

## Analysis I

### Vorlesung 58

Um eine weitere wichtige Charakterisierung für Gradientenfelder beweisen zu können, müssen wir wissen, wie sich Integrale verhalten, die von Parametern abhängen.

#### Differenzierbarkeit des Integrals

Wir beginnen mit einem Beispiel.

BEISPIEL 58.1. Wir betrachten das Integral

$$\int_1^2 t^x dt,$$

wobei  $x > -1$  sei. Eine Stammfunktion zu  $t \mapsto t^x$  ist durch  $\frac{1}{x+1}t^{x+1}$  gegeben. Daher ist

$$\int_1^2 t^x dt = \left( \frac{1}{x+1} t^{x+1} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{x+1} (2^{x+1} - 1) = g(x).$$

Diese Funktion  $g(x)$  drückt den Wert des bestimmten Integrals zum Parameter  $x$  aus. Ein Blick auf die Bauart zeigt, dass  $g$  stetig und auch differenzierbar ist, und zwar ist nach der Produktregel

$$g'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} (2^{x+1} - 1) + \frac{1}{x+1} ((\ln 2) 2^{x+1}).$$

Andererseits kann man auch die Funktion  $t^x$  nach  $x$  ableiten und erhält

$$\frac{\partial}{\partial x} t^x = (\ln t) t^x.$$

Eine Stammfunktion nach  $t$  zu dieser Funktion findet man mittels partieller Integration, nämlich

$$\int (\ln t) t^x = (\ln t) \frac{t^{x+1}}{x+1} - \int \frac{1}{t} \cdot \frac{t^{x+1}}{x+1},$$

und somit ist

$$\frac{\ln t}{x+1} \cdot t^{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} t^{x+1}$$

eine Stammfunktion. Daher ist

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\partial}{\partial x} t^x dt &= \left( \frac{\ln t}{x+1} \cdot t^{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} t^{x+1} \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{\ln 2}{x+1} \cdot 2^{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} 2^{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Dies stimmt mit der Ableitung von  $g$  überein, d.h. es ist

$$\left(x \mapsto \int_1^2 t^x dt\right)' = \int_1^2 \frac{\partial}{\partial x} t^x dt.$$

Dahinter verbirgt sich ein allgemeiner Zusammenhang, der in Satz 58.3 beschrieben wird.

**SATZ 58.2.** *Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall. Es sei*

$$f: X \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

*eine stetige Funktion. Dann ist auch die Funktion*

$$X \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \int_a^b f(x, t) dt,$$

*stetig.*

*Beweis.* Aufgrund von Lemma 34.3 müssen wir für jede konvergente Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  mit dem Grenzwert  $x$  zeigen, dass die Folge der Integrale

$$\int_a^b f(x_n, t) dt$$

gegen

$$\int_a^b f(x, t) dt$$

konvergiert. Aufgrund von Lemma 23.16 genügt es zu zeigen, dass die Funktionenfolge  $f(x_n, -)$  gleichmäßig gegen  $f(x, -)$  konvergiert. Nehmen wir also an, dass diese Folge nicht gleichmäßig konvergiert. Dann gibt es ein  $\epsilon > 0$  mit der Eigenschaft, dass es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $m \geq n$  und ein  $t_m \in [a, b]$  mit  $|f(x_m, t_m) - f(x, t_m)| \geq \epsilon$  gibt. So können wir eine Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit zugehörigen Punkten  $t_{n_k}$  konstruieren, die diese Abstandbedingung erfüllen. Wegen Bolzano Weierstraß gibt es zu dieser Folge in  $[a, b]$  eine konvergente Teilfolge, und durch Umbenennen können wir annehmen, dass die Folge  $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert, sagen wir gegen  $t \in [a, b]$ . Wegen der Stetigkeit von  $f$  und den Konvergenzeigenschaften gibt es ein  $k_0$  derart, dass für alle  $k \geq k_0$  die Abschätzungen  $|f(x_{n_k}, t_{n_k}) - f(x, t)| \leq \frac{1}{3}\epsilon$  und  $|f(x, t_{n_k}) - f(x, t)| \leq \frac{1}{3}\epsilon$  gelten. Damit ist

$$\begin{aligned} |f(x_{n_k}, t_{n_k}) - f(x, t_{n_k})| &\leq |f(x_{n_k}, t_{n_k}) - f(x, t)| + |f(x, t) - f(x, t_{n_k})| \\ &\leq \frac{2\epsilon}{3} \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

Unter stärkeren Voraussetzungen hängen Integrale sogar differenzierbar von Parametern ab.

