Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 6

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 6.1. Zeige, dass die Menge der „symmetrischen“ 2×2-Matrizen über einem Körper K, also Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

die die Bedingung

$$a_{12} = a_{21}$$

erfüllen, mit komponentenweiser Addition und komponentenweiser Skalarmultiplikation einen K-Vektorraum bildet.

Übungsaufgaben

Aufgabe 6.2. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Zeige, dass auch das Produkt

$$V \times W$$

ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 6.3.*

Es sei K ein Körper und

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem über K. Zeige, dass die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum des K^n ist. Wie verhält sich dieser Lösungsraum zu den Lösungsräumen der einzelnen Gleichungen?

Aufgabe 6.4. Überprüfe, ob die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ Untervektorräume sind:

(1) $V_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x + 2y = 0\}$,
(2) $V_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x \geq y\}$,
(3) $V_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, y = x + 1\}$,
(4) $V_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, xy = 0\}$.

AUFGABE 6.5.*

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es seien $s_1, \ldots, s_k \in K$ und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Zeige

$$\left(\sum_{i=1}^{k} s_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \right) = \sum_{1 \leq i \leq k,\, 1 \leq j \leq n} s_i \cdot v_j .$$

Die folgenden vier Aufgaben zeigen, dass keines der Axiome für die Skalarmultiplikation eines Vektorraumes überflüssig ist.

AUFGABE 6.6.*

Man gebe ein Beispiel für einen Körper K, eine kommutative Gruppe $(V, +, 0)$ und eine Abbildung

$$K \times V \longrightarrow V,\ (s,v) \longmapsto sv,$$

derart, dass diese Struktur alle Vektorraumaxiome außer

$$(5)\ \ r(su) = (rs)u$$

erfüllt.

AUFGABE 6.7.*

Man gebe ein Beispiel für einen Körper K, eine kommutative Gruppe $(V, +, 0)$ und eine Abbildung

$$K \times V \longrightarrow V,\ (s,v) \longmapsto sv,$$

derart, dass diese Struktur alle Vektorraumaxiome außer

$$(6)\ \ r(u+v) = ru + rv$$

erfüllt.

AUFGABE 6.8.*

Man gebe ein Beispiel für einen Körper K, eine kommutative Gruppe $(V, +, 0)$ und eine Abbildung

$$K \times V \longrightarrow V,\ (s,v) \longmapsto sv,$$

derart, dass diese Struktur alle Vektorraumaxiome außer

$$(7)\ \ (r+s)u = ru + su$$

erfüllt.

Aufgabe 6.9.*

Man gebe ein Beispiel für einen Körper K, eine kommutative Gruppe $(V, +, 0)$ und eine Abbildung

$$K \times V \longrightarrow V,\ (s, v) \longmapsto sv,$$

derart, dass diese Struktur alle Vektorraumaxiome außer

$$(8)\ \ 1u = u$$

erfüllt.

Aufgabe 6.10. Man mache sich klar, dass sich die Addition und die skalare Multiplikation auf einen Untervektorraum einschränken lässt und dass dieser mit den von V geerbten Strukturen selbst ein Vektorraum ist.

Aufgabe 6.11. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Zeige, dass die Vereinigung $U \cup W$ nur dann ein Untervektorraum ist, wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gilt.

Aufgabe 6.12.*

Es sei D die Menge aller reellen 2×2-Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

die die Bedingung

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$$

erfüllen. Zeige, dass D kein Untervektorraum im Raum aller 2×2-Matrizen ist.

Aufgabe 6.13. Wir betrachten im $\mathbb{Q}^3$ die Untervektorräume

$$U = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \rangle$$

und

$$W = \langle \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle.$$

Zeige $U = W$.

Aufgabe 6.14. Es sei K ein Körper und I eine Indexmenge. Zeige, dass

$$K^I = \operatorname{Abb}(I, K)$$

mit stellenweiser Addition und skalarer Multiplikation ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 6.15. Es sei K ein Körper, und seien $J \subseteq I$ zwei Indexmengen. Zeige, dass dann $K^J = \operatorname{Abb}(J, K)$ in natürlicher Weise ein Untervektorraum von K^I ist.

Aufgabe 6.16. Es sei K ein Körper, sei I eine Indexmenge, und $K^I = \operatorname{Abb}(I, K)$ der zugehörige Vektorraum. Zeige, dass

$$E = \left\{ f \in K^I \,|\, f(i) = 0 \text{ für alle } i \in I \text{ bis auf endlich viele Ausnahmen} \right\}$$

ein Untervektorraum von K^I ist.

