普通測量學講義

上 册

儲 鐘 瑞
刘 呈 祥 編

清 华 大 学 出 版 科 印

1 9 5 7

上 册 目 录

第一編 測量学的初步知識

第三編 經緯儀測量

第五章 誤差的概念

5-1 前 言

在進行實際測量的過程中，由於種種原因，例如儀器的不完善，人的感覺器官的限制，以及外界條件的隨時改變等等，我們不能得到絕對正確的結果，或者說測量的結果中不可避免地包含誤差。既然測量工作離開不了誤差，那末學習測量學時，掌握測量誤差的一些概念是完全必要的了。

研究測量誤差的目的是爲了從多次量度中求得最可靠的數值，並估計測量結果的精確度。反過來，如果掌握了誤差理論就能事先選擇測量儀器，施測方法，在最經濟的條件下，使測量結果達到要求的精度。

量一個東西（重要的東西）普通總要量幾次，多量的目的是：

(1) 校核量出的結果，避免有錯；

(2) 提高量得結果的精度；

(3) 由多次量度求出最後結果的精度。

量一個東西，我們可以用量度單位和被量的東西來比較，例如用尺子量一段距離，這種量度稱爲直接量度。有時我們也採用間接量度的方法，例如在三角形中，直接量出其中兩個角，然後根據函數關系計算第三個角的數值。

在同樣的條件下，就是同一人或具有同等技術的人，用同一或同類儀器，在同樣外界條件下所進行的量度，稱爲同精度量度，否則，就稱爲不同精度的量度。

在這一章里我們將談到：同精度的直接量度和間接量度的誤差理論以及不同精度的量度的誤差理論。

5-2 誤差的种类

按照性質的不同，誤差可分爲三類：(1) 錯誤，(2) 系統誤差，(3) 偶然誤差。

(1) 錯誤　錯誤是由於工作者的粗心疏忽而引起的。例如量距離時把尺數唸錯，或記錯或算錯。錯誤是應該也是可以避免的。只要測量時小心從事，按照規定的方法去作，並進行校核測量，就可以避免錯誤；即或發生錯誤也可以發現它，消除它。所以測量的結果中是應該沒有錯誤的。

(2) 系統誤差　系統誤差主要是由於測量儀器不完善而引起的。例如量距離的尺子名義上是30m長，其實不合標准，經過與標准尺比較，其正確長度爲29.990m。用這個尺子作距離丈量，每量一段，結果就比應有長度大0.010m，量十段，誤差就累積爲0.100m。所以這類誤差的特點是在一定條件下它的大小和符號是固定的，並且誤差是有累積性的。但是經過人們研究之後，它的變化規律是可以知道的，因此這種誤差的影響是可以完全或大部分去掉；用適當的觀測方法來消除掉，或者在測量結果中加入計算的改正數。

此外系統誤差也可能由於外界環境所引起，例如温度對測量儀器的影響；或者由於觀測者感覺上的特點所致，例如瞄目標時總是偏向一邊。

(3) 偶然誤差　偶然誤差的來源很多，儀器的不够精確，觀測者感覺器官的限制，外界條件的不規則影響等都會引起偶然誤差。觀測者的技巧、體質和精神都對偶然誤差有影響。例如估計讀數可能大一點或小一點，瞄准目標可能偏左一點或偏右一點。這類誤差本身是帶有偶然性的，它的符號可正可負，它的大小也不能確實知道，因此偶然誤差是不能完全避免的，只能具體分析產生偶然誤差的原因來設法減小它的影響。

誤差理論主要是討論有關偶然誤差的問題，當然談到某些測量上的具體問題時，會牽涉到系統誤差。

5-3　偶然誤差的特性

實驗指出，在同精度的觀測條件下，偶然誤差有四個基本特性：

1. 絕對值相同的正號誤差和負號誤差的出現次數幾乎相同。
2. 絕對值較小的偶然誤差出現的次數較多。

觀測的次數愈多，實際情況愈符合這兩個特性。

3. 在一定的測量條件下，偶然誤差的絕對值不會超過一定的限度。
4. 當觀測的次數無限地增加時，偶然誤差的算術平均值趨近於零為極限。

第四特性可以從第一特性推出。假如以 n 表示觀測次數，δ_1，δ_2……δ_n 表示各次觀測結果的偶然誤差，那末，第四特性可以寫成，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\delta_1+\delta_2\cdots\cdots+\delta_n}{n}=0。$$

