國學基本叢書

數理精蘊

一

國學基本叢書

數理精蘊

(一)

清聖祖敕編

商務印書館發行

數理精蘊目錄

上編

下編

下編四十卷之後，尚有八線表，對數闡微，對數表，八線對數表四種，共八卷，删去未印。

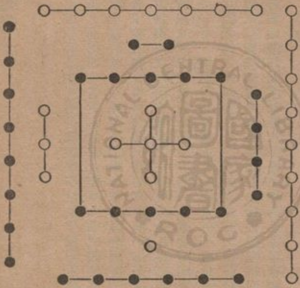
編者識

數理精蘊上編卷一

數理本原

粵稽上古河出圖洛出書八卦是生九疇是敘數學亦於是乎肇焉蓋圖書應天地之瑞因聖人而始出數學窮萬物之理自聖人而得明也昔黃帝命隸首作算九章之義已啓堯命羲和治曆敬授人時而歲功以成周官以六藝教士數居其一周髀商高之說可考也秦漢而後代不乏人如洛下閎張衡劉焯祖冲之之徒各有著述唐宋設明經算學科其書頒在學宮令博士弟子肄習是知算數之學實格物致知之要務也故論其數設爲幾何之分而立相求之法加減乘除凡多寡輕重貴賤盈朒無遺數也論其理設爲幾何之形而明所以立算之故比例分合凡方圓大小遠近高深無遺理也溯其本原加減實出於河圖乘除殆出於洛書一奇一偶對待相資遞加遞減而繁衍不窮焉奇偶各分縱橫相配互乘互除而變通不滯焉徵其實用測天地之高深審日月之交會察四時之節候較晝夜之短長以至協律度同量衡通食貨便營作皆賴之以爲統紀焉今匯集成編以類相從提點線面體以爲綱分和較順逆以爲目法無論巨細惟擇其善者由淺以及深執簡以御繁使理與數協務有裨於天下國家以傳於億萬世云爾

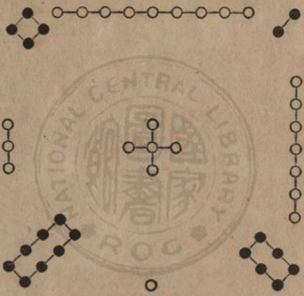
河圖



易繫辭曰。天一、地二、天三、地四、天五、地六、天七、地八、天九、地十。天數五。地數五。五位相得而各有合。朱子曰。河圖以五生數統五成數。而同處其方。蓋揭其全以示人。而道其常。數之體也。考其數。始於一。中於五。終於十。陽奇陰偶。而數之加減。由是生焉。自一而二。自二而三。自三而四。自四而五。皆遞加一以相生。自五復加一而成六。六加一而七。七加一而八。八加一而九。九加一而十。十則仍歸於一。故至十而天地之數全矣。天數陽也。地數陰也。言天地。即所以言陰陽也。五位相得而各有合。以五行之序而定位也。邵子曰。天之陽在南而陰在北。地之陰在南而陽在北。故河圖之數。一陽位於北。二陰位於南。其即五行質具於地之義而言之歟。今以陰陽相生之數論之。一爲陽。天一生水而位北。一加一爲二。爲陰。地二生火而位南。二加一爲三。爲陽。天三生木而位東。三加一爲四。爲陰。地四生金而位西。四加一爲五。爲陽。天五生土而位中。至五而五行之數已周。此生數之極也。自一至五。則五又爲一體矣。於是以五爲中數而復加一。則爲六。六陰也。因五中數與一相加。故與一同位。而屬之水焉。六加一爲七。以中數五計之。實加二。故與二同位。而屬之火焉。七加一爲八。以中數五計之。實加三。故與三同位。而屬之木焉。八加一爲九。以中數五計之。實加四。故與四同位。而屬之金焉。九加一爲十。以中數五計之。復加五。故與五同位。而屬之土焉。至十而五行之數再周。天地之數已備。此成數之極也。以陰陽運行之序論之。以五生數統十成數。位居於中。而奇數則始於北一。次東三。次南七。次西九。偶數則始於南二。次西四。次北六。次東八。此數之陰與陰。陽與陽。各從其類者也。以奇偶相得之數論之。一與六合。二與七合。三與八合。四與九合。五與十合。此又奇偶相得而各有合者也。邵子謂圓者河圖之數。又曰歷紀之數。其肇於此。然則所謂數者。即一陰

一陽。一奇一偶。循環無間。表裏相維。百千萬億。總由此推之以成其變化。河圖者、豈非天地自然生成之數也哉。

洛書



洛書之數戴九履一左三右七二四爲肩八六爲足五居其中朱子謂以五奇數統四偶數而各居其所蓋主於陽以統陰而肇其變數之用也邵子曰數學雖多乘除盡之矣夫洛書者數之源也乘除之所以生也易說卦傳曰參天兩地而倚數三天數也二地數也天地相合而萬物育焉一者太極之體其數不行故數行於二三起於三以三參之則三九七一之數生焉起於二以二兩之則二四八六之數生焉其序列之位則天居四正取以陽統陰之義地居四維取以陰從陽之義其三九七一乘數則旋而左除數則返而右也其二四八六乘數則旋而右除數則返而左也二三相合而爲五五則無對居中者立其體也二五相合而爲十十仍歸一洛書不用者藏其用也是故三始於東方發生之地而位於左自東而南三而三之是爲九故戴九自南而西九而三之爲二十七去成數餘七故右七自西而北七而三之爲二十一去成數餘一故履一奇數左旋以三參之卽天道左行之說也如轉而右行以三除之仍復其原數焉二立於西南二陰始生之地而位於右肩自西南而東南二而二之是爲四位於左肩自東南而東北四而二之爲八位於左足自東北而西北八而二之爲十六去十餘六位於右足偶數右旋以二兩之卽地道右行之說也如轉而左行以二除之仍復其原數焉此乘除之數見於運行者如此若以對待者觀之一與九對一爲數之始九爲數之終互乘互除其數不變也二與八對二八互乘俱得十六二除十六得八八除十六仍得二此二與八之相倚也三與七對三七互乘皆二十一三除二十一得七七除二十一仍得三此三與七之相倚也四與六對四六互乘皆二十四四除二十四得六六除二十四仍得四此四與六之相倚也至五爲二三之合天地之交陰陽之會位於洛書之中以建人極配上下而爲三才故

斜直四圍皆得十五．合之得四十有五．爲九五之數．要之運行者其序也．對待者其位也．進退循環縱橫交錯．總不外於乘除．故曰乘除之本原．自洛書生也．

周髀經解

數學之失傳久矣漢晉以來所存幾如一綫其後祖冲之郭守敬輩殫心象數立密率消長之法以爲習算入門之規然其法以有盡度無盡止言天行未及地體是以測之有變更度之多盈縮蓋有未盡之餘蘊也明萬曆間西洋人始入中土其中一二習算數者如利瑪竇穆尼閣等著爲幾何原本同文算指諸書大體雖具實未闡明理數之精微及我朝定鼎以來遠人慕化至者漸多有湯若望南懷仁安多閔明我相繼治理曆法間明算學而度數之理漸加詳備然詢其所自皆云本中土所流傳粵稽古聖堯之欽明舜之濬哲曆象授時閏餘定歲璿璣玉衡以齊七政推步之學孰大於是至於三代盛時聲教四訖重譯向風則書籍流傳於海外者殆不一矣周末疇人子弟失官分散嗣經秦火中原之典章既多缺佚而海外之支流反得眞傳此西學之所以有本也古算書存者獨有周髀周公商高問答其本文也榮方陳子以下所推衍也而漢張衡蔡邕以爲術數雖存考驗天狀多所違失按榮方陳子始言晷度衡邕所疑或在於是若周髀本文辭簡而意該理精而用博實言數者所不能外其圓方矩度之規推測分合之用莫不與西法相爲表裏然則商高一篇誠成周六藝之遺文而非後人所能假託也舊註義多舛訛今悉詳正弁於算書之首以明數學之宗使學者知中外本無二理焉爾

昔者周公問於商高曰竊聞乎大夫善數也請問古者包犧立周天曆度

周天曆度者分周天三百六十度爲推求曆日之用也按通鑑載包犧作甲曆天干地支相配六甲一

轉天度一周年。以是紀而歲功成。月以是紀而朔望定。晝夜以是紀而時日分。易大傳言包犧仰以觀於天文。俯以察於地理。其觀察之時。必有度數以紀其法象。則曆度始於包犧無疑矣。

夫天不可階而升。地不可將尺寸而度。請問數從安出。

天之高明。地之博厚。非人力所能及。其曆度之數。不知從何而得也。

商高曰。數之法出於圓方。

萬物之象。不出圓方。萬象之數。不離圓方。河圖者、方之象也。洛書者、圓之象也。太極者、圓之體、奇也。四象者、方之體、偶也。奇數天也。偶數地也。有天地而萬物於是乎生。有圓方而萬象於是乎定。有奇偶而萬數於是乎立矣。

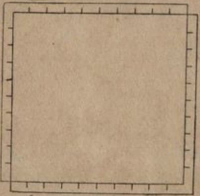
圓出於方。

以數而論。出於圓方。以圓方而論。則圓出於方。蓋方易度而圓難測。方有盡而圓無盡。故推圓者以方度之。以有盡而度無盡也。是以圓周內弦外切。屢求勾股。爲無數多邊形以切近圓界。將合而爲一。而圓周始得。故曰圓出於方也。

方出於矩。

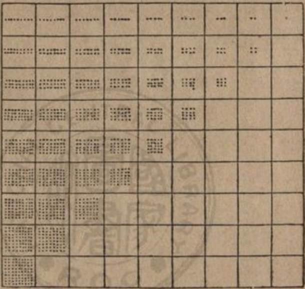
孟子曰。不以規矩。不能成方圓。夫規所以成圓。而矩所以成方也。故凡方形必出於二矩相合。如矩之二股均者合之。卽爲正

方矩之二股一大一小者合之則爲長方蓋因矩之爲形其角直其線正所以能成方體此又直內方外之理故曰方出於矩也



矩出於九九八十一

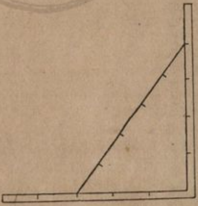
度圓方者遞歸於矩而矩之形總不外乎二數相乘九九者數之終而一一乃數之始言九九而不及他數者以九九之內他數俱該也是以一一爲一二二爲四三三爲九四四爲一十六五五爲二十五六六爲三十六七七爲四十九八八爲六十四九九爲八十一乃矩之二股均平所成之正方也一二爲二一三爲三一四爲四一五爲五一六爲六一七爲七一八爲八一九爲九形雖未方而其理猶存也二三爲六二四爲八二五一十二六一十二二七一十四二八一十六二九一十八三四一十二三五一十五三六一十八三七二十一三八二十四三九二十七四五二十四六二十四七二十八四八三十二四九三十六五六三十五七三十五八四十五九四十五六七四十二六八四十八六九五十四七八五十六七九六十三八九七十二乃矩之一股小一股大所成之長方也至於一百之類雖爲正方乃十之相乘十則仍歸於一也又如八十四九十六之類乃六七四十二六八四十八之倍不得自立爲數之本又或十一十三十七十九之類十一爲二五一十之奇十三爲二六一十二之奇十七爲



四四一十六之奇不得成正方亦不得成長方故不入九九之數也是以九九之數爲方之本而方之形必合以矩故曰矩出於九九八十一也

故折矩以爲勾廣三股修四徑隅五

前言圓方之形此言勾股生成之正數也以二矩合之旣爲方形今以一矩折之則爲一方之兩邊是以折矩之橫者爲勾之廣折矩之縱者爲股之長於勾股之末以斜弦連之是爲徑隅徑直也隅角也言自兩角相對直連之也勾之廣必三股之修必四而徑隅始得五此乃自然生成之正分也易曰參天兩地而倚數天數一參之則爲三地數二兩之則爲四三二合之則爲五此又勾三股四弦五之正義也



旣方其外半其一矩

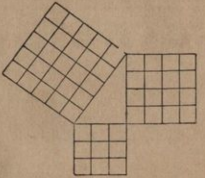
此言勾股之面積也勾股以弦連之不得爲方形必再合一矩乃爲一長方所謂方其外者言弦之外復加一矩以成方也勾三股四相乘得一十有二即爲兩矩合成之數半之得六乃勾股之面積所謂半其一矩者也

環而共盤得成三四五

此言勾股弦相和之數也環而共盤者環繞盤旋於勾股弦之周圍得成三四五共之爲一十有二乃三數相和之總數也

兩矩共長二十有五是爲積矩

此言勾股相求之法也。兩矩者。勾與股也。其所以相求者。以勾股弦各面積彼此加減以立法也。勾三自乘爲九。股四自乘爲一十有六。合而計之爲二十有五。是勾股各自乘之積相併而與弦自乘之積等。故曰積矩也。弦之自乘積內。減勾自乘之積。得股自乘之積。弦之自乘積內。減股自乘之積。得勾自乘之積。故爲勾股弦相求之法也。



故禹之所以治天下者。此數之所由生也。

言禹之平成之功。昭垂萬古。揆厥所以奏績者。必藉勾股以審高下。始得順水之性而告厥成功也。然則禹之所以治水者。非此勾股之數所由生乎。

周公曰。大哉言數。請問用矩之道。

商高曰。平矩以正繩。

此言用矩立法。必以正且直也。平矩以正繩有兩義。平置其矩。使矩之角直。以此直角之一股。或橫或平（橫以度遠。平以度高。）復自一股引繩以度其分。則此分爲我所知。故以所知推所不知。此繩引長時。必使與直角對正。不論其分之幾何。引之又必令直。方能得測度之準。故爲平矩以正繩。又平者均平整齊之謂。用矩之道。矩之角正。（卽直角之訣也。）然後二股得直。以之測高測遠。乃得度其大小之分。此

矩旣正而所測之度亦正矣。孟子曰：規矩準繩。以爲方圓平直。繩者卽準之之意。規矩所以度圓方。而準繩所以考平直。故準之以平。繩之以直。始得立法之精微。故曰平矩以正繩也。

偃矩以望高。

此用矩測高之法也。偃者仰也。仰矩方可測高。矩之一股植立在前。一股定平在下。然後比例推之。蓋平股與立股之比。卽所知之遠與所測之高之比也。故仰測之而得高。

覆矩以測深。

此用矩測深之法也。覆者俯也。俯矩方可測深。矩之一股立者在前。一股平者在上。平股與立股之比。卽所知之遠與所測之深之比也。故俯測之而得深。

臥矩以知遠。

此用矩測遠之法也。臥者平也。平矩方可測遠。以矩之一股爲橫向內。一股爲縱向前。是以橫與縱之比。卽所知之度與所求之遠之比也。故平測之而得遠。

環矩以爲圓。

此用矩爲圓之法也。以矩之一端爲樞。一端旋轉爲圓。則成一圜。環矩者。卽旋規之說也。

合矩以爲方。

此用矩爲方之法也。矩。二股也。兩矩相合。乃成一方。卽前方出於矩之說也。

方屬地。圓屬天。天圓地方。

前言用矩以測高深廣遠。復用矩以爲圓方。此以圓方屬之天地者。非以形體言。蓋以陰陽動靜之理言也。樂記云。著不息者天也。著不動者地也。不息故運而不積。圓之象也。不動故靜而有常。方之理也。且圓之數無盡。而方之數有盡。天不可階而升。測天者恆於地上度之。是仍以方度圓也。凡數之不盡者必奇。數之可盡者必偶。是以陽爲奇。陰爲偶。此方圓之理數。所以屬乎天地也。

方數爲典。以方出圓。

典。則也。言圓之數奇零不盡。不可爲則。故惟方數可爲典則。以方出圓者。以方之形。度圓之分。從方數中生出圓數。卽前圓出於方之說也。如圓徑求積。則以徑自乘之。爲正方形。而以方率圓率比例推之。卽得圓積。是皆以方出圓之理也。

笠以寫天。天青黑。地黃赤。天數之爲笠也。青黑爲表。丹黃爲裏。以象天地之位。

此卽儀象以表天地之形色也。笠形圓。故以象天。寫象也。青黑天之色。黃赤地之色。天數之爲笠形、則以青黑爲表。丹黃爲裏。以象天地之位。蓋取天包地之象也。

是故知地者智。知天者聖。智出於勾。勾出於矩。夫矩之於數。其裁制萬物。惟所爲耳、

天地之高深廣遠。非聖智不能知。然聖智非由理之自然。亦不能無所憑藉而知也。故明勾股之數。卽可以知地而爲智。知地之數。卽可因地以知天而爲聖矣。故曰智出於勾也。然勾股之形。又賴矩以成。故矩爲勾股之本。而天地之高深廣遠。皆賴矩以測。況萬物之大小巨細。豈能外於矩之度分乎。故矩之於數。其裁制萬物。惟其所爲而無不可也。

周公曰。善哉。

以周公之聖。而與之曰善哉。則其得數之本。立法之妙。可謂至矣。至是而周髀之義盡矣。

數理精蘊上編卷二

幾何原本一

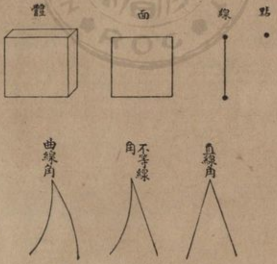
第一

凡論數度必始於一點自點引之而爲線自線廣之而爲面自面積之而爲體是名三大綱是以有長而無闊者謂之線有長與闊而無厚者謂之面長與闊厚俱全者謂之體惟點無長闊厚薄其間不能容分不可以數度然線之兩端卽點而線面體皆由此生點雖不入於數實爲衆數之本

第二

線有直曲兩種其二線之一端相合一端漸離必成一角二線若俱直者謂之直線角一線直一線曲者謂之不等線角二線俱曲者謂之曲線角

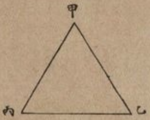
第三



凡角之大小皆在於角空之寬狹。出角之二線。卽如規之兩股。漸漸張去。自然開寬。是以命角不論線之長短。止看角之大小。如丙角兩線雖長。其開股之空狹。遂爲小角。若丁角兩線雖短。其開股之空寬。遂成大角矣。

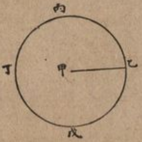
第四

凡命角必用三字爲記。如甲乙丙三角形。指甲角、則云乙甲丙角。指乙角、則云甲乙丙角。指丙角則云甲丙乙角是也。亦有單舉一字者。則其所舉之一字卽是所指之角也。如單言甲角乙角丙角之類。



第五

凡有一線。以此線之一端爲樞。復以此線之一端爲界。旋轉一周。卽成一圜。如甲乙一線。以甲端爲樞。乙端爲界。旋轉復至乙處。卽成乙丙丁戊之圜。此圜線謂之圜界。圜界內所積之面度謂之圜面。

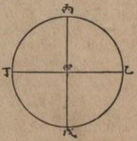


第六

凡圜界不拘長短其分界之所即爲弧線如乙丙丁戊之圜丙至丁丁至戊俱爲弧線因其形似弧故名之

第七

凡圜自一界過圜心至相對之界畫一直線將一圜爲兩平分則爲圜徑如乙丙丁戊之圜以甲爲心自圜界乙處過甲心至丁或自圜界丙處過甲心至戊畫乙甲丁及丙甲戊線皆爲圜徑也

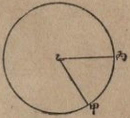


第八

凡自圜心至圜界作幾何線皆謂之輻線其度俱相等因平分全徑之半故又謂之半徑線

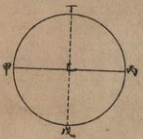
第九

凡圜界皆以所對之角而命其弧而角又以所對之弧而命其度蓋角度俱在圜界而圜界爲角度之規也如乙角爲心甲丙爲界則乙角相對之界即甲丙弧而甲丙弧即乙角之度也



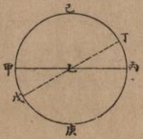
第十

凡角相對之弧得圜界四分之一者此角必直故謂之直角如甲丁丙戊之圜甲乙丙之徑自中心乙至圜界丁畫一半徑將半圜界又分爲兩平分則成甲乙丁丙乙丁之二角此二角各得圜界四分之一則此二角爲直角也若自丁界過乙心至圜界戊處畫一直線又成丁乙戊之徑復得甲乙戊丙乙戊兩相等之直角矣故凡畫一直線交於別線其所成之角若直此線謂之垂線蓋因平分圜界爲四其四弧相對之四角必相等而皆爲直角則其二徑相交必互爲垂線可知矣



第十一

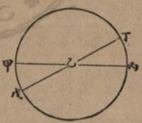
凡角相對之弧不足圜界四分之一者謂之銳角若過四分之一者謂之鈍角故自圜徑中心復畫一輻線而不平分半圜之界則成一銳角一鈍角如甲己丙庚之圜於甲乙丙之徑自乙心至甲己丙之半圜界不兩平分於丁處畫一輻線遂成丙乙丁一銳角甲乙丁一鈍角再將丁乙線引於相對圜界戊處畫一丁乙戊徑線復成甲乙戊一銳角丙乙戊一鈍角合前二角總爲四角矣故凡二角兩尖相對謂之對角二角兩尖相並謂之並角如甲乙戊丙乙丁二角之兩尖相對卽謂之對角丙乙戊甲乙丁二角之兩尖亦相對故亦謂之對角也如丙乙戊甲乙戊之二角兩尖相並而同出一線則謂



之並角矣。

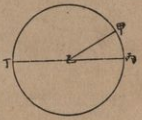
第十二

凡一圜內設兩角此一角相對之弧與彼一角相對之弧其限若等則此二角之度亦必相等如甲丁丙戊之圜丙乙丁角相對之丙丁弧甲乙戊角相對之甲戊弧其限相等故丙乙丁角甲乙戊角其度亦相等也



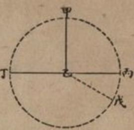
第十三

凡有一圜其徑線之中心作相並之二角此二角之度必與二直角等如甲丙丁之圜自丁乙丙徑線之中心作甲乙丙、甲乙丁之相並二角此二角之度必與二直角相等也



第十四

凡一直線交於他直線其所成之二角或為二直角或與二直角等如丙乙丁直線上畫一甲乙直線至於乙處即成甲乙丙、甲乙丁之二直角也又或於丙乙丁直線上畫一戊乙直線亦至乙處復成丙乙戊一銳角丁乙戊一鈍角此二角必與二直角相等也再申明之以乙為心丙為界旋轉畫一圜則丙乙丁線為圜之徑線必將圜界平分為兩平分矣此丙乙丁徑線之中心所畫之甲



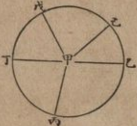
乙線。又將半圜界平分爲兩平分，則此二角各相對之弧，皆爲一圜界四分之一，而各爲一直角可知矣。又如戊乙線將半圜界雖不兩平分而成一銳角一鈍角，然所成二角仍在丙乙丁徑線所限半圜界度。爲全圜界四分之二，故與二直角相等也。

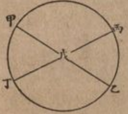
第十五

凡自一心畫爲衆線，其所成之角雖多，止與四直角相等。如自甲心至乙、至丙、至丁、至戊、至己畫衆幅線，雖成衆角，其各角所函之度，必與四直角等。蓋因甲點爲心，衆幅線皆立一圜之界，故衆角所對之弧，總不越一圜之全度。前言一圜之界僅有四直角之弧線，茲角雖多，亦未嘗出一圜之界，故曰衆角雖多，止與四直角等也。

第十六

凡兩直線相交所成二對角之度，必俱相等。如甲乙、丙丁二線交於戊處，成甲戊丁、丙戊乙之二對角，斯二角之度必俱相等。今以二線相交之處爲心旋轉畫一全圜，則甲乙、丙丁二線俱爲此圜之徑線矣。惟其俱爲徑線，故將一圜爲兩平分，而甲戊乙之徑線爲甲丙乙之半圜界，丙戊丁之徑線爲丙甲丁之半圜界。因兩半圜界俱係全圜徑線，故相交成對角，其度必等。茲將甲丙乙之半圜界減去甲丙弧，即餘丙乙弧；丙甲丁之半圜界亦減去丙甲弧，又餘甲丁弧。

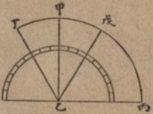




凡兩相等之弧。減去一段相等之弧。所餘之弧必相等。今甲丙乙、丙甲丁、二半圜之界內。減去甲丙、丙甲、同體之弧。則所餘丙乙、甲丁、相對之弧。亦必相等矣。此二弧之度既俱相等。則所對之甲戊丁、丙戊乙、二角之度亦必相等可知矣。其餘甲戊丙、丁戊乙、亦與甲戊丁、丙戊乙、同理。故其所對之角度亦必相等也。

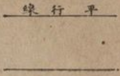
第十七

凡大小圜界俱定爲三百六十度。而一度定爲六十分。一分定爲六十秒。一秒定爲六十微。一微定爲六十纖。夫圜界定爲三百六十度者。取其數無奇零。便於布算。卽徵之經傳亦皆符合也。易曰。凡三百有六十當期之日。邵子曰。三百六十。中分之得一百八十。爲二至二分相去之數。度下皆以六十起數者。以三百六十乃六六所成。以六十度之可得整數也。凡有度之圜界。可度角分之大小。如甲乙丙角。欲求其度。則以有度之圜心。置於乙角。察乙丙、乙甲之相離。可以容圜界之幾度。如容九十度。卽是甲乙丙直角。何以知爲直角。因九十度爲全圜三百六十度之四分之一。前言凡角得圜界四分之一者爲直角。故知其爲直角也。若過九十度者。爲丁乙丙鈍角。不足九十度者。爲丙乙戊銳角。觀此三角之度。其餘可類推矣。



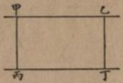
第十八

凡二線之間寬狹相離之分俱等。則此二線謂之平行線也。



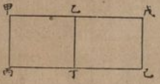
第十九

欲求平行線之間相距幾何則自上一線不拘何處至下一線畫二縱線則此二線為相距度分也如甲乙丙丁二線平行自上線甲乙二處至下線丙丁二處畫二縱線則此二線為相等線其度必等然則甲乙丙丁相對之間其相距之遠近不已見耶



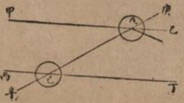
第二十

平行二線雖引至於無窮其端必不能相合蓋二線相離之度各處遠近俱為相等故也如甲乙丙丁平行二線隨意引於戊己又自戊至己畫一縱線其度亦等於甲丙乙丁二縱線故曰平行線雖引至於無窮其端終不能相合也



第二十一

凡平行二線或縱或斜畫一直線交加於上則平行線上所成之二角必俱相等如甲乙丙丁二平行線上畫一庚辛斜線其甲乙線之庚戊乙角丙丁線之戊己丁角皆相等假使庚戊乙角大於戊己丁角則戊乙線必離於庚戊線而向丙丁線甲乙丙丁二線不平行矣若甲乙丙丁二線豪無偏斜又得庚辛直線相交成二角則此二角必然相等矣

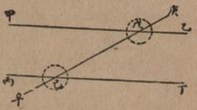


第二十二

凡平行二線上畫一斜線則成八角此八角度有相等者必是對角或內外角如庚戊乙甲戊己二角其度相等因其兩尖相對謂之對角庚戊乙戊己丁二角其度亦相等因其在平行二線之內外故謂之內外角甲戊己戊己丁二角其度亦相等因其俱在平行二線之內而立斜線之左右故又謂之相對錯角又如甲戊庚庚戊乙二角其度不等因其立一線之界謂之並角庚戊甲丁己辛二角其度亦相等因其俱在平行二線之外故謂之外角乙戊己丙己戊二角其度亦相等因其又俱在平行二線之內故又謂之內角總之二平行線上交以斜線所成八角必兩兩相等也

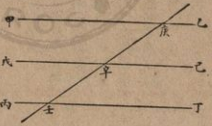
第二十三

平行線上一邊之二內角或一邊之二外角與二直角相等如丁己戊角與丙己戊角爲並角則此二並角與二直角等前第十四節云凡一直線交於他直線所成二角必與二直角相等則此二角同出於一直線爲並角故亦與二直角等矣又如甲戊庚庚戊乙雖爲外角而亦爲並角此二並角亦與二直角等也他如甲戊己乙戊己二並角丙己辛丁己辛二並角亦與二直角等也



第二十四

有平行二線。復與一線相平行者。此三線互相爲平行線也。如甲乙、丙丁、二線之間。有戊己線與之平行。則甲乙、丙丁、戊己三線。互相爲平行線也。照前第二十一節。在此三線上。畫一庚辛壬斜線。則所成之庚辛二角必相等。而辛壬二角亦必等也。三線之與斜線相交所成之角。既各相等。則三線互爲平行可知矣。



幾何原本二

第一

凡各種界所成俱謂之形。其直界所成者爲直界形。曲界所成者爲曲界形。凡直界所成各形。未有少於三角形界者。故三角形爲諸形之首。

第二

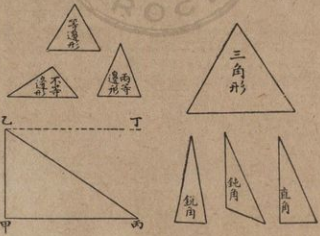
凡三角形一角直者爲直角三角形。一角鈍者爲鈍角三角形。三角俱銳者爲銳角三角形。

第三

凡三角形其三邊線度等者爲等邊三角形。兩邊線度等者爲兩等邊三角形。三邊線度俱不等者爲不等邊三角形。

第四

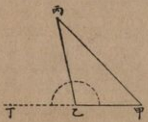
凡三角形之三角度相併。必與二直角度等。如甲乙丙三角形。自乙角與甲丙線平行畫一乙丁線。則成丙乙丁角與丙角爲二尖交錯之二角。其度必相等見首卷第二十二節。而甲角與甲



乙丁角爲甲丙乙丁二平行線內一邊之二內角與二直角等見首卷第二十三節今於甲乙丁直角內減丙乙丁角所餘爲甲乙丙角丙乙丁角旣與丙角度等則甲乙丙丙乙丁合成之一直角與甲角之一直角非二直角之度耶

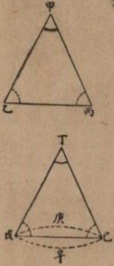
第五

凡三角形自一界線引長成一外角此外角度與三角形內所有之二銳角等如甲乙丙三角形自甲乙線引長至丁所成之丙乙丁角卽爲外角其度與三角形內甲丙二銳角之度等蓋甲乙丙三角形之三角度倂之原與二直角等如本卷第四節云 而甲丁直線與丙乙直線相交所成之甲乙丙丁乙丙內外角亦與二直角等如首卷第十四節云 則此內外二角所倂之度與三角形內三角所倂之度亦必相等今於內外角所倂之二直角內減去甲乙丙角則所餘之丙乙丁一外角度與甲角丙角所倂之度爲相等可知矣



第六

凡兩三角形其兩邊線之度相等二線所合之角又等則二形底線之度必等二形之式亦等其底線之二角亦皆等也如甲乙丙一三角形丁戊己一三角形此二形之甲角丁角若等甲丙丁戊二線甲乙丁己二線又互相等則



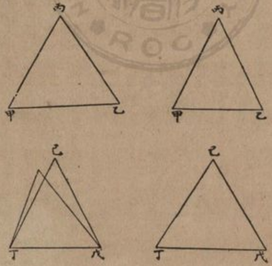
乙丙、戊己之二底線必等。其二形之三角式亦必等。而乙角己角相等。丙角戊角亦相等。若將二形之甲角丁角相合。則甲丙、丁戊、二線。甲乙、丁己、二線。各度必等。因其俱等。故丙乙線之二角。與戊己線之二角。俱恰相符。而無偏側矣。若謂乙丙底與戊己底不符。必是戊己線上斜於庚。或下斜於辛。不成直線形矣。

第七

兩三角形。其三邊線之度若等。則三角之度亦必相等。而此形內所函之分亦俱等也。如甲乙丙、丁戊己、兩三角形之甲乙線、丁戊線、甲丙線、丁己線、乙丙線、戊己線、兩兩相等。則甲角與丁角、乙角與戊角、丙角與己角、必各相等。而甲乙丙三界所函之分、丁戊己三界所函之分亦俱相等。蓋因此兩三角形之各線。俱恰相符。故所函之分。亦俱恰相符也。

第八

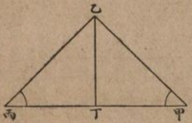
凡兩三角形。有一線相等。其相等線左右所生之二角又相等。則其他線他角俱相等。而二形之分亦相等也。如甲乙丙、丁戊己、兩三角形之甲乙線、丁戊線若等。而此二線左邊所成之甲角、丁角、右邊所成之



乙角戊角亦相等則甲丙線度與丁己線度等丙乙線度與己戊線度等而丙角與己角亦等甲丙乙形所函之分與丁己戊形所函之分自然相等矣若將甲乙線與丁戊線相較再將甲角與丁角乙角與戊角相較此二線二角之度必俱相符此二線二角既俱相符其他線他角亦必各相符矣若謂一線不符則相等之角亦必不符必其一線斜出或一線偏入以致各角俱不相等角既不相等而形式亦必不同矣

第九

三角形之兩邊線若等其底線之兩角度亦必等如甲乙丙三角形其甲乙丙乙兩邊線之度等則其甲丙底線之甲角丙角之度亦俱等也若以甲丙底平分於丁處自丁至乙角畫一直線遂成甲乙丁丙乙丁兩三角形此兩形之甲乙線與丙乙線既相等而甲丙底線平分之甲丁丙丁線度亦等則乙丁爲兩三角形所共用之各一邊線然則此兩三角形之各三邊線度必俱相等可知矣三角形之三線既各相等則其各角之度亦必相等因其各角之度相等故甲角丙角之度亦必等也



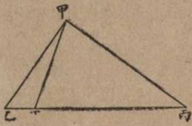
第十

有兩邊相等之三角形自上角至底線畫一直線將底線爲兩平分則此線爲上角之平分線又爲底線之垂線也如甲乙丙乙兩邊線度相等之甲乙丙三

角形自上角乙至底線丁畫一直線將甲丙底線爲兩平分則爲乙角之平分線又爲甲丙底線之垂線也蓋乙丁線將乙甲丙三角形平分爲甲乙丁丙乙丁兩三角形此兩三角形之各界線度必各相等而各角之度又俱相等則甲乙丁角丙乙丁角將乙角爲兩平分矣而甲丁乙角丙丁乙角又爲相等之兩直角因其爲兩直角故乙丁線爲平分甲丙底線之垂線也

第十一

凡三角形內長界所對之角必大短界所對之角必小如甲乙丙三角形之乙丙界長於甲丙界故其相對之甲角大於乙角而甲乙界短於甲丙界故其所對之丙角小於乙角也試依甲丙界度截乙丙於丁復自甲至丁作甲丁線即成甲丙丁兩界相等之三角形夫甲丙丁丙兩界度既相等則甲丁丙丁甲丙兩角亦相等今甲丁丙角相等之丁甲丙角原自乙甲丙角所分則乙甲丙角必大於甲丁丙角矣然此甲丁丙角爲甲乙丁小三角形之外角與小三角形內之甲乙二角相併之度等 見本卷第五節 既與甲乙二角之度等則大於乙角可知矣夫甲丁丙角既大於乙角則乙甲丙角必更大於乙角矣丙角之小於乙角其理亦同



第十二

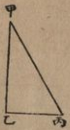
凡三角形內必有二銳角蓋三角形之三角併之與二直角等 見本卷第四節 如甲乙丙三角形之乙角

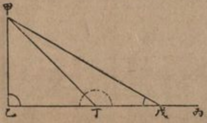
爲直角則所餘甲角丙角併之始與乙角相等二角併之僅與一直角等則此二角獨較之必小於直角矣故此甲丙二角爲銳角也又如丁戊己三角形之戊角爲鈍角則所餘之丁角己角愈小於直角而爲銳角矣

第十三

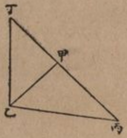
凡自一點至一橫線畫衆線而衆線內有一垂線必短於他線而他線與垂線相離愈遠則愈長也如自甲點至乙丙線畫甲乙甲丁甲戊幾線此內甲乙爲垂線較之甲丁甲戊線則其度最短而甲戊線與甲乙線相離既遠於甲丁故更長於甲丁線也蓋甲乙爲垂線則乙角必爲直角見首卷第十節而甲乙丁三角形內丁角甲角必俱爲銳角而小於乙角矣因乙角大於丁角故此乙角相對之甲丁線必長於丁角相對之甲乙線又甲丁戊外角原與甲乙丁乙甲丁二內角相併之度等見本卷第五節則此甲丁戊一外角必大於甲乙丁一內角矣甲丁戊之外角既大於甲乙丁之內角則甲丁戊角相對之甲戊線必長於甲乙丁角相對之甲丁線可知矣

第十四





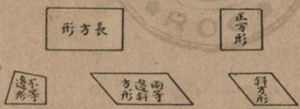
凡三角形、將二界線相併．必長於所餘之一界線．如甲乙丙三角形．將甲乙、甲丙二界線併之則長於所餘之乙丙界線也．試以丙甲線引之至丁、作丁甲線與甲乙等．則丁丙線爲甲丙、甲乙、二界線之共度矣．復自丁至乙、作丁乙線．成乙甲丁兩界相等之三角形．其丁乙甲角與丁角等 見本卷第九節．則丁乙丙角必大於丁角．夫丁乙丙角既大於丁角．則其所對之丁丙線必長於丁角相對之乙丙線可知矣．見本卷第十一節．



幾何原本二

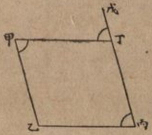
第一

凡四邊線函四角者。其形有五。四邊線度等、而角度亦等者。爲正方形。四角直而兩邊線短、兩邊線長者。爲長方形。四邊線度等、而角度不等者。爲等邊斜方形。兩邊線長、兩邊線短而角度又不等者。爲兩等邊斜方形。以上四形俱自平行線出。如四邊線不等亦不平行而四角度又不等者。爲不等邊斜方形。



第二

凡四平行線所成方形。其所函之角成兩對角。必兩兩相等。如甲乙丙丁平行線方形。其甲角度、丙角度等。而乙角度、丁角度亦等。若以丙丁線引長至戊。作一線成一丁外角。與甲角爲二尖交錯之角。其度相等。見首卷第二十二節。而丁外角與丙角又爲一邊之內外角。其度亦等。見首卷第二十二節。夫甲丁二角既等。丁丙二角又等。則甲角與丙



角、必自相等。而丁乙兩對角之相等。不言可知矣。

第三

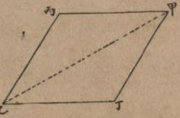
凡平行四邊形自一角至相對之角、作一對角線。必平分四邊形爲兩三角形。如甲丙乙丁四邊形作甲乙對角線、即成丙甲乙、丁甲乙兩相等三角形。蓋此四邊形之丙丁二角爲對角、其度必等。見本卷第二節。而對角線所分之丙甲乙、丁乙甲二角、丙乙甲、丁甲乙二角、俱爲二尖交錯之角。其度又兩兩相等。見首卷第二十二節。夫此兩三角形。原自一四邊形而分。各角又俱相等。則其所函之分必等。而四邊形平分爲兩平分無疑矣。

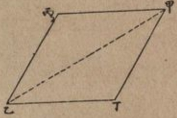
第四

凡平行線所成方形。其兩兩平行線度俱相等。如甲丙乙丁四邊形之丙甲線、與乙丁線度等、丙乙線、與甲丁線度等。此即如前節作一對角線、成兩三角形。而兩形之各角必俱相等。則丙甲、乙丁二線、丙乙、甲丁二線俱爲各相等角所對之線。其度亦必相等矣。見二卷第八節。

第五

平行線方形內兩對角線。其相交處必平分二線之正中。如甲乙、丙丁二

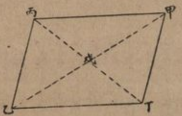


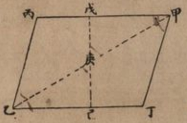


線相交於戊則所成甲戊戊乙二線丙戊戊丁二線俱等蓋因丙戊乙甲戊丁兩三角形之丙乙甲丁二線爲平行線其度等見本卷第四節而丙乙戊丁甲戊二角乙丙戊甲丁戊二角皆爲平行線內相對之錯角其度俱等見首卷第二十二節夫丙乙甲丁二線既等各相對之錯角又等則丙乙戊丁甲戊二等角相對之戊丙戊丁二線度與甲丁戊乙丙戊二等角相對之戊甲戊乙二線度必皆相等可知矣見二卷第八節

第六

凡平行線方形內於對角線上或縱或橫正中截開卽將此形爲兩平分如甲丙乙丁之方形其甲乙對角線上畫一戊己線於庚處截開則平分甲丙乙丁方形爲丙戊己乙一段甲戊己丁一段此二段內之戊甲庚己乙庚兩三角形之甲庚乙庚二線相等而戊甲庚己乙庚之兩角又爲平行線內二尖交錯之角其度相等而甲庚戊乙庚己二尖相對之角其度又等則此兩三角形度亦必相等又如甲乙對角線將甲丙乙丁方形爲兩平分則其甲丙乙甲丁乙兩三角形度必等將此兩相等之三角形以戊己線截開於甲丙乙形內減甲戊庚於甲丁乙形內減乙己庚則所餘之甲庚己丁乙庚戊丙二形度必等今所分各形既俱兩兩相等則甲丙乙丁之方形爲戊己線所截自爲兩平分可知

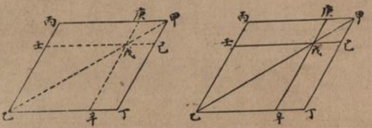




矣。

第七

凡四邊形於對角線不拘何處復作相交二平行線即成四四邊形設如甲丙乙丁四邊形於對角線之戊處復作一壬戊己一辛戊庚相交之二平行線即成甲戊、戊乙、丙戊、戊丁四四邊形此四形中之甲戊、戊乙二形為對角線上所成之形丙戊、戊丁二形為對角線旁所成之形此對角線旁所成兩形必俱相等如丙壬戊庚、戊辛丁己兩形之分是已蓋甲丙乙丁之全形因甲乙對角線平分為兩平分所成之甲丙乙、甲丁乙兩大三角形之分必等其對角線上所成之一小方形復為甲戊對角線平分為兩平分成甲庚戊、甲己戊兩小三角形此兩小三角形之分亦必等而對角線上所成之一大方形又為戊乙對角線平分為兩平分成戊壬乙、戊辛乙兩中三角形此兩中三角形之分亦必等今將甲丙乙、甲丁乙兩大三角形內減去甲庚戊、甲己戊之兩相等小三角形再減去戊壬乙、戊辛乙之兩相等中三角形所餘對角線旁所成之丙壬戊庚、戊辛丁己兩四邊形此兩四邊形自然相等矣

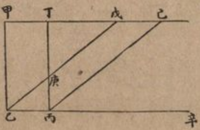


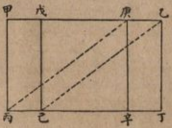
第八

凡兩平行線內同底所成之四邊形.其面積必等.如甲己、乙辛兩平行線內.於乙丙底作甲乙丙丁一長方四邊形.戊乙丙己一斜方四邊形.此兩形雖不同.而所容之分必相等.何也.試以兩三角形考之.如甲乙戊一三角形.丁丙己一三角形.此兩三角形之甲乙、丁丙二線等.甲戊、丁己二線亦等.甲丁、戊己、二線.俱與乙丙平行.而度分相等.若於甲丁、戊己、二線.各加一丁戊線.即成甲戊、丁己線.其度自然相等.而戊甲乙、己丁丙二角.爲甲乙、丁丙平行線一邊之內外角.其度又等.則此兩三角形自然相等可知矣.今於兩三角形內.各減去丁戊庚.則所餘之甲乙庚丁、戊庚丙己二形之分.必等.復於此二形內.每加一庚乙丙形.則成甲乙丙丁、戊乙丙己之兩四邊形.其面積必然相等也.

第九

兩平行線內.無論作幾四邊形.其底度若等.則面積必俱等.如甲乙、丙丁、二平行線內.作甲丙己戊、庚辛丁乙兩平行線四邊形.其丙己、辛丁兩底度相等.則其積亦等.試自丙己底至庚乙.畫二直線.即成一庚丙己乙斜四邊形.此斜四邊形.既與甲丙己戊四邊形.同出於丙己之底.即同前節兩形面積俱等矣.至於庚辛丁乙.與庚丙己乙.又同出於庚乙之底.故此兩形面積亦俱等.觀此兩兩相等.則甲丙己戊、庚辛丁乙兩形之面積相等明矣.



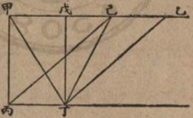


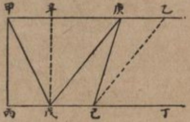
第十

凡兩平行線內同底所成之各種三角形.其面積俱等.如甲乙、丙丁.兩平行線內.於丙丁底作甲丙丁、一三角形.己丙丁、一三角形.此兩三角形之面積必等.何也.自丁至戊、作一直線.與甲丙平行.再自丁至乙.作一直線.與己丙平行.卽成甲丙丁戊.己丙丁乙.兩四邊形.此二形既同出於丙丁底.其面積相等.而甲丙丁.己丙丁.兩三角形.爲平分兩四邊形之一半.其面積亦必相等矣.

第十一

兩平行線內.無論作幾三角形.其底度若等.其面積亦俱等.如甲乙、丙丁.二平行線內.作甲丙戊、庚戊己.兩三角形.其丙戊、戊己兩底度相等.故其面積亦等.今自戊至辛.作一直線.與甲丙平行.又自己至乙.作一直線.與庚戊平行.卽同前節.成面積相等之兩四邊形.而此甲丙戊.庚戊己、兩三角形.爲面積相等兩四邊形之各一半.則此兩三角形之面積必等可知矣.





第十二

凡有幾三角形其底若俱在一直線。而各底相對之角。又共遇於一處。則其衆三角形。必在二平行線之間。如甲乙丙、甲丙丁、甲丁戊、甲戊己四三角形。其乙丙、丙丁、丁戊、戊己各底。俱在一庚辛直線上。而各底相對之角。又皆遇於甲處。則此四三角形。俱同在庚辛、壬癸二平行線之間矣。

第十三

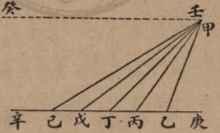
凡等邊等角各形內。五邊者爲五角形。六邊者爲六角形。邊愈多角愈多者。俱隨其邊與角而名之焉。

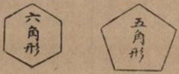
第十四

多邊多角形自角至心作線。凡有幾界。即成幾三角形。設如辛七邊形。自心至邊七角作七線。即成七三角形。而此各三角形之分。俱相等也。

第十五

欲知衆邊形各邊角之度。將邊數加一倍。得數減四。其所餘之數。即爲各邊角度也。如辛七邊形。以七邊數加一倍。共爲十四。



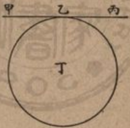


十四內減四所餘之十卽爲十直角數爲此七邊形之各邊角之總度也何也假如辛形自心至七角作七線成七三角形凡三角形之三角與二直角等見二卷第四節則此七三角形之各三角度共與十四直角等其七三角形之辛心所有之七角又與四直角等見首卷第十五節若將十四直角內減四直角乃餘十直角則此十直角與衆邊形之各邊角之總度相等可知矣

幾何原本四

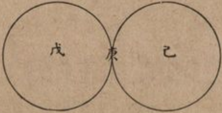
第一

凡有直線．切於圜界．而不與圜界相交者．謂之切線．如甲乙丙線．切於丁圜乙界．其線雖自甲過乙至丙．而與圜界不出入相交．此甲乙丙線．即爲圜之切線也．又如一圜與一圜界相切．而不相交．則謂之切圜．假如戊圜與己圜．於庚界相切．二界總未相交．故又謂之切圜也．



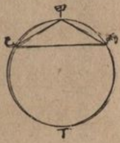
第二

凡一直線．橫分圜之兩界．謂之弦線．其所分圜界之一段．謂之弧．此弧與弦相交所成之二角．謂之弧分角．如甲丙線．橫分甲乙丙丁圜界於甲丙．則甲丙線爲弦．其所分之甲丁丙一段．甲乙丙一段．皆謂之弧．而甲丙弦與甲乙丙弧相交所成之甲丙乙、丙甲乙二角．即謂之弧分之角焉．



第三

凡自一圜弦線之兩頭.復作二直線.相遇於圜界之一處.其所成之角.謂之圜分內角.又謂之弧分相對之界角也.如甲乙丁丙圜之甲乙丙一段.自乙丙弦線之兩頭各作一直線.於甲處相遇.其所成之乙甲丙角.卽圜分內角.然此甲角與乙丁丙弧相對.故又爲弧分相對之界角也.

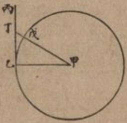


第四

凡一圜有二幅線截弧之一段.所成之三角形.謂之分圜面形.如甲圜自甲心至圜界乙丙二處.作甲乙甲丙二幅線.所成之甲丙乙三角形.卽爲分圜面形也.

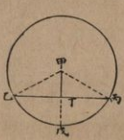
第五

凡自圜之幅線之末.與圜界相切.作一垂線.則此垂線與幅線之末在圜界僅一點相切.其他全在圜外.即如甲圜之甲乙幅線.於乙末作一丙乙垂線.則此丙乙垂線、與甲乙幅線.俱在圜界乙處之一點相切.而此垂線之丁等處.俱在圜外也.若自圜之甲心至丁.作一甲戊丁線.此線必長於甲乙幅線.如二卷第十三節云.因其長於幅線.必出於圜界之外.此甲戊丁線.既出於圜界之外.則丙乙線全在圜外可知矣.