SATZ 58.3. Es seien  $I = [a, b]$  und  $J$  reelle Intervalle,

$$f: I \times J \longrightarrow \mathbb{R}, (t, x) \longmapsto f(t, x),$$

eine stetige Abbildung, die in Richtung der Variablen  $x$  stetig partiell differenzierbar sei. Dann ist die Abbildung

$$J \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \int_a^b f(t, x) dt,$$

(nach  $x$ ) differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( x \mapsto \int_a^b f(t, x) dt \right) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) dt.$$

*Beweis.* Aufgrund der Differenzierbarkeit von  $f(t, x)$  nach  $x$  gibt es zu jedem  $(s, p) \in I \times J$  nach Satz 18.5 eine in  $x$  stetige Funktion  $r_s(x)$  mit  $r_s(p) = 0$  und mit

$$f(s, x) = f(s, p) + \left( \frac{\partial}{\partial x} f(s, p) \right) (x - p) + r_s(x)(x - p).$$

Wir setzen

$$r(s, x) = r_s(x).$$

Wir zeigen zuerst, dass diese Funktion in den zwei Variablen  $s$  und  $x$  in jedem Punkt stetig ist. Bei  $x \neq p$  kann man

$$r(s, x) = \frac{f(s, x) - f(s, p)}{x - p} - \frac{\partial}{\partial x} f(s, p)$$

auffösen und erhält so die Stetigkeit, da ja die partielle Ableitung nach Voraussetzung stetig ist. Bei  $x = p$  verwenden wir das Folgenkriterium für die Stetigkeit. Sei also  $(s_n, x_n)$  eine Folge, die gegen

$$(s, x) = (s, p)$$

konvergiert. Wir können dabei annehmen, dass  $x_n \neq p$  für alle  $n$  ist, da ja  $r(s_n, p) = 0$  ist. Es ist

$$\begin{aligned} |r(s_n, x_n) - r(s, p)| &= |r(s_n, x_n)| \\ &= \left| \frac{f(s_n, x_n) - f(s_n, p)}{x_n - p} - \frac{\partial}{\partial x} f(s_n, p) \right|. \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es zu jedem  $n$  ein  $c_n \in [x_n, p]$  mit

$$\frac{f(s_n, x_n) - f(s_n, p)}{x_n - p} = \frac{\partial}{\partial x} f(s_n, c_n)$$

und somit ist der obige Ausdruck gleich

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} f(s_n, c_n) - \frac{\partial}{\partial x} f(s_n, p) \right|.$$

Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitung und wegen  $c_n \rightarrow p$  wird dies beliebig klein.

In der eingangs formulierten Identität sind also alle Bestandteile stetig. Daher kann man beidseitig über  $[a, b]$  integrieren und erhält ( $x - p$  ist in der Integration konstant)

$$\int_a^b f(t, x) dt = \int_a^b f(t, p) dt + (x - p) \left( \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(t, p) dt \right) + (x - p) \int_a^b r(t, x) dt.$$

Der Fehlerausdruck

$$R(x) = \int_a^b r(t, x) dt$$

ist stetig in  $x$ , da  $r(t, x)$  stetig ist und wegen der Stetigkeit des Integrals. Ferner ist  $R(p) = \int_a^b r(t, p) dt = 0$ , so dass die Funktion  $x \mapsto \int_a^b f(t, x) dt$  linear approximierbar und damit differenzierbar ist.  $\square$

**SATZ 58.4.** *Es sei  $I = [a, b]$  ein reelles Intervall,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und*

$$f: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine stetige Abbildung, die in Richtung einer jeden Variablen  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , stetig partiell differenzierbar sei. Dann ist die Abbildung*

$$U \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \int_a^b f(t, x) dt,$$

*partiell differenzierbar und es gilt*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( x \mapsto \int_a^b f(t, x) dt \right) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_i} f(t, x) dt.$$

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Satz 58.3.  $\square$

## Die Integrabilitätsbedingung

Wie kann man erkennen, ob ein gegebenes Vektorfeld ein Gradientenfeld ist? Eine notwendige Bedingung schlägt sich in der folgenden Definition nieder.

