

Analysis I

Arbeitsblatt 11

Übungsaufgaben

AUFGABE 11.1. Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt

$$((4 + i)X^2 - 3X + 9i) \cdot ((-3 + 7i)X^2 + (2 + 2i)X - 1 + 6i).$$

AUFGABE 11.2. Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K . Zeige, dass die Multiplikation auf $K[X]$ assoziativ, kommutativ und distributiv ist und dass das (konstante) Polynom 1 neutrales Element der Multiplikation ist.

AUFGABE 11.3. Berechne das Ergebnis, wenn man im Polynom

$$2X^3 - 5X^2 - 4X + 7$$

die Variable X durch die komplexe Zahl $2 - 5i$ ersetzt.

AUFGABE 11.4.*

Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K . Es sei $a \in K$. Zeige, dass die Einsetzungsabbildung, also die Zuordnung

$$\psi: K[X] \longrightarrow K, P \longmapsto P(a),$$

folgende Eigenschaften erfüllt (dabei seien $P, Q \in K[X]$).

- (1) $(P + Q)(a) = P(a) + Q(a)$.
- (2) $(P \cdot Q)(a) = P(a) \cdot Q(a)$.
- (3) $1(a) = 1$.

AUFGABE 11.5. Zeige, dass in einem Polynomring über einem Körper K gilt: Wenn $P, Q \in K[X]$ beide ungleich 0 sind, so ist auch $PQ \neq 0$.

AUFGABE 11.6.*

Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K . Zeige, dass der Grad folgende Eigenschaften erfüllt.

- (1) $\text{grad}(P + Q) \leq \max\{\text{grad}(P), \text{grad}(Q)\}$,
- (2) $\text{grad}(P \cdot Q) = \text{grad}(P) + \text{grad}(Q)$.

2

AUFGABE 11.7.*

Zeige, dass

$$z = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{2}}$$

eine Nullstelle des Polynoms

$$X^3 + 3X + 2$$

ist.

AUFGABE 11.8.*

Es seien die beiden komplexen Polynome

$$P = X^3 - 2iX^2 + 4X - 1 \text{ und } Q = iX - 3 + 2i$$

gegeben. Berechne $P(Q)$ (es soll also Q in P eingesetzt werden).

AUFGABE 11.9. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung (also das Einsetzen eines Polynoms in ein weiteres) von zwei Polynomen wieder ein Polynom ist.

AUFGABE 11.10.*

Es seien

$$f, g, h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen.

a) Zeige die Gleichheit

$$(h \cdot g) \circ f = (h \circ f) \cdot (g \circ f).$$

b) Zeige durch ein Beispiel, dass die Gleichheit

$$(h \circ g) \cdot f = (h \cdot f) \circ (g \cdot f)$$

nicht gelten muss.

AUFGABE 11.11. Schreibe das Polynom

$$X^3 + 2X^2 - 3X + 4$$

in der neuen Variablen $U = X + 2$.

AUFGABE 11.12. Schreibe das Polynom

$$Z^3 - (2 + i)Z^2 + 3iZ + 4 - 5i$$

in der neuen Variablen $W = Z + 2 - i$.

AUFGABE 11.13. Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „ P durch T “ für die beiden Polynome $P = 3X^4 + 7X^2 - 2X + 5$ und $T = 2X^2 + 3X - 1$ durch.

AUFGABE 11.14. Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K . Wie lautet das Ergebnis der Division mit Rest, wenn man ein Polynom P durch X^m teilt?

AUFGABE 11.15.*

Man bestimme sämtliche komplexen Nullstellen des Polynoms

$$X^3 - 1$$

und man gebe die Primfaktorzerlegung von diesem Polynom in $\mathbb{R}[X]$ und in $\mathbb{C}[X]$ an.

AUFGABE 11.16. Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und sei $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von P . Zeige, dass dann auch die konjugiert-komplexe Zahl \bar{z} eine Nullstelle von P ist.

AUFGABE 11.17. Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K . Zeige, dass jedes Polynom $P \in K[X]$, $P \neq 0$, eine Produktzerlegung

$$P = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k} \cdot Q$$

mit $\mu_j \geq 1$ und einem nullstellenfreien Polynom Q besitzt, wobei die auftretenden verschiedenen Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ und die zugehörigen Exponenten μ_1, \dots, μ_k bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind.

AUFGABE 11.18. Es sei K ein Körper und seien $S, Q \in K[X]$ zwei Polynome mit $\text{grad}(Q) \geq 1$. Zeige, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine eindeutige Darstellung

$$S = R_0 + R_1Q + R_2Q^2 + \cdots + R_nQ^n$$

mit Polynomen R_j vom Grad $< \text{grad}(Q)$ gibt.