在今後我們以方括弧 [ ] 表示總和的意思，那末，上式可以寫成，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\delta]}{n}=0。$$

根據偶然誤差第一特性，上式分子中的正號誤差和負號誤差相互抵消，它們的總和[△]始終是有限的數值。當 n→∞ 時，$\frac{[\delta]}{n}$趨近於零。

5-4　算術平均值

即使在同精度的情況下，對同一東西進行多次觀測，我們將得出不同的結果。那末，從這些結果如何求出最後的結果呢？

假定某一東西的真值是 L。同精度觀測 n 次的結果是 l_1，l_2……l_n。各次觀測值和真值的差數，稱為真誤差，各以 $\triangle_1$，$\triangle_2$……$\triangle_n$ 表示。那末，可以寫出：

$$\triangle_1=l_1-L，$$
$$\triangle_2=l_2-L，$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\triangle_n=l_n-L。$$

將上列各式相加，並以［ ］代表總和，

$$[\triangle]=[l]-n\cdot L,$$

$$\frac{[\triangle]}{n}=\frac{[l]}{n}-L,$$

$$\triangle_0=l_0-L, \quad \cdots\cdots\cdots (5.1)$$

式中 l_0 是觀測值 l 的算術平均值，$\triangle_0$ 是真誤差 $\triangle$ 的算術平均值，它也是 l_0 的真誤差。

根據偶然誤差的第四特性，當 $n\to\infty$ 時，$\triangle_0\to 0$，那末，算術平均值 $l_0\to$ 真值 L。

事實上，n 是有限次數，但我們還是取算術平均值 l_0 當作觀測的最後結果，稱為最或然值。

5-5 平均誤差，均方誤差(中誤差)——精度的指示数

在同精度的多次觀測中，除了求得觀測的最或然值以外，決定每次觀測結果的精度和最後結果的精度也是很重要的問題。例如甲乙二人對某一量各進行了 n 次量度，各得出一個算術平均值，那末，那一個結果更精確一些呢？為了解決這個問題，必須建立一個衡量精度的標準。拿真誤差來講，它是觀測值和真值的差數，顯然，誤差的絕對值愈小，所得的結果就愈准確，很自然我們會採用誤差的絕對值作為精度的指示數。

假設有二人打靶，子彈打中靶中心時為無誤差，未打中中心時，其去中心的距離代表真誤差的大小，二人各打十彈，結果如下：

甲 2cm，4，5，5，8，4，7，8，9，8　　共 60cm。

乙 1cm，11，2，12，0，18，1，2，2，11　　共 60cm。

讓我們判斷甲乙二人誰打得准呢？他們二人每打一次靶可能有多大誤差呢？

首先我們可能想到，可以採用這些真誤差的絕對值的平均數來作比較，誤差的平均數大的不好，小的就好。認為誤差絕對值的平均數是有代表性的誤差，它可以代表每一次打靶結果的精度。按照這種原則來衡量精度，那末一次觀測的平均誤差，以 t 表示，

$$t=\pm\frac{[|\triangle|]}{n}, \quad \cdots\cdots\cdots (5.2)$$

式中 $[|\triangle|]$ 代表各次觀測結果的真誤差的絕對值的總和，n 是同精度觀測的次數，正負號表示誤差的偶然性質。在所舉的例子中，

$$t_{甲}=t_{乙}=\pm\frac{60}{10}=\pm 6\ \text{cm}。$$

上式說明甲乙二人的把靶技術相同。但以常識判斷，甲雖未打中中心，但其瞄准程度穩定，最大誤差為 9cm。乙打靶結果變動無常，有時正中中心，有時遠至 18cm，技術應不如甲，

所以僅按誤差絕對值的平均數來衡量精度，不能反映大的誤差的存在，而個別大的誤差存在是精度低的表現。因此衡量觀測精度的標準原則應該是：不考慮誤差的符號，僅考慮誤差絕對值的大小，並且能反映大的誤差的存在。

爲了使觀測中的較大誤差更顯示出來，我們先取眞誤差的平方的平均數，這可以說是有代表性的誤差的平方，然後再取平方根，這就變成誤差的一次方了。這種誤差稱爲均方誤差，也稱中誤差，以符號 m 來代表。每一次觀測的中誤差，

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\triangle^2]}{n}}, \quad \cdots\cdots(5.3)$$

