Prof. Dr. H. Brenner — Osnabrück WS 2022/2023

Maß- und Integrationstheorie

Arbeitsblatt 10

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 10.1. Es sei M ein Messraum mit einer Ausschöpfung $M_n \uparrow M$ und sei

$$f_n\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine wachsende Folge von nichtnegativen messbaren Funktionen mit der Grenzfunktion

$$f\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}.$$

Zeige, dass $S^o(M_n; f_n)$ eine Ausschöpfung von $S^o(M; f)$ ist.

Aufgabe 10.2. Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $f_n = 1 - \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}_+)$. Es sei f die Grenzfunktion. Zeige die Beziehung

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} S(f_n) \,=\, S(f) \setminus \Gamma_f .$$

Aufgabe 10.3.*

Es seien $(M, \mathcal{A}, \mu)$ und $(N, \mathcal{B}, \nu)$ zwei endliche Maßräume und es seien

$$f\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

und

$$g\colon N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

integrierbare Funktionen. Zeige

$$\int_{M \times N} (f+g) d\mu \otimes \nu \,=\, \nu(N) \cdot \int_M f(x) d\mu(x) + \mu(M) \cdot \int_N g(y) d\nu(y).$$

Aufgabe 10.4. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$. Zeige, dass die Folge genau dann konvergiert, wenn

$$\liminf \big((x_n)_{n \in \mathbb{N}}\big) \,=\, \limsup \big((x_n)_{n \in \mathbb{N}}\big).$$

Aufgabe 10.5.*

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge,

$$f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Abbildung und $y_n = f(x_n)$ die Bildfolge. Es sei H die Menge der Häufungspunkte von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und G die Menge der Häufungspunkte von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Zeige $f(H) \subseteq G$.

b) Zeige

$$f\big(\limsup\,\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)\big) \,\le\, \limsup\,\big((y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big).$$

c) Zeige, dass die Abschätzung aus Teil b) echt sein kann.

Aufgabe 10.6. Es sei $f_n : [1,+\infty[\to \mathbb{R}_{\geq 0}$, für $n \in \mathbb{Z}_+$, die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2},\ \text{falls } x \in [n,+\infty[\,, \\ 0,\ \text{anderfalls}\ . \end{cases}$$

Berechnen Sie

$$\lim_{n\to+\infty} f_n \text{ und } \lim_{n\to+\infty} \int_{[1,+\infty]} f_n d\lambda^1.$$

Aufgabe 10.7. Es sei $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}_{\geq 0}$, für $n \in \mathbb{Z}_+$, die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \frac{\exp(-nx)}{x+n}.$$

Berechnen Sie

$$\lim_{n\to+\infty} f_n \text{ und } \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,+\infty]} f_n d\lambda^1.$$

Aufgabe 10.8. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ und sei

$$y_n := \inf\,(x_k,\, k \geq n)\,.$$

a) Zeige, dass die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend ist.

b) Zeige, dass die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\liminf\,\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ punktweise konvergiert.

AUFGABE 10.9. Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum und sei

$$f_n\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine Folge von messbaren Funktionen. Zeige, dass dann auch die Funktionen

$$\liminf \left((f_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ x \longmapsto \liminf \left((f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}\right),$$

und

$$\limsup \left((f_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ x \longmapsto \limsup \left((f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}\right),$$

messbar sind.

AUFGABE 10.10. Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und sei

$$f_n\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

$(n \in \mathbb{N})$ eine Folge von nichtnegativen messbaren numerischen Funktionen. Zeige, dass

$$\int_M \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_M f_n \, d\mu$$

gilt.

AUFGABE 10.11. Berechnen Sie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \sqrt{\sin x}\right)^n \cos x \mathrm{d}x.$$

AUFGABE 10.12. Unter einer *Quader-Treppenfunktion* verstehen wir eine Abbildung

$$t\colon [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \longrightarrow \mathbb{R},$$

für die es Intervallunterteilungen

$$a_1 = c_{10} < c_{11} < \ldots < c_{1n_1} = b_1, \ldots, a_d = c_{d0} < c_{d1} < \ldots < c_{dn_d} = b_d\,,$$

derart gibt, dass

$$t|_{[c_{1j_1}, c_{1\,j_1+1}] \times \cdots \times [c_{dj_d}, c_{d\,j_d+1}]}$$

konstant ist. Das zugehörige Integral nennen wir Treppenintegral.

Es sei

$$f\colon [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass das Supremum der Treppenintegrale zu unteren Treppenfunktionen von f gleich dem Infimum der Treppenintegrale zu oberen Treppenfunktionen von f ist, und somit auch gleich dem Lebesgue-Integral.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 10.13. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer integrierbaren Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

für die das Integral nicht das Supremum über alle Treppenintegrale zu unteren Treppenfunktionen ist.

Aufgabe 10.14. (5 (2+3) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1],\, x \longmapsto x^2.$$

Berechne für $n = 1, 2, \ldots, 5$ das Supremum der Integrale zu den folgenden einfachen Funktionen.

a) Die Funktionen $g \leq f$, die auf den n Teilintervallen $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$ (mit $k = 0, \ldots, n-1$) konstant sind.

b) Die Funktionen $h \leq f$, die nur die Werte $\frac{k}{n}$ annehmen.

Aufgabe 10.15. (4 Punkte)

Bestimme für die Funktionenfolge

$$f_n\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f_n(x) = x^n,$$

die zugehörigen Integrale, den Grenzwert der Integrale, die Grenzfunktion und das Integral der Grenzfunktion.

Aufgabe 10.16. (4 Punkte)

Bestimme die Häufungspunkte der Folge $x_n = \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$. Was ist der Limes inferior, was der Limes superior?

Aufgabe 10.17. (8 Punkte)

Bestimme den Limes inferior und den Limes superior der Funktionenfolge $f_n(x) = \sin(nx)$ auf $[0, \pi]$.

Aufgabe 10.18. (4 Punkte)

Zeige, dass der Satz von der majorisierten Konvergenz ohne die Voraussetzung über die Existenz einer Majorante $h \geq |f_n|$ nicht gilt.

Aufgabe 10.19. (3 Punkte)

Es sei $]a, b[$ ein (eventuell unbeschränktes) Intervall und es sei

$$f\colon\ ]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$$

eine nichtnegative stetige Funktion. Zeige, dass das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)dt$ gleich dem Lebesgue-Integral $\int_{]a,b[} f\, d\lambda$ (also gleich dem Flächeninhalt des Subgraphen) ist.

Abbildungsverzeichnis