Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2018/2019**

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 10

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 10.1. Ordne die folgenden natürlichen Zahlen gemäß ihrer Größe.
2^{10}, 10^3, $50 \cdot 20 + 13$, 33^2, $3 \cdot 334$, $9^3 + 7^3$, 1005, $2 \cdot 5 \cdot 101$, 31^2, $3^3 \cdot 37$, $11 \cdot 10 \cdot 9$.

Übungsaufgaben

Aufgabe 10.2. Erstelle das „kleine Einsgrößergleicheins".

Aufgabe 10.3. Skizziere die Menge der Paare $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die $x \geq y$ erfüllen, als Teilmenge der Produktmenge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Aufgabe 10.4. Es seien $m \leq n$ natürliche Zahlen. Zeige

$$\{m, \ldots, n\} = \{x \in \mathbb{N} | \, m \leq x \text{ und } x \leq n\} .$$

Aufgabe 10.5. Es seien k, n natürliche Zahlen. Zeige, dass $k \leq n$ genau dann gilt, wenn

$$\{1, \ldots, k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$$

gilt.

Aufgabe 10.6. Es seien a, b natürliche Zahlen mit $a \geq b$. Zeige, dass $a = b$ oder $a \geq b + 1$ gilt.

Aufgabe 10.7. Für natürliche Zahlen gelte $a \geq b$ und $b > c$. Zeige $a > c$.

Aufgabe 10.8.*

Zeige, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Abschätzung

$$3^n \geq n^3$$

gilt.

Aufgabe 10.9. Bestimme die minimale Potenzzahl echt oberhalb von 1000000 und die maximale Potenzzahl echt unterhalb von 1000000.

Aufgabe 10.10.*

Beweise Lemma 9.4 mit Hilfe von Lemma 10.6 und Satz 10.8.

Aufgabe 10.11.*

Beweise Lemma 9.5 mit Hilfe von Satz 10.8.

Aufgabe 10.12. Es sei A eine endliche total geordnete Menge. Es sei $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ eine endliche Indexmenge. Definiere auf der Produktmenge

$$A^I = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n-\text{mal}}$$

die „lexikographische Ordnung“, und zeige, dass es sich dabei ebenfalls um eine totale Ordnung handelt.

Aufgabe 10.13. Modelliere Aussagen wie „diese Person ist größer (schwerer, intelligenter) als jene Person“ mit Hilfe von Abbildungen und der Größergleich-Relation auf den natürlichen Zahlen. Besteht eine Ordnungsrelation auf der Personenmenge?

Aufgabe 10.14. Sei $T \subseteq \mathbb{N}$ eine nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen. Zeige, dass T genau dann endlich ist, wenn T ein Maximum besitzt.

Aufgabe 10.15. Es sei M eine endliche Menge mit m Elementen und es sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass T ebenfalls eine endliche Menge ist, und dass für ihre Anzahl k die Abschätzung

$$k \leq m$$

gilt. Zeige ferner, dass T genau dann eine echte Teilmenge ist, wenn

$$k < m$$

ist.

Aufgabe 10.16. Es seien S und T endliche Mengen. Zeige, dass es genau dann eine injektive Abbildung $\psi\colon S \to T$ gibt, wenn $\#(S) \leq \#(T)$ gilt.

Aufgabe 10.17. Es seien S und T endliche Mengen. Es gebe zwei injektive Abbildungen $\psi\colon S \to T$ und $\varphi\colon T \to S$. Zeige, dass dann die beiden Mengen die gleiche Anzahl besitzen.

Aufgabe 10.18.*

Winnetou und Old Shatterhand liegen nachts am Strand des Rio Pecos und halten ihre vom harten Tagesritt müden Füße in den Fluss. Dabei schauen sie in den Himmel und zählen Sternschnuppen. Winnetou sieht 117 und Old Shatterhand sieht 94 Sternschnuppen. Old Shatterhand sieht von den von Winnetou gesichteten Sternschnuppen 39 nicht. Wie viele der Sternschnuppen, die von Old Shatterhand gesichtet wurden, sieht Winnetou nicht?

Aufgabe 10.19.*

Professor Knopfloch kommt gelegentlich mit verschiedenen Socken und/oder mit verschiedenen Schuhen in die Universität. Er legt folgende Definitionen fest.

