Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Algebraische Zahlentheorie

Arbeitsblatt 6

Aufgaben

AUFGABE 6.1. Finde eine irreduzible Ganzheitsgleichung (über $\mathbb{Z}$) für die Eisensteinzahl $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

AUFGABE 6.2. Sei R ein kommutativer Ring und A eine R-Algebra. Zeige, dass wenn R ein Körper ist, die Begriffe algebraisch und ganz für ein Element $x \in A$ übereinstimmen. Zeige ferner, dass für einen Integritätsbereich, der kein Körper ist, diese beiden Begriffe auseinander fallen.

AUFGABE 6.3.*

Es seien R und S Integritätsbereiche und sei $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung. Es sei $f \in R$ ein Element, das in S eine Einheit ist. Zeige, dass f dann schon in R eine Einheit ist.

AUFGABE 6.4. Sei $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung und sei $f \in R$. Zeige: Wenn f, aufgefasst in S, eine Einheit ist, dann ist f eine Einheit in R.

AUFGABE 6.5. Man gebe ein Beispiel einer ganzen Ringerweiterung $R \subseteq S$, wo es einen Nichtnullteiler $f \in R$ gibt, der ein Nullteiler in S wird.

AUFGABE 6.6.*

Berechne in
$$\mathbb{Z}/(7)[X]/(X^3 + 4X^2 + X + 5)$$
das Produkt
$$(2x^2 + 5x + 3) \cdot (3x^2 + x + 6)$$
(x bezeichne die Restklasse von X).

AUFGABE 6.7. Sei K ein Körper und sei A eine endlichdimensionale K-Algebra. Zeige direkt (ohne Lemma 6.7), dass A ganz über K ist.

Aufgabe 6.8. Es sei $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung zwischen endlichen kommutativen Ringen R und S. Zeige, dass eine ganze Ringerweiterung vorliegt.

Aufgabe 6.9. Es sei R ein kommutativer Ring und

$$S = R[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$$

eine (als Algebra) endlich erzeugte R-Algebra, die ganz über R sei. Zeige, dass S ein endlich erzeugter R-Modul ist.

Aufgabe 6.10. Es sei $R \subseteq S$ eine ganze Erweiterung von Integritätsbereichen und sei $F \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass dann auch die zugehörige Erweiterung $R_F \subseteq S_F$ ganz ist.

Aufgabe 6.11.

(1) Es sei R ein Integritätsbereich. Zeige, dass R ganz-abgeschlossen im Polynomring $R[X]$ ist.
(2) Man gebe ein Beispiel für einen kommutativen Ring R, der im Polynomring nicht ganz-abgeschossen ist.

Aufgabe 6.12. Sei R ein Integritätsbereich. Zeige, dass R genau dann normal ist, wenn er mit seiner Normalisierung übereinstimmt.

Aufgabe 6.13. Sei R ein Integritätsbereich. Sei angenommen, dass die Normalisierung von R gleich dem Quotientenkörper $Q(R)$ ist. Zeige, dass dann R selbst schon ein Körper ist.

Aufgabe 6.14. Es sei R ein normaler Integritätsbereich und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass dann auch die Nenneraufnahme R_S normal ist.

Aufgabe 6.15. Sei K ein Körper und sei $R_i \subseteq K$, $i \in I$, eine Familie von normalen Unterringen. Zeige, dass auch der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} R_i$ normal ist.

Aufgabe 6.16. Es sei R ein Integritätsbereich. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) R ist normal.
(2) Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ ist die Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$ normal.
(3) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ ist die Lokalisierung $R_{\mathfrak{m}}$ normal.

Aufgabe 6.17. Sei R ein normaler Integritätsbereich und $a \in R$. Es sei vorausgesetzt, dass a keine Quadratwurzel in R besitzt. Zeige, dass das Polynom $X^2 - a$ prim in $R[X]$ ist. Tipp: Verwende den Quotientenkörper $Q(R)$. Warnung: Prim muss hier nicht zu irreduzibel äquivalent sein.