式中 $[\triangle^2]$ 代表各次觀測結果的眞誤差的平方之和，n 是同精度觀測的次數。

按均方誤差來衡量精度，在所舉例子中，

$$m_{甲}=\sqrt{\frac{408}{10}}=\pm 6.09\ \text{cm},$$

$$m_{乙}=\sqrt{\frac{724}{10}}=\pm 8.51\ \text{cm},$$

上式說明，乙打靶的誤差較大，技術不如甲好。同時也可以看出，計算出的均方誤差都比平均誤差大，這說明按均方誤差衡量精度的要求較高。在以後的討論中都把均方誤差作爲衡量誤差大小的標準。

5-6 算術平均值的均方誤差

假設我們對同一東西進行 n' 組觀測，而每組都觀測 n 次。以 $\triangle_{01}$ 代表第一組觀測所得的算術平均數的眞誤差；以 $\triangle_{02}$，$\triangle_{03}$，……$\triangle_{0n'}$ 代表其他各組觀測所得的算術平均數的眞誤差。根據定義，算術平均數 l_0 的均方誤差

$$m_0=\pm\sqrt{\frac{\triangle_{01}^2+\triangle_{02}^2+\cdots\triangle_{0n'}^2}{n'}},$$

即

$$m_0^2=\frac{\triangle_{01}^2+\triangle_{02}^2+\cdots\cdots+\triangle_{0n'}^2}{n'}。$$

從公式（5—1），我們知道，

$$\triangle_{01}=\frac{\triangle_{11}+\triangle_{12}+\cdots\cdots+\triangle_{1n}}{n},$$

式中 $\triangle_{11}$，$\triangle_{12}$，……，$\triangle_{1n}$ 各代表第一次觀測中每次觀測值的眞誤差。

$$\triangle_{01}^2=\frac{(\triangle_{11}+\triangle_{12}+\cdots\cdots+\triangle_{1n})^2}{n^2}$$

$$=\frac{\triangle_{11}^2+\triangle_{12}^2+\cdots\cdots+\triangle_{1n}^2}{n^2}+\frac{2(\triangle_1\triangle_2+\triangle_1\triangle_3+\cdots\cdots+\triangle_{n-1}\triangle_n)}{n^2}。$$

根據偶然誤差的特性，當 n 相當大時，上式中 $\triangle_1\triangle_2+\triangle_1\triangle_3+\cdots\cdots+\triangle_{n-1}\triangle_n$ ，接近於零，無論如何，上式中右面的第二項比第一項小得多，因而可以忽畧。

$$\triangle_{01}^2=\frac{\triangle_{11}^2+\triangle_{12}^2+\cdots\cdots\triangle_{1n}^2}{n^2}$$

$$=\frac{1}{n}\quad\frac{(\triangle_{11}^2+\triangle_{12}^2+\cdots\cdots+\triangle_{1n}^2)}{n}=\frac{m^2}{n}。$$

同樣，

$$\triangle_{02}^2=\frac{m^2}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\triangle_{0n'}^2=\frac{m^2}{n}。$$

最後，

$$m_0^2=\frac{\triangle_{01}^2+\triangle_{02}^2+\cdots\cdots+\triangle_{0n'}^2}{n'}$$

$$=\frac{\frac{m^2}{n}+\cdots\cdots+\frac{m^2}{n}}{n'}=\frac{n'\,m^2}{n'\,n}=\frac{m^2}{n},$$

即

$$m_0=\frac{m}{\sqrt{n}}。\cdots\cdots\cdots\cdots(5.4)$$

上式說明，算術平均值的均方誤差等於一次觀測的均方誤差除以觀測次數的平方根。增多觀測次數可以降低最後結果的誤差。可是，當重復的次數逐漸增加，誤差是按逐漸減少的比例降低的，圖 5—1 表示這種情況。因此，在測量上重復觀測次數一般不超過六次，如果需要得到比較精確的結果，主要還是靠使用較精密的儀器及採取較完善的施測方法，而並不是太多增加觀測次數，這樣化費的勞力較少。

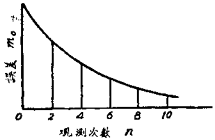

圖 5—1

5-7 用似眞誤差表示均方誤差

用眞誤差表示均方誤差的公式(5.3)在實際工作中不能應用，因爲眞誤差僅在測量的眞值爲已知時才能確定，一般情況下，測量的眞值是不知道的。現在我們導出用似眞誤差表示的均方誤差的實用公式。似眞誤差 v 是各觀測值 l 和觀測量的最或然值(即算術平均值)l_0 的差數。

