體之位置如相似，則在相比的時間內以相似的方法作相互間之運動，而如在該時間

之末將二系統之各部分作一比較，則其位置亦仍相似。故如相當的部分作成相似的圖形之相似的且相比的部分，則其時間亦必相比。所以，二個系統之性質如相同，則其相當的部分因開始時之運動相似，必能直下仍相似。按運動之第一定律，倘沒有其他的力作用於其間，則其運動必以直線進行。但如相互間有力生作用，此項力與直徑成反比，與速度之平方成正比，則因各部分之位置相似，其力亦相比，故由各部所合成之力，一若由二個中心所出發，此二中心之位置亦相似。此二力相比，亦如各部分力之相比，即，與對徑成反比，與速度之平方成正比。所以其作用，能使相當的部分，繼續作相似的圖形。祇須該項中心點為靜止的，即是如此；此則可由第一編 § 18 之系 1 及 8 知之。倘此項中心點非為靜止的，則因相似運動之關係，其位置亦仍相似，在所作之圖形方面雖有變動，但亦仍相似。所以相似的相當的部分亦仍繼續的作相似的運動。因其相遇時之撞擊及反射亦均相似，故其

相似的運動於反射後仍無變動而可如是一直繼續下去。此即所欲證者。

系 1. 倘有二相似的物體，其對於二系統各相當部分之位置均同，而且在相比的時間內開始作相似的運動；倘此二物體之量及密度相比，一如二系統內相當部分者相比，則此二物體即繼續在相比的時間內作相似的運動。

蓋在此種狀況下，此二物體之關係與二系統本身內之關係一樣，故其情形亦一般。

系 2. 倘二系統內相似的部分，本身間均靜止着，祇有其中之較大的二者（此二者較其餘一切均大，而且在二系統內為相當者）沿位置相似的直線以相似的方法開始運動，則對於二系統內之其餘部所引起之運動亦相似，並且繼續的在其中間以相似的方法在相比的時間內運動。其所作空間，亦與其直徑相比。

§ 44. 定理. 在與前相同的假定下，系統內之較大的部分，其所受抵抗力與速度之平方，與直徑

之平方，與系統各部分之密度相比。

抵抗力之一部分，係由向心力或離心力所發生，此項力亦即系統部分相互間之作用。其他一部分則發生於各部分之互相接觸。前一部分之抵抗力，其相比如產生此的全部運動力之相比，即是，如全部能發生加速作用的力以及相當的部分所含之物質質量相比。所以此項抵抗力與速度之平方成正比，與各部分間之距離成反比，並與各部分所含物質之量成正比。而因一系統內各部分間之距離與他系統內之相當的距離相比，如一系統內一部分之直徑與他系統內其相當部分之直徑相比，又因物質之量相比，如密度及直徑之三次方相比，故此項抵抗力相比，如速度之平方，直徑之平方及二系統各部分之密度相比。此即所欲證者。

至於第二種的抵抗力，則其相比如相當的撞擊之次數及力二者之合相比。而撞擊之次數，則與部分之速度成正比，與中間之空間成反比，而其力則與速度，各部分之量及物質密度相比，即是，與

速度，直徑之三次方及各部分之密度相比。

今將此項比連結之，則可知各相當部分之抵抗力相比，如速度之平方，直徑之平方及各部分之密度相比。此即所欲證者。

系 1. 倘該項系統爲二彈性的流體，猶如空氣一樣的性質，其各部分相互間靜止着，另外又有二個物體與流體之部分相比（對於量及密度而言），而且爲相似的，以相似的位置處於各部分間，並緣位置相似的直線拋出。流體各部分相互作用的力，其相比如所拋出的物體之徑相比之反，如速度之平方相比之正。如是則此二物體於相比的時間內在流體中引起相似的運動，其所作空間亦爲相似，且與其徑相比。

系 2. 在此流體內，一急速運動的拋出物所受之抵抗力與速度之平方很近似的相比。蓋互相隔開的各部分間之相互影響的力，如按速度之平方增大之，則拋出的物體所受之抵抗力亦即加倍。所以中介物之部分如不相連結；相互間無有力影響，

則抵抗力準確的與速度之平方相比。

今設  $A, B, C$  爲三種中介物，由相等相似而且距離相同的各部分所成。 $A$  與  $B$  之部分，相互間以某種力互相離開，此項力與  $T$  及  $V$  相比，而  $T$  及  $V$  則爲二數目字；但  $C$  則並無此項力生作用於其間。設有四物體  $D, E, F, G$  在此項中介物內運動， $D$  與  $E$  在  $A$  及  $B$  內， $F$  與  $G$  則在  $C$  內。 $D$  之速度與  $E$  之速度相比，以及  $F$  之速度與  $G$  之速度相比，如

$$\sqrt{T} : \sqrt{V}.$$

如是則  $D$  之抵抗力與  $E$  者相比，以及  $F$  之抵抗力與  $G$  者相比，如速度之平方相比，而  $D$  之抵抗力與  $F$  之抵抗力相比，如  $E$  之抵抗力與  $G$  之抵抗力相比。今設  $D$  與  $F$  之速度相等， $E$  與  $G$  之速度亦相等，並將前二者之速度以任何比例放大之，同時，即以此比例之平方減小  $B$  各部分之力，則就其構造形狀及位置而言， $B$  可與  $C$  任意的互接近，而相等並等速的二物體  $E$  與  $G$  在此二

中介物內所受之抵抗力，於是亦能漸趨於相等，最後，其差可小於任何可知之數。又因  $D$  與  $F$  之抵抗力相比，如  $E$  與  $G$  之抵抗力相比，故前者之抵抗力亦必漸趨於相等。故如  $D$  與  $F$  之速度甚大，則其抵抗力可很近似的相等，又因  $F$  之抵抗力與速度之平方相比，故  $D$  所受之抵抗力亦很近似的與速度之平方相比。

系 3. 故如一物體在一任意的彈性流體內作急速運動，則其所受之抵抗力，差不多猶如流體之各部分失去了其離心力，因而相互間並無相離之傾向一般，但須彈性力之來源是由於流體各部分之離心力，而且速度必須如是大，使該項力沒有充分的時間可以發生作用。

系 4. 倘中介物之分開的各部分，相互間並無相離之傾向，則相似而等速的物體於其內運動時，其抵抗力相比如徑之平方相比。在此狀況下，倘運動之速度甚大，則該項抵抗力雖在彈性的流體內亦很近似的與徑之平方相比。

系 5. 相似相等而且速度亦等的物體在密度相同的中介物內運動，此項中介物之各部分間並無相離之傾向，其部分為多而小或少而大亦無關，祇須在同一時間內物體所遇之物質量相同，所傳出的運動相等，反之，由此項物質量所受之反響亦相等，則其所受之抵抗力自然亦相等。因之在密度相同的彈性流質內，物體之運動倘很速，則其所受之抵抗力必很近似的相等，至於流體之部分為粗強或細弱，全無關係。蓋在運動極速的物體方面，中介物之部分即使細弱，於抵抗力之影響亦甚微。

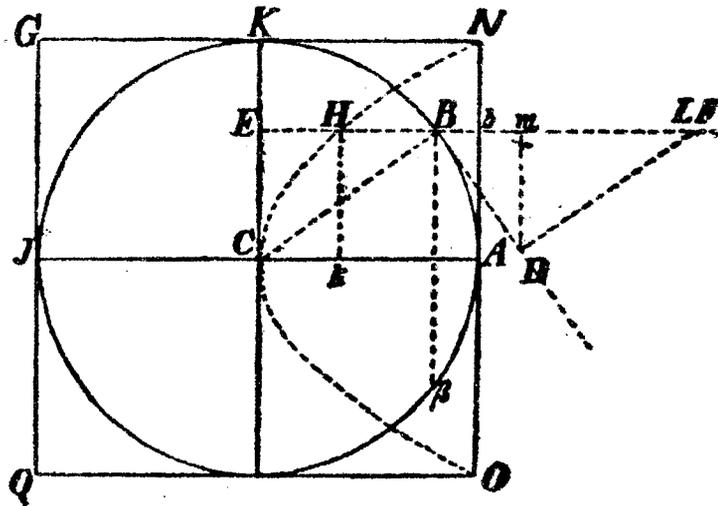
系 6. 倘流體之彈性力係來源於各部分之相離力，則此處所證明者均適用。但如彈性力非由此項相離力所產生，例如棉球之彈性力等，而由任何其他原因所發生因而能使流體各部分間之運動受障礙者，則中介物之流體屬性即被限制，而抵抗力亦必增加，不能與以上諸系內所述者一樣了。

§ 45. 定理. 設有一球及一圓柱體，其徑相等，在一稀薄而有彈性的中介物內向圓柱體之軸所定

的方向運動，此中介物係由相等且距離亦相同的諸部分所成，則球所受之抵抗力祇有圓柱體所受者之半。

按運動定律之系 5，可知中介物對於物體所施之影響，不問物體在中介物內運動，或中介物之各部分以相同的速度對物體運動，二者並無分別，故我們可將物體視為靜止的而研究中中介物對於物體作運動時，其所施之影響若何。

今設  $ABKJ$  為一球形的物體，其中心為  $C$ ，半徑為  $CA$ ，中介物之部分以已知的速度沿一與  $AC$  平行的直線進行與之相撞。設  $LB$  為如是的



第一七一圖

一直線，今於其上取  $LB=CB$ ，作  $BD$  線與球相切於  $B$ 。又作垂線  $BE, LD$  垂於  $CK$  及  $BD$  上。於是我們可將中介物之一部分，沿  $FB$  線對於球作斜撞的力，與該部分對於  $ONGQ$  圓柱體所施之力相比較，則知第一力與第二力相比，如

$$LD : LB \text{ 或如 } BE : BC. \quad (1)$$

又，第一力在  $FB$  或  $AC$  方向內推動物體之效率與其在  $BC$  方向內所施之推動效率相比，如

$$BE : BC \quad (2)$$

將所得之二比相連結，即可知中介物之一部分所斜施於球(沿  $FB$  方向)上的推動效率(使球向此方向前進)，與該部分所垂直施於圓柱體上之效率相比，如

$$BE^2 : BC^2 \quad (3).$$

今於圓柱體之底面  $NAO$  上作  $bE$  垂線，使其等於  $AC=BC$ ，並設

$$bH = \frac{BE^2}{BC},$$

則  $bH : bE = BE^2 : BC^2 \quad (4),$

即， $bH$  與  $bE$  相比，等於中介物之部分所施於球

之推動效率與其所施於圓柱體者相比。

所以包有一切  $bH$  的物體與包有一切  $bE$  的物體相比，猶如中介物一切部分對於球所施之效率與對於圓柱體所施者相比。前者為一拋物線形之物體，其頂點在  $C$ ，其軸為  $CA$ ，通徑亦為  $CA$ ，後者係一包於前者之外的圓柱體，而由立體幾何學所證明，可知該拋物線體等於該圓柱體之一半。所以中介物所施於球之力等於其所施於圓柱體者之半。

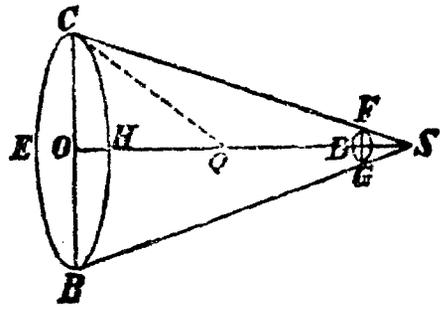
倘中介物之部分係靜止着，但球與圓柱體以相等的速度運動，則亦可知球所受之抵抗力為圓柱體所受者之半。此即所欲證者。

§ 46. 附註。 用同樣的方法，我們尚可比較其他形狀的物體所受之抵抗力，並求得一種形狀，最適宜於在有抵抗的中介物內運動者。

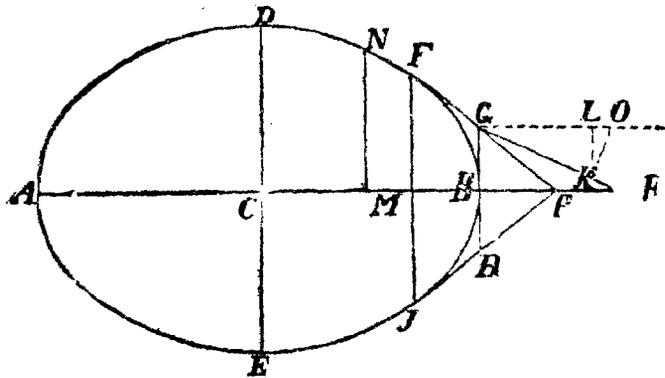
今以  $CEBH$  為底面，其中心點為  $O$ ，半徑為  $OC$ ，並以  $OD$  為高，頂尖則暫不定，求作一圓錐狀體  $CBGF$ ，使其在同底同高之諸圓錐狀體中，所

受之抵抗力為最小。

如是，可將  $OD$  於  $Q$  平分之，將  $OQ$  引長至  $S$ ，使  $QS=QC$ 。此處所得之  $S$  即為所求



第一七二圖



第一七三圖

之頂尖，因而該圓錐體即可求得。

由此，復可得以上之理。因為  $CSB$  角恆為一銳角，故可用一橢圓形  $ADBE$  以  $AB$  為軸旋轉以產生一物體  $ADBE$ ，並引  $FG, GH, HJ$  諸線與之相切於  $F, B, J$  諸點，使  $GH$  於  $B$  點與橢圓形亦即物體之軸相垂直， $FG$  及  $HJ$  則與  $GH$  作成  $FGB = JHB = 135^\circ$  角。於是將  $ADFGHJE$  形亦

按  $AB$  軸旋轉之，則所得之物體，其所受之抵抗力亦即較以前之物體為小，不過此二物體之運動均須在  $AB$  方向內，而且  $B$  須在前。我相信此定理對於造船上頗有用處。

倘  $DNFB$  線有如是屬性，即，由  $N$  作垂線  $NM$  垂於  $AB$  上，并由  $G$  作  $GR$  線與  $N$  處之切線相平行，與  $AB$  之引長相交於  $R$  時， $MN : GR = GR^3 : 4BR \cdot GB^2$ ，則此線旋轉時所產生之物體，在其由  $A$  向  $B$  的運動上，於一稀薄而彈性的中介物內所受之抵抗力，較之任何同長同寬而圓形的物體所受者為小。

§ 47. 問題。 一球在一稀薄的中介物內作等速運動，此中介物係由相等而且相互距離亦均等的各部分所成；今欲求其所受之抵抗力。

第一事。試設想一半徑相等高亦相等的圓柱體以相同的速度在該中介物內運動，其方向則與其軸之方向同。今設球或圓柱體與中介物之部分相撞時，後者能以極大的力反射回來。按 § 45. 可

知球之抵抗力等於該圓柱體之抵抗力之半；又，球  
= 圓柱體之  $\frac{2}{3}$ 。如是，中介物之部分與圓柱體相撞  
時，圓柱體能以極強的力反擊之，使其得圓柱體之  
倍大的運動。所以在一時間內（此時間內圓柱體經  
過其軸之半的道路），圓柱體所傳給中介物部分之  
運動與圓柱體之全運動相比，如中介物之密度與  
圓柱體之密度相比。球在一時間內（此時間內球經  
過與其軸相等的道路）所傳給中介物部分之運動  
亦與此同。但在另一時間內（在此時間內，球經過  
其徑之  $\frac{2}{3}$ ），球所傳與中介物之部分的運動與球之  
全運動相比，如中介物之密度與球之密度相比。所  
以球所受之抵抗力與一力（此力能使球於上述之  
時間內發生其全運動）相比，如中介物之密度與球  
之密度相比。

第二事。今設中介物之部分，與球或圓柱體  
相撞後并不被擊回，圓柱體與之垂直的相撞後祇  
傳與其本身所有的速度，則圓柱體於此所受之抵  
抗力，僅為其前所受者之半；球之關係亦仍不變。

第三事。設中介物部分被球擊回之力非爲極大亦非爲零，但爲一介於其間之值，則抵抗力較之以前第一事及第二事亦處於一中間之比。

系 1. 設球及中介物之部分均爲無限的硬，一切彈性及反擊的力都沒有，則球之抵抗力與一力（此力能於球經過  $\frac{2}{3}$  徑的時間內使球之全部運動失去或發生）相比，如中介物之密度與球之密度相比。

系 2. 在一切如常的狀況下，球之抵抗力與速度之平方相比。

系 3. 在一切如常的狀況下，球之抵抗力與其徑之平方相比。

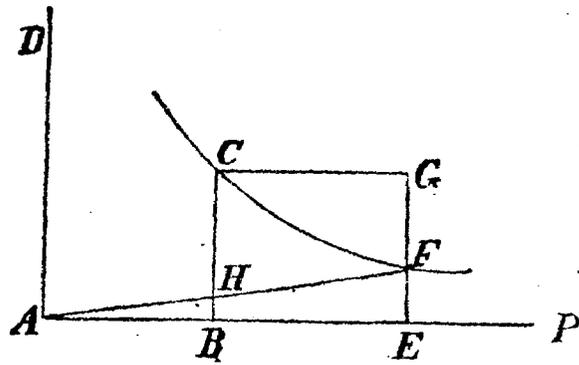
系 4. 在一切如常的狀況下，球之抵抗力與中介物之密度相比。

系 5. 球之抵抗力，與速度之平方，徑之平方及中介物之密度三者之合相比。

系 6. 球之運動及其抵抗力可如下敘明之。

今設  $AB$  爲一時間，在此時間內球受繼續不

斷的抵抗力，  
能將其全部運  
動失去於  $AB$   
上作垂線  $AD$   
及  $BC$ ，而且後  
者所表者即為



第一七四圖

該全部運動。今以  $AD$  及  $AB$  為漸近線，作一雙  
曲線經過  $C$ ，於是將  $AB$  引長至一任何點  $E$ ，作  
 $EF$  垂線與雙曲線相交於  $F$ 。再將  $CBEG$  平行  
方形完成，作  $AF$  線與  $BC$  相交於  $H$ 。今如球於  
一任何時間  $BE$  內，以開始時之運動在無抵抗的  
中介物內作一道路，此道路可用  $CBEG$  平行方形  
以表之，則在有抵抗的中介物內，其所作之道路可  
用雙曲線的面  $CBEF$  以表之，而在該時間之末，  
其運動可用  $EF$  線以表之。在該時間之末，其抵  
抗力則可用  $BH$  線以表之。這些一切均可由 § 7  
系 1 及 3 以知之。

系 7. 故如球於  $T$  時間內，因繼續不斷的抵抗

力  $R$  之作用能失去其全運動  $M$ , 則在  $t$  時間內, 於有抵抗的中介物內因抵抗力  $R$  (此抵抗力與速度之平方同減小) 之作用能失去其運動之  $\frac{tM}{T+t}$ , 尚餘  $\frac{TM}{T+t}$ . 其所作之道路, 與同時間內以等速運動  $M$  所作者相比, 如

$$2,302585092994 \cdot \log\left(\frac{T+t}{T}\right) : \frac{t}{T},$$

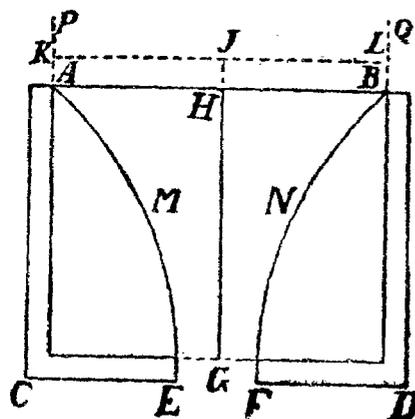
因爲  $BCFE$  與  $BCGE$  之比是如此。

§ 48. 附註。 在此定理內, 所敘之抵抗力及被阻滯的狀況, 均爲球形的拋出物於不連續的中介物內所受者, 并已指出此項抵抗力與一力 (此力於球經過  $\frac{1}{2}$  徑的時間內能使球之全部運動消失或發生) 相比, 如中介物之密度與球之密度相比. 在這裏, 自須有一假定, 即, 球與中介物之部分均爲彈性極大的, 所以能以極大的力被擊回. 假如球及中介物之部分均爲無限硬, 完全沒有反擊的力, 則該項力祇有一半大。

在連續的中介物方面, 如水, 熟油, 水銀等, 球

在其內不能與流體之各部分直接接觸，而由能接觸的部分轉而傳達出去，則抵抗力尚須以一倍縮小。蓋在此項中介物內，球所受之抵抗力與一力（此力於球經過  $\frac{1}{2}$  徑的時間內能使球之全部運動消失或發生）相比，如中介物之密度與球之密度相比，以下試說明此理。

§ 49. 問題。 今有一圓柱體形之器皿盛以水，其底下開一孔，水由之流出；今求水之運動狀況。



第一七五圖

今設  $ACDB$  為器皿， $AB$  為在上之口， $CD$  為與地平面相平行的底， $EF$  即為底面上之圓形的孔， $G$  為此孔之中心點， $GH$  為與地平面相垂直的圓柱體之軸。

我們設想一冰柱  $APQB$ ，其大小恰與該器皿之內容相等，其軸亦相合，以等速的運動自上而下。當此冰柱達到  $AB$  面時，即融成為水而流入

器皿，於是成爲一水柱  $ABNFEM$  由  $EF$  孔流出，且適充滿此孔。今作  $KL$  線經過  $J$  點與地平面相平行，並與水柱相遇於  $K$  及  $L$ 。經過  $EF$  孔流出的水之速度，與經過  $JG$  高下來的水所能達到之速度相等。所以按葛里雷所證明之定理， $JG$  與  $JH$  相比猶如經過  $EF$  孔流出的水之速度之平方與  $AB$  圓處水下墜的速度之平方相比，即是，如  $AB$  圓之平方與  $EF$  圓之平方相比。在同時時間內以同量經過不同的諸圓之水，其速度相比，如此項圓面相比之反。此處所欲論者，是向地平面流下的水之速度。同時，自然尚有與地平面相平行的運動，因爲必須有此項運動，水之分子乃能互相接近；不過這裏我們不欲論此，因爲此項運動非產生於重力，並且對於向地平面之運動亦不能發生影響。我們可假定，水之各部分間有凝聚力，因而在其下降時，各部分能互相接近而成爲一整個的水柱，不致分散成爲若干個。至於此項凝聚力所發生的地平方向內水之部分之運動，這裏可以不論。

第一事。試設想器內圍於水  $ABNFEM$  外者全為冰，水係由此項冰面上流下。因冰面為全滑者並無若何抵抗力，故由  $EF$  孔流出時之速度，必與以前流下之速度同，而此項流出之原動力則為  $ABNFEM$  水之全重量。器皿底面所負擔之重量係水外冰之重量。今如該項冰亦融而為水，則以上水之流出速度亦仍不會改變。蓋冰融為水後，不會使流出的水之速度減小，因為此項水本身亦有下降之傾向；同時，亦不會使其速度增加，因為後者之下降傾向能對於流出的水發生阻礙。所以力既不變而流出的水之速度亦不變。

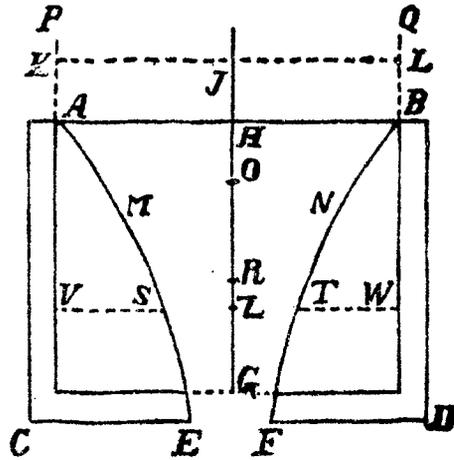
因流出的水之部分作斜的運動，故器皿底面之孔必漸增大。蓋流出的水之各部分，不能一切均垂直的下來，其由旁邊來的，仍以斜的方向流出。但因其均有通過底面而直下的傾向，故其運動與垂直的下流之水柱相同。此項水柱在孔外後較之適在孔內時為小，其前者之徑與後者之徑相比如  $5:6$  或  $5,5:6,5$ ，假如我沒有量差。他曾經用過

一鐵片作試驗，片之中間開以孔，作圓形，約  $\frac{3}{8}$  英寸直徑。因爲不欲使流出的水加速，而且加速時水柱將益小，故我不將此片裝於器皿之底面而裝於其旁邊，俾水柱在地平的方向內流出。如是，我於距孔  $\frac{1}{2}$  英寸處測水柱之徑，所得爲  $\frac{21}{40}$  英寸。從可知孔之徑與孔外甚近處水柱之徑相比，如 25 : 21。蓋水由孔流出時，各面所來之水必均向孔收斂，而由此收斂，流出後水柱之大因而減小了，同時，因水柱之大減小，故其速度亦即增加。在以上所定之距離內，水柱之速度已增加，其比爲  $25^2 : 21^2$ ，或 17 : 12，亦即爲  $\sqrt{2} : 1$ 。

由種種試驗，我們已知在一定時間內經過器皿之底面上圓孔的流水量，等於一其他水量，此水量係以上述的速度經過一徑爲前者之  $\frac{21}{25}$  的孔於同時間內流出者。所以在孔之本身內，該項流出的水所有之向下的速度，很接近的等於該項水因重力之作用，下墜經過器皿內水之高之半時所可達到的速度。但水既出離器皿以後，因收斂之故，其

速度即增加，在距離約等於孔之直徑處，其速度之增加為 $\sqrt{2} : 1$ 。在以下，我們用小孔  $EF$  以表水柱之徑。

今設  $VW$  為一平面與  $EF$  方向相平行，在  $EF$  之上，與之相距約等於該  $EF$  孔之直徑。在此平面內另有一孔  $ST$ ，此孔較  $EF$  為大。水柱由上



第一七六圖

面的孔下來恰充滿下面的孔而流出；此二孔之徑相比，約為 25 : 21。

在此狀況下，水柱垂直的經由下面之孔而流出，其水量就此孔之大小而言，差不多等於問題中所求者。所以二平面及向外流的水柱所佔的空間，可視之為器皿之底。但欲使問題之解較簡單較合於數學，最好單將下面的平面視為器皿之底，並假定在冰面上滑下的水恆保持其運動，冰則恆保持

其靜止。在以下， $ST$  爲一圓形的孔之徑，其中心點爲  $Z$ ，水由器皿內流出時，必先經過此孔。 $EF$  爲在下的孔之徑，此孔恰爲流出的水之柱所充滿。今設上面的孔之徑  $ST$  與下面的孔之徑  $EF$  相比，如 25:21， $ST$  平面與  $EF$  平面之距離等於  $EF$  孔之徑，則經過  $ST$  流出的水在  $ST$  孔本身內時，其速度等於一物體下墜經過  $JZ$  高之半所可達到者，在  $EF$  孔本身方面，則其速度等於一物體下墜經過  $JZ$  高時所能達到者。

第二事。設  $EF$  孔不在器皿之中間而在其一旁，則水流之速度亦仍如前；自然，我們須假定孔之大亦仍如前。雖然一重物體經過一斜線下降時，其所用時間較多，垂直下來時間較少，但其所能達到的速度則一樣，此係葛里雷所已證明者。

第三事。倘將孔移在器皿之壁上，其流出的水之速度亦仍如此。如孔不大， $AB$  與  $KL$  二面之距離差不多等於零，則在地平方向內流出的水柱，作拋物線形，而由此拋物線之通徑，可知其速度仍

等於一物體由  $HG$  或  $JG$  高下降時所能達到之速度。經幾次試驗後，可知器皿內之水倘高出於孔 20 英寸，孔本身亦高於地平面 20 英寸，則流出的水約在 37 英寸之距離外下墜。倘將空氣之抵抗力減去，則水柱應在 40 英寸以外下墜，而拋物線之通徑為 80 英寸。

第四事。倘水向上噴出，其速度亦仍如前。蓋如水柱垂直的向上昇，而不受空氣之抵抗，則其高可達  $GH$  或  $GJ$ 。其流出之速度亦等於水由該項高下墜時所可達到者。器皿內靜止的水之各部分，由各方面所受之壓力相等，故向各方面之推動力亦相等，至於流出時之孔在底面上或經過一孔道後由在外的一孔流出，或在上的孔流出，均無關係。流出時的速度，不僅合於根據本節內之理所可推算得者，而且試驗方面所得之結果亦如此。

第五事。流出的水之速度，與孔之為圓形，方形或三角形均無關係；蓋速度與孔之形狀無關，祇產生於孔之離  $KL$  之距離。

第六事。倘將器皿  $ABDC$  之下部浸入靜止的水內，此水之高，自器皿之底面計算， $=GR$ ，則器皿內水經過  $EF$  而流入靜止的水之速度，等於其由  $JR$  高下降時所可達到的速度。在靜止的水面下之器皿內的水之全重量，為在其外的水所抵住而成為均勢，所以不能使器皿內下降的水之運動加速。在試驗方面如測定水流出的時間，則此事實可以證明。

系 1. 今將  $CA$  引長至  $K$  使  $AK$  與  $CK$  相比，等於(底面上任何處所作孔之)面積與  $AB$  圓之面積相比之平方，則流出的水之速度等於其由  $CK$  高下墜時所可達到之速度。

系 2. 能產生流出的水之全運動的力等於圓柱體形的水柱之重量，此水柱之底為  $EF$ ，其高為  $2GJ$  或  $2CK$ 。當流出的水與此水柱之量相等時，其所須時間能使由  $GJ$  高下降的水於此時間內達到其流出時之速度。

系 3.  $ABDC$  內全部水之重量與其一部分

(此部分能使水向外流)相比,如

$$AB + EF : 2EF \quad (1).$$

蓋如  $JO$  為  $JH$  與  $JG$  中間之中比,則經過  $EF$  孔在一時間內(在此時間內一水滴由  $J$  下降時能經過  $JG$  道路)所流出的水,其量等於一圓柱體之量,此圓柱體之底為  $EF$ , 其高為  $2JG$ , 即是,等於一圓柱體,其底為  $AB$ , 高為  $2JO$ . 蓋

$$\begin{aligned} EF : AB &= \sqrt{JH} : \sqrt{JG}, \\ EF : AB &= \sqrt{JH \cdot JG} : JG \quad (2) \\ &= JO : JG, \end{aligned}$$

而在一時間內(於此時間內由  $J$  下降的一水滴能經過  $JH$  高),向外流的水與一圓柱體相等,其

$$\begin{aligned} \text{底} &= AB, \\ \text{高} &= 2JH. \end{aligned}$$

但在另一時間內(於此時間內,由  $J$  下墜的水滴經過  $HG$  道路),向外流出的水,即,  $ABNEFM$  內之全部水量與一圓柱體相等,此圓柱體之

$$\text{底} = AB,$$

$$\text{高} = 2HO.$$

所以  $ABDC$  全部器皿內所有之水與  $ABNEFM$  內之全部水量相比, 如

$$\begin{aligned} HG : 2HO &= HO + OG : 2HO \\ &= JH + JO : 2JH(3). \end{aligned}$$

$ABNEFM$  內所有全部水之重量能使水向外流; 所以器皿內全部水之重量與其一部(此部能使水向外流)相比, 如

$$JH + JO : 2JH,$$

或如  $AB + EF : 2EF$ . (4)

系 4. 又,  $ABDC$  器皿內全部水之重量與其他一部分(此部分為器皿之底面所負擔者)相比, 如

$$AB + EF : AB - EF \quad (5).$$

系 5. 底所負擔的水之部分與一其他部分(此部分能使水外流)相比, 如

$$AB - EF : 2EF \quad (6),$$

或如

$$\text{底之面積} : 2 \cdot \text{孔之面積}.$$

系 6. 對於底施壓力的水之部分，與垂直在底面上之全部水量相比，如

$$AB : AB + EF \quad (7),$$

或如  $AB$  圓 :  $2 \cdot AB$  圓一底之面積。

但施壓力於底的重量之部分，與器皿內全部水之重量相比，如

$$AB - EF : AB : EF \quad (8),$$

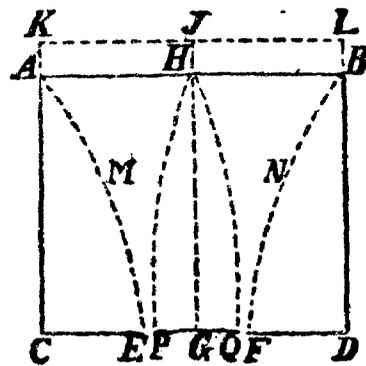
後者之重量與垂直在底面上全部水重相比，如

$$AB : AB - EF \quad (9).$$

所以施壓力於底的重量之部分與垂直於底面上全部水之重量相比，如

$$AB : AB + EF = AB : 2AB - (AB - EF).$$

系 7: 今於  $EF$  孔之中間作一小圓  $PQ$  與地平面相平行，其中心點為  $G$ ，則此圓所負擔之水重大於一水柱重量之三分之一，此水柱之底



第一七七圖

爲該圓，其高爲  $GH$ 。

今設  $ABNFEM$  爲下降的水柱，其軸爲  $GH$ 。試設想器皿內之全部水量，包括水柱之外及小圓上之水，凡不能使水之下降加速者，均結爲固體。設小圓上之固結的水柱爲  $PHQ$ ，其頂尖爲  $H$ ，其高爲  $GH$ 。又設想流下的水因其本身之重量下降，既不積於  $PHQ$  上，亦不與之生摩擦而祇滑過。在水流旁的  $AMEC$  及  $BNFD$  二固體，均以其凸面  $AME$  及  $BNF$  向水流， $PHQ$  對之亦爲凸的。因此， $PHQ$  較之一底爲  $PQ$ ，高爲  $GH$  的圓錐體爲大，亦即是大於由該底及高所成的圓柱體之三分之一。所以該小圓所負擔之重量大於該項圓錐體或該項圓柱體之三分之一。

系 8. 以上所說的小圓  $PQ$  所負擔的水之重量，看來小於一圓柱體重量之  $\frac{2}{3}$ ，此圓柱體之底爲該小圓，其高爲  $GH$ 。

在以上之假定下，試設想作一半球體，其底爲該圓，其半軸爲  $GH$ 。此半球體等於該圓柱體之三

分之二，並將  $PQH$  水柱包入內，而此水柱之重量則為小圓所當負擔者。欲使水之運動成為儘可能的直線方向，必須此水柱之外面與  $PQ$  所成之角不如是之銳乃可，因為水下降時恆加速而因此加速水柱必更小。因此角小於  $90^\circ$ ，故水柱之下部亦包在半球內，其上端則為一尖，俾水之地平方向內的運動對於半球之頂而言不致較其垂直的運動為無限速。 $PQ$  圓愈小，則水柱愈銳，倘將其縮成為無限小，則  $PHQ$  角亦成為無限小，故水柱恆在半球之內。所以此水柱小於該項圓柱體之  $\frac{2}{3}$ ，而小圓所負擔的水之重量等於該水柱之重量，因為在其四圍的水僅能使水向外流。

系 9. 小圓  $PQ$  所負擔的水之重量與一水柱之重量近似的相等，此水柱之底為該圓，其高為  $\frac{1}{2}GH$ 。此重量為上所述的圓錐體及半球之重量之中比。今如將該小圓放大，使其與  $EF$  孔相等，則其所負擔的水之重量為垂直在其上的全部水之重量，即是，所負擔之重量為一水柱，其底為該圓，其

高爲  $GH$ .

系 10. 此小圓所負擔之重量與一水柱(其底爲該圓或與之相等的圓,其高爲  $\frac{1}{2}GH$ )相比,如

$$EF^2 : EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2,$$

或近似的如

$EF$  圓比此圓減去  $PQ$  圓之半之差.

§ 50. 補題. 設如一圓柱體沿其軸之方向前進,則軸之大小雖可改變而其所受抵抗力不變。因此,該圓柱體所受之抵抗力,等於一圓所受者,此圓之徑與圓柱體之徑同,其速度亦同,其前進之方向爲一與圓面相垂直的直線。

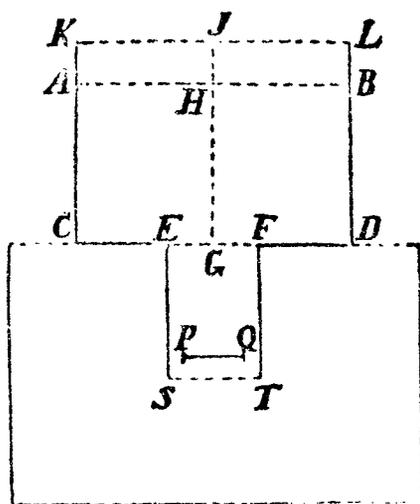
蓋圓柱體之兩旁,對於運動上極少阻礙,故如將其軸減至無限小,即得一圓。

§ 51. 定理. 一圓柱體在一緊縮的無限的且無彈性的中介物內運動,其速度爲等速的,方向係沿其軸;如是則其抵抗力與一力(此力於圓柱體經過其軸之四倍的道路的時間內,能產生或消失其全部運動)相比,很近似的如中介物之密度與圓柱體

之密度相比。

今設  $ABDC$  器皿之底  $CD$  與一靜止的水之面相接觸。由圓柱體形的管  $EFTS$  有水向地平面流出。今作一小圓  $PQ$  於管之中間，與地平方向平行，將  $CA$  引長至  $K$ ，使  $AK$  與  $CK$  相比，等於  $EF$  減  $PQ$  之差與  $AB$  相比之平方。按 § 49 第五

及第六事以及系 1，可知經過小圓與器皿之旁邊而流出的水之速度，等於水自由下降經  $KC$  或  $JG$  時所可達到之速度。又如器皿之寬為無限，因而  $HJ$  成為零或  $JG =$



第一七八圖

$HG$ ，則向小圓下來的水之力與圓柱體之重量（此圓柱體之底為  $PQ$ ，高為  $\frac{1}{2}JG$ ）相比，如

$$EF^2 : EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2.$$

以等速運動經過全管向外流的水之力，對於

小圓  $PQ$  之作用亦如是；此小圓亦可在管之內部。今假定  $EF$  與  $ST$  二孔口被閉，小圓於四圍受壓的流體內上昇，因而使在其上的水下降。如是則小圓上昇之速度與水下降之速度相比，如  $EF$  減  $PQ$  之差與  $PQ$  相比，而前者之速度與下降的水對於上昇的圓之相對速度相比，如

$$EF^2 - PQ^2 : EF^2.$$

今設此項相對速度等於一其他速度，此速度為以前水向外流時所有者，即是，等於水下降時經過  $JG$  高所能達到之速度。如是則水對於上昇的圓之力仍與前一樣，即是，上昇的小圓之抵抗力與一水柱（其底為  $PQ$ ，高為  $\frac{1}{2}JG$ ）相比，很近似的如

$$EF^2 : EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2.$$

小圓之速度，與水下降時經過  $JG$  高所能達到之速度相比，如

$$EF^2 - PQ^2 : EF^2.$$

今將管之寬放大至無限，則

$$EF^2 - PQ^2 : EF^2$$

與  $EF^2 : EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$

可相等。因而小圓之速度等於水下降經過  $JG$  時所能達到之速度，其抵抗力等於一圓柱體之重力，此圓柱體之底為  $PQ$ ，高為  $\frac{1}{2}JG$ 。此圓柱體沿其軸運動時所有之抵抗力與小圓之抵抗力相等，所以很近似的等於一力，此力於圓柱體經過其軸之四倍的道路時能產生該項運動。

今將圓柱體之軸放大或縮小，則其運動以及經過其軸之四倍的道路所須之時間均以該同比增加或減小。所以在相比的時間內能產生或消失該項已放大或縮小的運動之力，仍為不變的；此力仍等於圓柱體之抵抗力，因為按 § 50 此抵抗力亦仍不變。

設圓柱體之密度增加或減小，則其運動及力亦以同比增加或減小。所以圓柱體之抵抗力與一力（此力於圓柱體經過其軸之四倍的道路時能產生其全運動或消失之）相比，很近似的如中介物之密度與圓柱體之密度相比。

流體必須經壓搾乃能成爲連續，必須連續而且沒有彈性，乃能使整個的壓力（由壓搾所發生的壓力）迅即傳達出去，既整齊的對於運動的物體之各部分施以影響，故其抵抗力仍不變。由物體運動所產生的壓力能使流體之部分運動，因而產生抵抗力。但由流體之緊縮所產生的壓力，則不問其強度如何，倘仍傳達出去，對於流體之連續的部分，不能發生運動作用，亦不能影響運動使其改變，因而既不增加抵抗力亦不能縮小之。由緊縮所發生的流體之效率，在運動的物體之後部不能較之其前部爲強，所以對於本節內所述之抵抗力，不能發生減小的影響，但如被壓的物體之運動，其速度較之該項效率爲無限小，則此項效率亦不能對於其前部之影響爲特甚。祇須流體爲連續且無彈性的，則此項傳達可無限速。

系 1. 一圓柱體在連續的無限的中介物內沿其軸之方向作等速運動，則此圓柱體所受之抵抗力相比，如速度之平方相比，如徑之平方相比，如中

介物之密度相比。所以此項抵抗力與三者之合相比。

系 2. 倘管不放大至於無限，圓柱體在管內之靜止的中介物內向其軸之方向前進，後者之軸與前者之軸相合，則其抵抗力與一力(此力能於圓柱體經過其軸之四倍的道路時，產生或消失其全運動)相比，等於  $EF^2:EF^2-\frac{1}{2}PQ^2, EF^2:EF^2-PQ^2$  之平方及中介物之密度比圓柱體之密度，三者之組合。

系 3. 仍在以前之假定下， $L$  線與圓柱體之軸之四倍相比，等於  $EF^2-\frac{1}{2}PQ^2:EF^2$  及  $EF^2-PQ^2:EF^2$  之平方二者之合，則圓柱體所受之抵抗力與一力(此力當圓柱體經過  $L$  線時能產生其全部運動或消失之)相比，如中介物之密度與圓柱體之密度相比。

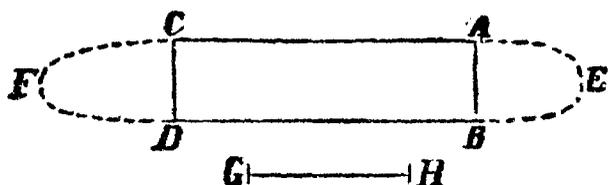
§ 52. 附註. 在以前的定理內，我們所求得者祇是圓柱體切面所產生之抵抗力，其由運動之斜方向所發生的部分卻未曾計入。在 § 49 第一事內

斜的方向內之運動爲器皿內全部水向  $EF$  孔收斂的作用，對於水之流出能有阻礙；在這裏此項斜運動爲圓柱體之前端對於水所施之壓力所致因而能使其向各方向分散，而在其通過圓柱體之前端附近時，能發生阻礙作用使其向後退，故其影響使流體向較遠的距離方面運動，增加抵抗的力，其比約略等於  $25 : 21$  之平方。

在該節之第一事內，我們曾使水之部分垂直的經過  $EF$  孔流出，在這裏，我們欲使斜方向內之運動消失，使水之部分能讓圓柱體較易通過，僅留由圓柱體之切面所發生的抵抗力（此抵抗力能由減小該切面之面積以減小之），則必須假定作斜運動之流體部分本身間爲連續的，在圓柱體之開端爲靜止的，且環繞着圓柱體。

今設  $ABDC$  爲一直角形， $AE$  及  $BE$  爲二拋物線弧，其軸爲  $AB$ ，其通徑與  $GH$ （圓柱體自由下墜時必經過此高乃能達到其速度）相比，如  $GH : \frac{1}{2}AB$ 。 $CF$  及  $DF$  亦爲二拋物線弧，其軸爲

$CD$ , 其通徑較前者大四倍。如是, 以  $EF$  為軸將此形旋轉時, 所得之物體之中段  $ABDC$  為前述之



第一七九圖

圓柱體, 其兩端  $ABE$  及  $CDF$  包有流體在內, 此項流體本身間靜止着, 而如結為固體時, 成為附着於圓柱體的頭與尾。  $EACFDB$  固體向  $E$  之方向沿其軸  $FE$  前進時所受之抵抗力, 很接近的等於本節內所已述過的抵抗力, 亦即是, 此抵抗力與一力(此力當圓柱體以等速運動經過  $4AC$  時能發生或消失其全運動)相比, 很近似的如流體之密度與圓柱體之密度相比。按 § 49 系 7, 此抵抗力之被該力所減小, 其比不能超過  $2 : 3$ 。

§ 53. 補題. 如將一圓柱體, 一球體及一卵形體相繼放入一圓柱體形之管內, 此三物體之寬均相同, 而且其軸恆與管之軸相同。則此三物體對於

水之流過該管，其所有之抵抗力相等。

在管之壁及該項物體之中間的空間，爲水所流過者，其積均相等，故水之流出狀況亦相似。此定理自須在一假定之下，即，凡對於流出的水不能使其加速的水之流性，在物體之上均結爲固體；此在 § 49 系 7 內已說明了。

§ 54. 補題。 仍如前節內之假設，並可知該項物體所受沿管流出的水之壓力均相等。

此可由 § 53 及運動之第三律知之，因爲物體及水之互相壓迫，其力相等。

§ 55. 補題。 設管內之水爲靜止的，物體在其內以相等的速度運動，但方向相反，則其抵抗力亦相等。

此可由前節知之，因爲其相對運動無變動。

§ 56. 附註。 凡一切凸而圓的物體，其軸如與管之軸相合，其關係亦即如前所述。因摩擦之大小，亦可發生一些相差，但在這些補題方面，我們係假定物體爲全滑的，中介物之黏韌性及摩擦爲

零，對於水之通過管時有妨害的流體之部分本身間靜止着因而不發生影響，此如 § 52 內所已說過者。在以下的定理內，我們研究圓的物體所受之最小抵抗力，此項圓的物體係由旋轉所發生。

在流體內游泳而前進的物體，其作用能使在其前的流體舉起而在其後者則沉下，尤其是物體略帶扁形時即係如此。蓋物體之前後端帶扁形時，較之尖形時所受之抵抗力為大。倘流體有彈性而物體之兩端帶扁形，則其運動能使在其前之流體稠密，使其後者稀薄；所以較之兩端為尖時，所受之抵抗力亦較為大。在此處所提之補題及定理內，均係無彈性的流體，而且我們所論的物體，亦非浮在水面上而係浸入水內。既推得此項抵抗力後，如欲進而論有彈性的物體及空氣內之抵抗力時，必須將其放大，論靜水面上所浮之物體時，亦須放大。

§ 57. 定理。 一球在一被壓搾過的，無限的而且無彈性的中介物內作等速運動，則其抵抗力與

一力（此力於物體經過其徑之  $\frac{8}{3}$  的時間內能產生或消失其全運動）相比，很近似的如中介物之密度與球之密度相比。

蓋球與其外切圓柱體相比，如 2:3。所以能使圓柱體之運動消失的力（當圓柱體經過其軸之四倍的道路時，能使其運動消失），在球經過  $\frac{8}{3}$  徑的時間內亦能將球之運動完全消失。圓柱體之抵抗力與此力相比，很近似的如流體之密度與圓柱體之密度相比，而按 §§ 53, 54, 55, 球之抵抗力很近似的等於圓柱體之抵抗力。此即所欲證者。

系 1. 球在被壓榨過的無限的中介物內所受之抵抗力，其相比等於速度之平方，球徑之平方，中介物之密度三者相比之合。

系 2. 一球在有抵抗的中介物內因其相對重量而下降所可達到之最大速度，等於該球以該重量在無抵抗的中介物內自由下墜時經過一道路所可達到之速度，此道路與  $\frac{4}{3}$  徑相比，如球之密度與中介物之密度相比。

蓋在下墜的時間內球以其所可達到的速度作成一道路，此道路與  $\frac{2}{3}$  徑相比，如其密度與中介物之密度相比。又，重量之力，即產生運動之力與一力（此力於球經過  $\frac{2}{3}$  徑的時間內能產生該項全運動）相比，如中介物之密度與球之密度相比。從可知重量之力與抵抗力相等，故不能使球加速。

系 3. 倘在運動之開始時，球之密度及速度均為已知，中介物之密度亦為已知，球係在此中介物內運動。則按 §47 系 7 我們可求得任何時之速度，抵抗力及其所作之道路。

系 4. 一球在被壓榨過的，無限的，靜止的而且密度均勻的中介物內運動，則在經過與徑之二倍相等的道路以前，球已失去其運動之半。

此可由 §47 系 7 以知之。

§ 58. 定理。 一球在一被壓榨過的流體內作等速度運動，此流體係包在一管內，管作圓柱體形，則其所受之抵抗力與一力（此力於球經過  $\frac{2}{3}$  徑的時間內能產生或消失其全運動）相比，等於一複合

的比例，此比如下合成：

管之孔：此孔減去球上大圓之半；

管之孔之平方：此孔減去大圓之餘之平方。

中介物之密度：球之密度。

此定理之真理，可由 § 51 系 2 知之，其證明亦可如前節得之。

§ 59. 附註。 在以前數節內，凡在球前面的流體，能增加其所受之抵抗力者，我均視之為已結為固體。假如此項固體開始融化，則抵抗力必須放大，不過在此處所提之定理內，此項放大關係甚小，可略之不計。

§ 60. 問題。 一球在一被壓搾但很流動的中介物內運動，今試用實驗以求其抵抗力。

設球在真空內之重量為  $A$ ，其在中介物內之重量為  $B$ ， $D$  為其徑， $F$  為一長，此長與  $\frac{4}{3}D$  相比，如球之密度與中介物之密度相比，即， $F : \frac{4}{3}D = A : A - B$ 。

又設  $G$  為一時間，在此時間內，球以重量  $B$

下墜不受抵抗力時能經過道路  $F$ ，其所能達到之速度則為  $H$ ；如是，球在有抵抗的中介物內下墜時， $H$  為其所能達到的最大速度。物體以此項速度下墜時，其所受之抵抗力與  $B$  相等。但物體以他種速度下降時所受之抵抗力與  $B$  相比，則如該項速度與最大速度  $H$  相比之平方。此可由 § 57 系 1 知之。

此抵抗力之來源，由於流動的物質之惰性；其由彈性，黏韌性及摩擦等所發生之抵抗力則可以下法得之。

今將一球任其自然，則因其重量之作用，在流體內能下墜，其所須時間以  $P$  表之（以秒為單位），以前所用之時間  $G$ ，今亦以秒為單位作計算。又設  $N$  為一絕對數目字，其對數為

$$0,4342944819 \cdot \frac{2P}{G},$$

而  $\frac{N+1}{N}$  之對數則為  $L$ 。如是則下墜時所達到之速度為

$$\frac{N-1}{N+1} \cdot H,$$

而所作的高爲

$$\frac{2PF}{G} - 1,3862943611 \cdot F$$

$$+ 4,605170186 \cdot FL.$$

倘流體很深，則末項可略去不計，因而所作之高很近似的爲

$$\frac{2PF}{G} - 1,3862943611 \cdot F.$$

我們祇須假定物體所受之抵抗力除由流動的物質之惰性外沒有其他來源，則此即可由本編 § 13 知之。倘尙有其他抵抗力，則下墜時間自須增加，而且由此項時間之增加，亦可推論得該項抵抗力之強。

爲求便利推算物體在真空內之下墜速度及所作道路起見，我作了一表列下。表內第一列，表下墜之時間，第二列表下墜內所能達到之速度，其最大速度  $H$  定爲

$$100000000.$$

第三列所表者為該時間內所作之道路， $2F$  為物體於  $G$  時間內以最大速度所作之道路，第四列為物體在該項時間內以最大速度所作之道路。此列內所列之數目字，為  $\frac{2P}{G}$  之值，倘由此減去

$$1,3862944 - 4,6051702 \cdot L$$

後，即得第三列內之數目。

此外，我尚有一第五列列入，其中所包為在該項時間內物體所作之道路，惟係在真空內因其相對重量  $B$  之作用而下墜時所作者。

時間 $P$	在流體內下墜的物體之速度 $\frac{N-1}{N+1}H$	在流體內下墜時所作之道路 $\frac{2PF}{G} - 1,386 \cdot F + 4,605 \times LF$	最大運動所作之道路 $\frac{2PF}{G}$	真空內下墜時所作之道路 $F \cdot \frac{P^2}{G^2}$
0,001G	99999,58	0,0000001 $\times F$	0,002 $\cdot F$	0,000001 $\cdot F$
0,01 G	999967,	0,0001 $\times F$	0,02 $\cdot F$	0,0001 $\cdot F$
0,1 G	9966799,	0,0099834 $\times F$	0,2 $\cdot F$	0,01 $\cdot F$
0,2 G	19737532,	0,0397361 $\times F$	0,4 $\cdot F$	0,04 $\cdot F$
0,3 G	29131261,	0,0886815 $\times F$	0,6 $\cdot F$	0,09 $\cdot F$

0,4	G37994893,	0,1559070 $\times F$	0 8	$\cdot F$	0,16	$\cdot F$
0,5	G 46211716,	0,2402290 $\times F$	1,0	$\cdot F$	0,25	$\cdot F$
0,6	G53704957,	0,3402706 $\times F$	1,2	$\cdot F$	0,36	$\cdot F$
0,7	G60436778,	0,45 5405 $\times F$	1,4	$\cdot F$	0,49	$\cdot F$
0,8	G66103677,	0 5815071 $\times F$	1,6	$\cdot F$	0,64	$\cdot F$
0,9	G71629787,	0,7196609 $\times F$	1,8	$\cdot F$	0,81	$\cdot F$
1,	G76159416,	0,8675617 $\times F$	2,	$\cdot F$	1,	$\cdot F$
2,	G96402758,	2,6500055 $\times F$	4,	$\cdot F$	4,	$\cdot F$
3,	G99505475,	4,6186570 $\times F$	6,	$\cdot F$	9,	$\cdot F$
4,	G99932930,	6,6143765 $\times F$	8,	$\cdot F$	16,	$\cdot F$
5,	G99990920,	8,6137964 $\times F$	10,	$\cdot F$	25,	$\cdot F$
6,	G99998771,	10,6137179 $\times F$	12,	$\cdot F$	36,	$\cdot F$
7,	G9999834,	12,6137073 $\times F$	14,	$\cdot F$	49,	$\cdot F$
8,	G9999980,	14,6137059 $\times F$	16,	$\cdot F$	64,	$\cdot F$
9,	G9999997,	16,6137057 $\times F$	18,	$\cdot F$	81,	$\cdot F$
10,	G9999999,6	18,6137056 $\times F$	20,	$\cdot F$	100,	$\cdot F$

§ 61. 附註。 爲方使用試驗以測定流體之抵抗力計,我曾作了一個四角形的木器,其內部長 9 英寸,寬亦 9 英寸,深  $9\frac{1}{2}$  英尺,其中盛以雨水。於是

用蠟製成爲球，其內嵌有鉛，使其由 112 英寸高下墜，詳記其所須之時間。

一立方英尺雨水重 76 羅馬磅，一立方英寸雨水重  $\frac{19}{36}$  盎司 =  $253\frac{1}{3}$  *Gran*。一個徑爲一英寸的球在空氣中重 132,645 *Gran*，或，在真空內重 132,8 *Gran*；一其他任何的球與其真空中及水中之重量之差相比。

第一試驗。 一球，在空氣內之重量爲  $156\frac{1}{4}$  *Gran*，在水內重 77*Gran*，由 112 英寸高下墜，須 4 秒鐘。經重覆試驗後，所得結果仍是如此。

球在真空內之重量爲  $156\frac{13}{38}$  *Gr*，較其水內之重量超過  $79\frac{13}{38}$  *Gr*，由此，則即可求得徑之長爲 0,84224 英寸。此超過的重量，與真空內球之重量相比，如 水之密度與球之密度相比；徑之  $\frac{8}{3}$  與  $2F$  相比，亦是如此，因而  $2F=4,4256$  英寸。在真空內因其重量  $156\frac{13}{38}$  *Gr* 之力而下墜時，球於一秒鐘內可經過  $193\frac{1}{3}$  英寸，水內之重量 77*Gr* 其力能使

球於同時間內在水中經過 95,219 英寸，但須不受其他抵抗力。今設  $G$  為一時間，與 1 秒相比，等於  $\sqrt{F} : \sqrt{95,219}$ ，則在此時間內，球經過  $F=2,2128$  英寸，其所能達到之速度為  $H$ ，此速度亦即為球在水內下墜時所可達之最大速度。但  $G=0,15244$  秒，在此時間內球以最大的速度運動時能經過  $2F=4,4256$ ，故在 4 秒鐘內能經過 116,1245 英寸。今由此數目上減去  $1,3862944 \cdot F=3,0676$ ，則餘 113,0569 英寸，此即為球在盛有水的大器皿內下墜時於四秒鐘內所可經過之道路。因器皿之寬甚有限，故此道路之長又必須減小，其比為 1:0,9914。

既減小此後，即得一道路 112,08 英寸，按理論上之推測，球於四秒鐘內很近似的經過此路。在試驗上，我測得所經過之道路為 112 英寸。

第二試驗。有三個相等的球，在空氣中的重量為  $76\frac{1}{3}Gr$ ，在水中則為  $5\frac{1}{16}Gr$ ，今將其繼續的一一放於水中，下墜時在 15 秒鐘內能經過 112 英寸。今就實際上計算之，則可知球在真空內之重

量爲  $76\frac{5}{12}Gr$ ，後者超過其水內之重量爲  $71\frac{17}{48}Gr$ ，於是可知球之徑爲 0,81296 英寸，其  $\frac{1}{g}$  爲 2,16789，而  $2F=2,3217$ 。下墜的球在一秒鐘內所作之道路，爲 12,808 英寸，但須不受若何其他抵抗力，僅以其重量與  $5\frac{1}{16}Gr$  下墜； $G$  則爲 0,301056 秒。

如是，球以最大的速度運動時，在水內以其重量  $5\frac{1}{16}Gr$  於 0,301056 秒內能下降經過 2,3217 英寸，而以此相同的速度在 15 秒內能經過 115,678 英寸。今由此減去  $1,3862944 \cdot F=1,609$  英寸，則尚餘 114,069；此即爲球於同時間內在較大的器皿中所能經過者。但因我們所用器皿之寬有限，故必再減去 0,895 英寸，所餘 113,174 英寸，即爲球於 15 秒鐘內按理論上之推測所可作者。但在試驗上，所得爲 112 英寸，故其差亦不算大。

第三試驗。有三個相等的球，其在空氣內之重量爲  $121Gr$ ，在水內則爲  $1Gr$ ，今將其陸續放任之，在水內下墜時所作之道路爲 112 英寸，其所

需時間爲 46,47,50, 秒。

按之理論,其所須時間當爲 40 秒;但事實上卻超過此數,其故何在?或者其原因在此,因爲在速度較小的運動方面,由惰性力所發生之抵抗作用與由其他原因所發生者相比,其比例較小.或者因球上附着有氣泡,致使其運動之速度減小;或則因蠟受手之熱或空氣之熱而稀薄所致,或則當球浸入水時發生其他不能注意到的差失所致.我不知道這些原因中何者是其真的原因,但由這個試驗內,無論如何可知在此項試驗方面,球之重量必須較大.乃能有較可靠的結果.