Aufgabe 6.18. Sei R ein Integritätsbereich mit Normalisierung R^{norm}. Zeige, dass durch

$$\mathfrak{f} = \{g \in R \mid gR^{\text{norm}} \subseteq R\}$$

ein Ideal in R gegeben ist.

Aufgabe 6.19. Sei k eine fixierte positive ganze Zahl und betrachte den Unterring

$$R = \mathbb{Z}[k\mathrm{i}] = \{a + ck\mathrm{i} \mid a, c \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}[\mathrm{i}].$$

Zeige die Isomorphie $R \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 + k^2)$ und dass $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ ganz über R ist.

In den folgenden Aufgaben wird der Polynomring $K[X, Y]$ in zwei Variablen über einem Körper K verwendet. Diesen kann man definieren als $(K[X])[Y]$. Die Elemente in ihm, also die Polynome in zwei Variablen, haben die Gestalt

$$P = \sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j.$$

Wir interessieren uns für Restklassenringe vom Typ $R = K[X, Y]/(F)$. Die Nullstellenmenge von$F$ besteht aus der Menge derjenigen Punkte (x, y) in der Ebene, für die $F(x, y) = 0$ ist (dieses Nullstellengebilde ist eine geometrische Version des Ringes R).

Aufgabe 6.20. Sei K ein Körper und betrachte den Restklassenring

$$R = K[X, Y]/(X^2 - Y^3)\,.$$

Dies ist ein Integritätsbereich nach Aufgabe 6.17. Zeige, dass die Normalisierung von R gleich dem Polynomring $K[T]$ ist. Skizziere die Nullstellenmenge von $F = X^2 - Y^3$ in der reellen Ebene und finde eine Parametrisierung dieses Gebildes.

Polynomringe kann man entsprechend über jedem Grundring und mit beliebig vielen Variablen definieren.

Aufgabe 6.21. Es sei

$$P = X^2 - 3X + 7$$

und

$$Q = Y^3 - Y^2 + 4Y - 5.$$

Begründe, dass die Ringerweiterung

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[X, Y]/(P, Q)$$

ganz ist und finde eine Ganzheitsgleichung für $x + y$ und für xy (kleine Buchstaben bezeichnen die Restklassen der Variablen).

Aufgabe 6.22. Es sei R ein normaler Integritätsbereich und $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung. Sei $f \in R$. Zeige, dass für das von f erzeugte Hauptideal gilt:

$$R \cap (f)S = (f)R.$$

Aufgabe 6.23. Zeige, dass für natürliche Zahlen $a, b \geq 1$ und $n \geq 2$ die Zahl $a^n - b^n$ nicht ein Teiler von $a^n + b^n$ ist.

Aufgabe 6.24. Seien R, S, T kommutative Ringe und seien $\varphi : R \to S$ und $\psi : S \to T$ Ringhomomorphismen derart, dass S ganz über R und T ganz über S ist. Zeige, dass dann auch T ganz über R ist.

Aufgabe 6.25. Sei K ein Körper und betrachte den Ringhomomorphismus $\varphi\colon\ R = K[X, Y] \to K[T]$, der durch die Einsetzung

$$X \longmapsto (T-1)(T+1) \text{ und } Y \longmapsto T(T-1)(T+1)$$

gegeben ist. Finde ein von 0 verschiedenes Polynom $F \in K[X, Y]$ derart, dass F unter φ auf 0 abgebildet wird. Skizziere die Nullstellenmenge von F in der reellen Ebene.

Aufgabe 6.26. Definiere unter Anlehnung an die Parametrisierung der pythagoreischen Tripel einen Ringhomomorphismus

$$\mathbb{Z}[X, Y, Z]/(X^2 + Y^2 - Z^2) \longrightarrow \mathbb{Z}[U, V]\,.$$

Zeige, dass dieser injektiv, aber nicht surjektiv ist.

Abbildungsverzeichnis