

Singularitätentheorie

Vorlesung 8

Wir möchten typische Methoden beschreiben, mit denen man die Invariantenringe zu den Operationen der endlichen Untergruppen der speziellen linearen Gruppe berechnen kann. Berechnen heißt, invariante Polynome zu finden, davon ein endliches Algebraerzeugendensystem auszuwählen und Relationen zwischen diesen Erzeugern zu finden. Eine typische Besonderheit der speziellen Quotientensingularitäten in der Dimension zwei ist, dass sie sich mit einer einzigen Gleichung in drei Variablen beschreiben lassen. Diese Gleichungen wollen wir im Folgenden bestimmen.

Graduierungen

DEFINITION 8.1. Es sei R ein kommutativer Ring und D eine kommutative Gruppe. Eine R -Algebra A heißt D -graduirt, wenn es eine direkte Summenzerlegung

$$A = \bigoplus_{d \in D} A_d$$

mit R -Untermoduln A_d gibt derart, dass $R \subseteq A_0$ ist und für die Multiplikation auf A die Beziehung

$$A_d \cdot A_e \subseteq A_{d+e}$$

gilt.

LEMMA 8.2. *Es sei K ein Körper, D eine endliche kommutative Gruppe und A eine D -graduierte kommutative K -Algebra. Der Körper enthalte hinreichend viele Einheitswurzeln, so dass die Charaktergruppe $G = D^\vee$ von D isomorph zu D sei. Dann ist A_0 der Invariantenring unter der natürlichen Operation der Charaktergruppe G auf A .*

Beweis. Für ein Element $f \in A_0$ und einen beliebigen Charakter χ ist offenbar

$$\chi f = \varphi_\chi(f) = \chi(0)f = f,$$

so dass $A_0 \subseteq A^G$ ist. Da die Operation der Charaktergruppe homogen ist, sind die homogenen Komponenten eines invarianten Elements $f \in A^G$ ebenfalls invariant. Sei $f \in A_d \cap A^G$ und $d \neq 0$. Aufgrund der Voraussetzung über die Einheitswurzeln gibt es einen Charakter

$$\chi: D \longrightarrow K^\times$$

mit $\chi(d) \neq 1$. Dann ist

$$\chi f = \varphi_\chi(f) = \chi(d)f \neq f,$$

also sind solche Elemente nicht invariant. \square

BEISPIEL 8.3. Es sei K ein Körper, der eine primitive n -te Einheitswurzel ξ enthalte. Wir betrachten die Untergruppe

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \mid \zeta^n = 1 \right\} \subseteq \mathrm{GL}_2(K)$$

und die zugehörige Operation auf K^2 bzw. auf $K[U, V]$. Es handelt sich um eine zyklische Gruppe der Ordnung n , die von

$$g = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Die Operation von g auf $K[U, V]$ ist durch $U \mapsto \xi U$ und $V \mapsto \xi^{-1}V$ gegeben. Offenbar sind

$$X = U^n, Y = V^n, Z = UV$$

invariante Polynome unter dieser Gruppenoperation, die in der Beziehung

$$XY = Z^n$$

stehen. Dass diese drei Invarianten den Invariantenring erzeugen, sieht man am besten, wenn man die Situation graduiert realisiert. Dazu sei der Polynomring $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -graduiert, wobei U den Grad $(1, 0)$ und V den Grad $(0, 1)$ besitze. Wir betrachten den Gruppenhomomorphismus

$$\delta: \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}/(n) =: D, (a, b) \longmapsto a - b,$$

und die zugehörige D -Graduierung des Polynomringes. Wir identifizieren die Charaktergruppe D^\vee mit der obigen Gruppe G , indem wir

$$\chi: D \longrightarrow K^\times$$

mit $\begin{pmatrix} \chi(1) & 0 \\ 0 & \chi(-1) \end{pmatrix}$ identifizieren. Bei dieser Identifizierung entspricht die obige explizite Operation von G auf $K[U, V]$ der natürlichen Operation der Charaktergruppe gemäß Lemma 12.15 (Körper- und Galoistheorie (Osna-brück 2018-2019)). Nach Lemma 8.2 ist der Invariantenring unter der G -Operation gleich der neutralen Stufe unter der D -Graduierung. Der Kern von δ wird durch $(n, 0), (0, n), (1, 1)$ erzeugt. Die zugehörigen Stufen bilden somit den Invariantenring. Der Invariantenring ist also $K[U^n, V^n, UV]$.

