Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 47

Übungsaufgaben

Aufgabe 47.1. Bringe die Restklassengruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit der in Aufgabe 44.15 direkt eingeführten Gruppe in Verbindung.

Aufgabe 47.2.*

Zeige, dass es in der Restklassengruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ Elemente gibt, deren Ordnung gleich n ist.

Aufgabe 47.3. Zeige, dass es keine Untergruppe $F \subseteq (\mathbb{Q}, 0, +)$ derart gibt, dass

$$F \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 47.4. Bestimme die Restklassengruppe zu $\{1, -1\} \subset \mathbb{R}^\times$.

Aufgabe 47.5. Finde in der Permutationsgruppe S_3 einen Normalteiler $N \neq 0, S_3$ und bestimme die zugehörige Restklassengruppe.

Aufgabe 47.6. Sei G eine Gruppe und $g \in G$ ein Element mit dem (nach Lemma 44.12) zugehörigen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi \colon \mathbb{Z} \longrightarrow G, \, n \longmapsto g^n.$$

Beschreibe die kanonische Faktorisierung von φ gemäß Satz 47.7.

Aufgabe 47.7.*

Es sei G eine Gruppe und $g \in G$ ein Element mit endlicher Ordnung. Zeige, dass die Ordnung von g mit dem minimalen $d \in \mathbb{N}_+$ übereinstimmt, zu dem es einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{Z}/(d) \longrightarrow G$$

gibt, in dessen Bild das Element g liegt.

Aufgabe 47.8. Zeige mit Hilfe der Homomorphiesätze, dass zyklische Gruppen mit der gleichen Ordnung isomorph sind.

Aufgabe 47.9. Seien G, H und F Gruppen und seien $\varphi\colon G \to H$ und $\psi\colon G \to F$ Gruppenhomomorphismen mit ψ surjektiv und mit $\operatorname{kern} \psi \subseteq \operatorname{kern} \varphi$. Bestimme den Kern des induzierten Homomorphismus

$$\tilde{\varphi}\colon F \longrightarrow H.$$

Aufgabe 47.10. Zeige, dass für jede reelle Zahl $a \neq 0$ die Restklassengruppen $\mathbb{R}/\mathbb{Z}a$ untereinander isomorph sind.

Für die folgende Aufgabe muss man verwenden, dass jede positive natürliche Zahl eine eindeutige Faktorisierung in Primzahlen besitzt.

Aufgabe 47.11. Sei p eine Primzahl. Definiere einen Gruppenhomomorphismus

$$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +, 0),$$

der $p \mapsto 1$ und alle anderen Primzahlen auf null schickt.

Bestimme auch den Kern dieses Gruppenhomomorphismus.

Aufgabe 47.12. Es seien G_1 und G_2 Gruppen und seien $N_1 \subseteq G_1$ und $N_2 \subseteq G_2$ Normalteiler. Zeige, dass $N_1 \times N_2$ ein Normalteiler in $G_1 \times G_2$ ist und dass eine Isomorphie

$$(G_1 \times G_2/(N_1 \times N_2) \cong (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$$

vorliegt.

Die folgende Aufgabe verwendet den topologischen Begriff der Dichtheit.

Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}$ heißt *dicht*, wenn es zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ und jedem $\epsilon > 0$ Elemente $t \in T$ gibt mit $d(t, x) < \epsilon$.

Aufgabe 47.13. Sei H eine (additive) Untergruppe der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Zeige, dass entweder $H = \mathbb{Z}a$ mit einer eindeutig bestimmten nicht-negativen reellen Zahl a ist, oder aber H dicht in $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 47.14.*

Zeige, dass der Kern eines Ringhomomorphismus

$$\varphi\colon R \longrightarrow S$$

ein Ideal in R ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 47.15. (3 Punkte)

Es seien G und H Gruppen mit der Produktgruppe $G \times H$. Zeige, dass die Gruppe $G \times \{e_H\}$ ein Normalteiler in $G \times H$ ist, und dass die Restklassengruppe $(G \times H)/G \times \{e_H\}$ kanonisch isomorph zu H ist.

Aufgabe 47.16. (4 Punkte)

Bestimme die Gruppenhomomorphismen zwischen zwei zyklischen Gruppen. Welche sind injektiv und welche sind surjektiv?

Aufgabe 47.17. (2 Punkte)

Zeige, dass es eine Gruppe G und einen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi\colon (\mathbb{R}, 0, +) \longrightarrow G$$

mit der Eigenschaft gibt, dass $r \in \mathbb{R}$ genau dann rational ist, wenn $\varphi(r) = 0$ ist.

Aufgabe 47.18. (3 Punkte)

Bestimme sämtliche Gruppen mit vier Elementen.