假定某一東西的眞值爲 L，同精度觀測 n 次所得結果是 l_1，l_2，……l_n，它們的最或然值是 l_0。用 $\triangle_1$，$\triangle_2$，……$\triangle_n$ 代表各次觀測的眞誤差，v_1，v_2……v_n 代表它們的似眞誤差。

$$v_1=l_1-l_0,$$

$$v_2=l_2-l_0,$$

……………

$$v_n=l_n-l_0。$$

根據眞誤差的定義，得

$$\triangle_1=l_1-L=l_1-l_0+(l_0-L)=v_1+(l_0-L),$$

$$\triangle_2=l_2-L=l_2-l_0+(l_0-L)=v_2+(l_0-L),$$

………………………………………………………

$$\triangle_n=l_n-L=l_n-l_0+(l_0-L)=v_n+(l_0-L)。$$

將上列各式平方並相加得，

$$[\triangle^2]=[v^2]+2(l_0-L)[v]+n(l_0-L)^2。$$

因爲，
$$[v]=l_1-l_0+l_2-l_0+\cdots\cdots+l_n-l_0$$

$$=[l]-n\cdot l_0=[l]-[l]=0, \quad\cdots\cdots(5.5)$$

所以
$$[\triangle^2]=[v^2]+n(l_0-L)^2。$$

那末，
$$m^2=\frac{[\triangle^2]}{n}=\frac{[v^2]}{n}+(l_0-L)^2。$$

從 5—6 節中，$m_0^2=\frac{\triangle_{01}^2+\triangle_{02}^2+\cdots\cdots+\triangle_{0n}^2}{n'}$，可以看出 m_0^2 接近於式中任何一個算術平均數的眞誤差的平方，以 $\triangle_0^2$ 表示。這樣，將 $m_0^2=\triangle_0^2=(l_0-L)^2$ 代入前面的式子，得

$$m^2=\frac{[v^2]}{n}+m_0^2=\frac{[v^2]}{n}+\frac{m^2}{n},$$

$$(n-1)m^2=[v^2],$$

所以一次觀測的均方誤差

$$m=\pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}。\cdots\cdots(5.6)$$

算術平均值的均方誤差

$$m_0=\frac{m}{\sqrt{n}}=\pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}}。\cdots\cdots(5.7)$$

例題：用鋼尺丈量某直綫共四次，所得結果見下表，試求一次觀測值的和算術平均值的均方誤差。

次	觀測值 l	似眞誤差 v	v^2
1	573.20 m	+0.10	0.0100
2	573.08	−0.02	0.0004
3	572.98	−0.12	0.0144
4	573.14	+0.04	0.0016
	$l_0=573.10$	$[v]=0.00$	$[v^2]=0.0264$

按（5.6）式一次觀測的均方誤差，

$$m=\pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{0.0264}{3}}=\pm0.094\text{ m},$$

按（5.7）式算術平均值的均方誤差，

$$m_0=\pm\frac{m}{\sqrt{n}}=\pm\frac{0.094}{\sqrt{4}}=\pm0.047\text{ m},$$

所得結果爲，573.10±0.047 m，就是直綫長度的最或然值是 573.10 m，包含有均方誤差 ±0.047 m。

5-8　直接观測値函数的均方誤差

以前巳討論過同精度直接觀測數量的均方誤差的計算方法。現在來研究間接觀測數量的均方誤差計算方法。這種間接觀測數量是通過直接觀測數量的函數關系求得的。由於直接觀測量有誤差，間接觀測量也含有誤差。

1．直接觀測值的和或差的均方誤差，

$$z=\pm x\pm y \text{。} \qquad (5.8)$$

設 x，y 是兩個直接而獨立的觀測值，z 是它們的和或差的函數關系。$\triangle x$，$\triangle y$，$\triangle z$ 是 x，y，z 的眞誤差，則

$$z+\triangle z=\pm(x+\triangle x)\pm(y+\triangle y) \text{。} \qquad (a)$$

因爲　$z=\pm x\pm y$，

所以　$\triangle z=\pm\triangle x\pm\triangle y$。　(b)

假如 x 和 y 都是 n 次觀測的最後結果，就可寫出 n 個相當 (b) 式的式子。將各式平方就得到 n 個如下的等式：

$$\triangle z_i^2=\triangle x_i^2+\triangle y_i^2\pm2\triangle x_i\triangle y_i \text{，}$$