(1) Ein Tag heißt *sockenzerstreut*, wenn er verschiedene Socken anhat.
(2) Ein Tag heißt *schuhzerstreut*, wenn er verschiedene Schuhe anhat.
(3) Ein Tag heißt *zerstreut*, wenn er sockenzerstreut oder schuhzerstreut ist.
(4) Ein Tag heißt *total zerstreut*, wenn er sowohl sockenzerstreut als auch schuhzerstreut ist.

a) Vom Jahr 2015 weiß man, dass 17 Tage sockenzerstreut und 11 Tage schuhzerstreut waren. Wie viele Tage waren in diesem Jahr maximal zerstreut und wie viele Tage waren minimal zerstreut? Wie viele Tage waren in diesem Jahr maximal total zerstreut und wie viele Tage waren minimal total zerstreut?

b) Vom Jahr 2013 weiß man, dass 270 Tage sockenzerstreut und 120 Tage schuhzerstreut waren. Wie viele Tage waren in diesem Jahr maximal zerstreut und wie viele Tage waren minimal total zerstreut?

c) Erstelle eine Formel, die die Anzahl der sockenzerstreuten, der schuhzerstreuten, der zerstreuten und der total zerstreuten Tage in einem Jahr miteinander in Verbindung bringt.

Aufgabe 10.20. Es seien $a \geq b$ natürliche Zahlen. Begründe, dass $a-b$ der b-te Vorgänger von a ist.

Aufgabe 10.21. Es sei m eine natürlich Zahl. Zeige $m' - 1 = m$.

Aufgabe 10.22. Es seien $m \geq n$ natürliche Zahlen. Zeige, dass dann auch $m' \geq n'$ und dass

$$m' - n' = m - n$$

gilt.

Aufgabe 10.23. Berechne die Differenz

$$||||||| - ||||\,.$$

Aufgabe 10.24.*

Es seien a, b, c natürliche Zahlen mit $a, b \geq c$. Zeige

$$(a - c) + b = a + (b - c).$$

Gilt

$$(8 - 5) + 3 = 8 + (3 - 5)$$

in $\mathbb{N}$?

Aufgabe 10.25. Es seien a, b, c natürliche Zahlen mit $a \leq b \leq c$. Zeige

$$c - b \leq c - a.$$

Aufgabe 10.26.*

Es seien a, b, c natürliche Zahlen mit $a \geq b$ und $a - b \geq c$. Zeige, dass dann $a \geq b + c$ ist und dass

$$(a - b) - c = a - (b + c)$$

ist.

Aufgabe 10.27. Es seien a, b, c natürliche Zahlen mit $a \geq b + c$. Zeige, dass dann $a \geq b$ und $a - b \geq c$ gilt, und dass

$$(a - b) - c = a - (b + c)$$

ist.

Aufgabe 10.28.*

Es seien a, b, c, d natürliche Zahlen mit

$$a + b = c + d.$$

Es sei $a \geq c$. Zeige, dass dann $d \geq b$ ist und dass

$$a - c = d - b$$

gilt.

Aufgabe 10.29.*

Es seien a, b, c, d natürliche Zahlen mit $a \geq b$ und $c \geq d$.

(1) Zeige

$$ac + bd \geq bc + ad.$$

(2) Zeige (in $\mathbb{N}$)

$$(a-b)\cdot(c-d) \,=\, ac+bd-(bc+ad).$$

Aufgabe 10.30. Wir haben schon vielfach Beziehungen zwischen mengentheoretischen Operationen und arithmetischen Operationen hergestellt, siehe Satz 8.14, Satz 9.6, Aufgabe 9.27, Satz 10.13. Gibt es sowas auch für den Durchschnitt von endlichen Mengen?

Aufgabe 10.31. Wir zählen

heute, morgen, übermorgen, überübermorgen, überüberübermorgen, ...

Wir kennen zwar nur die Tage ab heute, wir kennen aber die Wörter

... vorvorvorgestern, vorvorgestern, vorgestern, gestern,

(wenn sie sich letzlich auf einen Tag ab heute beziehen).

(1) Bestimme gestern von morgen.
(2) Bestimme vorvorgestern von überüberübermorgen.
(3) Bestimme gestern von vorgestern von überüberüberübermorgen.
(4) Ist vorgestern von morgen in diesem System benennbar?

Aufgabe 10.32.*

Die offizielle Berechtigung für eine Klausurteilnahme werde durch mindestens 200 Punkte im Übungsbetrieb erworben. Professor Knopfloch sagt, dass es aber auf einen Punkt mehr oder weniger nicht ankomme. Zeige durch eine geeignete Induktion, dass man mit jeder Punkteanzahl zur Klausur zugelassen wird.

Aufgabe 10.33.*

Anfang März beträgt die Zeitdifferenz zwischen Deutschland und Paraguay 4 Stunden (in Paraguay wurde es 4 Stunden später hell). Am 25. März 2018 wurde in Deutschland die Uhr von der Winterzeit auf die Sommerzeit umgestellt, die Uhr wurde also um eine Stunde nachts von 2 auf 3 vorgestellt. In der gleichen Nacht wurde die Uhr in Paraguay umgestellt. Wie groß war die Zeitdifferenz nach der Umstellung?