AUFGABE 11.19.*

Es sei K ein Körper und es seien n verschiedene Elemente $a_1, \dots, a_n \in K$ und n Elemente $b_1, \dots, b_n \in K$ gegeben. Zeige, dass es ein eindeutiges Polynom $P \in K[X]$ vom Grad $\leq n - 1$ derart gibt, dass $P(a_i) = b_i$ für alle i ist.

AUFGABE 11.20.*

Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(-1) = 2, f(1) = 0, f(3) = 5.$$

AUFGABE 11.21. Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2 + dX^3$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 0, f(-1) = 1.$$

AUFGABE 11.22.*

Zeige, dass es zu ganzen Zahlen d, n mit $d > 0$ eindeutig bestimmte ganze Zahlen q, r mit $0 \leq r < d$ und mit

$$n = dq + r$$

gibt.

AUFGABE 11.23. Es sei $K[X]$ der Polynomring über einem Körper K . Zeige, dass die Menge

$$\left\{ \frac{P}{Q} \mid P, Q \in K[X], Q \neq 0 \right\},$$

wobei zwei Brüche $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P'}{Q'}$ genau dann als gleich gelten, wenn $PQ' = P'Q$ ist, mit einer geeigneten Addition und Multiplikation ein Körper ist.

AUFGABE 11.24. Berechne in $\mathbb{Q}(X)$ die folgenden Ausdrücke.

(1) Das Produkt

$$\frac{2X^3 - 5X^2 + X - 1}{X^2 - 2X + 6} \cdot \frac{X^2 + 3}{5X^3 - 4X^2 - 7}.$$

(2) Die Summe

$$\frac{4X^3 - X^2 + 6X - 2}{X^2 - 4X - 3} + \frac{X^2 - 3}{3X^2 + 5}.$$

(3) Das Inverse von

$$\frac{6X^3 - 9X^2 + 5X - 1}{X^4 - 4X^3 + 3X^2 - 8X - 3}.$$

AUFGABE 11.25. Skizziere die Graphen der folgenden rationalen Funktionen

$$f = g/h: U \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei U jeweils das Komplement der Nullstellenmenge des Nennerpolynoms h sei.

- (1) $1/x$,
- (2) $1/x^2$,
- (3) $1/(x^2 + 1)$,
- (4) $x/(x^2 + 1)$,
- (5) $x^2/(x^2 + 1)$,
- (6) $x^3/(x^2 + 1)$,
- (7) $(x - 2)(x + 2)(x + 4)/(x - 1)x(x + 1)$.

AUFGABE 11.26. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung von zwei rationalen Funktionen wieder rational ist.

AUFGABE 11.27. Berechne die Hintereinanderschaltungen $f \circ g$ und $g \circ f$ der beiden rationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 3}{x - 2} \text{ und } g(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 4}.$$

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 11.28. (3 Punkte)

Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt

$$((4 + i)X^3 - iX^2 + 2X + 3 + 2i) \cdot ((2 - i)X^3 + (3 - 5i)X^2 + (2 + i)X + 1 + 5i).$$

AUFGABE 11.29. (4 Punkte)

Führe in $\mathbb{C}[X]$ die Division mit Rest „ P durch T “ für die beiden Polynome $P = (5 + i)X^4 + iX^2 + (3 - 2i)X - 1$ und $T = X^2 + iX + 3 - i$ durch.

AUFGABE 11.30. (2 Punkte)

Beweise die Formel

$$X^u + 1 = (X + 1)(X^{u-1} - X^{u-2} + X^{u-3} - \dots + X^2 - X + 1)$$

für u ungerade.

AUFGABE 11.31. (4 Punkte)

Man finde ein Polynom f vom Grad ≤ 3 , für welches

$$f(0) = -1, f(-1) = -3, f(1) = 7, f(2) = 21$$

gilt.

AUFGABE 11.32. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und $R = K[X]$ der Polynomring über K . Sei

$$P = \{F \in K[X] \mid \text{Der Leitkoeffizient von } F \text{ ist positiv}\}.$$

Zeige, dass P die drei folgenden Eigenschaften besitzt

- (1) Entweder ist $F \in P$ oder $-F \in P$ oder $F = 0$.
- (2) Aus $F, G \in P$ folgt $F + G \in P$.
- (3) Aus $F, G \in P$ folgt $F \cdot G \in P$.

AUFGABE 11.33. (6 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper, $K[X]$ der Polynomring und

$$Q = K(X)$$

der Körper der rationalen Funktionen über K . Zeige unter Verwendung von Aufgabe 11.32, dass man Q zu einem angeordneten Körper machen kann, der *nicht* archimedisch angeordnet ist.