式中 i 代表 1，2……n 中的某一個。把 n 個等式左右兩側各相加並各以 n 除，得

$$\frac{[\triangle z^2]}{n}=\frac{[\triangle x^2]}{n}+\frac{[\triangle y^2]}{n}\pm2\frac{[\triangle x\cdot\triangle y]}{n} \text{。}$$

根據 (5.3) 式和偶然誤差特性得，

$$\frac{[\triangle z^2]}{n}=m_z^2,\quad \frac{[\triangle x^2]}{n}=m_x^2,\quad \frac{[\triangle y^2]}{n}=m_y^2,\quad \frac{[\triangle x\cdot\triangle y]}{n}\approx0 \text{，}$$

所以　$m_z^2=m_x^2+m_y^2$。　(5.9)

同理不難証明，當函數 $z=\pm x_1\pm x_2\pm x_3\cdots\cdots\pm x_n$ 時，其均方誤差的關系是

$$m_z^2=m_{x1}^2+m_{x2}^2+\cdots\cdots+m_{xn}^2 \text{，} \qquad (5.10)$$

或

$$m_z=\pm\sqrt{m_{x1}^2+m_{x2}^2+\cdots\cdots+m_{xn}^2} \text{。} \qquad (5.11)$$

當　$m_{x1}=m_{x2}=\cdots\cdots=m_{xn}=m$ 時，

$$m_z=\pm m\sqrt{n} \qquad (5.12)$$

例題 1．一直綫分兩段量出得，

$s_1=125.02\,m\pm0.03\,m$，

$s_2=146.43\,m\pm0.04\,m$，

求直線的全長和全長的誤差。

$$\text{全長}\qquad s=146.43+125.02=271.45\,\text{m}，$$

$$m_s=\pm\sqrt{(0.03)^2+(0.04)^2}=\pm0.05\,\text{m},$$

結果， $s=271.45\pm0.05\,\text{m}$。

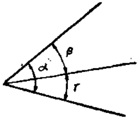

圖 5—2

例題 2. 觀測兩個角得，

$$\alpha=60°23'\pm02'，$$

$$\beta=34°04'\pm01'，$$

求兩角之差 γ 和 γ 的誤差。

$$\gamma=60°23'-34°04'=26°19'，$$

$$m\gamma=\pm\sqrt{2^2+1^2}=\pm2.'2，$$

結果， $\gamma=26°19'\pm2.'2$。

例題 3. 在九個角的多邊形中，假定觀測一個角的均方誤差 $m_\beta=\pm0.'5$，求九個角的總和的均方誤差 m_Σ 。

$$m_\Sigma=m_\beta\sqrt{n}=\pm0.'5\times\sqrt{9}=\pm1.'5。$$

例題 4. 一直綫分成 n 段量出，每段長等於鋼尺長 l，總長度爲 s。

$$s=l_1+l_2+\cdots\cdots+l_n。$$

假設每量一段 l 所發生的均方誤差爲 m，則總長 s 的均方誤差，

$$m_s=\pm m\sqrt{n}，\qquad \text{因}\ n=\frac{s}{l}，$$

$$m_s=\pm\frac{m}{\sqrt{l}}\sqrt{s}，$$

式中 $\frac{m}{\sqrt{l}}$ 對於某一指定的鋼尺，在一定條件下是一個定值。由此可知量距離的均方誤差與距離 s 的平方根成正比。

2. 直接觀測值乘以固定常數後的均方誤差。

$$z=k\cdot x \quad\cdots\cdots(5.13)$$

設 x 是直接觀測值，k 是一固定常數，其真誤差關係顯然是，

$$\triangle z=k\cdot\triangle x。$$

如 x 是 n 次觀測的最後結果，就能寫出 n 個上面的式子，把每式平方就得 n 個如下的等式：

$$\triangle z_i^2 = k^2 \cdot \triangle x_i^2,$$

式中 i 是 1，2，…n。將 n 個等式左右兩側各相加並以 n 除得，

$$\frac{[\triangle z^2]}{n} = k^2 \cdot \frac{[\triangle x^2]}{n},$$

$$m_z^2 = k^2 \cdot m_x^2, \quad \cdots\cdots (5.14)$$

或

$$m_z = k \cdot m_x。 \quad \cdots\cdots (5.15)$$

例題 1. 量出一個圓的直徑 $d = 44.92 \pm 0.04$ m，求圓周長 P 和它的誤差。

$$P = \pi \cdot d = \pi \times 44.92 = 141.12 \text{ m},$$

$$m_P = \pi \cdot (0.04) = \pm 0.12 \text{ m}。$$

結果是，　$P = 141.12 \text{ m} \pm 0.12 \text{ m}$。

例題 2. 在比例尺 1：10000 的平面圖上量得一段長度 $d = 9.25 \text{ cm} \pm 0.01 \text{ cm}$，試折合成實地長度並求它的誤差。

$$D = (9.25 \text{ cm} \pm 0.01 \text{ cm}) \times 10000 = 925 \text{ m} \pm 1 \text{ m}。$$