第四試驗. 以上諸試驗,用以尋求流體之抵抗力者,我在未知上所述的理論之前早即做過.是後,我又作了一木箱,其寬  $8\frac{3}{4}$  英寸,深  $15\frac{1}{2}$  英尺,並作 4 球,內實以鉛,外面包有蠟.在空氣內此項球之重量爲  $139\frac{1}{4}Gr$ , 在水內爲  $7\frac{1}{8}Gr$ , 當此項球在水內下墜時,我用一半秒的擺錘鐘以測其時間.當我將其放下水時,我已將此項球冷卻許多時

候，因為熱能使蠟稀薄，因而減輕其水內之重量，而且因熱而稀薄時，亦不能立即恢復其密度，故我須將其冷卻許多時候。我先將球完全浸入水內，然後放之使下，其原因則恐未浸入水之部分能於開始時加速球之運動。但浸入水內後我仍細心的將其放下，俾手不致發生加速的影響。如是，在  $47\frac{1}{2}$ ， $48\frac{1}{2}$ ，50 及 51 振動的時間內，球經過 15 英尺 2 英寸。以後，在氣候較寒時，我又重復作過試驗，其所須時間為 49， $49\frac{1}{2}$ ，50 及 53；其後再作一次試驗，得  $49\frac{1}{2}$ ，50，51，53。如是屢作重復的試驗後，結果得  $49\frac{1}{2}$  及 50 為最多的次數。

今按理論計算之，則知真空內球之重為  $139\frac{2}{5}$  Gr，徑為 0,99868 英寸，故其  $\frac{8}{9}$  為 2,06315 英寸。 $2F$  於此為 2,8066 英寸，而  $7\frac{1}{8}$  Gr 重的球不受抵抗力而下墜時在 1 秒內所能作之道路為 9,88164 英寸， $G$  為 0,376843 秒。所以球以最大速度因其重量之力在水內下墜時，於 0,376843 秒時間內能作 2,8063 英寸道路，而以此速度在一秒鐘

內能經過 7,44766 英寸，在 25 秒鐘內，能經過 186,1915 英寸。今將  $1,386294 \cdot F = 1,9454$  由此減去，所餘 184,2461 英寸即為球在該時間內於一很廣的器皿內所能作之道路。

因為我所用的器皿很小，故必須將所得者減小，於是可得 181,86 英寸，為球於 25 秒鐘內在器皿內所經過之道路。在實驗上，所得者為 182 英寸，其時間為  $49\frac{1}{2}$  及 50 振動，即 25 秒稍差及 25 秒。

第五試驗。用四個球，在空氣內之重量為  $154\frac{3}{8}$  Gr，在水內為  $21\frac{1}{2}$  Gr，經幾次放下後，其所作道路為 15 英尺 2 英寸，其所須時間為  $28\frac{1}{2}$ , 29,  $29\frac{1}{2}$ , 30，有時為 31, 32, 33 振動。

按之理論，所須時間當為 29 振動。

第六試驗。用五個球，空氣內之重量為  $212\frac{3}{8}$ ，水內為  $79\frac{1}{2}$  Gr。經重復試驗幾次後，測得所作之道路為 15 英尺 2 英寸，其所須時間為 15,  $15\frac{1}{2}$ , 16, 17, 18，次振動。

按之理論當爲 15.

第七試驗。四個球。空氣內之重量爲  $293\frac{3}{8}$ , 水內爲  $35\frac{7}{8}Gr$ , 經幾次試驗後, 所得道路爲 15 英尺 1,5 英寸, 時間爲  $29\frac{1}{2}$ , 30,  $30\frac{1}{2}$ , 31, 32, 33, 振動。

按之理論當爲 28.

這些試驗中所用之球均相等, 重量及大小亦均等, 但下墜時有的較速, 有的較遲, 我於是推求其原因, 而得以下之結果。

當我將球放下時, 此項球能按中心旋轉, 因爲其各部分面中有的較重故能發生旋轉的影響。球即旋轉, 則旋轉時對於水所傳給之運動自較不旋轉而下降爲多, 因之旋轉的球, 自必多失去其下降之運動, 而有速度減小之事實發生。同時, 球又有離開其旋轉的部分之傾向而與器皿之壁相接近, 於是運動受阻礙, 有時並能與壁相撞。在較重的球方面, 旋轉亦較爲大, 所以對於水所傳出之運動亦較多。爲救濟此項差失計, 我另作了些新的球, 此項球亦由蠟與鉛所成, 但鉛不在球之中心, 而靠近

其一面。當我將球在水內放下時，我將其含有鉛的一面按在最下面，使其不能發生旋轉作用。如是所得結果較前為佳，其下墜時間不若前此之相差了。以下諸試驗內，可見到此。

第八試驗。四個球，空氣中之重量為  $139Gr$ ，水中之重量為  $6\frac{1}{2}Gr$ ，經幾次重復試驗後，知所經過之道路為 182 英寸，其所需時間為 50 至 52 次振動，最多的為 51 次。

按之理論當為 52 次。

第九試驗。四個球，其空氣內之重量為  $273\frac{1}{4}Gr$ ，水內之重量為  $140\frac{3}{8}Gr$ ，經幾次重復試驗後，得所經過之高為 182 英寸，所需時間為 12 至 13 次振動。

按之理論當為  $11\frac{1}{3}$  次。

第十試驗。四個球，空氣內之重量為  $384Gr$ ，水內之重量為  $119\frac{1}{2}Gr$ ，經過  $181\frac{1}{4}$  英寸時，其所須時間為  $17\frac{3}{4}$ , 18,  $18\frac{1}{2}$ , 19 次振動。在這些試驗方面有時有若干球與器皿之壁相遇，此為我所

聽到者。

按之理論當爲  $15\frac{5}{8}$  次振動。

第十一試驗。三個球，其空氣內之重爲  $48Gr$ ，在水內爲  $3\frac{29}{32}Gr$ ，經過之高爲  $182\frac{1}{2}$  英寸，所須時間爲  $43\frac{1}{2}$ ,  $44$ ,  $44\frac{1}{2}$ ,  $45$ ,  $46$  振動。

按之理論當爲  $46\frac{5}{8}$  振動。

第十二試驗。三個球，空氣內之重爲  $141Gr$ ，水內重  $4\frac{3}{8}Gr$ ，經幾次試驗後，所須時間爲  $61$ ,  $62$ ,  $63$ ,  $64$ ,  $65$  振動，其高爲  $182$  英寸。

按之理論當爲  $64\frac{1}{2}$  振動。

由這些試驗中可知球之下墜速度如不大，例如  $2$ ,  $4$ ,  $5$ ,  $8$ ,  $11$ ,  $12$ ，諸試驗，則其下墜時間頗能與理論上所要求者相一致；但如下墜速度大，如在  $6$ ,  $9$ ,  $10$  諸試驗內，則其所受抵抗力亦較大，超過速度之平方的比例。蓋球在下墜時，微有振動，在較輕的球方面，此項振動易消失，但如較大而較重的球方面，此項振動所歷之時間較長。但有時亦能因球之速度大，故水對於其後部之壓力減小，倘將速

度繼續增加，則結果球之後部可留出一真空的地位；除非我們同時於後部增加壓力，此項真空部分即能產生。我們必須使壓力以速度之平方增加，乃能使抵抗力恆與速度之平方相比。但事實上，壓力不能隨速度之平方而增加，故速度較大的球之後部所受壓力必較小，結果使其所受之抵抗力大於速度之平方的比例。

從可知理論與現象並無不合之處。在水內下墜的物體方面已可證明了。我們要進而研究空氣內下墜的物體方面發生之現象。

第十三試驗。一七一〇年六月，有人於倫敦自聖保羅教堂之頂同時放下二玻璃球，其一盛以水銀，其他則為空氣所滿。在這下墜內，其所經過之道路為 220 英尺。當時係用一木板，其一邊用鐵釘釘牢，其他邊則裝在一木栓上。二球先置於板上，然後將木栓由一引至地的鐵線抽去，因而板即翻轉，而二球同時向地下來。在抽去木栓時，同時能使一擺錘鐘振動，故可確知其所須時間。所得一

切列表如下：

水 銀 球			空 氣 球		
重量	徑	下墜時間	重量	徑	下墜時間
908Gr.	0,8 英寸	4 秒	510Gr.	5,1 英寸	8½ 秒
983Gr.	0,8 英寸	4- 秒	642Gr.	5,2 英寸	8 秒
866Gr.	0,8 英寸	4 秒	599Gr.	5,1 英寸	8 秒
747Gr.	0,75 英寸	4+ 秒	515Gr.	5,0 英寸	8¼ 秒
808Gr.	0,75 英寸	4 秒	483Gr.	5,0 英寸	8½ 秒
784Gr.	0,75 英寸	4+ 秒	641Gr.	5,2 英寸	8 秒

此項試驗方面所觀察到的時間，必須加以修正。按葛里雷所得結果，水銀球於 4 秒內能經過 257 英尺，倘經過 220 英尺，祇須  $3\frac{42}{60}$  秒。因之，可知板翻轉與抽去栓之中間，或須一些時間，因而下墜時間被增加了。球原係置在板之中間，離栓稍遠；所以下墜時增加了  $\frac{18}{60}$  秒；我們必須將此數減去方得確數。

此項修正在大的球方面尤為重要，因為球徑

既大，所以增加的時間亦多，必須減去方能用。經修正後，所得六個較大的球之下墜時間如下：

$$8 \text{ 秒又 } \frac{12}{60}$$

$$7 \text{ 秒又 } \frac{42}{60}$$

$$7 \text{ 秒又 } \frac{42}{60}$$

$$7 \text{ 秒又 } \frac{57}{60}$$

$$8 \text{ 秒又 } \frac{12}{60}$$

$$7 \text{ 秒又 } \frac{42}{60}$$

第五個空氣球之徑為 5 英寸，其重為 483Gr，須  $8\frac{12}{60}$  秒時間乃能經過 220 英尺。與此相等的水球，其重為 16600Gr，在真空內該球之重為  $483 + 19\frac{3}{10} = 502,3Gr$ ，與同容積的空氣之量相比，如  $502,3 : 19,3$ 。2F 與徑之  $\frac{5}{8}$  相比，亦是如此，或即是

$$2F : 13\frac{1}{2} = 502,3 : 19,3,$$

而由此，即可知  $2F = 28$  英尺 11 英寸。此球以其 502,3Gr 的重量在真空內下墜時，一秒時間能經

過  $193\frac{1}{3}$  英寸，以  $483Gr$  重量於一秒內能經過 185,905 英寸。

在真空中經過  $F=14$  英尺 5,5 英寸所須之時間為  $\frac{58}{60}$  秒，而在此時間內所達到之速度，為空氣內下墜時所能有之最大速度。用此速度時，球於  $8\frac{12}{60}$  秒內能經過 245 英尺  $5\frac{1}{3}$  英寸。今由此減去  $1,3863 \cdot F=20$  英尺 0,5 英寸。尚餘 225 英尺 5 英寸，即為理論上球所當經過的道路。但按之試驗，所經過為 220 英尺，所以相差不為很遠。將各球均計算後，可得一表如下。

球之重量	球之徑	經過120英尺所須時間	理論上所當經過之道路	理論與觀察上所得結果之差
510Gr.	5,1 英寸	$8\frac{12}{60}$ 秒	226 英尺 11 英寸	6 英尺 11 英寸
642Gr.	5,2 英寸	$7\frac{42}{60}$ 秒	230 英尺 9 英寸	10 英尺 9 英寸
599Gr.	5,1 英寸	$7\frac{42}{60}$ 秒	227 英尺 10 英寸	7 英尺 10 英寸
515Gr.	5,0 英寸	$7\frac{57}{60}$ 秒	224 英尺 5 英寸	4 英尺 5 英寸
483Gr.	5,0 英寸	$8\frac{12}{60}$ 秒	225 英尺 5 英寸	5 英尺 5 英寸
641Gr.	5,2 英寸	$7\frac{42}{60}$ 秒	230 英尺 7 英寸	10 英尺 7 英寸

第十四試驗。 一七一九年六月德桑久利 (*Desaguliers*) 將此項試驗重復試過幾道。他用某種薄膜製成爲球形，先用空的木球包於其外，將薄膜球潤溼，灌入空氣，使其裝滿，於是待其乾，將包於其外之木球取去，使其由一固定的處所下墜，此處所係在一教堂之頂上。如是，此球由 272 英尺之高下墜；同時，尚有數鉛球亦由該處下墜。在教堂之頂上放下墜球之處所，有人在那裏觀察下墜的時間。同時，並有人專門觀察鉛球與薄膜球二者之下墜時間之差。此項差係用一半秒的擺鍾鐘之鳴以量之。在底下有一人持有一能計四分之一秒的時計，另外尚有一人用一機器，其上連有一四分之一秒的擺鍾鐘。在上的一人亦有同樣的器具。此項機器能隨人所欲立即開始運動或終止。如是，測得鉛球之下墜時間約爲  $4\frac{1}{4}$  秒；加上前所述之差後，即可得薄膜球所需之下墜時間。如是，五個薄膜球之下墜時間，超過鉛球之時間，爲：

$$\text{第一次試驗} \quad 14\frac{3}{4}, 12\frac{3}{4}, 14\frac{5}{8}.$$

$$17\frac{3}{4}, 16\frac{7}{8} \text{ 秒,}$$

第二次試驗  $14\frac{1}{2}, 14\frac{1}{4}, 14,$

$$19, 16\frac{3}{4} \text{ 秒.}$$

再加上鉛球之下墜時間  $4\frac{1}{4}$  秒, 即得薄膜球

之下墜時間爲:

第一次試驗  $19, 17, 18\frac{7}{8},$

$$22, 21\frac{1}{8} \text{ 秒,}$$

第二次試驗  $18\frac{3}{4}, 18\frac{1}{2}, 18\frac{1}{4},$

$$23\frac{1}{4}, 21 \text{ 秒.}$$

在上的人所觀察到的時間爲:

第一次試驗  $19\frac{3}{8}, 17\frac{1}{4}, 18\frac{3}{4},$

$$22\frac{1}{8}, 21\frac{5}{8} \text{ 秒,}$$

第二次試驗  $19, 18\frac{5}{8}, 18\frac{3}{8},$

$$24, 21\frac{1}{4} \text{ 秒.}$$

不過薄膜球下墜時，並不恆循直線道路，有時彎曲，有時並旋轉，因而其下墜時間常常增加了  $\frac{1}{2}$  秒乃至 1 秒。在第一次試驗方面，第二與第四球較能循直線，在第二次試驗方面，第一與第三較循直線。第五球較為不定，因而其下墜時間亦即增加。至於球之徑，則我用一線量其週以推得。在以下之表內，我將理論上所推得與經驗上所測得者相較；於此，空氣之密度與雨水之密度相比，我假定其為 1 : 860，如是我求得的結果如下。

薄膜球之重量	薄膜球之徑	下墜經過 272 英尺之時間	在此時間內按照理論所當經過之道路	理論上所推得與觀察上所測得二者之差
128 Gr.	5,28 英寸	19 秒	271 英尺 11 英寸	-0 英尺 1 英寸
156 Gr.	5,19 英寸	17 秒	272 英尺 0,5 英寸	+0 英尺 0,5 英寸
173½ Gr.	5,3 英寸	18½ 秒	272 英尺 7, 英寸	+0 英尺 7, 英寸
97½ Gr.	5,26 英寸	22 秒	277 英尺 4, 英寸	+5 英尺 4, 英寸
99½ Gr.	5,0 英寸	22½ 秒	282 英尺 0 英寸	+10 英尺 0 英寸

從可知我們的理論，差不多可以決定水內及空氣內球運動時之全部抵抗力；倘球之速度及大

小均相等，則此項抵抗力與流體之密度相比。在第六章之附註內，我曾用擺錘試驗指出過，相等的球以相等的速度在空氣，水及水銀內運動時，其所受抵抗力與流體之密度相比。在這裏，我已用物體在空氣及水內之下墜以準確的試驗過了。擺錘之每個振動於流體內引起一運動，此運動之方向恆與返回來時的擺錘方向相反；由此項運動所發生之抵抗力以及擺錘之線所受之抵抗力均能使擺錘所受之抵抗力較之在下墜物體方面所觀察到者為大。按上述的附註內所敘之擺錘試驗，倘物體之密度與水之密度相等，則當其在空氣內經過一等於其半徑之道路時，即失去其運動之  $\frac{1}{3342}$ 。但按本章內之理論，其所失去之運動當為  $\frac{1}{4586}$ ；不過在這裏，我們係假定水之密度與空氣之密度相比，如 860:1。從可知擺錘試驗方面所得之抵抗力較之下墜試驗方面所得者為大，其比為 4:3，其理由則上已說明了。但擺錘在空氣內，水內及水銀內振動時

所受之抵抗力，以同樣的方法為同樣的原因所增加，故此項抵抗力之比可以準確至相當程度；此可由擺錘試驗及下墜物體之試驗以知之。我們可以得一個結論，即，物體在稀薄的中介物內運動時，其所受抵抗力，在尋常狀況下，與中介物之密度相比。既得此後，即可推知，將任何種類之球在任何流體內拋出時，其所失去的運動之部分為何如。

今設  $D$  為球之徑， $V$  為開始時之速度， $T$  為一時間，在此時間內球以  $V$  在真空內運動時所作之道路與  $\frac{3}{8}D$  相比，如球之密度與中介物之密度相比。今將球於流體內拋出，則在任何時間  $t$  內，其所失之速度為  $\frac{tV}{T+t}$ ，其所餘下之部分為  $\frac{TV}{T+t}$ ，而其所作之道路，與其在真空內於此時間中以速度  $V$  所作之道路相比，如

$$2,302585093 \log. \frac{T+t}{T} : \frac{t}{T}.$$

倘運動之速度較小，則所受抵抗力亦可較小，因為在此狀況下球狀的物體較之圓柱狀的物體之

運動較為方便，但如速度較大則抵抗力亦可較大，因為流體之彈性及壓榨不能隨速度之平方而增加，不過這些比較上都是小事，我們可不論。

倘將空氣，水，水銀等流體稀薄至於無限，因而成為流動性無限的中介物，則其對於拋出的球之抵抗力仍不能多所減小。蓋以上所說的抵抗力，係由物質之惰性所發生，此項惰性為物質所固有，與物質之量恆相比。不過由黏韌性及部分間之摩擦所產生的抵抗力則可減小一些；此項減小不能影響物質之量，所以其惰性力亦不能減小而上所述之抵抗力仍不變。欲使此項抵抗力減小，必須減少空間內物質之量。由此看來，在天空內向各方向可以自由運動的星球，既無速度減小之現象，則天空中當沒有物質性的流體存在；至於極稀薄的星氣及光線，自然沒有計算在內。

從可知物體於流體內運動時，能引起流體之運動；此項運動之來源，由於流體對於物體前部之壓力超過物體本身之後部所受之壓力。就其與物

---

質之密度爲比而論，稀薄的流體內之此項現象，不能較之空氣，水，水銀內爲少。此項壓力之超過，不僅能發生流體內之運動，兼能使物體之速度減小。所以任何流體內之抵抗力與由物體所引起的運動相比；雖然以太爲極稀薄的體，但就其密度之比而言，亦不能使其抵抗力特小於空氣，水，水銀等流體。

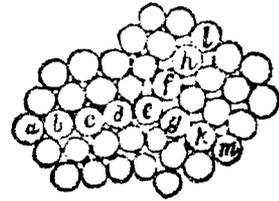
## 第八章

### 論流體內之傳達運動

§ 62. 定理。 壓力在流體內傳布時，祇有流體之部分在一直線上，乃能使其成爲直線的。

今設  $a, b, c, d, e$  諸部分在一直線上，則壓力可由  $a$  傳至於  $e$ ，但在其斜方向內之部分  $f$  及  $g$  亦能被  $e$  所斜推動，前者亦必

將其所受之壓力傳至於其前的部分  $h$  及  $k$ ，因爲必須如是， $f$  與  $g$  乃能忍受其所受之壓力。 $h$  與  $k$  又必須傳其



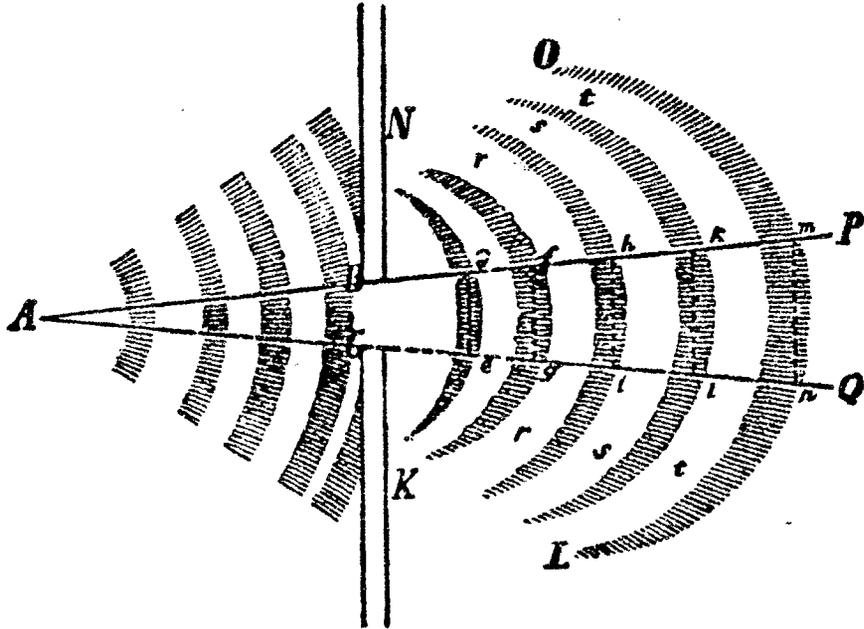
第一八〇圖

所受之壓力至  $l, m$  二部分乃能忍受其本身所受之壓力，等等，以至於無限。如是，壓力傳至不在直線上的部分時，必分散向斜方向傳出，以至於無限。此項斜方向內之壓力又復分散傳至各斜方向；如

是可儘分散下去。此即所欲證者。

系。 倘有由已知點出發在流體內傳布的壓力之一部分，爲一障礙物所阻，則其未被阻的部分即在障礙物外面之空間內傳布。此可如下明之。

今設壓力由  $A$  點傳布，並沿一直線。設  $NBCK$  爲一障礙物，中有一孔  $BC$ ；壓力至此障礙物即被阻，其通過  $BC$  孔之部分，則以圓錐體形仍向外傳



第一八一圖

布，此形爲  $APQ$ 。今用  $de, fg, hi$ ，等諸平面將此圓錐形分割成爲諸段；如是則  $ABC$  圓錐形因壓力

之前進能對於  $degf$  圓錐形部分之面  $de$  施壓力，此圓錐部分重復對於其前的  $fgih$  部分之  $fg$  面施壓力，等等，以至於無限。按運動第三律， $degf$  之另一面  $fg$  亦被  $fgih$  部分所壓，與其本身之壓後者相等。所以在  $Ade$  及  $fgih$  中間之  $degf$ ，兩面俱受壓迫，故祇有各方面所來的壓力相等，乃能保持其形狀不變。因之，該部分向  $df$  及  $eg$  兩面之擴張力，與  $de$  及  $fg$  兩面所受之壓力同其強，倘該兩面沒有流體將其抵住，則該部分即會向該兩面推出。如是，該部分對於  $df$  及  $eg$  兩面外之流體必施以一種壓力，此壓力與  $fgih$  所受者相等。所以由  $df$  及  $eg$  兩面所傳出之壓力，向  $NO$  及  $KL$  二空間傳布時，不能較之由  $fg$  面向  $PQ$  傳出時為弱。此即所欲證者。

§ 63. 定理。 在流體內能傳布的運動，恆出離其直線的道路而向不動的空間。

第一事。設運動由  $A$  點傳出（圖 181），經  $BC$  孔而入於  $BCQP$  錐形空間仍循直線進行，此

項直線係以  $A$  爲心散發出去。我們現在假定，此項運動係靜水面上之波形運動。今如  $de, fg, hi, kl$  等等爲各波之最高處，其間有凹處將其隔開。因爲水在波之凸起處較高，故水必由此項凸起之兩端  $e, g, i, l$  以及  $d, f, h, k$  等等諸點向低處  $KL$  及  $NO$  流動。又因波中間之凹處較  $KL, NO$  部分更低，故後者處之水亦向前者處流動。由第一種運動，凸處之水向兩旁流動，而由第二種運動則凹處亦向兩旁擴充，故均能與  $KL$  及  $NO$  相傳達。同時，由  $A$  向  $PQ$  之波運動，使每一凸起的水向前推進入於其前的凹處，其速度自不能超過下降的速度。又因兩旁的水向  $KL$  及  $NO$  下流，其速度亦必如是，故波之向  $KL$  及  $NO$  推進，其速度與由  $A$  向  $PQ$  直線進行的速度相等。如是，兩旁的空間依次爲波  $rfgr, shis, tklt, vmnv$ ，等等所侵入。此即所欲證者。

此種關係，我們不難用試驗在靜水方面經驗到。

第二事。今設  $de, fg, hi, kl, mn,$  等等爲衝動，由  $A$  點在一有彈性的中介物內傳布出去。試設想此項衝動之傳布，在於中介物之緊縮及擴張，其最稠密之部分係在一球面上，此球面之中心點爲  $A$ ；二衝動間之相隔亦相等。今即用  $de, fg, hi, kl,$  等表此項最稠密之部分，係經過  $BC$  孔而傳出者。因爲中介物在此項處所較之在  $KL, NO$  空間方面爲密，故中介物必向此項處所推進，猶之向其中間之較稀薄處推進一樣。如是，稀薄的處所恆向稠密之處，稠密之處所則恆向稀薄的方面，故中介物即在此項運動中。但不斷的衝動之來源，係由於較密的部分恆向其中間較稀薄的部分推進而衝動之速度，在向  $KL, ON$  空間方面與此大約相等，故該項衝動之向  $KL, ON$  空間推進，其速度恆與由  $A$  出發前進之速度相等。因之，整個空間  $KLON$  可被侵入。此即所欲證者。

在聲浪方面，可以經驗到此項事實。蓋如聲浪由山後傳出或由窗戶傳入房內時，房內各處均可

聽到，不會被對窗的牆壁所反射回去，這是我們用官覺所可知道者。

第三事。今設有一任何種類之運動由  $A$  出發傳布經過  $BC$  孔。其傳達之方法，祇能由接近  $A$  之部分向其前面之部分壓迫，如是發生運動而傳出。又因被壓迫的部分能流動向受壓迫較少之面擴張，故此項部分必向  $KL, ON$  以及  $PQ$  各方向前進。因此，經過  $BC$  孔後，該項運動即開始擴張出去，猶如由開始點及中心點一樣的傳布，此即所欲證者。

§ 64. 定理。 凡顫動的物體，在有彈性的中介物內，其衝動的運動恆以直線向各方向散發；在無彈性的中介物內，能引起圓形的運動。

第一事。顫動的物體之各部分均交互的向前及後退，故能對於其近旁之中介物部分施以壓迫推動，因而使其緊縮，繼則復使其伸張。所以與顫動物體相接近的中介物之部分能交互的前進及後退，如顫動物體本身之顫動部分一樣，同時，並

將其此項運動再傳至其接近的部分等等，以至於無限。因為此種作用，故不獨與顫動的物體直接相接近的中介物之部分能發生一密一疏的交互狀況，而且此種運動能傳出去至中介物之較遠的部分。如是，顫動物體四周之中介物部分，不是同時前進或後退者（因為如果如此則不能發生一疏一密的狀況），而為交互的互相接近或疏遠，故其距離常變動，在密時較相接近，疏時即相離。換言之，即在一時候內，有若干部分前進，若干部分則後退。此種交互狀況可直傳至無限。前進而密的部分發生衝動的作用，此項衝動即由顫動物以直線傳達出去。因為物體顫動時，其發生衝動係在相距等久的時間內，故其傳達亦有等距的現象。雖然物體之顫動係有一定方向，但其在中介物內所傳出的衝動，按之前節，係向各方向傳出，故顫動體本身成爲一中心，而其傳達則循同心的球面散發出。

這個事實我們可用手指在水內之顫動以明之。我們可看到所發生的波，不僅在顫動的方向內，

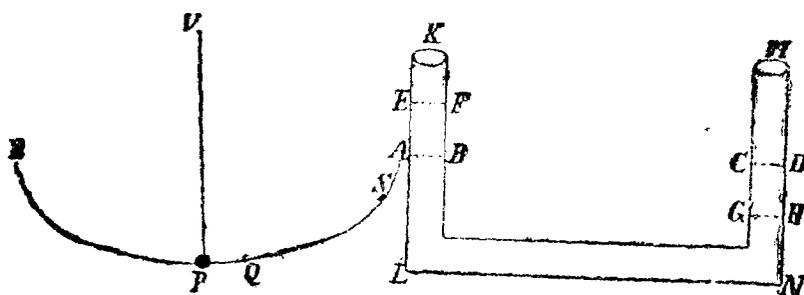
而且不久即傳至手指之四圍，以同心圓形圍着手指向各方向傳布出去。這裏，波之重代替了彈力。

第二事。設中介物無有彈性，則爲顫動物體之部分所壓的中介物之部分不能緊縮而稠密，所以運動即向中介物最易退讓的一面傳出，即是，向顫動物體一時力所不及之處。將一物體在一任何中介物內拋出時，其狀況亦是如此。在物體之前的中介物固被壓而退讓，但並不能退至於無限，而以圓形運動侵入物體之留下的空間。故不論顫動的物體向何方向運動，但退讓出來的中介物恆侵入物體所遺下之空間，而作圓形的運動，倘物體仍返其原處，則中介物仍即讓出而亦返其原處。顫動的物體雖不必爲全固的，而可有韌性，但其大小並不會因此而有改變，因爲他的顫動並不能對於其周圍之中介物施以緊縮作用，僅能使其退讓而已。所以其結果，則使中介物讓出其處所而侵入物體所遺下之空間。此即所欲證者。

系。所以好多人相信火焰之部分能發生壓力。

此項壓力並可藉中介物之力以直線傳出，這實在是無稽之想。倘有此項壓力，則必非由火焰之部分所發生，而當由火焰全部之擴張以求之。

§ 65. 定理。今設水在一管之兩旁垂直的股  $KL, MN$  內上下運動，今試作一擺錘，其懸點與振



第一八二圖

動點間之距離等於管內水長之半。如是則水上下運動之時間，等於擺錘左右擺之時間。

我量水之長，係沿管之軸及其股，並設其與該項軸之和相等。水與管壁相摩擦而發生之抵抗力，我姑且不計算。今設  $AB$  與  $CD$  為水在股內所達之平均高；當  $KL$  內水昇至  $EF$  高時， $MN$  內水即降至  $GH$ 。又設  $P$  為擺錘之錘， $VP$  為其線，

$V$  爲懸點， $SQPR$  爲擺錘所作之擺線，其最低點在  $P$ ，而  $PQ$  弧則等於  $AE$  高。使水之運動交互的增加及減少的力，卽爲一股內水之重量超出他股內水之重量之餘重。所以  $KL$  內水如昇至  $EF$  而  $MN$  內水降至  $GH$ ，則該項力等於  $EABF$  水重之倍，故其與全部水重相比，如  $EA:VP$ ，或如  $PQ:PR$ 。又，能使重量  $P$  於  $Q$  點被加速或遲緩的力與其全重量相比，如  $PQ$  與  $PR$  相比。因之，水與擺錘之運動的力（能作成相等的道路  $AE$  及  $PQ$ ）與運動的重量相比。倘水與擺錘在開始時靜止着，則此項力之作用，能使二者在相等的時間內作相等的運動，而且同時前進及後退。此卽所欲證者。

系 1. 不問其運動之強弱如何，水之交互的上升下降有等時性。

系 2. 設管內水之長爲  $6\frac{1}{8}Par.$  尺，則水在一秒鐘內下降，其上升時間亦如之，以至於無限。從可知長爲  $3\frac{1}{8}$  尺的擺錘，其振動時間爲一秒。

系 3. 設水之長增加或減小，則此項交互運動

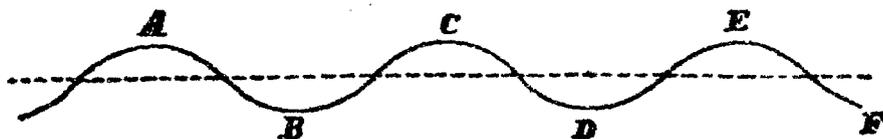
之時間亦增加或減小，其比為長之平方根。

§ 66. 定理。 波之速度與其寬之平方根相比。

此可由下節知之。

§ 67. 問題。 試求波之速度。

試作一擺錘，其懸點及振動點間之距離與波之寬相等，如是則波經過其寬所須之時間，很近似



第一八三圖

的等於該擺錘完成一次振動所須之時間。

所謂波之寬，係指波方面二凹處或二凸處之最低或最高點間之距離。今如  $ABCDEF$  為靜水之面，此面經相繼的波動而成為起伏；設  $A, C, E$  等為凸點， $B, D, F$  等為波之凹處。因為波之運動是在於水之起伏，故其  $A, C, E$  諸點一時雖為最高點，但以後則又成為最低點；又因使水起伏的運動力，能使高點降為最低，最低點昇至最高者，實為

所起來的水之重量，故此項起伏，亦即與水管中交互運動之狀況相似，其關於時間之定律亦相同。所以倘最高點間之距離及最低點間之距離等於擺錘長之倍，則在一振動的時間內，最高點即轉而成爲最低點，在第二振動的時間以後，復又上昇爲最高點。故一波之傳達時間，爲二次振動，此即是說，擺錘之二次振動時間，等於波經過其寬所須之時間。所以倘擺錘之長等於波之寬，則在此時間內擺錘作一次振動，

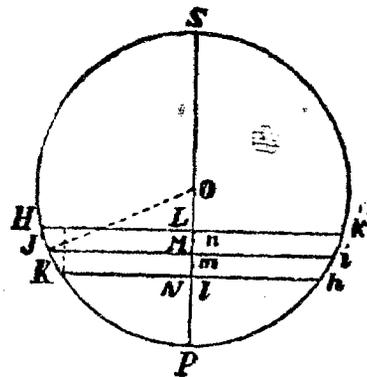
系 1. 所以  $3\frac{1}{18}$  尺 (*Par.*) 寬的波，經過其寬所須之時間爲一秒鐘。在一分鐘內，所經過者約  $183\frac{1}{3}$  尺，一點鐘所經過者約爲 11000 尺。

系 2. 大或小的波之速度，其增加或減小與其寬之平方根相比。這裏，我們假定水之部分以直線上昇或下降；這可說與事實不甚相符，因爲實際上其所經道路爲圓弧，所以這裏所得之結果，祇能視爲近似的。

§ 68. 定理. 倘衝動力在流體內傳布，則流體

之各部分以最短的交互運動前進及後退，而且其加速及遲緩，恆按照擺錘振動之定律。

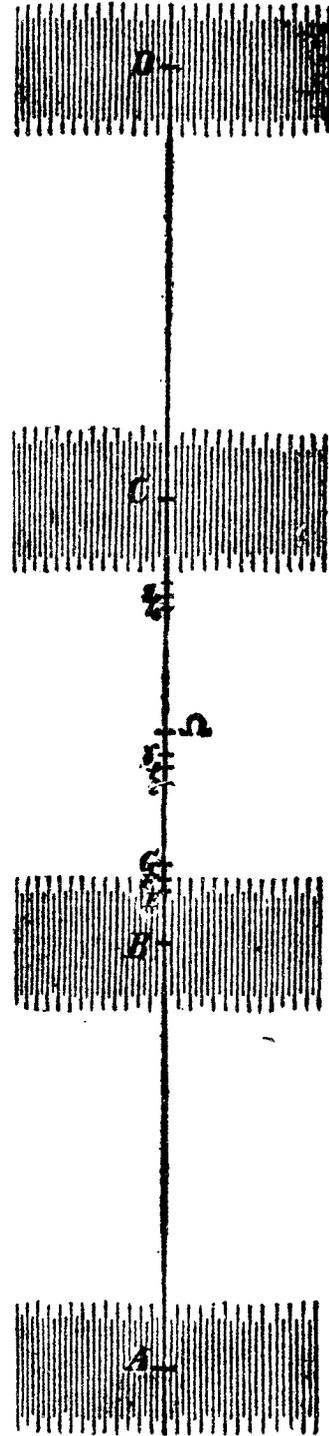
今設  $AB, BC, CD$  等等為相繼的諸衝動力間之距離， $ABC$  為其進行的方向， $E, F, G$  為三個中介物內之物理的點，中介物係靜止着，而此三點則以等距分配在  $AC$  線上。又設  $Ee, Ff, Gg$  為極短而相等的道路，該項點作交互運動時，其後退及前進須經過之； $\epsilon, \varphi, \gamma$  則為任意的處在其間的三點， $EF, FG$  為物理的線，或中介物之線的部分，亦在該項點之間，但漸漸過去落在  $\epsilon\varphi, \varphi\gamma$  及  $ef, fg$  處。今作  $PS = Ee$ ，將其於  $O$  平分，並以之為中心，以  $OP$  為半徑作圓  $SJFi$ 。整個的圓周所表者為一振動之全部時間；其上之部分所表者則為與之相比的該項時間之部分。經過其時間之一部  $PH$  或  $PHSh$  後，即作  $HL$  垂線垂於  $PS$  上，(或作  $hl$  垂於



第一八四圖

$PS$  上), 而如設  $E\epsilon = PL$  (或  $= Pl$ ), 則物理點  $E$  即落在  $\epsilon$  點. 如是則每個點  $E$  由  $E$  經過  $\epsilon$  到  $e$ , 復由此經過  $e$  而回至  $E$ , 其所作振動一如擺錘之振動, 其加速及遲緩之程度全相同. 所欲證明者, 是中介物之該項物理點, 必爲此種運動所推動. 今試設想一中介物, 爲一某種原因所推動而作此項運動; 則可研究其所得結果如何.

試於圓周上取相等的弧  $HJ$ ,  $JK$ , 或  $hi$ ,  $ik$ , 其與全圓周相比, 猶如  $EF$ ,  $FG$  二相等



第一八五圖

的線，與  $BC$  空間相比。今作垂線  $JM$  與  $KV$  或  $im$ ，與  $kn$ ，則因  $E, F, G$  點相繼為相似的運動所推動，其一往一返所成之振動之時間等於衝動由  $B$  至  $C$  所須之時間，故如以  $PH$  或  $PHSh$  表  $E$  點開始運動以後之時間，以  $PJ$  或  $PHSi$  表  $F$  點開始運動以後之時間，以  $PK$  或  $PKSk$  表  $G$  之時間，則

$$\text{在往時 } E\epsilon = PL,$$

$$\text{在往時 } F\varphi = PM,$$

$$\text{在往時 } G\gamma = PN,$$

$$\text{在返時 } E\epsilon = Pl,$$

$$\text{在返時 } F\varphi = Pm,$$

$$\text{在返時 } G\gamma = Pn,$$

$$\text{因而 } \epsilon\gamma = GE - LN,$$

$$\text{以及 } \epsilon\gamma = GE + ln = GE + LN.$$

但  $\epsilon\gamma$  為  $EG$  部分之伸張之寬，於  $\epsilon\gamma$  處所發生者，此項伸張與該部分在往時所作之平均伸張相比，如  $GE - LN : GE$ ，而與返時者相比，則如  $GE$

+  $LN : GE$ . 又因

$$LN : KH = JM : OP \quad (1),$$

$$\begin{aligned} KH : EG &= PHShP : BC \\ &= OP : V \quad (2) \end{aligned}$$

(這裏我們用  $V$  以代一圓之半徑, 此圓之周係與  $BC$  距離相等), 故可得

$$LN : EG = JM : V \quad (3).$$

從可知  $EG$  部分之伸張, 或物理點  $F$  在  $\epsilon\gamma$  處之伸張與其在  $EG$  處之平均伸張相比, 如

$$V - JM : V \text{ (在往時)}$$

$$V + JM : V \text{ (在返時)}.$$

其彈力與  $EG$  處之平均彈力相比, 如

$$\frac{1}{V - JM} : \frac{1}{V} \text{ (在往時)}$$

$$\frac{1}{V + JM} : \frac{1}{V} \text{ (在返時)}.$$

由此可知, 在往時,  $E$  與  $G$  點之彈力相比, 如

$$\frac{1}{V - HL} : \frac{1}{V}$$

以及  $\frac{1}{V-KN} : \frac{1}{V}$ .