第六

圜弦線上自圜心作一垂線則將弦線爲兩平分如乙丙弦自圜心甲至弦線丁作一垂線必將乙丙弦爲兩平分成乙丁丁丙二段若自甲心至弦線乙丙二末作二輻線成一甲乙丙三角形此三角形之甲乙甲丙二線爲一圜之輻線其度必等此二輻線既等則甲乙丙三角形內甲丁垂線所分之乙丁丁丙二段亦必等矣若將垂線引長至弧界戊作線則又將乙丙弧界爲兩平分矣



第七

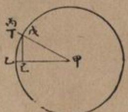
凡自圜外一處至圜界兩邊作二切線此二線之度必等如自圜外甲至圜界乙丙兩邊作甲乙甲丙二切線此二線之度相等今於圜心丁至圜界乙丙二切線之末作二輻線則此二輻線爲甲乙甲丙之垂線矣如本卷第五節云因其爲垂線則甲乙丁甲丙丁之二角必同爲直角見首卷第十節再自丙至乙作一弦線即成丁乙丙甲乙丙兩三角形丁乙丙三角形之丁乙丁丙二線同爲圜之輻線其度必等因其相等故丁乙丙丁丙乙二角亦必等夫甲乙丁甲丙丁二角原相等此二角內減去丁乙丙丁丙乙二角則所餘之甲乙丙甲丙乙二角亦自相等此二角既俱相等則甲乙甲丙二切線爲等角傍之兩界線自然相等無疑矣

第八

凡圜內兩弦線若等．其分圜弧面之積必等．自心至兩弦所作垂線亦必等．如甲圜之丙乙、丁戊、二弦之度若等．則所分丙己乙辛、丁庚戊壬、二弧面積必等．自此圜之甲心至丙乙、丁戊、二弦各作甲壬甲辛垂線．其度亦必等．何也．如自甲心至丙乙、丁戊、二弦之末．各作輻線．即成甲丙乙、甲丁戊兩三角形．此兩三角形之各界線．必兩兩相等．則此兩三角形內相等線所對之角亦必相等．見二卷第七節． 角既相等．則等角相對弧界之丙己乙、丁庚戊、二段亦必相等．見首卷第十二節． 丙己乙、丁庚戊二弧線既等．丙乙、丁戊、二弦線又等．則丁庚戊壬之弧面積與丙己乙辛之弧面積．自然相符矣．又甲辛、甲壬、二垂線將丙乙、丁戊、二弦為兩平分．則丙辛、乙辛、丁壬、戊壬之四線亦俱等．三角形之各界線．既兩兩相等．而三角形內各角又兩兩相等．則平分丙乙、丁戊、二弦之甲辛、甲壬之度．自然相等矣．

第九

凡弦線之所屬、有三種．一為弧之切線．一為弧之割線．一為弧之弦線．欲取弧界各角之度．用此三線求之必得也．如甲圜之甲乙輻線．於乙末作丙乙垂線復自圜心甲至圜界戊割出、至丙乙垂線丁、分作甲丁線．又從圜界戊至甲乙輻線、作戊己垂線．則成三種線．此三線內丁乙線為乙戊弧之切線、甲丁線為．



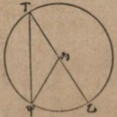
乙戊弧之割線、戊己線爲乙戊弧之正弦．凡欲得各角弧界之度．必於此三種線取之．如欲取乙甲戊角相對弧度則自與甲角相對乙戊弧之丁乙切線取之或自乙戊弧之甲丁割線取之或自乙戊弧之戊己正弦取之皆得乙戊弧之度數焉

第十

一圜界內在於圜界一段至圜心作二線．至圜界作二線．卽成二角在圜心者爲心角在圜界者爲界角設如甲乙丁圜自甲乙一段至丙心作甲丙、乙丙二線．仍自甲乙至丁界作甲丁、乙丁二線成甲丙乙甲丁乙二角其甲丙乙角爲心角甲丁乙角爲界角也．

第十一

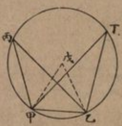
圜內之心角界角同立圜界之一段．而各角之二線所成之式．又分爲三種．有界角心角同用一線者有界角心角不同用一線者有界角二線跨心角二線者總之此三種心角皆大於界角一倍如有三圖圜心之甲丙乙角皆自圜界甲乙一段作甲丙乙丙二線圜界之甲丁乙角亦自圜界甲乙一段．作甲丁、乙丁二線則第一圖之甲丁乙界角之乙丁線．同立於甲丙乙心角之乙丙線上而甲丙乙心角爲甲丙丁三角形之外角與甲丁丙丙甲丁二丙角等見二卷第五節．其甲丙丙丁二線．又爲一圜之輻線．其度亦等此二



線既等。則甲丁丙、丙甲丁、二角亦必等。見二卷第九節。今甲丙乙之外角。既與甲丁丙、丙甲丁、二內角等。則甲丙乙心角大於甲丁乙界角一倍可知矣。如第二圖甲丁乙界角之乙丁線。不同立於甲丙乙心角之乙丙線上。而甲丙乙心角在甲丁乙界角甲丁、丁乙、二直線之外。則自丁角過圜之丙心至對界作一丁丙戊全徑線。即成甲丙戊一大心角。乙丙戊一小心角。甲丁戊一大界角。乙丁戊一小界角。其甲丙戊大心角。即如第一圖必倍於甲丁戊大界角。而乙丙戊小心角。亦必倍於乙丁戊小界角。於甲丙戊大心角內減去乙丙戊小心角。甲丁戊大界角內減去乙丁戊小界角。則所餘之甲丙乙心角。必大於所餘之甲丁乙界角一倍矣。如第三圖甲丁乙界角之二線。正跨於甲丙乙心角二線之上。而甲丙乙心角在甲丁乙界角甲丁、丁乙、二直線之間。則自丁角過圜之丙心至對界作丁丙戊全徑線。即成甲丙戊、乙丙戊、二心角。甲丁戊、乙丁戊、二界角。此甲丙戊心角必倍於甲丁戊界角。乙丙戊心角亦必倍於乙丁戊界角。以甲丙戊、乙丙戊、二心角倂之。乃甲丙乙一心角。以甲丁戊、乙丁戊、二界角倂之。乃甲丁乙一界角。今所分之二心角。既各倍於所分之界角。則此所倂之甲丙乙心角。必倍於所倂之甲丁乙界角矣。

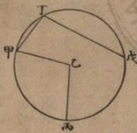
第十二

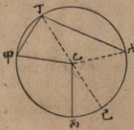
凡自圜之弧線一段。任作相切界角。幾何其度必俱相等。如甲乙丁丙之圜。自甲乙弧線一段。至圜界丙丁。作相切之甲丙乙、乙丁甲二界角。此二角之度。必俱相等。試自圜之戊心。至圜界甲乙。作二輻線。即成甲戊乙一心角。此甲戊乙之心角。與甲丙乙、乙丁甲界角。俱同一圜弧線之一段。則心角必倍於界角。然則甲丙乙、乙丁甲二界角。既俱為甲戊乙心角之一半。則此二角之度必等可知矣。



第十三

凡圜內心角所對弧線之度。比界角所對弧線之度少一半。則二角之度必等。如甲丙戊丁圜內。有甲乙丙一心角。甲丁戊一界角。而甲乙丙心角相對甲丙弧線之度。比甲丁戊界角相對甲戊弧線之度少一半。則甲乙丙心角之度。必與甲丁戊界角之度相等。試自丁角過圜之乙心。至對界作丁乙己全徑線。復自乙心至戊界。作乙戊半徑線。即成甲乙己、乙己戊二心角。甲丁己、己丁戊二界角。其甲乙己心角。必倍於甲丁己界角。而己乙戊心角。亦必倍於己丁戊界角。今以甲乙己、己乙戊二心角相併。甲丁己、己丁戊二界角亦相併。則甲乙己、己乙戊二心角所併之度

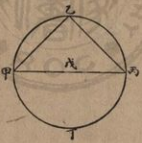




必倍於甲丁己、己丁戊二界角所併之度矣.是以甲丁戊一界角.必得甲乙己、己乙戊二心角所併之一半.夫甲丙弧線既爲甲戊弧線之一半.而甲乙丙角又爲甲乙己、己乙戊二心角所併之一半.則甲乙丙心角度必與甲丁戊界角之度相等矣.

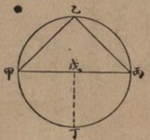
第十四

凡圜內界角立於圜界之半者.必爲直角.如甲乙丙丁圜內之甲乙丙界角.立於甲丁丙圜界之正一半.則此甲乙丙角必然爲直角也.自甲丁丙之半圜於丁界爲兩平分.復自丁界至圜心戊作丁戊輻線.即成甲戊丁角.其相對之甲丁弧.爲圜界四分之一.既爲圜界四分之一.則必爲直角.如首卷第十節云.夫心角相對弧線.若爲界角相對弧線之一半.其二角之度相等矣.如本卷第十三節云.今甲戊丁心角相對之甲丁弧線.既爲甲乙丙界角相對之甲丁丙弧線之一半.則甲戊丁心角度必與甲乙丙界角度相等.且甲丁弧線既爲圜界四分之一.而甲丁丙弧線.又爲圜界之正一半.則甲戊丁心角爲直角.而甲乙丙界角亦必爲直角矣.

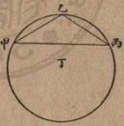


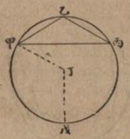
第十五

凡圜內界角其所對之弧.過於圜界之半者.必爲鈍角.如甲乙丙戊圜內之甲乙丙界角.其相對之甲戊



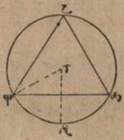
丙弧。大於圜界之一半。故其相對之甲乙丙角爲鈍角也。試將甲戌丙弧。平分於戌。爲甲戌、戌丙兩段。復自圜心丁至甲、戌作二輻線。即成甲丁戌一心角。其甲戌丙弧分既大於半圜。則此甲戌弧線一段。亦大於圜之四分之一矣。故此甲戌弧線相對之甲丁戌心角必爲鈍角。見首卷第十一節。夫心角相對之弧線比界角相對之弧線少一半。則二角之度必相等。如本卷第十三節云。今甲丁戌心角相對之甲戌弧線。正爲甲乙丙界角相對甲戌丙弧線之一半。則甲乙丙界角自然與甲丁戌心角等矣。夫甲丁戌心角。既爲鈍角。則甲乙丙界角亦必爲鈍角矣。





第十六

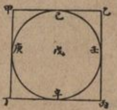
凡圜內界角。其所對之弧。不及圜界之半者。必爲銳角。如甲乙丙戊圜內之甲乙丙界角。其相對之甲戊丙弧。小於圜界之一半。故其相對之甲乙丙角爲銳角也。試將甲戊丙弧。平分於戊。爲甲戊、戊丙兩段。復自圜心丁至甲、戊作二幅線。即成甲丁戊一心角。此心角所對之甲戊弧線。既不足圜界四分之一。則此



甲丁戊心角必爲銳角矣。見首卷第十一節。此甲丁戊心角所對之弧比之甲乙丙界角所對之弧爲一半則此二角之度必等夫甲丁戊心角既爲銳角則甲乙丙界角亦必爲銳角矣

第十七

凡函圜各界形之各線與圜界相切而不相交則謂之函圜切界形如甲乙丙三角形之甲乙、乙丙、丙甲三界線俱在庚圜界之丁己戊三處相切而不相交故謂之函圜切界三角形又若甲乙丙丁四方形之甲乙、乙丙、丙丁、丁甲四界線俱在戊圜界之己庚辛壬四處相切而不相交則謂之函圜切界四邊形觀此二圖則知函圜各界形必大於所函圜界形之分矣



第十八

凡圜內直界形之各角止抵圜界而不割出則謂之圜內所函各邊形如甲乙丙三角形之甲角乙角丙角俱與丁圜界相抵而不曾割出卽謂之圜內所函三角形又如甲乙丙丁四方形之甲角乙角丙角丁角俱與戊圜界相抵而不割出則謂之圜內所函四邊形觀此二圖則知函於圜界各界形必小於圜界形之分矣

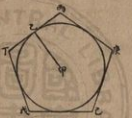
第十九

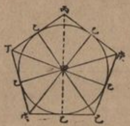
凡等邊衆界形或函圜或函於圜其界數愈多愈與圜界相近如甲圜形函乙丙丁等邊三角形又函乙己丙庚丁戊等邊六角形以三角形之三邊比之六角形之六邊則六角形之六邊與圜界相近矣設有十二角形之十二邊比此六角形之六邊則十二角之十二邊又與圜界爲近若有二十四角之二十四邊則又更近於十二角之十二邊矣蓋函衆界形之度必大於所函之衆界形度見本卷第十七十八兩節今甲圜旣函等邊六角形自大於六角形而此六角形又函等邊三角形亦必大於三角形由此推之十二角函六角二十四角函十二角其邊愈多者其度愈大故與圜界愈近也又如復有一函圜等邊四角形內又作一函圜等邊八角形此四角形旣函八角形必大於八角形可知矣若於八角形內復作十六角形十六角形內又作三十二角形其所函形愈小邊數愈多則與所函之圜界度愈近矣苟設一函於圜界之多邊形爲幾十萬邊設函於圜界之多邊形一自六邊起算一自四邊起算復設一函圜界之多邊形亦爲幾十萬邊設函圜界之多邊形亦一自六邊起算一自四邊起算使此函圜之多邊形自外與圜界相比而函於圜界之多邊形自內與圜界相比則此二多邊形之每邊直界線將與圜界曲線合而爲一故圜界曲線可得直線之度而多邊形之直線亦可得爲圜界度也

第二十

函圜切界等邊形其所函圜之輻線度與一直角三角形之小邊之度等而等邊形之衆界共度又與三角形之大邊之度等則三角形之面積與等邊形之面積等

如丙丁戊己庚等邊五角形其所函甲圜之甲乙輻線與辛壬癸直角三角形之辛壬小邊線度等而五角形之丙丁戊己庚五邊線共度又與三角形之壬癸大邊線度等則此辛壬癸三角形面積必與丙丁戊己庚等邊五角形面積等也何以見之若自五邊形之甲心至丙丁戊己庚之五角作甲丙甲丁甲戊甲己甲庚五線卽分成甲丙丁類五三角形夫辛壬癸三角形之壬癸線度旣與五角形之五邊共度等今將壬癸線平分五分以所分之每分爲底依前所分五三角形式作甲壬丙類五正式三角形復自所分

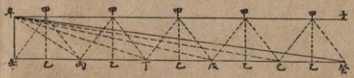




丙丁戊己四處．俱至三角形之辛角．作丙辛、丁辛、戊辛、己辛四線．遂分辛壬癸一三角形．爲辛壬丙類五斜式三角形．再自甲壬丙類五三角形之甲角至底．各作一甲乙垂線．俱與圜之輻線等．則甲壬丙相等之五三角形之高度．亦自相等矣．於是復自辛壬癸三角形之辛角．與五甲角相切．作一辛子線．與壬癸爲平行線．則此平行線內同底所成之各種三角形之面積．必俱相等矣．見三卷第十節．蓋辛壬丙、甲壬丙兩三角形爲同底．辛丙丁、甲丙丁兩三角形爲同底．辛丁戊、甲丁戊兩三角形爲同底．辛戊己、甲戊己兩三角形爲同底．辛己癸、甲己癸兩三角形爲同底．故其面積俱相等也．且辛壬丙三角形與甲壬丙三角形既俱相等．則辛壬丙之類五斜式三角形之面積．卽如甲壬丙之類五正式三角形之面積矣．其所分各形之面積俱等．則其全形之面積自然相等．此所以辛壬癸直角三角形之面積．與丙丁戊己庚等邊五角形之面積相等也．

第二十一

圜界內函等邊衆界形．其圜心至衆界所作中垂線．與一直角三角形之小邊之度等．而等邊衆界形之衆界共度．又與直角三角形之大邊之度等．則此三角形之面積與等邊衆界形之面積等．如甲圜所函乙丙丁戊己庚等邊六角形．其圜之甲心至衆界所作甲辛垂線．與壬癸子直角三角形之壬癸小邊線度等．而六角形之乙

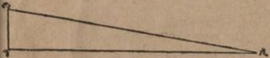


丙丁戊己庚六邊線共度。又與三角形之癸子大邊線度等。則此壬子癸三角形面積。必與乙丙丁戊己庚等邊六角形面積等也。若依前節法。將六邊形分爲六三角形。復以三角形之癸子界。照六邊形度分爲六分。又照六邊形所分六三角形。作六正式三角形。復自壬子癸三角形之壬角至乙丙丁戊己五處作五斜線。成六斜式三角形。此兩式三角形同底。又同在二平行線內。則其面積必兩兩相等。此兩式六三角形之垂線。既與壬癸子直角三角形之壬癸小邊線度等。而兩式六三角形之底線共度。又與壬子癸直角三角形之癸子大邊線度等。則壬癸子直角三角形之面積。必與乙丙丁戊己庚等邊六角形之面積相等矣。

第二十二

凡圜形之幅線。與一直角三角形之小邊線度等。而圜之周界。與三角形之大邊線度等。則此直角三角形之面積與圜形之面積相等。如有一甲圜形。其甲乙幅線。與丙丁戊直角三角形之丙丁小邊線度等。而甲圜形之乙周界。又與丙丁戊三角形

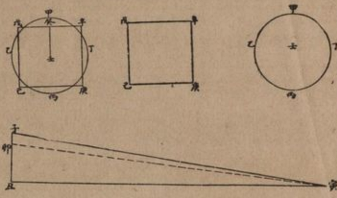
之丁戊大邊線度等則此丙丁戊三角形之面積即與甲圜形之面積相等也何以見之甲圜之幅線與三角形之小邊等者即如等邊衆界形之中垂線與三角形之小邊等也甲圜之周界與三角形之大邊等者即如等邊衆界形之各界共度與三角形之大邊等也若夫函圜衆界形相等之三角形其小邊雖與圜之幅線等其大邊則長於圜之周線故其積分亦大於圜之積分而函於圜衆界形相等之三角形其小邊既短於圜之幅線而大邊亦短於圜之周線故其積分亦小於圜之積分今此甲圜形相等之丙丁戊三角形其小邊既與圜之幅線等而三角形之大邊又與圜之周線等則其積分與圜形之積分相等無疑矣然圜周界曲線也等邊衆界形之界度直線也觀之似難於相通者如以圜之內外各設多邊衆界形分為千萬邊如本卷第十九節云則逼圜界最近將合而為一乃依所分之段為千萬正式三角形此千萬正式三角形之中垂線亦將與圜之幅線合而為一而千萬邊共界度既與圜周合而為一則圜周之曲線亦變而為直線矣夫千萬邊正式三角形之中垂線既成圜之幅線則與丙丁戊三角形之小邊等而千萬邊正式三角形之底界共度



又成圜之周度則又與丙丁戊三角形之大邊度等矣復自丙丁戊三角形之丙角至千萬正式三角形之底界各作千萬斜式三角形以比正式三角形因其底同其分自相等故千萬斜式三角形之面積比之千萬正式三角形之面積千萬正式三角形之面積比之丙丁戊一直角三角形之面積丙丁戊直角三角形之面積比之甲圜形之面積俱相等也

第二十三

有一圜形又一衆界形此圜界度若與彼衆界總度等則圜形之面積必大於衆界形之面積也如甲乙丙丁圜形之周界與戊己庚辛等邊四角形之四邊總度等則圜形之面積必大於等邊四角形之面積矣前言凡圜形之幅線與一直角三角形之小邊線度等而圜之周界與三角形之大邊線度等則三角形之面積與圜形之面積相等矣今試以甲乙丙丁圜形周界爲三角形之大邊以甲乙丙丁圜形之甲壬幅線爲三角形之小邊作一子丑寅直角三角形則三角形之丑寅大邊線度亦與戊己庚辛四角形之四邊總度等而三角形之子丑小邊線度雖與圜形甲壬幅線等却比四角形之自壬心至癸邊所作垂線爲長若將三角形之子丑小邊線照四角形之

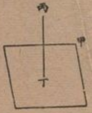


壬癸垂線度截開。則分子丑線於卯。復自卯至寅、作一斜弦。即成卯丑寅一直角三角形。而此卯丑寅三角形之分與戊己庚辛四角形相等也。此卯丑寅三角形自子丑寅三角形分之。則卯丑寅形必小於子丑寅形。今甲乙丙丁圜形之面積旣與子丑寅三角形之面積等。而戊己庚辛四角形之面積又與卯丑寅三角形之面積等。則戊己庚辛四角形之面積必小於甲乙丙丁圜形之面積可知矣。觀此凡界度相等之形。圜界所函之分比衆界所函之分必大。而衆界所函之分與圜界所函之分同者。則衆界之總度復比圜界度大也。

幾何原本五

第一

平面之上所立直線．無少偏倚．其面上所生之角必俱直．則謂之平面上所立垂線也如甲乙之平面正立一丙丁線．不偏不倚此卽爲平面上所立之垂線矣．

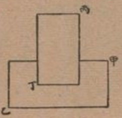


第二

凡兩平面相對．其所立衆垂線度俱各相等．則此相對之平面．謂之平行面也如甲乙、丙丁、二平面間所有戊己衆垂線之度俱相等此甲乙、丙丁、二平面卽爲平行面矣．

第三

平面上復立一平面．無少偏倚．其兩邊所成之角必皆爲直角．則謂之平面上所立直面也．如甲乙平面上所立之丙丁平面．無偏無倚．兩邊亦俱成直角．此卽爲平面上所立之直面矣．



第四

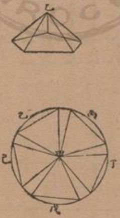
凡各面相合其每面之角所合處復成一種體角則謂之厚角夫厚角必自三面合之乃成其面多者爲各瓣相併而成之厚角也如甲圖四面爲四瓣相併所生之厚角乙圖五面爲五瓣相併所生之厚角是已

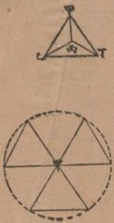
第五

凡各面相併所成之厚角如將各面計之則其衆角所合之分必不足於四直角度也如甲圖五面合成之厚角若將其五面展開使平作乙丙丁戊己平面之五瓣復以甲爲心作一甲圜其乙丙丁戊己之五瓣相離處不能滿甲圜之周界矣因其不滿於圜之周界故比四直角爲不足也或以四直角分強欲作一厚角則其瓣過於大必不能成平面所合之厚角矣

第六

凡等邊三面所合厚角其三面內之兩面角併之必大於一直角度也如甲丙乙丁之等邊三面所合之甲厚角將乙甲丙丙甲丁二面併之必大於一直角度矣依前節法將甲厚

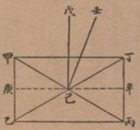




角展開使平雖不足四直角之度而乙甲丙、丙甲丁之二面併之則較之一直角度爲大焉何以見之夫三面展開其所離之虛分仍有三面之分以三面之實分合三面之虛分則爲六角之全形此六角之全形得四直角度矣六角而得四直角則三角必得二直角三角既得二直角則二角相併必大於一直角可知矣

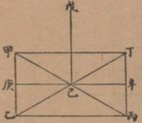
第七

凡平面二線交處作一垂線正立而無偏倚此線任在平面各處俱爲垂線如甲乙丙丁平面上甲丙、丁乙二線相交己處作一戊己垂線正立而不偏倚則此戊己線任在甲乙丙丁平面上某一處俱爲垂線也假使戊己垂線不能正立而有所偏倚則如壬己線近於辛而離於庚矣壬己線既近於辛而離於庚則偏向於丁丙而遠於甲乙而壬己丁、壬己丙之二角爲銳角壬己甲、壬己乙之二角爲鈍角矣戊己既如壬己則不得謂之甲丙、丁乙二線相交處正立之垂線矣



第八

衆線交處立一垂線其各角若俱直此所交各線必在一平面也如甲丙、乙丁、庚辛之三線相交處立一戊己垂線其與衆線相接各角若俱直則此相交之三線必在一平面也夫衆線之相交固在平面而垂線之所立正所以考面或



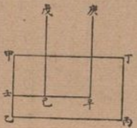
一角不直、則不得謂之平面矣。

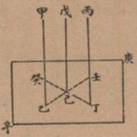
第九

平面上若立二垂線、必互爲平行線。如甲乙丙丁之平面上、立戊己、庚辛二垂線、則此二線互爲平行線也。試自辛過己至壬、作一辛壬線、則戊己、庚辛二垂線所立之分必正。其在甲乙丙丁平面上任指何處所生之角俱是直角。見本卷首節。故戊己壬、庚辛己二角俱爲直角而相等也。且此二角又爲二線與一線相交所成之內外角、其度既等、則戊己、庚辛二線必爲平行線矣。如首卷第二十一節。

第十

有二線與一垂線平行、雖不在平面之一界、此三線亦互相爲平行線也。如甲乙、丙丁二線、俱與戊己一垂線平行、不立於一直線上、雖不居平面之一界、此三線亦必互爲平行線也。試於甲乙、丙丁、戊己三線之末、作一庚辛平面、此平面上之戊己線爲垂線、其四圍平面所生之各角俱是直角矣。復自乙過己、自丁過己、作相交二線、則成甲乙己、戊己壬二角、丙丁己、戊己癸二角、此各二角俱爲平行線一邊之內外角、俱爲相等角矣。見首卷第二十一節。而甲乙己、丙丁己二角亦俱爲直角、夫甲乙、丙丁二線在庚辛平面上所生

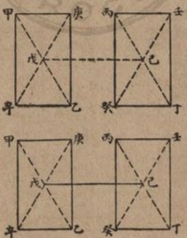




之角皆直。又皆與戊己垂線所生之角等。則甲乙、丙丁、二線。亦皆得爲垂線。其與戊己線爲互相平行之三線可知矣。

第十一

相對二平面之間。橫一直線。此線在二平面上所生角若俱直。則此相對二面互相爲平行面也。如甲辛乙庚丙癸丁壬二平面之間。橫一戊己直線。此戊己線末所抵處其四圍俱成直角。則此二平面互相爲平行面矣。試將此二平面之戊己橫線所抵之處作甲乙、庚辛、相交二線。丙丁、壬癸、相交二線。則戊己橫線於二平面各界所生之角。俱爲直角。如甲乙、丙丁、二線與戊己橫線相抵所生之甲戊己戊己癸二尖交錯之角相等。故甲乙、丙丁、相當之二線爲平行矣。又如辛戊己戊己丙二尖交錯之角亦相等。故庚辛壬癸相當二線亦爲平行矣。相對二平面之上。所有之相當各二線既俱同爲平行線。則相對之二平面自然互爲平行面矣。



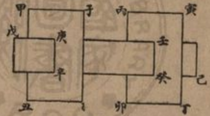
第十二

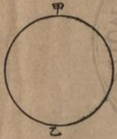
有二平行面橫交一面。其相交處所生二線必平行。如甲乙、丙丁、平行二面上。橫交一戊己平面。其庚辛、

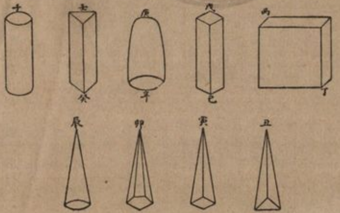
壬癸之相交處所生二線亦俱平行也何以言之庚辛壬癸平面相交處所生二綫既在甲乙丙丁二平面之上自然與甲乙丙丁二面之甲丑子乙丙卯寅丁之各線同爲平行線且又在戊己一平面內其分自然相對故此二平面與一平面相交之縫線亦得爲平行也

第十三

凡各種面內所積之實爲體而皆因其面以名之焉如全體不成角度止現圜之圜面則謂之圜體甲乙圖是也全體各面俱平各邊相等所成各角又等則謂之平面正方體丙丁圖是也全體各面雖平體長而面成兩式其相對各面仍兩兩相等相對各邊則又平行角又相等此謂之平行長方體戊己圖是也體有曲平兩面相雜



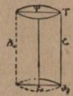


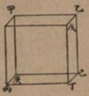


而不成等邊等面。則謂之底平半圓體。庚辛圖是也。全體相對之各面不平行。上下兩面平行。則謂之上下面平行體。壬癸圖是也。體圓而上下面俱平。則謂之長圓體。子圖是也。底爲平面。其各面俱合於一角而成厚角。則謂之尖瓣體。底三角者謂之三瓣尖體。底四角者謂之四瓣尖體。底衆角者謂之衆瓣尖體。如丑寅卯三圖是也。又或底面圓而漸銳成形。則謂之尖圓體。辰圖是也。

第十四

凡圓體、長圓體、尖圓體、俱生於圜面。故其外皮面積。亦生於圜界一旋轉之度分耳。如取甲乙丙丁之圓形。則以甲乙徑線爲樞心。將甲丙乙半圓作轉式。旋轉復還於原處。卽成甲丙乙丁一圓形體。如取甲乙戊己平行面之長圓形。則以甲乙中線爲樞心。將丙丁線界作轉式。旋轉復還於原處。卽成甲乙戊己一長圓體。如取甲丙丁平底尖圓形。則以甲乙中線爲樞心。將甲丁邊線作轉式。旋轉復還於原處。卽成甲乙丙丁一尖圓體矣。





第十五

凡各體形。其各面平行相當。則相對兩邊面積俱相等。如甲乙丙丁之正方體。其甲戊庚丁、甲己戊丙、甲丙乙丁、六面俱各平行。故相對二面之積俱兩兩相等也。

第十六

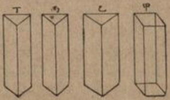
凡體面式不一而積數相等者。為積數相等之體。面式既同而體積又等者。為面式體積全等之體。如甲、乙二體為積數相等之體也。丙、丁二體為面式體積全等之體也。

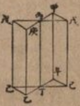
第十七

凡平行面之長方體。自一面之對角線平分為兩三稜體。此兩三稜體。必為面式體積全等之體矣。如甲乙平行面長方體。自丙丁二角至相對戊己二角分為兩段。成戊丙乙丁己甲、兩三稜體。為面式體積全等體也。試以甲丙庚戊、辛丁乙己、兩平面形。自戊丙、丁己兩對角線均分為兩三角形。則所分之戊庚丙、己乙丁、丙甲戊、丁辛己、四三角形面積俱相等。而丙乙、甲己、甲丁、戊乙各面又互為平行。必兩兩相等。再對角線分成之丙丁己戊、戊己丁丙二面。原在一界所分。必各相等。今所分二形之各面既各相等。則其積必等。而為面式體積全等體無疑矣。

第十八

凡平行二平面之間。若同底。立各平行體。其積必相等。設甲乙、丙丁、平行二平面之間。於戊己庚辛底。立壬庚癸己二平行體。其積俱相等。何也。蓋因壬戊己

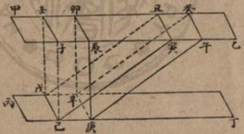


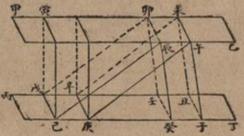


子丑寅平面三角形之壬戊己子面。與卯辛庚辰癸午平面三角形之卯庚辛辰面平行。而壬戊己子丑寅平面三角形之丑戊己寅面。與卯辛庚辰癸午平面三角形之癸辛庚午面平行。故其各面之度相等。其壬子辰卯之面與丑寅午癸一面俱與戊己庚辛一面平行。其度亦必相等。此二面之度既等。則壬子、寅丑、卯辰、午癸二面之度亦必俱等。其上下各面度既等。而平面兩三角形之各面各邊度又俱等。則此壬庚、癸己二平行體之積。必然相等也可知矣。

第十九

凡平行平面之間。所有立於等積底之各平行體。其積必俱相等。設如甲乙、丙丁平行二平面之間。有戊己庚辛、壬癸子丑二等積之底。立一寅庚正面平行體一卯子斜面平行體。此二體之積必相等。試自寅庚正面平行體之戊己庚辛底至卯子斜面平行體之卯辰午未面。復作一卯庚斜面平行體。則寅庚、卯庚二體立於戊己庚辛之一底。其積相等矣。如前節所云。而卯子、卯庚二體。又同立於卯辰午未之面。其積亦必相等。是以寅庚正面平行體卯子斜面平行體俱與卯庚平行體相等。故云凡平行平面之間所

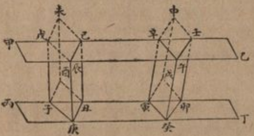




有立於等積底之各平行體其積必俱相等也.

第二十

平行平面之間有立於等積三角底之各三面體其積必俱等.如甲乙、丙丁、平行二平面之間有子庚丑、寅癸卯等積三角底立戊庚己辛癸壬之兩三面體此二體積必相等何以見之若以此二體之上邊二面之戊辰、辰己二界平行作戊未、己未二線辛午、壬午二界平行作辛申、壬申二線又於此二體之下邊二面之子庚、庚丑二界平行作子酉、酉丑二線寅癸、癸卯二界平行作寅戌、戌卯二線則二體所生酉子庚丑、戌寅癸卯四邊平行二底俱在子丑、寅卯二對角線其度相等.見三卷第三節.其分比三角面各大一倍矣.復於所作二底邊酉、戌二處作酉未一縱線戌申一縱線即成未庚申癸平行面二方體矣其酉子庚丑戌寅癸卯二底既俱相等則所生之未庚申癸平行面之二方體亦自相等.見本卷第十九節.此未庚申癸平行面二方體既各相等則戊庚己辛癸壬之三面體爲未庚申癸二方體之正一半其積必等無疑矣.



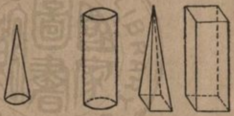
第二十一

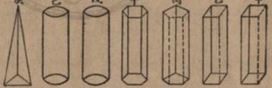
凡各種體形難以圖顯蓋以圖止一面故也.必用木石製之始能相

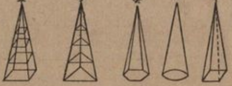
肖。況此各種形體。又或有外實而內空者。必按其形以求其理。始可發明其精蘊矣。

第二十二

凡各面所成體形內。其各面俱平行。或上下面爲平行而立於等積之底。其體之高又等。則其體之積亦相等。如甲、乙體。其各面俱平行。又如丙、丁體。其上下面平行立於等積之底。其高又等。或又如戊、己體。其上下面平行圓面積又等。高又等。則其兩兩體積必相等矣。又如庚、辛、壬、癸之類尖體形。苟立於等積之底。其體之高若等。則其體之積亦相等。何以見之。若將衆尖體分爲平行底之衆小體。其所分衆小體之底度高度必俱相等。如子、丑圖。其所分小體之積俱等。故其全體之積亦相等也。

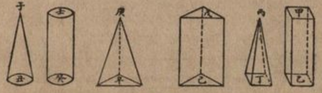






第二十三

凡上下面平行各體、與平底尖體同底同高者、不論平面圓面、其平底尖體、皆得上下面平行體三分之一。如甲乙上下面平行之長方體、與丙丁四瓣尖體、其乙丁兩底積等、甲乙、丙丁、兩高度又等、則甲乙長方體、與丙丁尖體三形等、如戊己上下面平行之三稜體、與庚辛三瓣尖體、其己辛兩底積等、戊己、庚辛、兩高度又等、則戊己三稜體、與庚辛尖體三形等、又如壬癸上下面平行之長圓體、與子丑尖圓體、其癸丑兩底積等、壬癸、子丑、兩高度又等、則壬癸長圓體、與子丑尖圓體三形等、又如壬癸長圓體、與甲乙、戊己、類體同底同高、則壬癸長圓體、亦與丙丁、庚辛、類尖體三倍所合之數等、又或子丑尖圓體、與丙丁、庚辛、類尖體同底同高、則子丑尖圓體三倍之、乃與甲乙一體、戊己一體等也、夫同底同高上下面平行體、既俱為尖體之三倍、則尖體為上下面平行體三分之一可知矣。蓋甲乙・戊己・壬癸・各體・其式雖不同・苟底積高度相等・其積必等・而丙丁・庚辛・子丑・各體式雖不同・苟底積高度相等・其積亦必等・故知丙丁・庚辛・子丑・平底尖體・互為甲乙・戊己・壬癸・上下面平行各體三分之一也・如將上下面平行各體・以木石為之・分作同底同高之各平底尖體・用權衡以較其分量・則各體之積分・自昭然可見矣・

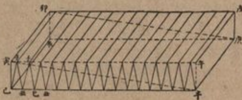


第二十四

凡長圓體外周面積．與長方體底面積相等．而長圓體半徑．又與長方體高度相等．則長圓體積．必得長方體積之半也．如甲乙丙丁長圓體．其周圍外面積．與戊己長方體之庚己底面積等．而長圓體之壬丁半徑．又與長方體之戊庚高度等．則此甲乙丙丁長圓體積．必得戊己長方體積之一半也．試將甲乙丙丁長圓體從壬癸中線至周圍外面分爲千萬分．則成子丑己類千萬長尖體．此千萬長尖體之高．與長圓體之壬子半徑等．而千萬長尖體之共底．即長圓體之周圍外面積．則此千萬長尖體．必爲戊己長方體之一半矣．蓋寅己辛三角面．爲午己長方面之一半．（見三卷第三節）而此子丑己類衆三角面．與寅己辛三角面等．（見四卷第二十節）子丑己類衆三角面．既與寅己辛三角面等．則子丑己類衆長尖體．亦必與卯辰庚辛己寅三角體等．此卯辰庚辛己寅三角體．固爲戊己長方體之一半．今長圓體所分之衆長尖體．既與卯辰庚辛己寅三角體等．則亦必爲戊己長方體之一半．故甲乙丙丁長圓體．爲戊己長方體之一半也．

第二十五

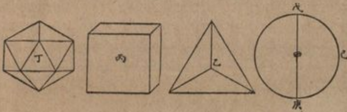
凡球體外面積．與尖圓體之底積等．而球體之半徑．與尖圓體之高度等．則此球體之積．與尖圓體之積



等也如甲乙丙丁球體之外面積與己庚辛尖圓體之庚子辛癸底積等球體之甲戊半徑與尖圓體之己壬高度等則此球體之積爲與尖圓體之積等也試將球體從中心分爲千萬尖體復將尖圓體亦分爲千萬尖體則球體所分尖體每一分必皆與尖圓體所分尖體一分等何也蓋球體所分尖體皆以球體之外面爲底而以球體之甲戊半徑爲高其尖圓體所分尖體皆以尖圓體之底爲底而以尖圓體之己壬高爲高夫尖圓體之底積原與球體之外面積等而尖圓體之高度又與球體甲戊半徑等故此兩種千萬尖體皆爲同底同高其積相等無疑矣見本卷第十八節然此兩種千萬尖體即球體尖圓體之所分其所分之體既等則原體亦必相等可知故曰球體與尖圓體俱相等也

第二十六

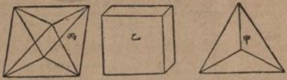
凡各形外皮面積相等之體惟圓體所函之積數大於他種各體所函之積如甲乙丙丁外皮面積相等各形內甲圓體所函之積必大於乙丙丁直界體所函之積也何也大凡圓形其半圓周一旋轉間即成圓體此戊己庚半圓周一次旋轉即成甲圓體見本



卷第十四節・又凡平面圜界所函之積必大於等邊各形所函之積見四卷第二十三節・平面圜界所函猶大於各等邊所函之積則圜體所函必大於各直界體所函之積可知矣.

第二十七

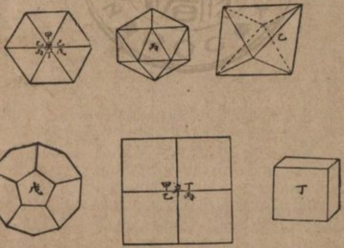
厚角所成等面體形有五種.各以面數而名之.其一爲四面體.每面有三角.各三角之各三界度俱等.如甲圖是也.二爲六面體.每面俱爲正方.其方面之四角俱爲直角.而各界互等.故又爲正方體.如乙圖是也.三爲八面體.每面有三角.各三角之各三界度俱等.如丙圖是也.四爲十二面體.每面有五角.各五角之五界度俱等.如丁圖是也.五爲二十面體.每面有三角.各三角之各三界度俱等.如戊圖是也.



第二十八

前節發明五種厚角所成等面體形之外.不能復生他形.蓋此五種厚角體俱是等邊三角四角五角之平面相合所成也.凡平面自三界以下.不能成面見二卷首節・而厚角自三面以下.亦不能成角.故厚角自三面始.如甲四面體.其四厚角.皆三平面三角形所合而成也.乙八面體.其六厚角皆四平面三角形所

合而成也丙二十面體其十二厚角皆五平面三角形所合而成也然平面三角形所合過於五形則不能成厚角故平面六三角形合於一處即成庚形其甲乙丙丁戊己六角相合與四直角等見首卷第十五節既與四直角等則爲平面不成厚角矣如本卷第五節六形相合尙不能成厚角況多形乎是故平面三角形所生厚角體僅得四面八面二十面三種而已若夫平面正方四角形所成厚角如丁六面正方體其八厚角皆三平面四角形所合而成此外更無他形若將四平面四角形合於一處即成辛形其甲乙丙丁四角既俱爲直角必不能成厚角矣故四角形所生厚角僅有一六面正方體而已至於平面五角形所成厚角如戊十二面體其二十厚角皆三平面五角形所合而成此外更無他形也或將四平面五角形如癸子丑寅之四角合於壬此四角俱爲鈍角必大於四直角既大於四直角在平面尙不能



相合．厚角豈能成耶．是以平面五角形所成之厚角．僅有一十二面體而已．或將平面六角形之三形合於一處．爲癸．其甲乙丙三角度．與四直角等．故不成厚角．六角平面相合．既不成厚角．其七角八角等形．愈不能成厚角矣．故曰四面六面八面十二面二十面五種體．只在三角四角五角三種平面形所生．此外不能復成他形也．

數理精蘊上編卷三

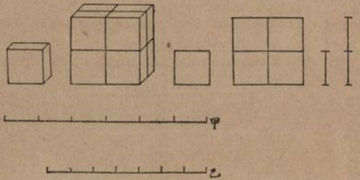
幾何原本六

第一

大凡欲論諸物之不齊。必借同類之物以比之。始可以得其不齊之度數。如一線與他線相比。其度之或長或短。其數之或多或少。自能見之。如一面與他面相比。其面度之或大或小。其積數之或多或少。自能見之。又如一體與他體相比。其體度之或厚或薄。其積數之或多或少。亦自能見之。若將一線與一面相比。或一面與一體相比。既不同類。又不同形。則線之長短面之大小。體之厚薄。俱不可辯矣。故曰欲論諸物之不齊。必借同類之物以比之也。

第二

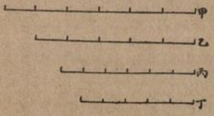
將兩數相比。其度互爲大小。則謂之比例。其比者、與所比者、俱謂之率。率者。法也。矩也。以數互相準之之謂也。其比之數爲前率。其所比之數爲後率。如甲乙二數互相爲比。其相較之分甲數之度爲長。其分爲多。



乙數之度爲短其分爲少如是以比之故謂之二率甲爲比之之數故謂之前率乙爲所比之數故謂之後率焉

第三

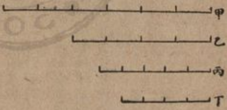
有四率兩兩相比其一率與二率之比同於三率與四率之比則謂之同理比例也如甲乙丙丁四數甲與乙比丙與丁比苟乙爲甲六分之五丁爲丙六分之五則甲與乙之比例丙與丁之比例此兩比例相同而乙有甲幾分之數卽可知丁有丙幾分之數矣故凡四率內將一率與三率分數定爲相等二率與四率分數亦定爲相等其度之長短雖有不同苟分數定準則一率與二率之比卽如三率與四率之比也夫甲乙丙丁四線內甲第一線與丙第三線俱各定爲六分乙第二線與丁第四線俱各定爲五分則甲度之長雖大於丙度之長其分數則俱爲六而乙度之長雖大於丁度之長其分數亦俱爲五故知乙第二線度與甲第一線度之六分之五分相等丁第四線度亦與丙第三線度之六分之五分相等所以甲線之比乙線卽如丙線之比丁線而謂之同理比例也



第四

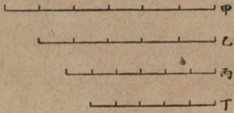
凡四率兩兩相比其一率與二率相比之分若大於三率與四率相比之分則爲不同理之比例而比例

不得行也。如有甲、乙、丙、丁四數。甲與乙、丙與丁、各互相爲比。苟甲第一數與乙第二數相比之分爲六與四。其丙第三數與丁第四數相比之分爲五與四。則此甲與乙之比。大於彼丙與丁之比矣。故凡如此例者。以一率二率相比之分爲準。則三率四率相比之分爲小。若依三率四率相比之分爲準。則一率二率相比之分又大。故謂之不同理之比例。而比例四率不能行也。



第五

凡有四率。一率之度與二率之度相比分數。若同於三率之度與四率之度相比分數。則此四率又謂之相當比例四率焉。如甲、乙、丙、丁、四線。苟甲線與乙線相比之度。與丙線與丁線相比之度。其分數同。則此四線謂之各相當線。而每兩率相比。其每度之分數同。故又謂之相當比例四率也。



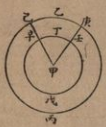
第六

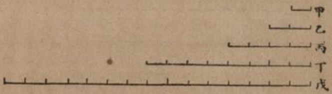
凡三率互相爲比。其一率與二率之比。同於二率與三率之比。則謂之相連比例率也。如甲、乙、丙、三數互

相爲比。苟甲數與乙數之比。同於乙數與丙數之比。則此甲、乙、丙、三數。謂之相連比例率矣。若相連比例率內。將一率與三率比之。則爲隔一位加一倍之比例。或有相連比例四率。將一率與四率比之。則爲隔二位加二倍之比例。大凡有幾率隔幾位以比者。皆以隔幾位而爲加幾倍之比例也。如甲、乙、丙、相連比例率內。其甲與丙之比。爲隔一位加一倍之比例。又或甲、乙、丙、丁、戊、五數。俱爲相連比例率。其甲與丁之比。即爲隔二位加二倍之比例。而甲與戊之比例。又爲隔三位加三倍之比例矣。

第七

相當比例四率。爲數學之要。因其理之所該最廣。故設爲變圜圖以申明之。立甲點爲心。作乙丙一大圜。丁戊一小圜。此二圜界各具三百六十度。故皆可以爲三百六十分。首卷第十七節云・凡圜無論大小・俱定爲三百六十度・於是自圜之甲心過小圜界之辛壬二處。至大圜己庚二處作二線。則大圜之己甲庚小圜之辛甲壬。俱同一甲角。此甲角相對之己庚弧界。設爲六十度。則爲乙丙大圜三百六十分中之六十分矣。乙丙大圜之己庚弧界度。既爲六十分。則丁戊小圜之辛壬弧界度。亦爲六十分矣。大凡角度。俱定於相對之

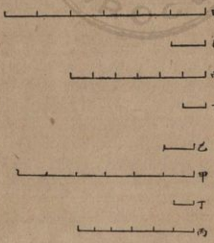




圜界。見首卷第九節。今此大圜之己庚弧界。小圜之辛壬弧界。俱與一甲角相對。其度雖依圜之大小不同。而分數則等。分數既等。則大圜小圜大弧小弧兩兩互相爲比。卽如四率之兩兩相比。爲同理比例矣。是以大圜之三百六十分爲一率。自大圜所分之己庚弧之六十分爲二率。小圜之三百六十分爲三率。自小圜所分之辛壬弧之六十分爲四率。其乙丙大全圜。與本圜己庚分之比。卽同於丁戊小全圜。與本圜辛壬分之比也。故凡各率各度雖異。相當之分數若同。則一率與二率之比。必同於三率與四率之比。而俱謂之順推比例矣。要之分合加減各率之法。總不越此圖之互轉相較之理也。

第八

一種反推比例。將一率與二率之比。同於三率與四率之比者。反推之以二率與一率爲比。四率與三率爲比。其所比之例仍同。故亦謂之相當比例率也。如甲、乙、丙、丁、四數。將甲與乙之比。同於丙與丁之比。反推之。以乙與甲爲比。丁與丙爲比。則所比之例。仍同於相當比例率焉。以前雙圜圖解之。蓋甲數與乙數之比例。卽乙丙大圜全界。與所分己庚弧界之比例。丙數與丁數之比例。卽丁戊小圜全界。與所分辛壬弧界之比例也。今反以乙與甲爲比。丁與丙爲比。卽如以乙丙大圜所分之己庚弧界、與乙丙大圜全界爲比。丁戊小圜所

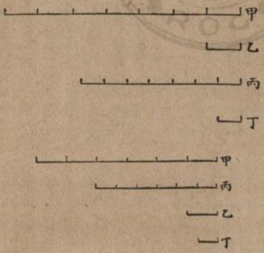


分之辛壬弧界與丁戊小圜全界爲比也因其以二率爲一率以三率爲四率前後互移故謂之反推比例然名雖爲反推比例而相當比例之率仍與順推比例相同也

第九

一種遞轉比例將一率與二率之比同於三率與四率之比者轉較之以一率與三率爲比二率與四率爲比其所比之例仍爲相當比例率也如甲乙丙丁四數將甲與乙之比同於丙與丁之比轉較之以甲與丙爲比乙與丁爲比則所比之例仍同於相當比例率也如前雙圜圖

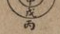
乙丙大圜全界一率與所分己庚弧界二率之比同於丁戊小圜全界三率與所分辛壬弧界四率之比若轉較之以乙丙大圜之一率與丁戊小圜之三率爲比大圜所分之己庚弧界二率與小圜所分之辛壬弧界四率爲比其度雖依圜之大小有異而分數則同其比例仍同於原比例故甲乙丙丁之四數亦如大小二圜爲互相比例之率而甲一率與丙三率之比即大圜與小圜之比乙二率與丁四率之比即大圜所分弧界與小圜所分弧界之比也蓋以



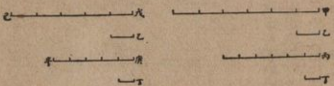
三率爲二率.以二率爲三率.遞轉相較.故謂之遞轉比例.其相當比例之四率.雖遞轉以較之.亦仍爲相當比例之四率也.

第十

一種分數比例.彼四率之中.以一率與二率之比.同於三率與四率之比矣.若將此相比之率所較之分截開.以一率與二率之較爲一率.與二率爲比.以三率與四率之較爲三率.與四率爲比.則其所比之例.仍爲相當比例率也.如甲、乙、丙、丁四數.於甲數內減去乙數之分爲戊己.丙數內減去丁數之分爲庚辛.乃以戊己易甲與乙線爲比.以庚辛易丙與丁線爲比.則所比之例.仍同於相當比例率也.如前雙圜圖.



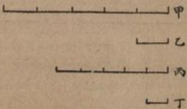
於乙丙大圜全界內.減去所分己庚弧界一段.仍與己庚弧界爲比.丁戊小圜全界內.減去所分辛壬弧界一段.仍與辛壬弧界爲比.亦與大圜全界與大圜所分弧界.小圜全界與小圜所分弧界相比之理同.故此甲線內截去乙所成戊己.仍與乙相比.卽如乙丙大圜全分.截去己庚弧界一段.仍與己庚弧界相比.而丙線內截去丁所成庚辛.仍與丁相比.卽如丁戊小圜全分.截去辛壬弧界一段.仍與辛壬弧界相比也.其比例仍同於相當比例四率.但因其各分內有分開相減之故.所以謂之分數比例也.