Zu jedem $i \in I$ sei $e_i \in K^I$ durch

$$e_i(j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = i\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

gegeben. Man zeige, dass sich jedes Element $f \in E$ eindeutig als Linearkombination der Familie e_i, $i \in I$, darstellen lässt.

Die folgenden vier Aufgaben verwenden Begriffe aus der Analysis.

Aufgabe 6.17. Es sei K ein angeordneter Körper und sei

$$C = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \,|\, \text{Cauchyfolge in } K \right\}.$$

Zeige, dass C ein Untervektorraum des Folgenraums

$$F = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \,|\, \text{Folge in } K \right\}$$

ist.

Aufgabe 6.18. Zeige, dass die Teilmenge

$$S = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ stetig} \} \subseteq \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

ein Untervektorraum ist.

Aufgabe 6.19. Zeige, dass die Teilmenge

$$T = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ differenzierbar} \} \subseteq \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

ein Untervektorraum ist.

Aufgabe 6.20. Zeige, dass die Teilmenge

$$M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \, f \text{ monoton}\} \subseteq \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

kein Untervektorraum ist.

Aufgabe 6.21.*

Wir betrachten die Menge

$$M = \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

die mit der stellenweisen Addition $+$ von Funktionen eine kommutative Gruppe ist. Auf dieser Menge bildet die Hintereinanderschaltung von Abbildungen $\circ$ eine assoziative Verknüpfung mit der Identität als neutralem Element.

(1) Zeige, dass das Distributivgesetz in der Form

$$(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$$

gilt.

(2) Zeige, dass das Distributivgesetz in der Form

$$h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$$

nicht gilt.

Aufgabe 6.22. Drücke in $\mathbb{Q}^2$ den Vektor

$$(2, -7)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(5, -3) \text{ und } (-11, 4)$$

aus.

Aufgabe 6.23. Drücke in $\mathbb{C}^2$ den Vektor

$$(1, 0)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(3 + 5\mathrm{i}, -3 + 2\mathrm{i}) \text{ und } (1 - 6\mathrm{i}, 4 - \mathrm{i})$$

aus.

Aufgabe 6.24.*

Drücke in $\mathbb{R}^3$ den Vektor

$$(1, 0, 0)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(1, -2, 5), (4, 0, 3) \text{ und } (2, 1, 1)$$

aus.

Aufgabe 6.25. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V und $w \in V$ ein weiterer Vektor. Es sei vorausgesetzt, dass die Familie

$$w, v_i, i \in I\,,$$

ein Erzeugendensystem von V ist und dass sich w als Linearkombination der v_i, $i \in I$, darstellen lässt. Zeige, dass dann schon v_i, $i \in I$, ein Erzeugendensystem von V ist.

Aufgabe 6.26. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Beweise folgende Aussagen.

(1) Sei U_j, $j \in J$, eine Familie von Untervektorräumen von V. Dann ist auch der Durchschnitt
$$U = \bigcap_{j \in J} U_j$$
ein Untervektorraum.
(2) Zu einer Familie v_i, $i \in I$, von Elementen in V ist der erzeugte Unterraum ein Unterraum.
(3) Die Familie v_i, $i \in I$, ist genau dann ein Erzeugendensystem von V, wenn
$$\langle v_i,\, i \in I \rangle = V$$
ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 6.27. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften gelten (dabei sei $s \in K$ und $v \in V$).

(1) Es ist $0v = 0$.
(2) Es ist $s0 = 0$.
(3) Es ist $(-1)v = -v$.
(4) Aus $s \neq 0$ und $v \neq 0$ folgt $sv \neq 0$.

Aufgabe 6.28. (4 Punkte)

Wir betrachten im $\mathbb{Q}^4$ die Untervektorräume

$$U = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

und

$$W = \langle \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \rangle.$$

Zeige $U = W$.

Aufgabe 6.29. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen Vektorraum V und von drei Teilmengen in V an, die jeweils zwei der Unterraumaxiome erfüllen, aber nicht das dritte.

Aufgabe 6.30. (3 Punkte)

Drücke in $\mathbb{Q}^3$ den Vektor

$$(2, 5, -3)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(1, 2, 3), (0, 1, 1) \text{ und } (-1, 2, 4)$$

aus. Zeige, dass man ihn nicht als Linearkombination von zweien der drei Vektoren ausdrücken kann.

Aufgabe 6.31. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und M eine Menge mit einer Verknüpfung

$$+ \colon M \times M \longrightarrow M$$

und einer Abbildung

$$\cdot \colon K \times M \longrightarrow M.$$

Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow M$$

eine surjektive Abbildung mit

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \text{ und } \varphi(sx) = s\varphi(x)$$

für alle $x, y \in V$ und $s \in K$. Zeige, dass M ein K-Vektorraum ist.