此二力之差與中介物之平均彈力相比，如

$$\begin{aligned} \frac{1}{V-HL} - \frac{1}{V-KN} &: \frac{1}{V} \\ &= \frac{HL-KN}{V^2 - V(HL+KN) + HL \cdot KN} : \frac{1}{V}. \end{aligned}$$

今如假定  $HL$  與  $KN$  較之  $V$  為無限小，則此二比可成爲

$$\begin{aligned} \frac{HL-KN}{V^2} &: \frac{1}{V} \\ &= HL-KN : V. \end{aligned}$$

因  $V$  爲已知，故力之差與  $HL-KN$  相比，或因

$$HL-KN : HK = OM : OJ = OM : OP, \text{ 即}$$

$$HL-KN = \frac{HK \cdot OM}{OP} \text{ (} HK \text{ 與 } OP \text{ 爲常數),}$$

故該項差與  $OM$  相比。今如將  $Ff$  於  $\Omega$  平分，則力之差與  $\Omega\varphi$  相比。仿此，在物理的線  $\epsilon\gamma$  退回時， $\epsilon$  與  $\gamma$  所固有之彈力，其差與  $\Omega\varphi$  相比。但此項差即爲  $\epsilon$  之彈力超過  $\gamma$  之彈力之餘，故亦即爲

使  $\epsilon\gamma$  線在往時能加速，在返時則遲緩的力，故  $\epsilon\gamma$  之加速的力與距振動之平均處所  $\Omega$  相比，又按第一編 § 78，時間可用  $PJ$  弧以表之；故中介物之線的部分能按照預定的定律，即按照擺錘之定律運動；凡構成中介物之一切線的部分亦均如此。此即所欲證者。

系。由此可知，傳達出去的衝動力之數等於一顫動物體之振動數，而且前者在傳達出去時亦不會增加。蓋物理的線  $\epsilon\gamma$  回至其原處時，即靜止下來，倘非顫動體之繼續的衝動，或由物體所發出之衝動，則不會再繼續前進；故如顫動體之衝動停止，則此項線之運動亦即停止。

§ 69. 定理。在彈性的中介物內傳布的衝動之速度，其相比等於彈力之平方根之正，及密度之平方根之反二者之合。不過須假定彈力與稠密之度相比。

第一事。設中介物為等質的，其中衝動力間之距離為相等的，但其中之一的運動則較其餘為

強。如是則相似的部分之緊縮及伸張與該項運動相比，不過此種相比性卻並不很準確，倘緊縮及伸張不很大，則可很近似的不差，在物理上亦可說已够用。運動的彈力與緊縮及伸張相比；在同一時間內所產生的相等部分之速度，則與該項力相比。故相當的衝動之相等相當的部分同時在空間內經過其一往一返之運動，其速度與所經之道路相比；而且在一往一返時間內恆繼續經過其寬的衝動，陸續的前進至在其前的地位，而因其間之相距均等，故其速度在一中介物及他中介物內亦相等。

第二事。 倘距離或寬在其一中介物較之其他中介物內為大，則可假定其相當的部分在一往一返時所作之道路與寬恆相比。如是則其緊縮及伸張均相等。故如中介物為等質的，則運動的彈力亦即相等。為此項力所推動的物質其比如寬相比，而在其內往返的空間，其比亦如之。從可知往返所須之時間，其比等於物質之平方根之正及空間之平方根之正二者之合；因而與空間本身亦相比。但

在一往一返的時間內，衝動所經過者爲其寬，即與時間相比的道路，故其速度相等。

第三事。在密度及彈力均相等的中介物內，一切衝動之速度均相等。倘將密度或彈力增加，則運動的力以彈力爲比而增加，所運動的物質以密度爲比增加。發生與前相同的運動之時間，即以密度之平方根增加，以彈力之平方根減小。所以速度之相比，等於密度之平方根之反，及彈力之平方根之正二者之合。此即所欲證者。

由下節之證法內，此定理之無誤更可顯然明白。

§ 70. 問題。 一中介物之密度及彈力爲已知；今求衝動之速度。

我們試設想，中介物爲一在其上的重量所壓，猶如空中大氣之被壓一般。設  $A$  爲等質的中介物之高，其重量與在其上的物體之重量相等，其密度與被壓縮的中介物之密度相等，衝動即在後者內傳布。

設再設想一擺錘，其懸點與振動點間之距離爲  $A$ ；當衝動經過一道路（此道路等於以  $A$  爲半徑的圓周）時，此擺錘作成一次一往一返的振動。如 § 68 內之證法，可知任意的物理線  $EF$  在各個振動內經過  $PS$  道路時，在最外點  $P$  與  $S$  被一彈力所推動；此彈力與其重量相等。此線作各個振動時所須之時間，等於其在  $PS$  長的擺線上振動所須之時間，因爲相等的力能推動相等的物體經過相等的空間。因振動時間與擺錘長之平方根相比，而擺錘之長則等於全擺線之半，故一振動之時間與擺錘（其長爲  $A$ ）振動之全時間相比，如  $\sqrt{\frac{1}{2}PS} : \sqrt{A}$ ，即是，如  $\sqrt{PO} : \sqrt{A}$ ，但在  $P$  與  $S$  點推動  $EG$  線的彈力，與全部彈力相比，如  $HL-KN : V$ ，或因  $K$  與  $P$  相合故如  $HK : V$ 。又因在  $EG$  之上施壓迫的重量與前者之重量相比，如  $A$  與  $EG$  長相比，故經組合後，即可得在  $P$  與  $S$  點施於  $EG$  的力與該線之重量之比爲  $HK \cdot A : V \cdot EG$ ，或如  $PO \cdot A : V^2$ （因爲已知  $HK : EG = PO : V$ ）。

因相等的物體經過相等的道路所須之時間與力之平方根成反比，故在重量作用下的一振動之時間，其相比如  $\sqrt{V^2} : \sqrt{PO \cdot A}$ ，其與長為  $A$  的擺錘之一次振動時間相比，如  $\sqrt{V^2} : \sqrt{PO \cdot A}$  及  $\sqrt{PO} : \sqrt{A}$  二者之合，即是，如  $V : A$ 。

但在一往一返的一次振動之時間內，衝動所經過之道路等於其寬，故其經過  $BC$  道路的時間與一往一返所成的一次振動之時間相比，如  $V : A$ ，即是，如  $BC$  與一圓周相比，此圓之半徑為  $A$ 。

又，衝動經過  $BC$  道路所須之時間與其經過等於該圓周之長的道路所須時間相比，亦是如此。所以，在這樣的一次振動之時間內，衝動能經過該圓周之長。

系 1. 衝動之速度，等於重物以等加速度運動下墜時經過  $\frac{1}{2}A$  所可達到者。

蓋在此項時間內，衝動能以下墜內所能達到之速度經過一道路，與  $A$  相等，所以在一往一返的振動時間內，其所經過之道路與以  $A$  為半徑的

圓之周相等，因為下墜時間與振動時間相比，如圓之半徑與其周相比。

系 2. 因  $A$  與流體之彈力成正比，與其密度成反比，故衝動之速度，其比等於密度之平方根之反，彈力之平方根之正二者之合。

§ 71. 問題。 試求衝動間之距離。

我們試求與一已知時間相當的物體之振動數，此物體之顫動即為發生衝動之原因，然後用此數以除該時間內衝動所經過之道路。如是所得之數即為其寬。

§ 72. 附註。 最後的諸定理，適用於光及聲之運動。光之傳達係循直線，不能由單純的一衝動所發生。聲出於顫動的物體，即為空氣內所傳布出的衝動。此項衝動可於對方的物體內引起顫動，即為其明證；不過聲浪本身須重而深。發聲物體邊上所發之聲能引起顫動，這是普通所知道的事實。由聲音之速度，亦可得其證明。

雨水之比重與水銀之比重相比約為  $1 : 13\frac{1}{2}$ ，

倘後者在氣壓表內達到 30 英寸高，則空氣之比重與雨水之比重相比，約為 1:870；所以空氣之比重與水銀之比重相比，約為 1:11890。又因水銀之高為 30 英寸，故空氣之高（其重能壓緊在下面的大氣）約為 356.00 英寸或 29725 英尺。在以前的問題 (§ 70) 之證法內，我們曾用  $A$  以表此高。以 29725 英尺為半徑所作之圓，其周為 186768 英尺。擺錘之長倘為  $39\frac{1}{2}$  英寸，則由一往一返所合成之振動，須二秒鐘乃能完成，故長為 29725 英尺的擺錘須於  $190\frac{3}{4}$  秒內乃能完成該項振動。在此時間內，聲浪能經過 186,768 英尺；在一秒鐘內能經過 979 英尺。

不過在此項計算方面，關於空氣各部分之厚薄一層，我並沒有計入。空氣之重與水之重相比，約如 1:870，而鹽之密度約為後者密度之倍。今如假定，空氣之微粒與水或鹽之微粒之密度相等，其稀薄之狀況，係由其中間之空間所致；則空氣微粒之徑與二微粒中心之距離相比，約如 1:9 或 1:10，

與二微粒間距離相比，如 1:8 或 1:9。

所以，聲浪一秒鐘所經過之 979 英尺上，尚須增加  $\frac{979}{9} = 109$  英尺，故聲浪於一秒鐘內約可經過 1088 英尺。此外則空氣內之水蒸氣，其緊張力與空氣者不同，故其所能傳之聲亦不同，所以在空氣之傳聲方面，差不多沒有參加的部分。今設此項部分靜止着，則運動藉純空氣之傳達，能較速進行，其度與所少的物質量之平方根相比。故如大氣由十分純空氣一分蒸氣所成，則速度之增加為  $\sqrt{11} : \sqrt{10}$ ，約如 21 : 20，較十一分盡為純空氣時稍大。以上所得聲之速度，必須以此項比例增加之。故一秒鐘內速度約為 1142 英尺。在春秋兩季必係如此。因為空氣於此兩季內因適當的溫度之作用而稀薄，故其彈性亦即增加。在冬季時，空氣因寒而緊縮，其彈力減小，故運動必以密度之平方根為比較遲。在夏季時必稍速。

在試驗上，我們曾經證明聲在一秒鐘內可行 1142 英尺。

既知聲之速度後，即可求振動間之距離。少維安(*Sauveur*)曾用試驗證明一五尺(*Par.*)長的管所作之聲浪等於一弦所作者，此弦之振動數為一秒鐘 100 次，所以一秒鐘內聲之 100 次振動所經過之空間約為 1070 尺(*Par.*)，而一振動所佔之空間約為 10,7 尺，即，等於管之一倍。因此發聲管內所作聲之振動其寬約為管長之倍。

同時，我們又可知道，何以發聲物體之運動停止，則聲亦即停止；我們並可知道，何以在離發聲物較遠處不能較之在近處所聽到者為較長。由所得之原則，亦可明白聲經語管能放大之理。每種交互運動當其被反射時能被同一的原因所增強；所謂同一原因，即發生此的原因。在管內運動之消失較遲，其被反射較強，因為管對於聲之散發有阻礙力，故每次反射時能引起新運動而增加原來之運動。

此為聲浪方面之主要的現象。

## 第九章

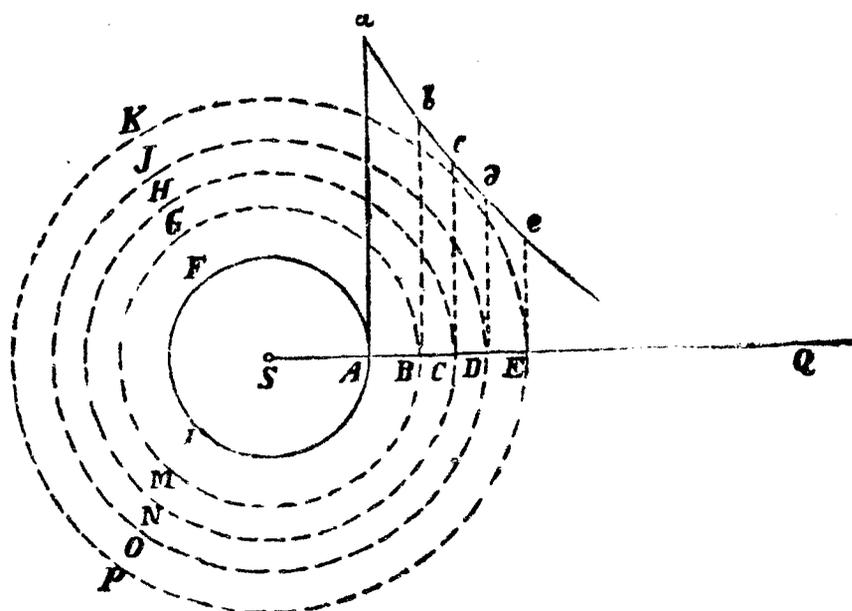
### 論流體之圓形運動

§ 73. 假設。 由流體各部分之不完全的滑性所發生的抵抗力，在尋常的狀況下，與速度為比較的；此項速度即為部分互相分開的速度。

§ 74. 定理。 設有一長為無定的圓柱體，在一整勻而無限的流體內以等速運動環其軸旋轉，此軸之位置為已定；流體本身亦為此項運動所影響而旋轉，但不受其他的影響。倘流體之每一部分均能保持其運動，則流體各部分之環繞時間相比，如其離圓柱體軸之距離相比。

今設  $AFI$  為繞其軸  $S$  而作等速旋轉的圓柱體，用同心圓  $BGM, CHN, DJO, EKP$  等將流體分割成爲無數同心的圓柱層。

因流體為等質的，故相連的層之相互壓力，其



第一八六圖

相比等於相互間的移動相比，並等於壓力所在的相連的面積相比。倘對於某一層之壓力在凹處較之在凸處為大或小，則較強的壓力即發生作用，而層之運動或則被加速，或則遲緩下去，此則視該項壓力在相同或相反的方向內發生影響而定。但如每層均能保持其運動，則兩面所受壓力必均相等，其方向恰相反。又因壓力與相連的面積及其移動相比，故後者與面積成反比，亦即是，與面離軸之距離成反比。但環繞軸的角運動相比，如此項移

動被距離除後相比，亦即是，與距離之平方成反比。故如於無限的線  $SABCDEQ$  之各點作垂線  $Aa, Bb, Cc, Dd, Ee$ , 等等，使其與  $SA, SB, SC, SD, SE$  等之平方相反比，並設想作一雙曲線經過該項垂線之端，則角運動之和，即全部角運動，與相當的  $Aa, Bb, Cc, Dd, Ee$ , 等諸線之和相比。今將層之數增加至無限，將其寬減至無限，則角運動相比，如  $AaQ, BbQ, CcQ$ , 等雙曲線面相比，而與角運動成反比的時間亦與此項面成反比。故任何一部分  $D$  之環繞時間與  $DdQ$  面成反比，即是，按已知的求曲線面積之法，與距離  $SD$  成正比。此即所欲證者。

系 1. 從可知流體之微粒之角運動與其距軸之距離成反比，其絕對速度係相等。

系 2. 設有一圓柱形的器皿，其長無定，其內盛有水，並有一其他圓柱體在內。此三圓柱體均繞其共同軸旋轉，其環繞時間與其半徑相比。倘流體之每一部分保持其運動，則其各部分之環繞時間與

其離圓柱體軸之距離相比。

系 3. 倘在如此運動的圓柱體及流體上加以某種角運動或減去之，則因此項新運動不能改變流體各部分之相互摩擦，故各部分相互間之運動亦仍不變。

蓋相互間之移動係與相互間之摩擦有關，而每一部分能保持某種運動，此運動被兩面各部分所受相反的摩擦發生加速時，不能特為大。

系 4. 故如於圓柱體及流體所成之系統方面取去其在外的圓柱體之一切角運動，則所得為靜止的圓柱體內之流體運動。

系 5. 倘流體及在外的圓柱體均靜止，但在內的圓柱體以等速作旋轉，則流體之圓形運動亦參加，並能漸漸的傳達經過全流體，在流體之各部分未達到前系內所述之運動時，其增加不會停止。

系 6. 因流體有一種傾向，將其運動很廣的傳播出去，故在外的圓柱體，亦能為此項傾向所影響而旋轉，其運動之環繞時間在未與在內的圓柱體

之環繞時間相等時，運動恆加速。倘在外的圓柱體被一力所牢固着，則即發生阻滯流體之運動的傾向，故如沒有外來的力將在內的圓柱體之運動保持，則此圓柱體之運動即漸失去。此種事實均可用試驗以證明之。

§ 75. 定理。 有一固定的球，在一均勻而無限的流體內環一軸旋轉，此軸之位置為已知。其旋轉亦為等速的。流體即被此項動力所推動而旋轉，但別無其他推動力。倘流體之每一部分能保持其運動，則其環繞時間與距球心距離之平方相比。

第一事。 設  $AFL$  為一球，環  $S$  軸以等速在圓內旋轉；作  $BGM, CHN, DJO, EKP$ ，等等諸圓將流體分割成為無數同心層，其厚均相等。今設該項層成為固定的，則因流體為等質的，故相接的層之相互壓迫與其相互間之移動及相接觸的面積相比。倘其中一層方面之壓力在凹處較凸處為大或小，則較強的壓力必超過，而能使層之速度加速或遲緩，隨其方向之與運動相同或相異而別。欲使每

一層能保持其運動，則兩面所受之壓必相等相反而後可。因壓力與相接的面及相互間的移動相比，故移動與面積成反比，即是，與此項面積距心之距離平方相比。但種種繞軸的角運動與此項移動成正比，與距離成反比，故即與距離之三次方相比。

今如於無限線  $SABCDEQ$  之各點作垂線  $Aa, Bb, Cc, Dd, Ee$  等等，使其與  $SA, SB, SC, SD, SE$  等等之三次方成反比，則各種角運動之和相與相當的  $Aa, Bb, Cc, Dd, Ee$  等等諸線之和相比。今將層之數增加至無限，將其寬厚同樣減小至無限，則全個角運動與雙曲線的面  $AaQ, BbQ, CcQ, DdQ, EeQ$  等等相比。又，與角運動成爲反比的環繞時間亦與此項而成反比。所以任何一層  $DJO$  之環繞時間與  $DdQ$  面成反比，即是（按已知的求曲線面積之法），與距離  $SD$  之平方相比。此即所欲證者。

第二事。今由中心點出發，作很多的直線，其長不定，與軸相交之角爲已知，將此項直線環軸

旋轉之，則上所述的各層均被分割成爲無數圓圈，而每一圓圈被其他四個圈所接觸，在內的一個，在外的亦一個，兩旁各一個。因在內的及在外的圈能發生摩擦，故每一圈在按照第一事之定律所發生的運動方面，祇能被其向相等相反的兩面所壓迫。此可由第一事之證以知之。所以由中心點出發在直線上進入無限的圓圈所成之列，即按照第一事之定律運動，祇須在兩旁的摩擦不將其阻止。不過在按照此項定律而發生的運動方面，兩旁的圓圈不能發生摩擦的阻力，所以不能對於此項運動有所妨害。倘距離中心點等遠的圓圈，其運動在極點較之在赤道附近爲速或遲，則遲者能因相互間之摩擦而加速，速者則被遲緩，故其環繞時間恆按照第一事之定律趨於相等。所以此項摩擦不能阻止按照該項定律所發生之運動，而在這裏亦仍如此。此即是，各個圓圈之環繞時間與其距中心距離之平方相比。

第三事。 今將該項圓圈每個分割成爲無數

的小部分，其中含有絕對而均勻的流質。因此項分割無關於圓形運動之定律，祇為包含流體的方法，故其圓形運動仍繼續着。經過此項分割後，一切圓圈不問其大小如何，其相互間之摩擦或則全不變，或則以相同的程度變。故如其原因不變，則其結果亦不變；因而運動與環繞時間仍為比較的。

此亦即所欲證者。

因為圓形運動及由此發生的離心力在赤道部分較大，故必有某種原因存在，能將其部分拉住，不使其出離圓的軌道而與中心離開。

系 1. 從可知一切流體部分之角運動與其距心距離之平方相比，其絕對速度與此項平方被距離除後成反比。

系 2. 設有一球，在一靜止的，相似的，無限的流體內環一軸以等速旋轉，此軸之位置為已知。如是，流體之運動即成為漩渦形式，漸漸的傳出至無限。其各部分之加速，在環繞時間未與距中心之距離平方成為相比時，不會中止。

系 3. 漩渦之內部速度較大，故能對於其外部發生摩擦及壓力使其運動；此項外部所得之運動又復傳至於其外部，故前者之運動不會增加，祇會將其所有者漸漸的向外傳出。因此，在漩渦方面，運動恆由中心向其外圈傳出，而因其外圈可擴至無限，故漸消失。其在漩渦之較內的圈，其運動並不能加速，因為其由中心所得來的運動均傳出至外圈去。

系 4. 欲使漩渦恆保持其運動狀況，必須有一來源使球能保持其運動，俾得傳其運動於漩渦內之物質。倘沒有此項來源，能使球保持其運動，則因恆向外面傳出之故，球本身之運動及漩渦之運動必漸消失。

系 5. 倘另再投入一其他球於此漩渦內，與原來之中心稍離開，以一已知的軸旋轉，則流體內又形成一新漩渦。在開始時，此新漩渦并其球環繞原來之中心旋轉，以後則漸漸的將其本身之運動傳布出去，以至於無限。如是，結果二漩渦互相分開

而環繞一共同的點旋轉；倘無一種力將此二者合在一塊，則必愈離愈遠。

倘後來使球繼續其運動的力消失，一切均任之於力學的定律，則結果二球之運動必漸消失，而漩渦亦即靜止。

系 6. 倘有若干球在已知的處所，以一定的軸在一定的速度之下旋轉，則所發生的漩渦之數亦如是多，每個均能擴張至無限。

蓋球雖多，但其傳布運動之方法，則與單獨的一個球無異。如是，此項漩渦不會互相分開，每個限於一區域的，而必相互交錯；因此項相互作用，故各球均不能不漸離其原來之處所，如前系內所已指出者。倘沒有某種力生作用於相間，則其相互間之位置即不能保持下去。但使各球保持其運動的力如消失，則如第三第四二系內所明，漩渦的運動亦必漸停止。

系 7. 一種相似的流體盛於一球形的器皿內，經中心處球之旋轉而發生漩渦；器皿本身亦與球

作同樣的旋轉，其軸及方向均同，其環繞時間則與半徑之平方相比。如是，則流體之部分，其環繞時間必須與其距中心之距離平方成正比，乃能保持其不加速亦不遲緩的運動。其他漩渦之方式均不能保持長久。

系 8. 倘器皿，其內的流體及球均保持此項運動，同時以共同的角運動環繞一已知的軸倒轉，則此新運動對於流體各部之摩擦不能發生變化。

各部分相互間之移動與摩擦有關，既每部分仍保持其原來的運動，則一面來的摩擦所發生之阻礙作用，不能較之他面來的加速作用為大。

系 9. 故如器皿靜止不動，球之運動為已知，則流體之運動亦即可求得。

我們試設想一平面經過球之軸，以相反的運動旋轉，并假定平面的及球的環繞時間之和與後者相比，如器皿之半徑之平方與球之半徑之平方相比。如是，則流體各部之環繞時間對於此平面而言，與其距球心距離之平方相比。

系 10. 倘器皿亦環繞球之軸旋轉，或以某種任意的軸旋轉，其速度爲已知，則流體之運動亦即可求得。

蓋如由全系統上減去器皿之運動，則其餘一切運動亦均仍舊。按系 9 即可求得該項運動。

系 11. 倘器皿與流體均靜止着，球以某種速度作等速運動，則流體及器皿均能漸漸的彼此項運動所影響而運動。流體及器皿之環繞時間未與球之環繞時間相等之前，其加速不會中止。倘器皿被一力所阻止，使其不能運動，或作等速的常運動，則中介物即漸漸的得到 8, 9, 10 三系內所說之運動狀況，不會停留在其他狀況內。倘能使器皿及球運動的力消失，將全個系統放任於力學定律之下，則器皿與球藉流體之中介而互相影響，在其環繞時間未相等以前，其相互影響不會中止。

§ 76. 附註. 在這些研究中，我假定流體(就其密度及流動性而言)係由等質的物質所成。所以此項物體有此屬性，即，相同的球在同樣的時間內作

相等的運動時，其在同距離內所傳出之運動亦相似相等，不問球在何處均如此。因環繞軸的圓形運動，物質有離開軸之傾向，因而對於在其外的物質能施以壓力。由於此項壓力，其部分間之摩擦即增加，因而其分離亦即更難；所以流體之流動性即減小。倘流體之部分於某處較爲厚或大，則此流體之流動性即減少，因爲部分於此能互相分開的面，其數目已減少了。我假定，在此種流動性減少的狀況下，我們可用部分間之滑性或其他柔性以代之。倘不如此，則凡缺少流動性之處，其物質必緊相接連，惰性亦較大，因而其接受運動較遲，其傳布較遠。倘器皿非爲球形，則流體之部分不會在圓而在其他曲線內運動，此項曲線與器皿之形相似，其環繞時間與其距中心之平均距離之平方相比。在中心及周之中間，空間較爲寬，故運動較遲，在狹處則較速。不過較速的部分不會向周方面接近；其所作之線曲率較小，其求離中心之傾向能因此項曲率之小而減小，亦猶因速度之增加而增大一般。當

其由狹的空間進至寬的空間時，其離心亦增加，同時，其運動亦減小；再由寬處入於狹處時，其運動又復加速，因而各部分交互的加速及遲緩，在固定的器皿內，其狀況大率如是；至於無限的流體內之漩渦狀況，前系 G 中已知道了。

在本定理內，我曾經研究了漩渦之屬性，其目的在求明白，天體方面的現象，是不是可用此項屬性以求其解。我們知道環繞木星而運動的衛星，其環繞時間與其距木星中心距離之  $\frac{3}{2}$  次方相比；環繞太陽運動的行星，亦適用此項規律。據天文學上一直到現在所有的觀察，此項規律在該項衛星及行星方面均十分準確。

故如該項天體被木星及太陽四圍之漩渦所推動而旋轉，則其本身必服從關於此的定律。漩渦部分之環繞時間與其距運動中心距離之平方相比；倘漩渦之物質，不隨其距離運動中心之遠而稀薄，由流體部分之缺少滑性而發生的抵抗力，其增加率亦不大於速度（流體部分互相分開的速度）之增

加，則此項比例不能減小至於  $\frac{2}{3}$  次。就理性上看來，二者均不能實現。較厚而較不流動的流體之部分，倘不向中心發生吸引作用，必向外圈出離。在本章之初，我因為證法上之需要，曾假定抵抗力與速度相比；但事實上，抵抗力與速度之比或者不如是之大。倘我們承認這一層，則漩渦各部分之環繞時間與其距中心之距離相比，其方數實大於二。倘漩渦在接近中心處運動較速，向外即較遲，但超過一定的界限至外周時重復較速，則決不能有一固定的比例，如  $\frac{2}{3}$  次或某次。所以研究自然的人很可以注意一下，該項  $\frac{2}{3}$  次的現象，如何能用漩渦之理以解釋之。

§ 77. 定理。 倘物體能在漩渦內作圓形環繞，則其密度與漩渦之密度相等；其運動之方向及速度，均服從漩渦部分之定律。

我們試假定漩渦之一小部分凝結成爲固體，但其微粒間之位置則仍不變；則因此小部分之密度，所受之力及其形狀均仍不變，故其運動亦仍按

以前定律。反之，倘漩渦之一固體的部分，其密度與其他部分無異，成爲流體了，而如其部分間之相互狀況仍不變，則其運動亦仍如前。今如不論各微粒間之運動，視之爲與全體之運動無關者，則後者之狀況自不受影響而無變動。如是，固結的部分雖已成爲流體，但其運動與其他離心等遠的部分完全一樣，因爲此項部分間并無什麼分別。所以固體之密度如與漩渦物質之密度相同，則與漩渦之其他部分作同樣的運動而前進。倘物體之密度較爲大，則有離心的傾向，一方面漩渦亦有力影響之，使其不能離開其軌道；但如漩渦之力不勝，則物體即離開其中心，在螺旋線上運動，因而與漩渦之中心愈去愈遠。反之，倘物體之密度不及漩渦物質密度之大，則發生向心的運動。所以，祇有物體之密度與流體之密度相同，乃能在圓內環繞漩渦之中心而旋轉；於此，其所循定律，與其他等距的部分所循的相同。此即所欲證者。

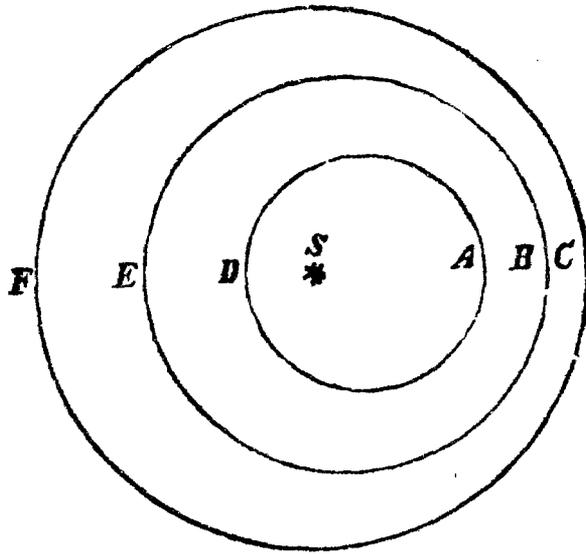
系 1. 一固體在一漩渦內運動，其所作圓不變，

則對於在其內的流體而言，爲靜止的。

系 2. 倘漩渦之密度爲均勻的，則上所述的物體，在距心之任何遠處，均能作環繞運動。

§ 78. 附註. 由此可知行星之迴旋，非爲物質的漩渦所推動。蓋按哥白尼 (*Copernicus*) 之假說，環繞太陽而運動的行星，其軌道爲橢圓；此橢圓之焦點即爲太陽，其向太陽所作之半徑，作出與時間相比的面積。

漩渦各部分之運動，不能作如此的方式。今設  $AD, BE, CF$  爲三個繞太陽  $S$  的軌道；最在外的  $CF$  爲與太陽同心的圓，其在內的二軌道之遠日點爲  $A, B$ ，近日點則爲  $D, E$ 。在  $CF$  軌道內運動的物體，以其向太陽的半徑作成與時間相比的面積，其運動爲等速的。在  $BE$  軌道內運動的物體，按之天文上定律，在遠日點  $B$  處運動較遲，在近日點  $E$  處則較爲速；但按之力學上的定律，漩渦之物質在  $A$  與  $C$  中間之狹的空間內，其運動當較速，在  $D$  與  $F$  之間則當較遲，即是，應當在



第一八七圖

遠日點較速而在近日點較遲。此二者適為相反。

在處女宮之開始時即係如此，於此，火星與金星的軌道間之距離，與雙魚宮開始時之距離相比，約為 3 : 2，因此，漩渦之物質在雙魚宮方面在其軌道間運動時，必較之處女宮方面為大，其比例亦為 3 : 2。蓋空間愈狹，則在同時間內通過同量物質之速度自必愈大。倘地球在此項物質內前進，并與之同繞太陽，則在雙魚宮之開始，其速度之於處女宮開始時之速度，其比為 3 : 2。所以每天我們所見的太陽之運動在處女宮當  $>70'$  而在雙魚宮

之開始  $< 48'$ ; 但按之經驗, 太陽之該項運動在雙魚宮較之在處女宮為大, 故地球在處女宮之運動亦較之雙魚宮為大。

從可知漩渦的假設與天文上所得之現象相矛盾, 故不能對於說明天體現象有所幫助, 反而是使其模糊。至於該項運動在自由的空間內如何沒有漩渦而進行, 此可由第一編知之; 在下編論宇宙系統內當更詳述之。



# 第三編

## 論宇宙系統

在前兩編內，我已將自然理論之原則敘述過了，但非爲物理的而係數學的；由這些原則內，我們可於物理研究方面推得若干結論。這些就是運動及力之定律及條件，主要的是關於自然理論方面者。爲使此項原則不致落空，我曾經引了許多物理的說明；在這裏面，我所引的主要的可說是關於物理學之基本者，如物體之密度，抵抗力，沒有物體的真空，以及光與聲之運動等。所尚須論及者，是用該項原則以求了解宇宙系統之構造。

因爲這層理由，這第三編我曾用較通俗的形式寫出，期能使許多人都能讀。不過對於上所述的原則沒有了解的人，對於其所得結論亦不能理解，故他們向來所得的偏見不能因此消除。因爲這個

緣故，我將這編之內容重復按照數學方法釋為定理，俾好多糾紛不致發生，而讀者亦須了解上述原則之後乃能閱讀。但這裏所遇到的好多定理，即在懂數學的讀者亦頗耗費時間，所以我不欲使人逐條的複演之。讀者祇須將本書開首的說明，運動定律，以及第一編之前三章詳細閱過，即可讀本編；其餘本編內所引的定理，可隨意查閱之便行。

## 研究自然之規律

第一規律。求自然事物之原因時，除了真的及解釋現象上必不可少的以外，不當再增加其他。

物理學者說：自然無虛事，所謂虛事是許多人去做，但極少人能成功的事。自然是簡單的，不會浸淫於不必要的事物之原因內。

第二規律。所以在可能的狀況下，對於同類的結果，必須給以相同的原因。

例如人與畜之呼吸，歐洲及美洲之隕石下墜，

竈火之光及太陽之光，光在地球上及其他行星上之反射，等等，均不須給以不同的原因。

第三規律。物體之屬性，倘不能減少亦不能使其加強者，而且爲一切物體所共有，則必須視之爲一切物體所固有之屬性。

物體之屬性祇能由試驗以知之，所以在試驗上普通恆一致者，而且既不能減少又不能消失者，必須視之爲普通的屬性。自然，我們不能背棄試驗而從事於空想，亦不能離開自然之類同性，因爲自然是簡單的，恆與其自己一致的。物體之廣袤，祇能由官覺知之，但非在一切物體方面均能感覺到；不過凡能感覺到的物體都有廣袤，所以我們對於沒有感覺到的，亦假定其有廣袤。有若干物體是硬的，這是我們可由試驗知之。全體之硬，由其部分之硬所積成，因此，我們可推論到，不僅可感知的物體部分是硬的，其極小不可分的微粒亦是硬的。物體之不可透性，亦非由理性所推知，而由試驗所得，一切手中所有的及能捉摸的，均有不可透

性。故我們即假定不可透性爲一切物體所共有的屬性。一切物體均能運動，因爲某種力之作用，即我們所謂惰性者，能保持其運動狀態，或靜止，這亦是一個推論，因爲我們所能觀察到的物體均有此屬性。全體之廣袤，硬性，不可透性，能動性及惰性均由其部分所成，因此，我們推論到物體之極小的部分亦均有此項屬性。全部自然理論之基本即在於是。此外，我們從現象方面又知道相互接觸的物體之部分能相互分開。至於物體之部分能析成爲更小的部分，這是由數學方面知道的；此項設想其爲能析小的部分是否有自然的力可以做到之，這是不很確實的。但如能用一試驗，將未析開的部分或微粒析開之，則我們即可推論出，不僅已析開的部分可分開，而且未析開的部分之可析性亦爲無限。

倘一切物體在地球之附近爲重的，即對於地球有重量，而且其重量與物質之量相比；又如月球對於地球亦有重量，亦以其質量爲比，而我們地球

上的海洋對於月球亦同樣的有重量；同時，我們又能用試驗及天文上的觀察，以證明行星相互間有重量，彗星對於太陽亦有重量，則按此處之規律，我們可假定一切物體相互間均有重量。關於此項普過重力之證明，較之物體之不可透性之證明較為有力量，因為關於後者，我們對於天空中之天體未能作若何試驗，亦未有若干觀察。但我亦不敢下斷語，說重力為物體之固有的力，所謂固有的力，是指物體之惰性力，因為此力是不變的；至於重力則隨其距離地球之遠而異。

第四規律。在實驗物理學內，由現象經歸納而推得的定理，倘非有相反的假設存在，則必須視之為精確或近於真的，如是，在沒有發見其他現象，將其修正或容許例外以前，恆當如此視之。

我們必須如是，俾歸納的論據，不致為其他假設所取消。

## 現 象

第一現象。 木星的衛星，用其向木星之中心的半徑，作成與時間相比的面積，其環繞時間與其距該中心的距離之  $\frac{3}{2}$  次方相比。

此可由天文的觀察以知之，此項衛星之軌道，與圓相差不遠，而此項圓則係與木星同心，其在此項圓內之運動為等速的。至於其環繞時間與此項軌道半徑之  $\frac{3}{2}$  次方相比，此為一般天文學者所公認的；由以下之表內，亦可得此事實。

### 木 星 衛 星 之 環 繞 時 間

<i>I.</i>	<i>II.</i>
$1^d 18^h 27^m 34^s;$	$3^d 13^h 13^m 42^s;$
<i>III.</i>	<i>IV.</i>
$7^d 3^h 42^m 36^s;$	$16^d 16^h 32^m 9^s.$

## 衛星與木星中心點間之距離

(以木星半徑爲度)

按波來羅(*Borellus*)之觀察:

I.	II.	III.	IV.
5,667	8,667	14,	24,667;

按頓來(*Townley*)之觀察:

I.	II.	III.	IV.
5,52	8,78	13,47	24,72;

按卡西尼(*Cassini*)用遠鏡之觀察:

I.	II.	III.	IV.
5,	8,	13,	23;

又按卡氏由衛星蝕方面之觀察:

I.	II.	III.	IV.
5,667	9,	14,383	25,3;

由環繞時間所推得:

I.	II.	III.	IV.
5,667	9,017	14,384	25,299.

木星衛星之差離 (*Elongation*) 旁德 (*Pound*) 曾用最精確的測微計如下法測過。第四衛星之最大日心差離，他用一測微計在一十五英尺長的望遠鏡內測量過；在木星與地球之平均距離內，所得結果約為  $8' 16''$ 。

第三衛星之差離，他曾用 123 英尺長的望遠鏡測過；在同樣的木星與地球之距離內，結果為  $4' 42''$ 。其餘二衛星之最大差離，亦在同樣的木星與地球之距離內，由環繞時間上推得為  $2' 56'' 47'''$  及  $1' 51'' 6'''$ 。

木星之徑亦用該項測微計在 123 英尺長的望遠鏡內屢次測過，所得結果在木星與太陽或地球之平均距離內恆  $< 40''$ ，從未  $< 38''$ ，多次為  $< 39''$ 。在較短的望遠鏡內為  $40''$  或  $41''$ 。

木星之光因其屈折率之不同，故較為展開；此項展開與其徑之比，在較大較完備的望遠鏡內比較在較小較不完備的鏡內為小。第一及第三二衛星經過木星前之時間，亦曾用該項大望遠鏡自其

開始進入至完全退出觀察過。木星之徑，在其與地球之平均距離內，

由第一衛星之經過木星方面推得為  $37''$ , 125

由第三衛星之經過木星方面推得為  $37''$ , 375.

第一衛星之影離去木星所須之時間，亦經觀察過；在以上所云之距離內，其徑約為  $37''$ 。今設此徑很近似的為  $37''$  25，則四衛星之最大差離以木星半徑為度時，為 5,965; 9,494; 15,141; 26,630.

第二現象。土星之衛星，以其向土星之中心的半徑，作成與時間相比的面積，其環繞時間與其距該中心的距離之 $\frac{3}{2}$ 次方相比。按卡西尼之觀察，推得該項衛星與土星中心之距離以及其環繞時間如下：

### 土星衛星之環繞時間

I.

$1^d 21^h 18^m 27^s$ ;

II.

$2^d 17^h 41^m 22^s$ ;

III.

 $4^d 12^h 25^m 12^s;$ 

IV.

 $15^d 22^h 41^m 14^s;$ 

V.

 $79^d 7^h 48^m 0^s.$ 

## 衛星與土星中心間之距離

(以其圈之半徑爲度)

由觀察所得者：

I.	II.	III.	IV.	V.
1,95	2,50	3,50	8,	24;

由環繞時間所推得者：

I.	II.	III.	IV.	V.
1,93	2,47	3,45	8,	23,35.

第四衛星之差離，按觀察所得可假定其爲 8 半徑，相差當不甚遠。但用極精確的測微計在 123 英尺長的遠鏡內測之，得 8,7 半徑。按此項觀察及環繞時間，衛星之距離以圈之半徑爲度時，得

2,1; 2,69; 3,75; 8,7; 25,35 (25,39).

土星之徑與其圈之徑相比，在同樣的望遠鏡內爲 3 : 7，而圈之徑在一七一九年五月二十八及二十九測得爲 43"。今用土星與地球之平均距離，則得 42"，土星之徑爲 18"。

這些都是在極長而且極好的望遠鏡內所得之結果，因爲在此項鏡內，天體之外觀的量與光之展開相比，較之在小的鏡內爲大。今將差誤的光除去，則土星之徑不能大於 16"

第三現象。 水星，金星，火星，木星，土星，這五個行星並其軌道將太陽包圍在其中。水星與金星之繞太陽運動，此可由其盈虧知之。當其在太陽之對面時，爲其盈的時候，在這面時成爲新月形，在中間一個區域內，有半虧的現象。由火星在太陽會合點附近時之全明現象，及由直角距離附近時之彎凸現象，亦可確定其繞太陽之運動。木星與土星之繞太陽運動亦可由其自太陽所得之光以知之。

第四現象。 五行星之環繞太陽的時間，以及太

陽繞地球或地球繞太陽的時間，與其距太陽的平均距離之 $\frac{3}{2}$ 次方相比。

這個爲開柏萊(*Kepler*)所發見的關係，已沒有人疑惑。不問太陽繞地球或地球繞太陽運動，其環繞間時及軌道之度恆相同。關於環繞時間之測量，一切天文學者亦均無異議。開柏萊及波利亞爾德(*Bullialdus*)對於此項軌道之大小，尤曾做過一番觀察及測量，與該項環繞時間相當的平均距離，與二人所得的距離亦相差不遠，而且恆在二人所得者之中間。

### 環繞太陽的時間(以日爲度)

土星	木星
10759,275;	4332,514;
火星	地球
686,9785;	365,2565;
金星	水星

224,6176;

87,9692.

### 與太陽之平均距離

按開柏萊：

土	木	火
951000;	519650;	152350;
地球	金	水
100000;	72400;	38806;

按波利亞爾德：

土	木	火
954198;	522520;	152350;
地球	金	水
100000;	72398;	38585;

由環繞時間所推得：

土	木	火
954006;	520096;	152369;
地球	金	水

100000;      72333;      38710.

關於水星及金星之距離，已無可論爭，因為由其與太陽之差離方面亦已測定過。其餘諸星與太陽之距離，雖有可爭論處，但由木星衛星之蝕亦可解決。蓋由此項星蝕，我們可測定木星影之位置，如是即可求得日心之長。由木星之日心的及地心的長，將其相互比較後，即可推得其距離。

第五現象。行星以其向地球所作的半徑，不能作成與時間相比的面積；但如此項半徑向太陽時，其所作面積即與時間相比。

蓋對於地球而言，此項行星有時向前，有時中止，有時則向後退。但就太陽而言，則行星恆向前，其運動差不多為等速的，不過在遠日點較遲，在近日點則較速，因而在等時間內所作之面積恆相等。此為天文學者所熟知的定理，而在木星衛星之蝕方面能很精確的證明之，同時並可於此推得其距太陽之遠。

第六現象。月球以其向地球所作的半徑，作成

與時間相比的面積。

此可由比較月球之外觀的運動及徑以知之。不過因太陽之影響，月球稍有失調；在這裏，此項小的不顯見的差失，我且將其略去不論。

# 第一章

## 論宇宙系統之原因

§ 1. 定理. 使木星之衛星恆離開直線運動而留在其軌道內的力，係向着木星之中心，並與其距該點的距離之平方成反比。

此定理之第一部分可由第一現象及第一編 § 14 或 § 16 以知之。其餘的部分則可由該現象及第一編 § 18 知之。

土星方面之相同的事實，可由第二現象知之。

§ 2. 定理. 使行星恆離開直線運動而留在其軌道內的力，係向着太陽，並與其距此的距離之平方成反比。

此定理之第一部分可由第五現象及第一編 § 14 知之；其餘部分則可由第四現象及第一編 § 18 以知之。但此部分之最有力的證明，實為回歸

點之靜止。蓋按第一編 § 85 之系 1, 則雖極小的差, 即, 與平方之差, 在各個環繞方面能發生可感知的回歸點之運動, 在多次環繞方面, 即能發生很顯明的運動。

§ 3. 定理。 使月球不能離開其軌道的力, 係向着地球, 並與其離地心的距離之平方成反比。

此定理之第一部分, 可由第六現象及第一編 § 14 或 § 16 知之; 其餘部分則可由其遠地點之極遲的運動以知之。蓋該項運動在各個環繞內約為  $3^{\circ}3'$ , 故可略去不計。由第一編 § 106 之系 1, 可知, 倘月球與地心的距離, 與後者之半徑相比, 如  $D : 1$ , 則發生該項運動的力與

$$\frac{1}{D^2 + \frac{4}{243}}$$

相比, 亦即是, 較平方稍大的反比, 但此比與平方的比較之與三方的比更為接近, 其度為  $59\frac{3}{4}$  倍。

此項運動之發生, 在於太陽之影響, 故可略去不計; 此當於後明之。太陽之影響月球, 使其離開

地球，與後二者間之距離差不多為相比的，故按第一編 § 106 之系 2，其與月球之向心力相比，約如  $2 : 357,45 = 1 : 178,725$ 。

倘將此極小的力略去不計，則其餘使月球不能出離其軌道的力與  $D^2$  成反比，倘將此力與重力相比較，更可明白此理之無誤；下節內當明之。

系。使月球留在其軌道內的平均向心力，倘將其先按  $177,725 : 178,725$  放大之，再將其按地球半徑與月心離地心之平均距離之平方比放大之，則得地面上之月球向心力；不過我們須假定，當其與地面接近時，該項力恆以距離平方之反比增加。

§ 4. 定理。月球對於地球有重量，其離開直線運動而留在其軌道內，係此項重力之作用。

月球與地球在朔望點之平均距離，按托勒未 (*Ptolemäus*) 及多數天文學者之計算為 59 地球半徑，按凡德林 (*Vendelinus*) 為 60 半徑，許根司 (*Huygens*) 亦得此結果，按哥白尼為  $60\frac{1}{2}$  半徑，按

司德利德 (*Streetus*) 爲  $60\frac{1}{2}$ , 而按提果 (*Tycho*) 則爲  $56\frac{1}{2}$  半徑。提果及其餘用屈折表的天文學者, 均假定太陽及月之折光差較之其他恆星之折光差爲大, 約大 4 至 5 分鐘, 此實與光之性質不合; 他們並將月之視差放大, 至全視差之  $\frac{1}{12}$  或  $\frac{1}{15}$ 。倘將此項差誤糾正, 卽得  $60\frac{1}{2}$  地球半徑, 與其他天文學者所得相近, 我們現在假定此項距離爲 60 地球半徑, 其環繞時間爲  $27^d 7^h 43^m$ , 此亦爲一般天文學者所確定的。又如我們按法國人之測定, 設地球之週爲 12 249600 巴黎尺, 並設想月球之一切運動均失去, 讓其自然, 則使其在軌道內運動的力, 即使月球下墜至地球, 而其每分鐘內所經過之道路爲  $15\frac{1}{12}$  尺。此項關係, 我們可按第一編 § 76 或同編 § 18 之系 9 以計算之。月球在距離地球 60 半徑內作平均的運動時, 其一分鐘內所作的弧之矢, 約爲  $15\frac{1}{12}$  尺, 或 15 尺 1 寸  $1\frac{1}{3}$  分 (巴黎尺)。但該項力在接近地球時與距離之平方之反同增加, 故在地面上較之在月球方面大 60·60 倍。所

以，以該項力在地球附近下墜的物體，一分鐘內所作之道路爲  $60 \cdot 60 \cdot 15 \frac{1}{12}$  尺，一秒鐘內所作者爲  $15 \frac{1}{12}$  尺，或 15 尺 1 寸  $1 \frac{1}{9}$  分(巴黎尺)。

在地球上，重物體之下墜實由於該項力。按許根司之研究，一寬爲巴黎秒所定的擺錘之長，爲 3 尺 8,5 寸(巴黎尺)。

一下墜的重物在一秒鐘內所經過之高與擺錘長之半相比，等於一圓之周與其徑相比之平方，所以爲 15 尺 1 寸  $1 \frac{1}{9}$  分。使月球留在其軌道內的力，當月球下墜至地時，亦即等於重力，所以我們亦可稱之爲重力，而在實際上亦即是此力。倘此力與重力不同，則由此二力之相合的作用，物體向地下墜時，其速度必加倍，因而所經過之道路，一秒鐘內當爲  $30 \frac{1}{3}$  尺。但此與經驗不符。

以上之計算，是假定地球爲靜止的。倘地球與月球均繞太陽運行，同時並繞其共同重心運動，則重力之定律不變時，其中心距離爲  $60 \frac{1}{2}$  地球半徑，此可由第一編 § 101 以計算之。

§ 5. 附註. 此定理之證並可如下詳細明之。倘繞地球的月球有多個，如木星及土星方面，則其環繞時間亦必服從開柏萊所發見的定律，因而其向心力與其距地球中心之距離平方成反比。倘其中離地最近的為最小，差不多與地球高山之巔相接觸，則其向心力（即使其恆不能離開其軌道的力）按以上之計算，與該高山巔上物體之重力差不多相等。今如將此小月球之向心力奪去，則此月球不能在其軌道內運行，而向地球下墜，其速度亦與山巔上物體下墜之速度相等，因為其所受之力相等。倘小月球下墜之力與重力不同，同時，此月球對於地球亦有重量，則因此二力之同時的作用，月球下墜之速度必加倍。但此二種力均向地球，而且相似並相等，故其原因按第一第二二規律亦必相同。因此，使月球不能出離其軌道的力，與我們所稱的重力相一致，而小月球在山巔上或則一切重力都沒有，或則其下墜速度較之物體之下墜速度大一倍。

§ 6. 定理. 木星之衛星向木星發生吸引作用，

土星之衛星向土星，行星向太陽；此項星均因其重力之作用，恆離開直線運動而留在其曲線的軌道內。

木星衛星之環繞木星，土星衛星之環繞土星，以及水星金星等行星之環繞太陽，係同類的現象，故按第二規律，其原因亦為同類的；尤其是因為與該項運動有關的力，均係向着木星，土星及太陽之中心，而且其與該項中心之距離的關係，服從相同的比例及定律，即，地球重力之比例及定律。

系 1. 所以重力向一切行星及衛星均發生作用。

蓋金星，水星及其他行星與木星及土星等為同種類的星，這是人所共認的。因為每一吸引均按運動之第三定律為相互的，故木星對於其一切衛星，土星對於其一切衛星，地球對於月球，太陽對於一切行星均有重力。

系 2. 向各個行星的重力，與各個處所離其中心的距離之平方成反比。

系 3. 按系 1 及系 2, 一切行星相互間均有重力; 所以木星與土星在會合點之附近互相吸引, 使其相互間之運動失調. 同樣的, 太陽能使月球之運動失調, 太陽與月球能使我們的海洋失調; 此均於以後明之.

§ 7. 附註. 一直到現在, 使天體不能出離其軌道的力, 我們名之爲向心力. 我們已知道此項力與重力是一物, 所以此後即稱之爲重力. 使月球不能出離其軌道的該項力之原因, 按第一, 第二及第四諸規律, 可推至於一切行星.

§ 8. 定理. 一切物體對於各個行星均有重力, 前者對於每個行星之重量, 在與後者中心相等之距離內, 與物體之物質量相比.

一切重物向地球之下墜 (倘將由不同的空氣之抵抗力所發生的阻力除去), 其時間均相等, 這是很早以前就有人觀察到了, 而在擺錘方面, 尤可很精確的見到這一層. 我曾經用金, 銀, 鉛, 玻璃, 沙, 鹽, 木, 水等各物體做過試驗. 我所用的係兩個

圓的空盒，其大小相等，其一盛以木，於其他之振動點則繫以等重的金。此二盒所成之擺錘，其線長為11尺；就其重量，形狀，空氣之抵抗力等而言，此二者完全相等。其振動的時間均很長。金之物質量與木之物質量相比，如其一之重量與其他之重量相比；其餘的物質亦是如此。在重量相同的物體方面，物質之差即使小於其全部之  $\frac{1}{1000}$ ，在此項試驗方面亦易觀察到。

向行星的重力之性質與向地球之重力相同，此亦為無可疑惑者。我們試設想，將地球上的物體高舉入月球之軌道，同時並將月球之一切運動均奪去，俾讓其與該項物體一同向地下墜，則我們前已說過，在同時間內，二者下墜所經過之道路必相等；故該項物體與月球物質之量相比，如其重量與月球之重量相比。

又因木星衛星之環繞時間，與其距木星中心的距離之 $\frac{3}{2}$ 次方相比，故其加速的重力，向着木星而與此項距離成反比。所以在相等的距離內，其加

速的重力亦相等。而如由相等的高下墜時，在同時間內所經過之道路亦相等；此與地球上物體下墜的情形一致。

仿此，繞太陽運行的行星，倘在相等的距離內由此脫去，則其向太陽前進的時間如相同，其所經過之道路亦必相同。但能使不相等的物體作相等加速的力，與物體是相比的，即是，重量與行星之物質量相比。至於木星及其衛星對於太陽之重量亦與其所含之物質量相比，此可由衛星之極規則的運動按第一編 §106 系 3 之理以知之。倘其中有若干，按物質量之比例，較其他為較強的被吸引，則衛星之運動因此項不同的吸引力必致失調。倘在相等的距離內，一衛星對於太陽的重力，按之物質量的比例，較之木星為大，其較大的度為  $d:e$ ，則太陽中心及衛星軌道中心間之距離，恆較之太陽中心與木星中心間之距離為大，其比為上述的比例之平方根；此為我所曾經計算過者。反之，倘一衛星對於太陽之重力為輕，其比例亦為  $d:e$ ，則

其軌道中心點，亦以該項比例之平方根，與太陽中心點之距離減小。故如在離太陽等遠處，任何一衛星對於太陽之加速力，較之木星之加速力為大或小，其大小之度雖祇為全力之  $\frac{1}{1000}$ ，但衛星之中心點與太陽之距離，較之木星之距離亦即大或小  $\frac{1}{2000}$ ，即是，大或小  $\frac{1}{2}$  的最外的衛星與木星間之距離。軌道方面發生此項離心率必能為我人所容易觀察到。但衛星繞木星的軌道，係同心的，故木星及其衛星對於太陽之重力的加速必相等。因為這個理由，土星及其衛星對於太陽之重量，在相同的距離內，與其物質之量相比。此外，月球與地球對於太陽或則完全沒有重量，或則其重量必與其質量完全相比。按之 § 6, 系 1 及 3, 月球及地球必有重量。所以，任何一行星之各部分，其對於一其他行星之重量，其相比等於物質之量相比。蓋如其中有一部或多部分，其吸引作用較之其物質量之比例為大或小，則此全個行星之重力必較之與其物質量相比的為大或小；至於此項部分為行星

之外面的或內面的部分，全無關係。

今如設想將地球上之物體高舉入月球之軌道，則可將其與月球上之物體相比較。倘其重量與月球外部之重量相比，如物質之量相比，但與內部之重量相比，其比率較大或小，則此項物體與全月球之重量相比，其比率必較大或較小。然此與我們以前所已證明者相矛盾。

系 1. 所以物體之重量與其形狀或組織無關。

蓋如物體之重量能隨其形狀而改變，則一時可很大，一時又可很小，雖物質之量相等，而重量無有一定。此與經驗完全不合。

系 2. 一切圍於地球四周的物體對於地球有重量，倘其與地球之距離相等，則其重量與其所含之物質量相比。

在一切可得到的物體方面，此均可用試驗證明之，而按第三規律，我們即可將其推廣至一切物體視之為普通的。倘有某種物體完全沒有重量，或其吸引作用小於其物質量之比率，則因此項物體

與其他物體之不同處祇在其部分之形狀（按亞里士多德，笛卡爾及其他諸人），則經形狀改變後，此項物體可轉變成為與普通一般的物體，其重力與其物質之量相比。反之，很重的物體亦可經若干時間後成為無有重量的物體。如是，重量即與形狀有關，隨形狀而變，此即與系 1 中所言者相矛盾。

系 3. 一切空間，不是以相同的強度被佔滿。

倘然如此，則在空氣附近的流體之比重，因其物質密度之大，不會對於水銀，金或其他密度較大的物體退讓。因之，金或其他物體在空氣內不會下降；蓋物體在流體內能下降，祇因其比重較大的緣故。但如將某一部空間內之物質稀薄化至某種程度，使其減小，則亦必可將其稀薄化至於無限。

系 4. 倘一切物體之一切固定的微粒，其密度均相等，非有細管發生不會稀疏，則可有一真空。

倘微粒之惰性力與其大小相比，則我斷定此項微粒為等密的。

系 5. 重力與磁力之性質不同。

蓋磁力不與所吸引的物質之量相比。有若干種的物體，其被磁力之吸引較強，若干種較弱，有的物體則完全不受其吸引。同一物體之磁力可增加或減少之；有時候，就其與質量之比而言，較之重力為強。其與距離之關係，亦非為隨距離之平方而減小，差不多與其三次方同減小，此為我用粗的試驗所測過者。

§ 9. 定理。 一切物體均有重力，而且與其所含的物質之量相比。

以上我們已經證明，一切行星相互間均有重力，而如將其中之某一個特別提出，則其他行星對此的重力，均與距此的距離之平方成反比，因而一切行星之重力均與其所含物質之量相比。又，一行星  $A$  之一切部分對於一其他行星  $B$  均有重力；任何一部分之重力與其全體之重力相比，等於前者之物質質量與後者之物質質量相比。此外，則按運動第三定律，作用與其反作用恆相等；所以， $B$  對於  $A$  之一切部分亦均有重力，其對於任何一部之重力

與其對於全行星之重力相比，如此部分之物質與全行星之物質相比，此即所欲證者。

系 1. 所以對於某一行星之整個的重力，係由對於其各部之重力所合成。

在磁力及電力的吸引方面，我們可見其例，因為對於整個的吸引，是由對於各部的吸引所合成。倘我們設想將幾個小的星合成爲一大的行星，則其重力之關係亦是如此；因為在這裏，全個的力亦由其組成的各部分之力所合成。

倘然有人對於此作反對之論，謂按照這個定律則地球上之一切物體間亦必有互相吸引力，但事實上我們卻不能看到；則我可以如此回答之：此項物體間之重力與其對於地球之重力相比，等於前者之質量與後者之質量相比。因之，相互間的重力雖存在，但因其太小之故，不能爲吾人所觀察到。

系 2. 對於一物體任何部分之重力，與其距此部分的距離之平方成反比。

此可由第一編 § 117 之系 3 以知之。

§ 10. 定理。 兩個球之物質相互間有重量。今如此項物質在其距中心相等處為均勻的，則其一球對於其他球之重量與二中心點間距離之平方成反比。

我們既已知道對於一整個行星之重力係由對於其各部分的重力所合成，又知道每一部分之力與其距離之平方成反比；但尚不能確定者，即，此項相比性，是否對於由諸部分力所合成的全力亦適用，或祇能近似的適用。我們很可以相信，此項相比性對於較大的距離可以完全適用，但在行星之面的附近必須受顯著的改變，其原因則在距離之不同以及位置之不同。不過由第一編 § 18 及 § 119，我們已可知道，此項相比性即在該項狀況下亦仍準確。