第十一

一種合數比例。有四率。以一率與二率之比。同於三率與四率之比矣。若將此相比之率併之。以一率與二率相加爲一率。仍與二率爲比。以三率與四率相加爲三率。仍與四率爲比。其所比之例。亦仍同於相當比例之四率也。如甲、乙、丙、丁、四數。以甲數與乙數相加共爲一率。與乙數爲比。丙數與丁數相加共爲三率。與丁數爲比。則所比之例。仍同於相當比例四率也。此合數比例。與分數比例之理。互相對待。彼分數比例。以二圜全界內減去所分弧界一段。仍與所分弧界一段爲比。今此合數比例。卽如二圜全界內所分大段加入所分弧界一小段。卽是全界。而與所分弧界一段爲比也。其所比之理。仍同於相當比例四率。但因有相加之分。故謂之合數比例焉。

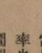
雙圜圖



第十二

一種更數比例。以一率與二率之比。同於三率與四率之比者。更之。將一率與二率相減。用其餘分爲二率。仍與一率爲比。又將三率與四率相減。用其餘分爲四率。仍與三率爲比。則其比例之理。仍同於相當比例四率也。如甲、乙、丙、丁、四數。於甲第一率內減去乙第二率。所餘爲戊己。乃以戊己立乙第二率之位。而以甲與戊己爲比。復於丙第三率內減去丁第四率。所餘爲庚辛。乃以庚辛立丁第四率之位。而以丙

與庚辛爲比其所比之理仍同於四率之比例故亦爲相當比例之四率也今以雙圜圖解之



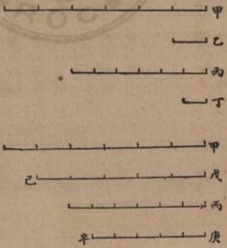
乙丙大圜三百六十度之全界

仍爲一率全界內減去所分之己庚弧界六十度一段餘己丙庚三百度一大段

爲二率丁戊小圜三百六十度之全界

仍爲三率全界內減去所分之辛壬弧界六十度一段餘辛戊壬三百度一大段

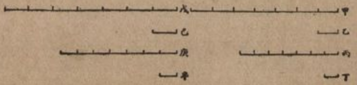
爲四率則乙丙大圜三百六十度之全界如甲所更之己丙庚三百度如戊己而丁戊小圜三百六十度之全界如丙所更之辛戊壬三百度如庚辛故其四率之兩相比例亦同爲相當比例率也凡四率之內前後之相差雖更入比之仍與相當比例之理同但以其數有更入之故所以謂之更數比例也



第十三

一種隔位比例。有兩相比例四率。將此一邊四率內。一率與末率爲比。彼一邊四率內。一率與末率爲比。則其所比之例。仍同於相當比例四率也。如此一邊有甲、乙、丙、丁四數。彼一邊有戊、己、庚、辛四數。此甲與乙之比。同於彼戊與己之比。此乙與丙之比。同於彼己與庚之比。此丙與丁之比。同於彼庚與辛之比。若將此四率隔位比之。使此一邊之甲與丁爲比。以彼一邊之戊與辛爲比。則其比例。仍同於相當比例四率也。試以雙圜圖之大小圜所分各弧界之兩線引長。

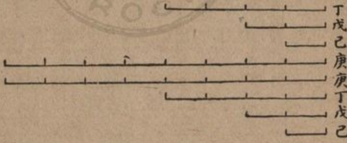
自庚壬過甲至癸丑、作一全徑線。復自己辛過甲至子寅、作一全徑線。則分大圜爲庚己、己丑、丑寅、寅庚四段。分小圜爲壬辛、辛癸、癸子、子壬四段。其大圜之庚己、己丑、丑寅、寅庚四段。爲相當四率。而小圜之壬辛、辛癸、癸子、子壬四段、亦爲相當四率。此二圜之所分四段。既俱爲相當四率。則其各相比例度之大小雖異。而分數相同。故大圜之庚己一段、與己丑一段之比。同於小圜之壬辛一段、與辛癸一段之比。大圜之己丑一段、與丑寅一段之比。同於小圜之辛癸一段、與癸子一段之比。大圜之丑寅一段、與寅庚一段之比。同於小圜之癸子一段、與子壬一段之比也。若以此各相當四率隔位以比之。其大圜之庚己一段、與寅庚一段爲比。而小圜之壬辛一段、與子壬一段爲比。其比例仍同於相當比例四率。但以其兩邊

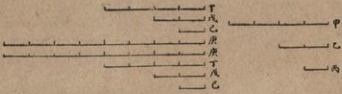


各相比例四率內。各取兩率隔位以比之。故謂之隔位比例耳。

第十四。

一種錯綜比例。有兩連比例三率。此一邊三率內中率與末率之比。同於彼一邊三率內中率與末率之比。則為相當比例之四率。苟錯綜其位分。以此一邊首率與末率隔位為比。復取另一數與彼一邊中率為比。而成同理之四率。則此另一數必與彼邊三率。為連比例四率矣。如此一邊有甲、乙、丙、連比例三數。彼一邊有丁、戊、己、連比例三數。將此一邊中率乙數與末率丙數之比。同於彼一邊中率戊數與彼一邊末率己數之比。則其比例為同理比例矣。今錯綜其位分。使此一邊所有之首率甲數、與所有之末率丙數隔位為比。復另取一庚數、與彼一邊所有之中率戊數為比。則其比例亦同於相當比例四率。而此庚數與彼邊丁、戊、己、三率。為連比例之數矣。何也。試以庚數置於彼一邊丁首率之上。則庚為首率。而丁移而為中率。戊又易而為末率。是故此一邊甲首率

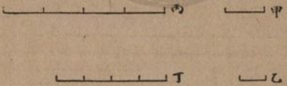




與丙末率之比同於彼一邊所取庚首率與所易戊末率之比但以兩連比例率互相易位增八比之之不同故名之爲錯綜比例耳

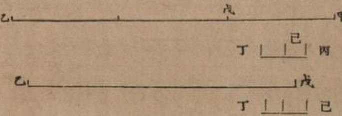
第十五

一種加分比例凡有二率依本度各加幾倍所加之分數若等則所成之二率互相爲比仍同於原二率之互相爲比謂之等倍相加之比例也如甲乙二數於甲數依本度加三倍爲丙於乙數依本度加三倍爲丁則此丙丁二數互相爲比仍同於甲乙二數之互相爲比也假若甲度爲一大分乙度爲一小分則甲加三倍成四大分之丙乙加三倍成四小分之丁以四大分之丙比四小分之丁以一大分之甲比一小分之乙其相當之分數既等固爲同理比例可知矣見本卷第三節故凡二率依本度各加幾倍其所加之分數若等其加分之率互相爲比必同於原率之互相爲比因於原數有相加之分故謂之加分比例也



第十六

一種減分比例凡有二率依本度各減幾倍所減之分數若俱等則所成之二率

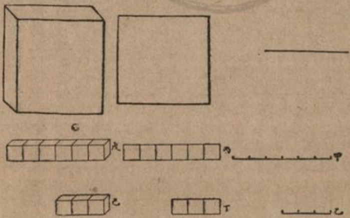


互相爲比．仍同於原二率之互相爲比．謂之等分相減之比例也．如有甲乙、丙丁、二數．其甲乙之三分內、減去甲戊一分．丙丁之三分內減去丙己一分．則戊乙、己丁、互相爲比．仍同於原甲乙、丙丁、全數之互相爲比也．何也．夫甲乙度爲三尺、丙丁度爲三寸．自甲乙度內減去一尺、則爲戊乙．自丙丁度內減去一寸、則爲己丁．以所餘之戊乙二尺、與所餘之己丁二寸爲比．以甲乙之全三尺、與丙丁之全三寸爲比．其相度之分數必等．故亦爲同理比例矣．凡二率之內無論減幾分．其所減之分數若等．則相比之理．必同於原數之比例．因於原數內減之．故又謂之減分比例也．

幾何原本七

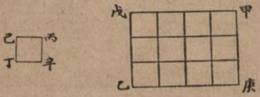
第一

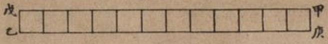
前卷所論比例之法。凡一十有二。相當比例一種。相連比例一種。正比例一種。反比例一種。遞轉比例一種。分數比例一種。合數比例一種。更數比例一種。隔位比例一種。錯綜比例一種。加分比例一種。減分比例一種。雖種種變化不窮。其每相當分數所成之率。依然一理。故其相比之例俱同。而皆爲相當比例四率也。是故線與線爲比。面與面爲比。體與體爲比。依前各種比例之法。線之比例若同。則爲相當比例線。面之比例若同。則爲相當比例面。體之比例若同。則爲相當比例體矣。夫線面體爲類不同。雖不能互相爲比。假使線面體之每相當分數若等。則按其各類相當分數比之。亦爲同理比例率也。如甲之六分線與乙之三分線相比。丙之六分面與丁之三分面相比。戊之六分體與己之三分體相比。此三種每相當分數既俱相等。故其比例亦俱相等。而六率互爲同理比例可知矣。



第二

大凡直角平方面積。皆生於二線之度。故欲知方面所生比例之分。將其二形之縱橫線分考之。即可得而知矣。如甲乙、丙丁、直角平方之二面。欲知其所生比例之分。則視甲乙大形之甲戊橫線長度。得彼丙丁小形之丙己橫線長度爲三倍。而甲乙大形之甲庚縱線寬度。得彼丙丁小形之丙辛縱線寬度爲二倍。假若將甲乙大形。自中線平分爲甲癸、壬乙、二形。其甲癸形之甲壬寬度。丙丁形之丙辛寬度。必俱相等。其甲戊橫線長度。既仍與丙己橫線長度爲三倍。其所分之甲癸形。必與丙丁三形相等。再彼壬乙形。亦與丙丁三形相等。則此二形相合之甲乙一全形。比之丙丁小形爲六分可知矣。又或甲乙大形之甲戊橫線長度。得丙丁小形之丙己橫線長度爲四倍。甲乙大形之甲庚縱線寬度。得丙丁小形之丙辛縱線寬度爲三倍。則大形與小形四倍者有三。而大形比小形爲十二分可知矣。再或甲乙大形之甲戊橫線。比丙丁小形之丙己橫線爲十二倍。丙丁小形之丙辛縱線。反比甲乙大形之甲庚縱線爲三倍。則甲乙大

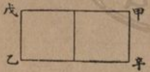


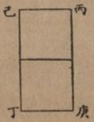


形之甲戊橫線之長雖比丙丁小形之丙己橫線之長多十一倍而甲乙大形之甲庚縱線之寬又比丙丁小形之丙辛縱線之寬少二倍矣將此縱橫二線之多少較之甲乙大形比丙丁小形爲四倍而丙丁小形爲甲乙大形之四分之一於是以二形之縱橫多少互相較對以比例之始得知此形與彼形之比例焉故凡直角平方面形與他一形相比其比例有二以此形之長與他形之長比之爲一比例以此形之寬與他形之寬比之爲一比例兩形相比之間而兼兩比例者正以平面之積自二線之度生之之故也

第三

有兩直角方面形若將此方面橫界與他方面橫界爲比又將他方面縱界與此方面縱界爲比其比例若同則此兩方面必相等也如甲乙、丙丁、兩方面形甲乙形之甲戊橫界比丙丁形之丙己橫界大一倍而丙丁形之丙庚縱界比甲乙形之甲辛縱界亦大一倍則甲乙、丙丁、兩形之分必相等是知兩方面形縱橫之分互相較對則兩方面之積可知矣

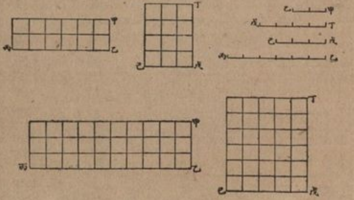




第四

凡有相比例四率其二率與三率相乘一率與四率相乘則所得之分數俱相等也如甲乙、丁戊、戊己、乙

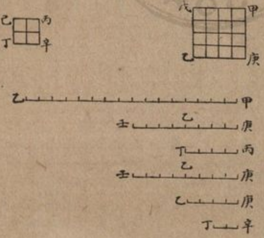
丙、相比例四率。甲乙一率爲二分。丁戊二率爲四分。戊己三率爲三分。乙丙四率爲六分。將丁戊二率爲縱線。戊己三率爲橫線。以之相乘。又將甲乙一率爲縱線。乙丙四率爲橫線。以之相乘。其所得之丁己一方面形。甲丙一方面形。其分數俱是十二。互相等矣。然則丁己形之丁戊縱度。雖比甲丙形之甲乙縱度大一半。而丁己形之戊己橫度。復比甲丙形之乙丙橫度少一半。故其縱橫互較之分相等。而其積亦等也。是故四率中凡有三率。欲求其不知之一率。將兩率之分相乘。所得之數。以一率之分除之。卽得其一率矣。設如甲乙三分爲一率。丁戊六分爲二率。戊己五分爲三率。乙丙十分爲四率。今只知一率二率三率之分。欲推四率。則以丁戊六分二率。與戊己五分三率相乘。爲丁己三十分。乃以甲乙三分一率除之。卽得乙丙十分四率矣。此以小分爲首率者也。或知乙丙、戊己、丁戊之三率。而推甲乙之一率。則以乙丙十分爲一率。戊己五分爲二率。丁戊六分爲三率。二率與三率相乘。一率除之。卽得甲乙之四率矣。此以大分爲首率者也。又或知甲乙、丁戊、乙丙之三率。而推戊己之一率。則以丁戊爲一率。甲乙爲二率。乙丙



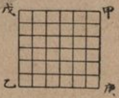
爲三率二率與三率相乘一率除之卽得戊己之四率矣此卽反推比例之理也又或知戊己、乙丙、甲乙之三率而推丁戊之一率則以戊己爲一率甲乙爲二率乙丙爲三率二率與三率相乘一率除之卽得丁戊之四率矣此卽遞轉比例之理也

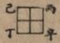
第五

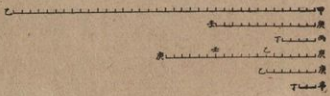
凡有兩直角方面形此一方面之橫界與他一方面橫界爲比此一方面之縱界與他一方面縱界爲比其比例若等則此兩方面之比例比之兩界之比例爲連比例隔一位相加之比例也如甲乙丙丁同式二方面形其甲乙形之甲戊橫界爲丙丁形丙己橫界之二倍而甲乙形之甲庚縱界亦爲丙丁形丙辛縱界之二倍則甲乙形面積與丙丁形面積之比比之甲乙形之一界與丙丁形之一界之比者卽如連比例三率隔一位相加之比例矣蓋甲乙方面之縱橫界既爲丙丁方面縱橫界之二倍則甲乙方面內如丙丁方面之二倍者有二二其二爲四故甲乙方面積比丙丁方面積爲四倍今甲乙方面積爲一十六分與丙丁方面積之四分相比較之甲乙方界之四分與丙丁方界之二分相比者不同蓋



丙丁四得甲乙十六之四分之一而辛丁二得庚乙四之二分之一以四分比一分較之二分比一分不爲二倍乎故欲求其比例相連之率則於甲乙形之界二倍之得八分與丙丁方界二分爲比卽如甲乙方面積十六與丙丁方面積四分之比矣夫八與十六四與八二與四皆二分之一之比例而十六隔八與四比八隔四與二比則皆成四分之一之比例故十六與四較之四與二爲兩界上連比例隔一位相加之比例也又如甲乙方面之縱橫界爲丙丁方面縱橫界之三倍則甲乙方面內如丙丁方面之三倍者有三三其三爲九故甲乙之面積比丙丁面積爲九倍今甲乙之積爲三十六分與丙丁方面積四分相比較之甲乙方界之六分與丙丁方界之二分相比者不同蓋丙丁四得甲乙三十六之九分之一而辛丁二得庚乙六之三分之一以九分比一分較之三分比一分不爲三倍乎故欲求其比例相連之率則於甲乙形之界三倍之得十八與丙丁方界二分爲比卽如甲乙方面積三十六與丙丁方面積四之比例矣蓋十八與六



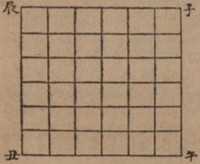




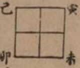
六與二皆三分之一之比例而三十六隔十二與四比十八隔六與二比則皆爲九分之一之比例故三十六與四較之六與二亦爲兩界上連比例隔一位相加之比例也

第六

凡直角方面形有二種一爲長方一爲正方因其縱橫界之比例各異故其所生之形不同而積不得互相爲比也如欲比之必以長方與長方爲比正方與正方爲比其比例始行如甲乙丙丁兩長方面形其甲乙形之甲戊橫界與丙丁形之丙己橫界爲大一倍甲乙形之甲庚縱界與丙丁形之丙辛縱界亦爲大一倍其比例相同若以甲乙形之甲戊橫界與丙丁形之丙辛縱界爲比則大三倍而甲乙形之甲庚縱界與丙丁形之丙己橫界爲比止大一分猶不得大一倍其比例則異故甲乙形所生之積爲二十四而丙丁形所生之積爲六俱爲長方形焉又如子丑寅卯兩正方形其子丑形之子辰橫界與寅卯形之寅己橫界之比子丑形之

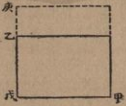


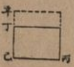
子午縱界與寅卯形之寅未縱界之比。俱爲大三倍。而比例相同。復以子丑形之子辰橫界。與寅卯形之寅未縱界爲比。子丑形之子午縱界與寅卯形之寅己橫界爲比。亦各大三倍。而比例相同。故子丑形所生之積爲三十六。而寅卯形所生之積爲四。俱爲正方形焉。以此四形兩兩相比。則甲乙長方形與丙丁長方形爲比。而子丑正方形與寅卯正方形爲比。各爲相當比例之四方面也。



第七

有兩同式長方面。於兩形相當之二界各作兩正方面。互相爲比。即同原兩長方面之互相爲比也。如甲乙、丙丁、兩直角長方面。在甲戊、丙己、相當二橫界。各作甲庚、丙辛、兩正方面。則所作甲庚、丙辛、兩正方面互相爲比。即同於原有之甲乙、丙丁、相同之兩長方面之互相爲比也。夫甲乙、丙丁、同式之兩長方面積。既爲隔一位相加之比例。則所作甲庚、丙辛、同式之正方面積。亦必爲隔一位相加之比例。然則甲乙、丙丁、原有之兩面互相爲比。與所作甲庚、丙辛之正方面之互相爲比。其爲同理之比例無疑矣。





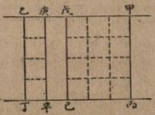
第八

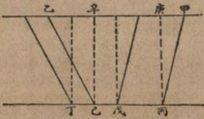
大凡二平行線內。所有直角方面互相爲比。同於其底之互相爲比也。如甲乙、丙丁、二平行線內。有甲己、

庚丁、兩直角方面.其甲己面與庚丁面之比.即同於甲己面之丙己底線、與庚丁面之辛丁底線之比也.蓋甲己面之丙己底線.與庚丁面之辛丁底線爲三倍.而甲己面之甲丙縱線與庚丁面之庚辛縱線.因同在二平行線內.其度固同.今以二面縱線.俱依庚丁面之庚辛分數分之.皆爲四倍.則甲己面爲一十二分.而庚丁面爲四分矣.以甲己面之十二分.與庚丁面之四分爲比.即如甲己面之丙己底三分.與庚丁面之辛丁底一分之比.故其比例相同也.

第九

凡二平行線內.所有二界平行斜方面互相爲比.同於其底界度之互相爲比也.如甲乙、丙丁、二平行線內.有甲戊、乙丁、兩斜方面.積互相爲比.即同於丙戊、己丁、兩底界之互相爲比也.試將甲戊、乙丁、兩斜方面之丙戊、己丁、兩底界上.立庚戊、辛丁、兩直角面.則此兩直角面因與兩斜方面同底同高.其積必等.見三卷第八節.前節言凡二平行線內所有直角方面互相爲比.同於其底之互相爲比.此甲戊、乙丁、兩斜方面.既與同底所立庚戊、辛丁、兩直角面相等.則甲戊、乙丁、兩斜方面互相爲比.必同於丙戊、己丁、兩底界之互相爲比可知矣.故凡二平行線內所有面積相比之分數.必與底界相比之

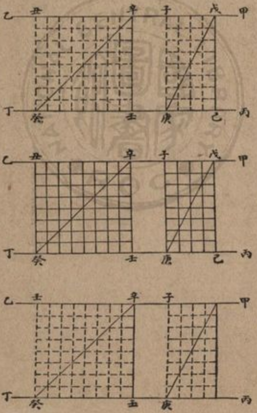




分數同也

第十

凡二平行線內、所有三角形面積互相爲比、亦同於其底界度之互相爲比也。如甲乙、丙丁、二平行線內、有戊己庚、辛壬癸、兩三角形、其內所函面積互相爲比、卽同於己庚、壬癸、兩底界之互相爲比也。何也。凡二平行線內所有三角形、得其同底所立四邊形之一半。今以甲乙、丙丁、二平行線內之戊己庚三角形、同底立一戊己庚子四邊形、辛壬癸三角形、同底立一辛壬癸丑四邊形、則戊己庚三角形、爲戊己庚子四邊形之一半、而辛壬癸三角形、爲辛壬癸丑四邊形之一半。如以兩三角形面積互相爲比、卽同於兩四邊形面積之互相爲比、而爲相當比例四率矣。其面積旣互

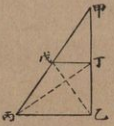


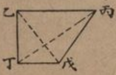
相爲比。則其兩三角形面積相比。同於兩三角形底之相比者。亦如兩四邊形相比。同於兩四邊形底之相比矣。然則戊己庚、辛壬癸兩三角形面積互相爲比。必同於己庚、壬癸兩底界互相爲比者可知也。今壬癸底界既比己庚底界大一倍。故辛壬癸三角形面積。必比戊己庚三角形面積亦大一倍也。

幾何原本八

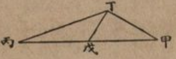
第一

凡三角形內與其底線平行作一直線則所截三角形之兩邊線互相為比例線其兩邊線所分各二段互相為比為相當比例四率而每邊所截之一段與本全線比之亦為相當比例四率也如甲乙丙三角形內與乙丙底線平行作一丁戊線則分甲乙一邊為甲丁丁乙二段分甲丙一邊為甲戊戊丙二段其甲乙一邊之甲丁丁乙二段互相為比甲丙一邊之甲戊戊丙二段互相為比其比例俱同為相當比例四率矣又如甲乙一邊之甲丁一段與本邊甲乙全線為比甲丙一邊之甲戊一段與本邊甲丙全線為比其比例亦俱同為相當比例四率矣今以三角形按所截分分為各式以各式面積互相比者考之自丁戊線之丁戊二端作丁丙戊乙二線則甲乙丙一三角形分為四三角形此四三角形內所有之乙戊丁丙丁戊兩三角形既在乙丙丁戊二平行線之間又共立於一丁戊之底其二





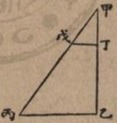
形之積必等。見三卷第十節。於此二形各加一所截甲丁戊小三角形。即成甲戊乙、甲丁丙兩三角形。其積亦必相等。又如甲丁戊、乙丁戊兩三角形之底俱在甲乙一直線上。而兩三角形之戊角又共在一戊處。其兩形必在二平行線之間。而甲丁戊、丙丁戊兩三角形之底俱在甲丙一直線上。而兩三角形之丁角又共在一丁處。其兩形亦在二平行線之間。見三卷第十二節。因各三角形兩兩俱爲二平行線所限。故其面積互相爲比。必同於其底界之互相爲比也。見七卷第十節。此所以甲丁戊、丙丁戊兩三角形積互相爲比。與其甲戊、丙戊兩底線之互相爲比同。其甲丁戊、乙丁戊兩三角形積互相爲比。與其甲丁、丁乙兩底線之互相爲比亦同也。再甲乙戊三角形之積。既與甲丙丁三角形之積相等。則以甲乙丙之全形與所分之甲乙戊三角形。或與所分之甲丙丁三角形相比。其比例必俱相同。而甲丙丁三角形之甲丁底與甲丙乙全形之甲乙底互相爲比。甲乙戊三角形之甲戊底與甲乙丙全形之甲丙底互相爲比。亦必俱相同矣。因其各三角形得互相爲比例。故其所截兩邊線兩兩爲相當比例率也。

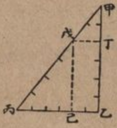


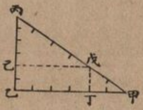
第二

凡三角形內。與底平行作一直線。其所截兩邊線之每一段。與各邊全線之比。即同於所作線與底線之比也。如甲乙丙三角形內。與乙丙底平行作一丁戊線。此丁戊線所截甲丁一段。與甲乙全線之比。甲戊

一段與甲丙全線之比皆如丁戊線與乙丙底線之相比也假若將甲乙丙三角形之甲乙邊線爲底而與甲乙底線平行作一戊己線卽成戊己乙丁四邊長方形其兩兩平行線之度俱各相等然三角形之兩邊與所截之每段既互相爲比（如前節所云）則此乙丙邊之乙己一段與乙丙邊全線之比卽同於彼甲丙邊之甲戊一段與甲丙邊全線之比而丁戊之平行線既與乙己平行線度相等則此丁戊平行線與原底乙丙線之比亦必同於彼甲丙邊之甲戊一段與甲丙邊全線之比矣故甲戊段爲一率甲丙邊全線爲二率丁戊平行線爲三率乙丙底線爲四率爲相當比例四率也又如甲乙邊之甲丁一段與甲乙邊全線之比既同於丁戊平行線與乙丙底線之比則甲丁段爲一率甲乙邊全線爲二率丁戊平行線爲三率乙丙底線爲四率亦爲相當比例四率也苟甲乙邊全線爲六分則甲丁段得其六分之二分乙丙邊全線爲六分則丁戊段亦得其六分之二分所以成兩兩相當比例之率也

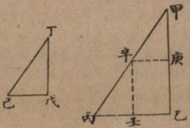






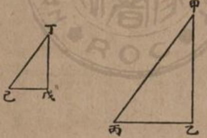
第三

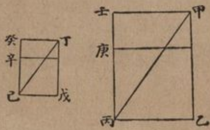
凡大小兩三角形其相當之二角度若兩兩相等則其餘一角亦必相等如此類兩三角形謂之同式三角形也雖其內容積分不同而其相當各界互相爲比俱爲相當比例之率焉如甲乙丙丁戊己大小兩三角形其甲角與丁角等乙角與戊角等則所餘丙角必與己角等而爲同式三角形也二卷第三節。言凡三角形之三角相併。與二直角等。則此大小兩三角形之各三角相併。亦俱爲二直角。於二直角中。減去大形之甲角乙角。餘爲丙角。減去小形之丁角戊角。餘爲己角。其所減之數既等。則所餘之數亦必等矣。若於大形內與乙丙平行作庚辛線與甲乙平行作辛壬線則成甲庚辛辛壬丙兩小三角形此兩小形之相當角度與大形之相當角度亦必俱等故皆謂之同式形也凡同式之形其容積雖不一而其各界互相爲比皆爲相當比例之四率是故以大三角形之甲乙全線與所截甲庚一段之比即如大三角形之甲乙一邊與小三角形之相當丁戊一邊之比也大三角形之甲丙全線與所截甲辛一段之比即如大三角形之甲丙一邊與小三角形之相當丁己一邊之比也大三角形之乙丙底線與所截庚辛底線之比即如大三角形之乙丙底線與小三角形之戊己底線之比也至於甲乙丙大三角形與所截辛壬丙小三角形相當各界之比亦如甲乙丙大三角形與丁戊己小三角形相當各界之比也由此推之凡同式之形其相當各界互相爲比皆爲相當比例之率可知矣



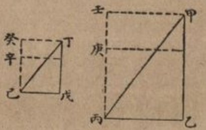
第四

同式直角三角形面積。互相爲比。同於三角形各相當界所作方形之互相爲比。而同式三角形面積互相爲比者。比之各相當界互相爲比。則爲連比例內隔一位相加之比例也。如甲乙丙、丁戊己兩同式直角三角形。其面積互相爲比。卽同於此兩三角形之乙丙、戊己相當二界所作庚乙、辛戊兩方形互相爲比之比例。而此兩三角形之面積互相爲比。比之乙丙、戊己相當二界互相爲比之比例。則爲連比例內隔一位相加之比例矣。蓋兩三角形之乙、戊二角俱爲直角。若與乙丙、戊己二線平行作甲壬、丁癸二線。又與甲乙、丁戊二線平行作壬丙、癸己二線。卽成壬乙、癸戊兩直角長方形。此甲乙丙、丁戊己兩三角形。因與所作壬乙、癸戊兩直角長方形在二平行線內。同爲一底。其積爲一半。將半與半相比者。卽同於全與全之相比。故甲乙丙、丁戊己兩三角形互相爲比。必同於壬乙、癸戊兩直角長方形互相爲比之比例矣。夫依乙丙、戊己、甲乙、丁戊各相當二界所作壬乙、癸戊兩長方形互相爲比之比例。旣與甲乙丙、丁戊己兩三角形互相爲比之比例同。則依乙丙、戊己相當二界所作庚乙、辛戊兩





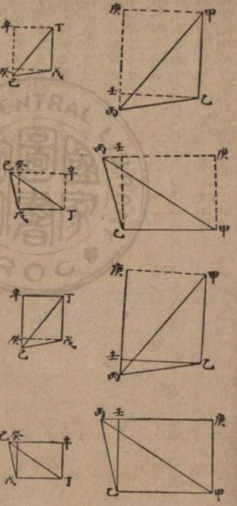
正方形互相爲比之比例。亦與壬乙、癸戊、兩長方形、與甲乙丙、丁戊己、兩三角形互相爲比之比例同矣。又凡直角兩方形。其兩界互相爲比之比例若俱同。則兩形面積互相爲比之比例。較之兩界互相爲比之比例。爲隔一位相加之比例。見七卷第五節。今甲乙丙、丁戊己、兩三角形之各依底線所作正方形、互相爲比。較之二底線互相爲比之比例。即爲隔一位相加之比例。夫甲乙丙、丁戊己兩三角形之面積互相爲比者。旣與所作庚乙、辛戊、兩正方形面積互相爲比之比例同。則此所作兩正方形面積相比。較之兩底相比。爲隔一位相加之比例。而甲乙丙、丁戊己、兩三角形面積互相爲比。較之乙丙、戊己、相當二界互相爲比之比例。亦爲隔一位相加之比例可知矣。



第五

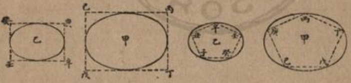
同式無直角三角形面積互相爲比。同於三角形各相當界所作方形之互相爲比。而三角形面積互相爲比者。比之各相當界互相爲比。則爲連比例內隔一位相加之比例也。如甲乙丙、丁戊己、兩同式三角形。雖無直角。然其相當各角俱等。則此兩形面積互相爲比。同於在此兩形之甲乙、丁戊、相當二界所作方形互相爲比之比例。而兩形之面積互相爲比者。比之甲乙、丁戊、相當二界互相爲比之比例。則爲連比例內隔一位相加之比例矣。試自兩形之丙、己二角。與甲乙、丁戊、二界平行作丙庚、己辛、各一線。又自甲、丁二角至庚、辛二線之末作甲庚、丁辛、二線。又與此二線平行。自乙、戊二角至壬、癸二處作乙壬、戊癸、

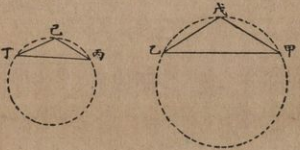
二線成庚乙辛戊兩直角長方形此兩長方形與甲乙丙丁戊己兩三角形俱在兩平行線內又同爲一底則此兩三角形面積爲彼庚乙辛戊兩長方形之一半將半與半相比者同於全與全之相比故甲乙丙丁戊己兩三角形面積之比例必同於庚乙辛戊兩長方形之比例矣夫同式兩長方形之比例同於相當界所立正方形之比例而同式正方形之比例比之各相當界之比例爲連比例隔一位相加之比例今此兩三角形面積之比例既同於庚乙辛戊兩長方之比例亦必同於兩正方之比例則兩三角形面積之比例比之兩界之比例爲連比例隔一位相加之比例可知矣



第六

有衆多邊形。其邊數同相當各角俱等而相當界之比例又同。則謂之同式形也如有甲乙丙丁戊、己庚辛壬癸、大小兩多邊形。其邊數俱爲五其相當甲己二角、乙庚二角、丙辛二角、丁壬二角、戊癸二角。各度俱等而甲乙邊與己庚邊之比。即同於乙丙邊與庚辛邊之比。其相當邊互相比之俱同者。即謂之同式多邊形也。又如衆曲線形。於其內外作各種直界形。其式若同。則謂之同式曲線形也。假如有甲、乙大小兩曲線形。在甲大形內作一丙丁戊己庚五邊形在

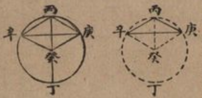




乙小形內作一辛壬癸子丑五邊形此所作兩五邊形之式若同則曲線形之式必同又如甲乙大小兩曲線形在甲大形外作一丙丁戊己四邊形在乙小形外作一庚辛壬癸四邊形此所作兩四邊形之式若同其曲線形之式亦必同故皆謂之同式曲線形也或如甲乙丙丁大小兩圜分於大圜分內作一戊甲乙三角形於小圜分內作一己丙丁三角形此所作兩三角形之式若同則圜分之式亦必同故謂之同式圜分也

第七

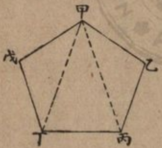
大小各圜分之式若同則其相對之圜心角度必俱等也如甲乙丙丁大小兩圜之戊甲己庚丙辛兩分之式相同其弧雖隨圜之大小各殊而自圜所分之度必同其各段所對二圜之壬癸心角度亦等矣夫戊甲己與庚丙辛兩段式既同則此內所函甲戊己丙庚辛兩三角形之甲丙相當兩界角之度必等若自甲丙二角過二圜心壬癸至對界乙丁作甲壬乙丙癸丁二線則成兩界角與兩心角蓋心角大於界角一倍故甲乙大圜之戊壬乙心角比戊甲乙界角大一倍乙壬己心角比乙甲己界角大一倍今將戊壬乙乙壬己兩心角倂之戊甲乙乙甲己兩界角倂

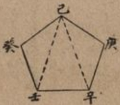


之。則所併之心角亦必比所併之界角大一倍矣。而丙丁小圜之庚癸丁、丁癸辛兩心角併之。亦必比庚丙丁、丁丙辛所併之兩界角大一倍。夫兩圜之兩界角度既等。而兩圜之所併之心角度又等。則兩界角相對之戊乙己、庚丁辛兩弧段之分數亦必相等。界角所對之弧分既等。則心角所對之弧分亦必相等。心角所對之弧分。即爲甲丙二界角相對之壬癸二心角之度也。

第八

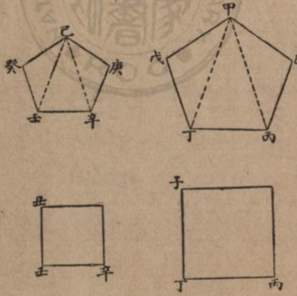
凡大小同式多邊形。分爲衆三角形。其相當三角形之式俱相同也。如甲乙丙丁戊、己庚辛壬癸兩同式五邊形。自大形甲角至丙丁二角。自小形己角至辛壬二角。各作二綫。則大形分爲甲乙丙、甲丙丁、甲丁戊三三角形。小形分爲己庚辛、己辛壬、己壬癸三三角形。而甲乙丙之形。與相當己庚辛之形同式。甲丙丁之形。與相當己辛壬之形同式。甲丁戊之形。與相當己壬癸之形同式。因其所分各三角形俱爲同式。故相當各角度必等。相當各角度既等。則其相當各界之比例亦必俱同。自五邊形所分之各三角形之相當界互相爲比之比例既同。則五邊形之相當各界互相爲比之比例亦必同。相當各界之比例相同。則兩形之式相同可知矣。





第九

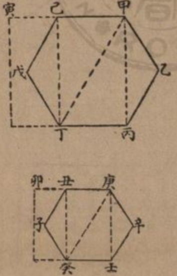
凡大小同式多邊形互相爲比。同於各形相當界所作方形之互相爲比。而比之各面相當界互相爲比之比例。爲連比例隔一位相加之比例也。如甲乙丙丁戊、己庚辛壬癸兩同式五邊形。於大形之丙丁界小形之辛壬界各作子丙丑辛大小兩方形。其大小五邊形互相爲比。必同於所作子丙、丑辛、大小二方形之互相爲比。大小五邊形。既同於大小兩方形之互相爲比。則比之丙丁、辛壬、相當二界互相爲比之比例。爲連比例隔一位相加之比例矣。若將甲乙丙丁戊、己庚辛壬癸、兩形分爲乘三角形。則相當各三角形之式必同。相當各三角形之式既同。則相當各三角形互相爲比。卽同於在三角形各相當界所作方形之互相爲比。而各三角形面積之互相爲比。較之各相當界互相爲比之比例。亦爲連比例隔一位相加之比例。夫所分乘三角形互相爲比。既同於所作方形之互相



爲比則衆三角形所合甲乙丙丁戊、己庚辛壬癸之大小五邊形互相爲比亦必同於丙丁、辛壬、相當界所作子丙丑辛大小兩方形之互相爲比而比之丙丁辛壬相當界互相爲比之比例爲連比例隔一位相加之比例可知矣

第十

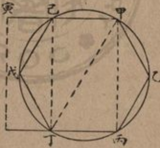
凡大小同式直界形互相爲比同於在所比各形內外所有同式形之各相當界所作正方形之互相爲比也如甲乙丙丁戊己、庚辛壬癸子丑大小兩直界形於此二形內所函之甲丙丁己、庚壬癸丑、二同式四邊形之甲丙、庚壬、相當二界作寅丙、卯壬正方形則兩直界形互相爲比卽同於兩正方形之互相爲比也若將甲乙丙丁戊己、庚辛壬癸子丑兩六邊形俱分爲三角形則其相當各三角形之式俱相同而相當各三角形互相爲比必同於甲丙、庚壬、相當二界所作寅丙、卯壬正方形之互相爲比矣此所分三角形之比例旣同於所作正方形之比例則大小兩形內各三角形之甲丙庚壬界又爲兩四邊形之共界而甲乙丙丁戊己、庚辛壬癸子丑、兩同式形互相爲比亦必同於其所函之甲丙丁己、庚壬癸丑兩四邊形之甲丙庚壬兩相當界所作寅丙、卯壬兩正方

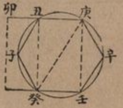


形之互相爲比可知矣。

第十一

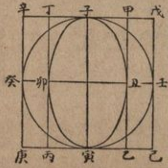
凡大小同式曲界形互相爲比。同於在所比各形內外所有同式形之各相當界所作正方形之互相爲比也。如甲乙丙丁戊己、庚辛壬癸子丑大小二圜。此二圜之中。雖各函一同式六邊形。各函一同式四邊形。又各函衆同式三角形。此大小二圜之積。互相爲比。必同於在圜內所函同式形之甲丙、庚壬相當二界所作寅丙、卯壬正方形之互相爲比也。大凡衆界形。或函圜或函於圜。其界數愈多。愈與圜界相近。而圜界分爲千萬段。即成千萬直界形。見四卷第十九二十等節。則大小兩圜之比例。固與內函相當直界形之比例等矣。夫相當直界形之比例。原同於兩形之相當界所作方形之比例。而圜界形之比例。又同於相當直界形之比例。則此大小二圜互相爲比之比例同於此二圜之幅線或徑線所作正方形互相爲比之比例可知矣。





第十二

凡圓面徑與橢圓面（一名鴨蛋形）高度等者其面積互相爲比之比例即同於函兩形各作切方形互相爲比之比例而圓形面積與橢圓形面積互相爲比之比例又同於圓形徑與橢圓形小徑互相爲比之比例也如子壬寅癸之圓面子丑寅卯之橢圓面其子寅高度俱同（圓徑即橢圓大徑）其面積互相爲比之比例必同於圓面外所作切圓戊己庚辛正方形與橢圓面外所作切圓甲乙丙丁長方形互相爲比之比例而子壬寅癸圓面與子丑寅卯橢圓面互相爲比之比例又同於圓面之壬癸徑與橢圓面之丑卯小徑互相爲比之比例也蓋平行線內兩面形互相爲比之比例同於其底界互相爲比之比例（見七卷第八節）今戊己庚辛正方形與甲乙丙丁長方形皆在戊辛己庚平行線內故戊己庚辛正方形與甲乙丙丁長方形互相爲比之比例同於己庚底與乙丙底互相爲比之比例而子壬寅癸圓面與子丑寅卯橢圓面亦在戊辛己庚平行線內則子壬寅癸圓面與子丑寅卯橢圓面互相爲比之比例必同於戊己庚辛正方形與甲乙丙丁長方形互相爲比之比例矣然戊己庚辛正方形之己庚底即圓面壬癸徑度而甲乙丙丁長方形之乙丙底又即橢圓面之丑卯徑度也夫平圓與橢圓之比例既同於正方形與長方形之比例而正方形與長方形之比例又同於

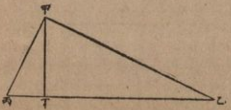


己庚底與乙丙底之比例.則圓面與撱圓面之比例.同於圓面之壬癸徑、與撱圓面之丑卯徑之比例可知矣.

幾何原本九

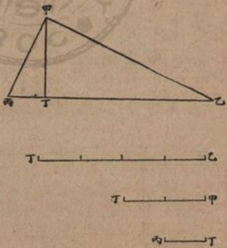
第一

凡直角三角形自直角至相對界、作一垂線則一形分爲兩形與原形共爲三同式直角三角形而其比例俱相同也如甲乙丙直角三角形自甲直角至相對乙丙界作一甲丁垂線則甲乙丙一形分爲甲丁乙、甲丁丙兩形此所分兩形與原有甲乙丙形之式俱相同而皆爲直角三角形其三形每相當各界之比例亦俱相同也蓋甲丁線既爲垂線則兩傍所分甲丁乙、甲丁丙二角必俱爲直角見首卷第十節是故甲乙丙三角形之甲角甲丁乙三角形之丁角其度相等而兩三角形又共一乙角其相當二角度既等則所餘各一角度自等見八卷第三節故甲乙丙之丙角與甲丁乙之甲角其度相等也而甲乙丙之甲角亦與甲丁丙之丁角相等此兩三角形又共一丙角故所餘之甲乙丙之乙角與甲丁丙之甲角其度亦等三三角形之每相當各角之度既等則三三角形之式必同三三角形之式既同則其每相當各界之比例亦俱相同可知矣



第二

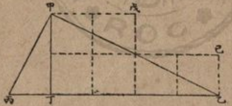
凡直角三角形。自直角至相對界、作一垂線。則所截之兩段。一爲一率。一爲三率。而所作之垂線爲中率。此三率卽爲相連比例率也。如甲乙丙直角三角形。自甲直角至相對乙丙界作一甲丁垂線。則截乙丙界爲兩段。其所截之乙丁段爲一率。則丁丙段爲三率。若丁丙段爲一率。則乙丁段爲三率。而所作甲丁垂線。總爲中率。故此乙丁、甲丁、丁丙三線。互爲相連比例三率也。蓋甲乙丁、甲丁丙兩三角形爲同式。故其相當之乙丁、甲丁、二界互相爲比。卽同於甲丁、丁丙二界之互相爲比也。今以乙丁線爲四分。丁丙線爲一分。則甲丁線必得二分。因四分與二分之比。必同於二分與一分之比。故爲相連比例三率也。

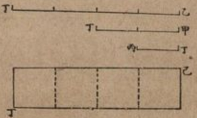


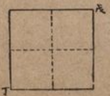
第三

直角三角形。自直角至相對界所作垂線、與所分二段。固爲相連比例三率。如依垂線度作一方形。則與所分二段。一爲寬度。一爲長度所作長方形之積相等也。如甲乙丙直角三角形。自甲直角至相對乙丙界作一甲丁垂線。截乙丙界爲兩段。遂成乙丁、甲丁、丁丙之連比例三率。今依甲丁垂線度作一戊丁正

方形。卽爲中率自乘之數。以甲丁垂線所截丁丙一段爲寬度。乙丁一段爲長度。作一己丁長方形。卽爲首率末率相乘之數。其戊丁正方形之積。必與己丁長方形之積相等也。何也。蓋同式兩三角之相當界互相爲比之比例同。故此乙丁界與甲丁界之比。卽同於甲丁界與丙丁界之比。乙丁線既爲一率。則甲丁線爲二率。甲丁線復爲三率。則丙丁線爲四率。然則此相連比例三率。又爲相當比例四率矣。因其可爲相當比例四率。故二率與三率相乘。一率與四率相乘。所得之分數相同。見七卷第四節。今既以甲丁爲二率。又爲三率。則甲丁自乘之數。卽是二率三率相乘之數。而乙丁一率與丙丁三率相乘、所得己丁長方形。卽與甲丁二率三率自乘之正方相等可知矣。此乃首率末率求中率之法也。要之首率末率相乘。中率相乘。中率相乘者。中率自乘。或二率三率相乘。俱在首率末率之中。故云。其所成之二式雖異。因俱自相連比例四率而生。故其積相等而得以爲準



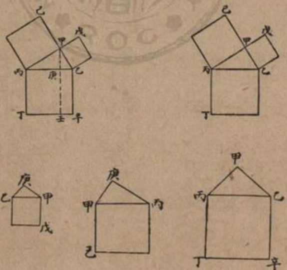




也.

第四

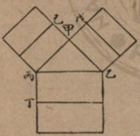
凡有直角三角形.其直角相對界所作方形之積.必與兩傍界所作兩方形之積相等也.如甲乙丙直角三角形.其甲直角相對乙丙界作一乙丁方形.其積必與甲乙、甲丙之兩傍線所作戊乙、己丙兩方形之積相等也.試自甲直角過相對乙丙界至方形辛丁界.作一甲庚壬垂線.則甲乙丙三角形.分爲甲乙庚、甲庚丙兩三角形.而乙丁正方形分爲乙壬、庚丁兩長方形.此所分甲乙庚、甲庚丙兩三角形.與甲乙丙原三角形爲同式.則其每相當界之互相比例必同矣.是以甲庚丙小三角形之庚丙小界.與丙甲大界之比.卽同於甲乙丙大三角形之甲丙小界.與乙丙大界之比.而爲相當比例四率也.然丙甲、甲丙之二率、三率.原爲一線.則庚丙、丙甲、乙丙.又爲相連比例三率矣.故丙甲中率所作己丙方形之積.與庚丙一率爲寬.乙丙三率爲長所作庚丁長

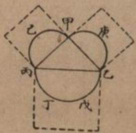


方形之積相等也。乙丁既爲正方形，則庚壬度必與方界乙丙各度等，故庚丁長方即同庚丙爲寬、乙丙爲長所作之長方也。又如甲乙庚、甲乙丙兩三角之乙庚、甲乙、乙甲、乙丙四界爲相當比例四率，又爲相連比例三率，故甲乙中率所作戊乙方形之積亦與乙庚一率爲寬、乙丙三率爲長所作乙壬長方形之積相等也。今庚丁、乙壬之兩長方形既與己丙、戊乙兩正方形等，則兩形相合之乙丁正方形亦必與己丙、戊乙兩正方形相等可知矣。

第五

凡直角三角形之三界所作同式三形，其一大界所作一形之積，必與二小界所作二形之積等也。如在甲乙丙直角三角形之乙丙、甲乙、甲丙三界作乙丁、戊乙、己丙三同式長方形，則乙丙大界所作乙丁一形之積，必與甲乙、甲丙二小界所作戊乙、己丙二形之積等也。又或如甲乙丙直角三角形於乙丙大界作乙戊丁丙一半圜，於甲乙、甲丙二小界作甲庚乙、甲己丙二半圜，則乙丙大界所作乙戊丁丙一半圜之積，必與甲乙、甲丙二小界所作甲庚乙、甲己丙二半圜之積等也。蓋依三界所作三形之式既同，故同式衆形互相爲比，即同於相當界所作正方形之互相爲比也。要之一大界所作一大形內減一小界所

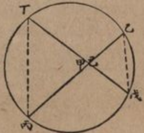




作一小形。即餘一小界所作一小形而一小界所作一小形內再加八一小界所作一小形。則爲一大界所作一大形矣。

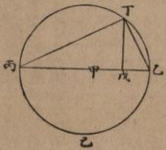
第六

一圜之內二絃線相交。所截之段。遞轉比之。其比例俱同。而爲相當比例四率也。如甲圜內乙丙、丁戊、二絃線相交於己。其所截之戊己一段。與己丙一段之比例。即同於乙己一段與己丁一段之比例。故戊己、己丙、乙己、己丁、四段。爲相當比例之四率也。何以見之。若自乙至戊。自丁至丙。復作二絃線。即成乙己戊、丁己丙、兩三角形。此兩三角形之乙角丁角。俱切於甲圜之戊丙弧段。其度相等。見四卷第十二節。再乙己戊之己角。丁己丙之己角。又爲二尖相對之角。其度亦相等。今乙丁二角之度既等。而兩己角之度又等。則所餘戊丙二角亦自等。兩三角形之相當各角既等。則其式必同。其式既同。則每相當各二線互相爲比之比例俱同。而戊己、己丙、乙己、己丁、四段。互相爲比例四率可知矣。



第七

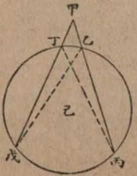
圜之徑線。不拘何處。作一垂線。則所截之兩段。一爲一率。一爲三率。而垂線爲中率。即爲相連比例三率也。如甲圜自丁界至乙丙徑線戊處。作一丁戊垂線。將乙丙徑線截爲兩段。其所截乙戊一段爲一率。戊丙一段爲三率。而



丁戊垂線爲中率。此乙戊、丁戊、戊丙、三線。爲相連比例三率也。試自圜界丁至乙、丙、二處。作丁乙、丁丙、二線。則成一乙丙丁三角形。其丁角既立於圜之乙己丙半界。故爲直角。見四卷第十四節。而丁戊垂線。乃自直角至相對乙丙底界所作之垂線。故所截乙戊一段爲一率。戊丙一段爲三率。而丁戊垂線爲中率。爲相連比例三率也。

第八

自圜外一點。過圜界二處至相對界作二線。以此兩全線互相爲比。卽同於圜界外所截之二段遞轉爲比之比例。而爲相當比例四率也。如己圜自圜外甲點。過圜界乙、丁、二處至相對界丙、戊、二處作二線。則甲丙、甲戊、兩全線互相爲比。必同於圜界外所截甲乙、甲丁、二段之遞轉相比。而爲相當比例四率也。試自圜界乙、丁、二處。至相對界丙、戊、二處作乙戊、丁丙、二線。則成甲丙丁、甲戊乙、兩三角形。此兩三角形之丙、戊、二角。既切於一圜之乙丁弧界。其二角之度必等。見四卷第十二節。再甲丙丁之甲角。甲戊乙之甲角。既共爲一角。其度自等。兩三角形各二角度俱等。則兩三角形必爲同式矣。故甲丙、甲戊、相當。二界互相爲比之比例。卽同於甲丁、甲乙、相當二界互相爲比之比例。是以甲丙與甲戊之比。同於甲丁與甲乙之比。將甲丙全線爲一率。甲戊全線爲二率。甲乙、甲



丁遞轉移之而以甲丁一段爲三率甲乙一段爲四率爲相當比例之四率也

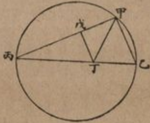
第九

凡函於圜內之三角形以其一角平分爲二過相對底界至相對界作一直線則所分角之小邊線與所作線之在三角形內一段之比即同於所作線之全分與所分角之大邊線之比也如函於圜內有甲乙丙三角形以甲角平分爲二分過所對乙丙底界至相對界作一直線即成甲丁戊一全線以三角形之甲乙小邊與所作甲丁戊線之甲丁一段之比即同於所作甲丁戊全線與三角形之甲丙大邊之比也何以言之若自圜界乙至戊作乙戊弦線即成甲乙戊甲丁丙兩三角形此兩三角形之戊丙二角俱切於圜界甲乙弧之一段其度必等而甲乙戊三角形之甲角甲丁丙三角形之甲角又爲一角所平分之兩角其度亦必等因此兩三角形各二角之度等故兩形爲同式兩三角形之式既同則兩形之相當二界互相爲比之比例俱同是以甲乙小分與甲丁小分之比即同於甲戊大分與甲丙大分之比也

第十

凡函於圜內之三角形以其一角爲兩平分自角至底作一線則所分底線兩段互相爲比即同於所分角之兩傍兩邊線之互相爲比也如函於圜內有甲乙丙三角形以甲角平分爲二分至乙丙底作甲丁

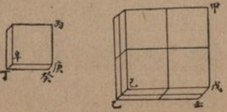
一線。則分乙丙底線爲乙丁、丁丙、兩段。以乙丁與丁丙之比。即同於以甲乙小邊線與甲丙大邊線之比也。試自所分底線之丁至甲丙線與甲乙平行作丁戊一線。即成戊丁丙一小三角形。蓋甲乙丙大三角形之乙角。戊丁丙小三角形之丁角。既爲乙甲、丁戊、平行線一邊之內外角。其度必等。見首卷第二十三節。而甲乙丙、戊丁丙兩三角形。又共一丙角。故此兩三角形之各二角度等。爲同式兩三角形也。再甲丁戊之丁角。乙甲丁之甲角。因爲平行線內二尖交錯之角。其度亦等。然則乙甲丁之甲角。既爲甲乙丙之甲角之兩平分。則甲丁戊之丁角。亦與甲丁戊之甲角度等矣。甲丁戊三角形之丁角甲角既等。則二角所對之丁戊、甲戊、二線亦必等矣。甲乙丙、戊丁丙、兩三角形既爲同式。而三角之度又俱等。則其甲乙丙大三角形之甲乙、甲丙、二線互相爲比。即同於戊丁丙小三角形之戊丁、戊丙、二線互相爲比之比例也。今戊丁、甲戊、二線其度既等。則甲乙線與甲丙線之比。又同於以甲戊線與戊丙線之比。至於丁戊平行線所截乙丁一段與丁丙一段之比。則又同於甲戊一段與戊丙一段之比矣。是故甲乙線與甲丙線之比。爲同於乙丁線與丁丙線之比也。



幾何原本十

第一

大凡直角立方體積皆生於面線互乘之度故欲知方體所生比例之分將所比形之長寬與厚詳較之即可得而知矣如甲乙丙丁直角立方二體其甲乙大形之戊己長比丙丁小形之庚辛長甲乙大形之戊壬寬比丙丁小形之庚癸寬甲乙大形之甲戊厚比丙丁小形之丙庚厚俱爲大一倍其甲乙大形之戊乙底平面積與丙丁小形之庚丁底平面積之比例將縱橫二線之長寬度分考之即得見七卷第二節既得二體底積之比例乃以二形之厚度復與底積比之即可知甲乙丙丁二體之比例矣蓋甲乙大體之戊己戊壬長寬之度既比丙丁小體之庚辛庚癸長寬之度大一倍則戊乙平面底形之內如庚丁平面底形二倍者有二矣然則甲乙大形甲戊之厚度既比丙丁小形丙庚之厚度大一倍則甲乙體形之內如丙丁體形四倍者有二可知矣是故欲知直角方體之比例以本體之長寬與厚互相比例以較之即得直角方體互相爲比之比例也

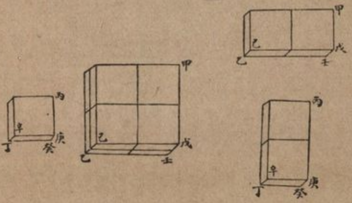


第二

有兩直角長方體若將此一體之底度與他一體之底度又將他一體之厚度與此一體之厚度爲比其比例若同則此二體之積必等也如甲乙丙丁兩直角長方體甲乙體之戊乙底度比丙丁體之庚丁底度大一倍而丙丁體之丙庚厚度比甲乙體之甲戊厚度亦大一倍則甲乙丙丁二體之積必相等是故兩體之底積與厚度相較則兩體之積可知矣葢體積之比例視其面線今兩體之底面厚度交互相等如此其體積不得不等也

第三

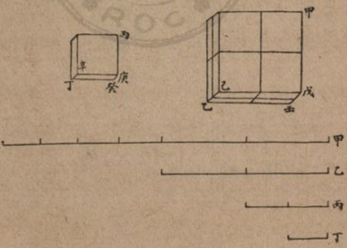
有兩直角方體其底面積之縱橫二界相比之比例與厚度面積之縱橫二界相比之比例若俱同則此兩體爲直角正方同式體也如甲乙丙丁兩直角方體其甲乙體之戊乙底面之戊己橫界比丙丁體之庚丁底面之庚辛橫界大一倍甲乙體之戊乙底面之戊壬縱界比丙丁體之庚丁底面之庚癸縱界大一倍甲乙體之甲己厚面之甲戊直界比丙丁體之丙辛厚面之丙庚直界亦大一倍則甲乙丙丁之兩體俱爲直角正方同式體也至於兩體所有之戊己庚辛二界戊壬庚癸二界甲戊丙庚二界俱爲相當之界而可互相爲比



例矣，

第四

凡同式直角正方體其體積之比例比之兩界線之比例爲連比例隔二位相加之比例也如甲乙丙丁兩同式直角正方體其相當之戊己庚辛二界戊壬庚癸二界甲戊丙庚二界互相爲比之比例俱各大一倍則此甲乙體積與丙丁體積之比比之甲乙體之界線與丙丁體之界線之比者即如連比例四率內隔二位相加之比例矣蓋甲乙體之各界既爲丙丁體之各界之二倍則甲乙體內如丙丁體之二倍者有四二其四爲八故甲乙體積比丙丁體積大八倍夫以甲乙體積八與丙丁體積一相比爲八分之一甲乙體界二與丙丁體界一相比爲二分之一其比例不同蓋以八分比一分較之二分比一分爲四倍也如欲求其相連比例之率則於甲乙體之界四倍之得八分與丙丁體界一分爲比即如甲乙體積與丙丁體積之比例矣夫八與四四與二二與一皆爲連比例二分之一之比例今以八與一爲比其間隔四



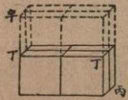
與二之兩位故曰同式兩體積之比例爲兩界上連比例隔二位相加之比例也若邊爲三倍則面爲九倍體爲二十七倍亦爲隔二位相加之比例也

第五

有兩同式直角長方體於兩體相當之二界各作兩正方體互相爲比即同於原兩長方體之互相爲比也如甲乙丙丁兩直角長方體在戊乙巳丁相當二橫界各作甲庚丙辛二正方體則所作之甲庚丙辛兩正方體互相爲比之比例仍同於原有之甲乙丙丁兩長方體互相爲比之比例也夫甲乙丙丁同式之兩長方體既爲隔二位相加之比例則所作甲庚丙辛同式之兩正方體亦必爲隔二位相加之比例矣然則原有之甲乙長方體爲原有之丙丁長方體之八分之一其所作甲庚正方體亦爲所作丙辛正方體之八分之一可知矣

第六

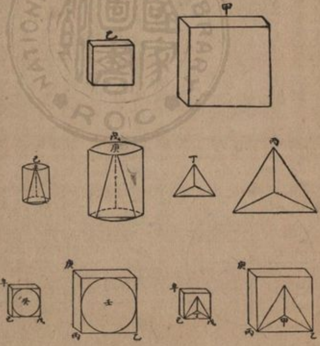
凡有大小平面體其相當角度俱等而相當界之比例又同則謂之同式體也如甲乙大小兩平面體其相當各角之度俱等而相當各界之比例又同則甲乙二體謂之同式平面正方體也如丙丁大小兩四瓣



體。其相當各角之度俱等。而相當各界之比例又同。則丙、丁二體謂之同式四瓣體也。又如大小圓面體。於其內外作各種平面體。其平面體之式若同。則圓面體亦謂之同式體。如戊、己大小兩圓體所函之庚、辛尖瓣等體是也。