**DEFINITION 58.5.** Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und

$$G: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein differenzierbares Vektorfeld. Man sagt, dass  $G$  die *Integrabilitätsbedingung* erfüllt (oder *lokal integrabel* ist), wenn

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(P) = \frac{\partial G_j}{\partial x_i}(P)$$

für alle  $P \in U$  und alle  $i, j$  gilt.

**LEMMA 58.6.** *Das Gradientenfeld einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion erfüllt die Integrabilitätsbedingung.*

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Satz 44.10.  $\square$

BEISPIEL 58.7. Das lineare Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

erfüllt wegen

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = -1 \neq 1 = \frac{\partial G_2}{\partial x}$$

nicht die Integrabilitätsbedingung. Es kann also nach Lemma 58.6 kein Gradientenfeld sein.



DEFINITION 58.8. Eine Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *sternförmig* bezüglich eines Punktes  $P \in T$ , wenn für jeden Punkt  $Q \in T$  die Verbindungsstrecke  $sQ + (1 - s)P$ ,  $s \in [0, 1]$ , ganz in  $T$  liegt.

SATZ 58.9. Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine sternförmige offene Teilmenge und

$$G: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.

- (1)  $G$  ist ein Gradientenfeld.
- (2)  $G$  erfüllt die Integrabilitätsbedingung.
- (3) Für jeden stetig differenzierbaren Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  hängt das Wegintegral  $\int_{\gamma} G$  nur vom Anfangspunkt  $\gamma(a)$  und Endpunkt  $\gamma(b)$  ab.

*Beweis.* Die Äquivalenz (1)  $\iff$  (3) folgt aus Satz 57.10 und die Implikation (1)  $\implies$  (2) aus Lemma 58.6. Es bleibt also (2)  $\implies$  (1) zu zeigen, wobei wir explizit eine Stammfunktion  $h$  zum Vektorfeld  $G$  angeben. Es sei  $P \in U$  ein

Punkt derart, dass  $U$  bezüglich  $P$  sternförmig ist. Wir definieren  $h(Q)$  über das Wegintegral zu  $G$  zum linearen Verbindungsweg

$$\gamma: [0, 1] \longrightarrow U, t \longmapsto P + t(Q - P),$$

also

$$h(Q) := \int_{\gamma} G = \int_0^1 \langle G(\gamma(t)), Q - P \rangle dt.$$

Wir müssen zeigen, dass der Gradient zu  $h$  gleich  $G$  ist, d.h. es ist

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = G_i$$

zu zeigen. Dafür können wir  $P = 0$  annehmen und wir schreiben  $v$  statt  $Q$ . Mit diesen Bezeichnungen und Voraussetzungen ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} h(v) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \int_0^1 \langle G(tv), v \rangle dt \right) \\ &= \int_0^1 \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \langle G(tv), v \rangle \right) dt \\ &= \int_0^1 \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^n G_j(tv) \cdot v_j \right) \right) dt \\ &= \int_0^1 t \sum_{j=1}^n v_j \left( \frac{\partial}{\partial x_i} G_j \right) (tv) + G_i(tv) dt \\ &= \int_0^1 t \sum_{j=1}^n v_j \left( \frac{\partial}{\partial x_j} G_i \right) (tv) + G_i(tv) dt \\ &= \int_0^1 (t \mapsto t \cdot G_i(tv))' dt \\ &= (t \cdot G_i(tv)) \Big|_0^1 \\ &= G_i(v). \end{aligned}$$

Dabei beruht die zweite Gleichung auf der Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation (angewendet auf die stetig differenzierbare Funktion  $[0, 1] \times U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, v) \mapsto \langle G(tv), v \rangle$ ) die vierte Gleichung auf Aufgabe 43.14, die fünfte Gleichung auf der Integrierbarkeitsbedingung, die sechste Gleichung auf der Kettenregel und der Produktregel und die siebte Gleichung auf der Newton-Leibniz-Formel.  $\square$

BEISPIEL 58.10. Wir betrachten das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-(x^2 + y^2) + y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

und

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(x^2 + y^2) - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

erfüllt dieses Vektorfeld die Integrierbarkeitsbedingung. Es handelt sich aber nicht um ein Gradientenfeld: Das Wegintegral zur (geschlossenen) trigonometrischen Parametrisierung des Einheitskreises

$$\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} G &= \int_0^{2\pi} \left\langle G(\gamma(t)), \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt \\ &= 2\pi \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

im Gegensatz zu Korollar 57.9.



## Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Partietoilee.PNG , Autor = Benutzer auf fr Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0 5
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 9
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9