Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Analysis II

Arbeitsblatt 32

Übungsaufgaben

Aufgabe 32.1. Sei $x \in \mathbb{R}$ und betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t) = t^x e^{-t}.$$

Bestimme die Extremwerte dieser Funktion.

Aufgabe 32.2. Zeige, dass für die Fakultätsfunktion für $k \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\operatorname{Fak}\left(\frac{2k-1}{2}\right) = \frac{\prod_{i=1}^{k}(2i-1)}{2^k} \cdot \sqrt{\pi}$$

gilt.

Aufgabe 32.3.*

a) Zeige, dass für $x \geq 1$ die Abschätzung

$$\int_0^1 t^x e^{-t}\, dt \,\leq\, 1$$

gilt.

b) Zeige, dass die Funktion $H(x)$ mit

$$H(x) = \int_1^\infty t^x e^{-t}\, dt$$

für $x \geq 1$ monoton wachsend ist.

c) Zeige, dass $10! \geq e^{11} + 1$ gilt.

d) Zeige, dass für die Fakultätsfunktion für $x \geq 10$ die Abschätzung

$$\operatorname{Fak}(x) \geq e^x$$

gilt.

Aufgabe 32.4. Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass die Einschränkung des Skalarproduktes auf U ebenfalls ein Skalarprodukt ist.

Aufgabe 32.5. Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$. Beweise den *Satz des Pythagoras*: Für zwei Vektoren $v,w \in V$, die senkrecht aufeinander stehen, gilt die Beziehung

$$|| v+w ||^2 = || v ||^2 + || w ||^2 \ .$$

Aufgabe 32.6. Sei V ein Vektorraum über K mit einem Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$ und der zugehörigen Norm $|| - ||$. Zeige, dass die Beziehung

$$\langle v,w \rangle = \frac{1}{2} \left(|| v+w ||^2 - || v ||^2 - || w ||^2 \right)$$

gilt.

Aufgabe 32.7. Es seien $(V_1, \langle -,- \rangle_1)$ und $(V_2, \langle -,- \rangle_2)$ zwei euklidische Vektorräume. Zeige, dass durch

$$\langle (v_1,v_2),(w_1,w_2) \rangle := \langle v_1,w_1 \rangle_1 + \langle v_2,w_2 \rangle_2$$

ein Skalarprodukt auf dem Produktraum $V_1 \times V_2$ definiert wird.

Aufgabe 32.8. Es sei V ein komplexer Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$. Zeige, dass der Realteil dieses Skalarproduktes ein Skalarprodukt auf dem zugrunde liegenden reellen Vektorraum ist.

Aufgabe 32.9. Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$. Zeige, dass in der Abschätzung

$$| \langle v,w \rangle | \leq || v || \cdot || w ||$$

von Cauchy-Schwarz genau dann die Gleichheit gilt, wenn v und w linear abhängig sind.

Aufgabe 32.10. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$. Zeige, dass der zugehörige Abstand die folgenden Eigenschaften besitzt (dabei sind $u,v,w \in V$).

(1) Es ist $d(v,w) \geq 0$.
(2) Es ist $d(v,w) = 0$ genau dann, wenn $v = w$.
(3) Es ist $d(v,w) = d(w,v)$.
(4) Es ist
$$d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w) \, .$$

Ein Skalarprodukt ermöglicht es, von Orthonormalbasen zu sprechen.

Sei V ein euklidischer Vektorraum. Eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V heißt *Orthonormalbasis*, wenn

$$\langle v_i, v_i \rangle = 1 \text{ für alle } i \text{ und } \langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ für } i \neq j$$

gilt.

Generell heißen zwei Vektoren $v, w \in V$ orthogonal, wenn $\langle v, w \rangle = 0$ ist.

Aufgabe 32.11. Der $\mathbb{R}^3$ sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ der Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto 3x + y + 7z,$$

versehen mit dem eingeschränkten Skalarprodukt. Man bestimme eine Orthonormalbasis für U.

Aufgabe 32.12. Sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension n. Zeige, dass eine Vektorfamilie $u_1, \ldots, u_n \in V$ genau dann eine Orthonormalbasis von V ist, wenn die zugehörige lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow V,\ e_i \longmapsto u_i,$$

eine Isometrie zwischen $\mathbb{R}^n$ und V ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 32.13. (2 Punkte)

Zeige, dass für die Fakultätsfunktion die Beziehung

$$\operatorname{Fak}(x) = \int_0^1 (-\ln t)^x \, dt$$

gilt.

Aufgabe 32.14. Die Stadt $S = (0, 0)$ soll mit den beiden Städten $T = (a, b)$ und $U = (a, -b)$ mit $a \geq 0, b > 0$ durch Schienen verbunden werden. Dabei sollen die Schienen zunächst entlang der x-Achse verlaufen und sich dann in die beiden Richtungen verzweigen. Bestimme den Verzweigungspunkt, wenn möglichst wenig Schienen verlegt werden sollen.

Tipp zur Probe: Stimmt Ihr Ergebnis auch bei $a = 0$?

Aufgabe 32.15. (3 Punkte)

Sei V ein Vektorraum über K mit einem Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$ und der zugehörigen Norm $|| - ||$. Zeige, dass die sogenannte *Parallelogrammgleichung*

$$|| v + w ||^2 + || v - w ||^2 = 2 \, || v ||^2 + 2 \, || w ||^2$$

gilt.

Aufgabe 32.16. (3 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei $u_1, \ldots, u_n \in V$ eine Orthonormalbasis von V. Zeige, dass für jeden Vektor $v \in V$ die Beziehung

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle \, u_i$$

gilt.

Aufgabe 32.17. (6 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) φ ist eine Isometrie.
(2) Für jeden Vektor v mit $|| v || = 1$ ist auch $|| \varphi(v) || = 1$.
(3) Für jede Orthonormalbasis $u_i, i = 1, \ldots, n$, ist auch $\varphi(u_i), i = 1, \ldots, n$, eine Orthonormalbasis.
(4) Es gibt eine Orthonormalbasis $u_i, i = 1, \ldots, n$, derart, dass auch $\varphi(u_i), i = 1, \ldots, n$, eine Orthonormalbasis ist.