3. 直線函數的均方誤差

$$z = k_1 \cdot x_1 \pm k_2 x_2 \pm \cdots \pm k_n x_n。 \quad \cdots\cdots (5.16)$$

式中 k_1，k_2…都是常數，x_1，x_2…都是獨立的直接觀測值，它們的均方誤差是 m_1，m_2，…。

命

$$z_1 = k_1 x_1, \quad z_2 = k_2 x_2 \cdots。 \quad (a)$$

$$m_{z1} = k_1 m_1, \quad m_{z2} = k_2 m_2, \cdots。 \quad (b)$$

把 (a) 式代入 (5.16) 式，

$$z = z_1 \pm z_2 \pm \cdots \pm z_n, \quad (c)$$

$$m_z^2 = m_{z1}^2 + m_{z2}^2 + \cdots + m_{zn}^2。 \quad (d)$$

把 (b) 式代入 (d) 式，

$$m_z^2 = (k_1 m_1)^2 + (k_2 m_2)^2 + \cdots + (k_n m_n)^2, \quad \cdots\cdots (5.17)$$

或

$$m_z = \pm\sqrt{(k_1 m_1)^2 + (k_2 m_2)^2 + \cdots + (k_n \cdot m_n)^2}。 \quad \cdots\cdots (5.18)$$

當各 k 相等，各 m 相等時，

$$m_z = \pm k \cdot m\sqrt{n}。 \quad \cdots\cdots (5.19)$$

例題 1. 算術平均值的均方誤差。

$$l_0=\frac{1}{n}(l_1+l_2+\cdots+l_n)=\frac{1}{n}l_1+\frac{1}{n}l_2+\cdots+\frac{1}{n}l_n。$$

由於是同精度的觀測，各 l 的均方誤差都以 m 表示，此處 k 都是 $\frac{1}{n}$，由(5.19)式得，

$$m_0=\pm\frac{1}{n}\cdot m\sqrt{n}=\pm\frac{m}{\sqrt{n}}。$$

例題 2. 在平面圖上用尺子量出兩點間的直綫長度是根據該兩點在尺上的讀數之差求出的。設讀數誤差為 ±0.1 mm，平面圖比例尺為 1：10000，求實地上該長度的誤差。

$$m_D=10000\sqrt{m^2+m^2}=10.000\times(0.1)\sqrt{2}=\sqrt{2}\text{ 公尺。}$$

5-9 觀測結果的权，权平均値

以上所討論的誤差理論都屬於同精度觀測的範圍。在測量工作中常常要從幾個精度不同的觀測結果中求得最或然值和它的均方誤差。

幾個觀測結果的精度不相同，可能是由於不同精度的觀測而產生，也可能這些觀測結果是由同精度觀測但觀測次數不同而得到的。

幾個不同精度觀測結果的相對可靠程度，相對價值，用不同的權來表示，權愈大，該觀測結果就愈可靠。

在同精度觀測的情況下，觀測的次數愈多，其最後結果愈可靠，權就愈大。例如同精度丈量同一段距離，量兩次所得結果 l_1 的權和量一次所得結果 l_2 的權之比是 2：1，也可以說是 4：2，只要相互比例是 2：1。

不同精度觀測的結果可以看成是同精度重復觀測所得的結果，不過重復的次數是等於權的數值。例如對於某一個東西有三個不同精度的觀測結果如下：

2.34　　其權為 1，

2.35　　其權為 2，

2.32　　其權為 3。

它們可以看成是下面六個同精度觀測的結果，

2.34；　2.35，2.35；　2.32，2.32，2.32。

它們的最或然值 $l_{权}$ 就是它們的算術平均值。

$$l_{权}=\frac{2.34+2.35+2.35+2.32+2.32+2.32}{6}$$

$$=\frac{1\times2.34+2\times2.35+3\times2.32}{6}=2.33。$$

一般式子是，

$$l_{权}=\frac{p_1 l_1+p_2 l+\cdots+p_n l_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=\frac{[p\,l]}{[p]}\text{。}\cdots\cdots(5.20)$$