Aufgabe 10.34. Bringe die folgenden Berechnungen mit Lemma 10.14 in Verbindung.

(1) In der ersten Halbzeit schießt Borussia Dortmund 3 Tore mehr als Bayern München. In der zweiten Halbzeit schießt Borussia Dortmund 4 Tore mehr als Bayern München. Wie viele Tore schießt Borussia Dortmund insgesamt mehr als Bayern München?

(2) Mustafa Müller hat 7 Fußballbildchen mehr als Heinz Ngolo. Beide bekommen 12 neue hinzu. Was ist jetzt die Differenz?
(3) Gestern hatte Mustafa Müller mindestens so viele Fußballbildchen wie Heinz Ngolo. Heute hat Heinz Geburtstag und bekommt neue Bildchen dazu, so dass er nun mindestens so viele Bildchen wie Mustafa hat. Wie lautet die neue Differenz, wenn man die alte Differenz und die Anzahl der geschenkten Bildchen kennt?

Aufgabe 10.35. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi\colon \mathbb{N}^4 \longrightarrow \mathbb{N}^4,$$

die einem Vierertupel (a, b, c, d) das Vierertupel

$$(|b-a|, |c-b|, |d-c|, |a-d|)$$

zuordnet. Bestimme, ob Ψ injektiv und ob Ψ surjektiv ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 10.36. (4 Punkte)

Zeige, dass es keine Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

gibt, die die folgende Eigenschaft erfüllt: Es ist $k \geq n$ genau dann, wenn $\varphi(k) \leq \varphi(n)$.

Aufgabe 10.37. (4 Punkte)

Es sei M eine endliche Menge mit m Elementen und es sei

$$M \longrightarrow N$$

eine surjektive Abbildung in eine weitere Menge N. Zeige, dass dann auch N endlich ist, und dass für ihre Anzahl n die Abschätzung

$$n \leq m$$

gilt.

Die folgende Aussage verwendet, dass sich jede natürliche Zahl $n \geq 1$ eindeutig als Produkt $n = 2^k u$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $u \in \mathbb{N}$ ungerade schreiben lässt.

Aufgabe 10.38. (5 (2+2+1) Punkte)

Wir definieren auf $\mathbb{N}_+$ eine neue Relation R durch folgende Vorschrift: Für zwei Zahlen $n, m \in \mathbb{N}_+$ mit $n = 2^k t$ und $m = 2^\ell u$ mit t, u ungerade sei

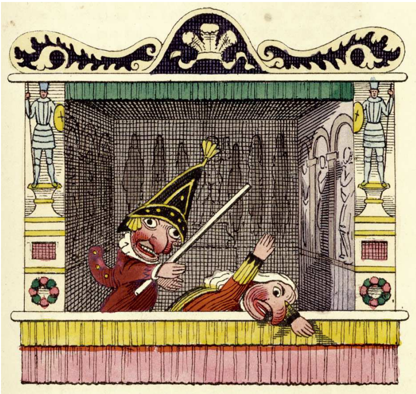
$$nRm \text{ falls } t < u \text{ gilt oder falls zugleich } t = u \text{ und } k \leq \ell \text{ gilt}$$

(rechts wird auf die natürliche Ordnung in $\mathbb{N}$ Bezug genommen).

(1) Zeige, dass R eine totale Ordnung auf $\mathbb{N}_+$ ergibt und beschreibe exemplarisch diese Ordnung.
(2) Zeige, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ ein wohldefiniertes Element $n^\star \in \mathbb{N}_+$, $n^\star \neq n$, derart gibt, dass $nRn^\star$ gilt und dass es zwischen n und $n^\star$ keine weiteren Elemente gibt (diese Formulierung ist zu präzisieren).
(3) Erfüllt die Menge $(\mathbb{N}_+, 1, \star)$ die Dedekind-Peano-Axiome?

Aufgabe 10.39. (2 Punkte)

Das Kasperletheater „Le Caspère“ verfügt über fünfzehn Stuhlreihen mit jeweils zwölf Sitzen. Für eine Vorstellung sind die Reihen $3, 4, 5$ von der Klasse $1c$ schon besetzt. Ferner sind die erste und die letzte Reihe wegen Renovierung gesperrt. Die Sitze ganz links und ganz rechts will man wegen der eingeschränkten Sicht nicht anbieten. Wie viele Sitzplätze des Theaters kommen *nicht* in den freien Verkauf?



Bei dieser Szene ruft Mustafa: „Nicht die Oma schlagen!“

Aufgabe 10.40. (3 Punkte)

Es seien a, b natürliche Zahlen. Zeige

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Aufgabe 10.41. (3 Punkte)

Zeige, dass mit der einzigen Ausnahme $n = 3$ die Beziehung

$$2^n \geq n^2$$

gilt.

Abbildungsverzeichnis