第七

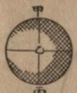
同式各種體之比例。同於在各體相當界所作正方體之比例也。如甲、乙、丙、丁、戊、己大小兩三角尖瓣體互相爲比。即同於乙丙、戊己相當二界所作庚乙、辛戊兩正方體之互相爲比。又如壬、癸兩圓球體。其互相爲比之比例。亦同於圓球徑相當之乙丙、戊己二界所作庚乙、辛戊兩正方體互相爲比之比例也。蓋同式平面形互相爲比之比例。同於各相當二界所作正方面形互相爲比之比例矣。今各種體之式既同。故其相當面互相



爲比之比例必同。相當面互相爲比之比例同者。緣相當面之各相當界互相爲比之比例同也。故凡同類兩體。知此一體之度。而不知彼一體之度。欲求知之。則在同式兩體相當二界各作一正方體。此所作之二體。一爲一率。一爲二率。所知之體爲三率。推得四率。即其未知之體矣。或有同類兩體。知此一體之界。而不知彼一體之界。則依所知一體之界。作一正方體。其兩體一爲一率。一爲二率。所作正方體爲三率。推得四率。即是彼一體界數所作之正方體矣。故曰同式兩體之比例。與相當界所作正方體之比例相同也。

第八

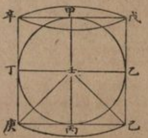
凡圜面半徑與球體半徑等者。其圜面積爲球體外面積之四分之一。而圜面半徑與球體全徑等者。其圜面積與球體外面積等也。如丁己圜面之丁戊半徑。與甲丙球體之甲乙半徑等。則丁己圜面積爲甲丙球體外面積之四分之一。又如庚壬圜面之庚辛半徑。與甲丙球體之甲丙全徑等。則庚壬圜面積與甲丙球體外面積等也。試作子寅卯一尖圓體。使其寅辰卯之底面積與甲丙球體外面積等。其



子丑高度、與甲丙球體之甲乙半徑等。則此尖圓體積、與球體積相等。見五卷第二十五節・又作午未申一小尖圓體。使其未申底徑、與甲丙球體之全徑等亦與大尖圓體之寅丑半徑等。其午酉高度、與甲丙球體之甲乙半徑等。亦與大尖圓體之子丑高度等。則此小尖圓體積、爲球體積之四分之一。亦卽爲大尖圓體積之四分之一。何以見之。蓋大小兩面之比例同於相當界所生連比例隔一位加一倍之比例。今大尖圓體之寅卯底徑。比小尖圓體之未申底徑大一倍。則大尖圓體底積比小尖圓體底積必又大一倍。而小尖圓體底積。爲大尖圓體底積之四分之一矣。又兩體同高者。其體積之比例同於其底面之比例。今小尖圓體底積。既爲大尖圓體底積之四分之一。則其體積必爲大尖圓體積之四分之一。而亦爲球體之四分之一矣。球體原與大尖圓相等・夫大尖圓體之底積。原與球體之外面積等。小尖圓體底積。既爲大尖圓體底積之四分之一。亦必爲球體外面積之四分之一。而丁己圓面。固與小尖圓之底積等。則爲球體外面積之四分之一。無疑矣。至於庚壬圓面之徑。原比丁己圓面之徑大一倍。則其面積必大四倍。今丁己圓面既爲甲丙球體外面積之四分之一。則庚壬圓面積比丁己圓面積大四倍者。安得不與球體外面積相等乎。

第九

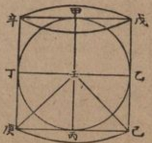
凡球體全徑與上下面平行長圓體底徑高度相等則球體爲長圓體之三分之二也如甲乙丙丁一球體戊己庚辛一長圓體此球體之乙丁全徑與長圓體之己庚底徑度等而球體之甲丙全徑與長圓體之戊己高度等則球體積爲長圓體積之三分之二也盖長圓體與尖圓體同底同高則其比例爲三分之一（五卷第二十三節・言平底尖體與上下面平行體同底同高・則尖體爲平行體三分之一・）尖圓體之底徑與球之全徑等高與球之半徑等者尖圓體積爲球體積之四分之一而尖圓體又爲半球體之二分之一矣（說見前節・）今於乙己庚丁半長圓體內作己壬庚半球體又作一壬己庚尖圓體則此尖圓體爲半球體之二分之一尖圓體既爲半球體之二分之一又爲半長圓體之三分之一則半球體豈非長圓體之三分之二乎夫全與全之比例卽若半與半之比例今半長圓與半球之比例爲三分之二則全長圓體與全球體之比例亦爲三分之二可知矣



第十

凡球體全徑與長圓體底徑高度相等者其球體外面積與長圓體周圍面積等也如甲乙丙丁一球體戊己庚辛一長圓體其球體之乙丁全徑與長圓體之己庚底徑等而球體之甲丙全徑與長圓體之戊

己高度等則此球體外面積必與長圓體之周圍面積等也大凡體之面積相等者其體積之比例同於其高之比例而體積之比例與高之比例同者其面積必相等試將球體乙壬半徑分爲六分取其三分爲高以長圓周圍面積爲底所成之體積必與長圓體積等取半徑之二分爲高以球體外面積爲底所成之體積必與球體之積等蓋長圓體與球體之比例原爲三與二之比例此所成之二體亦必爲三與二之比例一體之高爲三分一體之高爲二分是積之比例與高之比例同矣非因其面積相等之故乎由是觀之球體外面積與長圓體周圍面積相等也明矣



第十一

凡球體全徑與上下面平行長圓體底徑高度相等者其相當每段之外面積皆相等也如甲乙丙丁一球體戊己庚辛一長圓體此球體之乙丁全徑與長圓體之己庚底徑等球體之甲丙全徑與長圓體之戊己高度等則球體之癸丙寅一段凸面積必與相當長圓體之辰己庚巳一段周圍外面積等也夫乙辰巳丁一段長圓體內分出子癸寅丑一小長圓體餘癸子乙辰巳丁丑寅空心體此空心體與子癸寅丑長圓體之積必等何以知之蓋壬癸爲大圓面之半徑而所截卯癸又爲小圓面之半徑其壬卯與卯癸之度又等故壬癸壬卯卯癸三線成一壬癸卯直角三角形而壬癸半徑所作圓面必與壬卯卯癸兩

線爲半徑所作兩圜面等。見九卷第六節。又壬癸與壬乙皆一圜之輻線。其度必等。而卯辰原與壬乙相等。故卯辰爲半徑所作之圜面。卽壬癸爲半徑所作之圜面。於卯辰爲半徑所作圜面內減去卯癸爲半徑所作圜面。卽餘辰癸環面。與壬卯爲半徑所作之圜面等。而壬卯與卯癸原相等。然則辰癸環面旣與壬卯半徑所作之圜面等。亦必與卯癸爲半徑所作之圜面等矣。夫卯癸卽小長圓底之半徑。而辰癸又爲空心體底之環徑。其兩面積旣等。則其兩體積必等無疑矣。又壬癸寅小尖圓體原與癸乙辰巳丁寅曲凹體等。乙丙丁半球體。爲半長圓體三分之二。則癸乙巳丙庚丁寅曲凹體。爲長圓體三分之一。與壬巳庚尖圓體相等。故壬癸寅一段尖圓體。與相當癸乙辰巳丁寅一段曲門體。亦必相等也。而壬癸寅小尖圓體爲子癸寅丑小長圓體三分之一。則癸乙辰巳丁寅曲凹體亦爲辰癸空心體之三分之一矣。於乙辰巳丁長圓體內減去壬癸寅小尖圓體又減去癸乙辰巳丁寅曲凹體。則餘乙癸壬寅丁一段空心球體。必與乙辰壬巳丁一段空心長圓體等。如以乙辰巳丁一段長圓體作六分。則子癸寅丑小長圓爲三分。壬癸寅小尖圓體爲一分。與小尖圓體相等之癸乙辰巳丁寅曲凹體亦爲一分。今旣減去小尖圓體及曲凹體。是於六分內減去二分。而存一段空心球體爲四分也。而壬辰巳大尖圓體。亦爲乙辰巳丁長圓體三分之一。於長圓體內減去大尖圓體。則餘乙辰壬巳丁空心長圓體爲三分之二也。三分之二之比例。固同於六分之四之比例。則此一段空心長圓體。與一段空心球體。相等無疑。若將此兩空心體從壬心至外面剖爲千萬尖體。俱以乙壬半徑爲高。以兩

空心體外面爲底・則空心球體所分之各尖體與空心長圓體所分之各尖體其積既等其高又等則其底不得不等同底同高者・其積既等・則同高同積者・其底必等・此各尖體之底既等則兩空心體之外面積相等可知矣千萬尖體之底・卽兩空心體之面也・夫乙丙丁半球體外面積原與乙己庚丁半長圓體周圍外面積等於半球體內減去乙癸寅丁一段餘癸丙寅一段球體於半長圓體內減去乙辰巳丁一段餘辰己庚巳一段長圓體其減去之各段外面積旣相等則所餘之球體癸丙寅一段凸面與長圓體辰己庚巳一段周圍外面積相等也明矣

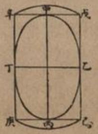
第十二

凡撱圓體大徑與圓球體徑相等者其二體積之比例卽同於撱圓體小徑所作方面與圓球體徑所作方面之比例也如甲乙丙丁撱圓體之甲丙大徑與甲戊丙己圓球徑等則撱圓體積與球體積之比例卽同於撱圓乙丁小徑所作方面與球體戊己徑所作方面之比例也試將撱圓體與球體任意依徑線平行分之其所分之大小平圓面如子丑乃球體大圓面之徑寅卯乃撱圓體小圓面之徑此大小兩平圓面之比例同於其相當子丑寅卯二徑所作二方面之比例見八卷第十一節・而子丑徑與寅卯徑之比例又同於戊己徑與乙丁徑之比例故此所分之大小圓面之比例亦必同於戊己方

面與乙丁方面之比例矣。若將此兩體與戊己徑平行。任意分爲幾何面。其相當大小兩面之比例。皆如戊己方面與乙丁方面之比例。此所分各面之比例。既皆同於乙丁與戊己所作方面之比例。則撱圓體與圓球體之比例。必同於乙丁所作方面與戊己所作方面之比例可知矣。卽所分之寅丙卯撱圓體之一段。與子丙丑圓球體之一段。其比例亦必同於乙丁所作方面與戊己所作方面之比例矣。

第十三

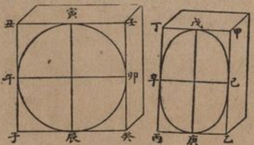
凡撱圓體大徑、與長圓體高度等。而撱圓體小徑、與長圓體底徑等。則撱圓體爲長圓體之三分之二。亦如圓球體與同徑同高長圓體之比例也。如甲乙丙丁一撱圓體戊己庚辛一長圓體。其撱圓體之甲丙大徑。與長圓體之戊己高度等。而撱圓體之乙丁小徑、亦與長圓體之己庚底徑等。則撱圓體爲長圓體之三分之二。其比例卽如子丑寅卯球體、與辰巳午未長圓體之比例也。蓋戊己庚辛長圓體之戊己高度。與辰巳午未長圓體之辰巳高度等。故兩長圓體之比例。卽同於己庚底積與巳午底積之比例。至於戊己庚辛長圓體之己庚底積與撱圓體之乙丁小徑所作圓面積等。而辰巳午未長圓體之巳午底積又與球體丑卯全徑所作圓面積等。則戊己庚辛長圓體積與辰巳午未長圓體積之比例。卽同於撱圓體之乙丁小徑所作圓面、與球體丑卯全徑所作圓面之比例矣。夫撱圓體與球體之比例。原同於撱圓體小徑所作圓面、與球體



全徑所作圓面之比例.故撱圓體與球體之比例.亦同於撱圓體同徑同高之長圓體、與球體同徑同高之長圓體之比例也若轉比之.即戊己庚辛長圓體與甲乙丙丁撱圓體之比例.亦同於辰巳午未長圓體、與子丑寅卯球體之比例矣.夫球體既爲同徑同高長圓體之三分之二.則撱圓體亦必爲同徑同高長圓體之三分之二可知矣.

第十四

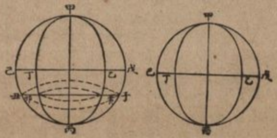
凡函撱圓之長方體.與所函撱圓體之比例.同於函球之正方體.與所函球體之比例也.如甲乙丙丁長方體函一戊己庚辛撱圓體.其長方體之甲乙高度.與撱圓體之戊庚大徑等.長方體之乙丙底度、與撱圓體之己辛小徑等.則此甲乙丙丁長方體與所函戊己庚辛撱圓體之比例同於壬癸子丑正方體.與所函寅卯辰午球體之比例也.蓋甲乙丙丁長方體之甲乙高度.與壬癸子丑正方體之壬癸高度等.故長方體與正方體之比例.同於兩體底積之比例.今此長方體之底積與所函撱圓體之巳辛小徑所作方面等.而正方體之底積.與所函球體之卯午全徑所作方面等矣.然則此長方體與正方體之比例.不同於撱圓體小徑所作方面、與球體全徑所作方面之比例乎.夫撱圓體與球體之比例.原同於撱圓體小徑所作方面.與球體全徑所作方面之比例.則撱圓體與球體之比例同於函撱圓體之長方體.與函球體之正方體之比例可



知矣。若轉比之。則長方體與所函撱圓體之比例。亦必同於正方體與所函球體之比例矣。

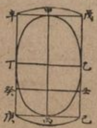
第十五

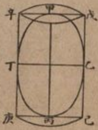
凡撱圓體大徑、與圓球體之徑等者。其撱圓體外面積、與球體外面積之比例。即同於撱圓體小徑、與球體全徑之比例。即任分一段。其相當一段外面積之比例。亦無不同也。如甲乙丙丁撱圓體之甲丙大徑、與甲戊丙己球體全徑等。則此撱圓體外面積、與球體外面積之比例。必同於撱圓體之乙丁小徑、與球體之戊己全徑之比例也。即任分寅丙卯一段撱圓體外面積、與子丙丑一段球體外面積之比例。亦仍同於乙丁小徑、與戊己全徑之比例也。蓋兩體所分寅卯、子丑、平圓面皆與乙丁、戊己徑線平行。故寅卯圓界、與子丑圓界之比。同於寅卯圓徑、與子丑圓徑之比。而寅卯徑與子丑徑之比。又同於乙丁徑與戊己徑之比也。然此兩體依徑平分。可爲無數平圓界。其相當各圓界之比例。既皆同於乙丁徑與戊己徑之比例。則全體外面積之比例。豈不同於乙丁徑與戊己徑之比例乎。至於所分之寅丙卯一段撱圓體、與子丙丑一段球體。俱可分爲平圓以比之。則一段與一段之比例。無異於全體與全體之比例也明矣。



第十六

凡撱圓體大徑、與長圓體高度等而撱圓體小徑與長圓體底徑等則撱圓體外面積與長圓體周圍外面積等卽任分一段其相當一段之外面積亦無不等也如甲乙丙丁一撱圓體戊己庚辛一長圓體其撱圓體之甲丙大徑、與長圓體之戊己高度等而撱圓體之乙丁小徑、與長圓體之己庚底徑等則撱圓體之外面積與長圓體周圍之面積等卽任分壬丙癸一段撱圓體外面積亦與相當壬己庚癸一段長圓體之外面積等也試依撱圓體甲丙大徑度作子丑寅卯一球體幷作與球體同高同徑辰巳午未一長圓體則此兩長圓體之高度等其二體周圍面積之比例必同於二體底徑之比例二長圓體底徑之比例卽是撱圓體之乙丁小徑與球體之丑卯全徑之比例也撱圓體外面積與球體外面積之比例原同於撱圓體乙丁徑、與球體丑卯徑之比例則戊己庚辛長圓





體外面積、與擠圓體外面積之比例、亦同於辰巳午未長圓體外面積、與球體外面積之比例也。夫球體外面積、原與辰巳午未長圓體外面積等。而擠圓體外面積、與戊己庚辛長圓體外面積之比例、既與球體外面積與辰巳午未長圓體外面積之比例相同。則此擠圓體外面積、與戊己庚辛長圓體外面積相等無疑矣。至於擠圓體所分一段、與球體所分一段之比例、與其全體之比例亦相同。今擠圓體外面全積、與戊己庚辛長圓體周圍外面全積之比例、既同於球體外面全積、與辰巳午未長圓體周圍外面全積之比例。則所分擠圓體之壬丙癸一段外面積、與長圓體之壬己庚癸一段外面積之比例、亦必同於所分球體之申寅酉一段外面積、與長圓體之戌巳午亥一段外面積之比例矣。彼球體之申寅酉一段外面積、既與長圓體之戌巳午亥一段外面積相等。則此擠圓體之壬丙癸一段外面積、與長圓體之壬己庚癸一段外面積相等也明矣。

數理精蘊上編卷四

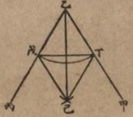
幾何原本十一

第一

作三界度等之三角形及兩界度等之三角形法。如欲作三界度等之三角形。則作一甲乙線。取甲乙之度爲準。以甲爲心。自甲至丙作弧一段。又以乙爲心。自乙至丙作弧一段。兩弧相交處至甲乙作二線。卽成三界度等之甲丙乙三角形矣。蓋甲乙丙三角形之甲乙、甲丙、丙乙三界。原係一圜之輻線。其度必等。度既等而線未有不等者也。若欲作兩界度等之三角形。仍作一甲乙線。比甲乙線之度或大或小取一度。以甲乙二處爲圜心。皆至丙作弧兩段。仍於兩弧相交處作二線。卽成兩界度等之甲丙乙三角形矣。蓋甲丙、丙乙二線。雖比甲乙線或大或小。然二線俱同爲一圜之輻線。其度自等。兩度既等則兩界線亦必等也。

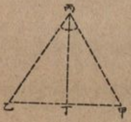
第二

平分直線角爲兩分法。如甲乙丙角欲平分爲兩分。乃以乙角爲心任意作弧線一段。則乙甲、乙丙二線。截於丁戊。卽成乙丁、乙戊等度二線。自弧兩端復作一丁戊線。照丁戊線度依前節法作一三界度等之丁己戊三角形。則己角與乙角正相對。乃自乙角至己角作一乙己直線。卽分甲乙丙角爲兩平分矣。何也。其乙丁己、乙戊己兩三角形之乙丁、乙戊二界。是一圜之輻線。其度等。而丁己、戊己二界。是三界度等三角形之兩傍界。其度亦等。而乙己線既爲兩形之共界。其等無疑。此兩三角形之各界度既各相等。則與丁己戊己界相對之丁乙己、戊乙己二角。亦必相等可知矣。見二卷第七節。



第三

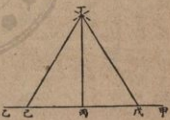
平分一直線爲兩分法。如有甲乙一直線。欲平分爲兩段。乃如第一節法、於甲乙線上作一甲丙乙三界度等之三角形。又如第二節法平分甲丙乙角爲二分。自丙角作垂線至甲乙線。卽平分甲乙線於丁。而甲丁、丁乙兩段必等也。蓋甲丙乙原爲三界度等之三角形。今作丙丁垂線平分爲兩三角形。則兩三角形之相當各角各界必俱等。而甲丁、丁乙爲兩形相當之底界。其度安得不等乎。



第四

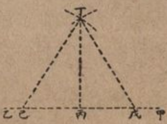
橫線上立縱線法。如有甲乙一橫線。欲於丙處立一縱線。則於丙之兩傍任意取等度二分爲戊丙、己丙、

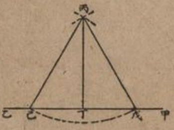
以戊爲心於橫線上作弧一段又以己爲心於橫線上作弧一段兩弧相交於丁此丁處正與丙相對自丁至丙作一直線卽甲乙線上正立之縱線也試自戊己至丁作二線成一戊丁己三角形此形之丁戊丁己兩線俱同一圜之輻線其度必等而丁丙線旣將戊己底線爲兩平分則丁丙線必爲甲乙線之垂線矣見二卷第十節



第五

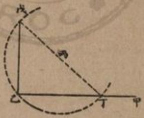
有一橫線自此線上不拘何處立縱線法如有甲乙一橫線自此線上丙處至甲乙線欲作一縱線則以丙爲心作弧線一段截甲乙線於戊己乃自戊己至丙作二線成一戊丙己三角形又照第二節分角法平分丙角爲二分自丙至甲乙線上作丙丁線則此丙丁線卽爲自丙至甲乙線之縱線也蓋戊丙己三角形之丙戊丙己兩界度等故戊角與己角必等而丙丁線又平分丙角爲二則所分之戊丙丁己丙丁兩角度亦等而丙丁戊丙丁己兩並角亦必等此兩並角旣等則成兩直角旣成兩直角則丙丁線必爲甲乙橫線之垂線矣見一卷第十節

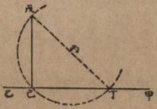




第六

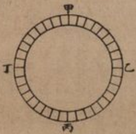
在橫線一邊立縱線法。如有甲乙橫線。在乙邊欲立一縱線。則於甲乙線上不拘何處立爲圜心。如以丙爲圜心自丙至乙爲圜界旋轉作一圜。則於甲乙線丁處相交。卽自丁處過丙心至相對界作一直線。交圜界於戊。乃自戊至乙作一戊乙直線。卽是乙邊所立之縱線也。蓋丁乙戊角因在半圜必爲直角。見四卷第十四節。旣爲直角則戊乙線必爲甲乙線之垂線。旣爲垂線。故爲橫線一邊所立之縱線也。若甲乙線一邊之上有一戊點。欲自戊至甲乙線一邊作一垂線。則自戊至甲乙線。任意作一戊丁斜線。遂將戊丁斜線平分於丙。於是以丙爲心自戊旋轉作一圜。則截甲乙線於己。自戊至己作一直線。卽是欲作之垂線也。蓋戊己丁角旣在半圜必爲直角。旣爲直角則戊己必爲垂線矣。





第七

一圜分爲三百六十度法。如甲乙丙丁一圜界。欲分爲三百六十度。則取圜之幅線度線圜界比之。卽分圜界爲六段。將六段各平分爲二。則爲十二段。十二段各平分爲三。則爲三十六段。三十六段各平分爲十。卽成三百六十度矣。

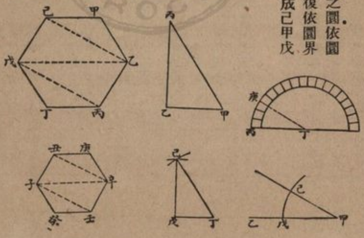


第八

一直線上作角度法。如甲乙線上、欲作三十度之角。則用有度之圜。依圜之丙丁幅線度截甲乙線於戊。於是以甲爲心自戊作弧一段。復依圜界之丙庚三十度之分自戊截弧於己乃自己至甲作一直線。卽成己甲戊三十度之角矣。

第九

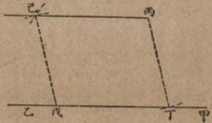
各種多界形。倣已有之形。或大或小。另作一同式形法。如有甲乙丙一三角形。欲倣此式另作一形。則考甲乙界度有幾分。如甲乙界度爲三分。今取其二分作一丁戊線。又以甲丙界度亦作三分而取其二分。以丁爲圜心。作弧一段。又以乙丙界度亦作三分而取其二分。以戊爲圜心作弧一段。兩弧相交於己。乃自己至丁戊作二線。卽成丁戊己一小三角形。與原有甲乙丙大三角形爲同式也。蓋丁戊己三角形之三界。雖與甲乙丙三角形之三界不等。而其相當各角之度俱等。因其相當各角之度俱等。故其相當各界之比例皆同。相當各界之比例既同。則其二形之式不得不同也。若有一甲乙丙丁戊己六界形。欲倣



此式另作一形則在此六界形作分角線分爲四三角形照前法倣作四三角形即成一庚辛壬癸子丑小六界形其式與原有之甲乙丙丁戊己大六界形同也

第十

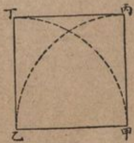
有一直線或上或下一點作與此線平行一線法如甲乙線上有一丙點欲自丙點作與甲乙線平行一線則以丙爲圜心任意取甲乙線之近甲邊一處作弧一段如丁又取甲乙線之近乙邊一處爲心如戊乃照丙丁原度於丙點相對處作弧一段如己復照丁戊度以丙爲心於丙點相對處作弧一段則二弧相交於己乃自丙至己交處作一丙己直線即爲甲乙線之平行線也何則試自丁戊二處至丙己二處作二線即成丙丁戊己一四界形此四界形之丙丁己戊相對之兩縱線丙己丁戊相對之兩橫線因依各度所取必兩兩相等既兩兩相等則必爲平行線之四邊形然則丙己甲乙爲平行線四邊形之二線豈有不平行之理哉



第十一

有一直線上作一正方形法如甲乙一直線欲作一正方形則以甲爲心取甲乙度自乙至丙作一弧線又以乙爲心依甲乙度自甲至丁作一弧線又於甲乙線之兩端照本卷第六節立甲丙乙丁二縱線則乙丙弧截於丙甲丁弧截於丁乃自丙至丁作一直線即成甲乙丁丙一正方形也何則丙甲甲乙乙丁

三線俱同爲一圜之幅線其度必等而丁丙、丙甲二線又俱切一圜界爲兩尖相合其度亦必等（見四卷第七節）則四界俱等矣且甲乙二角又爲垂線所立之角必成直角則丙丁二角亦必爲直角而四角又等矣四角皆等故甲乙丁丙形爲甲乙線上所立之正方形也

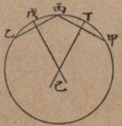


第十二

平分一弧爲兩段法如有甲乙弧欲平分爲兩段則自甲至乙作一甲乙弦線將此弦線照本卷第三節平分直線爲兩分法作一戊丁縱線復自戊引至弧界截甲乙弧於丙即平分甲乙弧爲甲丙丙乙兩段矣蓋丙丁縱線既平分甲乙弦線則亦必平分甲乙弧之全圜既平分甲乙弧之全圜則必平分甲乙弧爲兩段可知矣（見四卷第六節）

第十三

有一段弧欲繼此弧作一全圜法如有甲乙一段弧繼此弧欲作一全圜則在此弧界任意指三處如甲、丙乙自甲乙二處至丙作甲丙丙乙二線照前節作平分甲丙丙乙兩弦之丁己戊己二線引長則相交於己乃以己爲心繼甲乙弧界作一全圜即成甲乙弧之全圜也蓋丁己戊己二線既平分甲丙丙乙二弦則必平分甲丙丙乙二弧（見四卷第六節）既平分甲丙丙乙二弧則其相交之處必爲圜心故己爲繼



甲丙乙弧界所作全圜之圜心也。

第十四

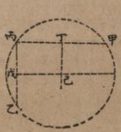
不拘何處有三點求線此三點作一圜法。如甲、乙、丙三點。不在一直線上。欲線此三點。作一圜則依前節作甲丙、丙乙二線。又平分此二線正中作丁己、戊己二垂線。引長至己處相交。遂以己爲心。以甲乙丙爲界。作一圜。則甲、乙、丙三點俱在一圜之界矣。此節之理。與前節同。

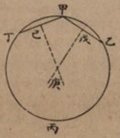
第十五

有圜不知中心。求知中心之法。如有一甲乙丙丁圜。不知其中心。欲求知之。則於此圜界隨便取甲、乙、丁三處。從甲至乙至丁作二弦線。將此二線平分正中爲戊己二處。自戊己作戊庚、己庚兩垂線。則相交於庚。此庚卽是甲乙丙丁圜之中心也。此節之理。亦與前同。

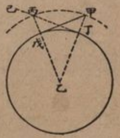
第十六

有圜外一點。將此點至圜界作切線法。如乙圜之外有一甲點。欲將此甲點與圜界相切。作一切線。則以此甲點至圜心作一甲乙直線。又以乙爲心。以甲爲界作一甲丙圜界。又自甲乙線所截圜之丁處。作一丁己垂線。則此垂線卽截甲丙圜界於丙。乃自丙至乙心作一丙乙直線。復自丙乙所截圜界戊處作一戊甲線。卽是自甲點至圜



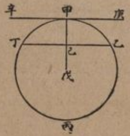


界所作之切線也何則此乙丁乙戊既同為一圜之幅線其乙甲乙丙亦同為一圜之幅線則甲乙戊與丙乙丁兩三角形之各兩邊線必等而兩三角形又同一乙角然則兩三角形之每相當各角必俱等矣見二卷第六節夫丁丙線原為甲乙幅線之垂線則丁角必為直角而相當之戊角亦必為直角矣戊角既為直角則甲戊線亦必為乙丙幅線之垂線故甲戊與丙丁皆為圜界之切線也見四卷第九節



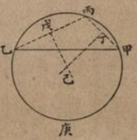
第十七

有圜內弦線欲與此弦線平行作圜外切線法如有一甲乙丙丁圜之乙丁弦線欲與此乙丁弦線平行作切圜之切線則從圜心戊至乙丁弦作戊己垂線平分乙丁弦線於己引長截圜界於甲為甲戊線又切甲處作庚辛線為甲戊之垂線即是所求之切線也何則此庚辛線既為甲戊線之垂線其戊甲庚角必為直角又己戊線既為乙丁線之垂線其戊己乙角亦必為直角然則戊甲庚角與戊己乙角既俱為直角其度必等因其度等故乙丁庚辛兩線為兩平行線也又戊甲線為圜之幅線而庚辛既為甲戊之垂線則必為甲乙丙丁圜之切線可知矣見四卷第九節



第十八

作圅三角形之圜法。如甲乙丙三角形。欲作圅此三角形之一圜。則平分甲丙邊於丁。平分丙乙邊於戊。自丁戊作二垂線。引長至己相交。卽以己爲心。任以甲丙乙三角形之一角爲界。作一甲丙乙庚圜。卽是圅甲丙乙三角形之圜也。此節之理。與本卷第十三節同。



第十九

圜內作等度四角形及等度八角形法。如甲丙乙丁圜內。欲作一等度四角形。則以甲乙、丙丁二徑線交於圜心。皆作直角。復自甲、丙、乙、丁四處。作甲丙、丙乙、乙丁、丁甲四弦線。卽成甲丙乙丁等度之四角形也。何則。甲乙、丙丁二徑線在圜心作直角相交。則平分圜界爲四分矣。既平分圜界爲四分。則甲丙、丙乙、乙丁、丁甲四弦線度必等。而甲、丙、乙、丁四角既俱立在一圜之半界。亦必俱爲直角。見四卷第十四節。既俱爲直角。必爲正方形可知矣。苟欲作等度八角形。則照前平分圜界爲四分。將所分之每分。又各平分爲二分。卽平分圜界爲八分。乃作八弦線。卽成甲戊丙己乙庚丁辛一形。爲圜內等度八角形也。

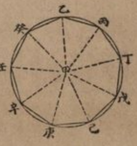
第二十

圜內作等度六角形三角形十二角形法。如甲圜內欲作等度六角形則以圜之甲乙幅線爲度將圜界分爲乙丙丙丁丁戊戊己己庚庚乙六段作六弦線卽成一乙丙丁戊己庚等度之六角形也何則苟以乙爲心以甲爲界作一丙甲庚弧線則乙丙、乙甲二線俱爲丙甲庚圜之幅線而度必等夫乙丙丁戊己庚六界形之諸界因俱照甲乙幅線度所作故此形之六界俱相等也若欲作三角形則照前法將圜界分爲六段以所分六段兩兩相合爲三段作乙丁、丁己、己乙、三弦線卽成一乙丁己等度三角形也若欲作十二角形亦照前法將圜界分爲六段以所分六段各平分爲二分作十二弦線卽成一乙辛丙壬丁癸戊子己丑庚寅等度之十二角形也

第二十一

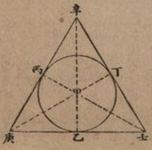
圜內作各種等度多界形總法。苟甲圜內欲作等度多界各種形則察各種形之各角度(見三卷第十七節)。如等度三角形之三角俱六十度四角形之四角俱九十度五角形之五角俱一百零八度六角形之六角俱一百二十度七角形之七角俱一百二十八度三十四分一十七秒八角形之八角俱一百三十五

度。九角形之九角俱一百四十度、十角形之十角俱一百四十四度、十一角形之十一角俱一百四十七度一十六分二十二秒、十二角形之十二角俱一百五十度。今甲圜內若欲作一等度九角形、則以九角形之每角一百四十度與一百八十度相減、餘四十度。復以別有度之圜取四十度之分、以分甲圜界、即平分爲乙丙、丙丁、戊己、庚辛、壬癸之九分。再照平分度作乙丙、丙丁、丁戊、戊己、己庚、庚辛、辛壬、壬癸、癸乙九弦線、即成甲圜內等度之九角形也。何也。從圜心甲作線至各角、分九角形爲九三角形、其每三角形之三角共一百八十度、內減去二界角一百四十度、餘心角四十度、即每界所對之角。此九角形之每界、即九心角之弦線、故以心角度分圜界度、即得九角形之分也。凡圜內欲作等邊多界形、皆依此法作之。

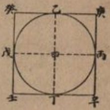


第二十二

作函圜等度多界形法。如欲作函圜之等度三角形、四角形、五角形或多界形、則將圜界照欲作之幾界平分爲幾段、乃自圜心至所分各界作幾輻線。於輻線之末、各作切界線、俱引長至合角、即成函圜之等度多界形也。如第一圖、自甲心至庚、辛、壬三角作甲庚、甲辛、甲壬三線、即成六三角形。其庚甲乙、庚甲丙兩三角形之庚乙、庚丙二線爲合尖切圜之線、其度必等。見四卷第七節。而庚甲乙、辛甲丁兩形之庚甲乙、辛甲丁二角爲對角、其度又等。庚

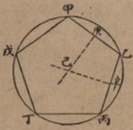


乙甲、甲辛丁甲之二角爲幅線切線所成之角其度又皆爲直角相等(見四卷第五節)則其餘一角亦必等而其乙甲、甲丁二界又同爲一圜之幅線其度必等則其他界亦必俱等可知再辛丙、辛丁二線壬丁、壬乙二線俱爲合尖切圜之線其度相等而辛甲丙與壬甲乙兩三角形壬甲丁與庚甲丙兩三角形必俱與前每相當之角等則此六三角形俱相等矣六三角形俱相等則其庚乙、乙壬、壬丁、丁辛、辛丙、丙庚相等之六界兩兩相合卽成庚壬、庚辛、辛壬之三界其度安得不等乎故庚辛壬三角形爲函圜等界形也其第二圖函圜四角形第三圖函圜五角形或更欲作多界形其理皆同



第二十三

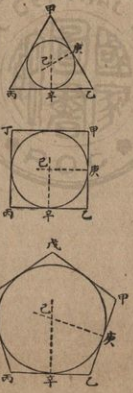
作函等度多界形之圜法如甲乙丙三角形或甲乙丙丁四角形或甲乙丙丁戊五角形欲作函此三形之圜則任用此三形之甲乙、乙丙二界平分於庚辛二處乃自庚、辛二處各作垂線至各形中心相



交爲己。卽以己爲心。以各形之角爲界作圜。卽成函此三形之圜也。何也。各形之界皆爲圜之弦線。而弦線上所作之垂線。必皆交於圜心。今甲乙、乙丙二界上所作之庚己、辛己二線。旣平分二界而相交於己。則己必爲圜心。故以己爲心作圜。卽成函各等界形之圜也。

第二十四

作函於等度多界形之圜法。如甲乙丙三角形。或甲乙丙丁四角形。或甲乙丙丁戊五角形。欲在此三形內各作一圜。則照前節平分甲乙、乙丙二界。作己庚、己辛二垂線。引長相交於己。卽以己爲心。以庚辛爲界作圜。卽成多界形內所函之圜也。何也。己庚、己辛二線。是平分甲乙、乙丙二線之垂線。引長之必相交於各形之中心。今旣相交於己。則己必爲各形之心。凡形心作垂線至各界。其度必等。卽如圜之輻線。故以己爲心。庚辛爲界所作之圜。卽爲各等界形所函之圜也。



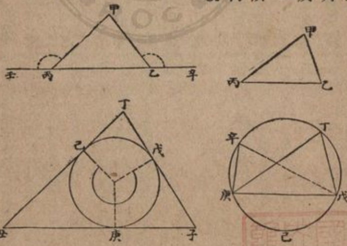
第二十五

有一三角形一圜形。於此圜內作切圜界三角形。與原有之三角形同式法。如有甲乙丙一三角形。丁戊

己庚辛一圜形。欲於此圜內作一切界三角形。與原有之甲乙丙三角形同式。則於圜界任意作與甲角相等之辛角。將此角之兩邊線。俱引至圜界。作辛庚、辛戊二線。再自戊至庚作一戊庚線。又於戊處作與乙角相等之庚戊丁角。爰自戊至丁作一丁戊線。復自庚至丁作一庚丁線。成一丁戊庚三角形。卽是所求之圜內切界三角形。與原有之甲乙丙三角形爲同式也。何則。其庚辛戊三角形之辛角。與庚丁戊三角形之丁角。其尖旣俱與圜界相切。而共立於戊己庚一段弧分。其度必等。見四卷第十二節。此辛角原與甲角等。則丁角亦必與甲角等。又庚戊丁之戊角。原係依甲乙丙之乙角之度而作者。固相等。夫丁角與甲角、戊角與乙角旣等。則所餘之庚角與丙角亦必等。其三角旣俱等。其兩形必爲同式可知矣。

第二十六

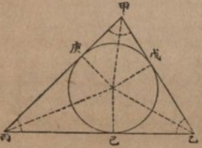
有一三角形一圜形。於此圜外作切界三角形。與原有之三角形同式法。如有甲乙丙一三角形。戊己庚一圜形。欲於此圜外作一切界三角形。與原有之甲乙丙三角形同式。則將



原有之甲乙丙三角形之乙丙底線引長至辛壬二處此兩傍即成辛乙甲、壬丙甲二外角乃於圜心丁處作與辛乙甲角相等之戊丁庚角又作與壬丙甲角相等之己丁庚角則成丁戊、丁己、丁庚之三輻線於三輻線之末作三垂線引長相交成一癸子丑三角形即是所求之圜外切界三角形與原有之甲乙丙三角形爲同式也何則凡三角形之三角相併必與二直角等見三卷第四節今戊丁庚子一四邊形可分爲兩三角形則此四邊形之四角相併必與四直角等矣四直角內減去子戊丁、子庚丁之兩直角所餘戊丁庚、戊子庚兩角相併亦必與兩直角等也又辛乙甲外角與甲乙丙內角相併亦與二直角等見一卷第十四節其戊丁庚角既係依辛乙甲角之度而作者則戊子庚角必與甲乙丙角相等其庚丑己角亦必與甲丙乙角相等而己癸戊角又必與乙甲丙角相等三角俱等則兩形之式必相同也

第二十七

三角形內作切三界之圜法如有一甲乙丙三角形欲於此形內切三界作一圜則依此卷第二節之法將甲乙丙三角俱平分爲兩分所分三角之三線俱引長使相交於丁自丁至甲乙、乙丙、丙甲三界線作丁戊、丁己、丁庚三垂線乃以丁爲心以戊己庚爲界作一圜即是三角形內之切界圜也何則戊甲丁與庚甲丁兩小三角形之甲角因自一角爲兩平分其度必等又丁戊、丁庚既係兩垂線則甲戊丁、甲庚丁二角俱爲直角而相等此戊甲丁、庚



甲丁兩小三角形內之二角既等其各三角必俱相等而又共用一甲丁線爲邊則此兩三角形之各相當邊亦必俱等故丁戊線與丁庚線等者卽是丁己線與丁戊線丁庚線等也此三線既等以爲輻線作戊己庚圜則必與三角形之甲乙、乙丙、丙甲、三界相切矣

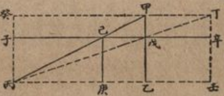
第二十八

勾股形內作正方法如有一甲乙丙勾股形欲於此形內作一正方形則以丙爲心以乙爲界作一乙丁弧線將此弧線平分於戊自戊至丙作一戊丙線卽平分丙角爲兩分而截甲乙線於庚矣乃自庚與甲丙線平行作庚己線又自庚與乙丙線平行作庚辛線卽成庚己丙辛一正方形爲所求甲乙丙勾股形內之正方也何則甲丙乙勾股形之丙角原是直角今庚辛庚己二線各與甲丙乙丙平行則庚、己、丙、辛之四角必俱爲直角矣而庚己丙三角形內己庚丙角與己丙庚角又俱是直角之一半其度必等則己丙線與庚己線相等而庚辛線與己丙線庚己線與辛丙線皆爲平行線內之垂線其度亦等故庚己己丙丙辛辛庚四線相等而庚己丙辛四角俱爲直角是爲甲乙丙勾股形內之正方形也

第二十九

勾股形內作正方第二法如有一甲乙丙勾股形欲於此形內作一正方則將乙丙線引長照甲乙線度增於乙丙作一壬丙線自此壬丙之兩末與甲乙線平行作丁壬、癸丙兩垂線使其度俱與甲乙線等又

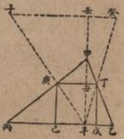
自丁至癸與壬丙線平行作一丁癸線自丁至丙作一對角線截甲乙線於戊乃自戊與乙丙線平行作戊己線截甲丙線於己又自己與戊乙線平行作己庚垂線成一戊乙庚己正方形卽爲甲乙丙勾股形內欲作之正方也何則試將戊己線引長成辛戊己子線則此辛戊己子線與甲乙線分丁壬丙癸爲四長方形其甲戊子癸長方與辛壬乙戊長方旣爲丁壬丙癸大長方對角線傍所成兩形其分必等見三卷第七節故子戊線與戊辛線之比例同於乙戊線與戊甲線之比例也然此子戊線與丙乙線等而戊辛線又與甲乙線等則丙乙線與甲乙線之比例亦同於乙戊線與戊甲線之比例也又甲乙丙與甲戊己兩三角形爲同式故丙乙線與乙甲線之比例同於己戊線與戊甲線之比例而乙戊線與戊甲線之比例又同於己戊線與戊甲線之比例也乙戊線旣與己戊線相等而乙庚線與戊己線己庚線與戊乙線又爲兩平行線內之垂線其度相等故戊乙庚己四角俱爲直角戊乙庚己四角旣俱爲直角則戊乙庚己之方形卽是甲乙丙勾股形內之正方矣



第三十

三角形內作正方法如有甲乙丙三角形欲於此形內作一正方則自甲角至乙丙底線作一甲辛垂線將此垂線引長出甲角如乙丙底線度作一壬辛線又自壬兩分如乙丙線度與乙丙線平行作一子癸線又自癸至辛作癸辛線截甲乙線於丁自子至辛作子辛線截甲丙線於庚乃自丁至庚作一庚丁線

此線必與乙丙平行。又自庚丁二處作庚己、丁戊、二垂線。卽成丁戊己庚一正方形。卽爲甲乙丙三角形內欲作之正方也。何則。壬辛線與壬子線之比。同於辛丑線與丑庚線之比。而辛壬線與壬癸線之比。又同於辛丑線與丑丁線之比。故辛壬線與癸子線之比。亦必同於辛丑線與丁庚線之比也。然辛壬與癸子原相等。則辛丑與丁庚亦必相等矣。辛丑與丁庚既等。則丁戊、戊己、己庚、庚丁、四邊亦必俱等。丁戊、戊己、己庚、庚丁、四邊既俱等。則爲甲乙丙三角形內之正方無疑矣。

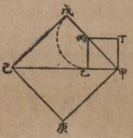


第三十一

有一直線。將此線爲正方對角線。作正方法。如有一甲乙直線。欲以此線爲對角線作一正方。則將甲乙線平分爲戊。以戊爲心。以甲乙爲界。作一圜。卽於此圜內。作一丙丁徑線。爲甲乙線之垂線。乃自甲至丙。自丙至乙。自乙至丁。自丁至甲。作四直線。卽成甲丁乙丙一正方形。爲所求之正方也。蓋甲丙乙角、丙乙丁角、乙丁甲角、丁甲丙角、旣俱在半圜內。必俱爲直角。而甲戊丙、丙戊乙、乙戊丁、丁戊甲、四三角形之兩傍線。俱是半徑線。必相等。又此四三角形之兩傍線所合之角。俱爲直角。亦必相等。則甲丙、丙乙、乙丁、丁甲、四直線。必俱相等。可知矣。甲丙乙丁四邊形內四角旣俱爲直角。而四邊線又俱相等。則必爲正方形。而甲乙線爲其對角線矣。

第三十二

有一直線。爲正方邊與對角線相較之餘。於此線求作其原正方法。如有一甲乙線。爲正方邊與對角線相較之餘。求作一正方。則先將此甲乙線爲一邊。作甲乙丙丁一小正方形。次自甲至丙作一小對角線。於是以丙爲心。以乙爲界作一圜。乃引甲丙線至圜界戊處。作一甲戊線。將此甲戊線爲度。作一甲戊己庚大正方形。即是所求之正方也。試引甲乙線至己。作甲己一對角線。此對角線之乙己一段。必與戊己邊線相等。何也。其丙乙、丙戊爲一圜之二輻線既等。則丙乙戊、丙戊乙二角亦等。若於丙乙己直角內減去丙乙戊角。又於所作丙戊己直角內減去丙戊乙角。所餘戊乙己、乙戊己二角亦必相等。此二角既等。則乙己、戊己兩線必等矣。因其相等。則所作甲戊己庚一大正方之甲己對角線。與戊己一邊線相較。則原有之甲乙線。爲其相較之餘可知矣。



幾何原本十二

第一

有一直線將此線爲底作一兩邊度等三角形使底之兩邊各一角俱比上一角爲大一倍之三角形法.

如有一甲乙直線將此線爲底欲作兩邊度等之三角形而底之兩邊各一角俱比上一角爲大一倍則用十一卷第八節之法於甲乙線之兩頭各作一七十二度之角將兩邊線俱引長相交於丙卽成一甲乙丙三角形爲所求之形也何則凡三角形之三角相併爲一百八十度與二直角等今此所作甲乙丙三角形之甲乙兩角既俱係七十二度則於一百八十度內減去甲乙二角共一百四十四度餘三十六度卽爲丙角之度三十六度者七十二度之半故甲乙兩底角比丙角各大一倍也.

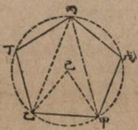
第二

有一直線依此線度作兩邊度等三角形使上一角小於兩底角一倍之三角形法.如有甲乙一直線以此線爲一邊復依此線度作一邊使此兩邊線所合之上一角小於兩底角一倍之三角形則用十一卷第八節之法以甲乙甲丙二線之甲末相合作一乙甲丙角爲三十六度再自丙至乙作一乙丙直線爲底卽得一甲乙丙三角形爲所求之形也何則將甲角三十六度與全形三角之共數一百

八十度相減餘一百四十四度爲乙、丙兩底角之共數。今甲丙線與甲乙線既等。則乙角與丙角必等。因其相等。將兩底角共數一百四十四度折半得七十二度。卽爲每一底角之數。七十二度者。三十六度之倍數。故甲角比乙、丙兩底角俱爲小一倍也。

第三

有一直線。以此直線爲一邊。作等邊等角之五界形法。如有甲乙一直線。以此直線爲一邊。作一等邊等角之五界形。則將此甲乙直線爲底。用此卷第一節法。作一兩邊度等甲丙乙三角形。其甲丙乙角爲丙乙甲、丙甲乙二角之各一半。又用十一卷第十五節法。於此三角形之週圍作一圜。此甲丙、丙乙兩直線原係相等。其相對之兩弧亦必相等。乃以此兩弧自戊、丁二處爲兩平分。又自甲至戊。自戊至丙。自丙至丁。自丁至乙。作四直線。卽成甲乙丁丙戊五邊五角等度之五界形也。何則。其甲丙乙角原爲丙乙甲角之一半。則甲丙乙角爲三十六度。試自甲、乙二處至圜心作甲己、乙己二線。成甲己乙一三角形。則此甲己乙角比甲丙乙角亦爲大一倍（見四卷第十一節）。故甲己乙角爲七十二度。而甲乙弧線亦爲七十二度矣。以七十二度於全圜界三百六十度內減之。餘二百八十八度。折半得一百四十四度。卽爲甲戊丙一段弧線之數也。再將一百四十四度折半得七十二度。卽爲甲戊一段弧線之數也。既得甲戊弧線之數。則戊丙、丙丁、丁乙各弧線度俱各爲七十二度矣。甲乙、乙丁、丁丙、丙戊、戊甲五線既俱係相等弧之弦線。則五線之度必俱等。五



線之度既等則此形又在圜之內而五角之度豈有不相等者哉

第四

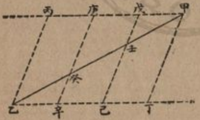
有一直線分大小兩分爲相連比例線法如甲乙直線爲全分甲丙一段爲大分丙乙一段爲小分以甲乙全分與甲丙大分之比同於甲丙大分與丙乙小分之比則用此甲乙線爲一邊線依此卷第二節法作兩邊等度之兩底角比上一角各大一倍之甲乙丁三角形又依此卷第三節法取乙丁線度作邊角俱等之甲戊乙丁己五邊形又自戊至丁作一直線截甲乙線於丙乃得甲丙一大段爲大分丙乙一小段爲小分即是所欲作之相連比例線也何則甲戊乙丁兩弧線度等則甲乙戊乙戊丁兩角度必等又乙戊丁角與乙甲丁角共立於乙丁弧其度必等再甲戊丁與甲乙丁二角亦同立於甲己丁弧其度亦必等也至於甲乙丁角原比乙甲丁角大一倍故甲戊丁角比丙戊乙角丙乙戊角俱大一倍其甲丙戊角因爲戊丙乙三角形之外角與丙乙戊丙戊乙兩內角等故甲丙戊與甲戊丙兩角相等此二角既等則甲丙甲戊兩線必等矣

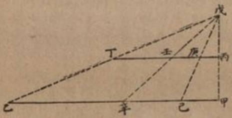
又甲戊戊乙兩線度原相等其戊甲乙角必與戊乙甲角等而甲乙戊一大三角形必與戊乙丙一小三角形爲同式形矣蓋小三角形之丙戊乙角與大三角形之戊甲乙角等而小三角形之丙乙戊角與大三角形之甲乙戊角爲共角而等則小三角形之戊丙乙角與大三角形之甲戊乙角不得不等三角俱等非同式形而何是故甲乙線與甲戊線之比必同於乙戊線與丙乙線之比也夫甲戊原與甲丙相等

而乙戊原與甲戊相等，故乙戊亦與甲丙相等。然則甲乙全線與所分甲丙大分之比，必同於甲丙大分與丙乙小分之比可知矣。故曰甲乙與甲丙、甲丙與丙乙爲相連比例之線也。

第五

平分一直線爲數段法。如有甲乙一直線，欲平分爲三分，則自甲乙線之兩末作甲丙、乙丁二平行線，隨意取一甲戊度，將甲丙線分爲甲戊、戊庚、庚丙三段，又依甲戊度將乙丁線亦分爲乙辛、辛己、己丁三段，乃自二平行線之三段處復作甲丁、戊己、庚辛、丙乙四平行線，卽平分甲乙直線爲甲壬、壬癸、癸乙之三分矣。試觀甲乙丁三角形之甲乙、乙丁兩傍線爲與甲丁線平行之壬己、癸辛二線所分，故俱爲相當率。今以甲乙全線與乙丁全線之比同於丁己段與甲壬段之比，而己辛段與壬癸段之比、辛乙段與癸乙段之比，亦皆與甲乙全線與乙丁全線之比相同也。因其比例俱同，故丁乙線之丁己、己辛、辛乙三段爲平分，而甲乙線之甲壬、壬癸、癸乙三段亦爲平分也。





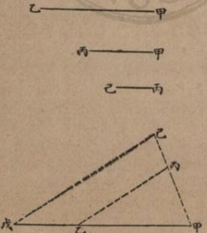
第六

有分數之直線，將別一直線依此線分分爲相當比例率法。如有甲乙一直線，原分爲甲己、己辛、辛乙三段，又有一丙丁

直線.欲依此甲乙線分、分作三分、爲相當比例之率.則齊二線之一端以爲平行線.自甲乙線之甲端.過丙丁線之丙端作一縱線.復自甲乙線之乙端過丙丁線之丁端作一斜線.則二線相交於戊.乃自戊至所分己辛二處作戊己戊辛二線.則丙丁線卽分爲丙庚、庚壬、壬丁、三段.與甲乙線之甲己、己辛、辛乙、三段爲相當比例率也.試審戊甲乙全形內戊丙庚戊甲己戊庚壬戊己辛戊壬丁戊辛乙之大小六三角形.其相當各式皆同.如戊丙庚與戊甲己爲同式.戊庚壬與戊己辛爲同式.戊壬丁與戊辛乙爲同式.故丙庚與甲己爲相當二界.庚壬與己辛爲相當二界.壬丁與辛乙爲相當二界.此六線既各爲相當界.故各爲相當比例率也.