系 1. 由此，我們可求得物體對於各個行星之重量，並將其互相比較。

在圓的軌道內繞行星而運動的相等物體之重量，其相比等於（按第一編 § 18 之系 2）此項徑相

比之正，環繞時間之平方之反，其在行星面上之重量，或在某種距離內之重量，其大或小均決定於距離平方之反比。

金星繞日的環繞時間為

224 日  $16\frac{3}{4}$  小時，

木星之第四衛星繞木星之環繞時間為

16 日  $16\frac{8}{16}$  小時，

土星之第六衛星(許根司所發見)繞土星之時間為

15 日  $22\frac{2}{3}$  小時，

而月球繞地球之時間則為

27 日 7 小時 43 分。

我應用此項環繞時間，金星與太陽之平均距離，木星第四衛星之最大差離  $8' 16''$ ，許氏衛星之差離  $3' 4''$  以及月球之差離  $10' 33''$ ，即可知在相等的距離內，相等的物體對於太陽，木星，土星，地球之中心的重量，與

$$1, \frac{1}{1067}, \frac{1}{3121}, \frac{1}{169282}$$

諸數各各相比。

在不相等的距離內，此項重量之改變，以距離之平方之反為比例。例如相等的物體在

太陽，木星，土星，地球上，各與其中心相距

10000, 997, 791, 109

時，亦即是，在其面上時，各與

10000, 943, 529, 435

諸數相比。

以下我們可以知道，月球面上之物體，其重量為何如。

系 2. 我們於是亦可求得此項天體所含之物質量。

蓋此項物質之量相比，等於距中心等遠的距離內之吸引力相比，或即是，

太陽，木星，土星，地球之質量，

各與以下之數相比：

$$1, \frac{1}{1067}, \frac{1}{3021}, \frac{1}{169282}$$

倘太陽之視差大於或小於  $10''30'''$ ，則地球所含之

物質量，必須將其放大或縮小，以三次方為度。

系 3. 行星之密度亦可求得之。

相等而且同類的物體對於同類的球之重量，按第一編 § 114，是與後者之徑為相比的，故不同類的球之密度相比，等於此項重量為其徑所除後相比。但我們已知道，太陽，木星，土星及地球之徑，各與

10000, 997, 791, 109

相比，而對於此之重量各與

10000, 943, 529, 435

相比，故其密度各與

100; 94,6; 66,9; 399

相比。

由此項計算所得的地球之密度，與太陽之視差無關，而係由月球之視差所決定，故很準確。從可知太陽較木星為密，木星較土星為密，地球則較之太陽更密，而且密四倍。太陽之較稀薄，其原因在於其熱。月球則較之地球更密，此於以下明

之。

系 4. 因此，行星愈小，則在尋常的狀況下，其密度愈大；故重力在其面上必與相等更接近。

在尋常的狀況下，與太陽較近者，其密度亦較大；所以地球較之木星爲密，木星較之土星爲密。其與太陽之距離不相同，能使每個行星，按照其密度爲比，受太陽之熱較多或較少。倘地球落入土星之軌道，則地面上的水必恆凍結；反之，倘地球在水星軌道內，其水必立即蒸發。熱與之相比的光，在水星面上較之在地面上強七倍(6,674 倍)；我曾用熱度表試驗過，倘太陽之熱較之現在的夏天增加七倍，則地面上之水立即沸騰。

水星上的物質必與其所受之熱相適當，這是無可疑的，故必較地球上之物質爲密。蓋物質愈密則其所需之熱量亦愈多，俾物質能受同樣的作用。

§ 11. 定理. 在行星之內部，重力之減小，差不多與距中心的距離之平方成反比。

倘行星之物質，其密度均相等，則按第一編

§ 115, 此定理必完全準確。因此, 關於此之差失, 均由密度之不相等所發生。

§ 12. 定理。 行星在天空中之運動, 可繼續至很久。

在第二編 § 61 內, 我們已證明, 一凍結的水球在空氣內運動時, 因空氣之抵抗力, 當其經過半徑長的道路時, 失去其運動之  $\frac{1}{4586}$ 。在較大的球方面, 倘其速度亦較大, 則其比亦必仍是如此。

地球較之水球之密度要大的多; 此可以下法明之。倘地球全為水所成, 則可有密度較小的物體, 因其比重之小, 能自然浮至水面在其上浮動。因此理由, 倘地球完全為水所包圍, 則因其較水為疏, 故必於一處向上浮, 而水即向其相反的處所聚積。我們的地球既大部為海洋所包圍, 亦必可適用此定理。故如地球之密度不較水為大, 則必向上浮, 而且按照其疏密之度, 一部分透出水面, 而水則向其相反的處所聚積。

用同樣的推論法, 可知太陽上之黑斑, 較之其

發光的物質爲輕，故浮在其上。此外，我們可知行星開始時如爲流體，則以後陸續必將較重的物質推入中心。

地球較之水尋常重二倍，而如深掘入地時，則可發見其較水重3倍，4倍乃至5倍之處。因此，地球較同樣大的水球，物質必多5至6倍，尤因我們已知其密於木星四倍，故可如此推論。如後者之物質亦較水爲密，則在30日的時間內，經過其459半徑長的道路時，在與空氣同樣密的中介物內，必失去其運動之 $\frac{1}{10}$ ，但中介物之抵抗力隨其重量及密度而減小，例如水之重量較水銀小 $13\frac{5}{8}$ 倍，故其所發生的抵抗力亦少 $13\frac{5}{8}$ 倍，空氣較水之重又小860倍，故其抵抗力亦小於水者860倍。在天空中，星球在其內運行的中介物，其重量爲無限小，故其抵抗力差不多等於0。

在第二編第§31內，我們已知道，在高出地面200英里處，其空氣密度與我們四周的空氣密度相比，如

$$0,0000000000003998 : 30$$

$$= 1 : 75 \text{ Billion.}$$

所以木星倘在如是密的中介物內運行，則雖經 1000000 年之長久，亦不會失去其運動之  $\frac{1}{1000000}$ 。我們所知道的，祇是空氣，水蒸氣等在地面附近之抵抗力。倘用一玻璃筒，將其內的此項氣抽去，則物體在其內下墜時不受若何抵抗力，雖金與羽之輕重截然不相同，但其下墜速度相等，於同一時候達到底上，其所經之高為 4, 6 或 8 英尺都可以；這是我們曾用試驗證明過的。因此，行星及彗星等在沒有空氣抵抗力的自由空間中運動時，其所歷時間必能很長久。

§ 13. 假設 I. 宇宙系統之中心係靜止不動的。

關於此點，一般都承認，不過有的人以地球為宇宙之中心，有的人則以太陽為宇宙之中心而已。我們現在試研究，由此可得若何的結果。

§ 14. 定理. 太陽與一切行星之共同重心係靜止的。

按之運動定律之系 4, 此重心或則靜止, 或則作直線的等速運動。倘此重心恆向前進, 則宇宙系統之中心不能靜止, 此即與假設相矛盾。

§ 15. 定理 太陽恆作運動, 但其與一切行星之共同重心相去甚微。

按 § 10 之系 2, 太陽之質量與木星之質量相比, 如 1067 : 1. 木星與太陽之距離, 與後者之半徑相比, 其率較大。故此二天體之共同重心, 落在一點, 此點稍在太陽之面以上。同樣的推論, 因太陽之質量與土星之質量相比, 如 3021 : 1, 而後者與前者之距離, 與太陽之半徑相比, 其率較此略小, 故並可知此二天體之共同重心落在一點, 此點稍在太陽面之下。今如將此項計算法推至於其他各行星, 則可知, 倘地球及其他諸行星均在太陽之一面, 此項星球之共同重心, 其距太陽之中心不能超過太陽之徑的遠。在其他事項下, 太陽之中心與此共同重心間之距離必更爲小, 而且後者恆爲靜止的, 故太陽之運動, 按各行星位置之不同而異,

但決不能與該重心相去很遠。

系。所以太陽，地球，及一切行星之共同重心必須視爲宇宙之中心。

蓋此項星球相互間有吸引力，而按運動之定律，因該項重力之作用，必恆爲動的。所以其動的中心點不能視爲靜的宇宙之中心。今如宇宙之中心處有一物體，一切物體對此之重力較爲強，如一般人的見解，則此優越的狀況必爲太陽所有。但太陽係動的，故必另取一點以爲宇宙之中心，此點當爲靜止的，而且與太陽之心相距甚微；尤其是，倘太陽之體較大，密度亦較大，則其相距尤微，因爲在此狀況下，太陽之運動更有限。

§ 16. 定理。行星在橢圓內運行；此橢圓之一焦點，在太陽之中心。繞此點所作之面積，係與時間相比。

以前，我們已討論過此項現象。倘我們能知其原理，則天體之運動，不難推論而得。故如我們知道，行星對於太陽之重量與其距離之平方成反比，

則按第一編之 § 13, § 29, 及 § 32 之系 1, 即可知, 倘太陽靜止着, 行星之相互間亦無作用, 其軌道均爲橢圓無疑, 其共同的一焦點在太陽之中心, 繞此所作之面積, 均與時間相比。但事實上, 行星間並非無有相互作用, 祇是很弱, 故可將其略去不計, 而按第一編之 § 107, 此項作用對於橢圓軌道之影響亦甚小, 倘我們假定太陽爲動的, 則其影響尤小。

不過如木星對於土星之影響, 則我們不能將其完全略去。對於木星的重力與對於太陽者 (在同距離內) 相比, 如  $1 : 1067$ 。故在木星與土星會合點之附近, 二者間之距離與土星與太陽之距離相比, 約如  $4 : 9$ , 土星對於木星之重力與其對於太陽之重力相比, 如  $81 : 16 \cdot 1067$ 。亦即是, 約如  $1 : 211$ 。

故土星之軌道在該點附近必與木星同失調, 天文學者當能注意到。隨此行星在會合點附近位置之不同, 其偏心率或則增加或則減小。其遠日點

有時向前，有時則向後，而其運動則交互的加速並遲緩。按第一編 § 108，如假定其軌道之在下的焦點落在太陽與木星之共同重心處，則木星之吸引所發生的土星運動之失調，差不多可以完全除去，不過其平均運動之失調亦不能免去。如是，最大的失調，可使其不超出 2 分鐘。每年的平均運動方面之最大的失調，亦不能超出二分鐘。

在木星與土星之會合點，太陽對於土星，木星對於土星，木星對於太陽之加速的重力相比，約如

$$16 : 81 : \frac{16 \cdot 81 \cdot 3021}{25}$$

$$= 16 : 81 : 156609.$$

太陽與木星對於土星的重力之差與木星對於太陽的重力相比，如

$$65 : 156609 = 1 : 2409.$$

土星對於木星運動所能發生的最大之失調作用，其力與此項差相比；因此，木星軌道之失調，遠較之土星軌道之失調為小。

其餘諸行星之軌道失調更為小，不過地球不

在內，因為月球對於地球之失調影響頗為大。地球與月球之共同重心，繞着太陽在橢圓內運動，其一焦點即在太陽處，其繞此所作之面積，與時間相比。地球繞此共同重心所需之時間約為一月。

§ 17. 定理。 軌道上之遠日點及交點係靜止的。

按第一編 § 29，遠日點係靜止的，而按該編 § 13，其平面亦靜止的，故其交點亦必如此。不過我們亦須承認，行星及彗星間之交互作用能發生某種參差；但因此項參差甚小，故於此可不論。

系 1. 恆星為靜止的。

因為對於遠日點及交點而言，此項星之位置係不變的。

系 2. 因為地球之每年的運動，不引起某種可見到的視差，故其吸引力在太陽系之區域內不引起若何可見的作用，此則因其相互間之距離極大之故。或者恆星間之相互作用亦因其相反的吸引力而抵消。此可由第一編之 § 22 知之。

§ 18. 附註. 與太陽相距最近的諸行星間之交互影響，如水星，金星，地球及火星等間之交互影響，因過於小，不能注意到，故其交點及遠日點均靜止着，但木星，土星及其他星之影響尚未計算入內。由重力之理論，我們可推知，遠日點對於恆星而言實稍有向後的運動，其率以距離太陽的遠之 $\frac{3}{2}$ 次方爲比。故如火星之遠日點在一百年內對於恆星而言向後運動至  $33' 20''$ ，則地球之遠日點，以及金星水星之遠日點，在該項時間內，各經過  $17' 40''$ ， $10' 53''$  及  $4' 16''$ 。在前節內，我們對於此項不顯著的運動，並未注意過。

§ 19. 問題. 試求諸軌道之主要的徑。

按第一編 § 35，可假定其與環繞時間之 $\frac{3}{2}$ 次方相比。於是可按該編 § 101，將其徑放大之，其率等於行星及太陽之質量之和之三次方根，與太陽質量之三次方根之比。

§ 20. 問題. 試求諸軌道之偏心率及遠日點。

此問題之解法可由第一編 § 39 以得之。

§ 21. 定理。 行星之私轉係等速的，月之秤動係由其私轉所發生。

此可由運動之第一定律及第一編 § 107 之系 22 以知之。

對於恆星而言，木星完成其私轉之時間為  $9^h 56^m$ ，火星為  $24^h 39^m$ ，金星為  $23^h$ ，地球為  $23^h 56^m$ ，太陽為  $25\frac{1}{2}$  日，月球為 27 日  $7^h 45^m$ 。此可由其現象以知之。因為太陽面上之黑斑，對於地球而言，必須經  $27\frac{1}{2}$  日然後回復原處，故對於恆星而言，太陽之私轉為  $25\frac{1}{2}$ 。月球之私轉約須一月，故其向遠處的焦點之面，差不多恆一定，而隨此點之位置定其與地球之相背關係。此即是長的方面之月球秤動。至其寬的方面之秤動，則由其寬及其軸對於黃道二傾斜所致。此項秤動的理論，曼爾開托 (*Mercator*) 曾根據我所給他的信，於其所著天文學一書內詳細論過(書出版於 1676 年)。

土星之最遠的衛星，即第六衛星，似乎亦作相似的運動，繞其軸旋轉，其向土星之面恆不變。當

其與該行星軌道之東部相接近時，即不易看到，有時竟完全不見。所以此星對於地球能有其面之一部分向之，在此部分上有黑斑存在。此爲卡西尼所首先注意到的。

木星之最遠的衛星，似乎亦以相同的方法繞其軸旋轉。在其與木星相背的面上，有一黑斑，而當此衛星落在木星及吾人視線之中間時，此黑斑在吾人看來，好像是在木星上的。

§ 22. 定理。 行星之軸小於其赤道之徑。

倘行星無私轉，則因其各部分之重力均相等，故必爲球形。但其私轉的結果，能使其求離旋轉軸的物質，向赤道高起。但如其物質爲流體的，則其向赤道之高起，必使此圓之半徑增大，同時，因兩極沈下故軸即縮短。由天文上的觀察，可知木星之連結兩極的徑，較之其連結東西的徑爲小。用同樣的理論法，可知，我們的地球倘非赤道高於兩極，則後者處之海洋下沈因而能將陸地淹沒。

§ 23. 定理。 試求一行星兩軸之比。

我們同國的人諾爾吳 (*Norwood*) 曾於 1635 年測量過倫敦與約克 (*York*) 間之長爲 905751 英尺；他又測定兩處之緯度差爲  $2^{\circ}28'$ ，故每度爲 367196 英尺，即，57300 *Toisen*。

皮卡 (*Picard*) 又曾於阿米安 (*Amiens*) 及馬伏新 (*Malvoisin*) 間測過  $1^{\circ}22'55''$  的弧，得每度之數爲 57060 *Toisen*。

卡西尼 (其父) 測過可利烏爾 (*Collioure*) 及巴黎天文臺間之度數，其子又加上了天文臺至鄧開欣 (*Dünkirchen*) 的塔中間之距離。如是所得之全部距離爲  $486156\frac{1}{2}$  *Toisen*，而可利烏爾與鄧開欣間之度差爲  $8^{\circ}31'12\frac{3}{4}''$ ，故得每度爲 57061 *Toisen*。

由此項平均值，即 57060 *Toisen*，得地球之周爲

123249600 巴黎尺，

其半徑爲 19615800 巴黎尺。

不過在這裏，我們係假定地球爲圓形的。

以上我們已知道，在巴黎的緯度下，重物下墜

時一秒鐘內所經過之道路爲 15 尺 1 寸  $1\frac{7}{8}$  分，即，2173 $\frac{7}{8}$  分。但物體之重量能爲其四周空氣之重量所減小。今設所減小者爲其全重量的一萬分之一，則物體在真空內下墜時，一秒鐘內所經過之道路，當爲 2174 分。倘物體在一圓內運動，此圓之半徑爲 19615800 巴黎尺，其環繞時間爲 23<sup>h</sup>56<sup>m</sup>4<sup>s</sup>，則一秒鐘內所經過之弧爲 1433,46 尺。此弧之矢爲 0,0523656 尺，即 7,54064 分。

在巴黎的緯度下，物體下墜時之重力與赤道下之離心力相比，如

$$2174 : 7,54064.$$

赤道下的離心力與巴黎緯度下的離心力相比，等於該緯度之半徑之平方與其餘弦之平方相比，即是，如

$$7,54064 : 3,267.$$

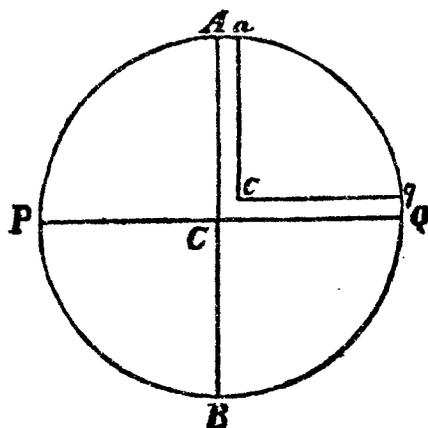
今將此項力加於一其他力上（此其他力即在巴黎的緯度下使物體下墜的力），則其所經過的空間，一秒鐘爲 2777,267 分，即，15 尺 1 寸 5,267

分。又，此緯度下之全部重力與赤道下之離心力相比，如

$$2777,237 : 7,54064 = 289 : 1.$$

今設  $APBQ$  為地球之形，此形並非為球形，而係一橢圓形，即將一橢圓環其小軸  $PQ$  旋轉而產生者。又設  $ACQqca$  為一孔道，由  $Qq$  極通至中心  $Cc$ ，復由此通至

赤道  $Aa$ ，其內盛有水。如是則  $ACca$  內之水，其重量與  $QCcq$  內水之重量相比，如  $289 : 288$ ，其原因則



第一八八圖

因旋轉運動所發生的

離心力能將  $289$  之一部分抵消，故  $ACca$  內之  $288$  部分水能與其他  $289$  部分相當。

按第一編 § 137 系 2 之方法，我求得，倘地球為均勻的物質所成，沒有一切運動，而且其  $PQ$  軸與  $AB$  徑相比，如  $100 : 101$ ，則  $Q$  處之重力與

(中心爲  $C$ , 半徑爲  $CP$  或  $CQ$  的)球上  $Q$  處之重力相比, 如  $126 : 125$ .

用同樣的推論法, 可知, 將  $APBQ$  橢圓環其  $AB$  軸旋轉而作成的卵形上  $A$  點之重力, 與以  $C$  爲中心  $CA$  爲半徑而作成的球上  $A$  點之重力相比, 如  $125 : 126$ .

又, 地球上  $A$  點之重力, 爲該卵形上重力及球上重力之中比. 蓋如將後者之徑按  $101 : 100$  減小之, 則即成爲地球之形, 而將此形以同比例減小其一徑時, 即成爲該項卵形. 在前一事及後一事,  $A$  點之重力即差不多以此率減小.

所以球上  $A$  點之重力與地球上  $A$  點之重力相比, 如  $126 : 125,5$ , 而以  $CQ$  爲半徑的球上  $Q$  點之重力, 與以  $CA$  爲半徑的球上  $A$  點之重力相比, 如其徑相比, 即, 如  $100 : 101$ .

今將

$126 : 125,$
$126 : 125,5,$
$100 : 101$

三比例相結合，即得地球上  $Q$  點之重力與其  $A$  點之重力相比為  $501 : 500$ 。

按第一編 § 137 系 3,  $ACca$  及  $QCcq$  內之重力，與各該處所距地心的距離相比。故如將此項孔道用橫的相距等遠的面分割成為若干段，則其任何多的段（在一孔道內者）之重量，與其他等多的段（在他孔道內者）之重量相比，等於

$$101 \cdot 500 : 100 \cdot 501 = 505 : 501$$

所以  $ACca$  內任何一段的離心力，即由私轉所發生的離心力，與此段之重量相比，如  $4 : 505$ ，而由此  $505$  部分上減去其  $4$ ，則二孔道內之重量即相等，而流體成為均勢。

不過任何一段之離心力與其重量相比，如  $1 : 289$ ，即，離心力當為重量之  $\frac{4}{505}$ ，但實際上祇為  $\frac{1}{289}$ 。因此，我們可用一簡單的比例以知道，倘因離心力  $\frac{4}{505}$  之作用能將  $ACca$  內水之高超過  $QCcq$  內水高之  $\frac{1}{100}$ ，則離心力  $\frac{1}{289}$  祇能引起相似的差  $\frac{1}{289}$  高。於是，地球之軸與赤道之徑相比，如

229 : 230.

按皮卡之計算，地球之平均半徑爲 19615800 巴黎尺 = 3923,16 英里；所以地球在赤道上較之其極爲高，所超出的爲 85472 尺 =  $17\frac{1}{10}$  英里，而

赤道本身之高約爲 19658600 尺，

兩極本身之高約爲 19573000 尺。

倘有一行星較之地球爲小或大，但其密度及私轉之時間仍如此，則離心力與重力之比亦仍如此，因而其軸與赤道徑之比亦不變。

倘私轉之速度以某種比率增加或減小，則離心力以其平方增加或減小，因而徑之差亦差不多以同樣的平方比增加或減小。倘其密度亦以某種比率增加或減小，則對此的重力亦以同樣的比例增加或減小，但徑之差則以此比減小或增加，適與此相反。對於恆星而言，地球之私轉爲  $23^h 56^m$ ，木星爲  $9^h 56^m$ ，故此項時間之平方相比，如 29 : 5，而其密度相比，如 400 : 94,5。

所以木星方面徑之差與較小的徑相比，如

$$\frac{29}{5} \cdot \frac{400}{94,5} \cdot \frac{1}{229} : 1,$$

或差不多如

$$1 : 9\frac{1}{3}.$$

木星自東至西的徑與兩極間之徑相比，差不多如  $10\frac{1}{3} : 9\frac{1}{3}$ .

但觀察上所得的最大的徑為  $37''$ ，故最小的為  $33''25'''$ ；因光線上所生錯誤之故，每個上均增加  $3''$ ，則此行星之表面上可見的徑為  $40''$  及  $36''25'''$ ，故其相比差不多如  $11\frac{1}{6} : 10\frac{1}{6}$ .

不過在這裏，我們須假定，木星之一切物質，其密度均相同。倘在赤道附近物質較密，則其徑相比，可為  $12 : 11$ ，或  $13 : 12$ ，或  $14 : 13$ .

一六九一年時，卡西尼觀察到木星東面方向內之徑，較之兩極間之徑超過  $\frac{1}{16}$ 。我們同國的人旁德 (*Pound*) 亦曾用 123 尺長的遠鏡及精確的測微計於一七一九年時測量過木星之徑，所得如下：

(1) 一月 28 號 6<sup>h</sup>，得

大徑爲 13, 40,

小徑爲 12, 28,

其比爲 12 : 11;

(2) 三月 6 號 7<sup>h</sup>, 得

大徑爲 13, 12,

小徑爲 12, 20,

其比爲  $13\frac{3}{4} : 12\frac{3}{4}$ ;

(3) 三月 9 號 7<sup>h</sup>, 得

大徑爲 13, 12,

小徑爲 12, 08,

其比爲  $12\frac{2}{3} : 11\frac{2}{3}$ ;

(4) 四月 9 號 9<sup>h</sup>, 得

大徑爲 12, 32,

小徑爲 11, 48,

其比爲  $14\frac{1}{2} : 13\frac{1}{2}$ .

此理論與事實相符，而行星在其赤道處受日光之熱亦較強。

因地球之私轉，赤道下之重力必減小，此亦可

用擺錘試驗證明；以下當明之。

§ 24. 問題. 試求地球各處之物體重量，將其比較之。

以前曾指出，孔道  $ACQqca$  (圖 188) 兩管內所有水之重量，係相等的，其部分之重量 (此項部分與管相比，其在全部中之位置相同) 相比，如其全重量相比，故相等。所以此項相等，在兩管內位置相同的重量，其相比如 230 : 229. 凡同類而相等的物體，其關係均如此；祇須此項物在管內之位置相同；其重量之相比，如此項管相比之反，即，如此項物體與地心之距離之反比。又，在地面上的物體之重量，其相比亦如其距地心之遠相比之反。

從可知地面上任何處之重量，與該處距地心之遠成反比，故如假定地球為扁圓形，則其比可即求得。由此，我們可得以下之定理：由赤道向兩極所，重量之增加，差不多與其度數之正弦之平方相比。子午線內緯度之弧，其增加差不多亦以此比。巴黎的緯度為  $48^{\circ}50'$ ，赤道下的緯度為  $0^{\circ}0'$ ，兩極

下的緯度爲  $90^\circ$ ；故其倍長的弧之正矢爲 11334, 0, 20000, 而半徑則爲 10000. 兩極下的重力與赤道下的重力相比，爲 230 : 229, 故前者之超過後者爲 1 : 229. 從可知巴黎緯度下的重力之超出爲

$$1 \cdot \frac{11334}{20000} : 229,$$

而二處全部重力相比，如

$$2295667 : 2290000.$$

但振動時間相同的擺錘之長相比，等於重力之相比，而巴黎的緯度下之秒擺錘，其長爲 3 尺  $8\frac{1}{2}$  分，或因空氣之重，當爲 3 尺  $8\frac{5}{8}$  分，故赤道下擺錘之長，必短 1,087 分。

用相似的算法，我得到以下之表：

所在地之緯度	擺 錘 之 長		子午度之長
度 數	尺	分	<i>Toisen</i>
0	3	7,468	56637
5	3	7,482	56642
10	3	7,526	56659

15	3	7,596	56687
20	3	7,692	56724
25	3	7,812	56769
30	3	7,948	56823
35	3	8,099	56882
40	3	8,261	56945
41	3	8,294	56958
42	3	8,327	56971
43	3	8,361	56984
44	3	8,394	56997
45	3	8,428	57010
46	3	8,461	57020
47	3	8,494	57035
48	3	8,528	57048
49	3	8,561	57061
50	3	8,594	57074
55	3	8,756	57137
60	3	8,907	57196

65	3	9,044	57250
70	3	9,162	57295
75	3	9,258	57332
80	3	9,329	57360
85	3	9,372	57377
90	3	9,387	57382

由此表可知其相差極微，故在地理學上可將地球視爲一球形；尤其是，倘赤道處之物質較兩極爲密，即無甚大差發生。

有若干天文學者，曾在極遠處作過天文視察的，都注意到擺鍾在赤道處走得較慢。首先注意到此者爲利休(Richer)在開恩島(*Insel Cayenne*)之視察。他於八月中觀察恆星之經過子午線，注意到他的鐘對於太陽之平均運動而言走得慢了，其每日之差爲  $2^m 28^s$ 。

他於是作一單純的擺鍾，使其振動與極好的鐘之振動同時，然後求其長；如是，他反復作了極多次的試驗，共歷十個月之久，每星期試驗幾次。

當他回至法國時，他將此擺錘之長與巴黎秒擺錘鐘之長相比較，知道此擺錘之長較之巴黎者短約  $1\frac{1}{4}$  分。

自此以後，我們的同國人哈雷 (*Halley*) 於一六七七年又發見，聖海倫那 (*St. Helena*) 擺錘鐘之行走，較倫敦為慢。他雖沒有將其差測定，但他將擺錘縮短至  $\frac{1}{8}$  寸或  $1\frac{1}{2}$  分。

至一六八二年時，凡林 (*Varin*) 及德海 (*Deshayes*) 又於巴黎天文臺上測定秒擺錘鐘之長為 3 尺  $8\frac{5}{8}$  分，並用同樣的方法，測定哥利亞 (*Gorea*) 島上等時的擺錘之長為 3 尺  $6\frac{5}{8}$  分。所以其差為二分。

同年，他們又測定古德洛 (*Guadeloupe*) 及馬丁尼克 (*Martinique*) 二島上擺錘之長為 3 尺  $6\frac{1}{2}$  分。

古柏萊 (*Couplet*) 於一六九七年時在巴黎天文臺上將他的擺錘鐘按照平均太陽時間對準，使其與太陽之平均運動相符合。後來於次年十一月

他到利沙棚 (*Lissabon*) 時，發見該鐘之行走慢了，在二十四小時內慢  $2^m 13^s$ 。

翌年三月，他又於巴呂波 (*Paraibo*) 發見該鐘於二十四小時內慢  $4^m 12^s$ 。

他測定利沙棚之擺錘當較巴黎者短  $2\frac{1}{2}$  分。而巴呂波者則當短  $3\frac{2}{3}$  分。按他所觀察到的時間之差，此項擺錘長之差當為  $1\frac{1}{3}$  分及  $2\frac{5}{6}$  分。因此，他的試驗或者有不精確處。

一六九九及一七〇〇年時，德海又於美洲之開恩及格拉那大 (*Granada*) 島測定秒擺錘之長不到 3 尺  $6\frac{1}{2}$  分。在聖克利司托夫 (*St. Christoph*) 島上，他測得此長為 3 尺  $6\frac{3}{4}$  分，而在聖杜明古 (*St. Domingo*) 島上，為 3 尺 7 分。

一七〇四年時，弗依安 (*Feuillén*) 於美洲之保托倍羅 (*Pertobello*) 測得秒擺錘之長為 3 尺  $5\frac{7}{12}$  分，差不多較巴黎者短 3 分，不過在他的觀察方面，恐有錯誤，因為當他後來到馬丁尼克時，他發見等時的擺錘之長為 3 尺  $5\frac{10}{12}$  分。

在 巴呂波，緯度爲  $-6^{\circ}38'$ ，  
保托倍羅，緯度爲  $+9^{\circ}33'$ ，  
開恩，緯度爲  $+4^{\circ}55'$ ，  
哥利亞，緯度爲  $+14^{\circ}40'$ ，  
古德洛，緯度爲  $+14^{\circ}0'$ ，  
格拉那大，緯度爲  $+12^{\circ}6'$ ，  
聖克利司托夫，緯度爲  $+17^{\circ}19'$ ，  
聖杜明古，緯度爲  $+19^{\circ}48'$ ，

巴黎擺錘之長超過這些地方之長的數目，較之以前所得表上之數略爲大。因此，地球赤道部分之凸起，必較之以前所推得者爲高，而地心處之物質亦必較之地面爲密；不過同時我們又須假定，赤道熱帶區域之溫度，不致使擺錘之長增加。

皮卡曾觀察過，在冰凍氣候下一尺長的鐵條，將其在火上烤熱時，其長增加至一尺  $\frac{1}{4}$  分。以後，拉依耳 (*la Hire*) 又注意到，嚴冬時長爲 6 尺的鐵條，至盛夏置於日光下時，其長即增至 6 尺  $\frac{2}{3}$  分。但是鐘之擺錘從不將其置在日光下，而且其所受

外來之熱，還不及人身所受者。因此，擺錘夏天時長之增加，不能較之冬天超過  $\frac{1}{4}$  分。所以在各地所得擺錘長之差，不能歸之於氣候之溫度。我們亦不能將此項差歸之於觀察之錯誤，因為此項錯誤縱然不免，但亦非極大者，故儘可略去。這些試驗，一致的證明赤道下擺錘之長須縮短，較之巴黎天文臺者短一些，而且由各個觀察所得者，此項差恆  $>1\frac{1}{4}$  分而  $<2\frac{3}{4}$  分。在利休於開恩之觀察方面，得此項差為  $1\frac{1}{4}$  分；據德海之觀察，當為  $1\frac{1}{4}$  或  $1\frac{3}{4}$  分，而據其他諸人的觀察，為 2 分左右。此項結果之不同，可歸之於觀察者本身所作之錯誤，地球內部之不一致，山嶺之影響，空氣溫度之不同，等等原因。

據我所能判斷者，3 尺長的鐵條，在英國的氣候下，冬天較之夏天短  $\frac{1}{8}$  分。今將此項由溫度所發生的差由  $1\frac{1}{4}$  分上減去，則尚餘  $1\frac{1}{8}$  分的差；此與以前理論上所推得的  $1\frac{87}{1000}$  分相符合。利休氏於開恩島作了極多次的試驗，經十月之久，每星期

必試驗幾次，將該處所得擺錘之長與法國所定者相比較。其他諸人之試驗，沒有利氏那樣細心，故我們可將利氏的觀察作為較可靠的材料；如是，我們可推定，地球之赤道處，較之其兩極約高十七英里；此與以前理論上所得者亦一致。

§ 25. 定理。 二分點恆向後退，而在每年的環繞方面，地球之軸恆作章動，緣此，恆二次向黃道接近而二次返其原來的位置。

此可由第一編 § 107, 系 20 以知之。不過此項章動極弱，差不多不能注意到。

§ 26. 定理。 月球之一切運動及一切差失，均由以上之原則發生。

大的行星一方面繞太陽運行，同時，亦帶有小行星在其軌道內運動；此項小行星之軌道亦為橢圓，其一焦點即為該項大行星之所在。此可由第一編 § 106 以知之。小行星之運動，以多種方式為太陽所影響致失調，因為太陽對於此項運動必能使其發生種種差失，此可由我們的月球之運動方

面見到。在朔望點方面，月球之運動較速，以其向地球的半徑，在等時間內所作之面積較大，其軌道之曲率較小，故較之在直角距離方面與地球之距離為近。月球之偏心率，當其遠地點落在朔望點時為最大，而如落在直角距離處則為最小。所以月球在近地點時運動最速，而與地球亦較接近；反之，在遠地點時運動較慢，亦與地球距離較遠。又，遠地點向前移動，但交軌點則向後退，不過其運動並不相等。在朔望點方面，遠地點之向前移動較速，而在直角距離處，其向後退較遲；因此項前進較之後退為速，故每年必向前進。但交軌點在朔望點方面係靜止着，而在直角距離處很快的向後退。至於月球之最大緯度，則在直角距離方面，較之在朔望點為大。其平均運動，在地球之近日點方面較遲，在其遠日點方面較速。此為天文學者在月球運動方面所觀察到的最顯著的差失。

但此外尚有些其他的現象，為以前天文學者所未觀察到，而且其對於月球運動之失調影響，不

能歸納之在一定的定律支配之下。這些現象中，如月球之遠地點及交軌點之運動速度，朔望點方面最大偏心率及直角距離點方面最小偏心率二者間之差，以及某種差失，即尋常所稱為變差者。此項量之增減，均與太陽之外觀的徑之三次方相比。其變差之增加及減少，則差不多與直角距離點中間所經過的時間之平方相比。在天文測算方面，此項差失通常均將其與月球之中心均差相結連。

§ 27. 問題。 試由月球之運動，以推論木星及土星的衛星運動方面之差失。

由我們的月球之運動方面，可推得木星衛星亦即木星之月球之相似的運動。其法如下。

按第一編 § 107 之系 16，木星之最在外的衛星，其交軌點之平均運動，與我們月球方面的此項運動相比，等於地球之環繞時間比木星環繞時間之平方，以及木星衛星環繞木星的時間比月球環繞地球的時間，二者之合。由此可知，在 100 年內，第四衛星之交軌點向後運動至  $8^{\circ}24'$ 。

按同系，並可知在內的衛星之交軌點之平均運動與上述的運動相比，等於該項環繞時間與此衛星之環繞時間相比。因此，我們可視之爲已知者。

同時，並可知道上回歸點之前進的運動與其交軌點之後退的運動相比，如月球遠地點之運動與其交軌點之運動相比，所以亦可視爲已知者。不過如是所得的上回歸點之運動，必須以 5 : 9 或差不多 1 : 2 的比率減小之，其理由這裏不能詳論了。

任何一衛星之交軌點及上回歸點之最大的均差，與月球之交軌點及遠地點之最大均差相比，差不多等於前二者在其環繞時間內之運動與後二者在其環繞時間內之運動相比。

衛星之變差，如我們於木星方面所見者，與月球之變差相比，等於兩面的交軌點之全部運動（在衛星及月球繞太陽的時間內者）相比。此亦可由該系知之。而在第四衛星方面，此項變差不能超出 5,2"。

§ 28. 定理。海洋之潮落潮漲，係由於太陽及月球之影響。

按第一編 § 107 系 19 及 20, 可知在一太陽日及月球日之內, 海洋之潮漲及落必有二次, 而且最大的潮漲, 係跟着星球之經過子午線, 其時間不出六小時。在大西洋及愛提沃皮 (*Aethiopisches*) 海方面確是如此, 其地帶為法國及好望角之間; 而在太平洋智利及祕魯附近亦是如此。在這些海岸方面, 潮漲恆在第二, 第三, 及第四小時內, 祇有極少數地方, 則因海底關係而遲發。此處所謂小時, 係由星球經過子午線算起, 其大小則為一時間之  $\frac{1}{24}$ , 此時間為月球於其外觀的私轉上回到子午線時所必須者。

太陽或月球使海洋潮漲之最大的力, 係在此項星球達到子午線之際。此項力能繼續至相當的時間, 以後復有力增加, 使海洋之潮漲至最高度為止。在海岸方面, 其時間可歷一, 二或有時候至三小時; 倘海洋多沙牀, 則其時間可更久。

此項星球所引起的運動，有此二種，但不能分別觀察到，而恆合而爲一。在二星球之會合點或對點，其影響爲最大，因爲其影響合併在一起。在直角距離方面，太陽之漲潮作用適在月球之落潮作用的時間內；所以潮之漲落爲此二作用之差之結果。故影響爲最小。但我們經驗上知道，月球對於潮之影響較之太陽爲大，故有時候在第三月球小時之際，亦能有最大的潮漲。在朔望點及直角距離以外，單由月球之影響，潮必須於第三月球小時內達到最高，而如單由太陽之影響，則亦須於第三太陽時發生。但如由二者之組合的影響，則其最高的潮漲，在此項時間之中間，而且與月球之第三時較爲接近。當月球由朔望點轉至直角距離時，第三太陽時在第三月球時之前，最大的潮漲亦即在第三月球時之前。由直角距離至朔望時，適爲相反，最大的潮漲在第三月球時之後：

這是大海洋內之潮漲潮落之定律；在河海入口之處，尋常潮漲較遲。星球之影響，與其距地球

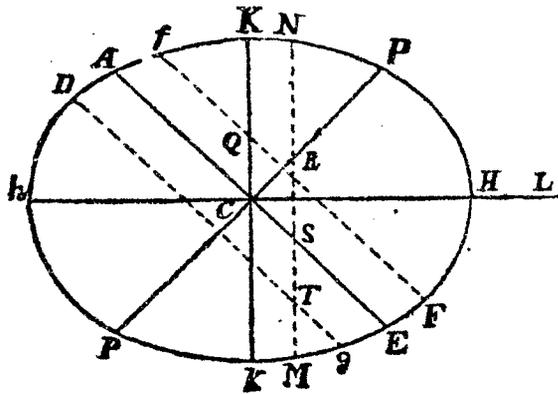
之遠近有關，在距離較近處，其影響自較大，而在遠處即較小。此項影響與其外觀的徑之三次方相比。在冬季，太陽落入其近地處，故其對於海洋之影響較大，所以朔望點之潮漲作用在冬季較夏季為大，直角距離點者則反之。

月球每月落入近地點一次，故當此時，潮漲亦較其餘的日子大。因為這個緣故，所以在兩個相接的朔望點方面，其最大潮漲，不能完全互相連接。

此二星球之影響亦與距赤道之遠有關。蓋如其一星球在極處，則其對水之各部其吸引力為不變的，故其作用不會有大小，而不能引起交互的運動。故如星球離開赤道而向兩極，則其影響必漸減小，所以在二至的朔望點時，其影響小，而在二分的朔望點，其影響大。但在二至的直角距離時，影響反大，在二分的直角距離時，影響又小，此則因月球當赤道，其影響超過太陽所致。所以在二分時，最大的影響在朔望點，而在直角距離點為最小。同時，由經驗上可以知道，朔望點之最大影響

後，必隨以直角距離點的最小影響。

因為冬季時太陽與地球較接近，故最大的及最小的潮之漲落，多在春分之前，少在其後，多在秋分之後，少在其前。



第一八九圖

又，星球之影響，亦與所在地之緯度有關。今設  $ApEP$  為地球，其上各處

均有甚深的海洋， $C$  為其中心點， $P, p$  為兩極， $AE$  為赤道。試於赤道外任取一點  $F$ ， $Ff$  線與赤道相平行， $Dd$  則為在赤道對面與此相當的平行線。設  $L$  為一處所，月球於三小時前曾在該處， $H$  為由此垂直至地球之點， $h$  則為地球對面之相當點。 $K, k$  二處與前者相距  $90^\circ$ ， $CH$  及  $Ch$  則為海洋之最高度， $CK$  及  $Ck$  為其最低度，均由  $C$  出發量之。今以  $Hh$  及  $Kk$  為軸作一橢圓，則此橢圓環其大

軸  $Hh$  旋轉時，產生一卵形  $HPKhpk$ ，很可以代表海洋之形狀。 $CF, Cf, CD, Cd$  爲  $F, f, D, d$  各點海洋之高。

在橢圓之旋轉時，其任何點  $N$  作成一圓  $MN$ ，與  $Ff, Dd$  相交於  $R$  及  $T$ ，與赤道  $AE$  相交於  $S$ ；如是則圓上各點  $R, S, T$  處海洋之高均爲  $CN$ 。在  $F$  之每日的私轉方面， $F$  處水之最高，在月球達其上昇最高處後之第三小時，其最低處則在  $Q$ ，在月球落下後之第三小時。此後則  $f$  處亦爲最高，在月球達其落下最低處後之第三小時，於是其最低又復在  $Q$ ，亦在月球上昇後三小時。第二次的水之高較之第一次爲小。

今設想將全部海洋，分割成爲兩個半球形的流，其一向北，在  $KHk$  半球上，其他則向南，在  $Khk$  半球上。此二流恆相反，依次進入地球上每一處之子午線，其時間爲 12 月球小時。但在北的處所，受向北的流爲多，在南者則受向南者爲多，故可有組合的潮漲，在赤道外的處所，爲二星球所

昇降下落者，其大或小爲交互的。當月球向該處天頂時，最大的潮漲約在月球達到天頂後之第三小時。反之，潮即成爲最小。此項潮漲之最大的差在二至時間內；尤其是，當上昇的月球之交軌點落在白羊宮之第一點時。此與經驗亦相符合，因爲在冬季時，朝潮較之夜潮爲大；在夏季則反之。哥柏辣司 (Colepress) 及司徒母 (Sturm) 曾於柏利毛 (Plymouth) 觀察到此項差別達 1 尺，於不列司土 (Bristol) 爲 15 寸。

以上所論的海洋之運動，因潮之交互的力能有所改變，蓋在星球之影響消失後，潮尚能繼續至若干時。此項運動之保存，能減小交互的潮漲之差，使適在朔望點後發生的較大，而適在直角距離之後發生的較小。因此，上述二處潮漲之差，不能超過 1 尺或 15 寸，而該二處之最大潮漲非爲朔望後之第一而爲其第三日。倘海潮經過沙礁，此項運動即能減小，因而在某種海峽及海流會合處，最大的潮常在朔望後之第四乃至第五日。

有時候，大洋的潮亦能經過各處的海峽而同至一處，其經過某個海峽時可較之其他爲速或緩。如是，此項潮漲即分成爲數部，相繼而至，因而發生各種新的運動。試設想有兩注相等的潮，由不同的處所向某處來，其一在前六小時，於月球抵天中後之第三小時達到。倘月球之天中時在赤道方面，則每六小時有相等的潮來，而與潮落適相遇。如是，其影響使海水無有起伏，終日平靜。倘月球離赤道，則潮即交互的時大時小，而有二次大潮二次小潮。二次大潮的影響使水在其中間的一個時候能達到最高度。在一次大一次小的中間，水所達到的高度亦爲中平，而在二次小的中間，水亦落入最低之度。所以在二十四小時之間，水不如尋常那樣的有二次高二次低，但祇有一次最高一次最低。倘月球由赤道離開，則水之最高在月球達到天中後之第六或第十三小時。

在倍休姆 (*Batsham*) 港的一個領港人之觀察中，哈雷氏發見了此項現象之許多的例；該港屬於

敦昆 (*Tunquin*) 王國，其緯度爲北  $20^{\circ}50'$ 。在這一個港方面，當月球經過赤道後之一天內，完全沒有潮漲。當月球開始向北時，即可看到潮之漲落，但不如在他處那樣的有二次；而祇有一次。月落下時，潮漲，上昇時，潮落。潮之漲隨月球之向北而增加，一直至第七或第八天，於是在以後的七天內，重復減小，其度與以前增加之度一樣。倘月球向相反的方向，則潮之漲轉而爲落；此項潮落在月落時發生，在月上時則潮漲。此種狀況一直繼續至月球重復改變其方向。欲到此港及其附近區域有二路，一在中國海在大陸及羅考尼亞 (*Luconia*) 島之間，一在印度洋在大陸及波奈河 (*Borneo*) 島之間。

故如海潮經過此項海峽，由印度洋在 12 小時內，由中國海在六小時內達到，則即構成組合的運動。此二海洋是否有其他的屬性，此可由觀察以知之，我且不論。此項觀察則可於附近海岸去做。

以上，我已論述過月球及海洋之運動。尚須研究者，是此項運動之大小。



中之  $LM$  及  $SM$  之部分  $TM$  能對於月球之運動發生失調的作用，此則於第一編之 § 107 中已知之。

地球與月球均繞其共同的重心運動，故前者之運動亦為同樣的力所影響而失調。不過此項力及運動之和可就月球而言，前者可用相似的線  $TM$  及  $LM$  表之。

$LM$  力之平均的量與能使月球在其軌道內繞太陽運動的向心力相比，等於月球繞地球的時間與後者繞太陽的時間相比之平方（按第一編 § 107 系 17）。

因此，其比為

$$\begin{aligned} (27^d7^h43^m)^2 & : (365^d6^h9^m)^2 \\ & = 1000 : 178725 \\ & = 1 : 178\frac{29}{40}. \end{aligned}$$

在本編 § 4 內，我們已知道，倘地球與月球繞其共同重心運動，則其平均的距離約等於  $60\frac{1}{2}$  地球半徑。此外，使月球在其軌道內繞地球於  $PT$

$=60\frac{1}{2}$  地球半徑之距離內運行的力，與使月球在同時間內於 60 半徑的距離內運行的力相比，如

$$61\frac{1}{2} : 60.$$

又，此力與地球上之重力相比，差不多如  $1 : 60^2$ 。所以  $ML$  平均力與地面上之重力相比，如

$$\begin{aligned} 1 \cdot 60\frac{1}{2} : 60^3 \cdot 178\frac{9}{40} \\ = 1 : 638092,6. \end{aligned}$$

由此，及由  $TM$  與  $ML$  之比，可求得  $TM$  之值，而此即為太陽對於月球發生失調影響的力。

§ 30. 問題。 試求月球繞地所作的面積之每時的增加；且假定，軌道為圓形的。

以前已知道，月球之半徑繞地所作的面積係與時間相比。但須月球之運動不為太陽之影響致失調。我們現在試研究，受太陽之影響而發生差率或每時的增加時，其狀況如何。為求計算之簡單，且假定其軌道為圓形的，暫將其他的一切差失均不計。

因其離太陽之遠，可暫假定  $SP$  及  $ST$  為平



$$\frac{3PK \cdot TK}{TP}$$

相比。其時間可用平均的運動，或  $CTP$  角或  $CP$  弧以表之。試作  $CG$  與  $CT$  相垂直，使  $CG = CT$ ，並設想將  $AC$  象限分割成爲相等的段  $Pp$ ，等等，表等多的相等的時間段。又作  $pk$  與  $CT$  相垂直，使  $TG$  線與  $KP, kp$  之引長相交於  $F$  及  $f$ 。如是，則  $FK = TK, Kk : PK = Pp : TP$ ，即， $Kk$  有一定的比。因而  $FK \cdot Kk$  或即  $FkKf$  面與  $\frac{3PK \cdot TK}{TP}$  相比，即與  $EL$  相比，而全個的面  $GCKF$  與一切力  $EL$  之和相比。從可知該面與速度相比，此項面即係該項力所發生者，亦即是與產生  $CTP$  面的加速相比。

使月球繞地球在  $TP$  距離內於  $ADBC = 27^d 7^h 43^m$  時間內完成其環繞的力，其影響能使一下墜的物體在  $CT$  時間內經過  $\frac{1}{2}CT$  道路，於同時間內達到一速度，與月球在其軌道內運行的速度相等。此可由第一編 §18 之系 9 以知之。因爲垂

直於  $TP$  上之線  $Kd = \frac{1}{3}EL$ , 在八分點處  $= \frac{1}{2}TP$  或  $= \frac{1}{2}ML$ , 故  $EL$  在八分點為最大。超過  $ML$  力之比率為 3 : 2. 因之, 此力與使月球繞地球在其環繞時間內運動的力相比, 如

$$\begin{aligned} 100 &: \frac{8}{3} \cdot 17872,5 \\ &= 100 : 11915. \end{aligned}$$

在  $CT$  時間內, 其所發生的速度等於月球速度之  $\frac{100}{11915}$ , 而在  $CPA$  時間內所發生之速度, 則較大, 其比為  $CA : CT$  或  $CA : TP$ .

在八分點中最大的力  $EL$ , 可用  $PK \cdot Kk = \frac{1}{2}TP \cdot Pp$  以表之。最大的力在  $CP$  時間內所可產生的速度, 與最小的全部力  $EL$  所產生者相比, 如  $\frac{1}{2}TP \cdot CP : KCGF$ , 而在全時間  $CPA$  內所產生之速度相比, 則如  $\frac{1}{2}TP \cdot CA : TCG = CA : TP$ .