Die Ringe

$$K[U^n, V^n, UV] \cong K[X, Y, Z] (XY - Z^n)$$

nennt man A_{n-1} -Singularitäten (man beachte die Indizierung)!

Der Invariantenring der binären Diedergruppe

Aufbauend auf die Berechnung des Invariantenringes zur zyklischen Gruppe können wir den Invariantenring zur den binären Diedergruppen BD_m bestimmen.

LEMMA 8.4. *Es sei $R \times G \rightarrow R$ eine Operation einer Gruppe G auf einem kommutativen Ring durch Ringautomorphismen. Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) $R^G \subseteq R^H$.
 (2) Sind H_1 und H_2 Untergruppen in G mit $G = H_1 \cdot H_2$, so ist

$$R^{H_1} \cap R^{H_2} = R^G.$$

- (3) Ist H ein Normalteiler in G , so operiert die Restklassengruppe G/H auf R^H durch

$$f[\sigma] := f\sigma.$$

Dabei ist

$$R^G = (R^H)^{G/H}.$$

Beweis. (1) ist klar. (2). Die Voraussetzung bedeutet, dass man $\sigma = \prod_{i=1}^n \sigma_i$ mit gewissen $\sigma_i \in H_1$ oder $\sigma_i \in H_2$ schreiben kann.

Die Inklusion \supseteq ist nach (1) klar. Die Inklusion \subseteq ist wegen

$$f\sigma = f \prod_{i=1}^n \sigma_i = f\sigma_1 \prod_{i=2}^n \sigma_i = f \prod_{i=2}^n \sigma_i = f$$

klar. (3). Die Operation ist zunächst wohldefiniert, d.h. unabhängig vom Repräsentanten. Seien dazu $\sigma, \sigma' \in G$ gegeben mit $\sigma'\sigma^{-1} \in H$. Dann ist

$$f\sigma' = f\sigma'\sigma^{-1}\sigma = f\sigma.$$

Wegen der Normalteilereigenschaft gibt es für $\sigma \in G$ und $\tau \in H$ ein $\tau' \in H$ mit $\sigma\tau = \tau'\sigma$. Für $f \in R^H$ ist

$$(f\sigma)\tau = f\tau'\sigma = f\sigma$$

und somit gehört $f\sigma$ ebenfalls zu R^H . Wir haben also eine Abbildung

$$R^H \times G \longrightarrow R^H.$$

Diese Abbildung ist in der Tat eine Gruppenoperation. Das neutrale Element wirkt identisch und die Assoziativität ergibt sich aus

$$f([\sigma][\tau]) = f[\sigma\tau] = f(\sigma\tau) = (f\sigma)\tau = (f[\sigma])\tau = (f[\sigma])[\tau].$$

Es liegt also eine Operation von G auf R^H vor, und da die Elemente $\sigma \in H$ identisch wirken, induziert dies eine Operation von G/H auf R^H . Bei den Abbildungen $f \mapsto f\sigma$ handelt es sich um Ringautomorphismen, da es sich um Einschränkungen von Ringautomorphismen auf R handelt, wobei sich die Surjektivität aus der Existenz von σ^{-1} ergibt.

Wir kommen zur Gleichheit

$$R^G = (R^H)^{G/H}.$$

Zum Beweis der Inklusion \subseteq sei $f \in R^G$. Dann ist insbesondere $f \in R^H$. Wegen $f[\sigma] = f\sigma = f$ ist f auch G/H -invariant. Zum Beweis der Inklusion

\supseteq sei $f \in (R^H)^{G/H} \subseteq R^H$. Doch dann ist für $\sigma \in G$ wiederum $f\sigma = f[\sigma] = f$. \square

BEISPIEL 8.5. Es sei $m \in \mathbb{N}_+$ und es sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$, der eine vierte primitive Einheitswurzel i und eine $2m$ -te primitive Einheitswurzel ζ enthalte. Wir betrachten die von den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe G (die man auch als BD_m bezeichnet) der $SL_2(K)$ mit ihrer natürlichen Operation auf $R = K[U, V]$. Es sei $H \subseteq G$ die von A erzeugte zyklische Untergruppe der Ordnung $2m$. Da G die Ordnung $4m$ besitzt, ist H ein Normalteiler in G . Daher können wir mit Hilfe von Lemma 8.4 (3) und Beispiel 8.3 den Invariantenring $K[U, V]^G$ ausrechnen. Es ist ja