第七

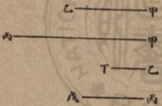
有二直線.作與此二線相連比例之第三線法.如有甲乙、甲丙、二直線.欲作與此二線相連比例之第三線.則將甲乙、甲丙、二線之甲末合成一角.照甲丙線度.增於甲乙線.爲甲戊線.自乙末至丙末作一乙丙線.又與乙丙線平行.自戊末作一戊己線.將甲丙線引至己處.乃成一甲己線.其自丙末所分之丙己線.卽爲與甲乙、甲丙二線相連比例之第三線也.蓋己戊線既與丙乙線平行.故甲乙丙三角形與甲戊己三角形爲同式.而甲乙、甲丙、乙戊、丙己四段.必爲相當比例之

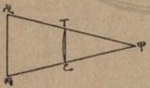


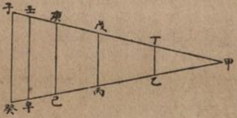
四率是以甲乙第一率與甲丙第二率之比卽同於乙戊第三率與丙己第四率之比也夫乙戊之度原與甲丙等故甲乙與甲丙之比卽甲乙與乙戊之比而甲丙與丙己之比卽乙戊與丙己之比然則甲乙與甲丙甲丙與丙己豈非相連比例之三線乎

第八

有三直線作與此三線相當比例之第四線法如有甲乙、甲丙、乙丁、三線欲作與此三線相當比例之第四線則取甲丙線度另作一甲丙線將此所作甲丙線照甲乙線度紀於乙於是以甲爲心自乙作弧一段又取原有之乙丁線度自乙截弧線於丁卽自乙至丁作一乙丁線再依甲丙線度自甲過丁作一甲戊線又與乙丁線平行作一戊丙線此戊丙線卽爲原三線相當比例之第四線也蓋甲丙戊三角形與甲乙丁三角形爲同式故甲乙線與甲丙線之比卽同於丁乙線與戊丙線之比因其比例相同故戊丙線爲原有之甲乙甲丙乙丁三線相當比



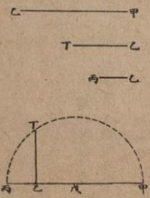




例之第四線也或欲作相當比例之數線則將甲角上下二線引長爲甲癸甲子凡相當各二處任意截爲幾段作幾平行線卽得相當比例之數線矣如以甲角之甲子甲癸二線截爲丁乙戊丙庚己壬辛子癸五段於所截五處作五平行線卽得相當比例之十率矣蓋以甲乙與甲丙之比同於丁乙與戊丙之比以甲丙與甲己之比同於戊丙與庚己之比以甲己與甲辛之比同於庚己與壬辛之比以甲辛與甲癸之比同與壬辛與子癸之比故將甲子甲癸二線雖分爲無數段作無數平行線其比例亦無不相同也

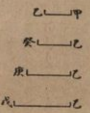
第九

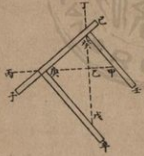
有二直線欲另作一線爲此二線之中率法如有甲乙乙丙二線欲另作一線爲此二線之中率則將甲乙乙丙二線相連爲一甲丙全線乃平分全線於戊以戊爲心以甲丙兩末爲界作一半圜自二線相連乙處至圜界作一丁乙垂線卽爲原有甲乙乙丙二線之中率線也何也丁乙線旣爲圜徑上之垂線則甲乙丁乙乙丙爲相連比例之三率見九卷第七節故甲乙線與乙丁線之比同於乙丁線與乙丙線之比也比例既同則所作乙丁線爲原有甲乙乙丙二線之中率可知矣



第十

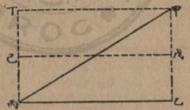
有二直線欲另作二線爲此二線間之兩率法如有甲乙、乙戊二直線欲另作二線爲此二線間之兩率則將甲乙、乙戊二線之乙末相合爲直角又自此二線所合乙角引長爲甲乙丙、戊乙丁二線次將二矩尺之二角正置於丁戊、甲丙二線上如一矩尺爲己庚辛一矩尺爲壬癸子乃以己庚辛矩尺之一股切於丁戊線之戊末又以壬癸子矩尺之一股切於甲丙線之甲末仍使二矩尺之己庚、癸子二股相合則癸庚二角亦爲直角而不離於所跨之線其二矩尺之壬辛二股亦使不離於所切之線末乃自甲至癸自戊至庚自庚至癸作三線卽截丁乙線於癸截乙丙線於庚成乙癸、乙庚二線卽爲原有之甲乙、乙戊二線間之兩率也何也如平分戊癸線於丑則丑爲心戊爲界成一戊庚癸半圜若平分甲庚線於寅則寅爲心甲爲界成一甲癸庚半圜今乙癸線爲甲癸庚半圜徑線上之垂線故乙癸爲甲乙、乙庚二線之中率而乙庚線爲戊庚癸半圜徑線上之垂線故乙庚又爲癸乙、乙戊二線之中率是以甲乙線與乙癸線之比同於乙癸線與乙庚線之比而乙癸線與乙庚線之比亦同於乙庚線與乙戊線之比因其比例相同故乙癸、乙庚二線爲甲乙、乙戊二線間之兩率也

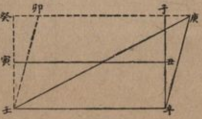




第十一

有三角形依一界作等積之直角四界形法。如有甲乙丙一直角三角形。欲依其乙丙界作一直角四界形。與原三角形積等。則與乙丙平行作一甲丁線。又與甲乙平行作一丁丙線。即成一甲乙丙丁直角四界形。於是平分甲乙線於戊。平分丙丁線於己。作一戊己線。則平分甲乙丙丁四界形爲兩形。此所分甲戊己丁、與戊乙丙己兩直角四界形之積。俱與甲乙丙三角形之積相等也。蓋甲乙丙三角形。爲甲乙丙丁四界形之一半。今所分甲戊己丁、與戊乙丙己兩四界形。既俱爲甲乙丙丁四界形之一半。則必與甲乙丙三角形之積俱相等可知矣。又如庚辛壬無直角之三角形。依辛壬界作一直角四界形。與原三角形積等。則與辛壬平行作一庚癸線。又自辛壬至庚癸線作子辛、癸壬二垂線。即成一子辛壬癸直角四界形。於是平分子辛線於丑。平分癸壬線於寅。作一丑寅線。則平分子辛壬癸四界形爲兩形。其所分子丑寅癸與丑辛壬寅兩直角四界形之積。俱與庚辛壬三角形之積相等也。試與庚辛線平行作一卯壬線。即成庚辛壬卯一斜方形。爲與子辛壬癸方形同底同高。故其積必等。見三卷第八節。今庚辛壬三角形。爲庚辛壬卯形之一半。則亦必爲子辛壬癸方形





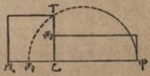
之一半矣既爲一半則所分子丑寅癸與丑辛壬寅直角四界形必與庚辛壬三角形之積相等可知矣

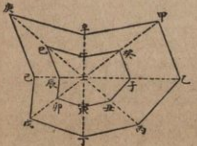
第十二

有一長方形作與此積相等之正方形法如有甲丙一長方形欲作與此長方形相等之正方形則將甲丙形之甲乙縱線合於甲乙橫線照此卷第九節法求得甲乙丙乙二線之中率爲丁乙線卽以丁乙線爲一邊作一丁戊正方形卽與甲丙長方形之積相等也何則大凡相連比例三率內中率所作之正方形積與首率末率所作之長方形積相等今丁乙線旣爲甲乙丙乙二線之中率則丁乙線所作之丁戊正方形積焉得不與甲乙丙乙二線相合所作之甲丙長方形之積相等乎

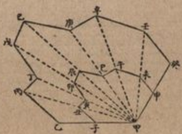
第十三

凡多界形作與本形同式或大或小之形法如有甲乙丙丁戊己庚辛之多界形欲作比此形小一半之同式形則自此形中心壬處至各角作衆線又取甲乙乙丙丙丁丁戊戊己己庚庚辛辛甲各界度之一半與各界平行置於對角各線之間爲癸子子丑丑寅寅卯卯辰辰巳巳午午癸之八線卽成癸子丑寅卯辰巳午之形爲原形每界減半之同式形也何也如對角線間





所成之甲乙壬、癸子壬、大小兩三角形之甲乙、癸子、線旣平行。而又同一壬角。則其相當各角俱等而兩形之式相同。倣此推之。其乙丙壬、壬子丑壬、二形。丙丁壬、丑寅壬、二形。丁戊壬、寅卯壬、二形。戊己壬、卯辰壬、二形。己庚壬、辰巳壬、二形。庚辛壬、巳午壬、二形。辛甲壬、午癸壬、二形。必俱爲同式形。此各相當大小兩形旣俱同式。則所作癸子丑寅卯辰巳午小形之各邊。爲甲乙丙丁戊己庚辛大形之各邊之一半。而爲同式形可知矣。又如甲乙丙丁戊己庚辛壬癸形。從甲角作線至各角。取乙丙度之一半。置於甲乙、甲丙、二線之間。與乙丙平行。如子丑。照此於諸對角線間作諸界之平行線。卽成甲子丑寅卯辰巳午未申小形。爲原形每界減半之同式形。其理亦與前同。若欲作比原形大幾倍之形。則以所作諸對角線。按分引長。而於本形外作諸界之平行線。卽成所欲作之大形也。



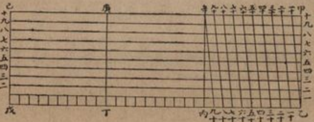
第十四

作分釐尺法。如甲戊尺三寸。每寸欲分爲百釐。則將甲乙邊平分作十分。將戊己邊亦平分爲十分。對所分之分作諸橫線。與乙戊平行。次將一寸之甲辛、乙丙、兩邊俱分爲十分。再於甲辛邊之第一分作斜線。至乙丙邊之乙處。如此作十斜線。俱與第一分斜線平行。卽分乙丙之一寸爲一百釐也。何也。甲辛乙丙皆爲一寸之度。俱平分爲十分矣。若將每分又分爲十釐。卽每寸亦得百釐。然度狹線多。必致相淆。今作斜線橫線各十。其橫斜相交處。共有百分。此百分卽百釐也。如第一斜線、與第一橫線相交之點。卽爲一

釐與第二橫線相交之點卽爲二釐以至第十橫線相交之點爲十釐卽甲辛邊所分之第一分之十釐也一斜線有十釐則十斜線豈非百釐乎由此推之若作二十橫線則一斜線得二十釐每寸卽分爲二百釐作百橫線則一斜線得百釐每寸卽分爲千釐其法甚簡而其用尤甚便也

第十五

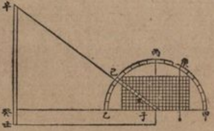
凡有三角形知其一角之度及此一角之兩傍界或知其二角之度及此二角之間一界或不知角度但知三界欲求其餘角餘界法如有一甲乙丙三角形知丙角爲三十八度四十四分及丙角兩傍之丙甲界長十四丈丙乙界長十三丈而欲知其餘角餘界則依十一卷第八節法作與丙角相等之三十八度四十四分之丁角將丁角兩傍之丁戊界作十四分丁己界作十三分乃自戊至己作一戊己線成一丁戊己小三角形與甲乙丙大三角形同式量其戊己邊得九分卽大形之甲乙邊爲九丈也再用有度之圜量取小形戊角得六十四度三十七分卽大形甲角之度也小形己角得七十六度三十九分卽大形乙角之度也何也夫甲乙丙戊己丁兩三角形之式既同其相當各角各界必俱相等小形之丁角卽與大形之丙角等其餘兩角亦必等小形之丁己邊既以十三分當大形丙乙邊之十三丈則小形戊己邊之九分必當大形甲乙邊

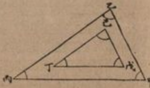


之九丈矣。又或知甲乙丙三角形之乙角爲七十六度三十九分，丙角爲三十八度四十四分，及乙丙界長十三丈，而欲知其餘角餘界，則作己丁界爲十三分，照乙角丙角度作己角丁角，於是畫己戊、丁戊二界相交於戊，即成戊己丁同式之小三角形。此小形之戊角必與甲角等，而小形之丁戊界十四分與大形之甲丙界十四丈相當，小形之戊己界九分與大形之甲乙界九丈相當矣。若知甲乙丙三角形之甲乙、甲丙、乙丙三界，而不知其角，則照前將三界之度作同式之小形，量其三角之度，即知大形之角度矣。

第十六

作分數比例測量儀器法：以甲丙乙半圜界分爲一百八十度，每度作六十分，將此半圜之丁甲、丁乙、丁丙三半徑線照所容方界分截開，分爲一百分，於每分上俱與三半徑平行作縱橫線，於甲乙徑線之甲乙兩末作兩定表，以圜丁心爲樞作一遊表如丁己，將此遊表亦如前所分一百分度作二百分，復於此儀器後面作一垂線記號以掛墜線如庚，即成一全儀器，用以測高深廣遠，可知其各角各界之度矣。如有一辛壬旗杆欲測其高，則將儀器按墜線立準，看甲乙徑線兩末之定表與旗杆癸處相對，乃爲地平，再將丁己遊表與旗杆頂尖辛處相對，次量儀器中心所對處至旗杆癸處得幾何，如有四十丈，則看儀

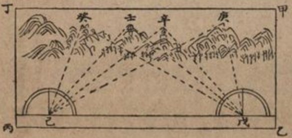




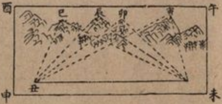
器丁乙線上自丁心至子得四十分以當地平四十丈卽視與子相對垂線至遊表相交處有幾何如丑子三十分卽爲旗杆自辛至癸相當數爲三十丈也再加癸壬高卽得旗杆辛壬之共高度矣蓋儀器上之丁子丑小三角形與所測得丁癸辛大三角形原爲同式其相當各界之比例必俱相同故以丁子四十分與子丑三十分之比卽同於丁癸四十丈與癸辛三十丈之比也若欲知丁辛弦線數卽視遊表自丁至丑相交之處得幾何如有五十分其相當數卽爲五十丈也若欲知丁癸辛三角形之各角度則視圜界與遊表相交處如己其乙己弧度卽丁角三十五度一十三分其餘己丙弧五十度四十七分卽辛角度而癸辛線原與子丑垂線平行爲平行線故癸角必是直角而爲九十度也

第十七

倣各種地形畫圖法如有甲乙丙丁地形欲畫一圖則選能見各地之二處立儀器爲戊爲己將戊與己對准定表先自戊以遊表視庚辛壬癸等處得諸角之度皆細記之如庚戊己角得八十一度辛戊己角得五十度三十分壬戊己角得四十五度八分癸戊己角得三十三度二十分次自己以遊表照前視庚辛壬癸等處得諸角之度亦細記之如庚己戊角得三十五度四十分辛己戊角得四十度十分壬己戊角得四十七度二十五分癸己戊角得七十度於是

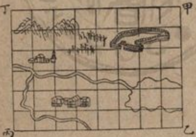


任意作一子丑線爲戊己相當線於此子丑線之兩末作諸角與所記諸角相等將所作諸角之各線俱引長使相交於寅卯辰巳等處乃以庚辛壬癸所有之諸地形並其餘各處凡目之所見俱畫於圖之相當各界卽成一午未申酉之圖卽甲乙丙丁地形之圖也蓋午未申酉圖內所作寅子丑卯子丑類諸三角形之角度皆與甲乙丙丁地形之庚戊己辛戊己類諸三角形之角度相等而作故其相當各三角形俱爲同式此所以全圖與全地形爲同式也



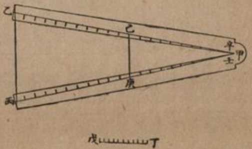
第十八

畫地理圖欲約爲小圖或欲廣爲大圖法如有甲乙丙丁一地理圖欲約爲小圖爲原圖四分之一則用甲乙丙丁形界之四分之一畫一戊己庚辛形將甲乙丙丁原形任意分爲數正方形而將小形亦分爲數正方形視原圖中所有山川城郭村墅林園凾於大圖之某正方分者約而畫入小圖某正方形內則此所畫之戊己庚辛小圖卽與原有甲乙丙丁大圖爲同式矣



第十九

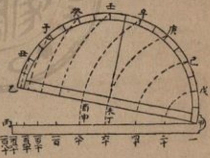
作比例尺平分線法。如於比例尺欲作平分線，則自甲樞心至乙、丙二末，作甲乙、甲丙二線，用本卷第五節法分之各平分爲二百分，卽爲比例尺之平分線也。以用法明之，如有丁戊一直線，欲平分爲十分，則將比例尺一百分之己、庚二點，照丁戊線度展開，勿令移動。次取比例尺之第十分之辛、壬二點相離之度，卽是丁戊線之十分之一分也。何則？自乙至丙作一線，自己至庚作一線，自辛至壬復作一線，其甲乙丙三角形與甲己庚三角形爲同式，而甲己庚三角形又與甲辛壬三角形爲同式，是以所分甲己線與甲乙線之比，同於己庚線與乙丙線之比，而甲辛線與甲己線之比，亦同於辛壬線與己庚線之比也。然則十分之甲辛線，旣爲百分之甲己線之十分之一，其辛壬線亦必爲己庚線之十分之一矣。丁戊線原與己庚線同度，則辛壬線亦爲丁戊線之十分之一可知矣。



第二十

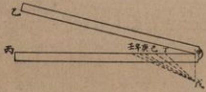
作比例尺分圜線法。如於比例尺欲作分圜線，則自甲樞心至乙、丙二末，作甲乙、甲丙二線，乃平分甲乙線於未，以未爲心，以甲乙二末爲界，作一半圜，於是分圜界爲一百八十度，復以甲爲圜心，至所分圜界戊己庚辛壬癸子丑等處作各弦線，又將諸弦線度移於尺之甲乙、甲丙二線，則此二線卽成一圜之諸弦之總線也。以用法明之，如寅卯、寅辰二線所合寅角，欲知其度，則以寅爲心，作一辰卯弧，將比例尺六

十度之丁、未兩點相距之度照寅辰或寅卯度展開勿令移動次取卯、辰、相距之度於比例尺上尋至八十度之申、酉、處恰符即是寅角爲八十度也何則若自丁至未自申至酉作二線成甲申酉甲丁未兩同式三角形其相當各角各界俱爲相當比例之率故甲未線與甲酉線之比同於丁未線與申酉線之比也夫甲未線既爲比例尺所作甲庚六十度之弦線而甲酉線又爲甲辛八十度之弦線其丁未線既與小圜寅卯幅線等而幅線原與六十度之弦線等然則丁未線卽小圜六十度之弦線而申酉線亦爲小圜八十度之弦線也以此得知寅角之卯辰度爲八十度也

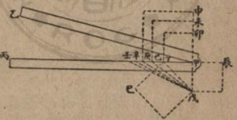


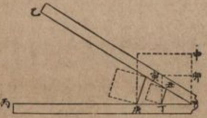
第二十一

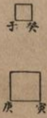
作比例尺分面線法如於比例尺欲作分面線則以甲樞心處至乙丙二末作甲乙甲丙二線自甲截甲丙線於丁照所截甲丁度於甲心作一甲戊垂線自戊至丁作一戊丁線又照戊丁線度自甲截甲丙線於己自戊至己作一戊己線又照戊己線度自甲截甲丙線於庚自戊至庚作一戊庚線又照戊庚線度自甲截甲丙線於辛自戊至辛



作一戊辛線又照戊辛線度自甲截甲丙線於壬自戊至壬作一戊壬線照此累累截之至丙末又將甲丙線所截各度移置甲乙線即成比例尺之分面線也何則於甲丁戊直角三角形之三界作卯丁、辰戊、戊巳三正方形其甲丁、甲戊二線因爲相等度所作故卯丁、辰戊二形必等再於戊甲丁直角相對之戊丁界所作之戊巳一方形亦必與直角兩旁界所作卯丁、辰戊二方形相等也見九卷第四節。次於甲己界作未己正方形甲己界原與戊丁等則甲己界所作未己方形即與戊丁界所作之戊巳方形相等矣未己方形既與戊巳方形等則必與卯丁、辰戊二形相等而亦與卯丁之倍數相等矣夫甲己界即大於卯丁形一倍爲未己形之一界也倣此論之則甲庚界即爲比卯丁形大二倍形之界而甲辛甲壬等界即爲比卯丁形大三倍四倍形之界可知矣以用法明之如有一癸子正方形欲作大二倍之正方形則將比例尺展開使其丁丑相距之度與癸子界度等次取比例尺寅庚相距之度即是比癸子方形大二倍之方形之一面界度也何則自丁至丑自庚至寅作



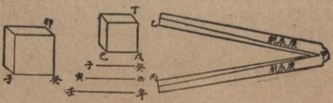


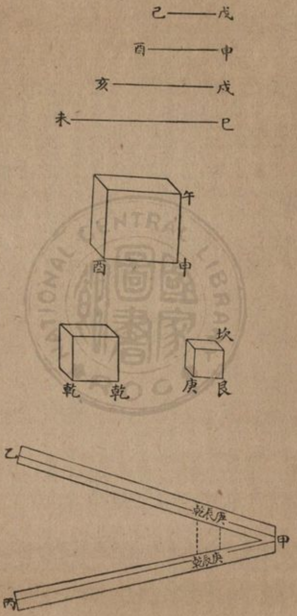


丁丑、庚寅、二線成甲丁丑、甲庚寅同式兩三角形則甲丁線與甲庚線之比即同於丁丑線與庚寅線之比也夫甲庚線所作方形原比甲丁線所作方形大二倍則庚寅線所作方形必比丁丑線所作方形亦大二倍矣丁丑之度原與子癸等則寅庚線豈非比子癸方形大二倍方形之一界乎

第二十二

作比例尺分體線法如於比例尺欲作分體線則以甲樞心之甲乙、甲丙、二線任作丁己一正方體取其戊己一界之度置於尺上自甲截甲乙線於庚次作比戊己界大一倍之辛壬線又於戊己、辛壬、二線間照本卷第十節法作相連比例之癸子、丑寅二率乃取癸子線度置於尺上仍自甲截甲乙線於辰則甲辰所作卯子正方體必比甲庚所作丁己正方體大一倍矣何則試將癸子線作卯子正方體則與丁己正方體爲同式其二體相比之比例必同於戊己、癸子、二界所生連比例加二倍之比例今辛壬線既爲戊己相連比例之第四率則丁己、卯子、二體之比例必同於戊己辛壬二線之比例矣辛壬線既比戊己線大一倍則卯子體亦比丁己體大一倍可知矣又作比戊己界大二倍之巳未線仍照本卷第十節法作戊己巳未二線間相連比例之申酉戌亥二率乃取申酉線度置於尺上自甲截甲乙線於乾則甲乾所作午酉正方體即比甲庚所作丁己體大二倍矣照此屢倍戊己界求相連比例





之四線。取其第二線度。置於尺之甲乙線上。又按甲乙線所截各度。移置甲丙線。即成比例尺之分體線也。以用法明之。如有一坎庚正方體。欲作大二倍之體。則將比例尺展開。使其庚與庚第一次所截之點相距之度。與艮庚界度等。次取比例尺乾與乾第三次所截之點相距之度。即是比坎庚正方體大二倍之正

方體之一界度也何則自比例尺之庚乾二處作庚庚、乾乾、二線卽成甲庚庚、甲乾乾、同式兩三角形則甲庚線與甲乾線之比同於庚庚線與乾乾線之比例矣夫甲乾線所作方體原大於甲庚線所作正方體之二倍則乾乾線所作正方體必大於庚庚線所作正方體之二倍可知矣又捷法設正方體界一百釐其積數一百萬釐以二因之成二百萬釐立方開之得界一百二十五釐又以三因之成三百萬釐立方開之得界一百四十四釐照此屢倍積數開立方將所得之數於分釐尺上取其度截比例尺之甲乙、甲丙二線卽成分體線與前求連比例之法無異也

數理精蘊上編卷五

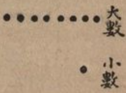
算法原本一

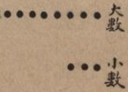
第一

一者、數之原也。衆一相合而數繁焉。不能無大小多寡之不齊。而欲知其所以分合之故。必有一定之法。始可以得其準。若夫累積小數與大數等者。此小數卽度盡大數之準也。如大數有八。小數有二。四倍其二。與八必等。則二卽爲度盡八之準。苟累積小數不能與大數等者。此小數卽非度盡大數之準也。如大數有八。小數有三。二倍其三爲六。小於八矣。三倍其三爲九。又大於八矣。若此者卽爲非度盡大數之準。要之小數爲大數之平分者。卽能度盡大數。而小數非大數之平分者。卽不能度盡大數。是故以小度大。以寡御多。求其恰符而毫無舛者。惟在得其平分之法而已。

第二

數之目雖廣。總不出奇偶二端。何謂偶。兩整平分數是也。何謂奇。不

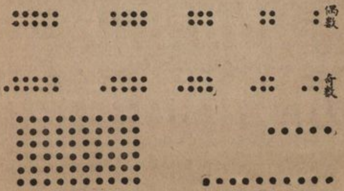




能兩整平分數是也如二、四、六、八、十之類平分之俱爲整數斯謂之偶數矣若三、五、七、九、十一之類平分之俱不能爲整數斯謂之奇數矣又如小偶數分大偶數得偶分則謂之偶分之偶數如小偶數四。分大偶數三十二。得八平分。是爲偶分。其三十二。卽爲偶分之偶數。小偶數分大偶數得奇分則謂之奇分之偶數如小偶數六分。大偶數三十。得五平分。是爲奇分。其三十。卽爲奇分之偶數。又如小奇數分大奇數得奇分則謂之奇分之奇數矣如小奇數五。分大奇數十五。得三平分。是爲奇分。其十五。卽爲奇分之奇數。

第三

乘者兩數相因而成也葢有兩數視此一數有幾何彼一數有幾何將此一數照彼一數加幾倍則兩數積而復成一數故謂之相因而成然不用加而用乘者何也葢加須屢累而得乘則一因卽得此立法之精而理則實相通也如有六與十兩數以十爲主而加六次得六十以六爲主而加十次亦得六十今以十爲主而以六乘之或以六爲主而以十乘之皆得六十其數無異而比加捷矣

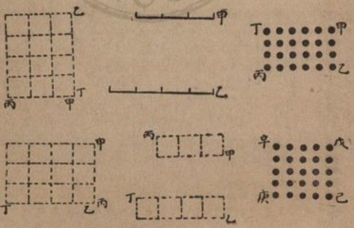


第四

凡兩數相乘。爲平方數。如四與六相乘得二十四是也。試將四六兩數作點排之。縱立四點爲甲乙。橫列六點爲甲丁。將此六點累四次。卽成甲乙丙丁平方數矣。又若相等兩數相乘。得數則爲正方數。如五與五乘得二十五是也。苟將五數縱橫各列五點。或依縱數。或依橫數。累五次。卽成戊己庚辛正方數矣。

第五

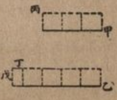
凡數之相乘。可用線以表之。然線雖無廣分。如依一線之長分廣爲小方面。看此線所有方面若干。將彼線所有方面。加作幾倍。或看彼線所有方面若干。將此線所有方面。加作幾倍。則二線相積而成面矣。設如有甲乙二線。甲線之分爲三。乙線之分爲四。將此二線相乘。則依甲線三分之一分作廣分。爲甲丙。依乙線四分之一分作廣分爲乙丁。其甲丙有三小方形。乙丁有四小方形。若依甲丙所有之數。將乙丁加爲三倍。或依乙丁所有之數。將甲丙加爲四倍。俱成函十二小方形之乙丙甲丁之二直角形矣。蓋面爲線之積。以一線爲



橫一線爲縱縱橫相因而成故測面者必於線知線即可以知面也

第六

凡二線彼此各分不均而有零分者其相乘所成方面亦有零分也設有甲乙二線甲線爲三分今將甲線依三分之一分作廣分爲三小方形並無餘積而乙線照甲線分則爲四分有零亦將乙線依甲線一分作廣分則爲四小方形而餘戊一小形以所作甲丙爲橫乙丁爲縱則成一丁甲四方形而此形之內必有十二小方形仍有三小戊形附於十二方形乃爲二線相乘之總積也又如此類一線有零分者其餘分在一邊若二線俱有零分者則其餘分亦在二邊矣



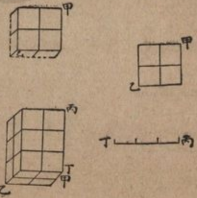
第七

凡三數遞乘爲立方數如二與三相乘得六又以四乘之得二十四是也試將二三四之三數作點排之縱列二點爲甲丁橫列三點爲甲乙將此三點累二次成丁乙平方數又直立四點爲丙丁依丙丁數將丁乙平方數累四次即成丙乙立方數矣

又若相等三數遞乘得數則爲正立方數如三與三乘得九再以三乘得二十七是也試將三數縱橫各排三點平列三次成庚己平方數又直立三點將庚己平方數累三次即成戊己正立方數矣

第八

凡數之遞乘爲體可用面以表之蓋面雖無厚分如依一面之積分廣爲小方體看面所有積分得線之長分若干將面所有小方體加作幾倍則線面因之而成體矣設如有甲乙面之分爲四丙丁線之分爲三將此面線相乘則依甲乙面四分之一作厚分爲四小方體乃依丙丁線分數將甲乙加爲三倍卽成函十二小方體之丙乙直角立方體矣蓋體爲面之積而面爲線之積故線可以測面幷可以測體也



第九

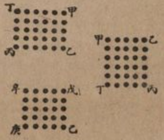
除者兩數相較而分也蓋視大數內有小數之幾倍將大數照小數減幾次則大數分而復爲一小數故謂之相較而分然不用減而用除者何也蓋減必遞消其分除則一歸而卽得除之與減卽猶乘之與加正相對待者也如有大數十二小數四若用十二以四減之三次而盡卽知十二爲四之三倍若用除法則三倍其四與十二較其數適等卽知十二爲四之三倍矣此除之與減理相通而用較捷也

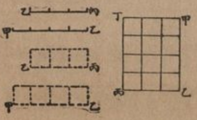
第十

凡兩數相乘之平方數以一數除之必得其又一數也設如甲乙五乙丙六兩數相乘之甲乙丙丁平方數三十若以甲乙五除之即得乙丙六或以乙丙六除之即得甲乙五蓋此三十中有五之六倍六之五倍如作點排之五點為橫則縱排六次六點為橫則縱排五次皆成方數故兩數不等平方面知其一數或知兩數相差之較始能得其兩邊線也又若正方數則其縱橫皆同如戊己庚辛之正方數二十五其縱橫皆五是已故凡正方面有積數即可得其每邊者蓋因其縱橫兩邊皆等故也

第十一

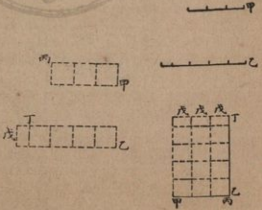
凡以線乘線即成面而以線除面亦復得線故數之乘者可用線以表之而除者亦可用線以表之也設如有甲乙丙丁一方面積一十二以甲乙線四分除之得乙丙線之三分或以乙丙線三分除之亦得甲乙線之四分試將甲乙丙二線作廣分則甲乙線成四小方形乙丙線成三小方形若依甲乙線所有數以分甲乙丙丁面即每分得三小方形如乙丙線依乙丙線所有數以分甲乙丙丁面即每分得四小方形如甲乙線蓋除之與乘猶分合之相對以線合者仍以線而分返本還原之義有不爽矣





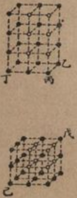
第十二

凡有零分不均二線相乘之方面以整分線除之必得零分線以零分線除之必得整分線也設如甲線三分乙線四分有零相乘成丁甲面若以甲線三分除之即得乙線四分有零或以乙線四分有零除之亦得甲線三分試將甲線作廣分成三小方形爲甲丙乙線作廣分則成四小方形爲乙丁餘戊一小形若依甲丙線所有數以分丁甲面即每分得四小方形一戊小形如乙丁線或依乙丁線所有數以分丁甲面即每分得三小方形如甲丙線矣此爲二線一整一零相乘之總積故以整線除之得零以零線除之得整若二線俱有零分者彼此除之必俱得零分也



第十三

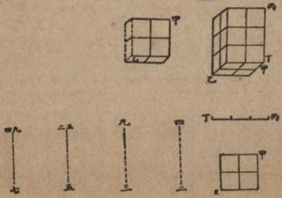
凡三數遞乘之立方數以兩數遞除之始得其又一數也設如甲乙四乙丙二丙丁三遞乘得甲丁立方數二十四若以甲乙四除之得乙丁平方數六再以乙丙二除之始得丙丁三蓋乙丁平方中有三之二倍而甲丁立方中有六之四倍如作點排



之二點爲縱橫排三次直累四次即成方體故三數不等立方體知其兩數或知其三數相差之較始能得各邊也又若正立方體其縱橫厚度皆爲一數即以一數遞除二次則其原數自得如戊己正立方數二十七其縱橫厚皆三是已故凡正立方體有積數即可得其每邊者正爲其縱橫厚度皆等故也

第十四

凡以線除體即得面而以面除體亦復得線故線可以除面而面亦可以除體也設如有丙乙體積一十二以丙丁線三分除之得甲乙面之四分或以甲乙面四分除之亦得丙丁線之三分試將甲乙面作厚分則成四小方體若依丙丁線所有數以分丙乙體即每分得四小方體如甲乙面依甲乙面所有數以分丙乙體即每分得三分如丙丁線蓋體本以線面相乘而得故可以線面相除也



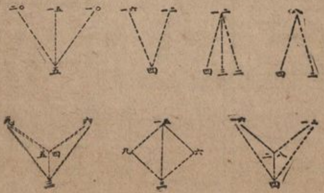
第十五

凡大數用小數可以度盡者此大數必爲此小數之所積也然所謂小數可以度盡大數者復有幾種有大數惟一數可以度盡者如四九二十五四十九之類惟用二可以度四三可以度九五可以度二十五七可以度四十九是也有大數用兩數三數俱可以

度盡者如八與十二之兩數用二用四俱可以度盡八用二用三用四俱可以度盡十二是也有兩大數或三大數用一小數俱可以度盡者如十二十六之兩數或一十十五二十之三數用四可以度盡十二十六之兩數用五可以度盡一十十五二十之三數是也又有一小數可以度盡幾大數將此幾大數相加爲一總數此小數亦可以度盡此總數如四可以度盡十二十六兩數若將十二十六相加爲二十八則此四亦可以度盡此二十八也又或一小數可以度盡幾大數將此大數不拘幾分分之此小數可以度盡一分亦必可以度盡其餘幾分也如三可以度盡十五將十五分爲六九兩數此三可以度盡六亦必可以度盡九也又如六與九兩數用三俱可以度盡若將六與九相乘得五十四此小數三仍可以度盡此五十四也凡此類者皆爲彼此有度盡之數也

第十六

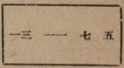
凡大數用小數不可以度盡者此大數必非此小數之所積也然用一以度之無不可以度盡者蓋一爲數之根諸數皆自一而積之故也所謂度不盡者亦復有幾種有大數無小數可以度盡者

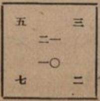


如五、七、十一、十三之類任用二用三用四俱不能度盡也有兩大數或三大數用小數彼此不可以度盡者如十五與八之兩數用二用四可以度盡八而不能度盡十五用三用五可以度盡十五而不能度盡八又如四、六、九之三數用二可以度盡四、六而不能度盡九用三可以度盡六、九而不能度盡四也又有彼此不能度盡之數或將一數自乘或將兩數俱自乘彼此仍俱不可以度盡也如五與六之兩數彼此不能度盡亦無一小數可以度盡此兩數即將五自乘爲二十五或將六自乘爲三十六則六仍不能度盡二十五而五仍不能度盡三十六即二十五亦不能度盡三十六也又如三、七兩數與二、五兩數俱爲彼此不能度盡之數或將三與七相乘得二十一將二與五相乘得一十此一十與二十一之兩數仍爲彼此不能度盡之數也凡此類者皆爲彼此無度盡之數也

第十七

凡兩數互轉相減未至於一而即可以減盡者此減盡之最小數即可以度盡此兩數也設如有甲乙十六丙丁六之兩數將

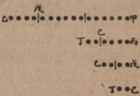


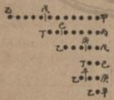


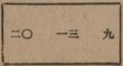
丙丁六與甲乙十六減二次餘戊乙四將此戊乙四轉與丙丁六相減餘己丁二又將此己丁二轉與戊乙四相減二次卽無餘則此己丁二卽可以度盡甲乙十六及丙丁六矣蓋八倍其二與十六等三倍其二與六等也又如十六與十二與八此三數亦爲彼此有度盡之數何也蓋十六與十二相減餘四以四轉與十二相減三次而盡則四可以度盡十六與十二矣又二倍其四卽與八等則四又可以度盡八然則十六十二與八之三數爲彼此有度盡之數可知矣

第十八

凡兩數互轉相減至於一始可以減盡者一之外別無他小數可以度盡此兩數也設如有甲乙十二丙丁七之兩數將丙丁七與甲乙十二相減餘戊乙五將此戊乙五轉與丙丁七相減餘己丁二將此己丁二又轉與戊乙五相減餘庚乙三又將庚乙三轉與己丁二相減餘辛乙一旣至於一始可以度盡甲乙丙丁兩數而一之外如二三四雖可以度盡十二而不能度盡七也又如九與十三及二十之三數亦爲彼此無度盡之數何



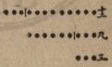




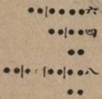
也。蓋將九與十三互轉相減。必至於一。即用十三與二十轉減。或用九與二十轉減。亦皆至於一。則除此一之外。皆無可以彼此度盡此三數之小數矣。

第十九

凡有大數約爲相當比例之最小數。以從簡易。則爲約分法也。然數有可約不可約之分。可約者度盡之數。不可約者度不盡之數也。設如有九與十二之兩數。欲約爲相當比例之最小數。乃用求小數度盡大數法。以九與十二互轉相減。得減盡之數爲三。則三爲度盡九與十二之數矣。以三除九得三。以三除十二得四。此三、四兩數。即爲九與十二相當比例之最小數也。又如有六、四、八之三數。欲約爲相當比例之最小數。乃以六與四互轉相減。得減盡之數爲二。又以二與八相減四次而盡。則二爲度盡六、四、八之小數矣。以二除六得三。以二除四得二。以二除八得四。此三、二、四三數。即六、四、八相當比例之最小數也。此皆數之可約者也。若夫數之不可約者。互轉相減。必至於一而

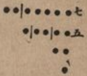


十二		九
	三	
四		三



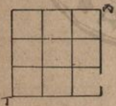
八	四	六
	二	
四	二	三

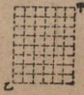
不可以度盡也。如有五、七兩數。以五減七餘二。復以二減五二次餘一。既餘一則自一之外必無可以度盡之數而不可約矣。

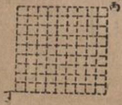


第二十

凡有大分以分母乘之。通爲小分。則爲通分法也。然不曰乘而曰通者何也。蓋乘則積少成多。其得數溢於原數之外。通則變大爲小。其得數仍函於原數之中也。如有大分十二。其分母爲四。欲得其小分。則以分母四乘大分十二。得小分四十八。是巳。試作甲乙方形以明之。其中所函方形十二。卽大分也。若將中函之方形每分俱分爲四小方則十二方形共分爲四十八小方形矣。其數雖比原大數加四倍。然其每分之分只得原數之四分之一。故仍函於甲乙方形之內。而未嘗溢出原數之外也。又如有大分九。其分母爲九。欲得其小分。則以分母九乘大分九。得小分八十一。是巳。試作丙丁方形以明之。其中所函方形九。卽大分也。若將其中函之方形每分俱分爲九小方。則九方







形共分爲八十一小方形矣其數雖比原大數加九倍而仍函於丙丁方形之內者以其每分之分只得原數之九分之一也由此推之其每分之母或爲八或爲十二或爲數十亦皆倣此通之其所通之數雖至千萬而要皆未有溢於所通原分之外者矣

第二十一

凡有幾小數欲求俱可以度盡之大數則以此幾小數連乘之得數始爲此幾小數度盡之一大數也設如有四五兩小數欲求用四用五俱可以度盡之一數則以四與五相乘得二十即爲四五兩數俱可度盡之一大數矣又如有三四五之三小數欲求用三用四用五俱可以度盡之一數則以三與四相乘得十二又以五乘十二得六十即爲三四五俱可度盡之一大數矣葢小數爲大數之根始能度盡大數如四五可以度盡二十者二十乃四之五倍亦即五之四倍也三四五可以度盡六十者六十乃十二之五倍而十二乃三之四倍也

第二十二

凡有兩數彼此互乘所得之數與原數比例必同也葢數有多寡

而分又有大小則紛紜難御故必依此數之分將彼數加爲幾倍又依彼數之分將此數加爲幾倍則兩分數旣同而比例亦同矣如甲乙二數甲爲三分之二乙爲四分之三欲辨其孰大則依甲數將乙數加三倍爲十二分之九依乙數將甲數加四倍爲十二分之八如是則所加之兩大分同爲十二而所生之兩小分相比卽同於原甲數與乙數之相比矣何也甲數本三分之二而爲十二分之八者乃加四倍之比例十二爲三之四倍・八爲二之四倍・而十二分之八之比例仍同於三分之二之比例也乙數本四分之三而爲十二分之九者乃加三倍之比例十二爲四之三倍・九爲三之三倍・而十二分之九之比例仍同於四分之三之比例也此卽互乘同母之法・如甲爲三分之二者・三卽母數・二卽子數也・乙爲四分之三者・四卽母數・三卽子數也・因兩母數不同・故用互乘以同之・

甲	乙
三	四
一二	一三
二	三
八	九

第二十三

凡子母分有幾數而子數同爲一者先以各母求俱能度盡之一數次以各母除之則爲各子數也如甲乙丙三數甲爲二分之一乙爲三分之一丙爲四分之一則先以三母數連乘得二十四爲甲乙丙之共母數又以二除共母數得十二爲甲之子數以三除共母數得八爲乙之子數以四除共母數得六爲丙之子數蓋甲本二分之一子母各加十二倍卽爲二十四分之十二而二十四與十二之比例仍同於二與一之比例也乙本三分之一子母各加八倍卽爲

甲	乙	丙
二	三	四
一之	一之	一之
	二四	
一二	八	六

二十四分之八而二十四與八之比例仍同於三與一之比例也丙本四分之一子母各加六倍即爲二十四分之六而二十四與六之比例仍同於四與一之比例也

第二十四

凡子母分有幾數而子母數俱不等者亦先以各母求俱能度盡之一數次以各母除之得數復以各子數乘之即爲各子數也如有甲乙丙三數甲爲三分之二乙爲四分之三丙爲五分之四則先以三母數連乘得六十爲甲乙丙之共母數次以三除共母數得二十以乘子數二得四十爲甲之子數又以四除共母數得十五以乘子數三得四十五爲乙之子數又以五除共母數得十二以乘子數四得四十八爲丙之子數蓋甲本三分之二子母各加二十倍即爲六十分之四十而六十與四十之比例仍同於三與二之比例也乙本四分之三子母各加十五倍即爲六十分之四十五而六十與四十五之比例仍同於四與三之比例也丙本五分之四子母各加十二倍即爲六十分之四十八而六十與四十八之比例仍同於五與四之比例也

甲三之二		四〇
乙四之三	六〇	四五
丙五之四		四八

第一

凡有幾小數與幾大數相比。其比例若同。則小數相加所得之總數與大數相加所得之總數相比。仍同於原數之比例也。設如有一小數六。一小數四。一大數十八。一大數十二。其小數六爲大數十八之三分之一。而小數四亦爲大數十二之三分之一。將兩小數六、四相加得一十。將兩大數十八、十二相加得三十。此一十與三十之比。卽如六與十八。四與十二之比。皆爲三分之一之比例也。又如三小數二、三、四與三大數六、九、十二相比。皆爲三分之一。將二、三、四相加得九。將六、九、十二相加得二十七。其比例亦爲三分之一也。又或四小數四大數相加。其總數之比例亦皆同。如三與十二。四與十六。五與二十。六與二十四。俱爲四分之一。將三、四、五、六四小數相加得十八。將十二、十六、二十、二十四四大數相加得七十二。其比例仍爲四分之一矣。

六	一八
四	一二
一〇	三〇

二	六
三	九
四	一二
九	二七

三	一二
四	一六
五	二〇
六	二四
一八	七二

第二

凡有幾小數與幾大數之比例若同。則小數相減所得之餘數與大數相

減所得之餘數相比仍同於原數之比例也設如有一小數十一小數六一大數三十一大數十八其小數十爲大數三十之三分之一而小數六亦爲大數十八之三分之一將兩小數十與六相減餘四將兩大數三十與十八相減餘十二此四與十二之比即如十與三十六與十八之比皆爲三分之一之比例也又如三小數八四三與三大數二十四十二九相比皆爲三分之一將四三與八遞相減餘一將十二九與二十四遞相減餘三其比例亦爲三分之一也又或四小數四大數相減其餘數之比例亦皆同如十八與七十二爲四分之一而三與十二四與十六五與二十俱爲四分之一將小數三四五與十八遞相減餘六將大數十二十六二十與七十二遞相減餘二十四其比例仍爲四分之一矣

三〇	一〇
一八	六
――	――
一二	四

二四	八
一二	四
――	――
一二	四
九	三
――	――
三	一

七二	一八
一二	三
――	――
六〇	一五
一六	四
――	――
四四	一一
二〇	五
――	――
二四	六

第三

凡有一數乘兩數其所得兩數相比仍同於原兩數之相比也設如一數六與八與一十兩數相乘以六乘八得四十八以六乘一十得六十此四十八與六十相比即同於原數八

一〇		八
	六	
六〇		四八

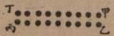
與一十之相比矣。夫八與四十八。一十與六十。皆爲六分之一。故一與六之比。同於八與四十八之比。而一與六之比。亦同於十與六十之比也。然則八與四十八之比例。必同於十與六十之比例。而四十八與六十之比例。亦必同於八與一十之比例可知矣。

第四

凡有一數除兩數。其所得兩數相比。仍同於原兩數之相比也。設如一數三。除十二與十五之兩數。以三除十二得四。以三除十五得五。則此四與五相比。卽同於原數十二與十五之相比矣。夫十二與四。十五與五。皆爲三分之一。故一與三之比。同於四與十二之比。而一與三之比。亦同於五與十五之比也。然則四與十二之比例。必同於五與十五之比例。而四與五之比例。亦必同於十二與十五之比例可知矣。

第五

凡相當比例四數。其第一數與第四數相乘。第二數與第三數相乘。所得之數等者何也。蓋兩方面以其縱橫界互相爲比之比例若等。則兩方積必等。見幾何原本七卷第三節。今以第一數與第四數相乘。卽如以第一數爲縱。第四數爲橫。成一方數。而



第二數與第三數相乘即如以第二數爲縱第三數爲橫成一方數其積必相等也設如有二與六三與九相當比例四數將第一數二爲縱第四數九爲橫相乘得十八爲甲丙一方數將第二數六爲縱第三數三爲橫相乘亦得十八爲戊庚一方數夫甲丙方之甲丁橫界比戊庚方之戊辛橫界大三分之二而戊庚方之戊己縱界比甲丙方之甲乙縱界亦大三分之二其比例相等故兩方數亦等此兩方數既等則相當比例四數其第一數與第四數相乘第二數與第三數相乘所得之數相等無疑矣

第六

凡相連比例三數其首數與末數相乘與中一數自乘所得之數等者何也葢兩方面相等者其縱橫界之互相比例必等見幾何原本七卷第三節今將首數與末數相乘即如以首數爲縱末數爲橫成一方數而中數自乘即是以中數爲縱復以中數爲橫成一方數其積必相等也設如有四六九相連比例三數將首數四爲縱末數九爲橫相乘得三十六爲甲丙一方數將中數六爲縱仍復爲橫相乘即是自乘亦得三十六爲戊庚一方數夫甲丙方之甲丁橫界比戊庚方之戊辛橫界大三分之一而戊庚方之戊己縱界比甲丙方之甲乙縱界亦大三分之一其比例相等故兩方數亦等此兩方數既等則相連比例三數其首末兩數相等其中數自乘所得之

數相等無疑矣．

第七

凡有兩數除一數．其所得兩數之比例．卽同於原兩數之轉相比例也．設如有一數十八．以二、三兩數除之．二除十八得九．三除十八得六．以此九與六兩數相比．卽同於原兩數三與二之相比也．蓋二與三、六與九爲相當比例之四數．以第一數二與第四數九相乘．第二數三與第三數六相乘．皆得十八．故二除十八得九．卽如以第一數除第二數與第三數相乘之數．而得第四數也．以三除十八得六．卽如以第二數除第一數與第四數相乘之數．而得第三數也．夫相當比例數．其第二數與第四數之比．原同於第一數與第三數之比．故第一數二除十八所得之九．與第二數三除十八所得之六相比．卽同於第二數三與第一數二之相比也．

三		二
	一八	
六		九

二	三	六	九

六		四
	三六	
六		九

四	六	六	九

● 第八

凡有兩數除一數．其所得之兩數內有一數與原兩數內一數相等者．則所得之兩數與原兩數互轉相比．卽成相連比例之數也．設如有一數三十六．以四、六兩數除之．四除三十六得九．六除三十六仍得六．與原數六相等．則此九與六兩數之比．卽同於原數六與四之比也．蓋四與六、六與九．爲相連比例之四

數以四爲首數九爲末數相乘以六爲中數自乘皆得三十六今以四除三十六得九卽如以首數除中數自乘之數而得末數也以六除三十六復得六卽如以中數除首末兩數相乘之數而仍得中數也夫相連比例數其末數與中數之比原同於中數與首數之比則首數四除三十六所得九與中數六除三十六所得六相比卽同於中數六與首數四之相比也

第九

凡相當比例四數其第一數度盡第二數則第三數亦必度盡第四數也如有二、六、三、九相當比例四數其第一數二可以度盡第二數六則第三數三亦可以度盡第四數九矣夫相當比例四數第一與第二之比必同於第三與第四之比今第一爲二第二爲六乃加三倍之比例則第四與第三亦必爲加三倍之比例故三倍其二可以度盡六者三倍其三卽可以度盡九也

二	六	三	九

第十

凡相連比例三數其第一數度盡第二數亦必度盡第三數也如有二、四、八、相連比例三數其第一數二可以度盡第二數四亦必可以度盡第三數八矣夫相連比例三數第一與第二之比同於第二與第三之比今第一數爲二第二數爲四乃加倍之比例則第二與第三亦必爲加倍之比例而第一與第三則爲再加一倍之比例故一倍其二可以度盡四者再倍其二卽可以度盡八也

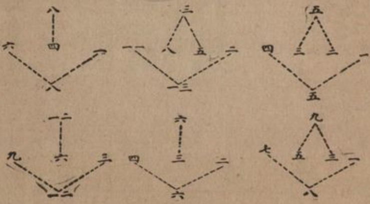
二	四	八

第十一

凡依次遞加取四數。其第一第四兩數相加與第二第三兩數相加之數等也。如一、二、三、四遞加之四數。將第一數一與第四數四相加得五。以第二數二與第三數三相加亦得五。又如一、三、五、七遞加之四數。一、三、五、七為隔一數以遞加者也。將第一數一與第四數七相加得八。以第二數三與第三數五相加亦得八也。又如二、五、八、十一遞加之四數。二、五、八、十一為隔二數以遞加者也。將第一數二與第四數十一相加得十三。以第二數五與第三數八相加亦得十三。由此推之。或隔三數。或隔四數。或隔五六數。以至極多數。但依次遞加取四數。無有不如此也。

第十二

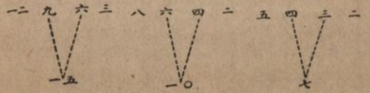
凡依次遞加取三數。其首末兩數相加。與中數加倍之數等也。如二、三、四遞加之三數。將首末二四相加得六。以中數三倍之亦得六。又如二、四、六遞加之三數。二、四、六隔一數以遞加者也。將首末二六相加得八。以中數四倍之亦得八也。又如三、六、九遞加之三數。三、六、九隔二數以遞加者也。將首末三九相加得十二。以中數



六倍之、亦得十二。由此推之、或隔三數、或隔四數、或隔五六數、以至極多數、但依次遞加取三數、無有不合者也。

第十三

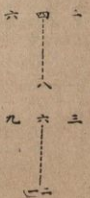
凡依次遞加三數、以第二第三兩數相加、減去第一數、即得挨次之第四數也。如二、三、四之三數、以第二數三、第三數四相加得七、內減去第一數二、得五、即是第四數。又如二、四、六隔一數遞加之三數、以第二數四、第三數六相加、得一十、內減去第一數二、得八、即是第四數、亦爲隔一數。又如三、六、九隔二數遞加之三數、以第二數六、第三數九相加、得十五、內減去第一數三、得十二、即是第四數、亦爲隔二數矣。蓋此即四率相當比例之理、四率中兩率相乘、與首末兩率相乘之數等、故中兩率相乘、以首率除之、即得末率。而此則中兩數相加、與首末兩數相加之數等、故以首一數減之、即得末一數、其義一也。



第十四

凡依次遞加兩數、以第二數倍之、減去第一數、即得挨次之第三數也。如二、三兩數、將第二數三倍之得六、內減去第一數二、餘四、即是第三數。又如二、四隔一數之兩數、將第二數四倍之得八、內減去第一數二、餘六、即是第三數、四與六亦

爲隔一數也。又如三、六隔二數之兩數。將第二數六倍之、得十二。內減去第一數三。餘九。即是第三數。九與六亦爲隔二數也。蓋此即三率相連比例之理。三率以中率自乘。與首末兩率相乘之數等。故中率自乘。以首率除之。即得末率。而此則中數倍之。與首末兩數相加之數等。故以首數減之。即得末數。於此見加減乘除之相對待而加減可以代乘除之理。亦可從此推矣。



第十五

凡有彼此可以度盡兩數。欲求相連比例之數。則以一數自乘。以一數除之。即得相連比例之第三數也。如有四、八兩數。欲求第三數。如四與八之相連比例。乃以八自乘得六十四。以四除之。得十六。此十六即爲四與八相連比例之第三數。蓋八者四之二倍。而十六又爲八之二倍。則八與十六之比例。必同於四與八之比例矣。如有三數求第四數。仍如四與八之比例。則以第三數十六自乘。得二百五十六。以第二數八除之。得三十二。即爲四、八、十六相連比例之第四數。蓋十六者四之四倍。而三十二者八之四倍。則十六與三十二之比例。必同於四與八。八與十六之比例矣。如欲求連比例之第五數或第六數。即以相近兩數依前法算之。由此遞生。可至於無窮焉。然此皆四與八之比例。或四與