如是, 全時間末之速度, 等於月球速度之  $\frac{100}{11915}$ . 今由後者加上及減去該項速度之半, 並用 11915 以表該項平均差率, 則  $11915 + 50 = 11965$

爲面積在朔望點方面之最大差率，而  $11915 - 50 = 11865$  爲其在直角距離點方面之最小差率。所以在同時間內於朔望點及直角點方面所作之面相比，如  $11965 : 11865$ 。今於最小的差率  $11865$  上，加一其他數，此數與  $100$  相比等於  $FKCG : TCG$ ，或  $PK^2 : PT^2 = Pd : PT$ ，則其所得之和所表者爲月球在任何一中間處  $P$  時面積所發生之差率。

這些統是在一個假定下，即，太陽與地球靜止着，月球之環繞時間爲  $27^d 7^h 43^m$ 。但真正的交會環繞時間爲  $29^d 12^h 44^m$ ，故必將差率之增加按照環繞時間之比例放大，即，按照  $1080853 : 1000000$  之比。如是，原來的  $\frac{100}{11915}$ ，當增加之成爲  $\frac{100}{11023}$ 。所以朔望點方面的面積之差率與直角距離點方面相當的差率相比，等於  $11023 + 50 : 11023 - 50 = 11073 : 10973$ ，而當月球在任何一中間的處所時，直角距離點之差率與該處之差率相比，等於  $10973 : 10973 + Pd$ ，但我們假定  $TP = 100$ 。

所以月球環地球在每個相等的時間段內所作

之面積，差不多與一和數相比，此和數由 219,6, 及月球與其次的直角距離點間之距離之倍的矢（其圓半徑為 1）所成。在這裏，我們係假定八分點方面之變差，其大小為中平的。倘此變差較大或較小，則此矢亦必以此比放大或減小之。

§ 31. 問題。 試由月球之每時的運動內，求其與地球之距離。

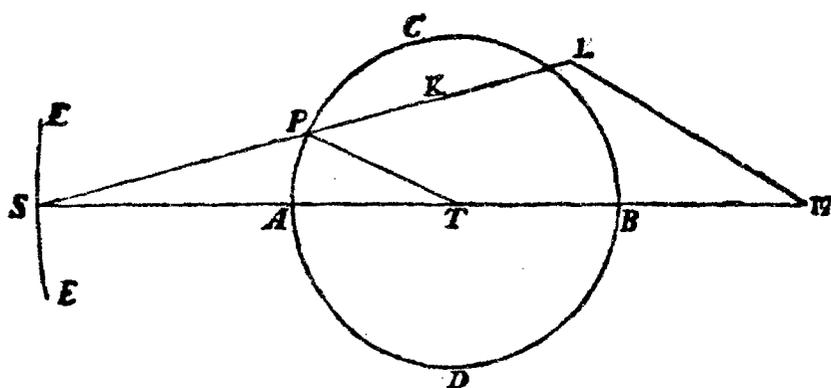
月球於環繞地球運動時，每刻所作的面積，與其每時的運動及離地球的距離之平方相比。所以此項距離與面積之平方根之正及每時的運動之平方根之反相比。

系 1. 用此項方法，可求得月球之外觀的徑，因此徑與其距地球的距離成反比。天文學者很可以研究，此規律與現象相合之正確性至於何種程度。

系 2. 根據所得現象，我們可由此以求月球之軌道，較以前所得者，必更能正確。

§ 32. 問題。 試求月球在其內運動的軌道之徑；但假定，此軌道無有偏心率。

一運動的物體在曲線上運行時，倘有一力恆向與前者相垂直的線上將其吸引，則曲線之曲率與吸引力之正，與速度之平方之反相比。我假定曲線曲率相互間之比，等於切角之切線或正弦之最後比，當角小至無限時，其半徑可相等。



第一九二圖

月球對於地球在朔望點之吸引，爲其對於地球之重力超過太陽之力 =  $2PK$  之餘，而後者則爲月球及地球對於太陽的重力之差。在直角距離點時，該項吸引力等於月球對地球及向地球的太陽力之和，今設

$$\frac{AC + CT}{2} = N,$$

則此項吸引力差不多與

$$\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000}{CT \cdot N}$$

及

$$\frac{178725}{CT^2} + \frac{1000}{AT \cdot N}$$

相比,或與

$$178725CT^2 \cdot N - 2000AT^2 \cdot CT$$

$$\text{及 } 178725AT^2 \cdot N + 1000CT^2 \cdot AT \quad (1)$$

相比。

倘月球對於地球的重力可用 178725 以表之,則平均的力  $ML$  (此力在直角距離點 =  $PT$  或  $TK$  並將月球向地球吸引) 等於 1000, 而平均的力  $TM$  在朔望點方面等於 3000. 今由後者減去  $ML$ , 則尚餘 2000, 此即使月球在朔望點離開地球的力, 以上我曾用  $2 \cdot PK$  表之。

月球在朔望點  $A, B$  之速度與其在直角距離點之速度相比, 如  $CT : AT$ , 並等於月球在朔望點方面繞地球所作之面積之差率, 與直角距離點方面之差率相比; 或, 如

$$11073 \cdot CT : 10973 \cdot AT \quad (2).$$

今將此比之平方之反與以前之(1)相結合,則可知月球軌道在朔望點之曲率與其在直角距離點之曲率相比,如

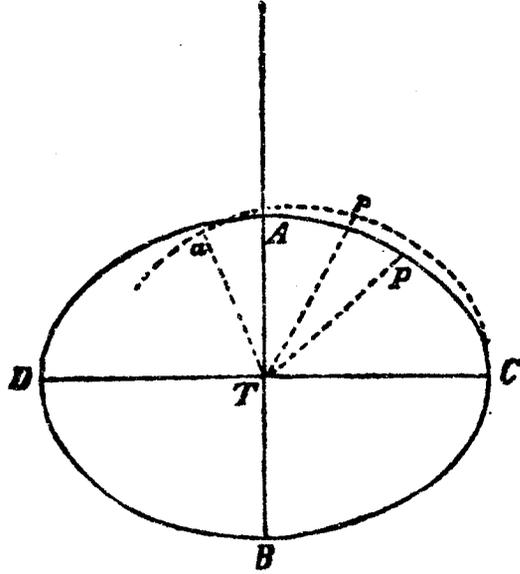
$$\begin{aligned} & 120406729 \cdot 178725 \cdot AT^2 \cdot CT^2 \cdot N \\ & - 120406729 \cdot 2000 AT^4 \cdot CT : \\ & 122611329 \cdot 178725 AT^2 \cdot CT^2 \cdot N \\ & + 122611329 \cdot 1000 AT \cdot CT^4. \end{aligned}$$

亦即是,如

$$\begin{aligned} & 2151969 \cdot AC \cdot CT \cdot N - 24081 \cdot AT^3 : \\ & 2191371 AT \cdot CT \cdot N + 12261 CT^3 \quad (3). \end{aligned}$$

因爲月球之軌道尙未知,故可假定其等於  $DBCA$  橢圓,其中心點  $T$  爲地球之所在處. 橢圓之大軸  $DC$  經過直角距離點,其小軸  $AB$  則經過朔望點. 因爲此橢圓之平面,以某種角運動繞地球旋轉,而曲線(其曲率爲我們所欲求者)則當在一沒有角運動的平面內,故必須一研究月球在此平面內所作之圖形,即,當月球在此橢圓內環繞時所作

者。亦即是  $Cpa$   
 圖形。此圖形上  
 之每一點  $p$  係  
 如是決定，即，於  
 橢圓上取一點  
 $P$ ，以表月球之處  
 所，於是作  $Tp$   
 $=TP$ ，使  $PTp$



第一九三圖

角等於直角點  $C$  以後的太陽之外觀的運動，或，  
 $\angle CTp : \angle CTP$  等於月球之交會的環繞時間與其  
 週期的時間相比，或即是，

$$CTp : CTP = 29^d 12^h 44^m : 27^d 7^h 43^m \quad (4).$$

故如使  $CTa : CTA$  之比亦如是，並設  $Ta = TA$ ，則  $a$  為  $Cpa$  之下回歸點， $C$  為其上回歸點。

至於該二點之曲率，則按必須的計算，可知  
 $Cpa$  軌道  $a$  點之曲率與以  $T$  為中心， $TA$  為半徑  
 的圓之曲率之差，與另一差（橢圓  $A$  點之曲率與  
 該圓之差）相比，如

$$CTP^2 : CTp^2.$$

又，橢圓  $A$  點之曲率與該圓之曲率相比，如

$$TA^2 : TC^2.$$

此圓之曲率，與另一圓（中心在  $T$ ，半徑為  $TC$ ）之曲率相比，如  $TC : TA$ 。此外，則後者之圓之曲率與橢圓  $C$  點之曲率相比，如

$$TA^2 : TC^2.$$

最後，橢圓  $C$  點之曲率與最後的圓之曲率之差，與另一差（ $Cpa$  圖形  $C$  點之曲率與最後的圓之曲率之差）相比，如

$$\angle CTp^2 : \angle CTP^2.$$

此可由切角及角之差之正弦以知之。

今將此項比例合之，則可知  $Cpa$  軌道  $a$  點之曲率，與其  $C$  點之曲率相比，如

$$(5) \quad AT^8 + \frac{16824}{100000} CT^2 \cdot AT : CT^8 \\ + \frac{16824}{100000} AT^2 \cdot CT.$$

以上之  $\frac{16824}{100000}$  一數目，所表者為

$\angle CTp^2 - \angle CTP^2$  被  $CTP^2$  所除, 亦即是

$$\frac{(29^a 12^h 44^m)^2 - (27^a 7^h 43^m)^2}{(27^a 7^h 43^m)^2}$$

因  $a$  爲月球之朔望點,  $C$  爲其直角距離點, 故上所得之比例必等於(3)中所得者. 欲求  $CT : AT$  一比例, 祇須將如是所得的比例之外項及中項相乘, 然後將所得之項用  $TC \cdot AT$  除後, 即得

$$\begin{aligned} & 2062,79 \cdot CT^4 - 2151969N \cdot CT^3 \\ & + 368676N \cdot AT \cdot CT^2 + 36342AT^2 \cdot CT^2 \\ & - 362047N \cdot AT^2 \cdot CT + 2191371N \cdot AT^3 \\ & + 4051,4AT^4 = 0 \quad (6). \end{aligned}$$

今於此中設  $N = \frac{CT + AT}{2} = 1$ , 以及  $\frac{CT - AT}{2} = x$ , 即,  $CT = 1 + x$ ,  $AT = 1 - x$ , 則得  $x = 0,00719$ , 故  $CT = 1,00719$ ,  $AT = 0,99281$ , 並有

$$CT : AT = 70 \frac{1}{24} : 69 \frac{1}{24}.$$

所以月球在朔望點方面與地球之距離與其在直角點方面之距離相比, 如  $69 \frac{1}{24} : 70 \frac{1}{24}$ , 或, 差不多如  $69 : 70$ . 不過在這裏, 我們將偏心率暫置不

論。

§ 33. 問題。 試求月球之變差。

月球之此項差失，一部分由於其軌道之橢圓性，一部分則由於所作面積之差率之不同。今設月球  $P$  (Fig. 193) 在  $DBCA$  橢圓內運動，地球為靜止的，在其中心點，則其所作之面積  $CTP$  與時間相比。倘橢圓之半大軸  $CT$  與其半小軸  $CA$  相比，如  $70 : 69$ ，則  $CTP$  之切線與平均運動（由直角點  $C$  計算起）之切線相比，如  $69 : 70$ 。

當月球由直角距離點轉至朔望點時， $CTP$  面之作成必加速，而且朔望點之差率與直角距離點之差率相比，如

$$11073 : 10973,$$

其任何點  $P$  之差率大於直角距離點者之差，其率與  $\sin CTP^2$  相比。倘將  $tgCTP$  以  $\sqrt{10973} : \sqrt{11073} = 68,6877 : 69$  為比例減小，則可極準確的求得之。因此， $tgCTP$  與平均運動之切線相比，如

$$68,6877 : 70.$$

在八分點方面，平均運動 =  $45^\circ$ ，故  $CTP$  角 =  $44^\circ 27'28''$ ，而將此由平均運動減去後，即餘  $32'32''$  為最大的變差。倘月球由直角距離點轉至朔望點時，恰作成一包括  $90^\circ$  的角  $CTA$ ，則其關係即如此。但因地球係運動的，故太陽亦有外觀的前進的運動，因而月球在未達到太陽之前所作成一角  $CTa$ ，其大於  $90^\circ$  之比，為  $29^d12^h44^m : 27^d7^h43^m$ 。所以中心點  $T$  方面之角，必須均以該項比例放大之，故以前所得之最大的變差  $32'32''$ ，必須改爲

$$35'10''.$$

在太陽與地球之平均距離內，變差之大如是，但由大軌道及太陽對於月球所施種種影響而引起的差，均未計入；於此，月球係由新月增長，而非由滿月減缺。

倘太陽與地球之距離非爲上所述者，則最大的變差，與月球之交會的環繞時間之平方及太陽與地球間距離之三次方之反，二者之合相比。所以在太陽之遠地點方面，最大的變差爲  $33'14''$ ，而在

近地點方面爲  $37'11''$ ; 但這裏, 我們已假定太陽之偏心率與其軌道之大軸之半相比, 如  $16\frac{1}{16} : 1000$ .

以上, 我們在假定月球之軌道非爲偏心的條件下, 並假定在八分點時, 其與地球之距離爲平均的, 已求得月球之變差。但月球既有偏心率, 故其與地球之距離時遠時近, 而其變差亦可時大時小。這些變化, 均須用觀察以決定之, 此可讓之天文學者。

§ 34. 問題。 試求月球交軌點在圓形的軌道內之每時的運動。

今設  $S$  爲太陽,  $T$  爲地球,  $P$  爲月球,  $NPn$  爲月球軌道,  $Npn$  爲其在黃道面上之射影。又設  $N$  與  $n$  爲交軌點,  $nTNm$  爲延長至不定的交軌點之線,  $PJ$  與  $ST$ ,  $PK$  與  $Qq$ ,  $Pp$  與黃道面相垂直。  $A$  與  $B$  爲月球之朔望點,  $Q$  與  $q$  爲其直角距離點, 在黃道平面內,  $AZ$  與  $Nn$  相垂直,  $pK$  與  $Qq$  相垂直。使月球失調的太陽之力係由二力所合成, 其一與  $LM$  相比, 其他則與  $MT$  相比。



3· $JT$  表之。此力與一其他力(使月球等速的,在其週期的環繞時間內,繞視為靜止的地球而運動的力)相比,如 3· $JT$ :178,725 半徑,或如  $JT$ :59,575 半徑(圓之半徑)。

尚須說明者,是這裏及以下的計算內,我恆假定,一切由月球至太陽的線,均與由地球至太陽的線相平行。此項線之傾斜,在某種事項下之足以減小一切影響,亦猶其在某種事項下能增加之一樣。在這裏,我們所求者為交軌點之平均運動,其不甚重要的小部分,足使計算上發生極多的麻煩者則略之。

今設  $PM$  為一弧,為月球於一已知的時間段內所作者; $ML$  則為一線,為月球於同時間內以 3· $JT$  力之影響運動時所能作者。試作  $PL$  及  $PM$ , 將其引長至  $l$  及  $m$ , 與黃道面相遇;又作  $PH$  與  $Tm$  相垂直。因  $LM$  與黃道面相平行,故不能與該面內的線  $lm$  相交;又因  $ML$  及  $ml$  二線同在  $LMPml$  平面內,故必相平行,而  $\triangle LMP \sim \triangle lmp$ 。但  $MPm$

在軌道的平面內，故  $m$  點必落在  $Nn$  線上。又，使  $\frac{1}{2}LM$  得以作成的力，在同時間內能使全部的線  $LM$  作成，但須一次將其置於  $P$  處。所以其作用能使月球在屬於  $LP$  弦的弧上運動；因之，月球將由  $MPmT$  平面出來而入於  $LPlT$  平面，而由此力所產生的角運動，即交軌點之角運動，與  $mTl$  角相等。但  $ml : mP = ML : MP$ ，而因  $MP$  在不變的時間下為已知，故  $ml$  與  $ML \cdot mp$  相比，亦即是與  $JT \cdot mP$  相比。

今設  $\angle Tml = 90^\circ$ ，則  $\angle mTl$  與  $\frac{ml}{Tm}$  相比，因而亦與  $\frac{JT \cdot mP}{Tm}$  相比，或，因  $Tm : mP = TP : PH$ ，故亦即是， $mTl$  角與  $\frac{JT \cdot PH}{TP}$  相比，而因  $TP$  為已知，與  $JT \cdot PH$  相比。

但  $Tml$  或  $STN$  角非為  $90^\circ$ ，故  $\angle mTl$  較小，其率為  $\sin STN$  與半徑之比，或  $AZ : AT$ 。

所以交軌點之速度與  $JT \cdot PH \cdot AZ$  相比，或與  $\sin TPJ \cdot \sin PTN \cdot \sin STN$  相比。

倘交軌點落在直角距離處，月球在朔望點，則此角爲  $90^\circ$ ，而  $ml$  線在無限遠處， $mTl$  角則等於  $mPl$  角。

於此狀況下， $mPl$  角與  $\angle PTM$ （此角爲月球於同時間內在其環繞地球之外觀的運動方面所作者）相比，如  $1 : 59,575$ 。

$mPl$  角 =  $LPM$ ，即，等於一角，此角即爲月球離開直線的率，而在該項時間內，倘月球失其重力，則太陽的力  $3 \cdot JT'$  能單獨的產生之。倘不論太陽的力  $3 \cdot JT'$ ，而單由使月球不能出離其軌道的力，則其離直線之角爲  $PTM$ 。此二力相比，按以上所知者，如  $1 : 59,575$ 。

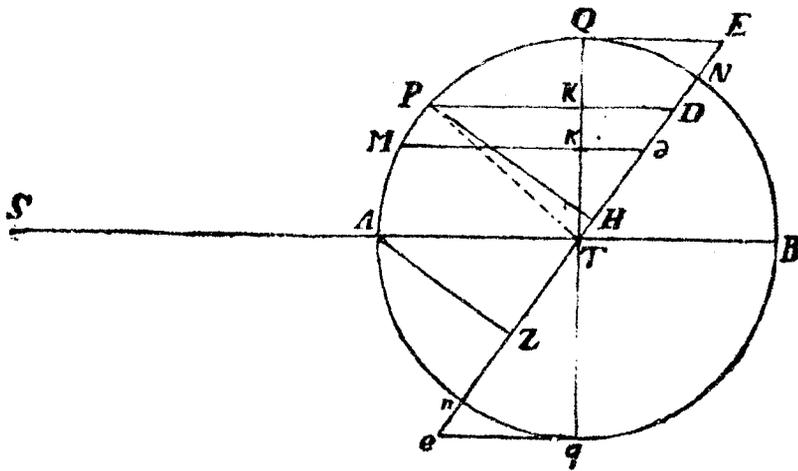
因月球之每時的平均運動，對於恆星而言爲  $32'56,5''$ ，故在此狀況下，交軌點之每時的運動爲  $33,2''$ 。

在其他的狀況下，交軌點之每時的運動與其最大者相比，如  $\sin TPJ \cdot \sin PTN \cdot \sin STN$  與半徑之三次方相比。 $TPJ$  角所表者爲月球與直角距

離點之距離， $PTN$  爲其與交軌點之距離， $STN$  則爲交軌點與太陽之距離。

此項角內任何一者之符號由正變爲負，或由負變爲正時，均使交軌點之運動由後退的轉而爲前進的。所以，倘月球在其一直角距離點及其附近的交軌點之間時，交軌點恆爲前進的。在其他狀況下，交軌點恆後退，因後退之超過前進，故交軌點每月必後退。

系 1. 今由  $P$  及  $M$  點作  $PK$  及  $Mk$  線垂於  $Qq$  線上，將其引長，使其與  $Nn$  相交於  $D$  及  $d$ 。如是則交軌點之每時的運動與  $MPDd$  面及  $AZ$



第一九五圖

線之平方相比。

今設  $PK, PH, AZ$  爲三正弦，即， $PK$  爲月球與直角距離點間角距離之正弦， $PH$  爲其與交軌點間距離之正弦， $AZ$  爲交軌點與太陽間距離之正弦；如是，則交軌點之速度與

$$PK \cdot PH \cdot AZ \quad (1)$$

相比。

但  $PT : PK = PM : Kk$ ，而因  $PT$  與  $PM$  爲已知，故

$$PK \text{ 與 } Kk \text{ 相比 } (2).$$

又， $AT : PD = AZ : PH$ ，故

$$PH \text{ 與 } PD \cdot AZ \text{ 相比 } (3).$$

由 (2) 與 (3) 可知  $PK \cdot PH \cdot AZ$  與  $Kk \cdot PD \cdot AZ^2$  相比，即，與  $PDdM$  面及  $AZ^2$  二者之合相比。

此即所欲證者。

系 2. 在交軌點之某種已知的位置下，其每時的平均運動與朔望點方面每時的運動之半相比，

即，與  $16,6''$  相比，如  $AZ^2 : AT^2$ 。

倘月球以等速運動經過  $QAq$  半圓，則在月球由  $Q$  至  $M$  的時間內所作一切面  $PDdM$  之和，與  $QMdE$  面相等；後者係由圓之切線  $QE$  所界。又當月球達到  $n$  點時，一切  $PDdM$  之和與  $EQAn$  面相等。後者係由  $PD$  線所作成。月球再由  $n$  至  $q$  時，則  $PD$  在圓之外，作成  $nqe$  面，為圓之切線  $eq$  所界。因交軌點開始時向後以下則向前，故此面可由第一面減去之，而因  $eqn = EQN$ ，故其餘等於  $NQAn$  半圓。當月球經過半圓時，一切面  $PDdM$  之和與半圓之面積相等。當月球經過全圓時，其所作一切面之和與全圓之面相等。

但如月球在朔望點，則  $PDdM$  面等於  $PM$  弧及  $PT$  半徑所成之直角形。一切與之相等的面之和（當月球經過全圓時所作成者），等於全圓周及半徑所成之直角形。此直角形較之以前之直角形大一倍。所以交軌點以一種整齊的速度（此速度與其在朔望點方面所有者相等）運動時，其所作空

間倍大於其實在所作者。所以使交軌點能經過此項空間的平均整齊運動，等於朔望點之運動之半。倘交軌點在直角距離處，則最大的每時運動為  $33'',2$ ，其平均的每時運動為  $16'',6$ 。

但交軌點之每時的運動恆與  $AZ^2 \cdot PDdM$  相比，即當其在朔望點時亦仍如此，惟因於此  $PDdM$  為已知，故亦即單與  $AZ^2$  相比。其平均的運動亦與  $AZ^2$  相比，而如交軌點在直角距離之外，則其與  $16'',6$  相比，如  $AZ^2 : AT^2$ 。

此即所欲證者。

§ 35. 問題. 試求月球交軌點在橢圓軌道內之運動。

設  $Qpmaq$  為一橢圓， $Qq$  為其大軸， $ab$  為其小軸。 $QAqB$  為一外切的圓， $T$  為在橢圓與圓之共同中心的地球， $S$  為太陽， $p$  為在橢圓上運行的月球，其在一已知的無限小的時間段內所作之弧為  $pm$ 。又設  $Nn$  為連結交軌點  $N$  及  $n$  的線， $pK$  與  $mk$  為垂線，與  $Qq$  軸相垂直，并將其



橫的方向內以  $3 \cdot JT$  或  $3 \cdot PK$  力, 於作成  $PM$  弧的時間內, 所能作的道路, 以  $ML$  表之; 其在橢圓上運動時, 於同時間內以同樣的力所能作之道路以  $ml$  表之. 於是將  $LP$  及  $lp$  引長, 使其與黃道面相交於  $G$  及  $g$  并作  $FG$  及  $fg$ , 而將前者引長時與  $pf, pg$  及  $TQ$  相交於  $e, e, R$ , 後者則與  $TQ$  相交於  $r$ .

圓內  $3 \cdot JT$  或  $3 \cdot PK$  與橢圓內之  $3JT$  或  $3pK$  相比, 如

$$PK : pK \text{ 或 } AT : aT \quad (1)$$

又, 以前者之力作成的道路  $ML$  與以後者作成的  $ml$  相比, 如  $PK : pk$ , 而因

$$PYKp \sim FYRc,$$

故亦即  $ML : ml = FR : cR \quad (2).$

但  $\triangle PLM \sim \triangle PGF$ , 故  $ML : FG = PL : PG$ , 即,  $ML : FG = pl : pe$  (因爲  $Lk$  與  $PK$  與  $GR$  相平行),  $ML : FG = lm : ce$  (因  $\triangle plm \sim \triangle pce$ ) 所以  $ML : ml = FR : cR = FG : ce \quad (3).$

故如  $fg : ce = fY : cY = fr : cR$ , 即,

$$fg : ce = \left\{ \begin{array}{l} fr : FR \\ FR : cR \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} ft : FT \\ FG : ce \end{array} \right\}, \text{ 而將}$$

後者與全等式  $ce : FG = ce : FG$  相結合, 則得

$$fg : FG = fT : FT \quad (4).$$

所以地球  $T$  方面之角, 由  $fg$  及  $FG$  所界者, 係相等。但此項角按之前節內所論者, 係交軌點之運動, 其時間則為月球於圓及橢圓上經過  $PM$  及  $pm$  弧所需者。所以交軌點在二者方面之運動係相等者。

倘  $fg : ce = fY : cY$ , 即

$$fg = \frac{ce \cdot fY}{cY} \quad (5),$$

則事實上即係如此。

但  $\triangle fgp \sim \triangle cep$ , 故  $fg : ce = fp : cp$ ,

$$\text{即} \quad fg = \frac{ce \cdot fp}{cp} \quad (6).$$

所以由  $fg$  所界的角與  $FG$  所界者相比, 亦即是, 橢圓內之交軌點運動與圓內之相當者相比,

如 (6) 內之  $fg$  與 (5) 之  $fg$  相比, 或如

$$\frac{ce \cdot fp}{cp} : \frac{ce \cdot fY}{cY} = fp \cdot cY : fY \cdot cp, \quad (7)$$

即, 如 
$$\left. \begin{array}{l} fp : fY \\ cY : cp \end{array} \right\} \quad (8)$$

二者之合。

今作  $ph$  與  $TN$  相平行, 則 (8) 即成爲

$$\begin{aligned} (Fh : FY) (FY : FP) &= Fh : FP \\ &= Dp : DP = Dpmd : DPMD. \quad (9) \end{aligned}$$

按 § 34 之系 1, 可知交軌點在圓內之每時的運動與  $AZ^2$  及  $DPMd$  二者之合相比, 所以交軌點在橢圓內之每時的運動與  $AZ^2$  及  $Dpmd$  二者之合相比。此即所欲證者。

系 1. 在交軌點之某種已知的位置下, 當月球由直角距離點達到任何一點  $m$  時, 其所作一切面  $pDdm$  之和, 等於  $mpQEd$  面, 此面由切線  $QE$  所界。月球作成一全環繞時所作之面之和, 等於全個橢圓面。又, 橢圓上之交軌點的平均運動與圓上之相當者相比, 如橢圓與圓相比, 亦即是, 如

$Ta : TA$  或如 69 : 70.

因爲在圓方面交軌點之平均的每時運動與 16,6'' 相比,如  $AZ^2 : AT^2$ , 故可取 16,4'' : 16,6'' = 69:70, 則交軌點在橢圓方面之平均的每時運動與 16,4'' 相比,如  $AZ^2 : AT^2$ , 即是,如交軌點離太陽的角距離之正弦之平方與半徑之平方相比。

此外則月球繞地球作成面積時,在朔望點方面較之在直角距離點方面爲速,故在朔望點方面所須時間較小,在直角距離點方面則較大.但交軌點之運動,則在相同的定律下.又,直角距離點方面之面積差率,與朔望點方面者相比,如 10973 : 11073; 所以,八分點方面之平均的差率與朔望點方面之剩餘及與直角距離點方面之缺少相比,如此項數目之和之半與其差之半相比,即,如 11023 : 50.

月球軌道相等部分之時間,與速度成反比,所以八分點方面之平均時間,與直角距離點方面的時間之超過以及與朔望點方面的時間之缺少相

比,差不多如 11023 : 50.

今由直角距離點進至朔望點,則可知各處面積差率,所超過直角距離點方面者,差不多與月球離直角點的角距離之正弦之平方相比。所以,任何處之差率與八分點方面平均差率間之差,與另一差爲比較的(此差係由月球距直角點的角距離之弦之平方與  $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$  半徑所成)。在直角距離點及八分點間之每一處所,其增加量之比亦如此,而在八分點及朔望點間之每一處所,則其減小量亦是如此。當月球作成其軌道之各相等部分時,交軌點之運動以時間之平方加速或遲緩。蓋當月球經過  $PM$  弧時(在尋常的狀況下),此運動爲  $ML$ ,而  $ML$  則與時間之平方相比。所以在朔望點方面,當月球經過其軌道之已知段時,交軌點之運動以  $11073^2 : 11023^2$  之比減小。又,減小量與所餘的運動相比,如 100 : 10973,與全部之運動相比,如 100 : 11073.

八分點及朔望點間的處所之減小量以及八分

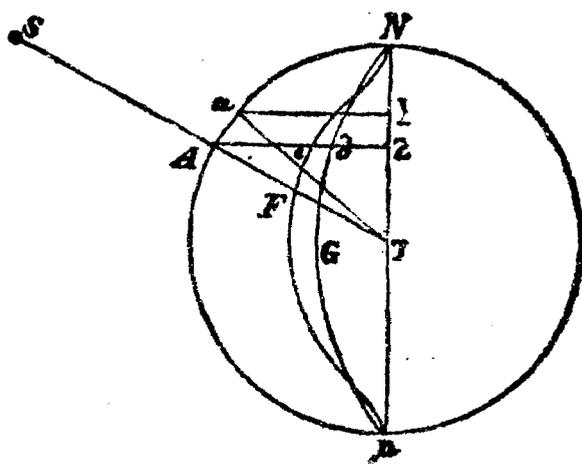
點及直角點間的處所之增加量，與此項減小量相比，等於一複合的比例，此比例之一為該項處所之整個運動比朔望點之整個運動，其他一比例，則為月球離直角點的角距離之正弦之平方與半徑之平方之半的差比後者。故如交軌點在直角點處，并取二點與八分點相距等遠，又取二點，其與朔望點及直角點之距離相等，於是再由朔望點及八分點間的處所方面之運動差率（減小）上，減去八分點及直角距離點間的處所方面之運動差率（增加），則所餘者等於朔望點方面之減小。這層的理由不難見到。而由此，復可知平均的減小率（此率必須由交軌點之平均運動減去）與朔望點方面之減小率之  $\frac{1}{4}$  相等。倘假定，月球繞地球作成與時間相比的面積，則朔望點方面之全部交軌點的每時運動，按之前所得者為  $32;7''$ 。又，月球較速的作成該項軌道時，交軌點運動之減小率與此運動相比，如  $100 : 11073$ 。所以減小率為  $\frac{3270''}{11073}$ ，而將其四分之一由以前所得平均的每時運動減去，即得較正確

的每時運動爲  $16,3''$ 。

倘交軌點在直角點之外，今取二點在二端與朔望點相距等遠；如是則當月球在該項處所時，交軌點運動之和，與交軌點在直角點方面時相當的運動之和相比，如  $AZ^2 : AT^2$ 。又，由以前所述之理由所發生的運動之減小率，其相比如後者之相比，即是，所餘的運動，相互間之比，如  $AZ^2 : AT^2$ ，而平均的運動與所餘的運動亦爲比較的。所以在交軌點之任何位置下，修正的平均每時運動，與  $16,3''$  相比，亦如  $AZ^2 : AT^2$ ，即是，如交軌點離朔望點的角距離之正弦之平方與半徑之平方相比。

§ 36. 問題。 試求月球交軌點之平均的每年運動。

每年運動等於一年中之平均的每時運動之總和。今設想交軌點在  $N$ ，而在每時之末仍回其原處，故不問其本身之運動如何，其對於恆星之位置恆不變。又試假定在此時間內，因地球之運動，太



第一九七圖

陽  $S$  與此交軌點相離，完成其每年的外觀的環繞，且其運動為等速的。今設  $Aa$  為一極小的已知弧，由地球向太陽的線  $TS$  在一極短的時間內於  $NaN$  圓上經過之。如是則按以前所述，平均的每時運動與  $AZ^2$  相比，而因  $AZ$  與  $ZY$  為比較的，故亦即與  $AZ \cdot ZY$ ，或  $AZYa$  面相比。由開始時計算起的一切平均的每時運動之和，與一切面  $AZYa$  之和，即與  $NAZ$  面相比。但最大的面  $AZYa$  等於  $Aa$  弧及圓之半徑所成之直角形，所以全圓內一切直角形之和，與等多的最大直角形之和相比，如全圓之面與全周及半徑所成之直角形相比，即

是，如 1 : 2.

與最大的直角形相當的每時運動，曾知其  $=16''\text{,}3$ ，而其每恆星年  $365^d6^h9^m$  之和為  $39^\circ38'7''\text{,}8$ 。後者之半，即  $19^\circ49'3''\text{,}9$  為交軌點之平均運動，與全個圓相當。又當太陽由  $N$  至  $A$  時，交軌點之運動與  $19^\circ49'3''\text{,}9$  相比，如  $NAZ$  面與全圓相比。

這裏係假定交軌點在每時之後恆回其原處，太陽在每年之終亦回至其原來的交軌點，即出發時的點。但因交軌點亦運動，故其影響使太陽能提早回至該處。因此，我們必須計算其縮短的時間為多少。

太陽在一年內所經過的為  $360^\circ$ ，在這時候內，交軌點以其最大速度經過  $39^\circ38'7''\text{,}8 = 39^\circ\text{,}6355$ 。又，此交軌點在任何點  $N$  之平均運動與其直角點之平均運動相比，如  $AZ^2 : AT^2$ 。所以太陽之運動與  $N$  點之交軌點運動相比，如

$$360 \cdot AT^2 : 39,6355 AZ^2 = 9,0827667 \cdot AT^2 : AZ^2.$$

今如設想將全圓  $NA_n$  之周分成爲等分  $Aa$ , 則太陽經過其  $Aa$  部分的時間, 假定圓靜止着不動時, 與圓隨交軌點繞  $T$  而運動時之經過時間相比, 等於  $9,0827667 \cdot AT^2 : 9,0827667 \cdot AT^2 + AZ^2$  之反。

蓋時間與經過此小部分所用之速度成反比, 而此速度則等於太陽與交軌點的速度之和。所以交軌點無有運動時, 太陽經過  $NA$  弧的時間, 可用  $NTA$  扇形以表之。又, 此形之  $ATa$  部分所表時間爲經過  $Aa$  弧所須者。今作  $aY$  與  $Nn$  相垂直, 并於  $AZ$  上取  $dZ$ , 使  $dZ \cdot ZY : ATa = AZ^2 : aAT^2 + AZ^2$  ( $a = 9,087667$ ), 即,  $dZ : \frac{1}{2}AZ = AT^2 : a \cdot AT^2 + AZ^2$ 。如是則  $dZ \cdot ZY$  直角形表時間之減小率, 此率亦即爲交軌點之運動所產生者(在經過  $Aa$  弧的時間內)。又設  $NdGn$  爲  $d$  之軌跡, 則  $NdZ$  面所表者爲經過  $NA$  弧的時間內所產生之減小率, 而  $NAT$  之超過  $NdZ$  的餘, 則爲其全時間。因交軌點之運動在較短的時間內亦

以該項比成爲較小，故必須將  $AaYZ$  面以該項比減小之；其方法可於  $AZ$  取  $eZ$ ，使  $eZ : AZ = AZ^2 : aAT^2 + AZ^2$ 。從可知  $eZ \cdot ZY$  直角形與  $AZYa$  相比，如經過  $Aa$  弧所必須的時間之減小率與全部時間相比，此全部時間爲交軌點不動時所須者。所以此直角形與交軌點之運動之減小率相當。今如  $NeFn$  爲  $e$  點之軌跡，則與一切減小率之和相等的整個面積  $NeZ$ ，與經過  $NA$  弧所須的時間內之全部減小率相當。所餘下的  $NAe$  面，與所餘的運動相當，而後者則爲交軌點之真的運動，其時間爲太陽及交軌點相合作運動經過  $NA$  全弧所需者。

今將無限級數之法應用於此，則可知半圓之面積與所求的圖形  $NeFn$  之面積相比，差不多如

$$793 : 60.$$

因爲與全圓相當的運動 =  $19^\circ 49' 3'', 9$ ，故與  $NeFn$  圖形之倍相當的運動 =  $1^\circ 29' 58''$ 。

今將此由以前之運動減去，則得  $18^\circ 19' 5'', 9$

爲交軌點之全運動，係對於恆星而言，並在其與太陽的二會合點之中間。再將此項運動由太陽之每年的運動減去，則即得該二會合點間之後者的運動爲  $341^{\circ}40'54''$ ,1. 此運動與每年的運動  $360^{\circ}$  相比，等於以前所得的  $18^{\circ}9'5''$ ,9 與交軌點之每年的運動相比。因此，後者爲  $19^{\circ}18'1''$ ,4，而此則爲交軌點在一恆星年內之運動。按之天文計算上所得者爲  $19^{\circ}21'21''$ ,8，微有相差，此項差別之來源，或者由於月球軌道之偏心率及其對於黃道面之傾斜所致；但其量不及全運動之三百分之一。

由於偏心率之關係，交軌點之運動稍被加速，但由於傾斜之作用則被遲緩，因此，交軌點之運動仍不致發生大的差別。

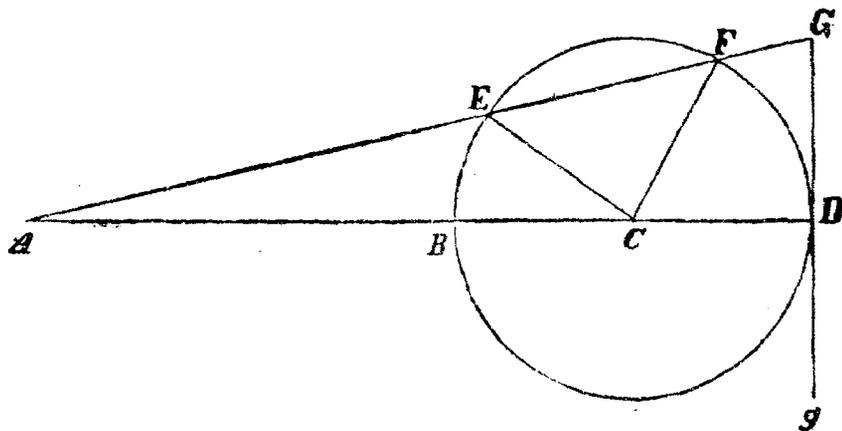
§ 37. 問題。 試求月球交軌點之真運動。

今如用  $NTA - NdZ$  面表時間，則  $NAe$  面所表者爲真運動，可用求積法以求得之。但用此方法時，計算太煩，故不如用以下之求法。

今以  $C$  爲中心， $CD$  爲半徑作圓  $BEFD$ ，並

將  $CD$  引長至  $A$ , 使  $AB$  與  $AC$  相比; 如平均運動與真運動之半相比(交軌點在直角點方面); 即,  $AB : AC = 19^{\circ}18'1'',4 : 19^{\circ}49'3'',9$ . 由此可知

$$BC : AC = 0^{\circ}31'2'',5 : 19^{\circ}49'3'',9 = 1 : 38,3.$$



第一九八圖

於是作無定的線  $Gg$ , 經過  $D$  點與圓相切於  $D$ , 並取  $BCE$  或  $BCF$  角, 使其等於太陽與交軌點之角距離之倍, 而交軌點則由平均運動以求之。又作  $AE$  或  $AF$  與垂線  $DG$  相交於  $G$ , 並取一角, 使其與  $9^{\circ}11'3''$  相比, 如  $DG$  切線與  $BED$  圓之全周相比。將此角加於交軌點之平均運動上(倘交軌點由直角點至朔望點), 或由之減去(倘交軌點由朔望點至直角點), 則即得真運動。

如此所得之真運動，與用前法求得者相較極相近似，此可由運算以知之。

此所得者爲交軌點之半年的運動。此外我們尚有一方法，求其每月者，不過無甚必要而已，蓋月球軌道之傾斜之變化，受支配於二重的差失，一爲半年的，一爲每月的，後者及每月的交軌點之均差能互相抵消，因而互相修正，可以略去不計。

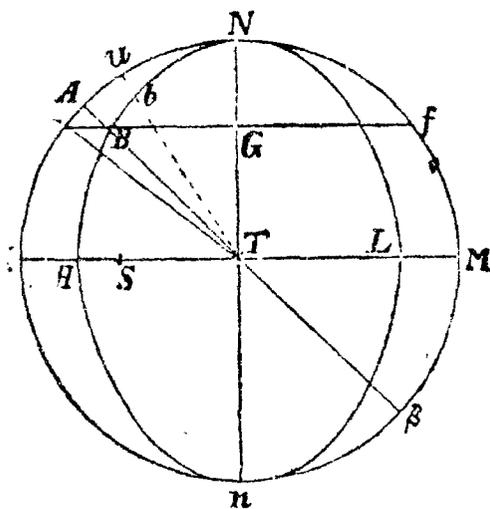
系。由前節及本節可知交軌點在其朔望點方面靜止着，在其直角點方面以  $16''$ ,3 的每時運動後退，而在八分點方面，運動之均差爲  $1^{\circ}30'$ 。此項結果與現象方面所觀察到者甚相接近。

附註 1. 格拉司哈姆 (*Grasham*) 的天文學教授 馬金 (*J. Machin*) 氏及 丕姆白敦 (*Heinrich Pemberton*) 氏曾各人用與前不同的方法求得交軌點之運動並將其結果公布。馬氏的著作，我曾先見到，今補之於此。

## 論月球交軌點之運動

第一定理。欲求太陽離開交軌點之平均運動，可先求太陽本身之平均運動及其他一平均運動間之幾何的中比，此其他平均運動為太陽在直角距離點內離開交軌點之最速的運動。

今設  $T$  為地球之處所， $Nn$  為任何一時間內的月球之交軌點的線， $KTM$  為與之垂直的線。又設  $TA$  為一線，繞中心旋轉，其速度等於太陽與



第一九九圖

交軌點相離的速度。因此， $Nn$  與  $AT$  間的角恆等於太陽與交軌點間之角距離。既假定此後，可將  $TK$  線分為  $TS$  與  $SK$  二段，使其與太陽之平

均的每時運動及交軌點之平均的每時運動（均在直角點方面）相比，又取

$$TH = \sqrt{TS \cdot TK} \quad (1),$$

則  $TH$  與太陽離交軌點的平均運動相比。

今以  $T$  為中心點， $TK$  為半徑，作  $NK_nM$  圓。再就此中心以  $TH$  及  $TN$  為半軸作一橢圓  $HNL_n$ 。當太陽離交軌點至任何一弧  $Na$  時，我們可設想一線  $Tba$ ，恆經過該弧之  $a$  端，如是則  $NTa$  扇形之面積所表者為該時間內太陽及交軌點之運動之和。今設  $Aa$  為極小的弧，當  $Tba$  線在一時間段內等速的旋轉時，即作成此弧。如是則  $ATa$  扇形與該時間內太陽及交軌點之速度之和相比。太陽之速度差不多是等速的，故其小的差失對於交軌點之平均運動上略無影響。此和之其他部分，即，交軌點的速度之平均值。隨其與朔望點之距離而增加，其率則與其距離太陽的角之正弦之平方相比。因為此速度在直角點為最大，故其與太陽速度相比，如  $SK : ST$ ，即，如  $TK^2 - HT^2$

:  $HT^2$  或如

$$KH \cdot HM : HT^2 \quad (2).$$

$NBH_n$  橢圓將代表二速度之和的扇形分割成爲  $ABba$  及  $BTb$  二部分，此二部亦均與該項速度相比。我們可將  $BT$  線引長，使其與圓相交於  $\beta$ ，又作  $BG$  垂線經過  $B$  與大軸相垂直，其兩端經引長後，與圓相交於  $F$  及  $f$ ；如是則

$$ABba : BTb = AB \cdot B\beta : BT^2 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (\text{因爲 } AB \cdot B\beta &= [TA - TB][TA + TB]) \\ &= TA^2 - TB^2). \end{aligned}$$

倘  $ABba$  空間於  $K$  爲最大，則此比例即成爲

$$HK \cdot HM : TH^2 \quad (4).$$

但交軌點之最大的平均速度與太陽之速度相比，亦爲此率。所以  $ATa$  扇形在直角點可分成爲二部，各與速度相比。

$$\text{又因 } KH \cdot HM : HT^2$$

$$= FB \cdot Bf : BG^2 \quad (5),$$

$$AB \cdot B\beta = FB \cdot Bf \quad (6),$$

故如  $ABba$  亦於  $K$  爲最大，則其與  $BTb$  相比，  
如  $AB \cdot B\beta : BG^2$  (7).

但按 (3)，此面積與所餘的扇形相比，普通爲  $AB \cdot B\beta : BT^2$ ，故  $ABba$  面在  $A$  處較爲小，其比爲

$$BG^2 : BT^2 \quad (8),$$

亦卽是交軌點與太陽間角距離之正弦之平方。此外，則一切小面積  $ABba$  之和，卽， $ABN$  面，與交軌點之運動（當太陽離開交軌點至  $NA$  弧的時間內）相比。所餘的部分，卽，橢圓的扇形  $NTB$  與該時間內之太陽的平均運動相比。但因交軌點之每年的運動，卽爲太陽經過一次環繞時間內之該項運動，故交軌點離太陽的平均運動與後者之平均運動相比，如圓之面積與橢圓之面積相比，卽是，如  $TK : TH$ ，或因  $TH^2 = TS \cdot TK$ ，故如

$$TH : TS \quad (9).$$

第二定理。 月球交軌點之平均運動爲已知；試求其真運動。

今設  $A$  角爲太陽離交軌點之平均處所之距

離，亦即是太陽離交軌點之平均運動。今取一角  $B$ ，使

$$\operatorname{tg} B : \operatorname{tg} A = TH : TK \quad (10),$$

即是，等於太陽之平均的每時運動與其離交軌點（交軌點在直角點處）的平均每時運動相比之平方根。如是則  $B$  角即為太陽離交軌點之真處所之距離。蓋如作  $FT$  線，則按前節之證法， $FTN$  角為太陽離交軌點之平均處所之距離， $ATN$  角則為其離真處所之距離，並有

$$\operatorname{tg} FTN : \operatorname{tg} ATN = TK : TH \quad (11).$$

系。從可知  $FTA$  角係月球交軌點之均差，而此角之正弦，倘在八分點為最大，則其與半徑相比，如  $KH : TK + TH$ 。在任何一其他處所，此均差之正弦與最大的正弦相比，如

$$\sin(FTN + ATN) : \text{半徑},$$

或，差不多如

$$\sin(2FTN) : \text{半徑} \quad (12),$$

或，如太陽與交軌點之平均處所間的角距離之倍

之正弦與半徑相比。

附註。 倘交軌點之平均的每時運動在直角點方面爲  $16''{,}3$ , 卽, 在一恆星年內爲  $39^{\circ}38'7''{,}8$ , 則  $TH : TK = \sqrt{9,0827646} : \sqrt{10,0827646}$

$$= 18,6524761 : 19,6524761,$$

以及  $TH : HK = 18,6524761 : 1$  (13),

卽是, 如一恆星年內之太陽運動與交軌點之平均運動  $\left( = \frac{360^{\circ}}{18,6524761} = 19^{\circ}18'1''{,}4 \right)$  相比。

但如月球交軌點之平均運動在 20 猶歷亞年 (*Julianisches Jahr*) 內爲  $386^{\circ}50'15''$ , 如理論上所可推得者, 則一恆星年內之平均運動爲  $19^{\circ}20'32''$ , 因而有

$$TH : HK = 360^{\circ} : 19^{\circ}20'32''$$

$$= 18,61214 : 1 \quad (14).$$

由此可知交軌點在直角點方面之每時的運動爲  $16''{,}3$ , 其八分點方面之最大均差爲  $1^{\circ}29'57''$ .

§ 38. 問題。 試求月球軌道對於黃道面的傾斜之每時的變動。今設  $A$  與  $a$  爲朔望點,  $Q$  與  $q$

爲直角點， $N$  與  $n$  爲交軌點， $P$  爲月球在其軌道內之處所， $p$  爲此點在黃道面上之射影， $mTl$  爲交軌點之當前的運動。今作  $PG, pG$  垂於  $Tm$  上，將其引長與  $Tl$  相交於  $g$ ，並作  $Pg$ ，如是則  $PGp$  角所表者爲月球軌道對於黃道面之傾斜，當月球在  $P$  點時， $Pgp$  爲下一瞬間之傾斜，故  $GPg$  角爲當前的傾斜之變化。此  $GPg$  角與  $GTg$  角相比，等於  $GT:PG$  及  $Pp:PG$  二比之合。今如設

$$GTg = 33'',2 \frac{JT \cdot AZ \cdot PG}{AT^3} \quad (1)$$

則  $GPg$  (即傾斜之每時的變動) 與  $33'',2$  相比，

$$\text{如 } JT \cdot AZ \cdot TG \frac{Pp}{PG} : AT^3 \quad (2)$$

但這裏是假定了月球在圓形的軌道內作等速運動。倘軌道爲橢圓的，則交軌點之運動較小，其率爲小軸與大軸之比，此如前所已述過。同時，傾斜之變動亦以此比減小。

系 1. 作  $TF$  與  $Nn$  相垂直，取  $pM$  爲黃道面內的月球之每時的運動，再作  $pK$  及  $Mk$  垂於



$$AZ \cdot \frac{TZ}{M_p} \cdot \frac{P_p}{PG} \cdot HpMh : AT^3 \quad (5)$$

系 2. 所以，倘地球及交軌點在每時之末離開其新的處所而仍回復其原來的處所，使其已知的位置在一個週期的月內為不變，則此時間內之全部傾斜變動與  $33'',2$  相比，等於一切面  $HpMh$  之和（此項面係在  $p$  點之環繞時間內所作成）乘  $AZ \cdot TZ \cdot \frac{P_p}{PG}$  與  $M_p \cdot AT^3$  相比，即是，如

$$AZ \cdot TZ \frac{P_p}{PG} \times QAqa \text{ 圓} : M_p \cdot AT^3 \quad (6),$$

或，亦即是，如

$$AZ \cdot TZ \frac{P_p}{PG} \times QAqa \text{ 圓周} : 2M_p \cdot AT^2 \quad (7).$$

系 3. 在交軌點之已知的位置下，每時的平均變動（此項變動繼續至一月時，能產生該項每月的變動）與  $33'',2$  相比，如  $AZ \cdot TZ \frac{P_p}{PG} : 2AT^2$

$$= P_p \cdot \frac{AZ \cdot TZ}{\frac{1}{2}AT} : PG \cdot 4AT \quad (8),$$

而因  $P_p : PG = \sin PGp : \text{半徑}$ ，以及

$$\frac{AZ \cdot TZ}{\frac{1}{2}AT} : 4AT = \sin 2ATn : 4 \cdot \text{半徑}, \quad (9)$$

亦即是，如

傾斜之正弦 × 交軌點距太陽的角距離之 2  
倍之正弦：半徑之平方之四倍。

系 4. 倘交軌點在直角點方面，則傾斜之每時的變動與  $33''_2$  相比，如

$$JT \cdot AZ \cdot TG \cdot \frac{Pp}{PG} : AT^3, \text{ 即, 如}$$

$$\frac{JT \cdot TG}{\frac{1}{2}AT} \cdot \frac{Pp}{PG} : 2AT \quad (10),$$

或如

月球距直角點的角距離之二倍之正弦 ×  $\frac{Pp}{PG}$ ：  
半徑之倍。

在交軌點之此種位置下，月球由直角點至朔望點的時間，所作一切每時的運動之和，與等多的角  $33''_2$  之和，即  $5878''$ ，相比，等於

月球離直角點的角距離之倍之正弦之和

×  $\frac{Pp}{PG}$ ：等多的徑之和，

或即是，等於

徑 ×  $\frac{Pp}{PG}$ ：圓周。

今如設傾斜 =  $5^{\circ}1'$ ，則此比例等於

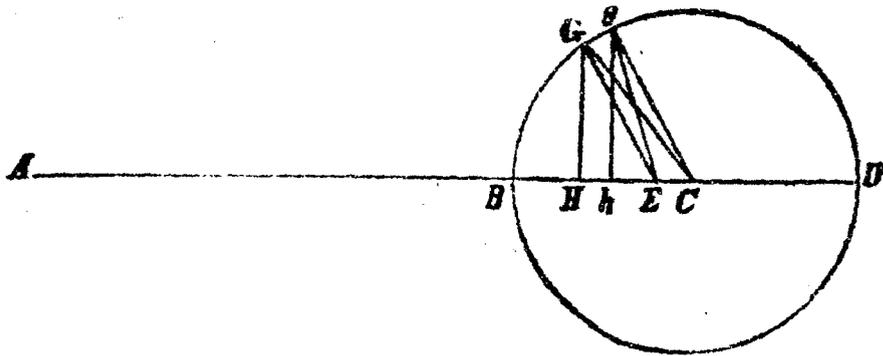
$$7 \cdot \frac{874}{10000} : 22 = 278 : 10000.$$

所以在上述時間內所發生的一切每時運動之和，其所合成的變動為

$$163'' = 2'43''.$$

§ 39. 問題。 在一已知的時間內，試求月球軌道對於黃道面的真傾斜。

今設  $AD$  為最大的傾斜之正弦， $AB$  為其最小者之正弦，則可將  $BD$  於  $C$  平分，並以  $C$  為中心， $BC$  為半徑作圓  $BGD$ 。於是於  $AC$  上



第 二 〇 一 圖

取  $CE$ ，使

$$CE : EB = EB : 2AB \quad (1),$$

並使  $AEG$  角等於交軌點離直角點 (在已知的時間內) 的角距離之二倍。再作  $GH$  垂於  $AD$  上, 則  $AH$  即為所求的傾斜之正弦。

$$\begin{aligned} \text{蓋 } GE^2 &= GH^2 + HE^2 = BH \cdot HD + HE^2 \\ &= BH \cdot BD + HE^2 - BH^2 = BH \cdot BD \\ &+ BE^2 - 2BH \cdot BE = BE^2 \\ &+ 2EC \cdot BH = 2CE \cdot AB + 2EC \cdot BH, \end{aligned}$$

最後, 得

$$GE^2 = 2CE \cdot AH \quad (2).$$

但  $2CE$  為已知, 故  $GE^2$  與  $AH$  相比。今設  $AEG$  角所表者為交軌點離直角點的角距離之二倍 (在時間之任何已知差率之末), 則  $Ga$  弧與  $GE$  距離相比; 因為  $GEg$  角是已知的。

$$\text{又因 } Hh : Gg = GH : GC \quad (3),$$

故  $Hh$  與  $GH \cdot Gg$  或  $\dot{G}H \cdot GE$  相比, 亦即是與

$$\frac{GH}{GE} \cdot GE^2 \text{ 或 } \frac{GH}{GE} \cdot AH \text{ 相比.}$$

因此,  $Hh$  與  $AH$  及  $AEG$  角之正弦二者之合相比。故如在某種狀況下,  $AH$  線與傾斜之正

弦相等，則以後此線恆隨正弦而變，故恆保持其相等。但當  $G$  落在  $B$  與  $D$  時， $AH$  即等於該正弦，故必恆與之相等。

此即所欲證者。

在這個證明內，我假定  $BEG$  角之增加係等速的，因為在這裏，一切極小的差失均可不計。今設  $BEG = 90^\circ$ ， $Gg$  為交軌點離太陽的距離之倍之每時的增加，則傾斜之每時的變動與  $33'',2$  相比，等於

$AH$  傾斜之正弦  $\times BEG$  角之正弦：半徑  
之平方之四倍。

因為平均的傾斜約為  $5^\circ 8',5$ ，故此比例為

$$896 : 40000 = 224 : 10000 \quad (4).$$

與  $BD$  相當的全部變動比此項每時的變動，等於  $BD$  徑比  $Gg$  弧，所以此全部變動成爲一複合的比，由以下二者所成：

$BD : BGD$  圓周之半，

2079,7 小時：1 小時，

此 2079,7 小時亦即是交軌點由直角點至朔望點所需的時間。今將此項比例相結，即得

$$\begin{aligned} BD : 33'',2 &= 224,7 \cdot 2079,7 : 110000 \\ &= 29645 : 1000, \end{aligned}$$

而  $BD = 16'23'',5$  (5).