$$S := K[U, V]^H = K[U^{2m}, V^{2m}, UV] = K[X, Y, Z]/(XY - Z^{2m}).$$

Die Operation des nichttrivialen Elementes aus $G/H \cong \mathbb{Z}/(2)$ auf diesem Invariantenring wird durch die Operation von B auf $K[U, V]$ repräsentiert. Sie ist also durch $U \mapsto iV$ und $V \mapsto iU$ gegeben und induziert

$$X = U^{2m} \mapsto i^{2m}V^{2m} = \rho Y,$$

$$Y = V^{2m} \mapsto i^{2m}U^{2m} = \rho X,$$

$$Z = UV \mapsto i^2UV = -Z,$$

wobei $\rho = \pm 1$ ist, je nachdem, ob m gerade oder ungerade ist.

Durch diese Operation ist S $\mathbb{Z}/(2)$ -graduieret. Bei m gerade sind

$$X + Y, Z^2, Z(X - Y)$$

invariante Polynome (bei m ungerade $X - Y, Z^2, Z(X + Y)$) und Z und $X - Y$ sind semiinvariante Polynome. Mittels $X = \frac{1}{2}(X + Y) + \frac{1}{2}(X - Y)$ und $Y = \frac{1}{2}(X + Y) - \frac{1}{2}(X - Y)$ lässt sich für jedes Monom $X^i Y^j Z^k$ die homogene Zerlegung bezüglich dieser Graduierung angeben (wegen $(X - Y)^2 = (X + Y)^2 - 4Z^{2m}$ kann diese Invariante durch die anderen ausgedrückt werden). Deshalb bilden $L = X + Y, M = Z^2, N = Z(X - Y)$ ein Algebraerzeugendensystem des Invariantenringes

$$R^G = S^{\mathbb{Z}/(2)}.$$

Es besteht die Relation

$$\begin{aligned} N^2 &= Z^2(X - Y)^2 \\ &= M(X^2 + Y^2 - 2XY) \\ &= M(L^2 - 4XY) \\ &= ML^2 - 4MM^m \\ &= ML^2 - 4M^{m+1}. \end{aligned}$$

Da das Polynom

$$N^2 - ML^2 + 4M^{m+1}$$

irreduzibel ist, und der Invariantenring zweidimensional sein muss, ist

$$R^G \cong K[L, M, N]/(N^2 - ML^2 + 4M^{m+1}).$$

Unter schwachen Bedingungen an den Körper K ist dieser Ring isomorph zu

$$K[X, Y, Z]/(X^2 + YZ^2 + Y^{m+1}).$$

Man spricht von den D_{m+2} -Singularitäten (man beachte die Indizierung). Nach Aufgabe 8.16 ist D_3 isomorph zu A_3 , also

$$\mathbb{C}[X, Y, Z]/(X^2 + YZ^2 + Y^2) \cong \mathbb{C}[S, T, U]/(ST + U^4),$$

so dass man diese D -Liste bei D_4 beginnen lässt. In den ursprünglichen Variablen U und V sind

$$U^{2m} + V^{2m}, U^2V^2 \text{ und } UV(U^{2m} - V^{2m})$$

ein Algebraerzeugendensystem aus invarianten Polynomen. In Charakteristik $\neq 2, 3$ kann man die D_4 Gleichung, also $X^2 + YZ^2 + Y^3 = 0$ in $X^2 + Y^3 + Z^3 = 0$ transformieren.

Die Invarianten der binären Tetraedergruppe

BEISPIEL 8.6. Die binäre Diedergruppe BD_2 ist ein Normalteiler in der binären Tetraedergruppe BT . Die Untergruppenbeziehung kann man direkt aus den expliziten Beschreibungen

$$BD_2 = \left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix} \right\rangle = BT$$

(wobei ζ eine primitive achte Einheitswurzel ist) ablesen.

BEISPIEL 8.7. Wir wollen den Invariantenring zur binären Tetraedergruppe $BT \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ berechnen, die auf dem Polynomring $\mathbb{C}[U, V]$ operiert. Wir verwenden den Normalteiler $BD_2 \subseteq BT$. Der Invariantenring $\mathbb{C}[U, V]^{BD_2}$ wird nach Beispiel 8.5 von

$$L = U^4 + V^4, M = U^2V^2 \text{ und } N = UV(U^4 - V^4)$$

erzeugt mit der Relation

$$N^2 - ML^2 + 4M^3 = 0.$$

Auf diesem Invariantenring wirkt die Restklassengruppe $BT/BD_2 \cong \mathbb{Z}/(3)$, wobei das nichttriviale Element (die 1) durch