四 八

四 八 一六

四 八 一六

四 八 一六 三二

十六、或三與六、五與十之類。凡有彼此度盡之數。欲求相連比例幾數者。亦皆如此求之無不可得矣。

第十六

凡有彼此不可以度盡之兩數。欲依此兩數比例。求相連比例之數。則以一數自乘爲第一率。而以又一數自乘爲第三率。以兩數互乘爲第二率。即爲相連比例之三數也。如有三、五兩數。欲求相連比例三數。皆如三與五之比例。乃以三自乘得九。以五自乘得二十五。以三與五相乘得十五。此九與十五、十五與二十五之三數。即如三與五之相連比例三數。蓋九爲三之三倍。而十五爲五之三倍。則九與十五爲三與五之比例矣。而十五爲三之五倍。二十五爲五之五倍。則十五與二十五。亦爲三與五之比例矣。又或已有三數。欲求第四數。皆如三與五之連比例。則以三乘九得二十七。以三乘十五得四十五。以三乘二十五得七十五。復以五乘九得四十五。五乘十五得七十五。五乘二十五得一百二十五。此所得六數內四十五、七十五各得二。今止用其一。故二十七、四十五、七十五、一百二十五之四數。即如三與五之相連比例數也。蓋二十七者三之九倍。而四十五者五之九倍。則二十七與四十五之比例。同於三與五之比例矣。又四十五者三之十五倍。而七十五者五之十五倍。則四十五與七十五

三	五	
九	一五	二五

三	五		
九	一五	二五	
二七	四五	七五	一二五

之比例。同於三與五之比例矣。又七十五者三之二十五倍。而一百二十五者五之二十五倍。則七十五與一百二十五之比例。亦同於三與五之比例矣。如欲求連比例之第五數或第六數。以原一數遞乘先得之幾數。復以又一數遞乘先得之幾數。去其相同者。所餘卽成相連比例之數。由此求之。亦可至於無窮也。然此皆三與五之比例。或三與七、四與九、五與八之類。凡彼此不可以度盡之數。欲求相連比例幾數者。亦皆倣此求之。而卽得矣。

第十七

凡相當比例四數。其前兩數之間。有相連比例二數。其後兩數之間。亦必有相連比例二數也。設如有甲二十四、乙八十一、丙三十二、丁一百零八、相當比例之四數。甲數二十四與乙數八十一之間。有戊三十六、己五十四之相連比例兩數。則丙數三十二與丁數一百零八之間。亦必有庚四十八、辛七十二之相連比例兩數也。試將甲、戊、己、乙四數。求其相當比例之至小數。則得壬八、癸十二、子十八、丑二十七之四數。其甲與乙之比。卽同於壬與丑之比。而丙與丁之比。原同於甲與乙之比。則丙與丁之比。亦必同於壬與丑之比矣。其比例既同。則壬可以度盡丙。丑亦可以度盡丁。而癸與子亦必可以度盡庚與辛。壬、癸、子、丑各四倍之。卽與丙、庚、辛、丁等。是四次可以度盡也。是丙、庚、辛、丁四數之比。皆與壬、癸、子、丑四數之比相同也。夫壬、癸、子、丑。原爲甲、戊、己、乙連比例相當

甲 二四	戊 三六	己 五四	乙 八一
壬 八	癸 一二	子 一八	丑 二七
丙 三二	庚 四八	辛 七二	丁 一〇八

之小數。今丙、庚、辛、丁之比。既與之相同。則丙、庚、辛、丁、亦爲相連比例之四數矣。既俱爲相連比例數。則戊、己爲甲乙兩數間之連比例數。庚辛爲丙丁兩數間之連比例數無疑矣。

第十八

凡相連比例三數。其第一數與第二數之間。有相連比例一數。則第二數與第三數之間。亦必有相連比例一數也。設如有甲二、乙十八、丙一百六十二、相連比例之三數。其甲數二與乙數十八之間有相連比例之丁數六。則乙數十八與丙數一百六十二之間。亦必有相連比例之戊數五十四也。蓋甲與乙之比同於乙與丙之比。今丁六爲甲二之三倍。戊五十四亦爲乙十八之三倍。則甲與丁之比同於乙與戊之比。而丁六爲乙十八之三分之一。戊五十四亦爲丙一百六十二之三分之一。則丁與乙之比。亦同於戊與丙之比。因其比例皆同。故甲、丁、乙、戊、丙、爲相連比例之五數。而丁戊兩數爲甲與乙、乙與丙、三數間之相連比例數可知矣。

甲	乙	丙
二	一八	一六二
丁	戊	
六	五四	

第十九

凡相連比例三數。其首數與末數。有用一數可以度盡者。有用一數不可以度盡者。如四、八、十六相連比例之三數。其首數四與末數十六。爲彼此有一數可以度盡之數也。如四、六、九相連比例之三數。其首數四與末數九。爲彼此無一數可以度盡之數也。然此兩種相連比例。雖有度盡度不盡之分。因其首數與

四	八	一六

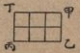
四	六	九

中數之比同於中數與末數之比故總謂之相連比例之數矣蓋末數可用首數平分卽爲有度盡之連比例數末數不可用首數平分卽爲無度盡之連比例數也且首末兩數彼此有一數可以度盡者此三數非相當比例之至小數若首末兩數彼此無一數可以度盡者此三數卽爲相當比例之至小數也如四、八、十六之三數其首末兩數爲彼此有一數可以度盡之數而中數亦必爲此一數可以度盡之數試用二以度之則得二、四、八之連比例三數或用四以度之則得一、二、四之連比例三數皆與四、八、十六之比例相同而比四、八、十六之數爲小故四、八、十六非相當比例之至小數也如四、六、九之三數其首末兩數爲彼此無一數可以度盡之數故中數亦爲無一數可以度盡之數旣無一數可以彼此度盡則爲相當比例數內之至小數也明矣

四	八	一六
二	四	八
一	二	四

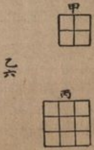
第二十

凡同式兩平方數其間必有相連比例一數也如有甲乙丙丁六、戊己庚辛二十四同式兩平方數此兩數之間必有壬十二爲相連比例之一數焉蓋甲乙丙丁、戊己庚辛旣爲同式平方數則其每邊皆可爲比例如甲乙二與甲丁三之比同於戊己四與戊辛六之比而甲乙二與戊己四之比亦同於甲丁三與戊辛六之比也今以甲丁三與甲乙二相因得六甲丁三與戊己四相因得十



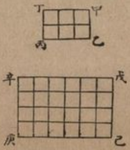
壬十二

二則六與十二之比同於甲乙二與戊己四之比矣又戊己四與甲丁三相因得十二戊辛六與戊己四相因得二十四則十二與二十四之比同於甲丁三與戊辛六之比矣夫甲丁三與戊辛六之比原同於甲乙二與戊己四之比則六與十二之比亦必同於十二與二十四之比矣又若兩正方數之間亦必有相連比例之一數也如有甲四丙九兩正方數此四與九兩數之間必有乙六爲相連比例之一數焉蓋兩正方數其式既同故必有相連比例一數且兩正方數之比例同於其兩邊所作連比例隔一位之比例 見幾何原本七卷第五節 今甲方邊爲二丙方邊爲三求其與二三相當連比例之第三數則以二自乘得四以三自乘得九以二乘三得六此四與六六與九之三數卽爲與二三相當之連比例數而其首數四與末數九既與甲丙兩方數等則中數六亦必爲甲丙兩方數間之連比例數矣



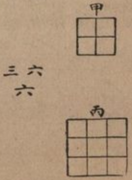
第二十一

凡同式兩平方數相乘得數爲正方數也如有甲乙丙丁六戊己庚辛二十四爲同式兩平方數相乘得一百四十四卽爲正方數矣蓋同式兩平方數之間原有相連比例一數今此六與二十四之間必有十二之一數



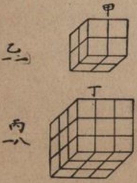
一四四
一二

且連比例三率以首末兩率相乘與中率自乘之數等則此六與二十四兩平方數相乘所得之一百四十四卽爲中率十二自乘之數矣又若兩正方數相乘得數亦仍爲正方數其方根卽原兩方根相乘之數也如有甲四丙九兩正方數此兩數相乘得三十六仍爲正方數其方根爲六亦卽甲方根二與丙方根三相乘之數也蓋此兩方數俱爲正方卽爲同式兩平方數矣因其式同故相乘亦仍得正方數也凡數有先各自乘而後相乘者有先相乘而後自乘者其理無異故其得數皆等今以二自乘得四以三自乘得九復以四九相乘得三十六此先各自乘而後相乘也以二與三相乘得六復以六自乘得三十六此先相乘而後自乘也且四與九積也積與積乘仍得積二與三根也根與根乘仍得根此亦理之必然者也



第二十二

凡兩正立方數之間必有相連比例之兩數也如有甲八丁二十七兩正立方數此八與二十七之間必有乙十二丙十八爲相連比例之兩數焉蓋兩正立方之比例同於其兩邊所作連比例隔二位之比例見幾何原本十卷第四節今甲方邊爲二丁方邊爲三求其與二三相當連

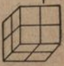


比例之第三第四數。則以二自乘得四。以三自乘得九。以二與三相乘得六。此四、六、九為連比例三數。又以二遞乘此四、六、九三數得八、十二、十八之三連比例數。復以三遞乘四、六、九三數得十二、十八、二十七之三連比例數。除相同者不計。其二十七即連比例之第四數。則八與十二。十二與十八。十八與二十七。皆為與二三相當之連比例數。而其首數八與末數二十七。既與甲、丁、兩立方數等。則其中數之十二、十八。為甲、丁、兩立方數間連比例之兩數可知矣。

第二十三

凡兩正立方數相乘。得數仍為正立方數。而其方根即原兩立方根相乘之數也。如有甲八、丁二十七兩正立方數。此兩數相乘。得二百一十六。仍為正立方數。而其方根為六。亦即甲立方根二與丁立方根三相乘之數也。蓋此兩立方數俱為正方。即為同式兩立方數矣。因其式同。故相乘亦仍得正立方也。凡數有先自乘再乘而後以所得之數相乘者。有先以兩數相乘而後以所得之數自乘再乘者。其得數皆等。故二自乘再乘得八。三自乘再乘得二十七。復以八與二十七、相乘得二百一十六。此先各自乘再乘而後以所得之數相乘也。以二與三相乘得六。復以六自乘再乘。亦得二百一十六。此先以兩數相乘而後以所得之數自乘再乘也。且八與二十七積也。以積乘積仍得積。二與三根也。以

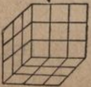
甲



二一六

六

丁



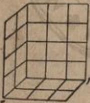
根乘根仍得根。此又理之自然者也。

第二十四

凡兩平方數若一邊相等。則此兩平方之比例。同於其不等邊之比例也。如有甲丙、戊庚兩平方數。其甲丙平方之甲乙邊爲四。而戊庚平方之戊己邊亦爲四。甲丙平方之乙丙邊爲六。而戊庚平方之己庚邊爲八。則此兩平方數二十四與三十二之比。卽同於其不等邊六與八之比也。蓋甲乙平方數二十四者。四之六倍。而戊庚平方數三十二者。四之八倍也。然則二十四與三十二之比。卽同於六與八之比矣。二十四與三十二之比。旣同於六與八之比。則兩平方數之比例。同於其不等邊之比例可知矣。

第二十五

凡兩立方數。其底積相等。則此兩立方之比例。同於其高之比例也。如有甲乙、丙丁、兩立方數。其甲乙立方之戊乙底爲六。而丙丁立方之己丁底亦爲六。甲乙立方之甲戊高爲四。而丙丁立方之丙己高爲五。則此兩立方數二十四與三十之比。卽同於其兩立

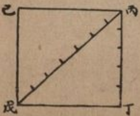


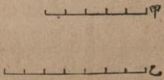
方之高四與五之比也。蓋甲乙立方數二十四者。六之四倍。而丙丁立方數三十者。六之五倍也。然則二十四與三十之比。即同於四與五之比矣。二十四與三十之比。既同於四與五之比。則兩立方數之比例。同於其高之比例可知矣。

第二十六

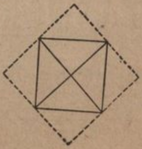
凡兩線、兩面、兩體。用一度(如尺寸之屬)。可以度盡者。此類之線、面、體。皆爲有整分可以度盡者也。設如有甲、乙、兩線。甲線分爲五分。乙線如甲線度分之得七分無餘。則此二線即爲一度彼此可以度盡者矣。若將此二線各爲正方面。各爲正方體。則其兩面、兩體。亦皆爲整分彼此可以度盡者也。至如兩線、兩面、兩體。不可以一度度盡者。此類之線、面、體。皆爲無整分可以度盡者也。如丙丁戊己方面。其丙丁邊線爲五分。而丙戊對角線則爲七分有餘。乃爲彼此無度盡之數矣。蓋以丙丁邊之五分爲度。則丙戊線得七分以得。或將丙戊線爲七分整。而以其分爲度。則丙丁線得五分不足。凡此類之線、面、體。皆爲無整分彼此可以度盡之數也。

第二十七





凡正方一邊線。與對角線。無一度可以彼此度盡者。葢以本方積與對角線所成方積比之。必有一數非正方數也。夫對角線自乘所作之方數。爲本方積之二倍。如本方積一。則對角線所作之方爲二。本方積四。則對角綫所作之方爲八。此一與二、四與八之間。無相連比例之整數。故一爲正方數。則二非正方數。四爲正方數。而八亦非正方數。二與八既非正方數。則邊必有零餘而不能盡矣。或對角線所作方積爲四。則本方積爲二。對角線所作方積爲十六。則本方積爲八。此四與二、十六與八之間。亦無相連比例之整數。故四爲正方數。而二非正方數。十六爲正方數。而八又非正方數。然則對角線所作方積。固爲正方數。而本方積復不能成正方數。其邊必有零餘而不能盡矣。故凡正方邊線與對角線。斷無一度可以彼此度盡之理也。



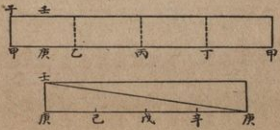
第二十八

凡正方面與平圓面同徑者。其積之比例。同於其周圍邊線之比例也。如甲乙丙丁正方面。戊己庚辛平圓面。其戊壬庚之徑相等。則此方積與圓積之比例。同於方周於圓周之比例也。何以見之。以正方面之壬庚半徑爲高。甲乙、乙丙、丙丁、丁甲之全周爲底。作一子甲直角長方形。則此長方

形之積比正方形之積必大一倍又以壬庚半徑爲高庚己己戊戊辛辛庚全周爲底作一壬庚直角長方形則此長方形之積比平圓形之積亦必大一倍凡直角三角形之小邊與圓形之半徑等而三角形之大邊與圓形之全周等者三角形之積與圓形之積等也今此長方形與三角形同底同高其積比三角形必大一倍然則壬庚長方形比圓形大一倍可知也夫壬庚子甲兩長方形既同以壬庚爲高則一邊相等一邊不等則其積之比例必同於其不等邊之比例而全與全之比例原同於半與半之比例故兩長方形之比例必同於庚庚與甲甲之比例而方與圓之比例亦必同於庚庚與甲甲之比例矣甲甲卽方周而庚庚卽圓周然則方周與圓周之比例豈非方積與圓積之比例乎

第二十九

凡有不知之一大數用兩小數度之不盡而一有餘一不足者其一多一少之數相併以兩小數之較度之卽得其度數之分與大數之幾何也如有一大數用小數五度之多一數用小數六度之又少四數則以多一與少四相加得五以六與五

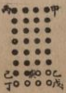


兩小數相減、餘一、爲較數除之、仍得五、卽知兩小數各度五次也、試排點以明之、其甲乙五卽小數五、丙丁六卽小數六、以甲乙五累五次、則爲甲乙己丙正方二十五、多一爲丁、以丙丁六累五次則爲甲戊丁丙長方三十、少四爲戊庚、於甲戊丁丙長方三十內、減去少數戊庚四、爲二十六、於甲乙己丙正方二十五、加入多數丁一、亦爲二十六、是知大數有二十六、用此五六兩小數各度五次之分也、以丁一與戊庚四相加三丁戊五、以小數甲乙五與丙丁六相減餘一、以一除丁戊五仍得五、與甲丙相等、故甲丙爲甲庚數二十六之五次數也、若以比例言之、其小數五與六相減所餘一者、乃度一次之較、而一多一少相併之戊丁五者、又爲度五次之較、故以所餘一與度一次之比、卽同於戊丁五與度五次之比、其比例旣同、故其數亦相等也、

第三十

凡有不知之一大數、用兩小數度之不盡、而俱有餘、或俱不足者、其兩有餘、或兩不足之數俱相減、以兩小數之較度之、卽得其度幾次之分、與大數之幾何也、如有一大數、用小數六度之多五、數用小數七度之仍多一數、則以兩多數相減、餘四、以六與七兩小數相減餘一、爲較數除之、仍得四、卽知兩小數各度四次也、試排點以明之、其甲乙六卽小數六、丙丁七卽小數七、以甲乙六累四次、則爲甲乙

庚丙方二十四多五爲戊丁己以丙丁七累四次則爲甲戊丁丙方二十八多一爲己於甲乙庚丙方二十四加入多數戊丁己五得二十九於甲戊丁丙方二十八加入多數己一亦得二十九是知大數有二十九用此六七兩小數各度四次之分也以己一與戊丁己五相減餘戊丁四以小數甲乙六與丙丁七相減餘一以一除戊丁四仍得四與甲丙相等故甲丙爲度大數二十九之四次數也若以比例言之其兩小數相減所餘之一乃度一次之較兩多數相減所餘之戊丁四乃度四次之較故以一與度一次之比即同於戊丁四與度四次之比也又如有不知之一大數用小數八度之少二數用小數九度之少六數則以兩少數相減餘四以八與九兩小數相減餘一爲較數除之仍得四即知兩小數各度四次也今作點排之其甲乙八即小數八丙丁九即小數九以甲乙八累四次則爲甲乙己丙方三十二內少二數爲乙庚以丙丁九累四次爲甲戊丁丙方三十六內少六數爲乙庚丁戊於甲乙己丙方三十二內減去少數乙庚二爲三十於甲戊丁丙方三十六內減去少數乙庚丁戊六亦爲三十是知大數有三十用此八九兩小數各度四次之分也以乙庚二與乙庚丁戊六相減餘戊丁四以小數甲乙八與丙丁九相減餘一以一除戊丁四仍得四與甲丙爲相等故甲丙爲度大數三十之四次數也其比例亦以兩小數相減所餘之較比度一次之分即同於兩少



數相減所餘之較比度幾次之分也．復有不知之一大數．用兩小數度之．一小數度之而盡．一小數度之而不盡．（或有餘．或不足．）卽以不盡之數．（或有餘之數．或不足之數．）用兩小數之較度之．卽得其度幾次之分．與大數之幾何．其理皆相同也．

第三十一

凡數自少至多遞加之而各有定率者．謂之平加比例數也．夫平加之數．有每次遞加一者．爲挨次遞加之數．如一、二、三、四之類是也．有每次遞加二者．爲超位平加之數．如一、三、五、七之類是也．（或遞加三．或遞加四．或遞加五六．皆是一理．）有每次增一加者．爲按位相加之數．如一、三、六、十之類．其第二次加二．第三次加三．第四次加四是也．有每次增二加者．爲按位自乘之數．如一、四、九、十六之類．其第二次加三．第三次加五．第四次加七是也．復有一種倍加者．爲挨次倍加之數．如一、二、四、八之類．每次皆加二倍．又如一、三、九、二十七之類．每次皆加三倍是也．遞加之數雖多．按其條理求之．大抵不出此數端．今各列數分析於後．

第三十二

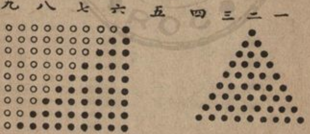
凡挨次遞加之數．將首數與末數相加．以位數乘之．所得之數折半．卽爲總數

一	二	三	四
一	三	五	七

一	三	六	一〇
一	四	九	一六

一	二	四	八
一	三	九	二七

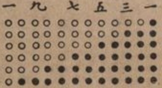
也。如一、二、三、四、五、六、七、八、九之九數。其每次所加之數爲一。將首數一與末數九相加得十。以位數九乘之得九十。折半得四十五。卽是此九數之總數也。何也。夫挨次遞加之數。爲等邊三角平面形。而兩數相乘。卽成四方形。今以位數九爲高。末數九爲底。相乘所得之正方形。其數八十一。較之總數則多。較之總數加倍之數又少。此所少卽一行之數。爰知位數與底數相乘所得之數。比總數加倍之數少一行之數矣。旣知挨次遞加之數爲三角形。而位數與底數相乘之數爲正方形。又知位數與底數相乘之數。幾等於總積加一倍之數。則合兩三角形之數。適當總積加一倍之方數矣。兩三角形所合。其底數必比高數大一數。故末數九爲底數者。加首數一。與高相乘。始成兩三角形所合之一方形焉。試將此九數作點排之。自上而下。上一下九。作爲直角三角形。復將此九數另作一直角三角形。合於原三角形之側。則成一長方形。其高卽位數。其底卽末數與首數相加之數。其積卽爲總數加一倍之數也。



然則首數末數相加與位數相乘、爲總數之倍數可知矣。又如四、五、六、七、八、九之六數。欲知其總數。亦以首數四與末數九相加得十三爲底。以位數六乘之得七十八爲長方形。折半得三十九爲總數。其理與前同。若但知首數爲四。末數爲九。不知位數。則視首數四以上至一。虛幾位。今虛三位。故以三與末數九相減。餘六。卽位數也。何也。凡自一遞加之數。其末數卽位數。今首數爲四。計自一是少三位矣。故用三卽爲所少之位數。於末數內減去所少之位。卽爲今之所有之位數也。

第三十三

凡超位平加之數。亦將首數與末數相加。以位數乘之。得數折半爲總數也。如一、三、五、七、九、十一之六數。每次皆加二數。將首數一與末數十一相加得十二。以位數六乘之得七十二。折半得三十六。爲此六位之總數也。蓋此超位平加之數。與挨次平加之理無異。其以首末兩數相加。與位數相乘者。總欲得此總數之倍數。以便折半取之也。試將此六位之數作六層排之。上一下十一。以首末數相加得十二。而以位數乘之。則六層皆爲十二矣。上層本首數一加末數十一而成十二。下層本末數十一加首數一而成十二。是首數末數俱加倍矣。二層本第二數三加第五數九而成十二。五層本第五數九加第二數三而成十二。是第二數第五數俱加倍矣。三層本第三數五加第四數七而成十二。四層本第四數七加第三數五而成十二。是第三數第四數亦俱加倍矣。其每位之數皆倍。則相乘所得之數。豈非此總數之倍數乎。由此推之。每次加三

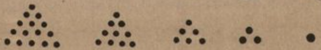


加四或加五加六以至加七加八加九之類凡係超位平加之數其理無不相同也

第三十四

凡每次按位相加之數將位數加二與末數相乘取其三分之一卽爲總數也如一、三、六、一十、十五之五數其每次皆按位加之如第二位於第一位上加二爲三．第三位於第二位三上加三爲六是也．將位數五加二與末數十五相乘得一百零五以三除之得三十五卽是此五數之總數也如或止有位數或止有每一邊數求總數則以位數加一與位數相乘得數復以位數加二乘之取其六分之一卽得總數也若止有每一邊數．卽以每一邊數加一與每邊數相乘．得數．復以邊數加以得之取其六分之一．得數亦同．蓋每次按位相加之數層疊排之其式成等邊三角體其末一數卽三角體底面數而位數卽每一邊之數今以位數加二爲高末數爲底相乘卽成平行面之三稜體凡同底同高之平行面體爲尖體之三倍則此平行面三稜體內必有等邊三角體之三倍故以三除之卽得也然必以位數加二爲高者何也以三三角體相湊乃成上下相等之平行面體其高必比原有之位數多二層兩三角面相合．比原位數多一層．今三三角體相合．故必比原位數多二得也．如止以位數爲高卽少二層之數而不足三三角體之分故必以位數加二乘之也其止有位數或每一邊數求總數以位數加一與位數相乘復以位數加二乘之而用六除者何也蓋位數卽底面之每邊數而

一 三 六 一〇 一五



底面又爲等邊之三角面今以邊數加一與邊數相乘成長方面爲三角體底面之倍數卽如前挨次遞加數之兩三角面相合所成之長方形也凡等高之體底數倍者積數亦倍彼以位數加二乘三角體之底所成之平行面三棱體旣爲等邊三角體之三倍矣今以位數加二乘三角體之倍底所成之平行面長方體又必爲等邊三角體之六倍矣以兩三棱體相合卽成長方體一三棱體爲三角體之三倍則兩三棱體必爲三角體之六倍矣故以六除平行面長方體之數而得等邊三角體之數也又或但知首數末數而不知位數則以末數倍之用一爲較數開帶縱平方卽得位數焉蓋末數倍之者卽兩三角面所合之長方也其闊卽三角每邊數其長比闊多一數故用一爲較開帶縱平方則得三角每邊之數旣得每邊數卽得位數矣

第三十五

凡每次按位自乘相加之數將位數折半與末數相加復以位數加一乘之取其三分之一卽爲總數也如一、四、九、十六、二十五之五數其每位之數皆按位自乘之數如第二位之四卽二自乘數第三位之九卽三自乘數也將位數五折半爲兩個半與末數二十五相加得二十七個半復以位數五加一爲六乘之得一百六十五以三除之得五十五卽爲此五數之總數也如止有位數或止有每一邊數求總數則以位數加半個與位數相乘得數復以位數加一乘之取其三分之一卽得總數也若貝

一 四 九 一六 二五

有每一邊數。則以每一邊數加半個。以每二邊數相乘。得數。復以每邊數加一乘之。取其三分之一。得數亦同。蓋按位自乘相加之數。層疊排之。其式成方底四角尖體。其末一數卽四角尖體底面數。而位數卽每一邊之數。今以位數折半與末數相加。則成長方面爲底。再以位數加一爲高乘之。卽成平行面之長方體。凡同底同高之平行面體。爲尖體之三倍。則此平行面長方體內。必有四角尖體之三倍。故以三除之卽得也。然必以位數折半與末數相加爲底。復以位數加一爲高者何也。蓋三四角尖體相湊。乃成上下相等之長方體。其底比正方面必多半行。其高必比原有之位數多一層。三等邊三角體相合。比三角體原位數多二層。今三方底四角尖體相合。比原位數止多一層。蓋因方底比三角底式大一倍。故四角體高。比三角體高所加之數減一半也。如止以末數爲底。則底必少半行之數。止以位數爲高。則高復少一層之數。必不足三四角尖體之分。故以末數加位數之半。而以位數加一乘之。適足三四角尖體之分也。其止有位數。或每一邊。求總數。以位數加半個。與位數相乘。復以位數加一乘之。而用三除之者何也。蓋位數卽底面之每邊數。而底面又爲正方面。今以邊數加半個。與邊數相乘。成長方面。比正方止多半行之分。其理卽如求三角體總數。以邊數加一。與邊數相乘。爲三角體底之倍數也。以位數加一。與底面相乘。成長方體。比方底四角尖體大三倍。卽如求三角體總數。以位數加二。與倍底相乘。爲三角體之六倍也。彼三角體底倍之爲長方。此四角體底數加半行。卽爲長方。彼三角體總數六倍爲同邊長方體。此四角體總數三倍爲同邊長方體。故三角體以邊數加一。與邊數相乘者。今四角體以邊數加半。與邊數相乘。而三角體以位數加二爲高與倍底相乘者。今四角體以位數加一。與本底加半行相乘。總之四角體底式。比三角體底式大一倍。故立法

時三角體加數幾何。而此四角體皆用其半也。又或但知首數末數。而不知位數。則以末數開平方。卽得位數焉。蓋末數本爲正方數。故開方卽得每邊數。既得每邊數。則得位數矣。

第三十六

凡每次倍加之數。將末數與加倍之數相乘。減去首數。復以所加之分數除之。卽得總數也。如二、四、八、十六四數。爲每次以二倍之之數。欲求其總數。則以末數十六用二乘之。因以二倍之。故用二乘。得三十二。減去首數二。爲三十。復以其所加分數一除之。仍得三十。卽此四數之總數也。蓋以二加倍之數。其末一數。比前幾位之總數。止多一首數。故二乘末數。則比末數多一分。仍多一首數。故減去首數二。而以一除之。卽得總數也。又如三、九、二十七、八十一、四數。爲每次以三倍之之數。欲求其總數。則以末數八十一用三乘之。以三倍之。故用三。得二百四十三。減去首數三。爲二百四十。復以其所加分數二除之。得一百二十。卽爲此四數之總數也。蓋以三加倍之數。其末一數。爲前幾數之倍數。而仍多一首數。今三乘末數。則比末數多二分。仍多一首數。三乘末數八十一。則爲八十一者有三。除本數八十一。仍爲多二分也。故必減去首數三。而以二除之。卽得總數也。又如四、十六、六十四、二百五十六、四數。爲每次以四倍之之數。欲求總

二	四	八	一六

三	九	二七	八一

四	一六	六四	二五六

數則以末數二百五十六用四乘之以四倍之故用四得一千零二十四減去首數四爲一千零二十復以其所加分數三除之得三百四十爲此四數之總數也葢以四加倍之數其末一數爲前幾數之三倍而仍多一首數今四乘末數則比末數多三分仍多一首數四乘末數二百五十六則爲二百五十六者有四除本數二百五十六仍爲多三分也故必減去首數四而以三除之卽得總數也凡此倍加之數不論加倍幾何皆爲相連比例之數故其比例皆同如遞加二倍之數其四與八之比同於二與四之比卽八與十六之比亦皆同於二與四之比也又如遞加三倍之數其九與二十七之比同於三與九之比卽二十七與八十一之比亦皆同於三與九之比也卽遞加四倍之數其十六與六十四之比同於四與十六之比卽六十四與二百五十六之比亦皆同於一與四之比也總之以二倍加者皆一與二之連比例以三倍加者皆一與三之連比例以四倍加者皆一與四之連比例卽推之以五倍加六倍加者其理亦無不相同也

二	四		一六
三	九	二七	八一
四	一六	六四	二五六

數理精蘊下編卷一

首部一

度量權衡

虞書同律度量衡蓋度量衡皆本於律而律爲萬事之本也漢志曰、度者分寸尺丈引所以度長短也本起於黃鐘之長以子穀秬黍中者一黍之廣度之九十分黃鐘之長一爲一分十分爲寸十寸爲尺十尺爲丈十丈爲引而五度審矣量者龠合升斗斛所以量多少也本起於黃鐘之龠以子穀秬黍中者千二百實其龠合龠爲合十合爲升十升爲斗十斗爲斛而五量嘉矣權者銖兩斤鈞石所以權輕重也本起於黃鐘之重一龠容千二百黍重十二銖兩之爲兩十六兩爲斤三十斤爲鈞四鈞爲石而五權謹矣通考曰律度量衡並因秬黍散爲諸法其率可通外此則代不一名度之異名者如左傳注、方丈曰堵三堵曰雉長三丈・高一丈・易緯通卦驗、十馬尾爲一分孫子算術曰蠶所吐絲爲忽十忽爲絲十絲爲豪十豪爲釐十釐爲分十分爲寸十寸爲尺十尺爲丈小爾雅曰跬、一舉足也倍跬謂之步四尺謂之仞倍仞謂之尋倍尋謂之常五尺謂之墨倍墨謂之丈倍丈謂之端倍端謂之兩倍兩謂之疋疋百謂之束孔安國又以八尺爲仞說文曰人手却十分動脈爲寸口十寸爲尺周制寸咫尺尋常仞皆以人體爲法又曰婦人手八寸謂之咫周尺也又曰、丈丈夫也周制以八寸爲尺十尺爲丈人長八尺故曰丈夫量之異名者

如左傳齊舊四量。豆區鬴鍾。四升曰豆。各自其四以登於鬴。六斗四升・鬴十則鍾。六十四斗・論語注、十六斗曰庾。十六斛曰秉。孫子算術曰。六粟爲圭。十圭爲抄。十抄爲撮。十撮爲勺。十勺爲合。漢應劭又以四圭爲撮。孟康以六十四黍爲圭。小爾雅、一手之盛謂之溢。兩手謂之掬。掬四謂之豆。豆四謂之區。區四謂之釜。釜二有半謂之藪。藪二有半謂之缶。缶二謂之鍾。鍾二謂之秉。秉十六斛。衡之異名者。如漢志注、應劭曰。十黍爲絫。十絫爲銖。小爾雅、二十四銖曰兩。兩有半曰捷。倍捷曰舉。倍舉曰鋝。鋝謂之鍰。二鍰四兩謂之斤。斤十謂之衡。衡有半謂之秤。秤二謂之鈞。鈞四謂之石。石四謂之鼓。通考、唐劉承珪以忽萬爲分。絲則千。毫則百。釐則十。轉以十倍倍之。則爲一錢。黍以二千四百枚爲一兩。絫以二百四十。銖以二十四。是則度量衡之名不一。故其爲制不同。而紛雜難用。然時易世殊。古今沿革。有必不可比而同者。故入算之際。不過取其大同者。以審不齊之物耳。要之度定於丈。量定於石。衡定於兩。大之而遞進於無窮。小之而遞析於不可測。爰悉其名目於左。以爲數學之所資焉。

度法丈以下曰尺。十寸・寸。十分・分。十釐・釐。十毫・毫。十絲・絲。十忽・忽。十微・微。十纖・纖。十沙・沙。十塵・塵。十埃・埃。十渺・渺。十漠・漠。以下皆以十析・模糊。逡巡。須臾。瞬息。彈指。刹那。六德。虛空。清淨。

量法石以下曰斗。十升・升。十合・合。十勺・勺。十撮・撮。十抄・抄。十圭・圭。六粟・粟。

衡法兩以下曰錢。十分・分。十釐・釐。十毫・毫。十絲・絲。十忽・忽。以下並與度法同。

凡度量衡自單位以上則曰十。百。千。萬。億。兆。京。垓。秭。穰。溝。澗。正。載。極。恆河沙。阿僧秪。那由他。不可思議。無

量數。

自億以上。有以十進者。如十萬曰億十億曰兆之類。有以萬進者。如萬萬曰億萬億曰兆之類。有以自乘之數進者。如萬萬曰億億億曰兆之類。今立法從中數。

曆法則曰宮三十度・度。六十分・分。六十秒・秒。六十微・微。六十纖・纖。六十忽・忽。六十芒・芒。六十塵・塵。

又有日。十二時・又爲二十四小時・時。八刻・又以小時爲四刻・刻。十五分・分以下與前同。

田法則曰頃。百畝・畝。積二百四十步・分。積二十四步・

里法則三百六十步。計一百八十丈。爲一里。古稱在天一度。在地二百五十里。今尺驗之。在天一度。在地二百里。葢古尺得今尺之十分之八。實絫縱黍橫黍之分也。

石法二千五百寸。按漢志曰・斛重二鈞・又曰四鈞爲石・是二斛爲一石也・古尺斛積一千六百二十寸・爲今尺之八百六十寸有奇・倍之・得古尺石積三千二百四十寸・爲今尺之一千七百二十寸有奇・以權法準之・石重一百二十斤・求其積・古尺應得三千一百一十寸・爲今尺之一千六百五十寸有奇・今之權法又加古一倍・則今尺石積應得三千三百寸有奇・今現行斛積爲一千五百八十寸・石積爲三千一百六十寸・舊算書所載・數各不同・而多以二千五百寸爲率・總之古今尺度不同・古今量法亦不一・須先求其斗斛之積數・然後用其積數以比例之・方得密合・今設例從舊數・

命位

凡數視所命單位爲本。如度法命丈爲單位。則尺寸分釐皆爲奇零。命尺爲單位。則寸以下爲奇零。而丈則進而爲十。若命寸爲單位。則分以下爲奇零。而尺則進而爲十。丈則進而爲百。量法命石爲單位。則斗升合勺皆爲奇零。命斗爲單位。則升以下爲奇零。而石則進而爲十。若命升爲單位。則合以下爲奇零。而斗則進而爲十。石則進而爲百。衡法命兩爲單位。則錢分釐毫皆爲奇零。命錢爲單位。則分以下爲奇零。而兩則進而爲十。若命分爲單位。則釐以下爲奇零。而錢則進而爲十。兩則進而爲百。故凡列數。單爲一位。十爲二位。百爲三位。千爲四位。萬爲五位。如有數一萬二千三百四十五。則以單位爲末。向前列之。共有五位。即知此數首位是萬矣。至於曆法宮度分秒日時刻分之定位。則每項命兩位。如宮曰幾十幾宮。度曰幾十幾度。分曰幾十幾分之類。蓋因秒以六十而進分。分以六十而進度。度以三十而進宮。故常例一位即命一等者。宮度時刻則兩位命爲一等。而每一等有十單之別焉。此又命位之最要者也。

凡數未至單位者。必須作〇以存其位。如有數一萬二千三百四十丈。則補作〇以存單位。如下式。　又如有數一萬二千丈。則補作〇〇〇以存百十單之位。如下式。

〇四三二一

〇〇〇二一

凡數單位後有奇零者。必作點於單位上以誌之。如有金三百四十五兩六錢七

分命兩爲單位.則於五上作點誌之.如下式. 又如有米六石五斗四升三合命石爲單位.則於六上作點誌之.如下式.

三	四	五˙	六	七
	六˙	五	四	三

凡列乘數幾多位.中有空者.必作〇以存其位.如有數二萬零四百五十六.此中千位無數故必作〇於萬後百前以存其位.如下式. 又如有數一萬零三十四此中千位百位俱無數.故補作兩〇於萬後十前以存其位.如下式.

二	〇	四	五	六
一	〇	〇	三	四

凡宮度分秒.皆兩位列之.如有一十一宮二十度三十二分四十五秒列位如下式. 又如日時刻分列位.日時分則兩位.刻止一位列之.如二十一日一十八時三刻零二分列位如下式.

十	宮	十	度	十	分	十	秒
一	一	二	〇	三	二	四	五

十	日	十	時	刻	十	分
二	一	一	八	三	〇	二

加減乘除

算法以加減乘除爲八門。然究其終。雖至於千變萬化。總不出乎此。但用法不同耳。或應取其相和之數則用加。或應取其相較之數則用減。或應聚而總其積則用乘。或應散而取其分則用除。又有先加而後減者。或先減而後加者。有先乘而後除者。或先除而後乘者。又有加減與乘除先後互用者。古稱九章。命算自方田以至勾股。數有繁簡。理有顯晦。法有淺深。算有難易。然何一不從加減乘除而得。故淺言之則算法之八門。究言之實算法之全體也。

加法

加者合衆數而成總也．葢數始於一．終於九．至十又復為一．等而上之．十百千萬．以至億兆京垓．皆得名之為一．即皆自一而加者也．今自一位言之．有自一至九之數．合前後之位言之．有單十百千萬之等．先自單數加起．成十則進前一位．仍為一．以單數紀本位．下挨次倂之．即得總數．若夫宮度時刻斤兩之類．則不以十進．必足其所命之分始進一位．如宮度足六十分進一度．足三十度進一宮．如時刻足十五分進一刻．足四刻進一時．足二十四時進一日．如斤兩足十六兩進一斤之類．至於定位．則以原數列於上．加數列於下．或大數列於上．小數列於下．按法依次對位列之．加畢所得之數．依原列之位定之．

設如有數一萬二千三百四十五．與六千七百八十九相加．

法以原數橫列於上．加數橫列於下．按位相對加之．如九與五相對．單從單．八與四相對．十從十．百千萬數．俱各從其類．單位之五九相加得十四．進十於前位．為一誌之．作一點於前位爲誌．如進二十則作二點．如進三十則作三點．本位紀四．書於橫格下．次十位之四八相加得十二．倂所進之一．為十三．復進十於前位．為一誌之．本位紀三．次百位之三七相加得十．倂所進之一．為十一．復進十於前位．為一誌之．本位紀一．次千位之二六相加得八．倂所進之一．為九．於是本位紀九．至於萬位．獨有原數．無可加．則仍紀一．所加之數．共得一萬九千一百三十四．即總數也．

一	二	三	四	五
	六	七	八	九
一	九	一	三	四

設如有數一萬四千五百四十五與一萬七千三百五十相加

法以原數橫列於上加數橫列於下加數內單位無數故作○以存其位仍按位相對加之單位之五對○無可加仍紀五次十位之四五相加得九本位紀九次百位之五三相加得八本位紀八次千位之四七相加得十一進十於前位爲一誌之本位紀一次萬位之一與一相加得二併所進之一爲三於是本位紀三所加之數共得三萬一千八百九十五即總數也

一	四	五	四	五
一	七	三	五	○
三	一	八	九	五

設如有二十三丈零五寸六分與二丈八尺六寸二分相加

法以原數橫列於上加數橫列於下原數內尺位無數故作○以存其位仍按位相對加之分位之六二相加得八本位紀八次寸位之五六相加得十一進十於前位爲一誌之本位紀一次尺位之八對○無可加乃併所進之一爲九本位紀九次丈位之三二相加得五本位紀五至於十位獨有原數無可加則仍紀二所加之數共得二十五丈九尺一寸八分即總數也

十	丈	尺	寸	分
二	三	○	五	六
	二	八	六	二
二	五	九	一	八

設如有糧四萬五千零三十一石與三千零九十石相加

法以原數橫列於上加數橫列於下原數內百位無數加數內百位單位俱無數故各作○以存其位仍按位相對加之石位

萬	千	百	十	石
四	五	○	三	一
	三	○	九	○
四	八	一	二	一

之一對〇無可加仍紀一次十位之三九相加得十二進十於前位爲一誌之本位紀二次百位〇與〇無可加則以所進之一爲本位數故下紀一次千位之五三相加得八本位紀八至於萬位獨有原數無可加則仍紀四所加之數共得四萬八千一百二十一石即總數也

設如有銀八兩六錢五分四釐與四兩零六分二釐相加

法以原數橫列於上加數橫列於下加數內錢位無數故作〇以存其位仍按位相對加之釐位之四二相加得六本位紀六次分位之五六相加得十一進十於前位爲一誌之本位紀一次錢位之六對〇無可加乃併所進之一爲七本位紀七次兩位之八四相加得十二進十於前位爲一誌之本位紀二至於十位無數則紀所進之一爲一所加之數共得十二兩七錢一分六釐即總數也

十	兩	錢	分	釐
	八	六	五	四
	四	〇	六	二
一	二	七	一	六

設如有田三區一區五百九十二畝三分一區八百五十五畝九分一區七百八十二畝五分相加

法以田三區按位橫列相對加之分位之三九五相加得十七進十於前位爲一誌之本位紀七次畝位之二五二相加得九併所進之一爲十進十於前位爲一誌之本位紀〇次十位之九五八相加得二十二併所進之一爲二十三進二十於前位爲二誌之本位紀三次百位之五八七相加得二十併所進之二爲二十二進二十

千	百	十	畝	分
	五	九	二	三
	八	五	五	九
	七	八	二	五
二	二	三	〇	七

於前位爲二誌之本位紀二至於千位無數則紀所進之二爲二所加之數共得二千二百三十畝零七分即總數也

設如有銀九宗一宗八千八百五十二兩一宗三千二百一十一兩一宗五百二十兩一宗九百三十八兩一宗二千五百九十兩一宗一千二百一十五兩一宗二千五百一十八兩一宗五千三百六十六兩一宗四千三百七十二兩相加

法因九宗數繁難加故分爲三次三次復併爲一次則得共數其八千八百五十二兩三千二百一十一兩五百二十兩相併則得一萬二千五百八十三兩其九百三十八兩二千五百九十兩一千二百一十五兩相併則得四千七百四十三兩其二千五百一十八兩五千三百六十六兩四千三百七十二兩相併則得一萬二千二百五十六兩既得三總數又將三數併之得二萬九千五百八十二兩即九宗共數也

	八	八	五	二
	三	二	一	一
		五	二	〇
一	二	五	八	三

		九	三	八
	二	五	九	〇
	一	二	一	五
	四	七	四	三

	二	五	一	八
	五	三	六	六
	四	三	七	二
一	二	二	五	六

一	二	五	八	三
	四	七	四	三
一	二	二	五	六
二	九	五	八	二

設如九宮二十度三十分二十六秒與六宮一十八度二十分五十秒相加

法以原數橫列於上加數橫列於下其每項各命兩位仍按各

位相對加之.秒之單位六對○無可加.仍紀六.秒之十位二五相加得七十.乃以六十秒進一分.誌於分之本位.秒之十位紀一.次分之單位○與○無可加則以所進之一爲本位數.故下紀一.次分之十位三二相加得五.故下紀五.次度之單位八對○.無可加.仍紀八.次度之十位二一相加得三十.乃以三十度進一宮.誌於宮之本位.度之十位紀○.次宮之本位九六相加得十五.併所進之一爲十六.因十二宮滿一周天.故逢十二去之.餘四.故下紀四.所加之數共得四宮八度五十一分一十六秒.即總數也.

宮	十	度	十	分	十	秒
九	二	○	三	○	二	六
六	一	八	二	○	五	○
四	○	八	五	一	一	六

設如一日一十五時二刻八分.與一日一十二時三刻九分相加.

法以原數橫列於上.加數橫列於下.日時分則合兩位共加.刻則仍命以單位.蓋以四刻進一小時故也.分位之八與九相加得十七.十五分進一刻.故於刻之本位下誌一.餘二.故單位下紀二.十位下紀○.次刻位之二與三相加得五.併所進之一爲六.四刻進一時.故於時之本位下誌一.餘二.故本位紀二.次時之單位五二相加得七.併所進之一得八.時之十位一與一相加得二.共爲二十八.二十四時進一日.故於日之本位下誌一.餘四.故時之單位下紀四.十位下紀○.次日之單位一與一相加得二.併所進之一爲三.故下紀三.所加之數.共得三日四時二刻二分.即總數也.

日	十	時	刻	十	分
一	一	五	二	○	八
一	一	二	三	○	九
三	○	四	二	○	二

設如有物重三十四斤十五兩五錢.與二十一斤十四兩三錢相加.

法以原數橫列於上。加數橫列於下。其錢位斤位與斤之十位。仍皆按位相對加之。兩位與兩之十位。則合其數共加之。兩以十六方進一斤。故合兩加之。如列數有兩數無十數者。仍作〇以存十兩之位。錢位之五三相加得八。本位紀八。兩位之原數十五。加數十四。相加共得二十九。則進十六兩於前斤位爲一誌之。其所餘十三兩。則於兩位紀三。十位紀一。次斤位之四一相加得五。併所進之一爲六。本位紀六。次十位之三二相加得五。本位紀五。所加之數共得五十六斤十三兩八錢。即總數也。

十	觔	十	兩	錢
三	四	一	五	五
二	一	一	四	三
五	六	一	三	八

減法

減者較衆數而得餘也。凡以少減多。以小減大。原有之數書於上。應減之數書於下。橫列必對其位。相減必從其類。（如千減千百減百之類。）如或下數大於上數。不足減。則借前位之一以減本位。（加法由後而進前。減法則借前而退後。其理一也。詳見設如中。）前位作一點以誌之。既得本位。則前位所借之一。併於前數而爲減數。然兩數相減。必先辨其多寡。首位必大於減數。始可。其定位亦照原列之次爲減餘位。

設如有數五萬六千七百八十九。內減四萬三千六百四十二。

法自單位減起。單位之九減二餘七。故下紀七。十位之八減四餘四。故下紀四。百位之七減六餘一。故下紀一。千位之六減三餘三。故下紀三。萬位之五減四餘一。故下紀一。所減之數得一萬三千一百四十七。即餘數也。

五	六	七	八	九
四	三	六	四	二
一	三	一	四	七

設如有數二萬三千六百七十二。內減一萬六千四百八十一。

法自單位減起。單位之二減一餘一。故下紀一。十位之七減八。爲下大於上。則借前位之一。（前位下作一點爲誌。）作本位之十共十七。減八餘九。故下紀九。百位之六減四。併十位所借之一。則爲六減五餘一。故下紀一。千位之三減六。爲下大於上。則借前位之一。（前位亦作一點爲誌。）作本位之十共十三。減六餘七。故下紀七。萬位之

二	三	六	七	二
一	六	四	八	一
〇	七	一	九	一

二減一。併千位所借之一。則爲二減二。恰盡。故下紀〇。所減之數。得七千一百九十一。卽餘數也。

設如有六丈七尺八寸九分一釐。內減三丈四尺五寸九分九釐。

法自釐位減起。釐位之一。減九。爲下大於上。則借前位之一。前位下作一點爲誌。作本位之十。共十一。減九。餘二。故下紀二。分位之九減九。併釐位所借之一。則爲九減十。亦爲下大於上。故復借前位之一。前位下作一點爲誌。作本位之十。共十九。減十。餘九。故下紀九。寸位之八減五。併所借之一。則爲八減六。餘二。故下紀二。尺位之七。減四餘三。故下紀三。丈位之六。減三。餘三。故下紀三。所減之數。得三丈三尺二寸九分二釐。卽餘數也。

設如有米六十五石四斗三升二合。內減四十六石二斗七升三合。

法自合位減起。合位之二。減三。爲下大於上。則借前位之一。前位下作一點爲誌。作本位之十。共十二。減三。餘九。故下紀九。升位之三。減七。併合位所借之一。則爲三減八。爲下大於上。則借前位之一。前位下作一點爲誌。作本位之十。共十三。減八。餘五。故下紀五。斗位之四。減二。併升位所借之一。則爲四減三。餘一。故下紀一。石位之五。減六。爲下大於上。則借前位之一。前位下作一點爲誌。作本位之十。共十五。減六。餘九。故下紀九。十位之六。減四。併所借之一。則爲六減五。餘一。故下紀一。所減之數。得十九石

丈	尺	寸	分	釐
六	七	八	九	一
三	四	五	九	九
三	三	二	九	二

十	石	斗	升	合
六	五	四	三	二
四	六	二	七	三
一	九	一	五	九

一斗五升九合．卽餘數也．

設如有銀十五兩三錢六分七釐．內減九兩二錢三分四釐．法自釐位減起．釐位之七減四餘三．故下紀三．分位之六減三餘三．故下紀三．錢位之三．減二餘一．故下紀一．兩位之五減九．爲下大於上．則借前位之一．前位下作一點爲識． 作本位之十．共十五．減九餘六．故下紀六．十位之一．減兩位所借之一．恰盡．故下紀○．所減之數．得六兩一錢三分三釐．卽餘數也．

十	兩	錢	分	釐
一	五	三	六	七
·	九	二	三	四
○	六	一	三	三

設如七宮一十八度二十七分五十二秒．內減九宮二十一度三十五分四十三秒．法自秒位減起．秒之單位二減三．爲下大於上．則借前位之一．前位下作一點爲識．作本位之十．共十二．減三餘九．故下紀九．秒之十位五減四．併所借之一．則爲五減五．恰盡．故下紀○．分之單位七減五．餘二．故下紀二．分之十位二減三．爲下大於上．則借度位之一．爲六十分．度位下作一點爲識．六十分與原二十分．共爲八十分．內減三十分．餘五十分．故下紀五．度之單位八減一．併所借之一．則爲八減二．餘六．故下紀六．度之十位一減二．爲下大於上．則借宮位之一．爲三十度．宮位下作一點爲識．三十度與原十度．共爲四十度．內減二十度．餘二十度．故下紀二．宮之單位七減九．併所借之一．則爲七減十．爲下大於上．則外借一周天．爲十二宮．十二宮與原七宮．共爲十九宮．內減十宮．餘九宮．故下紀九．所減之數．得九宮二十六度五十二分九秒．卽

十	宮	十	度	十	分	十	秒
	七	一	八	二	七	五	二
	九·	二	一·	三	五	四·	三
	九	二	六	五	二	○	九

餘數也

設如一十二日二十二時三刻零九分內減一十一日二十三時三刻十分

法自分位減起日位刻位俱各按單位相減其分位時位則合兩位減之分位之九減十爲下大於上則借刻位之一爲十五分 刻之本位下作一點爲誌・ 十五分與原九分共爲二十四分內減十分餘十四分故分之單位紀四分之十位紀一刻之本位三減三併所借之一則爲三減四爲下大於上則借時位之一爲四刻 時之單位下作一點爲誌・ 四刻與原三刻共爲七刻內減四刻餘三刻故本位下紀三時位之二十二減二十三併所借之一則爲二十二減二十四爲下大於上則借日位之一爲二十四時 日之本位下作一點爲誌・ 二十四時與原二十二時共爲四十六時內減二十四時餘二十二時故時之單位下紀二時之十位下亦紀二日位之二減一併所借之一則爲二減二恰盡故下紀○日之十位之一減一恰盡故亦紀○所減之數得二十二時三刻一十四分即餘數也

設如有物十五斤零四兩八錢內減十二斤十二兩三錢

法自錢位減起錢位之八減三餘五故下紀五兩位之四減二似非下大於上然原數兩之十位爲○ 十六兩爲一斤・故作○於斤後兩前・以存十兩之位・ 而減數兩之十位爲一則爲四兩減十二兩亦爲下大於上故借斤位之一爲十六兩 斤位下作一點爲

十	日	十	時	刻	十	分
一	二	二	二	三	○	九
一	一	二	三	三	一	○
○	○	二	二	三	一	四

十	觔	十	兩	錢
一	五	○	四	八
一	二	一	二	三
○	二	○	八	五

誌・十六兩與原四兩．共爲二十兩．內減十二兩．餘八兩．故兩之單位紀八．十位紀〇．斤位之五減二併所借之一．則爲五減三餘二．故下紀二．十位之一減一．恰盡故下紀〇．所減之數得二斤零八兩五錢．即餘數也．

因乘

因乘者生數也。以數生數。有生生不已之義焉。凡有幾數。彼此按次加之。爲得總數。然所加之次數多。則必至於煩而無統。此因乘之所以立也。因者一位相因而得。如二因三而成六。四因二而成八也。乘者多位相乘而得。如兩位以上。則各以每位所因之數而又屢累以積之也。其法以原數爲實。乘數爲法。實列於上。法列於下。必使法實相當。如千對千。百對百。十對十。單對單之類。按法乘實。合而加之。爲所得數。定位之法。視其法實所命之單位後有奇零與否。如無奇零。則實中所命之單位相對。即法尾之數。若有奇零。則法實相乘者。法實之一位。統得數之二位。如單位後奇零有一位。則截得數之二位。奇零有二位。則截得數之四位。向前爲單位計之。法實相乘再以法乘者。即自乘再乘也。法實之一位。統得數之三位。如單位後奇零有一位。則截得數之三位。奇零有二位。則截得數之六位。向前爲單位計之。是故得數以一位論者。則爲單十百千之類。以兩位論者。則爲自乘之類。以三位論者。則爲自乘再乘之類。錯綜交互。用法不一。必須臨題詳審。求其無誤。始爲得之。具見設如於左。

設如有三人。每人賞緞二疋。問共得幾疋。

法以三人爲實。列於上。二疋爲法。列於下。以二因三得六。即書於本位下。定位以實之三人。即是單位。而法又止一位。爲疋。今得數之六與實之單位相對。故知六是疋位。得共數爲六疋也。

三	二
	六

設如有八人每人賞米六石問共得幾石

法以八人爲實列於上六石爲法列於下以六因八得四十八將四書於前位下前位爲十位・故十數紀前位下・八書於本位下本位爲單位・故單數紀本位下・定位以實之八人卽是單位而法亦止一位爲石今得數之八與實之單位相對卽知八是石位而四在石之前一位故知四是十位得共數爲四十八石也

八
六
四八

設如有一十二人每人賞銀五兩問共得幾兩

法以一十二人爲實列於上五兩爲法列於下命兩位與人之單位相齊先以五乘二得一十將十進前一位作一點誌之紀〇於本位下此數無單・故下紀〇・次以五乘一仍得五併所進之一爲六故書六於本位下一雖爲十位・而以五乘一・則一下爲本位矣・共得六〇定位因實之單位對法之兩位而得數之〇與實之單位相對故知〇爲兩位而六爲十位得共數爲六十兩也

一二
五
六〇

設如有二十四人每人賞銀三兩六錢問共得幾兩

法以二十四人爲實列於上三兩六錢爲法列於下命錢位與人之單位相齊乃以法之六遍乘實之二四其所得之單位數卽對本法位下書之六乘四得二十四將二十進前一位作二點誌之四書於本位下次以六乘二得一十二將十進前一位爲一書之二併所進之二爲四故書四於本位下二雖爲十位・而以六乘二・則二下卽爲

二四
三六
一四四
七二
八六四

本位矣．法之六既與實乘畢次以法之三遍乘實之二四其所得之單位數即對本法位下書之三乘四得一十二將十進前一位作一點誌之二書於本位下次以三乘二得六併所進之一爲七故書七於本位下法之三又與實乘畢乃用加法併之共得八六四總書於下定位以實尾之四係四人爲單位而法尾爲錢今得數末位之四與實之單位相對即知四是錢位二位爲兩三位爲十兩得共數爲八十六兩四錢也

設如有田三百六十畝每畝納糧三升五合問共得若干

法以三百六十畝爲實列於上三升五合爲法列於下實之單位無數則補〇以存其位命合位與畝之單位相齊乃以法之五遍乘實之三六〇其所得之單位數即對本法位下書之五乘〇仍爲〇故下紀〇五乘六得三十將三十進前一位作三點誌之本位紀〇五乘三得一十五將十進前一位爲一書之五併所進之三爲八故書八於本位下又以法之三遍乘實之三六〇其所得之單位數即對本法位下書之三乘〇仍爲〇故下紀〇三乘六得一十八將十進前一位作一點誌之八書於本位下三乘三得九併所進之一爲十故進前一位爲一書之本位紀〇乘畢用加法併之共得一二六〇〇總書於下定位以實尾之〇係單位法尾是合今得數末位之〇與實之單位相對即知末位之〇是合前一位是升向前數至首位得十石因知共數爲一十二石六斗也

		三	六	〇
			三	五
	一	八	〇	〇
一	〇	八	〇	
一	二	六	〇	〇

設如有田三頃五十畝每頃納糧一石二斗三升問共得若干

法以三頃五十畝爲實列於上.因畝位無數・故作○以存其位・一石二斗三升爲法列於下.命石位與頃之單位相齊.題中言每頃納一石・故石與頃對爲單位・乃以法之三遍乘實之三五○.其所得之單位數.即對本法位下書之.三乘○仍得○.故下紀○.次以三乘五得一十五.將十進前一位作一點誌之.五書於本位下.次以三乘三得九.併所進之一爲十.故進前一位爲一.書之本位紀○.又以法之二遍乘實之三五○.其所得之單位數.即對本法位下書之.二乘○仍得○.故下紀○.二乘五得一十.將十進前一位作一點誌之.本位紀○.二乘三得六.併所進之一爲七.故書七於本位下.又以法之一遍乘實之三五○.其所得之單位數.即對本法位下書之.一乘○.仍得○.一乘五仍得五.一乘三仍得三.俱各書於本位下.乘畢用加法併之.共得四三○五○.總書於下.定位因每頃納糧一石二斗三升.即命頃爲單位.而石亦爲單位.其後二位則爲奇零.凡法實之奇零.有一位則統得數之一位.今奇零既有二位.則統得數之四位.故從後截去四位.而第五位定爲石.因知共數爲四石三斗零五合也.