式中 l 是不同精度的觀測值，p 是觀測的權。最或然值 $l_{权}$ 稱爲權平均值。假如 $p_1=p_2=\cdots=p_n$，就可以得到簡單算術平均值的公式。

例題. 某一角 β 具有下列三個觀測結果：

$\beta_1=32°41'20''$ 其權 $p_1=2$，

$\beta_2=32°41'30''$ 其權 $p_2=4$，

$\beta_3=32°41'40''$ 其權 $p_3=10$，

求 β 角的權平均值。

$$\beta_{权}=32°41'+\frac{20''\times2+30''\times4+40''\times10}{2+4+10}=32°41'35''\text{。}$$

如將權 2，4，10 代以比例數字 1，2，5 可得到相同的結果，

$$\beta_{权}=32°41'+\frac{20''\times1+30''\times2+40''\times5}{1+2+5}=32°41'35''\text{。}$$

5-10 權平均值的均方誤差

前面已經假定，不同精度觀測結果的權可以認爲等於同精度觀測重復的次數，那末由公式 (5.4) 可以表示任一不同精度觀測結果的均方誤差 m_i，

$$m_i=m\sqrt{\frac{1}{n_i}}=m\sqrt{\frac{1}{p_i}}\text{。}\cdots\cdots(5.21)$$

上式說明，任一觀測值的均方誤差和它的權的平方根成反比。觀測值的權爲 p_i 時，其均方誤差爲 m_i；觀測值的權爲 1 時，其均方誤差爲 m。所以這里 m 稱爲單位權觀測值的均方誤差。

由上面的概念可以導出下面三個結論：

(1) $$p_i=\frac{m^2}{m_i^2}=\frac{k}{m_i^2}\text{。}\cdots\cdots(5.22)$$

這個式子說明，觀測值的權 p_i 可由觀測值的均方誤差按比例算出。

(2) $$m^2=m_i^2 p_i=m_1^2 p_1=m_2^2 p_2=\cdots\text{。}\cdots\cdots(5.23)$$

這式說明，如果知道單位權的均方誤差 m 和觀測值的權 p_i，就可以計算觀測值的均方誤差。

(3) 權平均值 $l_{权}$ 的權，可以認爲等於同精度觀測重復了 [p] 次，所以

$$m_{权}=\frac{m}{\sqrt{[p]}}\text{。}\cdots\cdots(5.24)$$

所以想求權平均值的均方誤差 $m_{权}$，應當先求出單位權的均方誤差 m。用似眞誤差表示的單位權均方誤差 m 可按 5～7 節的方法來推導。

假定某一東西的眞值爲 L。不同精度的觀測值爲 l_i，其權爲 p_i。權平均值爲 $l_{权}$，$\triangle_i$ 及 v_i 爲相應的眞誤差及似眞誤差。

$$v_i=l_i-l_{权}，（i 自 1 到 n 共 n 個式子），$$

$$\triangle_i=l_i-L=l_i-l_{权}+(l_{权}-L)=v_i+(l_{权}-L)。$$

將上式平方，

$$\triangle_i^2=v_i^2+(l_{权}-L)^2+2v_i(l_{权}-L)。$$

乘以 p_i 並相加得，

$$[p\triangle^2]=[pv^2]+[p](l_{权}-L)^2+2(l_{权}-L)[pv]，$$

因爲 $$[pv]=p_1(l_1-l_{权})+p_2(l_2-l_{权})\cdots+p_n(l_n-l_{权})，$$

$$=[pl]-[p]l_{权}=[pl]-[pl]=0，\quad\cdots\cdots\cdots(5.25)$$

那末， $$[p\triangle^2]=[pv^2]+[p](l_{权}-L)^2。$$

如近畧地以觀測值的均方誤差 m_i 代替眞誤差 $\triangle_i$，那末 $[p\triangle^2]=[pm^2]=p_1m_1^2+p_2m_2^2+\cdots+p_nm_n^2=n\cdot m^2$（見 5.23 式）。又 $(l_{权}-L)^2$ 爲權平均值的眞誤差平方，以其均方誤差 $m^2_{权}$ 代替，$[p]m^2_{权}=m^2$，

所以 $$n\cdot m^2=[pv^2]+m^2，$$

$$m^2=\frac{[pv^2]}{n-1}，$$

或 $$m=\pm\sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}，\quad\cdots\cdots\cdots(5.26)$$