倘我們不計月球在其軌道上之處所，則此為傾斜之最大的變動。蓋如交軌點在朔望點方面，則此項傾斜不以月球之不同的位置而有變化。但如交軌點在直角點方面，而月球則在朔望點方面，則傾斜較之月球在直角點時小  $2'43''$ 。此於 § 38 系 4 內已證明。今由以上之量上減去此差之半，則其全部的平均變動，在月球之直角點方面為  $15'2''$ ；倘將其加上，則即得朔望點方面之全部變動為  $17'45''$

故如月球在朔望點，則交軌點由直角點轉至朔望點時，其全部變動為  $17'45''$ 。

倘交軌點在朔望點方面，傾斜為  $5^\circ 17'20''$ ，則當交軌點在直角點月球在朔望點時，傾斜為  $4^\circ 59'$

35".

此可由觀察以證明之。

今設月球在朔望點，交軌點在任何一處所，而欲求軌道之傾斜，則可設

$$AB : AD = \sin 4^{\circ} 59' 35'' : \sin 5^{\circ} 17' 20'' \quad (6),$$

並使  $AB$  角等於交軌點離直角點的角距離之倍；如是則  $AD$  等於所求的傾斜之正弦。當月球離交軌點  $90^{\circ}$  時，此軌道之傾斜即為適纔所求得者。

在月球之其他處所方面，由傾斜之變化所引起的差失能調和，其一部分係因交軌點運動之每月的差失所彌補。此於以前已說過，故在計算方面可以略去。

§ 40. 附註. 我之計算月球運動，是欲指出，用重力理論時，此項運動可由其原因推論而得。用此理論，我並求得，月球平均運動上之每年的均差，係由太陽力對於其軌道所發生的不同影響所致（按第一編 § 107, 系 6）。

蓋此項力於太陽之近地點為較大，故能使月

球軌道伸張；在遠地點方面，此力較小，故使軌道收縮。但月球在伸張的部分時，其運動較遲，在收縮的部分則較速。能彌補此項差失的每年均差，在遠地點時及在近地點時均為零，在太陽與地球之平均距離內為  $11'50''$ ，而在其他處所則與太陽之中心均差相比。當地球由遠日點向近日點時，須將其加於月球之平均運動上；反之，則須將其減去。

今設大軌道之半徑為 1000，地球之偏心率為  $16\frac{7}{8}$ ，則按重力理論此均差為  $11'49''$ 。

但地球之偏心率似稍為大，故如將其放大後，則此項均差亦須以同樣的比例將其放大之。所以，如設偏心率為  $16\frac{11}{12}$ ，則最大的均差為  $11'51''$ 。

我並曾發見，在地球之近日點方面，月球之遠地點及交軌點，因太陽力較大，其前進亦較在遠日點方面為速，其比率為地球離太陽的距離之三次方之反。由此可知此項運動之每年的均差，與太陽之中心均差為比較的。但太陽之運動係與其距地球的距離之平方成反比，而由此項差失所引起的

最大中心均差爲  $1^{\circ}56'20''$ ，故與以前所說的偏心率  $0,016\frac{11}{12}=0,016917$  相符合。

倘太陽之運動與距離之三次方成反比，則此項差失所引起的最大均差爲  $2^{\circ}54'30''$ 。所以由月球遠地點及交軌點之不等的運動所引起的最大的均差與  $2^{\circ}54'30''$  相比，如後二者之平均的每日運動與太陽之平均的每日運動相比。

由此可知遠地點的平均運動之最大均差爲  $19'43''$ ，交軌點的平均運動之最大均差爲  $9'24''$  倘地球由近日點向遠日點進行，則前者爲增加的，後者爲減少的。反之，倘在軌道之相反的部分則其關係亦適相反。

由於重力之理論，可知月球軌道之大軸經過太陽時，較之其與連結太陽及地球的直線相垂時，太陽對於月球之影響較爲大；因之，在前一事，月球之軌道較爲遠，在後一事則較爲近。由此，我們可得月球平均運動之其他的一均差，此差係與月球遠地點對於太陽之位置有關，而如該遠地點在

八分點方面，則其值爲最大；反之，倘遠地點在朔望點或直角點時，則該均差即消失。當月球遠地點由太陽之直角點向朔望點時，此均差須加於平均運動上，反之，須將其減去。此均差我名之爲半年的均差，在八分點方面爲最大，約增至  $3'45''$ ，此則我曾由觀察上所推得者。此項值係在太陽與地球之平均距離內計算，故必須以該項距離三次方之反增加或減少之。所以在距太陽最遠處約爲  $3'34''$ ，而在最近處則爲  $3'56''$ 。倘月球之遠地點在八分點之外，則此均差必較小，其與最大者相比，等於月球遠地點離其最近的朔望點(或直角點)的角距離之倍之正弦與半徑相比。

按同樣的重力理論，太陽對於月球之影響，當月球交軌點之直線經過太陽時，較爲大，而如該線與連結太陽及地球的線相垂直時，則其影響較小。由此可得月球之平均運動方面的其他均差；此均差我名之爲第二個半年的均差，當交軌點在八分點方面時爲最大，在直角點及朔望點時則等於零，

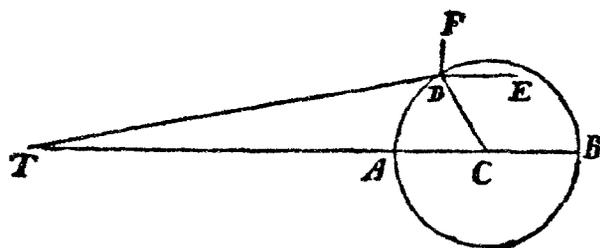
而在交軌點之其他的位置下，此均差係與其一交軌點離其最近的朔望點或直角點的角距離之倍之正弦相比。倘太陽離開其最近的交軌點向後，須將其加於月球之平均運動上，反之，倘向前，則須由之減去。在八分點方面，此均差為最大，在太陽與地球之平均距離內，為  $47''$ ，此可由重力之理論以知之。在太陽與地球之其他距離內，八分點方面之最大均差係與距離之三次方成反比，故在太陽之近地點為  $49''$ ，而在其遠地點則為  $45''$ 。

按重力理論，月球之遠地點，當其與太陽處在相對或會合的狀況下時，前進最速，而如與太陽處在直角的狀況下時，則後退最速（按第一編 § 107 系 9）。在第一事方面，偏心率為最大，在第二事方面則為最小。按第一編 § 107 之系 7, 8 及 9，此項差失頗大，能引起遠地點之主要的均差，而此項均差則可名之為半年的。由我的觀察所可計算得者，此項最大均差約為  $12^{\circ}18'$ 。

我們的同國人霍老克司 (*Horrox*) 曾首先證

明，月球在橢圓的軌道內繞地球運動，後者則在橢圓之在下的焦點內。哈雷氏將此橢圓之中心置在一產生擺線的圓上，此圓之中心則等速的繞地球而轉。由此項圓上之運動，產生前進及後退方面的差失，以

及偏心率之量，此均於前說過了。



第二〇二圖

今設月

球與地球之平均距離為 100000,  $T$  為地球,  $TC$  為月球之平均的偏心率 ( $=5505$ ). 試將  $TC$  引長至  $B$ , 俾  $BC$  為最大的半年均差 ( $=12^{\circ}18'$ ) 之正弦, 於此, 其半徑為  $TC$ . 如是, 以  $C$  為中心,  $CB$  為半徑的圓  $BDA$ , 即為該項能產生擺線的圓, 月球軌道之中心點即在其上, 其運動的方向, 為由  $B$  至  $D$  再至  $A$ . 試再取  $BCD$  角, 等於太陽真處所離月球真遠地點的角距離之二倍, 則  $CTD$  即為月球遠地點之半年的均差,  $TD$  為其軌道之

偏心率。但如我們已知偏心率，平均運動及其遠地點，並已知其軌道之大軸(=200000)，則即可求得月球在其軌道內的真處所以及其與地球之距離，其方法如平常所用者。

月球軌道之中心點，其繞  $C$  的運動在地球之近日點為較速，在遠日點則較遲，其原因則因太陽之力不同所致，且與地球離太陽的距離之三次方相比。因為太陽之中心均差，月球軌道之中心在產生擺線的圓上運動較速，其比率為地球離太陽的距離之平方之反。欲使該項運動之速度更增加，以距離之反為比率，則可由中心點  $D$  作  $DE$  線向月球之遠地點，或與  $TC$  相平行，並取  $EDF$  角，使其等於上所述的每年引數減去月球遠地點離太陽近地點間的角距離之餘。於是再取  $DF : DC$ ，使其等於

$$33\frac{7}{8} : 1000$$

及  $52'27'',3 : 59'8'',2$

二者之合，或，

$$DF : DC = 3 : 100.$$

今設月球軌道之中心點在  $F$ ，並在一能產生擺線的圓上，此圓之中心點為  $D$ ，半徑為  $DF$ 。當  $D$  點在  $DABD$  周上前進時，該中心點完成其環繞。如是，月球軌道之中心點，經過以  $C$  為中心的曲線時所需之速度，很近似的與太陽離地球的距離之三次方成反比。在事實上亦必如此。

欲計算此項運動頗不容易；但用以下的近似法則較省事。

試設月球與地球之平均距離為 100000，偏心率  $TC$  為 5505， $CB$  線或  $DC$  線為 1172,73， $DF$  則為 35,2。此線在  $TC$  距離內於地球方面所界之角，等於軌道中心點由  $D$  向  $F$  時所作之角。但如將此線於一方向內引長之（此方向與連結地球及月球軌道一焦點的線平行），使其加倍，則其所界之角仍不變，故此角等於該項移動在焦點之運動方面所發生者相等。在月球與地球之距離內，其所界之角亦為此項移動在月球之運動方面所產生者。所以此角可名之為中心點之第二均差。在月球

與地球之平均距離內，此均差很近似的與一角之正弦相比，此角爲  $DF$  線與由  $F$  至月球的線所成，最大的時候爲  $2'25''$ 。但  $DF$  及由  $F$  至月球的線所界之角，可由下法得之：將  $EDF$  角由月球之平均的近日距度減去，或將月球與太陽之角距離加於月球及太陽的遠地點之相互角距離上。今設此角爲  $\alpha$ ，則

$$\text{半徑} : \sin \alpha = 2'25'' : x$$

內之  $x$  等於第二中心均差，而此則隨該角之小於或大於  $180^\circ$ ，須將其加上或減去，如是，即可求得其光界 (*luminarium*) 的朔望點方面之長。

因爲地球上之大氣能將太陽之光屈折，使地球之影放大，故我於其徑上增加 1 或  $1\frac{1}{2}$  秒，此項影爲月球之視差在月蝕時所引起者。

此外，月球之理論必須由現象以證明之，最初在朔望點，以後則在直角點及八分點方面。爲此目的，我曾在格林惠區 (*Greenwich*) 的天文臺上觀察過月球及太陽之平均運動，頗爲精細。於 1700

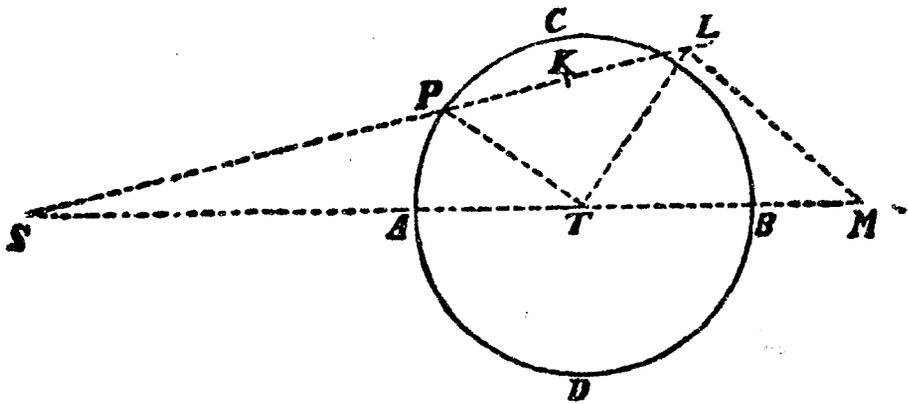
年十二月三十一號（舊歷），我發見太陽之平均處所在  $290^{\circ}43'20''$ ，其遠地點在  $97^{\circ}44'30''$ ，月球之平均處所在  $315^{\circ}21'$ ，其遠地點在  $338^{\circ}20'$ ，其向上的交軌點則在  $147^{\circ}24'20''$ 。格林惠區與巴黎的天文臺之子午差爲  $9^m20^s$ （新的爲  $20^s,9$ ）；月球離開其遠地點的平均運動，尙未能確知。

### 第三章

### 論海潮之大小

§ 41. 問題。 試求太陽對於海水運動上發生影響的力。

在本編 § 29 內，我們已知道太陽的力  $ML$  或  $PT$  (此力對於月球之運動能發生失調的作用) 在



第 二 〇 三 圖

月球之直角點方面與地球上之重力相比，如

$$1 : 638092,6 \quad (1),$$

而  $TM-ML$  或  $2PK$  力在月球之朔望點方面則倍大。倘向地球之面下來，則此項力即減小，其比率為距地球中心的距離，即，

$$60,5 : 1 \quad (2).$$

所以在地球之面上，第一力與重力相比，如

$$1 : 38604600 \quad (3).$$

在海洋與太陽相距為  $90^\circ$  處，此力能將其壓迫。其他一力較此大一倍則能於太陽下的處所，與之相對的處所使海洋高起。所以此二力之和與重力相比，如

$$3 : 38604600 = 1 : 12868200 \quad (4).$$

但不問力在距太陽  $90^\circ$  處將海洋壓下或於太陽之相對處所使其高起，相同的力所發生之運動恆相同，故此二力之和，實為太陽對於海水發生運動作用的全力，其作用猶之此項力之和全用於使海洋高起上而在距太陽  $90^\circ$  處完全不發生作用。

當太陽在某處之頂點並與地球在平均距離內時，此即為太陽在該處使海洋運動的力。在太陽之

其他的位置下，此力與太陽高出地面的高之二倍之正矢成正比，與其距地球的距離之三次方成反比。

系。由地球之私轉所引起的地球部分之離心力，與重力相比，如

$$1 : 289,$$

其作用能使赤道下水之高超過兩極的水高 85472 巴黎尺；此於本編之 § 23 內已知之。所以這裏所欲論的太陽之力，與重力相比，如

$$1 : 12868200,$$

與離心力相比，如

$$289 : 12868200 = 1 : 44527 \quad (5),$$

而其作用則能使在太陽下與之相對的水之高，超過在  $90^\circ$  距離下水之高 1 尺  $11\frac{1}{90}$  寸(巴黎尺)，因為  $1 \text{ 尺 } 11\frac{1}{90} \text{ 寸} : 85472 \text{ 尺} = 1 : 44527$ 。 (6)

§ 42. 問題。試求月球對於海水能發生運動作用的力。

月球對於海洋發生運動作用的力，可由其與

太陽力之比以得之，而此比則可由二力所發生的運動之比以推得之。

司多姆 (*Samuel Sturm*) 氏曾觀察到亞鳳 (*Avon*) 河之入口處所的前面，在春秋兩季日月交會及相對時，水之全高約為 45 尺，在直角距離時為 25 尺。第一種高度是由二力之和所產生，第二種則由其差所引起，故如命太陽及月球之力為  $S$  及  $L$ ，則有

$$\begin{aligned} L+S : L-S &= 45 : 25 \\ &= 9 : 5 \quad (1). \end{aligned}$$

哥爾柏來司 (*Samuel Colepress*) 氏在柏利毛 (*Plymouth*) 港曾觀察到潮之平均高度約為 16 尺，而在春秋兩季，朔望時的潮之高能超過直角距離時的高至 7 或 8 尺。故如設此項高之最大的差為 9 尺，則

$$\begin{aligned} L+S : L-S &= 20\frac{1}{2} : 11\frac{1}{2} \\ &= 41 : 23 \quad (2). \end{aligned}$$

此比例與上所得者頗相近似，不過司多姆氏所觀

察到者似較可靠，故在未得有更準確者以前，不如仍用 9:5 爲妥。

因水之交互的運動，故最大的潮不能適在朔望點發生，而恆爲朔望後之第三潮，此爲我們所已經說過者。如司氏所說過，最大的潮是新月或滿月後之第三潮，或亦可說，新月或滿月後之第十二小時。因之，最大的潮差不多是在朔望點後之第四十三小時，而在該港方面，最大潮約在月球經過子午線後之第七小時，所以，當月球離開太陽或相對點向前至  $18^\circ$  或  $19^\circ$  時，最大的潮即繼此而發生。隆冬及盛夏的氣候，並不在冬至及夏至點本身，而在過此以往的  $36^\circ$  至  $37^\circ$  的時候；最大的潮之發生，亦在月球經過該處的子午線以後，約當月球離開太陽至兩潮間的空間之  $\frac{1}{10}$  時。今設該項距離爲  $18\frac{1}{2}^\circ$ ，則在此項月球與朔望點及直角點之距離內，太陽之力對於增加或減小月球所引起的海洋運動上，較之在朔望點及直角點方面爲小，其比率如半徑比  $\cos 37^\circ$ ，亦即是，如

$$10000000 : 7986355.$$

所以在 (1) 內，我們必須用  $0,7986355S$  以代  $S$ .

但月球在直角點方面之力必須減小，因為月球與赤道間有距離。後者在直角點方面（或在離直角點  $18^{\circ}5'$  處）約為  $22^{\circ}13'$ 。

任何一星球對於海洋運動生作用的力，當星球離開赤道時即減小，約與其傾角之餘弦之平方相比。所以 (1) 即成爲

$$L + 0,7986355S : 0,8570327L \\ - 0,7986355S = 9 : 5 \quad (3).$$

又，月球在其內環繞的軌道之軸相比，如 69 : 70（見本編之 § 32）。

所以在尋常狀況下，月球與地球的距離在朔望點方面與其直角點方面的距離相比，如 69 : 70，在朔望點後  $18^{\circ},5'$  的距離（此處之潮爲最大），以及直角點後  $18^{\circ},5'$  的距離（此處之潮爲最小），與其平均距離相比，如

$$69,098747 : 69,5$$

及  $69,897345 : 69,5$  (4).

但月球之力與海洋之運動相比，等於距離之三次方相比的反，最大及最小距離內之力與平均距離內之力相比，如

$$0,9830427 : 1$$

及  $1,017521 : 1$  (5).

因之，比例 (3) 即成爲

$$1,017522L + 0,7986355S : 0,9830427$$

$$\cdot 0,8570327L = 9 : 5 \quad (6),$$

而得  $S : L = 1 : 4,4815$  (7).

因爲太陽之力  $S$  與重力  $\Sigma$  相比，如

$$S : \Sigma = 1 : 12868200 \quad (8),$$

故  $L : \Sigma = 1 : 2871400$  (9).

系 1. 水因太陽之影響能高至 1 尺  $11\frac{1}{30}$  寸，故受月球之影響能高至 8 尺  $7\frac{5}{32}$  寸，而受二者同時的影響時，能高至 10,5 尺。倘月球同時在其近日點內，則水可高至 12,5 尺，或可更高，尤其

是恰巧有強烈的風與之相應時。但這樣大的力已够使海洋之一切運動發生，在觀察上所得的結果，亦與之相符。在海洋之若干部分方面，例如太平洋，大西洋及愛的奧皮 (*Ethiopisch*) 洋之回歸圈外的部分，水高尋常達 6, 9, 12 乃至 15 尺。還有的人說，太平洋較之大西洋等為廣而深，其潮可更大。事實上，欲使潮能盡其高，則洋面之度數由東向西必須不少於  $90^\circ$  而後可。在愛的奧皮洋方面，回歸圈內之水高較小，因為非洲與南美洲間之度數較小所致。在洋之中心，除非其東西岸之水沈下，水即不能高起；在較窄的海面，其兩岸必互為起伏。因此，在離大陸極遠的島方面，潮之漲落較小。反之，在好些海港方面，水因經過許多沙礁使其振盪後再過來，則其勢必洶湧，因而潮之漲落亦必較尋常為大。例如在柏萊毛 (*Plymouth*) 卓別司杜 (*Chepstowe*)，以及諾門第 (*Normandie*) 之聖米休爾 (*St. Michel*) 山，阿佛倫區 (*Avranch*)，東印度之根倍亞 (*Cambai*)，皮九 (*Pegu*) 等處所，即是

如此。在這些處所方面，海潮來去之速度極大，有時沖至岸上達數英里之遠，有時則退至岸外數英里。水所達之高，能至 30, 40 或 50 尺，沈下時亦如此。在沙礁極多的海峽方面，如馬格郎司脫拉司 (*Magellanstrasse*) 以及英國四圍之海，亦多如此。潮來去時的洶湧之勢，使這些港埠方面的水特別高漲。在其他的港岸方面，能直接的與海潮相激盪，可使其漸起伏者，潮之大小與太陽及月球之力相當。

系 2. 月球推動水的力與重力相比，如 1 : 2871400, 故在擺錘試驗及其他靜力學及流體力學方面的試驗上，前者之力太小，不能為我們所注意到。祇在海洋之潮水方面，尚能觀察到此項月球力之影響。

系 3. 月球推動海水的力，與太陽之相似的力相比，如

$$4,4815 : 1,$$

而按第一編 § 107 之系 14, 此項力相比，等於

二星球之密度相比及其外觀的徑之三次方相比二者之合。所以月球之密度與太陽之密度相比，如 4,4815 : 1 之正，月球對徑之三次方與太陽對徑之三次方相比之反，即是，如

$$4,4815 \cdot \frac{(32'12'')^3}{(31'16'',5)^3} : 1$$

或，如 4891 : 1000.

但太陽之密度與地球之密度相比，如 1000 : 4000，故月球之密度與地球之密度相比，如 4891 : 4000，或，如 11 : 9。從可知月球之密度較地球為大，其陸地亦較多。

系 4. 按之天文方面的觀察，月球之真的徑與地球者相比，如

$$100 : 365,$$

故月球之質量與地球之質量相比，如

$$1 : 39,788.$$

系 5. 月球之加速的重力，差不多小於地面上者三倍。

系 6. 月球中心與地球中心間之距離，與前者

離二星球之共同重心的距離相比，如

$$40,788 : 39,788.$$

系 7. 月球中心與地球中心間之平均距離，在前者之八分點方面差不多 = 60,4 地球半徑。地球之大的半軸，已知其 = 19658600 巴黎尺，所以，可推得二星球之中心平均距離為 1187379440 尺。此距離與月球中心離二星球之共同重心的距離相比，如 40,788 : 39,788，故可知後者為 1158268534 尺。因月球之恆星環繞時為  $27^d 7^h 43^m, 8$ ，故其一分鐘內所經過的角之正矢，在半徑為 1000 *Billionen* 尺時，等於 12752341 尺，如半徑為 1158268534 尺，則等於 14,7706353 尺。故如月球以一種力（此力使月球恆在其軌道內運動）向地球下墜，則一分鐘內所經過之道路為 14,7706353 尺。今如將該力以

$$178^{\frac{29}{40}} : 177^{\frac{29}{40}}$$

為比率放大之，則所得者為月球軌道方面之全重力，而如月球以此力下墜時，一分鐘內所經過之道路為 14,8538067 尺，在月球與地球之  $\frac{1}{60}$  的距離

內，即，在 19789657 尺的距離內，一下墜的物體在一秒鐘內亦能經過 14,8538067 尺的道路。在 19615800 尺的距離內，即，在地球之平均半徑的距離內，物體下墜時一秒鐘內所經過之道路為 15,11175 尺 = 15 尺 1 寸  $4\frac{1}{11}$  分。此為緯度  $45^\circ$  下重物下墜時之大小。按 § 24 中所得之表，在巴黎的緯度下，此項大小必須將其放大至  $\frac{2}{3}$  分。按此，可知重物在真空內在巴黎的緯度下下墜時，一秒鐘內所經過之道路為 15 尺 1 寸  $4\frac{25}{33}$  分。今由重力上減去地球私轉所發生的離心力，則在該處下墜的重物，一秒鐘內所經過之道路為 15 尺 1 寸 1,5 分。在 § 4 及 § 23 內，我們已知道，巴黎緯度下重物之下墜，在一秒鐘內所經過的道路確為這樣長。

系 8. 月球與地球間的平均中心距離，在前者之朔望點方面等於  $59\frac{29}{80}$  地球大軸之半，而在直角點方面則等於  $60\frac{1}{8}$  地球大軸之半。此二距離與八分點方面月球之平均距離相比，如

69 : 69,5 及 70 : 69,5.

系 9 二中心點之平均距離，在月球之朔望點等於 60,1 地球之平均半徑，在直角點方面則為  $60\frac{29}{30}$ .

系 10. 在月球之朔望點方面，其平均的地平視差有以下之值：

緯度	平均地平視差
0°	57'20"
30	16
38	14
45	12
52	10
60	8
90	4.

在這裏，地球之磁力我未將其計入，因為其量甚小，不足發生什麼影響。但如是我們能研究及此，並將子午線之度數，各種緯度下有等時性的擺鐘之長，海洋運動之定律，月球之視差，以及月球

與太陽之外觀的徑等等，用觀察較精密的測定之，則此項計算亦可較精確的再算一道。

§ 43. 問題。 試求月球之形狀。

倘月球爲流體，如我們的海洋一樣，則地球對於離此最近的及最遠的該項流體部分之吸引力，與月球對於相當的地上海洋之吸引力相比，如月球對於地球之加速的重力比後者對於前者之加速的重力，以及月球之徑比地球之徑，二者之合，即是，如

$$39,788.100 : 1.365$$

$$= 1081 : 100.$$

但月球之力能使我們的海洋高起至 8,6 尺，故地球之力能使月球流體高起至 93 尺。因此，月球之形狀，必爲一卵形，其大軸之引長經過地球之中心，而且較之其他與之相垂直的軸長 186 尺。所以月球之形狀是如此，而且自開始時即如此。

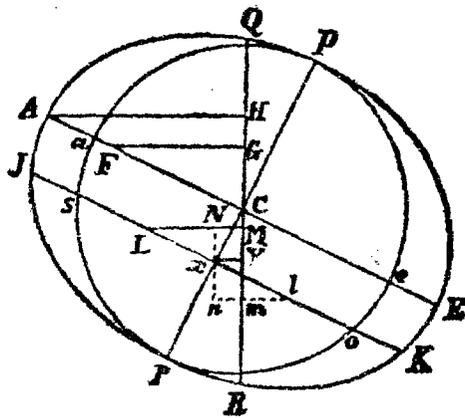
系。 由此，我們可得一結論，即，月球向地之面恆爲固定的，因爲在其他的狀況下，月球不能靜止着而必恆振動以求恢復其原狀。但此項振動亦必

---

極遲，因為引起此的力亦甚小，而其恆向地球的部分必恆回顧（*respicere*）到月球軌道之其他一焦點，不能即離開此而向地迴轉，其理由則見 § 21 內。

## 第四章 論歲差

§ 44. 補題。今設  $APEp$  為密度均勻的地球， $C$  為其中心點， $AE$  為赤道， $P$  及  $p$  為其兩極。又設  $Pape$  為一球，其中心在  $C$ ，其半徑為  $CP$ ， $QR$  則為一平面，被一直線所垂直的相交，此直線係由太陽之中心向地球之中心。 $Pape$  球係切在地球之內，今假定該球外的地球之部分，均有一種傾向，在  $QR$  兩面以某種力與之離開，此項力與

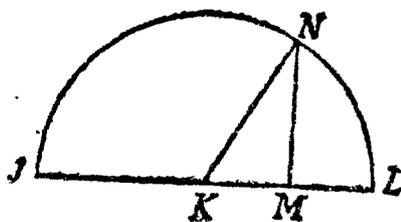


第二〇四圖

離此平面的距離相比。如是則在赤道平面  $AE$  內之一切部分，圍在球外成爲一圈，對於地球之旋轉能有幫助，其力與另一力（此力爲該項部分均在赤

道上時對於地球旋轉發生作用的力)相比,如 1:2. 旋轉的軸係在赤道與  $QR$  平面之相交處.

今以  $K$  為中心,  $KL$  為半徑作半圓  $JNL$ , 並試設想將其分割成爲無數小部分, 由每部分  $N$  作一正弦  $NM$  垂於徑  $JL$  上. 如是則一切  $NM$



第二〇五圖

之平方之和等於一切  $KM$  之平方之和, 而每一和數均等於等多的半徑  $KL$  之平方之和的一半.

又試設想將  $AE$  圓之周分割成爲等多的小部分, 由其每一部分  $F$  作一垂線  $FG$  垂於  $QR$  平面上, 並由  $A$  點作垂線  $AH$ .  $F$  離  $QR$  平面的力, 按所設是與  $FG$  相比, 而將此力與  $CG$  距離相乘時, 所得之積即表  $F$  對於地球旋轉上之影響. 所以  $F$  處部分之影響力與  $A$  處者相比, 如

$$FG \cdot GC : AH \cdot HC,$$

即, 如

$$FC^2 : AC^2.$$

因此，一切  $F$  處部分之影響與等多的  $A$  處部分之影響相比，等於  $1:2$ 。

此即所欲證者。

因為此項部分發生作用，在垂直的方向內離開  $QR$  平面，而且在後者之兩面均同樣的生作用，故其影響使赤道之周以及相連結的整個地球環一軸旋轉，此軸在  $QR$  平面及赤道之平面內。

§ 45. 補題. 在同樣的假定下，我並斷定：一切圍於球外的部分對於推動地球環其軸旋轉上所發生的力及全部作用，與赤道圓上等多的部分對於推動地球作同樣的旋轉之力相比，如

$$2:5.$$

今設  $JK$  為一任意的圓，與  $AE$  赤道相平行， $L$  與  $l$  為二任意部分，在此圓上，其位置相同，但同在  $Pape$  球之外。 $QR$  平面與向太陽的半徑相垂直；今作  $LM$  及  $lm$  垂於其上。如是則此項部分求離  $QR$  平面的一切力，與此項垂線相比。今設  $Ll$  與  $Pape$  平面相平行，並將其於  $X$  均分之，再

經過  $X$  作  $Nn$  線與  $QR$  相平行;  $Nn$  線與  $LM$  及  $lm$  相交於  $N$  及  $n$ . 又作  $XY$  垂線垂於  $QR$  平面上. 如是則  $L$  與  $l$  二部分之相反的力, 對於使地球在相反的方向內旋轉上, 與  $LM \cdot MC$  及  $lm \cdot mC$  相比, 即是, 與

$$LN \cdot MC + MN \cdot MC$$

及  $ln \cdot mC - mn \cdot mC$

相比, 或亦即與

$$LN \cdot MC + MN \cdot MC$$

及  $LN \cdot mC - MN \cdot MC$

相比. 其差

$$LN \cdot Mm - MN (MC + mC) \quad (1)$$

所表者爲此二部分對於旋轉地球上之合力. 此差之正的部分  $LN \cdot Mm = 2LN \cdot NX$  與  $A$  處二相等的部分之力  $2AH \cdot HC$  相比, 如

$$LX^2 : AC^2 \quad (2).$$

其負的部分  $MN (MC + mC) = 2XY \cdot CY$  與  $2AH \cdot AC$  相比, 如

$$CX^2 : AC^2 \quad (3).$$

如是， $L$  與  $l$  二部分對於旋轉地球之合力，與  $A$  處與之相等的二部分之力（此力亦對於旋轉地球生作用）相比，如

$$LX^2 - CX^2 : AC^2 \quad (4).$$

但如將  $JK$  周分割成爲無數的等分  $L$ ，則一切  $LX^2$  與等多的  $JH^2$  相比，如  $1 : 2$ ，因此，與等多的  $AC^2$  相比，如

$$JH^2 : 2AC^2 \quad (5).$$

又，等多的  $CH^2$  與等多的  $AC^2$  相比，如

$$2CX^2 : 2AC^2 \quad (6).$$

$JK$  周上一切部分之合力，與  $A$  處等多的而且相等的部分之合力相比，如

$$JX^2 - 2CX^2 : 2AC^2 \quad (7),$$

所以，與  $AE$  上等多的部分之合力相比，如

$$JX^2 - 2CX^2 : AC^2 \quad (8).$$

今設想球之徑  $Pp$  被分成爲無數的等分，其間作有等多的圓  $JK$ 。任何一圓周上之物質與  $JX^2$

相比，其對於旋轉地球之力則與

$$JX^2(JX^2 - 2CX^2)$$

相比。但如將該項物質置於  $AE$  上，則其力即與

$$JX^2 \cdot AC^2$$

相比。物質一切分子之力，在球外該項圓上時與其  
在最大圓上時相比，如

$$\text{一切 } JX^2(JX^2 - 2CX^2) :$$

$$\text{等多的 } JX^2 \cdot AC^2,$$

即是，如

$$\Sigma[(AC^2 - CX^2)(AC^2 - 3CX^2)] :$$

$$\Sigma[(AC^2 - CX^2)AC^2] =$$

$$\Sigma[AC^4 - 4AC^2 \cdot CX^2 + 3CX^4] :$$

$$\Sigma[AC^4 - AC^2 \cdot CX^2],$$

而如設  $CX = x$ ，則即

$$= \int_0^{AO} [AC^4 - 4AC^2 \cdot x^2 + 3x^4] dx :$$

$$\int_0^{AO} [AC^4 - AC^2 \cdot x^2] dx$$

$$= AC^4 \cdot AC - \frac{4}{3} AC^2 \cdot AC^3 + \frac{3}{5} AC^5 :$$

$$AC^4 \cdot AC - \frac{4}{3} AC^2 \cdot AC^3 = 2 : 5.$$

此卽所欲證者。

[譯者按此處所用有定積分形式，想爲原譯者所改成，但原譯本上未加聲明，姑仍之。]

§ 46. 補題。 在同樣的假定下，我並斷定：地球繞以前所說的軸之旋轉（此項運動係由其一切部分之運動所合成）與上述的圓圈之運動相比，如

地球之物質比圈之物質，

每個圓周四分之一之平方之三倍比徑之平方之二倍，

二者所合成，所以二種運動相比，等於物質比物質以及  $925275 : 1000000$  二者之合，

圓柱體環其視爲固定的軸旋轉時，其運動與其內切的球體（此球亦環此軸旋轉）之運動相比，如

4 個相等的平方比 3 個切在其內的圓。

又，圓柱體之運動與一極薄的圓圈（此圈圍於圓柱體及球之切點外）之運動相比，如

圓柱體之物質之二倍比圈之物質之三倍。

又，此圈環圓柱體軸之等速的運動與其環自己的徑之等速的同時的運動相比，如圓周比其徑之二倍。

§ 47. 第二假設。 假如上述的圓圈單獨的在地球軌道之平面內完成其環繞，試設想將地球之其餘的部分取去，而且此圈同時環其軸（此軸與黃道面之傾斜為  $23\frac{1}{2}^\circ$ ）作私轉，則不問此圈為固體或流體的，二分點之運動恆不變。

§ 48. 問題。 試求歲差。

倘月球交軌點在直角點方面，則其圓的軌道內之平均的每時運動 =  $16''$ ,6, 其一半，即  $8''$ ,3, 按以前之理由，為交軌點在此軌道內之平均的每時運動。所以，在一整個的恆星年內，此運動為

$$20^\circ 12' 29'' \quad (1).$$

所以月球交軌點在該項軌道內每年向後運動  $20^\circ 12' 29''$ ，而如有若干月球在，則其每個的交軌點之運動與環繞時間相比。

故如月球環繞地球在其附近於一恆星日的時

間內運行，則其交軌點之每年的運動與  $20^{\circ}12'29''$  相比，如一恆星日之長，與月球之環繞時間相比，即是，如

$$23^h56^m : 27^d7^h43^m = 1436 : 39343.$$

環繞地球的月球所成之圓圈亦是如此，不問月球是否相連或為流體的，或為固體的均可。

今設此圈之物質量與地球之  $PapAPepE$  部分相等，此部分係在  $Pape$  球之外。

此球與在其外的部分相比，如

$$aC^2 : AC^2 - aC^2,$$

而因

$$PC : AC = aC : AC = 229 : 230,$$

故亦即如，

$$52441 : 459 \quad (3).$$

倘圓圈沿着赤道平面圍於地球之外，二者並環圈之徑而旋轉，則後者之運動與內球之運動相比，如

$$459 : 52441,$$

及  $1000000 : 925275$

二者之合，即是，如

$$4590 : 485223 \quad (4).$$

所以圓圈之運動與圈及球之聯合運動相比，

如  $4590 : 489813 \quad (5).$

故如圓圈與球相結合，將其本身之運動傳給球，則其所餘者與原來者相比，即為 (5)。

二分點之運動必須以同樣的比例減小之。由圓圈及球所合成的物體之每年的運動與  $20^{\circ}12'29''$  相比，等於

$$1436 : 39343$$

及  $4590 : 489813$

二者之合，即是，等於

$$100 : 292369 \quad (6).$$

使月球交軌點以及圈之二分點後退的力，即， $3JT$ ，在每一部分方面均與其離  $QR$  平面的距離相比；各部分之漸離該平面，亦由於此力。故如圓圈之物質分布在球面上，使其在地球之上部分作

$PapAPepE$  形狀，則一切部分之全部力及作用(就其旋轉地球而言，其旋轉軸為任何一赤道之徑)較前為小，其比率為 2 : 5，就二分點之運動而言亦是如此，所以二分點之每年的後退與  $20^{\circ}12'29''$  相比，如

$$10 : 73092 \quad (7), \bullet$$

即是，等於  $9'',9$ 。

因為赤道平面對於黃道面有傾斜；故此項運動必須以

$$\begin{aligned} \cos 23^{\circ},5 &: 1 \\ &= 91706 : 100000 \quad (8) \end{aligned}$$

為比率減少之，故得  $9'',1$ 。

此即所求之歲差，由太陽之力所引起者。月球對於運動海洋的力，與太陽之相當的力相比，如

$$4,4815 : 1,$$

此為我們以前所已求得者。就其對於二分點之運動而言，月球之力與太陽之相當力相比，亦是如此。所以由月球所引起的歲差，須為  $40'',9$ 。由二者

所共同引起的差爲  $50''$ 。此值與經驗上所得者相比，頗相符合，天文上所觀察得者，差不多是  $50''$ 。

倘地球之赤道部分較之兩極高  $17\frac{1}{2}$  英里，則地球外層的物质必較其中心處爲稀薄。所以歲差一面因赤道之高起而增加，一面又因密度之小而減小。

以上我們將太陽，地球，月球及行星所成之系統敘述過了，尚須一論者，是彗星的現象。

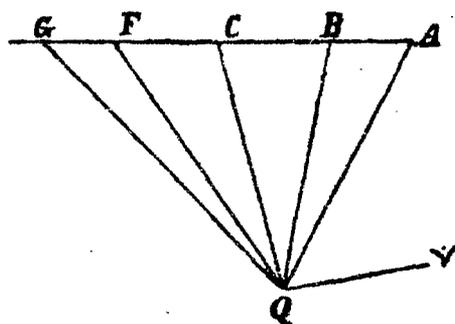
## 第五章 論彗星

§ 49. 補題。 彗星在月球之上，落入行星之區域。

由每日的視差可知彗星在月下區域之上部，而由其每年的視差，亦可知其能落入行星之區域。按宮之次序而運動的彗星，在其顯現之後來，倘地球在其與太陽之中間，則必前進較以前遲緩或後退，反之，倘地球與之處在相對的地位，則即以同樣的比率加速。但如逆宮之次序而運動，則在其顯現之後來，當地球在其與太陽之間時前進較速，反之，當地球在相反的處所時前進較遲或後退。彗星之運動與行星一樣，有時在我們看來似乎向後退，有時運動較遲，有時則較速，完全視地球之運動而異，隨其與地球間之相互位置而變。故如地球之運動與彗星為同方向，而且地球環繞太陽之角速度

充分的超過彗星之角速度，則由地球上看來，彗星之運動因為過於遲緩，好像是後退的。反之，倘地球向相反的方向運動，則彗星之運動看來即加速。由此項加速及遲緩，可推得彗星之距離，其法如下：

今設  $\gamma QA, \gamma QB, \gamma QC$  為彗星之長，係在其顯現之初所觀察到者， $\gamma QF$  則為其隱沒前所觀察到的長。今作一線  $ABC$ ，使  $QA, QB, QC$  所割下的段  $AB, BC$  相比，等於



第二〇六圖

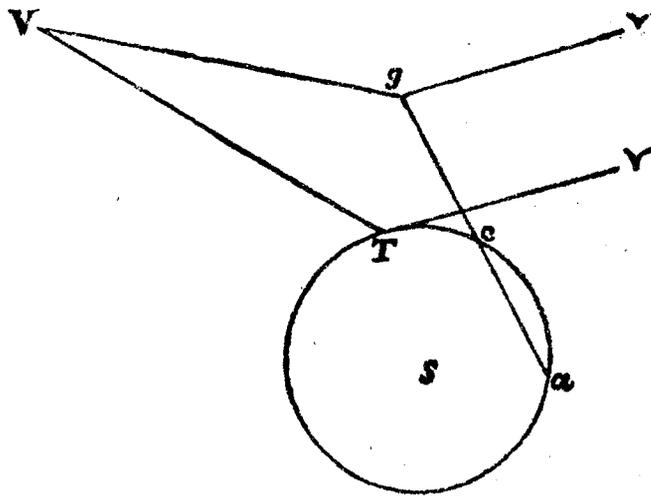
前三觀察間之時間相比。又將  $AC$  引長至  $G$ ，使  $AG:AB$  等於最初及最後的觀察間之時間比開始時二觀察間之時間。再作  $QG$  線，而如彗星在直線上作等速運動，地球則靜止着或亦於直線上作等速運動，則  $\gamma QG$  角即為最後觀察時的彗星之長。因此， $FQG$  角是由彗星與地球運動之差失所發

生的。倘二天體向相反的方向運動，則可將此角加於  $\gamma QG$  角上；如是，彗星之外觀的運動即被加速。反之，二天體如在相同的方向內運動，則須將  $FQG$  由  $\gamma QG$  上減去；如是，所得彗星之外觀的運動必較遲，或向後退，如以前所說過者。

所以此角是由地球之運動所引起，故可視為彗星之視差，其由彗星本身運動上所發生的差失則很小，可以略去不計。

由此項視差，可推得彗星之距離，其法如下：

設  $S$  為太陽， $acT$  為大軌道， $a$  為第一次觀察時地球之處所， $c$  為第三次觀察時的處所， $T$  為



第 二 〇 七 圖

最後觀察時的處所。  $T\gamma$  爲一線，  $\gamma TV = \gamma QF$ ，即，等於地球在  $T$  時彗星之長。今將  $ac$  引長至  $g$ ，使  $ag : ac = AG : AC$ 。如是則  $g$  爲一處所，地球於  $ac$  上作等速運動在最後觀察時所能達到者。今作  $g\gamma$  與  $T\gamma$  相平行，並作  $\gamma gV$  角  $= \gamma QG$ ，則  $\gamma gV$  由  $g$  出發觀察時等於彗星之長，而  $TVg$  角爲由  $g$  至  $T$  時所發生的視差。所以  $V$  爲彗星在黃道方面之處所，尋常在木星軌道之下。

這些統可由彗星軌道之曲率以推得之。倘其運動之速度達於極大，則軌道爲圓。但在其運動之後來，由視差所引起的外觀的運動之部分，與全部外觀的運動之比較大，其結果能使其出離圓的軌道，而如地球向一方向運動，則彗星即向相反的方向進行。此項轉向多半是由視差所發生，因爲此與地球之運動相當。由此項轉向以計算，據我看來在彗星隱沒時，其位置落在木星下的很遠處。所以，當其在近地點及近日點時，與我們的距離爲最近，其位置多在火星軌道及其他在下的行星軌道之

下。

彗星之遠近，亦可由其頭之光以知之。與太陽相距甚遠，但受太陽之光的天體，尋常以距離之四次方減少其發光之度。此中之二次方係由於與太陽之距離，其他二次方則由於其外觀的徑之減小，故如一彗星之光量及外觀的徑為已知，則其距離亦即可知，蓋此距離與行星之距離相比，等於徑之相比以及發光度之平方根相比之反。

1682 年時，弗來姆司替德 (*Flamsteed*) 曾觀察過彗星方面的星氣層之最小的徑，其所用望遠鏡長 16 英尺，其上裝有一測微計，所得結果為 2 分。其核心，或其頭中間之星，不及此寬之  $\frac{1}{10}$ ，故其徑祇有 11 至 12 秒。但頭之發光度，則超過 1680 年時所出現的彗星，其光輝差不多與第一等或第二等大的星之光一樣。今設彗星之光等於土星及其圈的光之  $\frac{1}{4}$ ，後者之光差不多等於一球之光，此球之外觀的徑約為 21 秒。所以該球及其圈之光合起來時，約等於一外觀徑為 30 秒的球。故彗星與

地球之距離與土星之距離相比，如 12 : 30 之正及 1 :  $\sqrt{4}$  之反，即是，如 24 : 30 或 4 : 5。

1665 年四月所出現的彗星，照海佛 (Hevel) 所報告，其光芒幾超過一切恆星，而其色之鮮則超過土星。所以就光彩而論，此彗星超過往年所出現者許多，而且後者在尋常看來，亦為極有光輝的彗星，其光芒與第一等大的恆星相彷彿。該彗星之星氣層，約為 6 分，其核心小於木星，有時看來與土星球同樣的大，有時則較小。但星氣層之徑極少超過 8 或 12 分者，其核心之徑約為其  $\frac{1}{10}$  或  $\frac{1}{15}$ ，故此項星體之外觀的大小多半與行星之大小相等。尋常其光芒與土星相同，但有時則不及，故一切彗星在其近地點時必在土星之下或稍在其上。故有些人將其位置放在恆星之區域內，實為錯誤，因為在這樣的距離內，彗星受日光之照映，不能較之一般的行星受恆星所照映者為特強。

在這些研究方面，我們尚未論及彗星因其頭四圍之雲氣所籠罩而發生的昏蒙現象。此項籠罩

所發生的昏蒙愈甚，則其與太陽亦必愈接近。所以彗星能落入土星軌道下之極遠處，這是極可能的事，由視差方面亦可推論到此。彗星之尾，亦可證明此事實。此項尾之由來或則由於以太中所分布的雲氣之反射，或則由於其頭之光。倘為第一事，我們必須將彗星之距離減小，不然，我們必須假定，此項不斷的由其頭所放出的雲氣能傳入無限的空間，其速度亦大至無限。倘為第二事則一切尾所發生之光統須歸之於其核心。今如設想，此項核心聚有極富的光在內，而如彗星有極光輝的尾及星氣層，則此核心之光至少須大於木星。蓋此核心能傳出極多的光，其外觀的徑亦較木星為小，故其受太陽之光必遠較木星為強，因而與之相距極近。如是，我們必須推論彗星在金星軌道之下，蓋如將其一切光聚集在一顆行星方面，則此星之光芒，必能超過金星幾倍。由彗星頭之光，我們必須推論到此項光近太陽時增加而遠太陽時則減小。按海佛氏之觀察，1665年所出現的彗星之外觀的運動

恆減少，蓋當時已越過了近地點，但其頭之光芒則每日增加，直至後來沈入太陽光內成爲不可見。1683 年出現的彗星，始見於七月底，其開始的運動極緩，每天祇有 40 至 45 分。但以後則逐漸增加，至九月四日時，每天有 5 度。在這時間內，彗星逐漸的與地球相接近，此則可由其頭之徑以知之。蓋在八月六日時，海佛氏測得此徑爲  $6'5''$ ，但至九月二日，則得  $9'7''$ 。所以彗星之頭，在開始時較後來爲小。但在開始時該彗星與太陽相距較近，故其光芒亦較強，後來則漸弱，因爲一面雖與地面相接近，但同時亦與太陽較遠了。1618 年所出現的彗星，其運動在十二月之中爲最大，1680 年的彗星則於十二月之底，其運動爲最大。此二者均與地球甚相接近，而在其初離太陽範圍時，約當十四日之前，其光芒爲最強。至其尾之光芒則因出離較早故亦較早顯其光芒。1618 年的彗星，在十二月一日時，其頭大於第一等大的星球，此爲西沙度 (*Cysatus*) 所觀察到者；至十二月十六日，距地最近，其

大不改，但其光芒則減小，及至正月七日，開柏萊 (*Kepler*) 欲作觀察，但已不能見到。1680 年之彗星，弗來姆司替德 曾於十二月十二日作過觀察，其與太陽之距離為  $9^\circ$ ，其光之強不及一第三等的星。至十二月十五及十七日，其光稍強，約與一第三等的星相等。至十二月二十六日，此彗星運動甚速，與近地點較相接近，但亦較小了。及至正月三日，此彗星之光強等於一第四等的星，至九日，等於第五等的星，至十三日因月球之光輝即不能見。後來至正月二十五日，其光已不及一第七等的星。今如取近地點前後同時間內之觀察，則其頭之光芒應為相等者，因為在此二事項下，其與地球之相距亦相等。但在向太陽的一面實在較之在其相反的一面更為光輝。所以，由此我們亦可推論到其接近太陽時實在為前一事。蓋當彗星之頭運動較速與地球較接近時，其光亦較有秩序而鮮明。

系 1. 所以彗星之光芒，是由反射太陽之光而來。

系 2. 由以上所明，可知彗星與太陽相接近之理由。倘彗星在土星以外很遠的區域內，則必恆在與太陽相反的處所。如是，在天之此部分的彗星與地球較為接近，其餘的則能為中間的太陽所掩沒。我曾詳細觀察過去彗星之狀況，知道在向太陽的半球內所發見者為多，約多至四五倍，有好多則為太陽之光所掩沒。當其落入我們的區域時，尙未有尾，而且未充分的被太陽所映照，故在其與我們接近之度未超過木星以前，非用望遠鏡不能見。彗星在地球之附近環太陽所作的道路之大部分，在向太陽的一面內。如是，彗星既與太陽較接近，故所受之光亦即較多。

系 3. 由此可知天空中並沒有什麼阻力存在。因為彗星所循的軌道係斜的，此項軌道有時與行星之軌道相反，其運動之方向極為自由，而且能保持其運動極久。即逆宮之次序而運動的彗星亦是如此。但如彗星之體質與一般行星不同，而且不是恆在同一的軌道內運動，則我自然作了很大的錯

誤。有些人的意見，以為彗星是星氣所成，因為其頭部方面常有變化發生。但此說實在理由不充分。蓋彗星之頭係為雲氣所蒙，其下部較為密。彗星頭部方面所發見的變動係在此項雲氣內，非在頭之本身。同樣的，倘我們由其他行星上觀察地球，則所見之光亦由圍於地外的雲氣所反射。在木星上運動的條紋，實在也是由雲氣所成，此項雲氣圍於木星之外，使我們不能見到木星之本身。彗星外所圍之雲氣更為深而密，自然使我們更不能見彗星之本身。

§ 50. 定理。 彗星在圓錐曲線內運動，其焦點在太陽之中心，其向太陽所作的半徑作成與時間相比的面。

此定理可由第一編 § 32 之系 1 及本編 §§ 10, 15 及 16 以知之。

系 1. 由此可知倘彗星在橢圓內運動，則其環繞時間與行星之環繞時間相比，等於其大軸相比之  $\frac{3}{2}$  次方。彗星之最大的部分係在行星之上，其所

作軌道之軸大於該項天體者。因此，彗星之運動必很慢，而如彗星軌道之軸較之土星軌道者大四倍，則彗星之環繞時間與土星之環繞時間相比，即，與30年相比，等於 $4\sqrt{4} : 1 = 8 : 1$ 。故此環繞時間為240年。

系 2. 彗星之軌道與拋物線很接近；倘我們用拋物線以代之，當不致有大的錯誤。

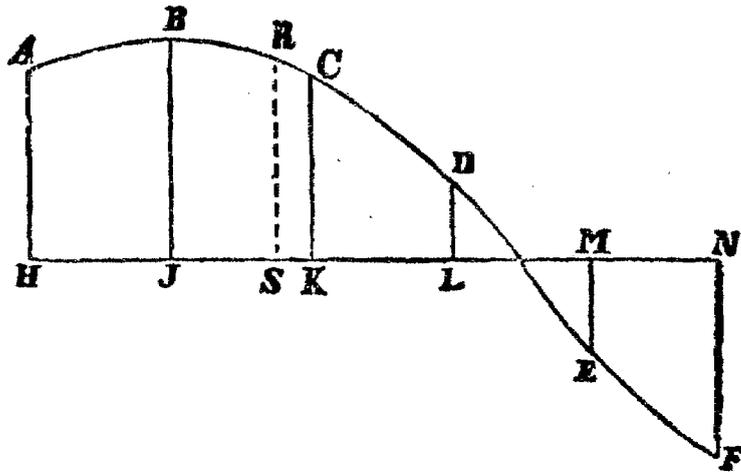
系 3. 所以彗星之速度與行星之速度相比，差不多等於行星離太陽之中心的距離之二倍與彗星離該中心的距離相比之平方根。今如假定地球在其內運動的橢圓之半大軸為 $100000000 = a$ ，地球每日的運動能經過此數之 $1720212 = t$ ，其每時的運動則經過其 $71675,5$ ，則在與太陽同距離內之彗星，其速度與地球之速度相比如 $\sqrt{2} : 1$ ，因而每天能經過 $2432747$ ，每時 $101364,5$ 。在較大或較小的距離內，每日及每時的運動與適纔所得者相比，等於距離相比之平方根之反，故為已知者。

系 4. 故如通徑較大軌道之半徑大四倍，並設

後者之平方爲  $100000000^2 = a^2$ ，則彗星向太陽的半徑所作成之面每日爲 1216373,5，每時爲 50682,25。倘將該通徑以某種比率放大或縮小之，則每日及每時所作的面，亦以該比率之平方根增加或減小。

§ 51. 補題。 試求一拋物形的線，經過若干已知的點。

今設  $A, B, C, D, E, F$ ，等爲此項點， $HN$  爲一位置已定的直線；今由該項點作諸垂線垂於此直



第 二 〇 八 圖

線上，此項垂線爲  $AH, BJ, CK, DL, EM, FN$ ，等。

第一事。 倘  $HJ, JK, KL$ ，等諸段爲相等者，

則可作

$$AH - BJ = b,$$

$$BJ - CK = 2b,$$

$$CK - DL = 3b,$$

$$DL + EM = 4b,$$

$$-EM + FN = 5b,$$

等等,

並設

$$b - 2b = c,$$

$$2b - 3b = 2c,$$

等等,

以及

$$c - 2c = d, \text{ 等等.}$$

如是, 可得以下之表:

$b$	$2b$	$3b$	$4b$	$5b$
$c$	$2c$	$3c$	$4c$	
$d$	$2d$	$3d$		
	$e$	$2e$		
		$f,$		

於此,  $f$  爲最後之差.