		三	五	○
		一	二	三
	一	○	五	○
	七	○	○	
三	五	○		
四	三	○	五	○

設如有金三十六兩.每兩價銀九兩九錢八分.問共價幾何.

法以三十六兩爲實列於上.九兩九錢八分爲法列於下.實中錢位分位俱無數.則補作○○以存其位.命分位與分位相齊.乃以法之八遍乘實之三六○○.先以八

			三	六	○	○
				九	九	八
		二	八	八	○	○
	三	二	四	○	○	
三	二	四	○	○		
三	五	九	二	八	○	○

乘〇〇仍得〇〇故下紀〇〇次以八乘六得四十八將四十進前一位作四點誌之八書於本位下次以八乘三得二十四將二十進前一位爲二書之四併所進之四爲八故書八於本位下又以法之九遍乘實之三六〇〇先以九乘〇〇仍得〇〇故下紀〇〇次以九乘六得五十四將五十進前一位作五點誌之四書於本位下次以九乘三得二十七將二十進前一位作二點誌之七併所進之五爲十二十又進前一位爲一併所誌之二爲三故前位書三本位書二又以法之九遍乘實之三六〇〇先以九乘〇〇仍得〇〇故下紀〇〇次以九乘六得五十四將五十進前一位作五點誌之四書於本位下次以九乘三得二十七將二十進前一位作二點誌之七併所進之五爲十二十又進前一位爲一併所誌之二爲三故前位書三本位書二乘畢用加法併之共得三五九二八〇〇定位因題言每兩價銀九兩九錢八分爰以兩爲單位其後二位則爲奇零奇零既有二位則統得數之四位故從後截去四位而第五位定爲兩第六位爲十第七位爲百因知共數爲三百五十九兩二錢八分也

設如有物二十六斤求兩數

法以二十六斤爲實列於上以每斤十六兩爲法列於下乃以法之六遍乘實之二六其所得之單位數卽對本法位下書之六乘六得三十六將三十進前一位作三點誌之六書於本位下次以六乘二得一十二將十進前一位爲一書之二併所進之三爲五故書五於本位下又以法之一遍乘實之二六其所得之單位數卽對本法位下書之一乘六仍得六故下書六次以一乘二仍得二故下書二乘畢用加法併之得四一六定位

	二	六
	一	六
一	五	六
二	六	
四	一	六

因實尾是單位.而法尾又是兩位.故得數末位之六卽爲單位爲兩.而前一位爲十.又前一位爲百.因知得數爲四百一十六兩也.

又法斤求兩身加六.名爲定身加法.蓋以十六兩之十爲一.乘之仍得原數.故以本身加六.卽得.如二十六斤.則從首位加起.二六加一十二.將一對實之十位二對實之單位下書之.又六六加三十六.則三對實之單位.而六對實之單位後一位書之.用加法相併.得四一六.定位以原斤數之後一位爲兩.今得數末位之六在原斤數之後一位.卽知是兩.因知得數爲四百一十六兩也.

二	六	
一	二	
	三	六
四	一	六

設如周天三百六十度.每度六十分.問共得若干分.

法以三百六十度爲實.列於上.以六十分爲法.列於下.因單位係無數.故各作○以存其位.乃以法之○遍乘實之三六○.仍皆得○.故各紀○於各位下.又以法之六.遍乘實之三六○.其所得之單位數.卽對本法位下書之.六乘○.仍得○.故本位下紀○.次以六乘六得三十六.將三十進前一位作三點誌之.六書於本位下.次以六乘三.得一十八.將十進前一位作一點誌之.八併所進之三爲十一.十又進前一位爲一.併所誌之一爲二.故前位書二.本位書一.乘畢用加法併之.共得二一六○○.定位以實之末位是單位.法之末位是分.今求分數.故得數末位之○.卽是分之單位.向前數至首位得萬.因知共數爲二萬一千六百分也.

		三	六	○
			六	○
		○	○	○
二	一	六	○	
二	一	六	○	○

設如有驗時儀墜子來一秒往一秒今十五分問共得來往幾秒

法以十五分爲實列於上以每分六十秒爲法列於下乃以法之○遍乘實之一五仍皆得○故各紀○於本位下又以法之六遍乘實之一五其所得之單位數卽對本法位下書之六乘五得三十將三十進前一位作三點誌之本位紀○次以六乘一仍得六併所進之三爲九故書九於本位下定位以實之末位是單位法之末位是秒今求秒數故得數末位之○卽是秒之單位其前一位爲十又前一位爲百因知共數爲九百秒也

	一	五
	六	○
	○	○
九	○	
九	○	○

設如一尺二寸自乘求積 以本數乘本數．故爲自乘．

法以一尺二寸互爲法實列於上下乃以法之二遍乘實之一二其所得之單位數卽對本法位下書之二乘二得四故下書四次以二乘一仍得二故下書二又以法之一遍乘實之一二其所得之單位數卽對本法位下書之一乘二仍得二故下書二次以一乘一仍得一故下書一乘畢用加法併之共得一四四定位因自乘數成平方面其每一尺正方面容積一百寸故百寸爲尺百尺爲丈俱以兩位命之今實之末位爲寸卽命爲單位法之末位是寸得數末位之四與實之單位相對卽知爲寸位向前第二位爲十寸第三位爲百寸既以百寸爲尺卽知得數爲一尺四十四寸也若命尺爲單位則於尺上命位其後一位爲奇零故於得數內從末截去二位以第三位爲尺 蓋自乘乃兩數相乘．兩數既各有一位零數．故截去兩

	一	二
	一	二
	二	四
一	二	
一	四	四

位算也・今得數有三位。即知首位爲一尺。首位既爲尺。末位又既爲寸。則中一位爲十寸可知矣。

設如一尺二寸自乘再乘求積。以本數乘本數・所得之數・又以本數乘之・故謂之自乘再乘・

法先以一尺二寸互爲法實。按法自乘得一尺四十四寸。又以一尺四十四寸爲實。復以一尺二寸爲法。按法乘之。共得一七二八。定位因自乘再乘數成立方體。其每一尺正方體容積一千寸。故以千寸爲尺。千尺爲丈。俱以三位命之。今實之末位爲寸。卽命爲單位。法之末位是寸。得數末位之八與實之單位相對。卽知爲寸位。向前第二位爲十寸。第三位爲百寸。第四位爲千寸。既以千寸爲一尺。卽知得數爲一尺七百二十八寸也。若命尺爲單位。則於尺上命位。其後一位爲奇零。故於得數內從末截去三位。以第四位爲尺。蓋自乘再乘・乃以三數相乘・三數既各有一位零數・故截去三位算也・今得數有四位。卽知首位爲一尺。首位既爲尺。末位又既爲寸。則中二位爲十寸百寸可知矣。

		一	二
		一	二
		二	四
	一	二	
	一	四	四
		一	二
	二	八	八
一	四	四	
一	七	二	八

歸除

歸除者分數也。以數分數。有各得均齊之義焉。凡有兩數。以此數減彼數。減得幾次。卽爲所得。然所減之次數多。則益至於紛而難紀。此歸除之所以立也。歸者一位歸之而得。如歸作幾分而均分之也。除者多位除之而得。蓋以所得之數與法相因而於實內除去也。其法以原數爲實。橫列於下。除數爲法。橫列於上。法之小於實者。法之首位與實之首位列齊。法之大於實者。則法比實退一位。看實足法幾倍。卽爲得數。自法之末位上紀所得之數。旣得數。乃以所得與法相因。書於實下。與實相減。餘者卽爲次商實。依次按法歸除。以恰盡爲度。減餘者・乃所得與法相因之數在實中所減者・其數每與法位相對・卽初商之餘實也・至於實位所餘之數・則每次取下一位・續於減餘之末・以爲每商之實・若實無餘位而歸除仍未盡者・則按位添〇以紀之・　如實不足法之一倍者。則得數爲〇。定位之法。以法中所命單位與原實相對之數。爲所得之首位數。若實之位數少於法者。則作幾〇位以補足法。然後位數一覽卽明。至於一位歸除捷法。則覺以原數書於上。就身用幾分分之得數書於下。其定位仍照原列之位定之。具見設如於左。

設如有緞六疋。令三人分之。問每人得幾疋。

法以六疋爲實。列於下。三人爲法。列於上。今法與實俱爲單位。而法比實小。故列法與實相齊。爰看實足法幾倍。今足二倍。故書二於法上。乃以得數之二與法之三相因得六。書於實下。與實相減恰盡。卽得數爲二疋也。定位因法之三人卽爲單位。而

二
三
六
六
〇

實亦止一位爲疋是法之單位與實之疋位相對故得數爲二疋也

設如有米六十四石令八人分之問每人得幾石

法以六十四石爲實列於下八人爲法列於上因法之八大於實之首位之六故將法退一位書之爰看實足法幾倍今足八倍故書八於法上乃以得數之八與法之八相因得六十四書於實下其所得單位數卽對得數之本位下書之與實相減恰盡卽得數爲八石也定位因法之八人卽爲單位而與實之石位相對故得數爲八石也

	八
	八
六	四
六	四
〇	〇

設如有銀三百四十三兩令七人分之問每人得幾兩

法以三百四十三兩爲實列於下七人爲法列於上因法之七大於實之首位之三故將法退一位書之爰看實足法幾倍今實前兩位爲三四足法之四倍何以知其足法之四倍蓋實之三十四內足法之七之四倍爲二十八如法之七之五倍則爲三十五比實則大矣故書四於法上乃以得數之四與法之七相因得二十八書於實下其所得單位數卽對得數之本位下書之後倣此與實相減餘六次取實數所餘之三書於減餘之後共六三爲次商實爰看實之六三足法幾倍今足九倍故書九於得數之次乃以得數之九與法之七相因得六十三書於次商實之下與實相減恰盡卽得數爲四十九兩也定位因法之七人卽爲單位而與實中之兩之十位相對故得數首位卽爲十而次位爲兩是知每人得四十九兩也

	四	九
	七	
三	四	三
二	八	
〇	六	三
	六	三
	〇	〇

設如有絲四十五斤。共織得緞九十二丈二尺五寸。問每斤織得若干。

法以九十二丈二尺五寸爲實。列於下。四十五斤爲法。列於上。因法之首位四。小於實之首位九。故列法與實相齊。爰看實之九二。足法之二倍。故書二於法上。乃以得數之二與法之四五相因。得九〇。書於實下。與實相減。餘二。次取實數所餘之二。書於減餘之後。共二二。爲次商實。今實之二二。不足法之四五之一分。故得數爲〇。乃紀〇於上。復取實數所餘之五。書於二二之後。共二二五。爲三商實。次商實之二二。不足法之四五。故再取實之一位續書於下。謂之三商實者。〇位爲次商故也。爰看實之二二五。足法之五倍。故書五於上。乃以得數之五與法之四五相因。得二二五。書於實下。與實相減恰盡。即得數爲二丈零五寸也。定位因法之五斤爲單位。而與實之丈位相對。故得數首位即爲丈。等而下之爲尺爲寸。是知每斤織得二丈零五寸也。

設如有田四十五畝六分。共納穀五十七石。問每畝納穀若干。

法以五十七石爲實。列於下。四十五畝六分爲法。列於上。因法之首位四。小於實之首位五。故列法與實相齊。又因實之位數少於法。故補作〇以足其位。爰看實之五七〇。足法之一倍。故書一於法上。乃以得數之一與法之四五六相因。仍得四五六。書於實下。與實相減。餘一一四。此後實無餘位。故添書一〇於減餘之末。爲次商實。爰看一一四〇。足法之二倍。故

書二於上乃以得數之二與法之四五六相因得九一二書於實下與實相減餘二二八又添書一〇於減餘之末爲三商實爰看二二八〇足法之五倍故書五於上乃以得數之五與法之四五六相因得二二八〇書於實下與實相減恰盡卽得數爲一石二斗五升也定位因法之五畝爲單位而與實之石位相對故得數首位爲石是知每畝納穀一石二斗五升也

設如有丹砂一兩價值錢二萬五千文問每錢一文該得丹砂幾何

法以丹砂一兩爲實列於下錢二萬五千爲法列於上因法之首位二大於實之首位一故將法退一位列之又因法之百位十位單位俱無數故各作〇以存其位而實亦作五〇位以補足法爰看實足法之四倍故書四於法上乃以得數之四與法之二五〇〇〇相因得一〇〇〇〇〇書於實下與實相減恰盡卽得數爲四絲也定位因法之末位〇係單位故從實之首位一兩數至法之單位相對之位爲絲是知每錢一文得丹砂四絲也

設如有銀一千二百五十兩買果賞人每果一枚價二釐五毫問買果若干

法以一千二百五十兩補五〇位爲實列於下因法之單位是毫故補五〇位與法相對蓋命實爲一千二百五十萬毫也二釐五毫爲法列於上爰看實之一二五足法之五倍故書五於法上乃以得數之五與法之二五相因得一二五書於實下與實相減恰盡然實後尚有五〇位故得數後亦添五〇位爲五十萬也定位因法實俱至毫位

四
二五〇〇〇
一〇〇〇〇〇
一〇〇〇〇〇
〇〇〇〇〇〇

五〇〇〇〇〇
二五
一二五〇〇〇〇〇
一二五
〇〇〇

止卽命豪爲單位爰從實之末位數至法之單位相對之位爲十萬是知得果爲五十萬枚也

設如有物重三百八十四兩問得斤數若干

法以三百八十四兩爲實列於下每斤一十六兩爲法列於上爰看實之三八足法之二倍故書二於法上乃以得數之二與法之一六相因得三十二書於實下與實相減餘六次取實數之四書於減餘之後共爲六四因足法之四倍故書四於上乃以得數之四與法之一六相因得六十四書於實下與實相減恰盡卽得數爲二十四斤也定位因法之兩數爲單位而與實之十位相對故知得數爲二十四斤也

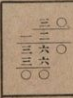
	二	四
一	六	
三	八	四
三	二	
〇	六	四
	六	四
	〇	〇

又法名爲斤稱流法其法曰一退六二五（如一萬兩則爲六百二十五斤・一千兩則爲六十二斤半・一百兩則爲六斤二分半皆以十遞析・退者退一位命之也・）二一二五（如二萬兩則爲一千二百五十斤・二千兩則爲一百二十五斤・二百兩則爲十二斤半・不言退者・對位命之也・餘倣此・）三一八七五四二五五三一二五六三七五七四三七五八五五九五六二五如三百八十四兩則列於上先以三之一八七五通之爰將一對三之本位以下依次向後書之次以八之五通之將五對八之本位書之次以四之二五通之將二對四之本位書之之五則列於次位三數書畢乃以加法併之得數爲二十四斤定位因兩之前一位爲斤今得數之四在兩之前一位故四卽爲斤位而又前一位則爲十位是知得數爲二十四斤也

二	八	四	
一	八	七	五
	五	〇	〇
		二	五
二	四	〇	〇

設如周天三百六十度分十二宮問每宮得若干度

法以三百六十度爲實列於下一十二宮爲法列於上爰看實之三六足法之三倍故書三於法上乃以得數之三與法之一二相因得三六書於實下與實相減恰盡然實後尚有〇位故得數後亦添一〇位即得數爲三十度也定位因法之二爲單位而與實之十位相對故得數首位爲十而每宮爲三十度也



設如一日之中得一千四百四十分以九十六刻分之問每刻得若干分

法以一千四百四十分爲實列於下以九十六刻爲法列於上爰看實之一四四僅足法之一倍故書一於法上乃以得數之一與法之九六相因仍得九六書於實下與實相減餘四八次取實之〇位書於減餘之後共爲四八〇因足法之五倍故書五於上乃以得數之五與法之九六相因得四八〇書於實下與實相減恰盡即得數爲一十五分也定位因法之六爲單位而與實之十位相對故得數首位爲十而每刻爲一十五分也

一位歸除捷法

設如有銀三十四萬五千六百七十八兩作二分分之問每分若干

法以三十四萬五千六百七十八兩爲實列於上視首位之三足二分之幾何今足一倍故下書一一二除二餘一乃移於下位爲十下位作點爲誌·併下位之四共爲十四足二分之七倍故下書七二七除一十四恰盡次五足二分之二倍故下書二二二除四

除一移於下位爲十倂下位之六共爲十六足二分之八倍故下書八二八除一十六恰盡次七足二分之三倍故下書三二三除六餘一移於下位爲十倂下位之八共爲十八足二分之九倍故下書九二九除一十八恰盡定位因得數仍原數之位故知每分得一十七萬二千八百三十九兩也

三	四	五	六	七	八
一	七	二	八	三	九

設如有銀一十二萬三千四百五十三兩作九分分之問每分若干

法以一十二萬三千四百五十三兩爲實列於上因首位之一小於九分故移於下位爲十倂下位之二共爲十二足九分之一倍故下書一一九除九餘三移於下位爲三十倂下位之三共爲三十三足九分之三倍故下書三三九除二十七餘六移於下位爲六十倂下位之四共爲六十四足九分之七倍故下書七七九除六十三餘一移於下位爲十倂下位之五共爲十五足九分之一倍故下書一一九除九餘六移於下位爲六十倂下位之三共爲六十三足九分之七倍故下書七七九除六十三恰盡定位因得數比原數退一位故知每分得一萬三千七百一十七兩也

一	二	三	四	五	三
	一	三	七	一	七

數理精蘊下編卷二

首部二

命分

凡歸除分至最細而可以恰盡無餘者。謂之無奇零數。若分至最細而屢除不盡者謂之有奇零數。其奇零若略去之則不能復還原數。此命分之所以立也其法命爲分母分子。分母者即除數也。分子者即除不盡之數也凡不盡之數得分母中之幾分者即命爲幾分之幾是以命分之一法。正所以濟歸除之所不逮也。

設如有銀十一兩。命三人分之。問每人得若干。

法以三人分銀十一兩。每人得銀三兩。仍餘二兩。所餘二兩。再以三人分之每人得六錢六分六釐六毫。如是每得六而仍餘二數不盡故立命分法以三人爲分母所餘二兩爲分子。命爲每人得三兩又三分兩之二蓋將每兩剖作三分其所餘二兩則共剖作六分三人分之每人得二分故命爲三分兩之二也如因三分兩之二求知原銀數則以三人與分子二分相乘得六分蓋每人得二分則三人共得六分也以六分用分母三分歸之得二兩蓋初分一兩爲三分故終收三分爲一兩也再加入三人所得整數共九兩一人三兩。三人共得九兩。則得十一兩以合原數也。

設如有銀一百八十七兩命十八人分之問每人得若干

法以十八人分銀一百八十七兩每人得銀十兩仍餘七兩分之不盡則以十八人爲分母所餘七兩爲分子命爲每人得一十兩又十八分兩之七蓋將每兩剖作十八分其所餘七兩則共剖作一百二十六分十八人分之每人得七分故命爲十八分兩之七也如因十八分兩之七求知原銀數則以十八人與分子七分相乘得一百二十六分蓋每人得七分則十八人共得一百二十六分也以一百二十六分用分母十八分歸之得七兩蓋初分一兩爲十八分故終收十八分爲一兩也再加入十八人所得整數共一百八十兩一人十兩・十八人共得一百八十兩・則得一百八十七兩以合原數也

約分

約分者，以所命之分，約之以就整分也。蓋命分是隨其數之多寡全而紀之，而約分則即其多寡之數從而約之，以求簡易焉。其法以分子分母兩數輾轉相減，務期減餘兩數相同，是爲度盡兩數之一數，乃以此數爲一分，以除分母得幾分者，即約分母爲幾分，又除分子得幾分者，即約爲分母幾分中之幾。凡諸法中有帶分者，皆由約法而得，故設例於此，所以明帶分之根也。

設如古曆歲實命爲三百六十五日又一百分日之二十五，今以法約之，求相當最小數。

法置日分一百，以餘分二十五減之，餘七十五分，再以二十五減之，餘五十分，再以二十五減之，亦餘二十五分，兩數齊等，即以相等之數二十五，轉除日分一百，得四，即爲四分，又以二十五除餘分二十五，得一，即爲一分，乃百分日之二十五約爲四分之一，是歲實共得三百六十五日又四分日之一也。蓋將一日剖作四分，而得其四分之一也。凡約分法，以分母分子相減，必得相等之數，然後用之，蓋因此數可以度盡分母，又可以度盡分子故也。今以相等之數二十五爲一分，則日分一百有四倍二十五，故爲四分，而餘分二十五，又恰足一分之數，故爲一分。一百與二十五之比，即同於四與一之比，是四與一，即一百與二十五之相當最小數也。凡分母分子輾轉相減，不得相等之數，終減至於一，是分母分子俱無一數可以度盡之數，即不用約分，用命分誌之可也。

設如有銀二百一十兩，命一百四十七人分之，每人得銀一兩，仍餘六十三兩不盡，以法約之，求相當最

小數。

法置一百四十七人。以餘銀六十三減之。餘八十四。再以六十三減之。餘二十一。又置六十三。轉以二十一減之。因減數大於原數。又不得兩數齊等。故以二十一轉減之。餘四十二。再以二十一減之。亦餘二十一。則兩數齊等。即以相等之數二十一。轉除一百四十七人。得七。即爲七分。又以二十一除銀六十三兩。得三。即爲三分。乃一百四十七人分餘銀六十三兩。約爲七分之三。是每人得銀一兩又七分兩之三也。蓋將每兩剖作七分。而得其七分之三也。此法以一百四十七人與六十三兩。輾轉相減。得相等之數二十一。是二十一可以度盡一百四十七人。又可以度盡六十三兩故也。旣以二十一爲一分。則一百四十七有七倍二十一。故爲七分。六十三有三倍二十一。故爲三分。一百四十七與六十三之比。卽同於七與三之比。是七與三。卽一百四十七與六十三之相當最小數也。

通分

凡奇零數目不以十遞析者難以立算則用通分如斤通爲兩宮通爲度度通爲分之類是也又有整數而帶零分者則必通之以從其類如化整爲零收零作整之類是也或有零分而分母不同者則必通之以同其母如互乘之類是也通分之法立然後奇零數目得以歸有餘齊不足而帶分之法皆根於此故爲另設加減乘除之法以明其義焉

加法

凡奇零數相加兩分母同者卽倂兩分子爲得數若相加之數大於母數則於所得數內減去母數爲一整數紀其餘爲零數

設如有九分丈之七（一丈分爲九分・而得其七分也・）與九分丈之五（一丈分爲九分・而得其五分也・）相加求總數

法以九分之七與九分之五左右列之將兩分子七與五相加得一十二因子數大於母數乃於一十二內減去母數九爲一整數餘三爲零數卽得整數一丈零九分丈之三爲相加之數也此法因兩分母同爲九分而兩分子亦同爲九分中之零分故徑倂兩零分之七與五得一十二又以母數九分收爲一丈（蓋初以一丈分爲九分・今滿九分卽收爲一丈也・）其所餘三亦仍爲九分

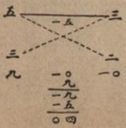
九		九
五	七	七
	五	
	一二	
	九	
	一〇三	

中之三分故得一丈零九分丈之三爲兩零分之共數此分母相同之加法也如以眞數明之．九分丈之七．是將一丈分爲九分．得其九分中之七分．一丈分爲九分．則每一分得一尺一寸一分一釐有餘．九分中之七分．則爲七尺七寸七分七釐有餘也．九分中之五分．則爲五尺五寸五分五釐有餘也．兩數相加．共得一丈三尺三寸三分三釐有餘．卽一丈零九分丈之三也．蓋一尺一寸一分一釐有餘．旣爲九分中之一分．則三尺三寸三分三釐有餘．卽九分中之三分也．如以九分除三分．卽得三尺三寸三分三釐不盡之數．是九分與一丈之比．卽同於三分與三尺三寸三分有餘之比也．

凡奇零數相加兩分母不同者則用互乘法以兩分母相乘爲共母數再以前分母乘後分子又以後分母乘前分子以所得兩子數相加爲共子數紀於共母數之下爲共零數。

設如有三分丈之二一丈分爲三分．而得其二分也．與五分丈之三二丈分爲五分．而得其三分也．相加求總數．

法以兩分母三五相乘得一十五爲共母數再以前分母三乘後分子三得九又以後分母五乘前分子二得十將兩得數相加得十九爲共子數因子數大於母數乃於十九內減去共母數十五爲一整數餘四爲零數卽得整數一丈零十五分丈之四爲相加之數也此法用互乘者本爲齊其分母也夫以兩分母相乘得十五者乃以兩分母俱變爲十五分也因分母不同．難以相加．故變爲同等．以前分母三乘後分子三得九者乃以後分子變爲十五分中之九也又以後分母五乘前分子二得十者是又以前分子亦變爲十



五分中之十也。蓋十五分之十與三分之二其比例等。俱爲五倍比例・而十五分之九與五分之三其比例亦等。俱爲三倍比例・兩分母既變爲同等則兩分子亦俱爲同分母之子矣。故相加如第一法。此分母不同之加法也。如以眞數明之・三分丈之二・既變爲十五分丈之十・則每一分爲六寸六分六釐有餘・今得十分・卽六尺六寸六分六釐有餘也・又五分丈之三・既變爲十五分丈之九・則每一分亦爲六寸六分六釐有餘・今得九分・卽六尺・兩數相加・共得一丈二尺六寸六分六釐有餘・卽一丈零十五分丈之四也・蓋六寸六分六釐有餘・卽爲十五分中之一分・今二尺六寸六分六釐有餘・爲四倍六寸六分六釐有餘・卽十五分中之四分也・如以十五分除四分・卽得二尺六寸六分不盡之數・是十五分與一丈之比・卽同於四分與二尺六寸六分有餘之比也・

又或分母不同而可以加減之使同者。則變而同之。可省互乘。

設如有八分兩之一與十二分兩之三相加求總數。

法以十二分之三。變爲八分之二。則與八分之一兩分母相同。故徑併兩分子二與一得三。卽八分兩之三。爲相加之數也。此法將十二分之三。變爲八分之二者。乃分母分子各減三分之一也。母數十二減三分之一餘八。子數三減三分之一餘二。蓋十二分之三與八分之二其比例相等。故變從簡易。如數有參差者。則當用下節之法。如以眞數明之・八兩分之一・是將一兩分爲八分・其一分卽一錢二分五釐也・又十二分兩之三・是將一兩分爲十二分・其三分爲二錢五分・今變爲八分兩之二・是將一兩分爲八分・其二分亦爲二錢五分也・兩數相加・

共得三錢七分五釐・卽八分兩之三也・蓋一錢二分五釐・爲八分中之一分・今三錢七分五釐・卽八分中之三分也・如以八分除三分・卽得三錢七分五釐・是八分與一兩之比・卽同於三分與三錢七分五釐之比也・

設如有六分石之五與三分石之二相加求總數。

如依前法將六分之五折半爲三分之二分半則兩分母雖同而分子卻有奇零若將三分之二加一倍作六分之四變少從多則與六分之五兩分母相同乃徑併兩分子五與四得九因子數大於母數乃於九內減去母數六爲一整數餘三爲零數卽得整數一石零六分石之三爲相加之數也此法三分之二變爲六分之四者乃分母分子各加一倍之比例也凡變分母分子或加或減務期所變之分數與原分數比例相同使其兩分母同而兩分子可併也此條與上條用加減雖各異而齊其分母以加之則同也　如以眞數明之・六分石之五・是將一石分爲六分・則每一分得一斗六升六合六勺六抄六撮有餘・今得五分・卽八斗三升三合三勺三抄三撮有餘也・又三分石之二・是將一石分爲三分・其二分爲六斗六升六合六勺六抄六撮有餘・今變爲六分石之四・是將一石分爲六分・其四分亦爲六斗六升六合六勺六抄六撮有餘也・兩數相加共得一石四斗九升九合九勺九抄九撮有餘・收爲五斗卽一石零六分石之三也・蓋六分爲一石・則三分卽五斗也・

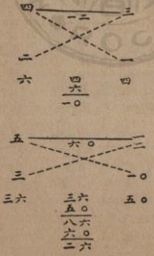
六　四
四五｜九六｜三
六　五

凡子母數有三四種相加者其分母分子俱不同則用互乘以齊其分母按前法加之　三種者・以第一數與第二數依前互乘法相加得數・又與第三數依前互乘法相加・四種者・以第一數第二數互乘相加得數・與第三數互乘相加

得數。復與第四數互乘相加。如兩分母相同者。即併其兩分子。而與所餘之分母不同者。用互乘以加之。又或有兩分母相乘後所得之數。與所餘之分母相同者。則直以所得之分子。與所餘之分子相加爲得數。即不用互乘矣。

設如有三分斤之一。又四分斤之二。又五分斤之三。相加求總數。

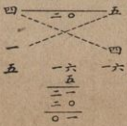
法以前兩分子分母按互乘法相加。得十二分斤之十。以兩分母三與四相乘得十二爲共母數。以前分母三乘後分子二得六。又以後分母四乘前分子一得四。相加得一十爲共子數。是爲十二分斤之十。乃以十二分斤之十與第三子母分用互乘法相加。得六十分斤之八十六。以第三分母五。與前兩分母互乘所得之十二相乘。得六十爲共母數。以前兩分母所得十二。乘第三分子三。得三十六。又以第三分母五。乘前兩分子所得十。得五十。相加得八十六。爲共子數。是爲六十分斤之八十六。因子數大於母數。乃於共子數八十六內減去共母數六十。爲一整數。餘二十六爲零數。即得一斤零六十分斤之二十六。爲總數也。凡子母分有四種五種相加者。俱倣此。如以眞數明之。三分斤之一。是將一斤分爲三分。其一分即五兩三錢三分三釐有餘也。四分斤之二。是將一斤分爲四分。則每一分爲四兩。今得二分。即八兩也。五分斤之三。是將一斤分爲五分。則每一分爲三兩二錢。今得三分。即九兩六錢也。三數相加。共



得二十二兩九錢三分三釐有餘。內取十六兩爲一斤。餘六兩九錢三分三釐有餘。卽六十分斤之二十六也。蓋以十六兩分爲六十分。每分得二錢六分六釐有餘。今六兩九錢三分三釐有餘。有二十六倍二錢六分六釐有餘。卽爲二十六分也。

設如有五分丈之三又四分丈之一又五分丈之一相加求總數。

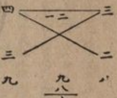
法因五分丈之三與五分丈之一兩分母相同故直併其兩分子三與一爲五分丈之四再以五分丈之四與四分丈之一依互乘法相加得二十分丈之二十一。以前分母五與後分母四相乘。得二十爲共母數。以前分母五乘後分子一得五。又以後分母四乘前分子四得十六。相加得二十一。是爲二十分丈之二十一。因子數大於母數乃於共子數二十一內減去共母數二十爲一整數餘一爲零數卽得一丈零二十分丈之一爲總數也如以實數明之。其五分丈之三。卽六尺也。其四分丈之一。卽二尺五寸也。其五分丈之一。卽二尺也。三數相加得一丈零五寸。卽一丈零二十分丈之一。蓋一丈分爲二十分。每分得五寸也。



設如有三分兩之二又四分兩之三又十二分兩之四相加求總數。

法以三分之二與四分之三用互乘法相加得十二分兩之十七。以前分母三與後分母四相乘。得十二爲共母數。以前分母三乘後分子三得九。又以後分母四乘前分子二得八。相加得十七。是爲十二分兩之十七。此所得之十二分兩之十七與第三分母相同卽以前兩分所得共子十七與後一分子四相加得二十一是爲十二分兩之二十一因子數大於母數乃於共子數二十一內減去共母數十二爲一整數餘九爲零數卽得

一兩零十二分兩之九爲總數也。如以眞數明之・其三分兩之二・卽六錢六分六釐有餘也・其四分兩之三・卽七錢五分也・其十二分兩之四・卽三錢三分三釐有餘也・三數相加得一兩七錢四分九釐有餘・收作七錢五分・卽一兩零十二分兩之九・蓋十二分兩之九・卽七錢五分也・



減法

凡奇零數相減兩分母同者卽將兩分子相減爲餘數。

設如有十一分丈之七減十一分丈之五求餘數。

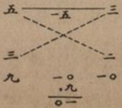
法以十一分丈之七與十一分丈之五左右列之將兩分子五與七相減餘二卽得十一分丈之二爲餘數也蓋因兩分母同爲十一分則兩分子亦同爲十一分中之零分故徑將兩分子相減餘二亦仍爲十一分中之二分是以定爲十一分丈之二此分母相同之減法也 如以眞數明之・十一分丈之七・是將一丈分爲十一分・則每一分得九寸零九釐零九絲有餘・其中之七分・卽六尺三寸六分三釐六毫三絲有餘也・其中之五分・卽四尺五寸四分五釐四毫五絲有餘也・相減餘一尺八寸一分八釐一毫八絲有餘・卽十一分中之二分也・蓋九寸零九釐零九絲有餘爲一

分・則一尺八寸一分八釐一毫八絲有餘即爲二分也・如以十一分除二分・亦得一尺八寸一分八釐一毫八絲不盡之數・是十一分與一丈之比・即同於二分與一尺八寸一分八釐一毫八絲有餘之比也・

凡奇零數相減兩分母不同者則用互乘法以兩分母相乘爲共母數再以前分母乘後分子又以後分母乘前分子以所得兩子數相減爲餘數

設如有三分丈之二減五分丈之三求餘數

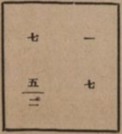
法以兩分母三五相乘得一十五爲共母數再以前分母三乘後分子三得九又以後分母五乘前分子二得一十將所得兩分子相減餘一即得十五分丈之一爲餘數也此法用互乘齊其分母將三分丈之二變爲十五分丈之十將五分丈之三變爲十五分丈之九兩分母既同爲十五分故兩分子十與九相減餘一爲十五分丈之一也此分母不同之減法也如兩分母不同可以加減之使其相同者減之亦如加法中例故不重設如以實數明之・其三分丈之二・即六尺六寸六分六釐有餘也・其五分丈之三・即六尺也・相減餘六寸六分六釐有餘・即十五分丈之一也・蓋一丈分爲十五分・每一分得六寸六分六釐不盡也・



凡零數與整數相減者即以分子與分母相減爲餘數

設如有米一石內減七分石之五求餘數

法以整數一石變爲七分爲分母與分子五相減餘二即得七分石之二爲

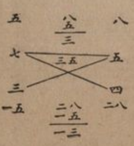


餘數也。蓋將一石分爲七分。而於此七分內減去五分。則所餘卽七分石之二。此整數中減零數法也。如以眞數明之。將一石分爲七分。則每一分得一斗四升二合八勺五抄七撮有餘。其五分卽七斗一升四合二勺八抄五撮有餘也。與一石相減。餘二斗八升五合七勺一抄四撮有餘。卽七分石之二也。蓋一斗四升二合八勺五抄七撮有餘爲一分。則二斗八升五合七勺一抄四撮有餘自爲二分也。

凡整數帶零分相減者。將兩零分用互乘法變爲同母。然後減之。

設如有銀八兩零五分兩之四。內減五兩零七分兩之三。求餘數。

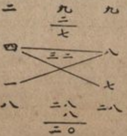
法以八兩之零數五分之四。與五兩之零數七分之三。用互乘法。兩分母七五相乘得三十五爲共母數。再以五兩之分母七。乘八兩之分子四。得二十八。爲八兩所變之子數。又以八兩之分母五。乘五兩之分子三。得十五。爲五兩所變之子數。乃以八兩五兩二整數相減餘三兩。以兩子數二十八與十五相減餘十三。卽得三兩又三十五分兩之十三。爲餘數也。蓋既將兩子數變爲同母。則八兩者爲八兩零三十五分兩之二十八。五兩者爲五兩零三十五分兩之十五。分母既同。故以子數相減而得餘數。此整數帶零分相減之法也。如以眞數明之。其八兩零五分兩之四。卽八兩八錢也。其五兩零七分兩之三。卽五兩四錢二分八釐五毫七絲有餘也。相減餘三兩三錢七分一釐四毫二絲有餘。其三兩爲整數。其三錢七分一釐四毫二絲有餘。卽三十五分中之六三分也。蓋將一兩分爲三十五分。則每一分得二分八釐五毫七絲有餘。其十三分卽三錢七分一釐四毫二絲有餘也。

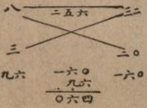


凡子母數三四種相減者．其分母分子俱不同．則用互乘以齊其分母．按前法減之．如兩分母相同者．卽將其兩分子相減．而與所餘之分母不同者．用互乘以減之．又或有兩分母相乘後所得之數與所餘之分母相同者．則直以所得之分子與所餘之分子相減．卽得餘數．其理與加法同．

設如有銅九斤零八分斤之七．內減二斤零四分斤之一．又減八分斤之三．求餘數．

法以九斤內減去二斤餘七斤爲整數．乃以八分斤之七與四分斤之一．用互乘法．將八分斤之七．變爲三十二分斤之二十八．將四分斤之一．變爲三十二分斤之八．兩數相減．餘三十二分斤之二十．又以三十二分斤之二十．與第三零數八分斤之三．用互乘法．將三十二分斤之二十．變爲二百五十六分斤之一百六十．將八分斤之三．變爲二百五十六分斤之九十六．兩數相減．餘二百五十六分斤之六十四．合前整數共得七斤又二百五十六分斤之六十四．爲餘數也．如用約法．則爲七斤零四分斤之一．蓋二百五十六爲四倍六十四．今以六十四爲一分．則二百五十六．自得四分也．其餘幾種零分內有兩分母相同．或兩分母乘出之數與餘一分母相同．俱照同分母之例減之．故不再設．或零分有四種五種者．亦俱倣此．此幾種零分相減之法也．如以眞數明之．其九斤零八分斤之七．卽九斤十四兩也．內減二斤零四分斤之





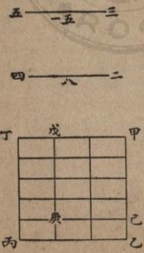
一・是減去二斤四兩・又減去八分斤之三・是又減去六兩也・餘七斤零四兩・卽七斤零四分斤之一也・盖一斤分爲四分・則每一分得四兩・今七斤零四兩・故謂七斤零四分斤之一也・

乘法

零分與零分相乘者。兩分母兩分子各相乘。所得之數。卽乘出之分也。

設如有三分丈之二與五分丈之四相乘。問得幾何。

法以兩分母三五相乘得十五分。爲乘出之分母。又以兩分子二四相乘得八分。爲乘出之分子。卽定爲十五分丈之八。爲所得之數也。今以圖明之。如甲乙爲一丈。而甲丁亦爲一丈。作一甲乙丙丁正方形。將甲丁分爲三分。甲乙分爲五分。內共容十五分。卽共母數。乃兩分母三與五乘出之數也。其甲丁之三分之二爲甲戊。甲乙之五分之四爲甲己。二數相乘得甲己庚戊長方形。內容八分。卽共子數。乃兩分子二與四乘出之數也。甲乙丙丁正方與甲己庚戊長方相較。卽知甲己庚戊長方爲甲乙丙丁正方中之十五分之八矣。此零分乘零分之法也。如以眞數明之・其三分丈之二・卽六尺六寸六分六釐有餘也・其五分丈之四・卽八尺也・相乘得五十三尺三十三寸三十三分三十三釐有餘・卽十五分丈之八也・盖一丈正方・內容百尺・分爲十五分・則每一分得六尺六十六寸六十六分六十六

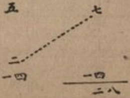


盤有餘・今得其八分・卽五十三尺三十三寸三十三分三十三盤有餘也・

零分與整數相乘者分子乘整數而以分母歸之卽所得之數也。

設如有七人每人賞銀五分兩之二問共得若干。

法以分子二與七人相乘得十四以分母五歸之得二兩八錢卽七人共得之數也蓋五分兩之二是一兩分爲五分而得其二分也一人得二分則七人必共得十四分旣以一兩分爲五分今滿五分收爲一兩故以五歸十四得二兩八錢爲共數此零分與整數相乘之法也。



整數帶零分與整數乘者先將整數俱通爲零分相乘得數以分母自乘之數除之卽得。

設如有整數二丈又四分丈之一與八丈相乘。

問得幾何。

法以整數二丈用分母四通爲八分加入分子一共得九分又以整數八丈用分母四通爲三十二分乃與九分相乘得二百八十八分以分母四自乘之一十六除之得一十八卽定爲一丈正方一十八爲所得之數也此法蓋以一丈

通爲四分是四四自乘之數始合一丈自乘之數故一十六者卽分母四自乘之數未乘之先旣以四通之故相乘之後必以四四自乘之數收之乃得眞數此整數帶零分與整數相乘之法也如以眞數明之其二丈又四分丈之一卽二丈二尺五寸與八丈相乘卽得一十八丈也

整數帶零分與零分乘者先將整數通爲零分相乘得數以分母自乘之數除之卽得

設如有整數二丈又五分丈之四與零分五分丈之三相乘問得幾何

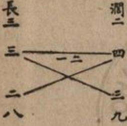
法以整數二丈用分母五通爲十分加入分子四得十四分乃與零分分子三相乘得四十二以分母五自乘之二十五除之得一六八卽定爲一丈正方一又一尺正方六十八爲所得之數也此法葢以一丈通爲五分是五五自乘之數始合一丈自乘之數故以二十五除之又二丈之零分五分之四與所乘之零分五分之三爲同母故用此法如兩零分分母不同則先將兩零分用互乘法變爲同母然後用所變之分母化

整爲零。再與彼一零分相乘得數。以所變之分母自乘之數除之。卽得乘出之數。法見下節。此整數帶零分與零分相乘之法也。如以眞數明之。其二丈又五分丈之四。卽二丈八尺也。其五分丈之三。卽六尺也。以六尺與二丈八尺相乘。卽得一丈六十八尺也。

整數帶零分與整數帶零分相乘。而零分之分母不同者。則以兩零分之分母用互乘法齊其數。然後各以相同之分母化整爲零。兩數相乘。再以同母自乘之數除之。卽得。如所帶零分本爲同母者。可省互乘。

設如有長方田。濶二丈又四分丈之三。長三丈又三分丈之二。求積。

法以兩分母四三相乘得一十二。爲共母數。以前分母四乘後分子二。得八。以後分母三乘前分子三。得九。爲兩分子數。乃以共母數十二化濶二丈爲二十四分。加入分子九。得三十三分。爲濶邊所變之分數。又以共母數十二化長三丈爲三十六分。加入分子八。得四十四分。爲長邊所變之分數。爰以濶三十三分與長四十四分相乘。得一千四百五十二。乃以共母數十二自乘之一百四十四除之。得一〇〇八。餘四八不盡。卽定爲一丈正方十一尺正方八零一百四十四分尺之四十八。約爲三分尺之一。爲所得之數也。此整

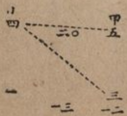


數帶零分與整數帶零分相乘之法也。如以眞數明之。其闊二丈又四分丈之三。卽二丈七尺五寸也。其長三丈又三分丈之二。卽三丈六尺六寸六分六釐有餘也。以二丈七尺五寸與三丈六尺六寸六分六釐有餘相乘。卽得一十丈零八尺有餘也。

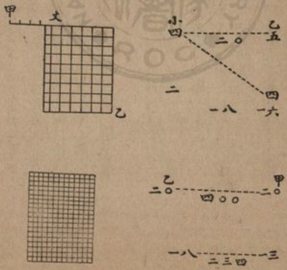
大分下又帶小分相乘者其例有四。所謂大分下帶小分者。是將大分之一分。又分爲幾分。如大分五分之三。又帶小分四分之一。是將大分五分之三之一分。又分爲四分而得其一分也。有大小分母俱同者有大小分母俱不同者有大分母同而小分母不同者有大分母不同而小分母同者今以一法馭之總以小分母通大分母爲母數又以小分母通大分子加入小分子爲子數然後以所變之兩母數兩子數對乘卽得。總以小分母通之者。蓋小分母又爲大分母之每一分之幾分。小分不能使大大分可以變小。使大分母大分子俱變爲小分母一體。然後可以相乘。乘之卽所以通之也。設法中以度數明之。其理自顯。

設如有甲數五分丈之三。又帶此一分之四分之一。與乙數五分丈之四又帶此一分之四分之二相乘。問得幾何。此大小分母俱同者也。

法以甲數小分母四通大分母五。得二十。仍以小分母四通大分子三。得一十二。再加入小分子一。得一十三。共得二十分之十三。爲甲大小分所變之數。又以乙數小分母四通大分母五。得二十。仍以小分母四通大分子四。得一十六。再加入小分子二。得一十八。共得二十分之十八。爲乙大小分所變之數。然後以甲所變之分母二十。與乙所變之分母二十相乘。得四百分。爲乘出之分母。

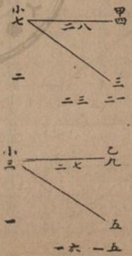


又以甲所變之分子十三與乙所變之分子十八相乘得二百三十四分爲乘出之分子即定爲四百分丈之二百三十四爲所得之數也。此法甲乙之小分母俱爲四。故將其大分母之每分。亦俱化爲四分。又將大分子之每分亦俱化爲四分。使大分與小分之子母一體。然後乘之。今以度數明之。甲之五分丈之三。乃一丈內之六尺。其所帶小分之四分之一。乃二尺內之五寸。是甲數共爲六尺五寸。乙之五分丈之四。乃一丈內之八尺。其所帶小分之四分之二。乃二尺內之一尺。是乙數共爲九尺。六尺五寸與九尺相乘。得五十八尺五十寸。是一丈正方。爲一百尺而得其五十八尺。又小餘五十寸也。若以分母四乘一百尺得四百分。又乘得數五十八尺五十寸。得二百三十四分。故爲四百分之二百三十四也。若以尺隨寸命之。則五十八尺五十寸。又爲五千八百五十寸。以大分每一分通爲小分四分。則每一千寸分爲四分。每分得二百五十寸。以二百五十寸歸五千八百五十寸。得二十三寸四十分。乃四十分中之二十三。又小零分之四分。進而命爲丈。則爲四百分丈之二百三十四也。



設如有甲數四分丈之三又帶此一分之七分之二與乙數九分丈之五又帶此一分之三分之一相乘問得幾何　此大小分母俱不同者也

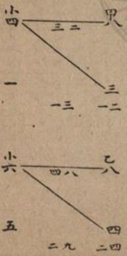
法以甲數小分母七通大分母四得二十八仍以小分母七通大分子三得二十一再加入小分子二得二十三共得二十八分之二十三爲甲大小分所變之數又以乙數小分母三通大分母九得二十七仍以小分母三通大分子五得一十五再加入小分子一得一十六共得二十七分之一十六爲乙大小分所變之數然後以甲所變之分母二十八與乙所變之分母二十七相乘得七百五十六分爲乘出之分母又以甲所變之分子二十三與乙所變之分子一十六相乘得三百六十八分爲乘出之分子卽定爲七百五十六分丈之三百六十八爲所得之數也如以實數明之・甲四分丈之三・卽一丈內之七尺五寸・又帶小分七分之二・卽二尺五寸內之七寸一分四釐二毫有餘・是甲數共爲八尺二寸一分四釐二毫有餘也・乙九分丈之五・卽一



丈內之五尺五寸五分五釐五豪有餘。又帶小分三分之一。卽一尺一寸一分一釐一豪有餘內之三寸七分零三豪有餘。是乙共爲五尺九寸二分五釐九豪有餘也。兩數相乘。得四十八尺六十七寸六十五分有餘。卽七百五十六分丈之三百六十八也。如以七百五十六分。除三百六十八分。亦得四十八尺六十七寸六十五分不盡之數。蓋七百五十六分。爲一百尺。則三百六十八分。自得四十八尺六十七寸六十五分有餘也。

設如有甲數八分丈之三又帶此一分之四分之一與乙數八分丈之四又帶此一分之六分之五相乘。問得幾何　此大分母同。而小分母不同者也。

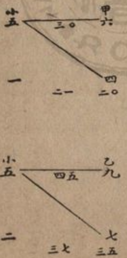
法以甲數小分母四通大分母八得三十二仍以小分母四通大分子三得一十二再加入小分子一得一十三共得三十二分之一十三爲甲大小分所變之數又以乙數小分母六通大分母八得四十八仍以小分母六通大分子四得二十四再加入小分子五得二十九共得四十八分之二十九爲乙大小分所變之數然後以甲所變之分母三十二與乙所變之分母四十八相乘得一千五百三十六分爲乘出之分母又以甲所變之分子十三與乙所變之分子二十九相乘得三百七十七分爲乘出之分子卽定爲一千五百三十六分丈之三百七十七爲所得之數也　如以眞數明之。甲八分丈之三。卽三尺七寸五分。又帶此一分之四分之一。卽三寸一分二釐五豪。是甲數共爲四