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix}$$

6

repräsentiert wird. Diese Matrix schickt U auf $\frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta^7 U + \zeta^7 V)$ und V auf $\frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta^5 U + \zeta V)$. Daher ist

$$U^4 \mapsto -\frac{1}{4}(U^4 + 4U^3V + 6U^2V^2 + 4UV^3 + V^4)$$

und

$$V^4 \mapsto -\frac{1}{4}(-U + V)^4 = -\frac{1}{4}(U^4 - 4U^3V + 6U^2V^2 - 4UV^3 + V^4)$$

und damit

$$L = U^4 + V^4 \mapsto -\frac{1}{2}(U^4 + 6U^2V^2 + V^4) = -\frac{1}{2}L - 3M.$$

Ferner wird $M = U^2V^2$ auf

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(\zeta^7 U + \zeta^7 V)^2 (\zeta^5 U + \zeta V)^2 &= \frac{1}{4}(U + V)^2 (-U + V)^2 \\ &= \frac{1}{4}(U^4 - 2U^2V^2 + V^4) \\ &= \frac{1}{4}(L - 2M) \\ &= \frac{1}{4}L - \frac{1}{2}M \end{aligned}$$

geschickt. Das Element $N = UV(U^4 - V^4)$ wird auf

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta^7 U + \zeta^7 V) \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta^5 U + \zeta V) (-2U^3V - 2UV^3) \\ &= (U + V)(-U + V)(-U^3V - UV^3) \\ &= (U + V)(-U + V)(-1)UV(U^2 + V^2) \\ &= UV(U - V)(U + V)(U + iV)(U - iV) = UV(U^4 - V^4) \\ &= N, \end{aligned}$$

also auf sich selbst geschickt. Neben

$$N = UV(U^4 - V^4)$$

sind, wie man direkt nachrechnet, auch

$$P := L^2 + 12M^2 = U^8 + 14U^4V^4 + V^8$$

und

$$Q := L^3 - 36LM^2 = U^{12} - 33U^8V^4 - 33U^4V^8 + V^{12}$$

invariant. Wegen

$$N^4 = (ML^2 - 4M^3)^2 = M^2L^4 - 8M^4L^2 + 16M^6$$

einerseits und

$$\begin{aligned} &(L^3 - 36LM^2)^2 - (L^2 + 12M^2)^3 \\ &= -72L^4M^2 + 1296L^2M^4 - 36L^4M^2 - 432L^2M^4 - 1728M^6 \\ &= -108L^4M^2 + 864L^2M^4 - 1728M^6 \\ &= -108(M^2L^4 - 8M^4L^2 + 16M^6) \end{aligned}$$

andererseits haben wir zwischen diesen Invarianten die Relation

$$-108N^4 = (L^3 - 36LM^2)^2 - (L^2 + 12M^2)^3.$$

Mit $P = L^2 + 12M^2$ und $Q = L^3 - 36LM^2$ liegt also die Relation

$$Q^2 - P^3 + 108N^4 = 0$$

vor.

Wir müssen noch zeigen, dass damit alle Invarianten erfasst sind, dass also der Invariantenring von N, P, Q erzeugt wird. Dazu lassen wir uns davon leiten, dass eine Operation der $\mathbb{Z}/(3)$ vorliegt, die von einer $\mathbb{Z}/(3)$ -Graduierung herrühren muss. Nach Lemma 8.2 ist der Invariantenring gleich dem Ring der neutralen Stufe, der häufig einfacher zu bestimmen ist. Wie oben berechnet, wirkt der Erzeuger der Gruppe durch $L \mapsto -\frac{1}{2}L - 3M$ und $N \mapsto \frac{1}{4}L - \frac{1}{2}M$. Durch Diagonalisierung dieser Matrix erhält man, dass

$$A = \sqrt{3}iL - 6M$$

und

$$B = \sqrt{3}iL + 6M$$

Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ bzw. $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ sind, die dritte Einheitswurzeln sind. Wegen

$$L = \frac{1}{2\sqrt{3}i}(A + B)$$

und

$$M = \frac{1}{12}(B - A)$$

kann man die definierende Gleichung (des Invariantenringes zu BD_2) in den Variablen N, A, B als

$$\begin{aligned} & N^2 - ML^2 + 4M^3 \\ = & N^2 - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{2\sqrt{3}i} \right)^2 (B - A)(A + B)^2 + 4 \left(\frac{1}{12} \right)^3 (B - A)^3 \\ = & N^2 + \frac{1}{144} (B^3 + B^2A - BA^2 - A^3) + \frac{1}{432} (B^3 - 3B^2A + 3BA^2 - A^3) \\ = & N^2 + \frac{1}{108} (B^3 - A^3). \end{aligned}$$