今再作一垂線  $RS$ , 爲所求的曲線之一縱線.

於是可用下法以求其長.

設  $HJ, JK, KL$ , 等等 = 1, 又設

$$AH = a,$$

$$-HS = p,$$

$$\frac{1}{2}p(-JS) = q,$$

$$\frac{1}{3}q(+SK) = r,$$

$$\frac{1}{4}r(SL) = s,$$

$$\frac{1}{5}s(SM) = t,$$

如是儘可繼續下去直至  $ME$  垂線爲止, 其在  $S$  之  $A$  端的項  $HS, JS$ , 等等均給以負號, 其相反方面之項  $SK, SL$ , 等等則給以正號. 如是, 可得

$$RS = a + bp + cq + dr + es + ft + \dots$$

第二事. 倘  $HJ, JK$  等不相等, 則可設

$$b = \frac{AH - BJ}{HJ}, \quad 2b = \frac{BJ - CK}{JK},$$

$$3b = \frac{CK - DL}{KL}, \quad \text{等等},$$

$$c = \frac{b-2b}{HK}, \quad 2c = \frac{2b-3b}{JL},$$

$$3c = \frac{3b-4b}{KM}, \quad \text{等等},$$

$$d = \frac{c-2c}{HL}, \quad 2d = \frac{2c-3c}{JM}, \quad \text{等等}.$$

此即是，縱線之差被橫線所除，以後則該項數之差又被橫線所除等等。今設此項差已求得，並設

$$AH = a, \quad -HS = p, \quad p(-JS) = q,$$

$$q(SK) = r, \quad r(SL) = s, \quad s(SM) = t,$$

等等，直至垂線  $ME$ ，則得

$$RS = a + bp + cq + dr + es + ft + \dots$$

系。用此方法，一切曲線之面積可以求得。

蓋如任何一曲線之若干點已知，則可設想作一拋物線經過此項點。如是，此拋物線之面積差不多與所求的曲線之面積相等，但求拋物線面積之方法則為我們所已知。

§ 52. 補題。今設有若干彗星處所已為我們所知道，試在一任何已知的中間時間求與之相當的

彗星之處所。

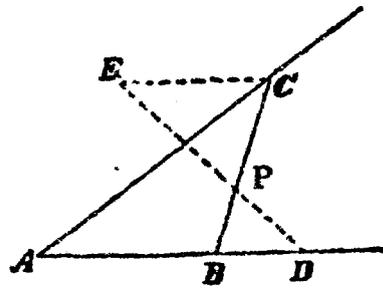
設  $HJ, JK, KL, LM$ , 爲各個觀察中間的時間，又設  $AH, BJ, CK, DL, EM$ , 爲彗星之長，均爲我們所觀察到者；最初所觀察到的長與所求的長中間之時間爲  $HS$ 。於是設想經過  $A, B, C, D, E$ , 作一有規則的曲線  $ABCDE$ , 並用前節之法求其縱線  $RS$ 。如是則此線卽爲所求之長，用同樣的方法可由三個已觀察到的寬以求與一已知時間相當的寬。

倘所觀察到的長之差，約爲 4 至 5°，則求新的長與寬時，祇須 3 或 4 次觀察便够。但如較大，有 10 至 20°，則須有五次觀察方能求得。

§ 53. 補題。 試作一直線  $BC$  經過一已知點  $P$ , 另有二線  $AB$  與  $AC$ , 其位置爲已定，與該線相交於  $B$  及  $C$ , 其  $PB$  與  $PC$  相比之率爲已知者。

由  $P$  點出發作一直線  $PD$  向二線中之一，例如  $AB$ , 並將其向他線  $AC$  引長之，使  $PE$  與  $PD$  相比等於該已知之率。

又作  $EC$  與  $AD$   
相平行, 並引  $CPB$ , 則  
 $PC : PB = PE : PD$ .



第二〇九圖

§ 54. 補題. 今設  
 $ABC$  爲一拋物線, 其焦

點在  $S$ , 其  $AC$  弦於  $J$  被平分, 並分割  $ABCA$  扇形出來. 此扇形之徑爲  $J\mu$ , 其頂點爲  $\mu$ .

今於  $J\mu$  之引長取  $\mu O = \frac{1}{2}J\mu$ , 作  $OS$ , 並作  $S\xi = 2 \cdot SO$ . 今如彗星  $B$  在  $CBA$  弧上運動, 則可作  $\xi B$  與  $AC$  相交於  $E$ . 如是,  $AE$  差不多與時間相比.

今如作  $EO$  與拋物線弧  $ABC$  相交於  $Y$ , 並於  $\mu$  作切線  $\mu X$  於曲線上, 與  $QE$  相交於  $X$ , 則曲線形的面積相比, 爲

$$ASEX\mu A : ASCY\mu A = AE : AC \quad (1).$$

因爲  $\xi O : SO = 3 : 1$ ,  $EO : XO = 3 : 1$ ,

故  $SX$  與  $EB$  相平行 (2),

而如作  $BX$  與  $BS$  時,

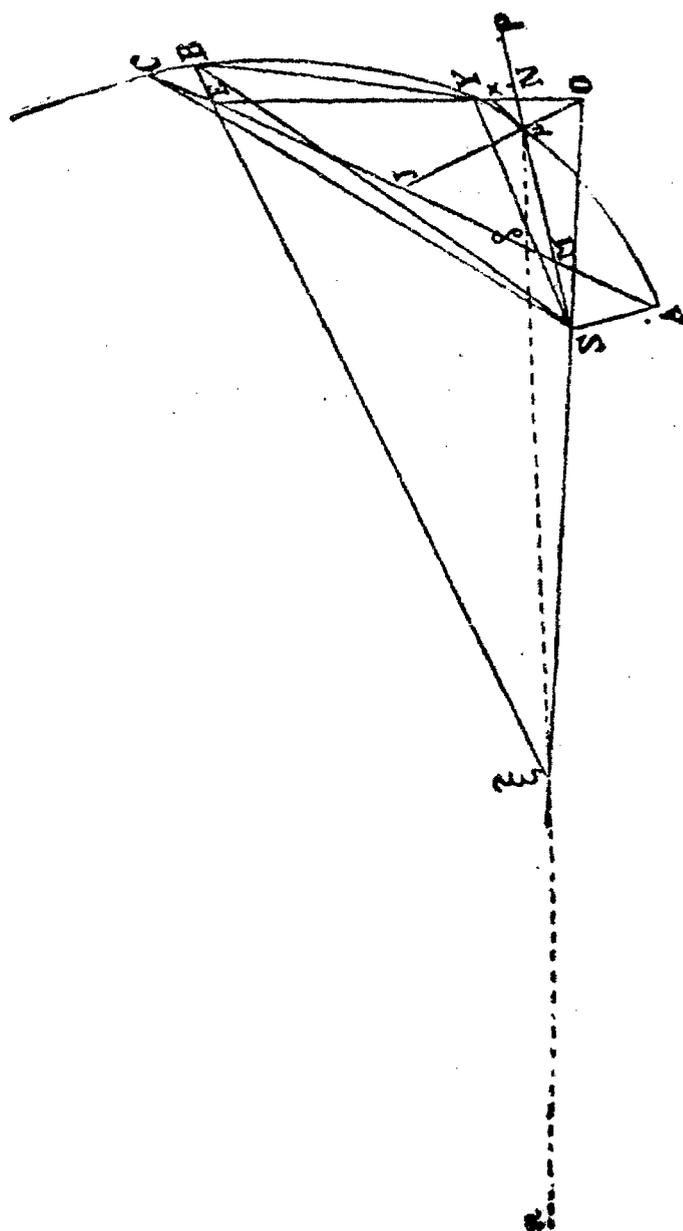


圖  
O  
—  
—  
第

$$\triangle SBE = \triangle XBE \quad (3).$$

今於  $ASEX\mu A$  上加  $XBE$  三角形，又自此

和數上減去  $SBE$  三角形,則

$$ASBX\mu A = ASEX\mu A,$$

而按 (1), 有

$$ASBX\mu A : ASCY\mu A = AE : AC \quad (4).$$

但另一面,差不多

$$ASB\mu YA = ASBX\mu A \quad (5),$$

而  $ASBY\mu A$  比  $ASCY\mu A$  之等於作成  $AB$  弧的時間比作成  $AC$  全弧的時間,其近似率亦差不多如此,所以  $AE$  與  $AC$  相比,很近似的等於時間相比。

此即所欲證者。

系。倘  $B$  落在拋物線之頂點  $\mu$ , 則  $AE$  與  $AC$  相比,恰等於時間相比。

§ 55. 附註。今作直線  $\mu\xi$ , 與  $AC$  相交於  $\delta$ , 並於其方向內取  $n$  點,使

$$\xi n : \mu B = 27MJ : 16M\mu \quad (6),$$

則  $Bn$  之割  $AC$  弦,恰為時間相比之率,較以前更為準確。倘  $B$  較之  $\mu$  離開拋物線之主要頂點更

遠,則  $n$  須在  $\xi$  之外面,反之,須在其此面。

§ 56. 補題。 因  $4S\mu$  爲拋物線之通徑 (其頂點爲  $\mu$ ), 故有

$$J\mu = M\mu = \frac{AJ \cdot JC}{4 \cdot S\mu} \quad (7).$$

§ 57. 補題。 將  $S\mu$  引長至  $N$  及  $P$ , 使

$$\left. \begin{aligned} \mu N &= \frac{1}{8} J\mu, \\ SP : SN &= SN : S\mu \end{aligned} \right\} (8);$$

如是則彗星恆以  $SP$  高之速度進行時, 於經過  $A\mu C$  所須的時間內, 能經過與  $AC$  相等的弧。

蓋如彗星於同時間內在直線上等速的前進, 此直線與拋物線相切於  $\mu$ , 則其向焦點  $S$  所作的半徑, 其所經過面積與拋物線的面積  $ASC\mu$  相等。所以切線之部分與  $S\mu$  直線相乘之積, 與  $AC \cdot SM$  相比, 等於

$$ASC\mu : ASC, \text{ 即, 如 } SN : SM \quad (9).$$

故  $AC$  與切線之部分相比, 如

$$S\mu : SN \quad (10).$$

但  $SP$  高的速度與  $S\mu$  高的速度相比, 如

$$\sqrt{S\mu} : \sqrt{SP} \text{ 即, 如 } S\mu : SN \text{ (11),}$$

故以此速度於此時間內所作之線，與同時所作的切線之部分相比，如

$$S\mu : SN.$$

因爲  $AC$  以及用此新速度作成的線所作切線之部分相比，其率相同，故彼此亦必相等。

系。所以彗星以  $S\mu + \frac{2}{3}J\mu$  高之速度，在同時間內差不多能作成  $AC$  弦。

§ 58. 補題。倘彗星之一切運動均失去，由  $SN = S\mu + \frac{1}{3}J\mu$  高向太陽下墜，起初時推動其下墜的力則在全時間內保存着不變。如是，則彗星在其軌道內經過  $AC$  弧所須之時間，用其一半時，該下墜的彗星能經過一等於  $J\mu$  的道路。

蓋在經過  $AC$  弧的時間內，彗星能經過  $AC$  弦，其速度即爲  $SP$  高所有之速度。所以在同時間內，以重力之作用，彗星能在一圓內完成其環繞（此圓之半徑爲  $SP$ ），則在此時間內彗星亦能經過一弧，此弧之長與  $AC$  弦之長相比，如  $1 : \sqrt{2}$ 。

故如彗星由  $SP$  高向太陽下墜（其重量即為太陽在此高度內所給予者），則在該項時間之半內，所經過之道路等於

$$\frac{AJ^2}{4SP}.$$

但  $SN$  高內彗星對於太陽之重量與  $SP$  高內者相比，如

$$PS^2 : SN^2 = SP : S\mu,$$

故彗星以  $SN$  高內之重量在該時間內所經過之道路為

$$\frac{AJ^2}{4S\mu} = J\mu = M\mu.$$

此即所欲證者。

§ 59. 問題. 試由三個觀察，以決定拋物線內彗星之軌道。

我曾經用各種方法，試求解這個困難的問題，而為達到這個目的，我先解決了第一編中之有關於此的問題。後來我得到了以下之解決法，較為簡易。

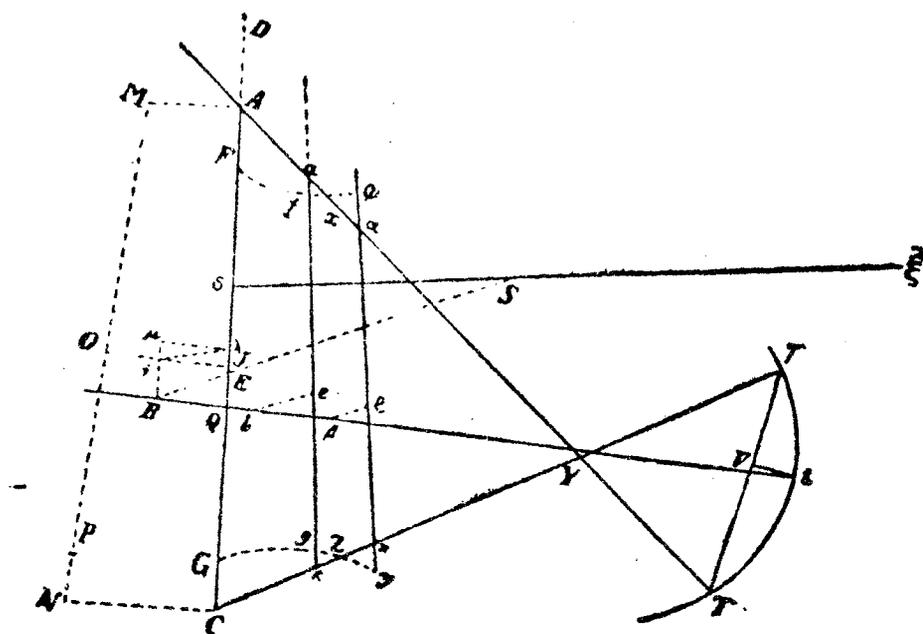
先選出三個觀察，其所隔時間相等，但在彗星

運動較遲之事項方面，其所隔時間亦較爲久。例如該項時間之差與其和相比，如後者比 600 天，或即是， $E$  點差不多落在  $M$  點，由該處較傾向  $J$ ，不傾向  $A$ 。倘沒有此項觀察，即須按 § 52 求一新的彗星處所。

設  $S$  爲太陽  $T, t, \tau$  爲地球在其大軌道內之三處所， $TA, tB, \tau C$  爲三個已觀察到的彗星之長， $V$  爲第一與第二觀察間所經過之時間， $W$  爲第二與第三間之時間， $X$  則爲一直線，彗星在該項全部時間內以某種速度經過之，此項速度即爲其在太陽與地球之平均距離內所有者，可按 § 50，系 3 以求之。又， $tV$  與  $T\tau$  相垂直。

在所觀察得的平均長  $tB$  上，取一任何點  $B$ ，作爲彗星在黃道面內之處所，並向太陽作  $BE$  線，使其與  $tV$  相比，等於  $SB \cdot St^2$  比一直角三角形之弦之三次方，此直角三角形之一邊爲  $BS$ ，另一邊爲彗星在第二觀察時之緯度之切線（其半徑爲  $tB$ ）。經過  $E$  點作  $AE$  與  $EC$  二線，其由  $TA$  及

$\tau C$  所界的部分相比, 如  $V : W$ . 如是則  $A$  與  $C$  所表者, 很近似的爲彗星當第一及第三觀察時黃道



第 二 一 一 圖

面內之處所, 但須假定  $B$  爲第二觀察時之正確處所纔得。

平分  $AC$  的點爲  $J$ , 今於此作垂線  $Ji$ , 並設想經過  $B$  作  $Bi$  與  $AC$  相平行, 又作  $Si$  與  $AC$  相交於  $\lambda$ , 完成  $iJ\lambda\mu$  平行方形. 於是使  $J\sigma = 3J\lambda$  設想經過  $S$  作  $\sigma\xi = 3S\sigma + 3i\lambda$ . 今設想將  $A, C, E, J$

諸字母依次消去，則  $BE$  線即由  $B$  向  $\xi$  運動，而此新線與原來者相比，如  $BS^2 : (S\mu + \frac{1}{2}i\lambda)^2$ 。於是再經過  $E$  作  $AEC$  線，使  $AE$  與  $EC$  相比，如  $V : W$ ，則  $A$  與  $C$  所表的彗星之處所較為正確。

今作  $AC$  上之垂線  $AM, CN, JO$ ，其前二者等於第一及第三觀察時緯度之切線。又作  $MN$  與  $JN$  相交於  $O$ ，完成  $iJ\lambda\mu$  平形方形如前。於  $JA$  之引長上取  $JD = S\mu + \frac{2}{3}i\lambda$ ，又於  $MN$  上向  $N$  端取  $MP$ ，與以前所得之長  $X$  相比，等於地球與太陽之平均距離之平方根比  $OD$  之平方根。倘  $P$  落在  $N$ ，則  $A, B, C$  為彗星之三個處所，其在黃道面內之軌道必經過之。倘  $P$  不落在  $N$  上，則必於  $AC$  上取  $CG = NP$ ，使  $G$  與  $P$  點落入  $NC$  之同一面。

用求得  $A, E, C, G$  的方法，當可求得新的點  $a, e, c, g$  及  $\alpha, \epsilon, \chi, \gamma$ ，其法在用  $b$  及  $\beta$  以代替以前之  $B$ 。今經過  $G, g, \gamma$  作一圓周  $Gg\gamma$ ，與  $\tau C$  相交於  $Z$ ，則此點即為黃道面內彗星之一處所。又於  $AC, ac, \alpha\chi$  上取  $AF, af, a\phi$  使其與  $CG, cg, \chi\gamma$  相等，

又經過  $F, f, \varphi$  作  $Ff\varphi$  圓周，與  $AT$  相交於  $X$ ，則  $X$  亦即為黃道面內之其他一彗星處所。於是於  $X$  及  $Z$  作切線，其半徑為  $TX$  及  $\tau Z$ ，則得彗星本身軌道內之二處所。最後，經過此二點作一拋物線，其焦點為  $S$ ；如是，此即為彗星之軌道。

此作法之證明，可由以前的定理以知之。蓋按 § 53,  $AC$  在  $E$  點被分時，其比等於時間相比，而按 § 58.  $BE$  為黃道面內  $BS$  或  $B\xi$  之部分，此部分係在  $ABC$  弧及  $AEC$  弦之中間。又， $MP$  為某種弧之弦之長，此弧係彗星在第一及第三觀察中間之時間內在其本身的軌道內所經過者。所以此最後的線必與  $MN$  相等，但須假定  $B$  為彗星在黃道面內之真處所。

此外， $B, b, \beta$  三點必不可任意的取，而當使其互相接近。倘我們能知道  $AQt$  角（此角為黃道面內所作軌道與  $Bt$  線相交之角），則  $AC$  線必如是決定之，使  $AC : \frac{4}{3}T\tau = \sqrt{SQ} : \sqrt{St}$ 。今如作  $SEB$ ，使  $EB = Vt$ ，則即可決定  $B$  點。試將  $AC$  線取去，

用前法重新作出之，又求得  $MP$  線，則可於  $tB$  上如是取  $b$  點，使

$$Yb : YB = \begin{cases} \sqrt{SB} : \sqrt{Sb}, \\ MP : MN \end{cases}$$

於此， $Y$  爲  $TA$  及  $\tau C$  之交點。

如是，又可求得第三點  $\beta$ ，其方法仍在應用前法。不過以尋常看來，二次應用已可够了。蓋如  $Bb$  距離很小，則求得  $F, f, G, g$  以後， $Ff$  及  $Gg$  很近似的與  $TA$  及  $\tau C$  相交於所求之點  $X$  及  $Z$ 。

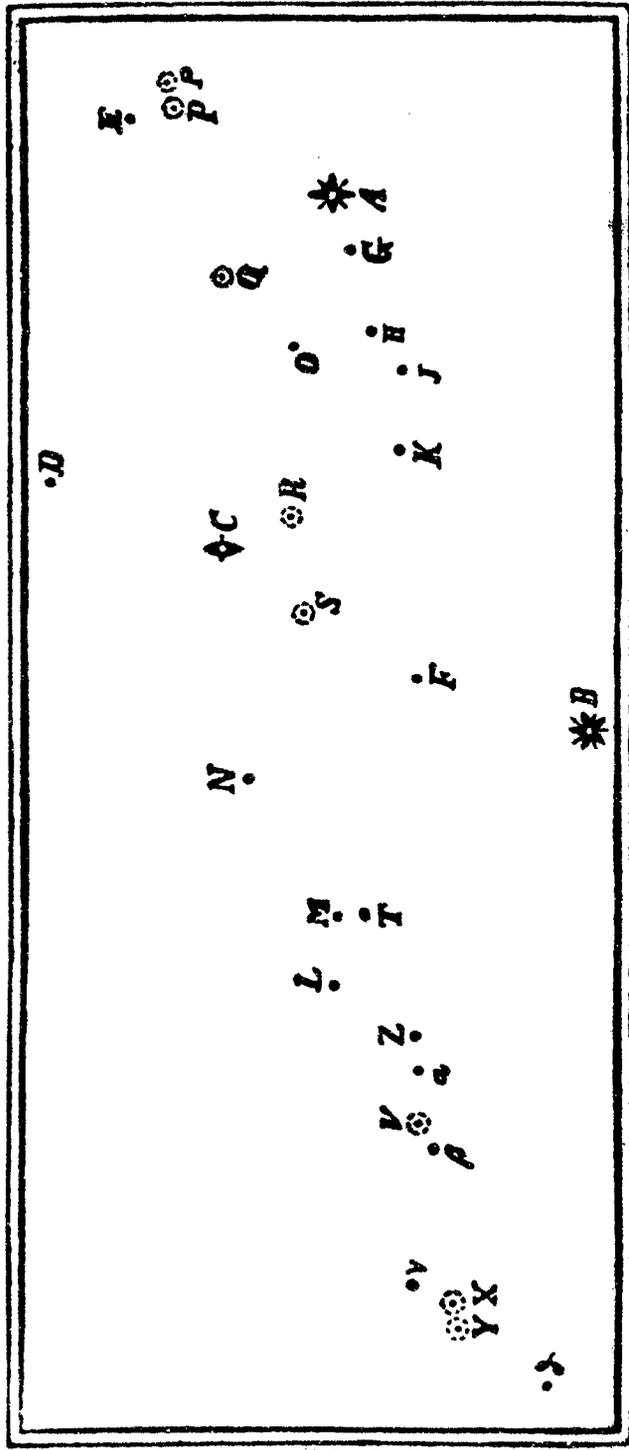
例。今設 1680 年之彗星爲已知；此星之運動按弗來姆司替德 (*Flamsteed*) 的觀察所可求得者，又加以哈雷 (*Halley*) 的修正，可列爲下表：

時 日	外觀的 時間	真時間	太陽之 經度	彗 星 之	
				經 度	北緯度
1680年十二月					
12 日	4 <sup>h</sup> 46 <sup>m</sup>	4 <sup>h</sup> 46 <sup>m</sup> 0 <sup>s</sup>	♋1°51'23''	♋6°32'30''	8°28'0''
21 日	6 32,5	6 36 59	11 6 44	♋ 5 8 12	21 42 13
24 日	6 12	6 17 52	14 9 26	18 49 23	25 23 5
26 日	5 14	5 20 44	16 9 22	28 24 13	27 0 52
29 日	7 55	8 3 2	19 19 43	♌13 10 41	28 9 58
30 日	8 2	8 10 26	20 21 9	17 38 20	28 11 53
1681 年正月					
5 日	5 51	6 1 38	26 22 18	♌ 8 48 53	26 15 7
9 日	6 49	7 0 53	♋ 0 29 2	18 44 4	24 11 56
10 日	5 54	6 6 10	1 27 43	20 40 50	23 43 52
13 日	6 56	7 8 55	4 33 20	25 59 48	22 17 28
25 日	7 44	7 58 42	16 45 36	♌ 9 35 0	17 56 30
30 日	8 7	8 21 53	21 49 58	13 19 51	16 42 18
二月 2 日	6 20	6 34 51	24 46 59	15 13 53	16 4 1
5 日	6 50	7 4 41	27 49 51	16 59 6	15 27 3

對於此項觀察，我有一些補充如下：

時 日	外觀的 時間	彗 星 之	
		經 度	北緯度
1681年二月			
25 日	8 <sup>h</sup> 30 <sup>m</sup>	♁ 26°18'35"	12°46'46"
27 日	8 15	27 4 30	12 36 12
三月 1 日	11 0	27 52 42	12 23 40
2 日	8 0	28 12 48	12 19 38
5 日	11 30	29 18 0	12 3 16
7 日	9 30	♁ 0 4 0	11 57 0
9 日	8 30	0 43 4	11 45 52

此項觀察，係用七英尺長的望遠鏡及一測微計所得。用此項器具時，恆星相互間之位置以及彗星對於此項恆星之位置均可決定。A 所表者為 *Perseus* 星座左踵之第四等的星，B 為在其次的第三等星，C 為同足踵處之第六等星 D, E, F, G, H, J, K, L, M, N, O, Z,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  為同足之其他的小星。此外則 p, P, Q, R, S, T, V, X 為上述的觀察



第 二 一 二 圖

內彗星之位置。

今設  $AB = 80\frac{7}{12}$  部分，則  $AC = 52\frac{1}{2}$ ,  $BC = 58\frac{5}{8}$ ,  
 $AD = 57\frac{5}{12}$ ,  $BD = 82\frac{6}{11}$ ,  $CD = 23\frac{2}{3}$ ,  $AE = 29\frac{1}{4}$ ,  $CE$   
 $= 57\frac{1}{2}$ ,  $DE = 49\frac{11}{12}$ ,  $AJ = 27\frac{7}{12}$ ,  $BJ = 52\frac{1}{6}$ ,  $CJ = 36\frac{7}{12}$ ,  
 $DJ = 53\frac{5}{12}$ ,  $AK = 38\frac{2}{3}$ ,  $BK = 43$ ,  $CK = 31\frac{5}{8}$ ,  $FK = 29$ ,  
 $FB = 23$ ,  $FC = 36\frac{1}{4}$ ,  $AH = 18\frac{3}{4}$ ,  $DH = 50\frac{1}{8}$ ,  $BN = 46$   
 $\frac{5}{12}$ ,  $CN = 31\frac{1}{3}$ ,  $BL = 45\frac{5}{12}$ ,  $NL = 31\frac{1}{4}$ .

又， $HO : HJ = 7 : 6$ ，而如將第一線引長之，  
 則即經過  $D$  與  $E$  二星之間，而  $D$  星與此線之距  
 離為  $\frac{1}{2}CD$ 。又， $LM : LN = 2 : 9$ ，引長後  $LM$  線  
 經過  $H$  星。如是即可決定恆星之相互位置。

最後，旁德 (*Pound*) 氏又重新用觀察決定此  
 項恆星之處所，列表如下：

恆星	經度	北緯度	恆星	經度	北緯度
A	826°41'50"	12°8'36"	L	829°33'34"	12°7'48"
B	28 40 23	11 17 54	M	28 18 54	12 7 20
C	27 58 30	12 40 25	N	28 48 29	12 31 9
E	28 27 17	12 52 7	Z	29 44 48	11 57 13

<i>F</i>	28 28 37	11 52 22	$\alpha$	29 52 3	11 55 48
<i>G</i>	26 56 8	12 4 58	$\beta$	$\sphericalangle$ 0 8 23	11 48 56
<i>H</i>	27 11 45	12 2 1	$\gamma$	0 40 10	11 55 18
<i>J</i>	27 25 2	11 53 11	$\delta$	1 3 20	11 30 42
<i>K</i>	27 42 7	11 53 26			

但我之研究彗星對於此項星之位置係按照下法：

在二月二十五日，星期五晚八時半，彗星在  $p$  處，其與  $E$  星之距離小於  $\frac{3}{13}AE$ ，大於  $\frac{1}{3}AE$ ，差不多 =  $\frac{14}{66}$  或  $\frac{3}{14}AE$ 。  $ApE$  角稍帶些鈍，差不多為  $90^\circ$ ，故如由  $A$  作一垂線至  $pE$ ，則彗星與此之距離為  $\frac{1}{3}pE$ 。

在同晚九時半，彗星到  $P$  處，其與  $E$  之距離在  $\frac{1}{5\frac{1}{4}}AE$  及  $\frac{1}{4\frac{1}{4}}AE$  之間，差不多 =  $\frac{1}{4\frac{7}{8}}AE = \frac{8}{39}AE$ 。

又，彗星與由  $A$  至  $PE$  的垂線之距離為  $\frac{1}{3}PE$ 。

至二月二十七日，星期日晚八時一刻，彗星到  $Q$  處，其與  $O$  星之距離，等於  $O$  與  $H$  之距離。

QO 線引長時經過  $K$  與  $B$  二星之間。此線之更正確的位置我不能測定，因為其間有雲氣掩蒙。

在三月一日，星期二晚十一時，彗星至  $R$ ，恰在  $K$  與  $C$  二星之間。 $CRK$  之  $CR$  部分稍大於  $\frac{1}{3}CK$ ，稍小於  $\frac{1}{3}CK + \frac{1}{8}CR$ ，故約  $= \frac{1}{3}CK + \frac{1}{16}CR$ ，因而  $CR = \frac{16}{45}CK$ 。

至三月二日，星期三晚八時，彗星在  $S$ ，其與  $C$  星之距離差不多為  $\frac{4}{5}CF$ 。 $F$  星與  $CS$  引長之距離約為  $\frac{1}{24}CF$ ， $B$  與該線之距離較此大五倍。 $NS$  之引長經過  $H$  與  $J$  之間，其與  $H$  之接近較之與  $J$  之接近約多五六倍。

到三月五日，星期六晚十一時半，彗星在  $T$ ， $MT$  線  $= \frac{1}{2}ML$ 。 $LT$  之引長經過  $B$  與  $F$  之間，其與  $F$  之接近較之與  $B$  之接近約多四五倍。 $MT$  之引長在  $B, F$  以外，與  $B$  較接近之度多四倍。 $M$  為一極小的星，在望遠鏡內不易測得； $L$  星稍大於第八等的星。

至三月七日，星期一晚九時半，彗星在  $V, V_a$

之引長經過  $B$  與  $F$  之間，其被  $BF$  所割之段向  $F$  者約為  $\frac{1}{10}BF$ .  $V\alpha : V\beta = 5 : 4$ , 彗星與  $\alpha\beta$  之距離為  $\frac{1}{2}V\beta$ .

及至三月九日，星期三晚八時半，彗星至  $X$ .  $\gamma X = \frac{1}{2}\gamma\delta$ , 由  $\delta$  垂於  $\gamma X$  之垂線為  $\frac{2}{3}\gamma\delta$ .

同晚十二時，彗星在  $Y$ ,  $\gamma Y = \frac{1}{3}\gamma\delta$ , 或較小，約  $= \frac{5}{16}\gamma\delta$ . 由  $\delta$  至  $\gamma Y$  的垂線約為  $\frac{1}{2}$  或  $\frac{1}{3}$ . 此時彗星與地平線很接近，故差不多不能觀見，因而其位置不能如前之正確測定。

由於此項觀察，我用幾何作法及推算決定彗星之經度及緯度。旁德曾修正過此項位置，以上所得之彗星位置即根據此。我所用的測微計，未曾多用人工製過，但經度及緯度方面之差失，不會超過  $1'$ . 此外，在彗星運動之末，有離開二月底時所在的平行線而傾向北方的狀況，頗為顯明。

為求此後的彗星之軌道，我選擇了弗來姆司替德之三個觀察，即十二月二十一，正月五日及二十五日的，得  $St = 9842, 1$ ,  $Vt = 455$ , 於此，地球之

半大軸爲 10000. 當初算時, 我假定  $Bt = 5657$ , 即得  $SB = 9747$ ,  $BE = 412$ ,  $S\mu = 9503$ ,  $i\lambda = 413$ . 第二次時,  $BE = 421$ ,  $OD = 10186$ ,  $X = 8528,4$ ,  $MN = 8450$ ,  $MN = 8475$ ,  $NP = 25$ . 由此, 得第二次的結果爲  $tb = 5640$ ,  $TX = 4775$ ,  $\tau Z = 11322$ .

在測求軌道時, 應用已得之值, 得

向上的交軌點之經度在 $\alpha$ 爲  $1^{\circ}53'$ ,

軌道對於黃道面之斜度爲  $61^{\circ}20\frac{1}{2}'$ ,

近日點與交軌點之距離爲  $8^{\circ}38'$ ,

近日點之經度爲  $\alpha 27^{\circ}43'$ ,

其南緯度爲  $7^{\circ}34'$ ,

其通徑爲 236,8.

彗星在各個日子內以向太陽的半徑所作之面爲 93585,

但在這裏係假定地球軌道之半大軸爲 10000. 但彗星在此軌道內按宮之次序前進, 至十二月八日下午  $0^h 4^m$  達到近日點. 這些一切測定的材料, 均用圖解之法將其表出, 角之弦則由自然正弦之表

求得。我曾作了一大的圖，在此圖內地球軌道之半大軸爲  $16\frac{1}{2}$  英寸。

爲欲證明彗星是否真正在此項軌道內運動，我曾用圖表及算術推算過，在下表內可見到此。

時 日	彗星與 太陽 間距離	推算得的		觀察得的		相 差	
		經 度	緯 度	經 度	緯 度	經度	緯度
12月							
12日	2792	$\zeta 6^{\circ} 32'$	$8^{\circ} 18\frac{1}{2}'$	$\zeta 6^{\circ} 31\frac{1}{2}'$	$8^{\circ} 26'$	$+ \frac{2}{3}'$	$- 7\frac{1}{2}'$
29日	8403	$\alpha 13 13\frac{2}{3} 28 0$		$\alpha 13 11\frac{1}{2} 28 10\frac{1}{3}$		$+ 2$	$- 10\frac{1}{3}$
2月5日	16669	$\delta 17 0 15 29$		$\delta 16 59\frac{7}{8} 15 27\frac{1}{2}$		$0$	$+ 2\frac{1}{8}$
3月5日	21737	$29 19\frac{1}{2} 12 4$		$29 20\frac{1}{2} 12 3\frac{1}{2}$		$- 1$	$+ \frac{1}{2}$

後來哈雷用算術的計算將此項軌道較精密的推測過。他所得結果爲

向上的交軌點之經度 =  $\zeta 1^{\circ} 53'$ ,

軌道對於黃道面之斜 =  $61^{\circ} 20'$ ,

近日點與交軌點之角距離 =  $9^{\circ} 20'$ ,

通徑 = 2430,

於此，太陽與地球之平均距離爲 100000。用此項材料，他曾經測定過彗星之位置，列爲下表。

真時間	彗星與太陽間之距離	推算得的		觀察得的		相差	
		經度	北緯度	經度	北緯度	經度	緯度
十二月十二日 4 <sup>h</sup> 46 <sup>m</sup>	28028	☉ 6°29'25"	8° 26' 0"	☉ 6°32'30"	8° 28' 0"	-3' 5"	-2' 0"
十二月二十一日 6 37	61076	☉ 5 6 30	21 43 20	☉ 5 8 12	21 42 13	-1 42	+1 7
十二月二十四日 6 18	70008	18 48 20	25 22 40	18 49 23	25 23 5	-1 3	-0 25
十二月二十六日 5 21	75576	28 22 45	27 1 36	28 24 13	27 0 52	-1 28	+0 44



正月二十五	145370	8 9 33 40	17 57 55	8 9 35 0	17 56 30	- 1 20	+ 1 25
日 7 59							
正月卅日	155303	13 17 41	16 42 7	13 19 51	16 42 18	- 2 10	- 0 11
8 22							
二月二日	160951	15 11 11	16 4 15	15 13 53	16 4 1	- 2 42	+ 0 14
6 35							
二月五日	166686	16 58 25	15 29 13	16 59 6	15 27 3	- 0 41	+ 2 10
7 4,5							
二月廿五日	202570	26 15 46	12 48 0	16 18 35	12 46 46	- 2 49	+ 1 14
8 41							
三月五日	216205	29 18 35	12 5 40	29 18 0	12 3 16	+ 0 35	+ 2 24
11 39							

該彗星於十一月已可看見，起而希 (*Gottfried Kirch*) 在哥堡 (*Coburg*) 地方於十一月四日，六日，十一日曾觀察之。由他對於其最近的星之位置，哈雷在  $11^\circ$  的經度之差 (哥堡與倫敦間之差) 下測得彗星之位置如下：

A. 十一月三日  $17^h 2^m$ ，經度  $\text{N} 29^\circ 51'$ ，

北緯度  $1^\circ 17' 45''$ ，

A. 十一月五日 15 58，經度  $\text{N} 3^\circ 23'$ ，

北緯度  $1^\circ 6'$ ，

A 十一月十日 16 31 該彗星與  $\sigma$  及  $\tau$  二星之距離相等，不過尙未與其連結線相接觸而與之稍離。在弗來姆司替德的星宿表中，彼時  $\sigma$  之

經度約爲  $\text{N} 14^\circ 15'$ ，

北緯度  $1^\circ 41'$ ，

$\tau$  之經度則爲  $\text{N} 17^\circ 3' 5''$ ，

南緯度  $0^\circ 34'$ 。

在兩者之間的點，其

經度爲  $\text{N} 15^\circ 39' 25''$ ，

北緯度爲  $0^{\circ}33'5''$ .

彗星與該線之距離約爲 10 或 12 分，故經度之差爲  $7'$ ，而其緯度差則爲  $7.5'$ 。所以彗星之經度爲  $\mp 15^{\circ}32'$ ，而其北緯度爲  $0^{\circ}26'$ 。

此項觀察中之第一個，係用彗星對於一小星之位置而定，故頗爲正確，其第二觀察亦如此。第三觀察之差失可大於  $6'$  或  $7'$ 。第一觀察內彗星之經度曾用拋物線的軌道計算過，其結果爲

$$\text{經度} = \Omega. 29^{\circ} 30' 22'',$$

$$\text{北緯度} = 1^{\circ} 25' 7'',$$

$$\text{與太陽之距離} = 115546.$$

哈雷曾經指出，有一特異的彗星，每 575 年出現一次，已曾出現過四次；第一次在愷撒 (*Julius Cäsar*) 死後之九月，第二次在紀元後 531 年，第三次在 1106 年二月，末次則在 1680 年之末。每一次都有一極大極光輝的尾，不過第一次因其對於地球之位置不當，故所見不甚大。因此，哈雷假定一橢圓的軌道，其大軸爲 1382957 (太陽與地球之平

均距離爲 10000), 彗星在此軌道內每 575 年環繞一次, 他假定其

$\vartheta$  在  $\odot 2^{\circ}2'$ ,

即  $\varrho$  在  $\sphericalangle 2^{\circ}2'$ ,

軌道對於黃道面之斜 =  $61^{\circ}6'48''$ ,

彗星之近日點在  $\sphericalangle 22^{\circ}44'25''$ ,

又, 近日點離  $\varrho$  爲  $9^{\circ}17'35''$ , 小軸爲 18481,2.

他於是推算此彗星在此軌道內之運動, 並推算其位置. 由觀察所得的以及推算得的結果, 均在下列表內, 於此, 推得的緯度項內 + 表北緯, - 則表南緯.

真時間	觀察得的		推算得的		相差	
	經度	北緯度	經度	緯度	經度	緯度
十一月三日 16 <sup>h</sup> 47 <sup>m</sup>	Ω 29°51' 0"	1°17'45"	Ω 29°51'22"	+ 1°17'32"	+0' 22"	-0' 13"
十一月五日 15 37	mp 3 23 0	1 6 0	mp 3 24 32	+ 1 6 9	+1 32	+0 9
十一月十日 16 18	15 32 0	0 27 0	15 33 2	+ 0 25 7	+1 2	-1 53
十一月十六日 17 0			<u>mp</u> 8 16 45	- 0 53 7		

十一月十八日	21 34	18 52 15	-	1 26 54		
十一月二十日	17 0	28 10 36	-	1 53 35		
十一月廿三日	17 5	η 13 22 42	-	2 29 0		
十二月十二日	4 46	ζ 6 32 30	8 28 0	ζ 6 31 20	+	8 29 6 - 1 10 + 1 6
十二月廿一日	6 37	≈ 5 8 12	21 42 13	≈ 5 6 14	+	+ 21 44 42 - 1 58 + 2 29
十二月廿四日						

6 18	18 49 23	25 23 5	18 47 30	+25 23 35	-1 53	+0 30
十二月廿六日						
5 21	28 24 13	27 0 52	28 21 42	+27 2 1	-2 31	+1 9
十二月廿九日						
8 3	13 10 41	28 9 58	13 11 14	+28 11 37	+0 7	-0 16
十二月三十日						
8 10	17 38 20	28 11 53	17 38 27	+26 14 57	-0 2	-0 10
正月五日						
6 1,5	8 48 53	26 15 7	8 48 51	+24 12 17	-0 13	+0 21
正月九日						
7 1	18 44 4	24 11 56	18 43 51	+23 43 25	-0 27	-0 7

正月十日	20 40 50	23 43 32	20 40 23	+22 16 32	+0 20	-0 56
6 6						
正月十三日	25 59 48	22 17 28	26 0 8	+17 56 6	-0 49	-0 24
7 9						
正月二十五日	8 9 35 0	17 56 30	8 9 34 11	+17 56 6	-0 49	-0 24
7 59						
正月三十日	13 19 51	16 42 18	13 18 28	+16 40 5	-1 23	-2 13
8 22						
二月二日	15 13 53	16 4 1	15 11 59	+16 2 7	-1 54	-1 54
6 35						
二月五日						

7 45	16 59 6	15 27 3	16 59 17	+15 27 0	+0 11	-0 3
二月二十五日						
8 41	26 18 35	12 46 46	26 16 59	+12 45 22	-1 36	-1 24
三月一日						
11 10	27 52 42	12 23 40	27 51 47	+12 22 28	-0 55	-1 12
三月五日						
11 39	29 18 0	12 3 16	29 20 11	+12 2 50	+2 11	-0 26
三月九日						
8 38	□ 0 43 4	11 45 52	□ 0 42 43	+11 45 35	-0 21	-0 17

由開始出現直至不見所觀察得的彗星之現象與該項軌道內之運動頗相合，猶如行星運動與理論上所推得者一樣。此項相合，可證明前後的彗星實是一個，其軌道亦經我們測得了。

在以上的表內，我們將十一月十六，十八，二十日及二十三日的各觀察去掉，因為不很正確。彭德 (*Ponthaeus*) 及其同行者於十一月十七日在羅馬用對準恆星的線以觀察彗星，其時間為早晨六時，即倫敦時的六時十分；所得為西經度  $8^{\circ}30'$ ，南緯  $0^{\circ}20'$ 。他們的觀察，具見於彭氏所編的報告書中。才列士 (*Cellius*) 於同時亦觀察過此星，所得為  $8^{\circ}30'$  及南緯  $0^{\circ}30'$ 。格拉底 (*Gallatius*) 在阿維格能 (*Avignon*) 作觀察，其時間與倫敦時 5 時 42 分相當，得  $\text{西}8^{\circ}$ ，無有緯度。按之理論當為  $\text{西}8^{\circ}16'45''$ ，而且其南緯當為  $0^{\circ}53'7''$ 。

至十一月十八日早晨六時三十分，即倫敦時的五時四十分，彭氏測得彗星在  $\text{西}13^{\circ}30'$  經度及南緯  $1^{\circ}20'$ ，但才氏則得  $13^{\circ}30'$  及  $1^{\circ}0'$ 。格氏得  $13^{\circ}$

0'13" 及 1°0'. 在法國方面有恩果(*Ango*)於弗來希(*Fleche*)學院作觀察,其時間爲早晨五時,即,與倫敦時之五時九分相當.他所得的,是彗星在二星之間,此二星之一即巴爾(*Bayer*)氏所表的  $\psi$ , 其他即爲  $\oplus$ . 照此,該時的彗星當在 12°46' 經度及 0°50' 南緯.在同日,該彗星並見於波士頓(*Boston*)時間爲早晨五時(與倫敦時九時四十四分相當),在  $\text{W}14^\circ$  經度及北緯 1°30'. 此係聞之哈雷.