尺零六分二釐五毫也．乙八分丈之四．卽五尺．又帶此一分之六分之五．卽一尺零四分一釐六毫有餘．是乙數共爲六尺零四分一釐六毫有餘也．兩數相乘．得二十四尺五十四寸四十二分有餘．卽一千五百三十六分丈之三百七十七也．如以一千五百三十六分．除三百七十七分．亦得二十四尺五十四寸四十二分不盡之數．蓋一千五百三十六分．爲一百尺．則三百七十七分．自得二十四尺五十四寸四十二分有餘也．

設如有甲數六分丈之四又帶此一分之五分之一與乙數九分丈之七又帶此一分之五分之二相乘問得幾何此大分母不同．而小分母同者也．

法以甲數小分母五通大分母六得三十仍以小分母五通大分子四得二十再加入小分子一得二十一共得三十分丈之二十一爲甲大小分所變之數又以乙數小分母五通大分母九得四十五仍以小分母五通大分子七得三十五再加入小分子二得三十七共得四十五分之三十七爲乙大小分所變之數然後以甲所變之分母三十與乙所變之分母四十五相乘得一千三百五十分爲乘出之分母又以甲所變之分子二十一與乙所變之分子三十七相乘得七百七十七分爲乘出之分子卽定爲一千三百五十分之七百七十七爲所得之數也如以眞數



明之。甲六分丈之四。卽六尺六寸六分六釐六毫有餘。又帶此一分之五分之一。卽三寸三分三釐三毫有餘。是甲數共爲六尺九寸九分九釐九毫有餘也。乙九分丈之七。卽七尺七寸七分七釐七毫有餘。又帶此一分之五分之二。卽四寸四分四釐四毫有餘。是乙數共爲八尺二寸二分二釐二毫有餘也。兩數相乘。得五十七尺五十五寸五十五分有餘。卽一千三百五十分丈之七百七十七也。如以一千三百五十分。除七百七十七分。亦得五十七尺五十五寸五十五分不盡之數。蓋一千三百五十分。爲一百尺。則七百七十七分。自得五十七尺五十五寸五十五分有餘也。

甲 乙
三〇——四五
一三五〇

二一——三七
七七七

除法

零分歸除零分者。兩分母兩分子各自除之。所得之數。卽除出之分也。如有奇零不盡者。用互乘法齊之。卽得分數。其比例與除出之法同。

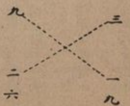
設如有九分丈之二。以三分丈之一除之。求得幾何。

法以九分丈之二爲實。三分丈之一爲法。以法分母三。除實分母九。得三。爲除出之分母。又以法分子一。除實分子二。仍得二。爲除出之分子。卽定爲三分丈之二爲所得之數也。此法卽乘法內兩分母兩分子各相乘爲所得之數者轉用之耳。此零分除零分之法也。

又法以互乘代除。以實分母九。乘法分子一。得九。爲除出之分母。又以法分母三。乘

三——三——九
一——二——二

實分子二得六爲除出之分子共得九分丈之六即所求之數也此法與前法所得之分母分子之數雖不同而理則一前法之三分之二與此法之九分之六其比例實同蓋前法以法除實其得數爲減分之比例此法以兩數互乘其得數爲加分之比例故九分之六即三分之二也但法中不用兩分母相乘之數省去一層耳如欲明晰其故則以兩分母九與三相乘得二十七法分母三與實分子二相乘得六實分母九與法分子一相乘得九是將三分之一變爲二十七分之九將九分之二變爲二十七分之六其兩分母既等則其兩分子自成比例故九與六之比即同於三與二之比九分之六以三約之非三分之二耶如以眞數明之・實九分丈之二爲面積・即二十二尺二十二寸二十二分二十二釐有餘也・法三分丈之一爲邊綫・即三尺三寸三分三釐有餘也・除之得六尺六寸六分六釐有餘・即三分丈之二也・如以三分除二分・亦得六尺六寸六分六釐不盡之數・蓋三分爲一丈・其二分自得六尺六寸六分六釐有餘也・



整數歸除零分者分母通整數以除分子即得所求之數

設如有五分丈之三以八丈除之求得幾何

法以分子三爲實以分母五通整數八丈得四十爲法除之得七寸五分即所求之數也此法以五分乘八丈者是分母通整數將每丈俱通爲五分也八丈既通爲四十分則五分之三之每一分即與四十分中之每一分同等然而零

數三分以四十分除之而得七寸五分者。則又爲變分爲尺寸之比例矣。四十分與一丈之比。卽同於三分與七寸五分之比。此整數除零分之法也。

零分歸除整數者。分母通整數。而以分子除之。卽得所求之數。

設如有六丈。以三分丈之二除之。求得幾何。

法以分母三通整數六丈。得一十八爲實。以分子二爲法除之。得九丈。卽所求之數也。此法以三分乘六丈者。是將每丈俱通爲三分也。六丈旣通爲十八分。則十八分中之每一分與三分之二之每一分同等。故以分子二除十八。得九丈。此零分除整數之法也。

整數帶零分歸除整數者。先將法實之兩整數俱通爲零分。而於法中加入分子除之。卽得。

設如有二十四丈。以二丈零三分丈之二除之。求得幾何。

法以分母三通二十四丈。得七十二爲實。又以分母三通二丈得六。加入分子二得八爲法。除之得九丈。卽所求之數也。此法以分母三通實二十四丈。是將實之每丈俱化爲三分也。又以分母三通法二丈。是將法之每丈亦俱化爲三分也。兩整數俱化爲同等。則法實一體。故法除實而得所求之數也。此整數帶零分除整數之法也。

整數歸除整數帶零分者。先將法實之兩整數俱通爲零分。而於實中加入分子。以法除之。卽得。

設如有二丈零三分丈之二。以二十四丈除之。求得幾何。卽以前法數目作題者。取其易明也。

法以分母三通二十四丈得七十二爲法。又以分母三通二丈得六。加入分子二得八爲實。以法除之。得一尺

一寸一分不盡約爲九分丈之一即所求之數也此法以分母三通法實之兩整數者是將兩整數之每丈俱通爲三分也一得七十二分一得八分以七十二與八之比即同於九與一之比故約爲九分之一且以七十二除八得一一一不盡之數定爲一尺一寸一分有餘者蓋七十二分與一丈之比即同於八分與一尺一寸一分有餘之比也此整數除整數帶零分之法也

整數帶零分歸除零分者先將整數通爲零分加入分子除之即得

設如有五分丈之四以三丈零八分丈之一除之求得幾何

法以五分丈之四爲實以法之分母八通三丈得二十四加入分子一得二十五共得八分丈之二十五爲法用兩分母兩分子各自歸除之法以法分母八除實分母五得六二五爲除出之分母以法分子二五除實分子四得一六〇爲除出之分子乃以所得之分母除所得之分子得二尺五寸六分即所求之數也蓋法之三丈又八分丈之一乃三丈一尺二寸五分也實之五分丈之四乃八尺也以三丈一尺二寸五分歸除八尺每丈得二尺五寸六分是三丈一

尺二寸五分與一丈之比卽同於八尺與二尺五寸六分之比也今以分母六二五除分子一六〇亦得二尺五寸六分是六二五與一丈之比卽同於一六〇與二尺五寸六分之比也然六二五與三丈一尺二寸五分之比又卽同於一六〇與八尺之比而皆爲加倍之比例也此整數帶零分除零分之法也又或整數通爲零分加入分子之後以法除實而數有奇零不盡者則用互乘代除之法如前數已將整數通爲八分丈之二十五爲法乃以實分母五乘法分子二十五得一百二十五爲除出之分母又以法分母八乘實分子四得三十二爲除出之分子乃以所得之分母除所得之分子亦得二尺五寸六分蓋一百二十五分與一丈之比卽同於三十二分與二尺五寸六分之比也後法之有奇零數而用互乘代除者皆同此例

零分歸除整數帶零分者先將整數通爲零分加入分子以法除之卽得

設如有四丈又三分丈之二以七分丈之四除之求得幾何

法以實之分母三通四丈得十二加入分子二得十四共得三分丈之十四爲實以七分丈之四爲法用互乘代除之法以實分母三乘法分子四得十二爲除出之分母以法分母七乘實分子一十四得九十八爲除出之分子乃以所得之分母除所得之分子得八尺仍餘二不盡命爲十二分尺之二以法約之爲六分尺之一共得八尺零六分尺之一卽所求之數也蓋十二與一尺之比卽同於九十八與八尺有餘之比也此零分除整數帶零分之法也

整數帶零分歸除整數帶零分者先各以整數通爲零分加入分子而以法除實卽得

設如有田五畝又三分畝之二共租銀五兩又二十七分兩之一求每畝得租銀幾何

法以銀分母二十七通五兩得一百三十五加入分子一得一百三十六共得二十七分兩之一百三十六爲實又以田分母三通五畝得十五加入分子二

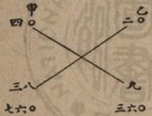
得十七共得三分畝之十七爲法用互乘代除之法以銀分母二十七乘田分子一十七得四百五十九爲除出之分母以田分母三乘銀分子一百三十六得四百零八爲除出之分子乃以所得之分母除所得之分子得八錢八分八釐零四百五十九分釐之四百零八即每畝所租之銀數也葢四五九與一兩之比即同於四〇八與八錢八分八釐有餘之比也此整數帶零分除整數帶零分之法也

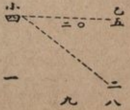
大零分下又帶小零分相除者其例有四有大小分母俱同者・有大小分母俱不同者・有大分母同而小分母不同者・有大分母不同而小分母同者・今以一法馭之總以小分母通大分母爲母數又以小分母通大分子加入小分子爲子數然後以所變之子母數用互乘代除之法歸之即得如用子母各自對除亦得・但恐數有奇零・故用此法・

設如有甲八分丈之七又帶此一分之五分之三以乙五分丈之二又帶此一分之四分之一除之求得幾何

法以甲小分母五通大分母八得四十仍以小分母五通大分子七得三十五再加入小分子三得三十

八共得四十分丈之三十八爲甲大小分所變之數以之爲實又以乙小分母四通大分母五得二十仍以小分母四通大分子二得八再加入小分子一得九共得二十分丈之九爲乙大小分所變之數以之爲法然後用互乘代除之法以甲所變之分母四十乘乙所變之分子九得三百六十爲除出之分母又以乙所變之分母二十乘甲所變之分子三十八得七百六十爲除出之分子乃以所得之分母三百六十除所得之分子七百六十得二尺一寸一分一釐零三百六十分釐之四十約爲九分釐之一即所求之數也葢三六〇與一尺之比即同於七六〇與二尺一寸一分一釐有餘之比也此大零分下帶小零分相除之法也其分母分子俱同。及分母同而分子不同。分母不同而





分子同者・皆用此例・故不重設・

數理精蘊下編卷三

線部一

比例

凡物彼此相形。並之而用加。較之而用減。聚之而用乘。散之而用除。觀之不過兩率。然乘除之間四率之理。已默寓其中。如因乘命法曰人幾何。每人得物幾何。求總物幾何。則是每一人得物幾何與幾何人共得物幾何。相比而成四率。乃自小而得大者也。如歸除命法曰有物幾何。命幾何人分之。每人得物幾何。則是共人幾何共物幾何。與每一人得物幾何。相比而成四率。乃自大而得小者也。蓋因命數以一人爲法。故乘與除各省其率耳。是雖名爲乘除。而實爲相比之四率也。至於比例正法。則所該甚廣。大而推步七政天行。測量高深廣遠。小而量功命事。度大移小。無一非由比例而得。蓋以兩數爲比例。用今有之數。即可以得未有之數也。比例之理。雖分相連相當二種。而相當比例之中。實又兼相連比例。相當比例。一率比二率、如三率比四率。而相連比例。首率比中率、若中率比末率者。即是中率爲二率而又爲三率也。盡人皆知。綫有綫之比例。面有面之比例。體有體之比例。殊不知差分盈朒方程借衰疊借之類。正皆比例之屬也。然此類中有合數之比例。分數之比例。均數之比例。借數之比例。非條分縷析各項專論。則不備。故仍舊各自爲類。而獨於比例中最切者。詳明其理以列法焉。其法一名異乘同除。或名爲準測・或名爲

順單・以原有之兩件相除。故爲同除。以今有之一件乘之。故爲異乘。如先乘而後除亦同・而今則賓言之曰正比例。蓋以原有之兩件爲一率二率。以今有之一件爲三率。而所求之一件則爲四率也。一名爲同乘異除。或名爲變測・或名爲互視・或名爲逆單・以原有之兩件相乘。故爲同乘。以今有之一件除之。故爲異除。而今則賓言之曰轉比例。蓋以原有之兩件爲二率三率。以今有之一件爲一率。而所求之一件則爲四率也。然論其乘除之名雖異。究其比例之理則一而已。今以數明之。如原有之兩數爲二與四。今有之一數爲八。以原有之二作一率。原有之四作二率。今有之八作三率。卽得今所求之四率爲十六。而一率二與二率四之比。卽三率八與四率十六之比。爲相當之比例也。如原有之兩數爲八與四。今有之一數爲十六。以原有之八作二率。原有之四作三率。今有之十六作一率。卽得今所求之四率爲二。而一率十六與二率八之比。卽三率四與四率二之比。或以一率十六與三率四之比。卽同於二率八與四率二之比。皆爲相當之比例也。總之乘除之名有異同。四率之列有更換。而既成比例之後。其理無不歸於大同。由此引伸觸類。推而廣之。有合幾四率而爲一四率者。則名爲同乘同除。或名爲重測・或名爲順轉逆轉・而今則賓言之曰合率比例。蓋其理亦不過合幾乘而爲一乘。合幾除而爲一除。各按四率。參互錯綜。豈能出於比例之外哉。凡此各種比例。俱設數例於後。以明立法之根。加之解說。以廣用法之意。

正比例

設如有銀買米．每米一石銀八錢．今買米二百四十石．問共該銀若干．

法以米一石爲一率．銀八錢爲二率．今買米二百四十石爲三率．二三率相乘．一率除之．得四率一百九十二兩．卽共銀數也．蓋一石與二百四十石爲加二百四十倍．而八錢與一百九十二兩亦爲加二百四十倍．見幾何原本六卷第十五節・故一石與八錢之比．卽同於二百四十石與一百九十二兩之比也．此法一率是一・止用八錢乘二百四十石亦得・但爲明正比例之理・故首設一二易法・使人好推尋也・

一率	一石
二率	八錢
三率	二百四十石
四率	一百九十二兩

設如有銀買米．每銀一兩買米一石三斗．今有銀三百二十兩．問共買米若干．

法以銀一兩爲一率．米一石三斗爲二率．今銀三百二十兩爲三率．二三率相乘．一率除之．得四率四百一十六石．卽共米數也．蓋一兩與一石三斗之比．卽同於三百二十兩與四百一十六石之比也．

一率	一兩
二率	一石三斗
三率	三百二十兩
四率	四百一十六石

設如有銀賞人．每三人賞銀一兩八錢．今有二百四十八人．問共該銀若干．

法以三人爲一率。一兩八錢爲二率。今有二百四十八人爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率一百四十四兩。卽共銀數也。蓋三人與一兩八錢之比。卽同於二百四十八人與一百四十四兩之比也。

一率	三人
二率	一兩八錢
三率	二百四十八人
四率	一百四十四兩

設如有穀換米。每穀一石四斗。換米八斗四升。今有穀三十二石六斗八升。問換米若干。

法以穀一石四斗爲一率。米八斗四升爲二率。今有穀三十二石六斗八升爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率一十九石六斗零八合。卽所換共米數也。蓋穀一石四斗與米八斗四升之比。卽同於穀三十二石六斗八升與米一十九石六斗零八合之比也。

一率	穀一石四斗
二率	米八斗四升
三率	穀三十二石六斗八升
四率	米一十九石六斗零八合

設如天上二度。當地面四百里。今七度。該里數若干。

法以原有之二度爲一率。四百里爲二率。今有之七度爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率一千四百里。卽七度之里數也。蓋一率二與二率四之比。爲加一倍。而三率七與四率十四之比。亦爲加一倍。故二率得一率中之幾分之幾。則四率亦得三率中之幾分之幾。而爲相當比例四率也。

一率	二度
二率	四百里
三率	七度
四率	一千四百里

設如一星一日內行一度三十分。今問八刻內應行若干。

法以原數一日變作九十六刻爲一率。一度三十分變作九十分一度作六十分。加入三十分。共九十分。爲二率。今星行八刻爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率七分半。卽八刻內所行之數。蓋九十六刻與九十分之比。卽同於八刻與七分半之比也。然將日變爲刻者。因每日九十六刻。不以十進位。又今所有者爲八刻。故以刻數與刻數相比也。度變爲分者。因每度六十分。亦不以十進位。而今八刻內所行者必爲分。故以分數與分數相比也。

一率	九十六刻
二率	九十分
三率	八刻
四率	七分半

設如驗時儀算砲聲自烟起至聞聲。計七秒。得五里。今得十四秒。問里數若干。

法以七秒爲一率。五里爲二率。今得十四秒爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率十里。卽十四秒之里數也。蓋七秒與五里之比。卽同於十四秒與十里之比也。

一率	七秒
二率	五里
三率	十四秒
四率	十里

設如有羊四百六十隻。共賣銀八十二兩八錢。問每羊一隻價銀幾何。

法以羊四百六十隻爲一率。銀八十二兩八錢爲二率。羊一隻爲三率。推得四率一錢八分。卽每羊一隻之價也。此法三率是一。止用羊四百六十

一率	四百六十隻
二率	八十二兩八錢
三率	一隻
四率	一錢八分

隻歸除八十二兩八錢亦得。但列四率法中。不得不備其一體也。

設如有羊一羣共二百四十隻又生羔七十二隻問加羊羣內十分之幾

法以羊二百四十隻爲一率十分爲二率今生羔七十二隻爲三率推得四率三分卽爲加羊羣內十分之三也蓋二百四十與十分之比卽同於七十二與三分之比若將二百四十作十分每分得二十四將羊羔七十二作三分每分亦得二十四總而約之故爲十分之三也

一率	二百四十隻
二率	十分
三率	七十二隻
四率	三分

設如有田科糧每三畝科糧八斗四升今有四千六百三十五畝問得糧若干

法以三畝爲一率八斗四升爲二率今有四千六百三十五畝爲三率推得四率一千二百九十七石八斗卽所得共糧數也蓋三畝與八斗四升之比卽同於四千六百三十五畝與一千二百九十七石八斗之比也

一率	三畝
二率	八斗四升
三率	四千六百三十五畝
四率	一千二百九十七石八斗

設如用古量法豆區釜皆以四進有八十豆當二十區有二十區當釜若干

法以八十豆爲一率二十區爲二率又爲三率推得四率五釜卽二十

一率	八十豆
二率	二十區
三率	二十區
四率	五釜

區所當釜數也。此正比例中相連比例法也。蓋因二十區與二十區相乘。得四百區。而八十豆與五釜相乘。亦得四百區。二十區既爲二率。又爲三率。故謂相連比例。是以八十豆與二十區之比。卽同於二十區與五釜之比也。

設如一商原有本銀三千兩。一年得利銀九百兩。今復將九百兩爲本。

問一年得利若干。

法以三千兩爲一率。九百兩爲二率。又爲三率。推得四率二百七十兩。卽九百兩所得之利也。此法以九百兩爲二率。又爲三率。蓋三千兩與九百兩之比。爲三與九之比例。而九百兩與二百七十兩之比。亦爲三與九之比例也。

一率	三千兩
二率	九百兩
三率	九百兩
四率	二百七十兩

轉比例

設如有田一畝。原闊八步。長三十步。今闊要十二步。問長得幾何。

法以今闊十二步爲一率。原長三十步爲二率。原闊八步爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率二十步。即今闊十二步之長也。此法以原有之兩數相乘。以今有之一數除之。而得今所求之數者。因乘出兩數相同故也。在正比例。原有之兩件爲一率二率。今有之一件爲三率。而今所求之一件爲四率。俱以原有之一件與今有之一件相乘。其積相同。在轉比例。則原有之兩件爲二率三率。今有之一件爲一率。而今所求之一件爲四率。是原有之兩件相乘。今有之兩件相乘。其積相同。此兩法異同之故也。雖今闊比原闊多。而今長卻比原長少。故原有之闊八步。與長三十步。相乘得二百四十步。而今有之闊十二步。與長二十步。相乘亦得二百四十步。其積既同。是以轉而比之。自成比例。蓋今闊比原闊多三分之一。今長比原長少三分之一。其比例相同。見幾何原本七卷第三節。故今闊十二步與原闊八步之比。即同於原長三十步與今長二十步之比也。若借正比例論之。以原闊八步爲一率。原長三十步爲二率。今闊十二步爲三率。二三率相乘。一率除之。得四率四十五步。則是今闊比原闊多。今長亦比原長多。所容積數亦多。而與一畝之數不合矣。故轉以今闊十二步爲一率。原長三十步爲二率。原闊八步爲三率。而得四率二十步。

一率	今闊十二步
二率	原長三十步
三率	原闊八步
四率	今長二十步

是爲一率與三率之比同於二率與四率之比也

設如有地寬二十丈長一百二十丈今換地寬三十丈問長得幾何

法以今寬三十丈爲一率原長一百二十丈爲二率原寬二十丈爲三率二三率相乘一率除之得八十丈卽今寬三十丈之長也此法原有之寬與長相乘得二千四百丈今有之寬與長相乘亦得二千四百丈其積旣同故轉而比之自成比例以今寬比原寬以原長比今長俱三與二之比例是以今寬三十丈與原寬二十丈之比卽同於原長一百二十丈與今長八十丈之比也

一率	今寬三十丈
二率	原長一百二十丈
三率	原寬二十丈
四率	今長八十丈

設如傭工開渠八人開之二十日完今加倍用十六人開之問得幾日完

法以今十六人爲一率原二十日爲二率原八人爲三率二三率相乘一率除之得四率十日卽十六人完工之日也此法因工少而用日多故加人使工多而用日少蓋今十六人與原八人之比卽今之工加一倍而原二十日與今十日之比則今所得之日亦必減一倍故一率十六人與三率八人之比卽同於二率二十日與四率十日之比也

一率	今十六人
二率	原二十日
三率	原八人
四率	今十日

設如有地四百八十畝八人耕之十二日完今用六人耕之問得幾日完

法以今六人爲一率原十二日爲二率原八人爲三率二三率相乘一率除之得四率十六日卽六人耕

完之日也。此法人數日數不同，而所耕之田則同爲四百八十畝。而所用之工又同爲九十六。故以八人論，一日八工，十二日則用九十六工。以六人論，一日六工，十六日亦用九十六工也。故轉用四率自成比例。以一率六人與三率八人之比，卽同於二率十二日與四率十六日之比也。

一率	今六人
二率	原十二日
三率	原八人
四率	今十六日

設如衆軍支米足用四年，則每人每月支米三斗。今欲將四年之米足用十二年，問每人每月應支幾何。

法以今欲用十二年爲一率，原支米三斗爲二率，足用四年爲三率，二三率相乘，一率除之，得四率一斗，卽足用十二年每人每月應支之數也。此法支米多則足用年數少，今支米少則足用年數多。蓋四年與十二年之比，在年爲加三分之二；而三斗與一斗之比，在米又爲減三分之二，其比例固同也。

一率	今十二年
二率	原三斗
三率	原四年
四率	今一斗

設如木星十二年一周天，每年行三十度。七星則二十八年一周天，問每年行幾度。

法以七星所行一周二十八年爲一率，木星每年所行三十度爲二率，木星所行一周十二年爲三率，二三率相乘，一率除之，得四率十二度五十一分二十五秒有餘，卽土星每年所行之度數也。蓋木星

一率	土一周二十八年
二率	木每年行三十度
三率	木一周十二年
四率	土每年行十二度餘

周天比土星年數少而行度卻多土星周天比木星年數多而行度卻少多得少而少反得多故轉而比之以二十八年與十二年之比即同於三十度與十二度有餘之比也」

設如一人借人之絹寬三尺長二十四丈今還絹寬四尺問長該若干」

法以今絹寬四尺爲一率原絹長二十四丈爲二率原絹寬三尺爲三率二三率相乘一率除之得四率十八丈即爲今所還寬四尺絹之長也蓋原絹寬三尺長二十四丈相乘得七百二十尺今絹寬四尺長十八丈相乘亦得七百二十尺因其積數相同故今絹寬四尺與原絹寬三尺之比即同於原絹長二十四丈與今絹長十八丈之比也

一率	今寬四尺
二率	原長二十四丈
三率	原寬三尺
四率	今長一十八丈

設如驗時儀墜子其繩長四尺四寸八分一釐二毫八絲四刻內來往共三千次今造一墜欲使來一秒往一秒問繩長若干

法以四刻化三千六百秒爲今墜子往來次數自乘得一千二百九十六萬次爲一率原墜繩長四尺四寸八分一釐二毫八絲爲二率以原墜往來三千次自乘得九百萬次爲三率二三率相乘一率除之得四率三尺一寸一分二釐即今所求墜繩之長也夫以四刻化秒者蓋以所求之墜子欲其來一秒往一秒也故秒數即次數四刻所化之秒即今墜子在四刻內往來之次數也其比例以次數自

一率	今一千二百九十六萬次
二率	原四尺四寸八分一釐二毫八絲
三率	原九百萬次
四率	今三尺一寸一分二釐

乘者因墜子往來之際已成平面形故以往來之方數相比爲面比面而原墜與今墜之長數相比爲線比線務使其類相當而後可以相比也是以今墜往來次數自乘與原墜往來次數自乘之比即同於原墜長數與今墜長數之比也然原墜於四刻內往來之次數少而墜御長今墜於四刻內往來之次數多而墜御短故以今墜之往來次數與原墜之往來次數爲比即同於原墜之長與今墜之長爲比所以爲轉比例也

設如有正方池一面每邊十二丈今欲作寬八丈之池使其池面積數與方池等問長得幾何

法以今池寬八丈爲一率原池長十二丈爲二率原池寬十二丈爲三率推得四率十八丈即今欲作池之長也此轉比例中相連比例法也蓋原池方面每邊十二丈其積一百四十四丈即二率三率相乘之數今所得四率長十八丈與一率寬八丈相乘亦得一百四十四丈兩數相等故以一率今池寬八丈與三率原池寬十二丈之比即同於二率原池長十二丈與四率今池長十八丈之比也

一率	今寬八丈
二率	原長十二丈
三率	原寬十二丈
四率	今長十八丈

設如原用金九兩係九成今用八成金折還當加幾兩

法以今金八成爲一率原金九兩爲二率原金九成爲三率推得四率十兩零一錢二分五釐內減九兩餘一兩一錢二分五釐即八成金當加之數也此法二率三率爲體雖不同而數則一故亦爲相連

一率	今八成
二率	原九兩
三率	原九成
四率	今十兩零一錢二分五釐

比例蓋以原金九兩又係九成相乘得十成金八兩一錢以今之八成與所得十兩零一錢二分五釐相乘亦得十成金八兩一錢是八成與九成之比卽同於九兩與十兩零一錢二分五釐之比也

合率比例

設如以夏布換棉布但知每夏布三丈價銀二錢每棉布七丈價銀七錢五分今有夏布四十五丈問換棉布若干

法以夏布三丈與棉布價銀七錢五分相乘得二兩二錢五分爲一率夏布價銀二錢與棉布七丈相乘得一兩四錢爲二率夏布四十五丈爲三率推得四率二十八丈即夏布四十五丈所換之棉布數也此法乃兩比例合爲一比例也如分作兩比例明之每夏布三丈價銀二錢今夏布四十五丈則價銀應得三兩此一比例也棉布價銀七錢五分得棉布七丈今夏布四十五丈之價三兩則應得棉布二十八丈此又一比例也夫銀三兩原爲夏布四十五丈之價則夏布四十五丈所換之棉布二十八丈價銀亦應三兩可知矣蓋兩比例中一以三丈作一率一以七錢五分作一率故三丈與七錢五分相乘得二兩二錢五分而爲一率是合兩一率而爲一一率也一以二錢作二率一以七丈作二率故二錢與七丈相乘得一

總

一率	二兩二錢五分
二率	一兩四錢
三率	夏布四十五丈
四率	棉布二十八丈

一

一率	夏布三丈
二率	銀二錢
三率	夏布四十五丈
四率	銀三兩

二

一率	銀七錢五分
二率	棉布七丈
三率	銀三兩
四率	棉布二十八丈

兩四錢而為二率是合兩二率而為一二率也而後比例之三率即前比例之四率如以兩三率相乘為三率則所得四率亦為兩四率相乘之數必須以前比例之四率除之方得後比例之四率故即以夏布之四十五丈為三率而得棉布之二十八丈為四率也

設如以芝麻換黃米但知每芝麻三石換菉豆五石每菉豆四石換黃米三石今有芝麻五十四石問換黃米若干

法以芝麻三石與菉豆四石相乘得十二石為一率又以菉豆五石與黃米三石相乘得十五石為二率芝麻五十四石為三率推得四率六十七石五斗即芝麻五十四石所換之黃米數也此法亦兩比例合為一比例也如

總

一率	十二石
二率	十五石
三率	芝蔴五十四石
四率	黃米六十七石五斗

一

一率	芝蔴三石
二率	菉豆五石
三率	芝蔴五十四石
四率	菉豆九十石

二

一率	菉豆四石
二率	黃米三石
三率	菉豆九十石
四率	黃米六十七石五斗

分作兩比例明之每芝麻三石換菉豆五石則芝麻五十四石必換菉豆九十石此一比例也菉豆四石換黃米三石則菉豆九十石必換黃米六十七石五斗此又一比例也夫菉豆九十石原為芝麻五十四石所換則菉豆九十石所換之黃米即芝麻五十四石所換之黃米可知矣蓋以兩比例之各一率相乘為一率兩比例之各二率相乘為二率者即合兩次乘除為一次乘除也

設如養兵七百名每年額餉一萬二千六百兩內有新募伍兵三百名已應役七個月問該餉銀若干

法以原養兵七百名與十二個月相乘得八千四百爲一率額餉一萬二千六百兩爲二率新兵三百名與七個月相乘得二千一百爲三率推得四率三千一百五十兩卽兵三百名七個月應得之餉銀數也此法亦兩比例合爲一比例也如分作兩比例明之兵七百名得一萬二千六百兩則兵三百名應得五千四百兩（乃兵三百名十二個月應得之數）此一比例也兵三百名十二個月應得五千四百兩則七個月應得三千一百五十兩此又一比例也今以兩比例之各一率相乘爲一率兩比例之各三率相乘爲三率者亦如兩比例之各一率二率相乘合爲一率二率也

二	
一率	十二個月
二率	五千四百兩
三率	七個月
四率	三千一百五十兩

一	
一率	七百兵
二率	一萬二千六百兩
三率	三百兵
四率	五千四百兩

總	
一率	八千四百
二率	一萬二千六百兩
三率	二千一百
四率	三千一百五十兩

設如原有鵝八隻換雞二十隻又雞三十隻換鴨九十隻又鴨六十隻換羊二隻今有羊五隻問換鵝幾何

法以所換羊二隻與所換鴨九十隻相乘得一百八十隻再以所換雞二十隻乘之得三千六百隻爲一率又以原鴨六十隻與原雞三十隻相乘得一千八百隻又以原鵝八隻乘之得一萬四千四百隻爲二

率今羊五隻爲三率推得四率二十隻卽羊五隻所換之鵝數也此法乃三比例合爲一比例也如分作三比例明之羊二隻換鴨六十隻則羊五隻必換鴨一百五十隻此一比例也鴨九十隻換雞三十隻則鴨一百五十隻必換雞五十隻此二比例也雞二十隻換鵝八隻則雞五十隻必換鵝二十隻此三比例也夫雞五十隻原爲鴨一百五十隻之所換而鴨一百五十隻又原爲羊五隻之所換則雞五十隻所換之鵝二十隻卽爲羊五隻之所換可知矣今以三比例之各一率連乘之爲一率又以三比例之各二率連乘之爲二率者正合三比例爲一比例也

總

一率	三千六百隻
二率	一萬四千四百隻
三率	羊五隻
四率	鵝二十隻

一

一率	羊二隻
二率	鴨六十隻
三率	羊五隻
四率	鴨一百五十隻

二

一率	鴨九十隻
二率	雞三十隻
三率	鴨一百五十隻
四率	雞五十隻

三

一率	雞二十隻
二率	鵝八隻
三率	雞五十隻
四率	鵝二十隻

設如原有菽三斗換黍二斗又黍四斗換稷三斗又稷五斗換稻四斗又稻六斗換麥五斗今有麥七斗問換菽幾何

法以所換麥五斗與所換稻四斗相乘得二石復以所換稷三斗乘之得六石再以所換黍二斗乘之得一十二石爲一率又以原有稻六斗與原有稷五斗相乘得三石復以原有黍四斗乘之得一十二石再

以原有菽三斗乘之。得三十六石爲二率。今有麥七斗爲三率。推得四率二石一斗。卽麥七斗所換之菽數也。此合四比例爲一比例也。如分作四比例明之。麥五斗換稻六斗。則麥七斗必換稻八斗四升。此一比例也。稻四斗換稷五斗。則稻八斗四升必換稷一石零五升。此二比例也。稷三斗換黍四斗。則稷一石零五升必換黍一石四斗。此三比例也。黍二斗換菽三斗。則黍一石四斗必換菽二石一斗。此四比例也。夫黍一石四斗。原爲稷一石零五升之所換。而稷一石零五升。又爲稻八斗四升之所換。而稻八斗四升。又爲麥七斗之所換。則黍一石四斗所換之菽二石一斗。卽爲麥七斗之所換可知矣。今以四比例之各一率連乘之爲一率。又以四比例之各二率連乘之爲二率者。正合四比例爲一比例也。

總

一率	一十二石
二率	三十六石
三率	麥七斗
四率	菽二石一斗

一

一率	麥五斗
二率	稻六斗
三率	麥七斗
四率	稻八斗四升

二

一率	稻四斗
二率	稷五斗
三率	稻八斗四升
四率	稷一石零五升

三

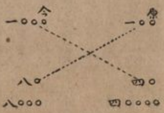
一率	稷三斗
二率	黍四斗
三率	稷一石零五升
四率	黍一石四斗

四

一率	黍二斗
二率	菽三斗
三率	黍一石四斗
四率	菽二石一斗

設如原有工人一百。開河四十丈。二十日工完。今有工人一千。開河八十丈。問得日數幾何。

法以今有工人一千與原開河四十丈相乘得四萬丈爲一率二十日爲二率以原有工人一百與今開河八十丈相乘得八千丈爲三率推得四率四日即一千人開河八十丈之日數也此法以原有今有兩數互乘以比例者所以齊其分也試將兩首位一千工與一百工互乘得十萬工然後互乘丈數原有一邊得四萬丈今有一邊得八千丈是原一百工開四十丈則十萬工開四萬丈其比例相同今一千工開八十丈則十萬工開八千丈其比例亦同也因兩工數相同故以四萬丈與二十日之比即同於八千丈與四日之比蓋原有十萬工開河四萬丈二十日可完今亦有十萬工開河八千丈則四日可完爲比例四率也然此法實係兩比例合爲一比例也如分作兩比例明之則先以人工爲比例原一百工開二十日今一千工即應開二日爲今一千工開河四十丈之日數此一轉比例也次用丈數爲比例原四十丈應開二日今八十丈則應開四日爲今一千工開河八十丈之日數此一正比例也法以



總

一率	四萬丈
二率	二十日
三率	八千丈
四率	四日

一

一率	今一千工
二率	原二十日
三率	原一百工
四率	今二日

二

一率	原四十丈
二率	原二日
三率	今八十丈
四率	今四日

兩比例之一率相乘爲一率兩比例之三率相乘爲三率者正合兩比例爲一比例也

設如原有書一百篇六人寫之十日完每篇三百字今有書二百篇八人寫之十二日完問每篇得字者干

法以今有二百篇與原有六人相乘得一千二百又以原有十日乘之得一萬二千爲一率每篇三百字爲二率以原有一百篇與今有八人相乘得八百又以今有十二日乘之得九千六百爲三率推得四率二百四十字即今八人寫十二日每篇之字數也試將兩首位一百篇與二百篇互乘得二萬篇然後互乘人工與日原有一邊得一萬二千工今有一邊得九千六百工蓋原有二萬篇用一萬二千工每篇三百字今亦有二萬篇用九千六百工其每篇必二百四十字爲比例四率也然此法實係三比例合爲一比例也如分作三比例明之則先以篇數爲比例原一百篇每篇三百字今勻

原	今
一〇〇	二〇〇
六	八
一二〇〇	八〇〇
一〇	一二
一二〇〇〇	九六〇〇

總

一率	一萬二千工
二率	三百字
三率	九千六百工
四率	二百四十字

二

一率	原六人
二率	原一百五十字
三率	今八人
四率	今二百字

一

一率	今二百篇
二率	原三百字
三率	原一百篇
四率	今一百五十字

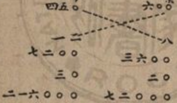
三

一率	原十日
二率	原二百字
三率	今十二日
四率	今二百四十字

爲二百篇則每篇只應一百五十字此一轉比例也然人數不同故次以人數爲比例原六人寫之每篇應一百五十字今八人寫之則每篇應二百字此一正比例也然日數又不同故次以日數爲比例原寫十日每篇應二百字今寫十二日則每篇應二百四十字此又一正比例也法以三比例之各一率連乘之爲一率三比例之各三率連乘之爲三率者正合三比例爲一比例也

設如原雇人寫書每篇六百字八人寫二十日得一百二十篇今寫書每篇四百五十字卻用十二人寫三十日問得篇數幾何

法以今有四百五十字與原有八人相乘得三千六百又以原有二十日乘之得七萬二千爲一率一百二十篇爲二率以原有六百字與今有十二人相乘得七千二百又以今有三十日乘之得二十一萬六千爲三率推得四率三百六十篇即今十二人寫三十日之篇數也試將兩首位六百字與四百五十字互乘得二十七萬字然後互乘人工與日原有一邊得七萬二千工今有一邊得二十一萬六千工蓋原有一邊二十七萬字用七萬二千工得一百二十篇今一邊亦二十七萬字用二十一



總

一率	七萬二千工
二率	一百二十篇
三率	二十一萬六千工
四率	三百六十篇

萬六千工則得三百六十篇爲比例四率也然此法亦係三比例合爲一比例也如分作三比例明之則先以字數爲比例原每篇六百字爲一百二十篇今每篇四百五十字則必勻爲一百六十篇此一轉比例也

一

一率	今四百五十字
二率	原一百二十篇
三率	原六百字
四率	今一百六十篇

然人數不同故次以人數爲比例原八人寫之應得一百六十篇今十二人寫之則應得二百四十篇此一正比例也然日數又不同故次以日數爲比例原寫二十日應得二百四十篇今寫三十日則應得三百六十篇此又一正比例也法以三比例之各一率連乘之爲一率三比例之各三率連乘之爲三率者正合三比例爲一比例也

二

一率	原八人
二率	原一百六十篇
三率	今十二人
四率	今二百四十篇

三

一率	原二十日
二率	原二百四十篇
三率	今三十日
四率	今三百六十篇

設如海船內原有甜水二萬零一百六十斤每人每日用二斤足用四個月今又添四千零三十二斤合前數共二萬四千一百九十二斤欲用六個月問每日每人應用幾何

法以原有二萬零一百六十斤與今六個月相乘得一十二萬零九百六十個月爲一率每人每日用水二斤通爲三十二兩爲二率以今有二萬四千一百九十二斤與原四個月相乘得九萬六千七百六十八個月爲三率推得四率二十五兩六錢即今每人每日應用之數也試將兩首位數互乘得四億八千

七百七十一萬零七百斤然後互乘月數原有一邊得九萬六千七百六十八個月今有一邊得一十二萬零九百六十個月蓋原有水四億八千七百七十一萬零七百斤足用九萬六千七百六十八個月每人得三十二兩今有水亦四億八千七百七十一萬零七百斤欲用十二萬零九百六十個月則每人得二十五兩六錢爲轉比例四率也然此法亦係兩比例合爲一比例也如分作兩比例明之則先以水數爲比例原有水二萬零一百六十斤每人每日用三十二兩今水二萬四千一百九十二斤則每人每日應用三十八兩四錢此一正比例也然月數不同故次以月數爲比例原用四個月每日應用三十八兩四錢今欲用六個月則每日應用二十五兩六錢此一轉比例也法以

總
一率 今一十二萬零九百六十個月
二率 原三十二兩
三率 原九萬六千七百六十八個月
四率 今二十五兩六錢

一
一率 原二萬零一百六十斤
二率 原三十二兩
三率 今二萬四千一百九十二斤
四率 今三十八兩四錢

二
一率 今六個月
二率 原三十八兩四錢
三率 原四個月
四年 今二十五兩六錢

兩一率相乘爲一率。兩三率相乘爲三率者。正合兩比例爲一比例也。

設如原有米八萬石。用車二十四輛。日行四十里。二十日運完。今有米十萬石。用車三十輛。日行六十里。

問運完日數幾何。

法以原有八萬石與今用車三十輛相乘。得二百四十萬輛。又以今行六十里乘之。得一億四千四百萬里。爲一率。二十日爲二率。以今有十萬石與原用車二十四輛相乘。亦得二百四十萬輛。又以原行四十里乘之。得九千六百萬里。爲三率。推得四率十三日又三分日之一。卽今米十萬石運完之日數也。試將兩首位數互乘。得八十億石。然後互乘車數里數。原有一邊得九千六百萬里。今有一邊得一億四千四百萬里。蓋原有米八十

原	今
八〇〇〇〇	一〇〇〇〇〇
二四	三〇
二四〇〇〇〇〇	二四〇〇〇〇〇
四〇	六〇
九六〇〇〇〇〇〇	一四四〇〇〇〇〇〇〇

總

一率	今一億四千四百萬里
二率	原二十日
三率	原九千六百萬里
四率	今十三日又三分日之一

一

一率	原八萬石
二率	原二十日
三率	今十萬石
四率	今二十五日

億石。用車二百四十萬輛。行九千六百萬里。得二十日運完。今有米亦八十億石。亦用車二百四十萬輛。行一億四千四百萬里。故十三日又三分日之一運完。爲轉比例四率也。然比法亦係三比例合爲一比例也。如分作三比例明之。則先以米數爲比例。原米八萬石運二十日。今米十萬石。則應運二十五日。此一正比例也。然車數不同。故次以車數爲比例。原車二十四輛應運二十五日。今車三十輛。則應運二十日。此一轉比例也。然日行里數又不同。故次以里數爲比例。原行四十里應運二十日。今行六十里。則應運十三日又三分日之一。此又一轉比例也。法以三比例之各一率連乘之爲一率。三比例之各三率連乘之爲三率者。正合三比例爲一比例也。

二

一率	今三十車
二率	原二十五日
三率	原二十四車
四率	今二十日

三

一率	今六十里
二率	原二十日
三率	原四十里
四率	今十三日又三分日之一

設如原有麥子一萬二千石。車十二輛。每車載三石。日行八十里。四十日運完。今有麥三萬石。車十六輛。每車載四石。日行六十里。問運完日數幾何。

法以原有麥子一萬二千石與今車十六輛相乘。得一十九萬二千輛。又以今每車載麥四石乘之。得七十六萬八千石。又以今行六十里乘之。得四千六百零八萬里。爲一率。四十日爲二率。以今有麥子三萬石與原有車十二輛相乘。得三十六萬輛。又以原每車載麥三石乘之。得一百零八萬石。又以原行八十

里乘之得八千六百四十萬里爲三率推得四率七十五日卽今麥三萬石運完之日數也試將兩首位數互乘得三億六千萬石然後互乘車數石數里數原有一邊得八千六百四十萬里今有一邊得四千六百零八萬里葢原有麥三億六千萬石用車三十六萬輛載一百零八萬石行八千六百四十萬里得四十日運完今有麥亦三億六千萬石用車一十九萬二千輛載七十六萬八千石行四千六百零八萬里得七十五日運完爲轉比例四率也然此法係四比例合爲一比例也如分作四比例明之則先以麥數爲比例原麥一萬二千石運四十日今麥三萬石則應運一百日此一正比例也然車數不同故次以車數爲比例原車十二輛應運一百日今

原	今
一二〇〇〇	三〇〇〇〇
二	一六
三六〇〇〇〇	一九二〇〇〇
三	四
一〇八〇〇〇〇	七六八〇〇〇
八〇	六〇
八六四〇〇〇〇〇	四六〇八〇〇〇〇

總

一率	今四千六百零八萬里
二率	原四十日
三率	原八千六百四十萬里
四率	今七十五日

一

一率	原一萬二千石
二率	原四十日
三率	今三萬石
四率	今一百日

二

一率	今十六車
二率	原一百日
三率	原十二車
四率	今七十五日

車十六輛則應運七十五日。此一轉比例也。然每車所載石數不同。故次以石數爲比例。原每車載三石應運七十五日。今每車載四石。則應運五十六日二五。（卽四分日之一）此又一轉比例也。然日行里數又不同。故次以里數爲比例。原日行八十里。應運五十六日二五。今日行六十里。則應運七十五日。此又一轉比例也。法以四比例之各一率連乘之爲一率。四比例之各三率連乘之爲三率者。正合四比例爲一比例也。

三

一率	今四石
二率	原七十五日
三率	原三石
四率	今五十六日二五

四

一率	今六十里
二率	原五十六日二五
三率	原八十里
四率	今七十五日

正比例帶分

設如有銀買米每米一石價銀八錢四分今買米三分石之二問該銀若干

法以米一石用分母三通爲三分爲一率銀八錢四分爲二率分子二分爲三率二三率相乘一率除之得四率五錢六分即銀數也蓋米一石通爲三分以三分與八錢四分之比即同於二分與五錢六分之比皆爲三分之二之比例也

一率	三分
二率	八錢四分
三率	二分
四率	五錢六分

設如有人行路行過五分之二係八十里問總里數幾何

法以分子二分爲一率分母五分爲二率行過八十里爲三率二三率相乘一率除之得四率二百里即總里數也蓋總里數之五分之二爲八十里以二分與五分之比即同於八十里與二百里之比皆爲五分之二之比例也

一率	二分
二率	五分
三率	八十里
四率	二百里

設如有銀買米每米三分石之二價銀七分兩之五今買米四分石之三問該銀若干

法以三分石之二爲一率七分兩之五爲二率四分石之三爲三率用通分乘法以二率分母七與三率分母四相乘得二十八爲乘出之分母又以二率分子五與三率分子三相乘得一十五爲乘出之分子

是爲二十八分之十五．爲二率三率相乘之數．以一率三分石之二除之．因分母除不盡．乃用通分互乘代除之法．除之以乘出之分母二十八．與一率之分子二相乘．得五十六．爲除出之分母．又以一率之分母三．與乘出之分子十五相乘．得四十五．爲除出之分子．卽得四率五十六分兩之四十五．爲所求之數也．如求眞數．則變零分爲兩．以分母五十六爲一率．一兩爲二率．分子四十五爲三率．推得四率八錢餘二不盡．命爲五十六分錢之二．約爲二十八分錢之一．卽所求之眞數也．

一率	三分石之二
二率	七分兩之五
三率	四分石之三
四率	五十六分兩之四十五

一率	五十六
二率	一兩
三率	四十五分
四率	八錢又二十八分錢之一

設如有銀買蠟．每銀二兩六錢．買蠟十斤零五分斤之二．又七兩零二分兩之一．今有銀九錢．問買蠟幾何．

法以銀二兩六錢爲一率．以蠟十斤通爲一百六十兩．又五分斤之二通爲六兩四錢．又七兩零二分兩

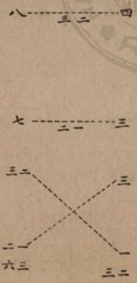
之一通爲七兩五錢共得一百七十三兩九錢爲二率今有銀九錢爲三率推得四率六十兩零一錢九分收爲三斤零十三兩一錢九分即所求之蠟數也此法雖有零分而分兩實可相通故各相通以爲比例四率也

一率	二兩六錢
二率	一百七十三兩九錢
三率	九錢
四率	六十兩零一錢九分

設如有銀買羽絨每三分丈之一價銀四分兩之三今欲買八分丈之七問該銀若干

法以原羽絨三分丈之一爲一率原銀四分兩之三爲二率今羽絨八分丈之七爲三率用通分乘法以二率分母四與三率分母八相乘得三十二爲乘出之分母又以二率分子三與三率分子七相乘得二十一

一率	三分丈之一
二率	四分兩之三
三率	八分丈之七
四率	一兩又三十二分兩之三十一



爲乘出之分子是爲三十二分之二十一爲二率三率相乘之數乃以一率三分丈之一除之因分母除不盡乃用通分互乘代除之法除之以乘出之分母三十二與一率之分子一相乘仍得三十二爲除出

之分母。又以一率之分母三與乘出之分子二十一相乘。得六十三爲除出之分子。卽得四率三十二分兩之六十三。爲所求之數也。滿分母三十二分收爲一兩。餘三十一。（六十三分內減去三十二分・仍餘三十一。）爲一兩又三十二分兩之三十一。如求眞數。則以分母三十二爲一率。一兩爲二率。分子三十一爲三率。推得四率九錢六分八釐七毫五絲。與整數一兩相加。得一兩九錢六分八釐七毫五絲。卽眞數也。

一率	三十二分
二率	一兩
三率	三十一分
四率	九錢六分八釐七毫五絲

設如有銀買緞。每緞二疋。共價八兩又五分兩之四。今欲買三十六疋。問共價若干。

法以二疋爲一率。共價八兩用分母五通爲四十分。加分子四得四十四分爲二率。今買三十六疋爲三率。推得四率七百九十二分。以每分母五分收爲一兩。得一百五十八兩又五分兩之二。（以五分爲一率・一兩爲二率・七百九十二分爲三率・推得四率一百五十八兩・餘二分・卽命爲五分兩之二・）

一率	二疋
二率	四十四分
三率	三十六疋
四率	七百九十二分

一率	五分
二率	一兩
三率	七百九十二分
四率	一百五十八兩又五分兩之二

一率	二疋
二率	八兩八錢
三率	三十六疋
四率	一百五十八兩四錢

即所求之數也。如以五分兩之二收爲四錢。五分爲一兩。則二分爲四錢。則得一百五十八兩四錢。即緞三十六疋之共價也。如以子母分變爲眞數求之。二疋共價八兩又五分兩之四。則五分爲一兩。四分爲八錢。是二疋共價爲八兩八錢。即以二疋爲一率。八兩八錢爲二率。三十六疋爲三率。亦得四率一百五十八兩四錢。爲緞三十六疋之共價也。

設如一案長九尺．寬一尺六寸．今欲將原長減三分之一．其面積仍與原案等．問寬幾何．

法以原長九尺．用分母三歸之．得每分三尺．於原長九尺內減去一分之三尺．餘六尺爲今長．爲一率．原寬一尺六寸．爲二率．原長九尺．爲三率．二三率相乘．一率除之．得四率二尺四寸．即今所求之寬也．此法因分母三．可以度盡原長．故變今長爲眞數．與他率爲比例也．

一率	今長六尺
二率	原寬一尺六寸
三率	原長九尺
四率	今寬二尺四寸

設如營造．原每日用五十六人．歷一月又九分月之三．可以完工．今每日用六十四人．問完工之日得幾何．

法以今用六十四人爲一率．以分母九通一月爲九分．加入分子三．共爲九分月之十二．爲二率．原用五十六人．爲三率．推得四率九分月之十分半．滿分母九分．收爲一月．餘一分半．十分半內減去九分．餘一分半．約爲六分月之一．即得一月又六分月之一．爲今用六十四人完工之日也．蓋六十四人與一月又九分月之三之比．即同於五十六人與一月又六分月之一之比也．

一率	今六十四人
二率	原九分月之十二
三率	原五十六人
四率	今九分月之十分五

設如原有一門簾用綾一丈二尺其綾寬一尺五寸今欲作一新簾其綾比原綾寬七分尺之三問應用長數幾何

法以原寬一尺五寸用分母七通爲十分半加入分子三得今寬一十三分半爲一率原長一丈二尺爲二率原寬十分半爲三率推得四率九尺又一百三十五分尺之四十五約爲三分尺之一即得九尺又三分尺之一爲今應用之長數也蓋今寬十三分半與原寬十分半之比即同於原長一丈二尺與今長九尺又三分尺之一之比也

一率	今寬十三分五
二率	原長一丈二尺
三率	原寬十分五
四率	今長九尺又三分尺之一

設如城守兵一營其糧可支一年又七分年之二今汰去三分之一問應支年數幾何

法先以年分母七通一年爲七分加入分子二得七分年之九又以兵分子一減分母三得二爲三分之二爲現存兵數（汰去三分之一則存者爲三分之二）因兩分母不同故用互乘以齊之以兩分母三七相乘得二十一爲共母分即原兵分以年分母七互乘兵分子二得十四爲今存兵分以兵分母三互乘年分子九得二十七爲原年分即以所通今存兵十四分爲一率原年數二十七分爲二率原

一率	今存兵十四分
二率	原年數二十七分
三率	原兵二十一分
四率	今年數四十分五

兵二十一分爲三率推得四率二十一分年之四十分半滿分母二十一分收爲一年餘十九分半。四十分半內減二十一分，餘十九分半。約爲七分年之六分半即得一年又七分年之六分半爲今應支之年數也蓋今存兵比原兵少三分之一則支糧年數必多三分之一故今存兵十四分與原兵二十一分之比即同於原年數二十七分與今年數四十分半之比也。