而 $$m_{权}=\frac{m}{\sqrt{[p]}}=\pm\sqrt{\frac{[pv^2]}{[p](n-1)}}。\quad\cdots\cdots\cdots(5.27)$$

例題：同一個角直接觀測得三個結果：

(1) $75°43'54''\pm6''$，

(2) $75°44'04''\pm5''$，

(3) $75°43'56''\pm4''$。

求角度觀測結果及其均方誤差。

令第一觀測值的權等於 1（$p_1=1$），則

$$p_2=\frac{m_1^2}{m_2^2}=\frac{6^2}{5^2}=\frac{36}{25}=1.4，\qquad p_3=\frac{6^2}{4^2}=2.2。$$

	l	p	v	pv	pv^2
1	75° 43′ 54″	1	−4	−4	16
2	75° 44′ 04″	1.4	+6	+8.4	50.4
3	75° 43′ 56″	2.2	−2	−4.4	8.8
	$l_{权}$=75° 43′ 58″	[p]=4.6		[pv]=0	[pv^2]=75.2

單位權觀測值的均方誤差：

$$m=\pm\sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}=\sqrt{\frac{75.2}{3-1}}=\pm 6''。$$

權平均值的均方誤差，

$$m_{权}=\frac{m}{\sqrt{[p]}}=\frac{6}{\sqrt{4.6}}=\pm 3''。$$

5-11 容許誤差

以上討論到各種情况下觀測結果均方誤差的計算方法。實際觀測的眞誤差可能大於或小於計算出的均方誤差。因此在實際工作中（例如在擬定測量規範時），預先確定容許誤差的數值是有實際意義的。如果測量結果的誤差大於容許誤差，測量結果就不能應用。根據數學或然率理論及實際經驗証明：等於均方誤差m的測量誤差，出現的機會是 $\frac{1}{3}$；等於兩倍均方誤差的誤差(即 2m)，出現的機會是$\frac{1}{22}$；等於3m的誤差，出現機會是$\frac{1}{370}$。由此可見，大於2m或3m 的誤差出現的機會很小，目前常採用 2m 或 3m 作爲容許誤差。在測量規範中規定的容許誤差是根據該項工作的精度要求，按照誤差理論及實際經驗規定的。

假定用測量儀器量一個角的均方誤差爲 ±0.′5。如果採用 3m 作爲容許誤差，那末，量一個角的容許誤差爲 ±1.′5。

當用這個儀器量一個多邊形的所有內角，那末n個內角總和的容許誤差（參考公式 5.12）等於 $\pm 1.'5\sqrt{n}$。

假定 n=5，五邊形內角總和應等於 (n−2) 180°=(5−2) 180°=540°。假如實測內角的總和等於 540° 03′。那末，它們的差數就是角度閉合差

$$f=540°03'-540°=3'。$$

這個角度閉合差是否在容許範圍內？根據公式 $\pm 1.'5\sqrt{n}=\pm 1.'5\sqrt{5}=\pm 3.'4$。所以實際誤差在容許範圍內。

5-12 相對誤差

對於某些東西進行同精度的觀測時，例如丈量距離，誤差的大小是和觀測的東西本身的大小有關系的。在這種情況下，如只根據誤差的大小來評定結果的精度，可能得出錯誤的概念。例如丈量兩段距離得 200 m±0.1 m 和 1000 m±0.2 m。從它們的均方誤差 0.1 m 和 0.2 m 不能說出那一段距離量得准確些。爲了比較這種觀測結果的精度，我們就採用相對誤差。相對均方誤差是均方誤差的絕對值與觀測東西本身大小之比，並化到分子等於 1。

例如算術平均值的相對均方誤差是：

$$\frac{|m_0|}{l_0}=\frac{1}{\frac{l_0}{|m_0|}}=\frac{1}{N_0},$$

式中 N_0 代表 $\frac{l_0}{|m_0|}$，l_0 是算術平均值，其均方誤差是 m_0。

前面例子中的相對均方誤差是 $\frac{1}{2000}$ 和 $\frac{1}{5000}$，這說明第二段距離的均方誤差雖然比第一段距離的均方誤差大些，但相對均方誤差反而小些，所以量得較准確些。

請注意，當誤差的大小與觀測東西的大小無關時，就不應採用相對誤差來衡量精度，這時就直接用均方誤差或其他衡量精度的數值。例如衡量測角的精度就用均方誤差。