十一月十九日早晨四時半,有一位青年在劍橋(*Cambridge*)觀察到此彗星,約與處女宮之穗相距 20,稍傾於西北;後者之經度爲  $\text{W}19^\circ 23' 47''$ , 北緯 2°1'59". 同日在波士頓,早晨五時,此彗星距穗約 1°,緯度之差爲 40'. 在約馬以加(*Jamaika*),此日彗星離該穗約爲 1°. 司多爾(*Arthur Storer*)亦於該日在伯多根(*Patukent*)河(在曼麗蘭 *Maryland* 之亨丁克利克 *Hunting Creek* 附近)觀察到此彗星,時間爲早晨五時,其位置係在處女宮之穗之上部差不多與之相接觸,因爲其間之距離祇

有  $\frac{3}{4}^\circ$ 。我綜合此項觀察，推定此彗星於倫敦時間九時四十四分時，在經度  $18^\circ 50'$ ，南緯  $1^\circ 25'$ 。按之理論，當為  $18^\circ 52' 15''$  及  $1^\circ 26' 54''$ 。

十一月二十日，巴道 (*Padua*) 的天文學教授蒙得那 (*Montenarus*) 於早晨六時在維尼地 (*Venedig*) 觀察到此彗星在  $23^\circ$  經度，南緯  $1^\circ 30'$ 。同日，此彗星在波士頓觀察時，已離處女宮之穗向東約  $4^\circ$ ，其經度約為  $23^\circ 24'$ 。

十一月二十一日彭與其同行者在早晨七時半觀察彗星，得  $27^\circ 50'$  及南緯  $1^\circ 16'$ ，才氏得  $28^\circ$ ，恩氏於早晨五時得  $27^\circ 45'$ ，蒙氏得  $27^\circ 51'$ ，同日約馬以加所觀察到的彗星在天蠍宮之開首處，其緯度為  $2^\circ 2'$ 。在此日，東印度之巴爾沙拉 (*Barsola*) 地方，亦有人作此觀察，其時間為早晨五時，觀察到彗星與穗之距離為  $7^\circ 35'$ ，其位置係在連結穗及天秤座之直線上。經五小時四十分以後，彗星在  $28^\circ 12'$  經度及  $1^\circ 16'$  南緯，按之理論當為  $28^\circ 10' 36''$  及  $1^\circ 53' 35''$ 。

至十一月二十二日，蒙氏見彗星在  $\eta 20^{\circ}33'$ ，而在波士頓為  $\eta 3^{\circ}$  經度，其緯度仍為  $1^{\circ}30'$ ，同日，早晨五時在巴爾沙拉所見者為  $\eta 1^{\circ}50'$  經度，故就倫敦時間而論，早晨五時當為  $\eta 3^{\circ}5'$  經度。同日早晨六時半，霍克 (*Hook*) 於倫敦所觀察到者為  $\eta 3^{\circ}30'$ ，即是，在連結天獅座之穗與心的直線上，不過稍向北，並非精確的在此線上。蒙氏並指出，由彗星向穗所作的直線於本日及次日離開天獅星之心，其間祇有一些的空間。連結處女宮之穗及天獅座之心的直線與黃道相交於  $\eta 3^{\circ}46'$ ，其角度為  $2.51'$ ，而如彗星於該線上  $\eta 3^{\circ}$  經度處，則其南緯當為  $2^{\circ}26'$ ，但按霍克及蒙氏的觀察，彗星稍離此線向北，故其南緯較小。十一月二十日時，按蒙氏的觀察，其緯度約為  $1^{\circ}30'$ 。霍克，蒙氏及恩氏均以為大於  $1^{\circ}30'$ 。南緯度之平均值，在  $2^{\circ}26'$  與  $1^{\circ}30'$  之間，約為  $1^{\circ}58'$ 。

按霍蒙兩氏之觀察，彗星之尾係向處女宮之穗，霍氏以為稍向南，但按之蒙氏則以為稍向北。

不過此項偏向係為極小者，差不多與赤道相平行，但對於對日點則稍向北。

至十一月二十三日，早晨五時，齊末曼 (*Zimmermann*) 於牛熊倍 (*Nürnberg*) 觀察到此彗星在  $\eta 8^{\circ} 8'$  經度，南緯  $2^{\circ} 31'$ 。其距離係對於恆星而言。

十一月二十四日，日出以前，蒙氏 觀察到彗星在  $\eta 12^{\circ} 52'$  經度，其北緯稍小於  $2^{\circ} 38'$ 。按之霍克，蒙氏 及恩氏 的觀察可設其大於  $1^{\circ} 58'$ ，而為  $2^{\circ} 18'$ 。但按之彭氏 及格氏 則當較小，才氏 曾假定其為  $1^{\circ}$  或  $1^{\circ} 30'$ 。不過彭氏 與格氏 之觀察係較粗，才氏 的觀察亦不精細。蒙氏、霍氏 及恩氏 及波士頓 之觀察者，用彗星對於恆星之位置作標準，係較精確。在這一天，巴爾沙拉 所觀察到者係在  $11^{\circ} 45'$  經度，時間為早晨五時。所以就倫敦 的時間而論，早晨五時約在  $\eta 13^{\circ}$  經度，按之理論當為  $\eta 13^{\circ} 22' 42''$ 。

十一月二十五日，日出以前，蒙氏 觀察到彗星在  $\eta 17\frac{1}{4}^{\circ}$  經度；同時，才氏 指出，彗星係在一直線上，此直線連結處女宮 左方之輝星及天秤座 之南

部的星。此直線與彗星之軌道相交於  $\eta 18^{\circ}36'$  經度。按之理論，當在  $\eta 18^{\circ}, \frac{1}{3}$  經度。

從可知此項觀察，相互間無多差異，而且與理論亦相接近，所以可證明是同一的彗星，由十一月四日直至三月九日出現於世。彗星之軌道與黃道相交兩次，故非為直線的。又，其與黃道面之相交，不在天空之相反的部分，而在處女宮

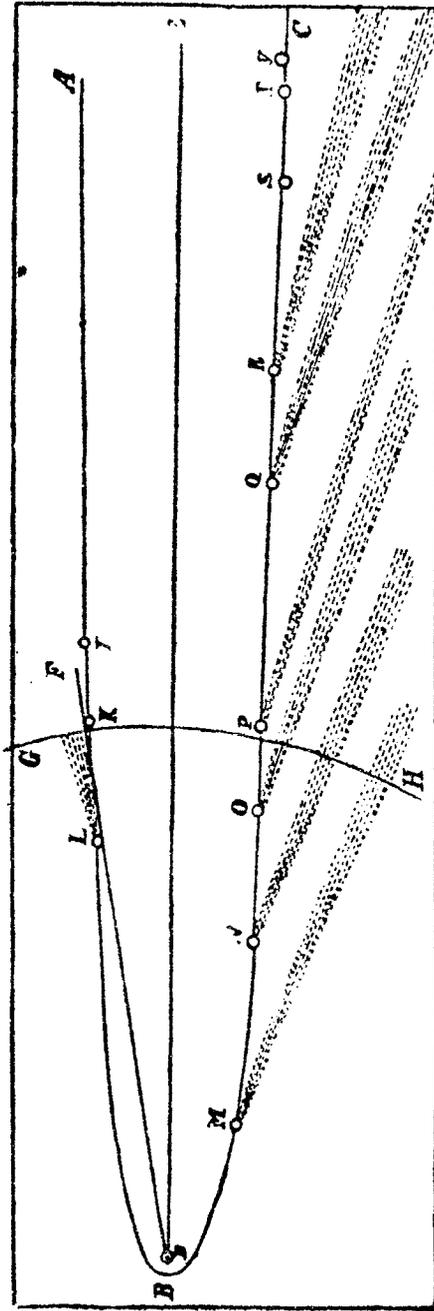


圖 三 一 二 彗

之末尾，磨羯宮之開首，其中間之空間約為  $98^\circ$ 。其軌道與圓形相差甚遠，因為在十一月裏其與黃道之距離為向南  $3^\circ$ ，但在十二月裏則為向北  $20^\circ$ 。此軌道之二部分，其一與太陽相接近，其他則與之相離，而按蒙氏之觀察，相距約  $30^\circ$ 。彗星所經過之宮有九，由天獅宮之末至雙子宮之首。沒有其他的理論能說明彗星之有規則的運動。此項運動實為極不等速的。

至十一月二十日時，彗星每日經過約  $5^\circ$ 。此後，由二十六至十二月十二日之間，其運動較遲；在這  $15\frac{1}{2}$  天內，祇經過  $40^\circ$ 。以後又復加速，每天復經過  $5^\circ$ 。由理論之推測，所得亦是如此，為極不整齊而佔據天空極廣的運動，其所受定律之支配，與行星之運行定律同。此理論既與觀察所得結果極相符合，故不能不說是正確的。

由以上之圖，可以看到彗星所作之軌道，以及其本身在各處所有之尾。於此， $ABC$  為彗星之軌道， $D$  為太陽， $DE$  為軌道之軸， $DF$  為交軌線，

$GH$  爲大軌道之球與彗星軌道之相交線。 $J$  爲彗星在十一月四日之處所， $K$  爲十一日， $L$  爲十九日之處所， $M$  爲十二月十二日， $N$  爲二十一日， $O$  爲二十二日之處所，均爲 1680 年； $P$  爲正月五日， $Q$  爲二十五日之處所， $R$  爲二月五日， $S$  爲二十五日之處所， $T$  爲三月五日， $V$  爲二十五日之處所，均係 1681 年。以下的觀察我會用之以決定其尾。

在十一月四日至六日，彗星之尾尙不能見，至十一日始開始出現，但在 10 英尺長的望遠鏡內，其大不及  $\frac{1}{2}^\circ$ ，至十一月十七日，據彭氏所觀察，已大於  $15^\circ$ ，十八日大至  $30^\circ$ 。此尾直橫至火星，而該時火星係在  $\eta 9^\circ 54'$  經度。十一月十九日，在曼麗蘭所見者爲  $15-20^\circ$ 。十二月十日時，此尾經過蛇星之尾及  $\gamma$  之間，其末在倍爾 (*Bayer*) 之  $A, a, b$  星。所以其終點約在  $\gamma 19\frac{1}{2}^\circ$  經度，北緯  $34\frac{1}{2}^\circ$ 。

至十二月十一日，此尾達到倍氏的  $\alpha, \beta$  星，其終點在  $\gamma 26^\circ 43'$  經度，北緯  $38^\circ 34'$ 。

十二月十二日，其終點約在  $\approx 4^\circ$  經度，北緯  $42\frac{1}{2}^\circ$ 。此為尾之最光輝的部分。

彭氏於十二月十二日五時四十分，在羅馬作觀察，觀見此尾透過天鵝星之後部約  $10^\circ$ ，其旁邊離開此星向西北約  $45'$ 。在這幾天內，尾之中間離該星向南約  $2^\circ 15'$ ，其上端在  $\alpha 22^\circ$  經度，北緯  $61^\circ$ 。

十二月二十日，此尾上昇至仙后星，離  $\beta$  及 *Schedir* 等遠，而且與該二星之距離，與其相互距離相等。其末在  $\gamma 20^\circ, 47\frac{1}{2}'$ 。

十二月二十九日，彗星之尾與 *Scheat* 星相接觸，在其右旁，其末在  $\delta 19^\circ, 35'$ 。至正月五日，此尾與  $\kappa$  相接觸，並與  $\mu$  相接觸。其長為  $40^\circ$ ，稍彎，其凸出之旁係向南。在彗星之頭的接近處，此尾與經過太陽及彗星頭之圓成一角，約  $4^\circ$ 。在其他一端，其與該圓之斜角為  $10-11^\circ$ ；其弦與此圓之角為  $8^\circ$ 。

正月十三日時，尾之光尙可觀見，係在 *Alamech* 及 *Algol* 之間，其末在  $n$  星之區域內，已很

弱。其末與上述之圓相距約  $3^{\circ}50'$ ，尾之弦與該圓之傾斜爲  $8\frac{1}{2}^{\circ}$ 。

至正月二十五六日，尾之光已很弱。在這兩夜，因氣候關係，其尾伸至  $12^{\circ}$  有餘，其光很弱，已不易見，其軸恰向 *Fuhrmann* 星座東肩之輝星，其與對日點之相差，係向北約  $10^{\circ}$ 。

最後在二月十日，我用望遠鏡觀見尾長爲  $10^{\circ}$ ，彭氏則於二月七日觀見其爲  $12^{\circ}$ 。

至二月二十五以後，彗星之尾即不見。

我們知道了上述的軌道，又注意此彗星之其他現象，則可知彗星實爲固而密，而且能歷久的物體，與其他行星相同。蓋如彗星僅爲地球，太陽及其他行星之蒸氣，則當其經過太陽附近時必會消滅。蓋太陽的熱，是與其光線之密度相比，即，與被射物體離太陽的距離之平方相比。當十二月八日時，彗星在近日點，其與太陽之中心之距離，與地球與該中心之距離相比，約爲  $6:10^0$ 。故該時彗星上之熱與地球上夏天時之熱相比，如  $1000000:36$

=28000:1. 以我所試驗過的，地球上大陸，夏天所有之熱僅及沸水之三分之一，而白熾的鐵之熱，則約爲沸水之三四倍。所以彗星在近日處之熱，必大於白熾的鐵之熱約 2000 倍。在這樣的熱下，由蒸氣所成的物體必會發散。

所以彗星在近日點由太陽得到極大的熱量，能保持很久的時間。一個對徑爲一英寸的白熾鐵球，在空氣內一時不易失去其熱量。對徑較大的球其熱量更可保持長久，而且與對徑爲相比的。與地球相等的白熾鐵球，其熱量可保持至 40000000 日，故雖經 50000 年尙不會冷。不過我推想熱量之持久，其比當稍小於對徑之比，其原因不甚明白，但我很願意用試驗以求其真因。

又，我們可知道，彗星在十二月間因適受太陽之熱，故其尾之光輝亦較大。當彗星經過太陽附近時，其尾即依次發生。所以彗星之受熱，對於其尾之增大有關，因而我們可推論到，尾實在由其頭所發出之蒸氣，

對於彗星之尾，有三種不同的意見。第一種以爲是經過彗星之頭所傳出的太陽光。第二種見解以爲彗星之尾由於折光所發生。按之第三種意見，則以爲是一種蒸氣或雲氣，由其頭所發生，傳布於與太陽相反的部分。第一種見解，實在不知道光之傳布；因爲在暗室中祇有經微塵及蒸氣之反射，我們纔能見到太陽之光，所以空氣內如有較密的蒸氣，則光線之可見即較強，在純粹的空氣內，卻很弱不易見，至於在沒有反射物質的天空內，即全然不能見。蓋光線的可見，祇有在有反射物質將其反射至我人的眼之狀況上。所以我們看見彗星尾時，該處必有物質將其反射纔行，不然，天空中遍處都有光線，對於我們是同樣的光輝的。第二說的難處在於彗星尾中沒有顏色可見，因爲折光與顏色二者是不可分的。由恆星及行星來的光線沒有顏色的分化，可以證明其所經過的天空中沒有折光的物質存在。傳說上說埃及人曾經觀察到有髮的恆星，這必然是偶然因被雲氣反折所發生。又，我們所看

見星光之閃，其來源因於我人之視覺或空氣之振動，但在望遠鏡內，此項閃的現象是不會發生的。蓋空氣以及其中所有蒸氣之振動，能使光線與狹小的瞳孔生一往一返的差離，但在望遠鏡方面，其對物鏡甚大，故無此項現象。所以用望遠鏡觀察星時即無閃的現象，此亦可證明光線經天空時，無有顯著的屈折。我們不能說，當彗星尾之光不強時，我們即不能見之，恆星之沒有尾亦係此理由。蓋尾之光可用望遠鏡將其放強，可以至 100 倍，但仍不能見此項尾。行星之光較之此項星可強許多，但仍是無尾的；反之，彗星頭之光有時很弱，但其尾卻很強。

例如 1680 年所出現的彗星之頭，但十二月內，其光不及第二等的星光之大，但其尾則殊為光輝，直伸至  $40, 50, 60$  至  $70^\circ$ 。至正月二十七，二十八日，其頭不及一七等的星，但其尾之光則雖弱而尚易見，其長  $6-7^\circ$ 。至二月九日及十日，頭已不能用肉眼窺見，其尾用望遠鏡觀察時，約  $1^\circ$  長。

假如尾之發生由於折光，按着空間之形狀，離開對日點，則此項離開的方向在空間之同區域內必恆向其相同的一旁。但 1680 年的彗星，十二月二十八日，下午八時半（倫敦時間）在  $\gamma 8^{\circ}41', 28^{\circ}6'$ ，而太陽則在  $\zeta 18^{\circ}26'$ 。又，1577 年的彗星，十二月二十九日在  $\gamma 8^{\circ}41', 28^{\circ}40'$ ，太陽則在  $\zeta 18^{\circ}26'$  經度。

在這兩個事項下，地球在同一的處所，彗星在天空之同一的部分，但在第一事項內，彗星之尾與對日點之差離向北  $4\frac{1}{2}^{\circ}$ ，在第二事項內為向南  $21^{\circ}$ 。但因彗星之尾非由折光而來，我們尚須研究其是否由於反光的物質所產生。

彗星尾之由其頭產生向着背太陽的區域伸出，此可由定律以知之。蓋如此項尾在經過太陽之軌道內，則必恆與對日點相離而向某項部分，此項部分係在軌道內前進的彗星之頭所留下。在此平面內的觀察者，必見其直與太陽相反，而如觀察者出離此平面時，所見差離亦必增加。在其他的狀況

下，倘尾向彗星軌道相傾，或其頭與太陽相接近。則此項差離必較小，尤其是，我們取接近彗星頭之差離角時，更爲小。又，沒有差離的彗星尾，我們見其爲直的，有差離的則彎曲，差離愈大則彎曲愈甚，而在尋常的狀況下，尾愈長則其彎曲亦愈甚；在較短的尾方面，彎曲並不甚大。又，差離角在彗星之頭方面較小，在其他一端較大，凸出的部分係向着因差離而脫開的一面。最後，有強光的長而寬的尾，其在凸出的一面界線較爲分明。所以彗星尾之現象，與其頭之運動有關，但與天空之部分無關。從可知尾之產生非由空間中之折光而由於頭所發出之蒸氣。這好像在我們的空氣中，焚燒的物體所出之煙，當物體靜止時一直向上，但如物體運動則其方向即傾斜；在天空中一切物體均向太陽被吸引，其情形與此正相同。倘蒸氣之速度較大，則此項方向即較直。因爲蒸氣各部之直度不同，遂形成彎曲的現象。又因在前面的蒸氣其流出較遲，故該面之蒸氣層亦必較密，其所反射之光亦即較

多，其界線亦更分明。關於此項尾之突然的及無定的運動以及其形狀之不規則，我不再討論，因為此項變動有的是由於地球上空氣變動使光線之傳達受影響所致，有時則與銀河之星相混所致。

至此項由彗星頭所發出的蒸氣，能充滿極大的空間部分，此則可由空氣之稀薄以知之。在地球之附近，空氣所佔空間較同重量的水所佔者大850倍。所以對徑如相等，則850尺高的空氣柱，其重量與一尺高的水柱相等。高至空氣界線的空氣柱，其重量與三十三尺高的水柱相等。所以倘將此項全空氣柱之在下的850尺取去，則其餘的部分之重量約與三十二尺長的水柱相等。按之多次試驗所得的結果，空氣之壓力與在其上的空氣之量相比，重力則與距地球中心之距離平方相比，我曾經按第二編§30之系作過一推算，知道我們倘由地球之表面上昇至地球半徑之高，則空氣之密度減小率，大於土星軌道內之全部空間與一對徑為一寸的球相比。所以對徑為一寸的球充滿空氣後，將

其稀薄至地球半徑之高的稀薄度，則可充滿一切行星之區域，直至土星以外。在地球半徑之高以上的空氣自必更稀薄，可稀至於無限；所以彗星之空氣，即其尾，由其頭上昇至十餘倍之高，必更稀薄無疑。雖然因為彗星空氣之密度較大，彗星對於太陽之重力較大，其空氣分子較重，故不能像我們空氣之那樣的稀薄，但無論如何，祇須有少量的空氣或蒸氣，便够產生尾之一切現象。此外，我們有時可見尾後之輝星，此亦可證明其稀薄。地球上空氣受太陽光照射時，能使一切星及月球都不能見。但彗星之尾則並不能掩沒最小的星之光。彗星尾光輝之度，不能大於一暗室內的空氣將經過對徑為一二寸的孔所透入的光線反射出之度。

由頭發出至尾末端所需時間亦約略可知。我們可由此終點向太陽作一直線，注意其與軌道相交之處。蒸氣之離太陽不由直線，在其上昇之前保持彗星之運動，所以此項運動與蒸氣之上昇相組合，故其結果為斜的運動。一六八〇年之彗星方

面，我曾測得其上昇時間約需 15 天。十二月十日所見的尾之全部，在近日點後之兩天內又復上昇。當彗星與太陽接近時，此項蒸氣之上昇極速，此後仍是上昇，但其運動因受重力之牽制故稍遲，同時並增加其長。在可見的時候，尾差不多是由近日點時放出的蒸氣所成。最初發出的蒸氣成爲尾之末端，離太陽至一定的遠以後，即不能見。有若干其他的彗星之尾，較爲短，非由蒸氣之繼續的急速流出而向上所成，而爲長久的蒸氣柱，與彗星之頭一同運動。此亦可證明天空中實在無有抵抗的物質存在，因爲不僅固體，如行星及彗星，能在天空中完全自由運動，即很稀薄的蒸氣如彗星尾，亦能完全自由運動，且可保持至很久的時間：

開柏萊 (*Kepler*) 將彗星尾之上昇及向着背太陽的方面進行這個事實，視爲光線之影響，此項光線係彗星之物質所具有。天空中沒有抵抗的很稀薄物質對於光線能退讓，這不能不說不合理的思想；不過地球上的空氣則較爲密，所以對於光線無

若何顯著的退讓可見。倘有一其他的天文學者則以爲物質之分子有的較重，有的則較輕，彗星之尾係由後者所構成，故能上昇。但地球上的物體之重量，係與其所含物質量之多寡相比，故如物質量不變，則其重量亦不變，我的推想則以爲此項構成彗星尾的蒸氣之上昇，是由於其稀薄化。煙筒中之煙，其上昇係由空氣之推動，而空氣則因受熱之作用而稀薄化，其比重減小故上昇。彗星尾之向着背太陽的一面上昇，何故不能如此？太陽光線之推動其所經過的中介物，祇由於其反射及屈折。能反射的分子因光線之此項作用而發熱，並將其熱傳至混在一塊的以太物質，於是使其稀薄而減小其比重，因而有上昇的力而將反射的分子推動，構成彗星尾的蒸氣有環太陽而旋轉的傾向，與之相離開；這亦是其上昇之一原因。所以當彗星在太陽之附近時，蒸氣即上昇，其原因即在此；當這時候，其軌道亦彎曲最甚，尾亦最長。彗星開始成爲可見時，尙保持其運動，同時並向太陽被吸引，而在橢圓的

軌道內環太陽運動，與彗星之頭一樣。因此，尾能始終與頭相連。太陽之吸引力不能使尾較之其頭更傾向太陽。因為共同的重力，二者必同時向太陽落下，或，同樣的阻止其上昇。所以太陽不能使開始時頭與尾之狀況改變，後者能長久繼續。

所以在近日點所構成的尾，可在很遠之處與其頭相離，於是經過很久的年月以後重新出現，或亦可漸漸的稀薄而消滅。以後彗星之頭回至太陽時，又可有新的蒸氣發出。蒸氣發出後在無阻的空間內必繼續稀薄化而向外伸出，故彗星之尾在其與頭部接近處較狹而在末端則較大。因為繼續的稀薄化，必能漸瀰漫於天空，同時被行星所吸引而與行星之氣相混合。海洋之於地球能供給充分的水蒸氣及分配水至各部，俾地球能資養萬物；同樣的，看來彗星對於行星亦有使行星面上不致乾燥而常有蒸氣的功用。一切的生物祇有在濕潤的狀況下纔能產生，但同時濕地有逐漸化為乾焦地的傾向，所以乾焦地必逐漸增加，倘無有某種原因能

使濕地保存，則最後必全為乾焦地無疑。我猜想空氣中之此項部分，為最神奇最精細能使萬物得以資養者，實在是由彗星所得來。

彗星之空氣必逐漸減少並收縮，因為逐漸變成為尾了。反之，倘彗星與太陽相離開，不致恆蒸發成爲尾，則亦可積聚起來成爲籠罩的大氣。當彗星之頭受太陽之熱最烈時，其尾最長最光輝，其周圍之大氣亦最小，由烈熱所發生的煙必很濃而黑。1680 年的彗星之頭與太陽及地球之距離相等，但在近日點之後較之在其前者為暗。在十二月內，其光與一第三等的星之光相等，但在十一月內，可與第一或第二等的星相等。所以在兩種狀況下均看見此彗星的人，以為有大小。劍橋有一位青年於十一月十九日望見此星，其光雖不鮮但其光輝的程度與 *Spica* 相等，較之後來所見為亮。蒙氏於十一月二十日見其大於第一等的星，其尾長  $2^\circ$ 。司多爾 (*Storer*) 於其給我的信中曾說，在十二月內，彗星之尾為最大而且最光輝，但其頭則較小不如十一

月內所見之大了。照他的意見，以爲開始時彗星頭之質量較大，後來則漸漸減小了。

由於這個理由，或者彗星之尾愈長而愈輝者，其頭即愈暗而愈小。1668年三月五日，晚上七時，巴西 (*Brasilien*) 曾見一彗星與地平線很相接近，向西，其頭極小差不多不能見，但其尾則特爲光輝，其影在海中極明亮可見。此尾之長約爲  $23^\circ$ ，由西向南伸出，差不多與地平線平行。這樣的光輝約有三日，以後即減小，但其大則增加。所以葡萄牙人亦有的說此彗星尾之長，幾於橫貫天空至四分之一。不過這彗星之頭恆在地平線下，所以不能見其全部。尾之大增加但其光輝則減小，可以證明彗星之頭與太陽相離。當其開始出現時與太陽較爲接近。在薩克遜的年書中，亦曾記載1106年時，有彗星出現，其頭極小而暗，其尾則很光輝而且極長。此星出現於二月初，在西方。由其尾之位置，可知其頭與太陽很接近。巴黎人馬太 (*Matthäus*) 曾說彗星與太陽之距離約爲一愛爾 (*Elle*)。由第三小

時至第九時，有一極大的光線發出。亞里士多德在其書內所敘述的彗星，其狀況亦是如此。亞氏說，彗星之頭第一天不能見，因為彗星在太陽之光內即沒下；至第二日，彗星與太陽稍距離開，不與太陽同沒下，故可見之。因為其尾極為光輝，故其頭不能見，後來尾之光稍弱，於是其頭乃可見。彗星始見於冬季，及至獵戶星時，即漸消滅。

1618 年的彗星，其尾亦甚大，其光輝可與第一等的星相等，或超過之。不過亦有些很大的彗星，其尾卻很小。按之傳說，有的彗星與木星等大，有的如金星，還有的甚至於與月球同其大。

以上已可證明彗星實為與行星相同的物體，其軌道環繞太陽，偏心率極大。在沒有尾的行星中，其軌道最小與太陽最接近者，亦即為最小的行星；在彗星方面亦是如此，其在近日點與太陽最接近者亦較為小。對於彗星軌道二大軸及環繞時間等，我暫不論，因為我們必須有若干同軌道的彗星之環繞後，纔能作比較的研究。下面的定理或可對

於此項研究有些補助。

§ 60. 問題. 試將已求得的彗星軌道修正之。

第一法。取前節所已得的軌道之位置，並選擇三個彗星處所，此三處所係由極精密的觀察所得，其間有一定的距離。今設  $A$  為第一與第二觀察間所經過的時間， $B$  為第二與第三觀察間之時間。彗星之近地點係在此三處所之一處，至少與之相距不遠。用此項外觀的處所，我們即可由三角算法以測定彗星之三個真的處所。於是用此項處所，按照第一編 § 43 內之算術計算法，作一圓錐曲線，太陽在其一焦點，其由太陽至該項處所的半徑所界之面積則以  $D$  與  $E$  表之。 $D$  為第一與第二觀察中間的時間內所作之面積， $E$  第二與第三觀察中間的時間內所作之面積，而  $T$  則為作成  $D+E$  所需之時間，其速度為第一編 § 36 內所得者。

第二法。試將交軌點之經度放大 20 或 30 分，並以  $P$  表之。軌道平面對於黃道之傾斜讓其不變。用觀察得的三個處所，可求得新軌道內之三

個真處所。如前，軌道係經過此三點，其二個面積仍以  $d$  及  $e$  表之， $t$  爲作成  $d+e$  所需之時間。

第三法。交軌點之經度不變，但將其傾斜放大 20 至 30 分，以  $Q$  表之。於是用觀察所得的三個處所以求得三真處所，在此新平面內，並作一軌道經過之。其二個面積，以  $\delta$  及  $\epsilon$  表之，作成  $\delta+\epsilon$  時所需時間，以  $\tau$  表之。

今設

$$A : B = C : 1 \quad (1),$$

$$D : E = G : 1 \quad (2),$$

$$d : e = g : 1 \quad (3),$$

$$\delta : \epsilon = \gamma : 1 \quad (4),$$

$S$  爲第一與第三觀察中間所經過的真時間，並適當的使用+及-符號，以下列的方程，決定  $m$  與  $n$  兩個數字：

$$2G - 2C = mG - mg + nG - n\gamma \quad (5),$$

$$2T - 2S = mT - mt + nT = n\tau \quad (6).$$

倘在第一法內  $J$  爲傾斜， $K$  爲交軌點之經

度，則其真的傾斜爲  $J+nQ$ ，而交軌點之真的經度爲  $K+mP$ 。又如第一，第二，第三法內  $R, r, g$ ，爲軌道之通徑， $\frac{1}{L}, \frac{1}{l}, \frac{1}{\lambda}$  爲其大軸，則其真的

通徑爲  $R+mr-mR+ng+nR$ ，

而其真的大軸爲

$$\frac{1}{L+ml-mL+n\lambda-nL}$$

但真的大軸既知，環繞時間即易知。不過彗星之環繞時間及其大軸，祇有能將各時間所出現之彗星相互比較時，纔能得其詳細。倘有若干彗星在相等的時間段內作相等的軌道，則可推知此項彗星實爲一個，在同一軌道內環繞。最後，由環繞時間可求得大軸，而由此復可求得橢圓軌道。

所以欲達到此，必須將若干彗星之軌道計算出，但我們亦可假定其爲拋物線形的軌道，因爲此項假定，已可與現象無多相差，不僅 1680 年之彗星之軌道爲拋物線的性質，即 1664 及 1665 年所出現的彗星，爲海佛 (Hevel) 所觀察過者，其軌道

亦係如此。海氏曾將此彗星之經緯度算過，惟不很精確。後來哈雷又重新將其計算過，根據所得的處所以決定其軌道。他設

$$\text{交軌點之經度} = \square 21^{\circ}13'55'',$$

$$\text{對於黃道之傾斜} = 21^{\circ}18'40'',$$

$$\text{近日點與交軌點之距離} = 49^{\circ}27'30'',$$

$$\text{近日點在 } \text{♋} 8^{\circ}40'30'',$$

$$\text{南緯度 } 16^{\circ}1'45''.$$

他又知道彗星於十一月二十四日晚上十一時五十二分(倫敦時間)在近日點處。拋物線之通徑他假定其為 410286，太陽與地球之平均距離為 100000。

由以下所列哈雷之表內，可知此項軌道內所推算得的處所與所觀察到者相合至何種程度。

時 日	觀察到的彗星距離	觀察到的處所	推算得的處所
1664 年 12 月			
3 日 18 <sup>h</sup> 29,5 <sup>m</sup>	離天獅星之心		
	46°24'20"	經 $\square 7^{\circ}1'0''$	$\square 7^{\circ}1'29''$
4 日 18 <sup>h</sup> 1,5 <sup>m</sup>	同上	46 2 45 經 $\square 16 15 0$	$\square 16 16 5$

	離 <i>Spica</i> 23 52 40	緯 -22 24 0	-22 24 0
7 日 17 <sup>h</sup> 48 <sup>m</sup>	離天獅星之心		
	44 48 0	經 西 3 6 0	西 3 7 3
	離 <i>Spica</i> 27 56 40	緯 -25 22 0	-25 21 40
17 日 14 <sup>h</sup> 43 <sup>m</sup>	離天獅星之心		
	53 15 15	經 九 2 56 0	九 2 56 0
	離仙后宮之右肩		
	45 43 30	緯 -49 25 0	緯 -49 25 0
19 日 9 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup>	離小狗座之第一星		
	35 13 50	經 口 28 40 30	口 28 43 0
20 日 9 <sup>h</sup> 53,5 <sup>m</sup>	同上 40 49 0	經 口 13 3 0	口 13 5 0
21 日 9 <sup>h</sup> 9,5 <sup>m</sup>	離仙后宮之右肩		
	26 21 25	經 口 2 16 0	口 2 18 30
22 日 9 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	同上 29 47 0	經 8 24 24 0	8 24 27 0
26 日 7 <sup>h</sup> 58 <sup>m</sup>	離白羊宮之輝星		
	23 20 0	經 8 9 0 0	8 9 2 8
27 日 6 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup>	同上 20 45 0	經 8 7 5 40	8 7 8 45
28 日 7 <sup>h</sup> 39 <sup>m</sup>	同上 18 29 0	經 8 5 24 45	8 5 27 52
	離七星 29 37 0	緯 -8 22 50	-8 23 37
31 日 6 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup>	離 <i>Adromeda</i>		
	30 48 10	經 8 2 7 40	8 2 8 20
	離七星 32 53 30	緯 -4 13 0	-4 16 25
1665 年 1 月			

7日 7 <sup>h</sup> 37,5 <sup>m</sup>	離 <i>Adromeda</i>		
	25 11 0	經 $\Upsilon$ 28 24 47	$\Upsilon$ 28 24 0
	離七星 57 12 25	緯 +0 54 0	+0 53 0
13日 7 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	離 <i>Adromeda</i> 之頭		
	28 7 10	經 $\Upsilon$ 27 6 54	$\Upsilon$ 27 6 39
	離七星 38 55 20	緯 +3 6 50	+3 7 40
24日 7 <sup>h</sup> 29 <sup>m</sup>	離 <i>Adromeda</i> 之腰		
	20 32 15	經 $\Upsilon$ 26 29 15	$\Upsilon$ 26 28 50
	離七星 40 5 0	緯 +5 25 50	+5 26 0
2月 7日 8 <sup>h</sup> 39 <sup>m</sup>		經 $\Upsilon$ 27 24 46	$\Upsilon$ 27 24 55
		緯 +7 3 26	+7 3 15
22日 8 <sup>h</sup> 46 <sup>m</sup>		經 $\Upsilon$ 28 29 46	$\Upsilon$ 28 29 58
		緯 +8 12 36	+8 10 25
3月 1日 8 <sup>h</sup> 16 <sup>m</sup>		經 $\Upsilon$ 29 18 15	$\Upsilon$ 29 18 20
		緯 +8 36 26	+8 36 12
7日 8 <sup>h</sup> 37 <sup>m</sup>		經 8 0 2 48	8 0 2 42
		緯 +8 56 30	+8 56 56

1665年二月，第一星在白羊宮，以下我稱之為  $\gamma$ ，在  $\Upsilon 28^{\circ}30'15''$ ，緯度為北  $7^{\circ}8'58''$ 。白羊宮之第二星在  $\Upsilon 29^{\circ}17'18''$ ，北緯  $8^{\circ}28'13''$ 。尚有一第七等大的星，我名之為  $A$ ，在  $\Upsilon 28^{\circ}24'45''$ ，北緯  $8^{\circ}28'33''$ 。當二月七日七時三十分（巴黎時間，

合唐七 *Danzig* 時間爲 8 時 37 分，但以上之表內所用者係唐七時間)，彗星與  $\gamma$  及  $A$  在  $\gamma$  成一直角。彗星與  $\gamma$  之距離，等於  $\gamma$  與  $A$  之距離，即， $1^{\circ}19'46''$ 。今將此由  $\gamma$  之經度減去，則所餘爲  $\Upsilon 27^{\circ}9'49''$ 。奧沙 (*Auzout*) 氏，即作此觀察者，推論出來，以爲彗星差不多在  $\Upsilon 27^{\circ}0'$ ，但按之霍克之圖案，則當爲  $\Upsilon 26^{\circ}59'24''$ 。我取其平均值，假定其爲  $\Upsilon 27^{\circ}4'46''$ 。根據同樣的觀察，奧氏設彗星之緯度爲向北  $7^{\circ}4'$ 。實際上，是  $7^{\circ}3'29''$ 。

在二月二十二日七時三十分倫敦時間（即唐七時間之八時四十六分）彗星與  $A$  之距離，按霍克之觀察，並按丕底 (*Petit*) 氏之圖案，等於  $A$  與  $\gamma$  相距之  $\frac{1}{2}$ ，即， $15'57''$ 。彗星與連結  $A$  及  $\gamma$  之線相距離，爲以前距離之  $\frac{1}{4}$ ，即  $4'$ 。所以彗星在  $\Upsilon 28^{\circ}29'46''$ ，北緯  $8^{\circ}12'36''$ 。

三月一日七時，倫敦時間，即八時十六分唐七時間，彗星在白羊宮之第二星附近，其相互距離比白羊宮內第一與第二星之相互距離如

4 : 45 (按霍克),

或 2 : 23 (按 *Gottignies*),

所以彗星與第二星之真距離,按霍氏爲

8'16",

按 *Gottignies* 則爲

8'5",

故其平均值爲

8'10".

彼時彗星較第二星稍在前,約爲 1'35",按霍氏所得則稍小。所以如於該星之經度上加 1',並於其緯度上加 8'10",則得彗星之所在爲  $\Upsilon 29^{\circ}18'$ ,北緯  $8^{\circ}36'26''$ 。

三月七日七時三十分巴黎時間即唐七時間八時三十七分,彗星與白羊宮之第二星距離,按奧沙之觀察,等於此星與 A 星之距離,即 52'29"。前二者之經度差爲 45' 或 46',其平均值爲 45'30",故彗星在  $\Upsilon 29^{\circ}17'18'' + 45'30'' = 80^{\circ}2'48''$  經度。

丕底按奧沙之觀察作成一圖案,海佛則由之

推論到彗星之緯度爲  $8^{\circ}54'$ ；不過彗星之軌道在其未來，有些不規則的彎曲。海氏於其所作圖案中曾按奧氏之觀察作過修正，於是推定其緯度爲  $8^{\circ}55'30''$ ，後來再修正後，得  $8^{\circ}56'$  或  $8^{\circ}57'$ 。

三月九日此彗星亦仍可見，大約在  $8^{\circ}18'$  經， $9^{\circ}3,5'$  北緯。

該彗星一直到三個月以後尙可見，經過約六宮，每天約  $20'$ 。彗星之軌道與大圓相差頗多，向北稍傾而彎曲。此項不經見的運行法，由開始至結末，均與理論相符，猶之行星的運行與其理論相符一樣。此可由表中以知之。不過當彗星之速度爲最大時，我們必須減小其時間，而此則可將上昇的交軌點與近地點間之角減去  $12''$ ，使其等於  $49^{\circ}27'18''$ 。二彗星之每年的視差很易看到。

1683 年所出現的彗星之運動，亦可證明該項理論。此彗星在其軌道內倒行，其軌道之平面與黃道之角差不多成一直角。其上昇的交軌點  $\Omega$ （按哈雷之推算）在  $\text{mp}23^{\circ}23'$ ，

其與黃道之傾斜為  $J = 83^{\circ}11'$ , 近日點之經度  $\omega = \square 25^{\circ}29'30''$   
 後者與太陽之距離  $q = 56020$ , 大軌道之半徑  $a = 100000$ .

近日時為  $T = 七月二日三時五十分$ . 彗星在此軌道內之處所, 曾經哈雷推算過,

以下的表內可見其與弗來姆司替德之觀察相比較.

真時間	太陽處所	推算得的		觀察得的		相差	
		經度	緯度	經度	緯度	經度	緯度
1688年							
七月十三							
H 12 <sup>h</sup> 55 <sup>m</sup>	$\Omega 1^{\circ} 2'30''$	$\odot 13^{\circ} 5'42''$	$+ 29^{\circ}28'13''$	$\odot 13^{\circ} 6'42''$	$+ 29^{\circ}28'20''$	$+ 1' 0''$	$+ 0' 7''$
十五日							
11 <sup>h</sup> 55 <sup>m</sup>	253 12	11 37 48	29 34 0	11 39 43	29 34 50	+ 1 55	+ 0 50



八月二日	20 17 16	25 29 32	25 16 41	25 28 46	25 17 28	-0 46	+1 9
14 <sup>h</sup> 56 <sup>m</sup>							
四日	22 2 50	23 18 20	24 10 49	23 16 55	24 12 19	-1 25	+1 30
10 <sup>h</sup> 49 <sup>m</sup>							
六日	23 56 45	20 42 23	22 47 5	20 40 32	22 49 5	-1 51	+2 0
10 <sup>h</sup> 9 <sup>m</sup>							
九日	26 50 52	16 7 57	20 6 37	16 5 55	20 6 10	-2 2	-0 27
10 <sup>h</sup> 26 <sup>m</sup>							
十五日	14 <sup>h</sup> 1 <sup>m</sup> 11 <sup>s</sup>	3 30 48	11 37 33	3 26 18	11 32 1	-4 30	-5 32
14 <sup>h</sup> 1 <sup>m</sup> 11 <sup>s</sup>							

十六日													
15 <sup>h</sup> 10 <sup>m</sup>	3 48 2	0 43 7	9 34 16	0 41 55	9 34 13	-1 12	-0 3						
十八日													
15 <sup>h</sup> 44 <sup>m</sup>	5 45 33	8 24 52 53	+5 11 15	8 24 49 5	+5 9 11	-3 48	-2 4						
二十二日													
14 <sup>h</sup> 44 <sup>m</sup>	9 35 49	11 7 14	-5 16 53	11 7 12	+5 16 50	-0 2	+0 3						
二十三日													
15 <sup>h</sup> 52 <sup>m</sup>	10 36 48	7 2 18	8 17 9	7 1 17	8 16 41	-1 1	+0 28						
二十六日													
16 <sup>h</sup> 2 <sup>m</sup>	13 31 10	7 24 45 31	16 38 0	7 24 40 0	16 38 20	-1 31	-0 20						

1682 年出現的彗星之倒退的運行亦可證明該項理論，其上昇的交軌點按之哈雷在  $8^{\circ} 21' 16'' 30''$ ，其

軌道對於黃道之傾斜為  $17^{\circ} 56' 0''$       近日點之經度  $\approx 2^{\circ} 52' 50''$ ，  
 近日點處與太陽之距離 58328，      大軌道之半徑為 100000.

修正的近日時間為九月四日七時三十九分。以下的表內所列者為按照弗氏之觀察而推算的處所與理論上的結果相比較。

外觀的 時間	太陽之 處所	推算得的		觀察得的		相差	
		經度	緯度	經度	緯度	經度	緯度
1682 年							
八月十九							
H $16^h 38^m$	$7^{\circ} 0' 7''$	$\Omega 18^{\circ} 14' 28''$	$+ 25^{\circ} 50' 7''$	$\Omega 18^{\circ} 14' 40''$	$+ 25^{\circ} 49' 55''$	$- 9' 12''$	$+ 0' 12''$



九月一日	19 16 9	20 30 53	15 13 0	27 4	15 9 49	+3 49	+3 11
7 <sup>h</sup> 33 <sup>m</sup>							
四日	22 11 28	25 42 0	12 23 48	25 40 18	12 22 0	+1 2	+1 48
7 <sup>h</sup> 22 <sup>m</sup>							
五日	23 10 29	27 0 46	11 33 8	27 59 24	11 33 51	+1 22	-0 43
7 <sup>h</sup> 32 <sup>m</sup>							
八日	26 5 58	29 58 44	9 26 46	29 58 45	9 26 43	-0 1	+0 3
7 <sup>h</sup> 16 <sup>m</sup>							
九日	27 5 9	mp 0 44 10	8 49 10	mp 0 44 4	8 48 25	+0 6	+0 45
7 <sup>h</sup> 26 <sup>m</sup>							

1723 年所出現的彗星之向後的運動，亦可證明該項理論之無誤。按巴拉德利 (*Bradley*) 之推算，其向上的交軌點在  $\gamma 14^{\circ}46'$ ，其軌道對黃道之傾斜為  $49^{\circ}59'$ ，近日點之經度  $8 12^{\circ}15'20''$ 。在近日點方面與太陽之距離為 998651，大軌道之半徑為 1000000。下列之表內為巴氏所推算的彗星之軌道內的處所，與旁德 (*Pound*) 及哈雷等

所觀察到者相比較。

真時間	觀 察 得 的		推 算 得 的		相 差	
	經 度	緯 度	經 度	緯 度	經 度	緯 度
1723						
十月九日						
$8^h 5^m$	$\approx 7^{\circ}22'15''$	$+ 5^{\circ} 2' 0''$	$\approx 7^{\circ}21'26''$	$+ 5^{\circ} 2'47''$	$+ 49''$	$- 47''$

十日	6 <sup>h</sup> 21 <sup>m</sup>	6 41 12	7 44 13	6 41 42	7 43 18	-30	+55
十二日	7 <sup>h</sup> 22 <sup>m</sup>	5 39 58	11 55 0	5 40 19	11 54 55	-21	+ 5
十四日	8 <sup>h</sup> 57 <sup>m</sup>	4 59 49	14 43 50	5 0 37	14 44 1	-48	-11
十五日	6 <sup>h</sup> 35 <sup>m</sup>	4 47 41	15 40 51	4 47 45	15 40 55	- 4	- 4
二十一日	6 <sup>h</sup> 22 <sup>m</sup>	4 2 32	19 41 49	4 2 21	19 42 3	+11	-14

二十二日	359 2	20 8 12	359 10	20 8 17	- 8	- 5
6 <sup>h</sup> 24 <sup>m</sup>						
二十四日	355 29	20 55 18	355 11	20 55 9	+18	+ 9
8 <sup>h</sup> 2 <sup>m</sup>						
二十九日	356 17	22 20 27	356 42	22 20 10	-25	+17
8 <sup>h</sup> 56 <sup>m</sup>						
三十日	358 9	22 32 28	358 17	22 32 12	- 8	+16
6 <sup>h</sup> 20 <sup>m</sup>						
十一月五日	4 16 30	23 33 33	4 16 23	23 33 7	+ 7	+26
5 <sup>h</sup> 53 <sup>m</sup>						

八日									
7 <sup>h</sup> 6 <sup>m</sup>	4 29 36	24 4 30	4 29 54	24 4 40	- 18	- 10			
十四日									
6 <sup>h</sup> 20 <sup>m</sup>	5 2 16	24 48 46	5 2 51	24 48 16	- 35	+ 30			
二十日									
7 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup>	5 42 20	25 24 45	5 43 13	25 25 17	- 53	- 32			
十二月七日									
6 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup>	8 4 13	26 54 18	8 3 55	26 53 42	+ 18	+ 36			

由此項例可知彗星之運動可由其理論中推得，亦猶行星運動之可由其理論推得一樣。所以，我們可由理論以推得彗星之軌道，復由此以推知其環繞時間。用此

方法並可知道其橢圓的軌道之軸，以及遠日點之距離等。

1607 年所出現的後退的彗星，其軌道之上昇的交軌點，按哈雷之計算在  $8^{\circ}20'21''$ ，其對於黃道之傾斜為  $17^{\circ}2'$ 。近日點在  $\approx 2^{\circ}16'$ ，近日點處離太陽之遠為 58680，大軌道之半徑為 100000。近日時間為十月十六日三時五十分。

此軌道與 1682 年所出現的彗星之軌道相同。今如假定此二彗星係為一個，則其環繞時間為 75 年，其大軸與地球之大軸相比，如  $\sqrt[3]{75^2} : 1$ ，或，約略如 1778:100，而此彗星在遠日點方面與地球及太陽之平均距離相比，約為 35:1。已經知道了此項數目字，便不難推知此彗星之橢圓的軌道。倘 75 年以後彗星仍退回原軌道，則一切證據均充分了。看來其他彗星之環繞時間較長，其距離亦較遠。

此外，彗星相互間之影響能使其運行失調，因為其數甚多，其在遠日點與太陽之距離極大，其所在時間亦很長。

由此可知其偏心率及環繞時間必能常常放大或減小。因此，我們不敢希望彗星之軌道恆不變，其環繞時間恆一致。不過此項變化亦不致過大。

由此，我們亦可得一理由，爲什麼彗星不包括入黃道帶內，而以不同的運動發見於天空之各部分。我們亦可知道，彗星必須由其最高的點下降，在其遠地點較遲的運動，復再上昇。

1680 年所出現的彗星，當其在近日點時，其與太陽之距離不及太陽對徑之六分之一，又因其速度之大，以及太陽上雲霧之密，彗星必受着抵抗力，使其運動減小，與太陽更相接近。但如繼續進行，每一環繞與太陽更接近一些，則最後必落於太陽上。在遠日點方面，其運動爲最遲，故可被其他的彗星所吸引而使其運動更遲，或致突然落入太陽。如是，有好些恆星，經長時間的放射及雲氣蒸發而衰老後，復可由墜於其上的彗星恢復之而重新成爲一星。有若干恆星，開始時突然的發光，以後即漸消滅，大約都屬於此類。1572 年十一月

八日，格瑪 (*Cornelius Gemma*) 曾於 *Cassiopeia* 星座發見一這樣的星；那天他是在不甚明亮的晚上所觀察到的。到第二天晚上時，他看見此星之光輝甚強，差不多與金星相若。十一月十一日，提果 (*Tycho de Brahe*) 亦曾見此星，其光輝極強。自此日以後，其光即漸減小，經十六個月以後，即不見了。當其初出現時，在十一月，彼時的光輝與金星相等；至十二月時，光輝已稍減，與木星約相等。至 1573 年正月，較之木星小了，但尚大於天狼星。二三月間時，約與天狼星相等，至四五月間即成爲第二等的星，六七八月時，成爲第三等的星，至九，十，十一月時，已成爲第四等的星；如是漸漸的減小，至翌年三月而不見。其顏色在開始時極明顯，白而鮮，以後漸成爲黃，再以後成爲紅，約如火星。在五月間，其色青白，如土星，以後則漸暗。

一六〇四年時，開柏萊的學生於九月三十日所發見的星亦是如此。在發見之前一夜，此星尚不可見；至翌晚忽發見其光輝約與木星相等，以後復

漸減，經十五六個月以後即不見。

希巴克 (*Hipparch*) 時候所發見的輝星亦是此類。據柏利尼 (*Plinius*) 的傳說，他是受了這星的鼓動，使其增加勇氣去觀察恆星，並想爲之作圖案。有若干星，交互的出沒，其光輝逐漸增加，但不能超過第三等的星以上，看來另是一種。但太陽，恆星以及彗星所發出之雲氣，有時能墜於行星之上，在該處凝聚成爲水或流質，以後能慢慢分解出各種地面上之物質，如鹽，硫磺等等。

§ 61. 總識。漩渦的假設，含有許多的困難。欲使每個行星環繞太陽所作之面積與時間相比，其漩渦各部之環繞時間必須與其離太陽的距離之平方相比。欲行星之環繞時間與其離太陽的距離之 $\frac{3}{2}$ 次方相比，其漩渦各部之環繞時間必須與其距離之 $\frac{5}{2}$ 次方相比。環繞土星，木星及其他行星之小漩渦要能單獨各各存在，而且能在太陽之漩渦中運動，則太陽漩渦各部之環繞時間必相等。太陽及行星之環其軸旋轉必須與漩渦之運動相合，但

事實上與此比例相差甚遠。彗星之運動殊為規則的，其運動的定律與行星相同，不能以漩渦說明之。彗星之運動係以極偏心的狀況伸入天空之各部，故祇有在非漩渦之狀況下纔可能。

拋出的物體除空氣的抵抗力以外，不受其他的阻力，故在真空內一切抵抗均消去，金與羽能以相等的速度下墜。在天空中沒有空氣的處所即是如此。於此，一切物體均能完全自由運動，故行星及彗星之運動軌道，就其種類及位置而論均為已知者，服從上述的定律。其不能出離其軌道，係服從重力的定律。

六個主要的行星環繞太陽在圓內運動，此項圓均以太陽為心，故為同心的，而且差不多在同一平面內，其運動方向亦差不多相同。另外，十個月球，環繞着地球，木星，土星運動，其軌道為圓形，以該項行星為心，且為同心的，其運動方向差不多為相似的，其軌道亦落在各該行星之軌道平面內。一切這些有規則的運動，其來源非為機械的，因為

彗星在極偏心的軌道內運動，而且向着天空之各部分。太陽，行星，彗星之這樣的奇異佈置，實在祇有靠一個全知全能的主宰纔能產生。假使每個恆星為一個系統之中心，此項系統均與我們的太陽系一樣，則其整個之目的既同，必被同一的主宰所支配。恆星之光與太陽之光同，各個系統均互相照耀。又，全宇宙的主宰，他的佈置恆星，必將其充分遠的隔開，俾這些星球不致因為其相互間的重力而相互落墜撞擊。

這個無限的主宰支配着一切；不是為宇宙之靈魂，而是萬物之主宰。因為如此，可稱之為我們的上帝，即，超越一切的上帝。上帝 (*Deus*) 這個字是對於隸屬而言，故所謂神靈為上帝之支配力，但不是像有些人那樣祇把上帝當作宇宙之靈魂，能支配一實在的物體，上帝支配其一切隸屬者。最高的上帝是一個無限的，永久的，完全的存在者。但不問如何完全的存在者，倘無有支配力，即不成為上帝。我們常說：我的上帝，我們的上帝，以色列的

上帝 (*Gott Israels*), 諸神之上帝, 諸支配者之主宰; 但我們不說: 我的永久者, 你們的永久者, 以色列的永久者, 諸神之永久者; 亦不說: 我們的無限者或我們的完全者, 因為這些名稱統不是對於隸屬者而言的。上帝這個字有時是表支配者的意思, 但不是每個支配者均是上帝。成爲上帝的, 是一個神的存在者之支配力; 在真的上帝方面, 這是真的, 在最高的方面, 這是最高, 在想像的上帝方面, 這是想像的。由此可知真正的上帝是一個活的, 睿知的, 有力的上帝, 在全宇宙之上, 而爲完全的。上帝是永久的, 無限的, 全能的, 全智的, 即是, 上帝無始無終, 無有窮盡; 他支配一切, 他知道一切。他既不是永久性及無限性本身, 但他是永久的, 無限的; 他既不是綿延, 亦不是空間, 但他恆存恆在, 他使空間及綿延成立。因為空間之每一部分恆存在, 綿延之每個不可分的瞬間遍處都存在, 故不能說創造及支配萬物者是不存在的。每一個靈魂, 在各不同的時間內, 以不同的官覺用不動的器

官運動，能作思想者，恆為同一的人格，不可分的人格。在時間上有相繼的部分，在空間內有相並的部分，但在構成人格的實在方面絕無相似者，在其思想的原則上亦沒有，在上帝之思想的物質上更沒有。每一個人，倘然他是有感知的人，則在其終生及一切官覺上，恆為一個人。同樣的，上帝是遍處都在，是永久的，是恆為一個的。上帝遍處都在，而且不僅為潛在的，亦且為實質的；因為不存在即不能發生作用。一切均在其內運動，均含在其內，但無有交互的影響。上帝對於物體之運動無所感受，其遍處存在亦不會對於物體發生抵抗作用。最高的上帝必然存在，而因此項必然性他遍處而且隨時存在。由此並可知上帝本身完全與自己相似，全部是耳，全部是眼，是腦，是臂，是感覺，是知，以及是作用，並不是人的樣子，更不是物的樣子，完全無有定形，不可思議。好像盲人沒有顏色的概念一般，我們對於上帝之全知全能亦無法想像。上帝沒有身體，亦沒有身體的形狀，所以視之不可得而

見，聽之不可得而聞，觸之亦不可得，我們不能求其可感覺到。我們可想像到他的屬性，但不能感覺其部分。我們所能見者是色，能聞者是聲，能嗅得是香臭，所能覺知者是外表，但內在的物之本質，則既非感官所能知，亦非思想所能及；至於上帝之本質，更不能想像。祇有他的屬性及附屬物能為我們所知道，我們由萬物之極精巧的佈置及其最後的原因可以知之。由其完備，我們不能不生驚異，由其支配力，我們不能不尊敬之。我們是其隸屬者必須祈求之，因為上帝而無支配力，無最後原因，無佑護，則與定命自然無異。

盲目的玄學的必然性，遍處遍時均一致，不能使事物變化。時間上及空間上發生支配作用的萬物之差殊，必有一個存在者之意志及智能為之產生。我們常時說：上帝能見，能聽，能說，能笑，乃至於能工作等等，這都是將上帝與人相比較而來的想像。這種比較，祇能使我們對於上帝發生一種極簡單的想像。

一直到現在，我已將天體現象及海洋運動用重力來說明了，但重力之來源如何，卻沒有說過。此項力必有一原因，貫徹至太陽及行星之中心，完全不受絲毫損失。他的影響不是與受影響的部分之面積相比，而是與物質之量相比，其方向亦無所限止，直至於無限，但以距離之平方逐漸減小。對於太陽的重力是由對於其各部分的重力之和。此項力與距太陽的距離之平方成反比，至為正確，一直至土星之軌道恆是如此，此可由行星遠日點之靜止以知之，而且如果彗星之遠日點亦靜止，則並可知其直至彗星之最在外的遠日點均如此。

我還沒有方法由此項現象以推及重力之根源，我亦不想立一假設。凡非由現象中推論得者，均是假設；凡是假設，不問其為玄學的，物理學的，或力學的等等，均不能用入實驗物理學內。在實驗物理學上，一切定理均由現象推得，用歸納法推廣之。物體之不可透性，可動性，撞擊性以及運動與重力之定律，均是如此得來的。只要知道重力存

在，按照我們所知的定律發生作用，並能用以說明一切天體及海洋之運動便已够了。

這裏尚須補充一些關於精神質 (*Geistige Substanz*) 的問題，此項精神質透過一切固體包含在其內。由於此項精神質之力及活動，物體之各部分能在最小的距離內互相吸引，而如相接觸時，能相黏住。帶電的物體能在最大的距離內相影響，以及吸引或排斥在其附近的物體。由於此項精神質，光乃能發出，被反射，屈折並使物體發熱。感覺之被刺激，動物肢體之運動，均由此項質之振動，由最外的感官藉神經傳至於腦，重復傳出至於筋肉。不過這些事物非片言可說明，而且我們亦還沒有充分的試驗可決定精神質發生作用的定律。

中華民國二十四年十一月初版

(52254.8)

漢譯世界名著  
自然哲學之數學原理一冊  
Mathematische Principien Der

實價二十一元

一九三五年八月一日發行

THE ISSUAC NEWTON

譯述者 鄭太朴

發行人 王雲五  
上海河南路

印刷所 商務印書館  
上海河南路

發行所 商務印書館  
上海及各埠

\*\*\*\*\*  
版 權 所 有  
翻 印 必 究  
\*\*\*\*\*