Wir können also davon ausgehen, dass der Ring

$$K[N, A, B] / \left(N^2 + \frac{1}{108}B^3 - \frac{1}{108}A^3 \right)$$

vorliegt, der $\mathbb{Z}/(3)$ -graduier ist, wobei N den Grad 0, B den Grad 1 und A den Grad 2 bekommt. Die definierende Gleichung besitzt den Grad 0. Der Ring der nullten Stufe wird offenbar von N, A^3, B^3, AB erzeugt. Für die oben gefundenen invarianten Polynome gilt

$$\begin{aligned} P &= L^2 + 12M^2 \\ &= -\frac{1}{12}(A + B)^2 + \frac{1}{12}(B - A)^2 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{3}AB$$

und

$$\begin{aligned} Q &= L^3 - 36LM^2 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}i}(A+B) \left(-\frac{1}{12}(A+B)^2 - \frac{1}{4}(B-A)^2 \right) \\ &= \frac{1}{6\sqrt{3}i}(A+B)(-A^2 + AB - B^2) \\ &= \frac{1}{6\sqrt{3}i}(A^3 + B^3). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Relation kann man A^3 (und B^3) als Linearkombination von N, P, Q ausdrücken. Daher sind dies Algebraerzeuger des Invariantenrings und dieser ist zu

$$\mathbb{C}[X, Y, Z]/(X^2 + Y^3 + Z^4)$$

isomorph. Man spricht von der E_6 -Singularität.

Die Invarianten der binären Oktaedergruppe

Wir setzen die Berechnung der Invariantenringe zu den Operationen der endlichen Untergruppen der $SU_2(\mathbb{C})$ fort.

BEISPIEL 8.8. Zur Berechnung des Invariantenringes zur Operation der binären Oktaedergruppe BO auf $\mathbb{C}[U, V]$ benutzen wir die Normalteilerbeziehung $BT \subseteq BO$ (mit der Restklassengruppe $\mathbb{Z}/(2)$), Lemma 8.4 und Beispiel 8.7. Das Element $\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^7 \end{pmatrix} \in BO \setminus BT$, wobei ξ eine achte primitive Einheitswurzel ist, wirkt durch $U \mapsto \xi U$ und $V \mapsto \xi^7 V$. Somit wird in der Darstellung

$$\mathbb{C}[U, V]^{BT} = \mathbb{C}[N, P, Q]/(Q^2 - P^3 + 108N^4)$$

das Polynom $N = UV(U^4 - V^4)$ auf

$$UV(-U^4 + V^4) = -N,$$

P auf P und Q auf $-Q$ geschickt. Auf dem isomorphen Ring

$$\mathbb{C}[X, Y, Z]/(X^2 + Y^3 + Z^4)$$

ist dies einfach die Operation, die Y auf sich und X, Z auf ihr Negatives abbildet. Wir arbeiten mit der $\mathbb{Z}/(2)$ -Graduierung, bei der Y den Grad 0 und X, Z den Grad 1 besitzen. Nach Lemma 8.2 ist der Invariantenring gleich der neutralen Stufe in der Graduierung. Diese Stufe wird neben Y von $R = XZ$ und $S = Z^2$ erzeugt (wegen $X^2 = -Y^3 - (Z^2)^2$ kann man auf X^2 verzichten). Zwischen Y, R, S besteht die Relation

$$R^2 + Y^3S + S^3 = (XZ)^2 + Y^3Z^2 + Z^6 = Z^2(X^2 + Y^3 + Z^4) = 0.$$

Nach Umbenennung der Variablen ist also der Invariantenring zur binären Oktaedergruppe isomorph zu

$$\mathbb{C}[X, Y, Z]/(X^2 + Y^3 + YZ^3) .$$

Diesen Invariantenring bezeichnet man als *E₇-Singularität*.

Die Invarianten der binären Ikosaedergruppe

Der Invariantenring zur binären Ikosaedergruppe verhält sich in vielerlei Hinsicht anders als die bisher besprochenen Invariantenringe. Man braucht andere Methoden, um letztlich zu zeigen, dass der Invariantenring gleich

$$K[X, Y, Z]/(X^2 + Y^3 + Z^5)$$

ist. Man spricht von der *E₈-Singularität*.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 11
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 11