中學各科綱要叢書

# 平面幾何

陳朔南編

商務印書館發行

MG
G634.63
43

中學各科綱要叢書

# 平面幾何

陳朔南編

3 1773 7243 4

商務印書館發行

# 編　輯　大　意

一. 本書編輯之目的,在供中學學生升學投考之準備及平時複習,與有志研究幾何者之用.

二. 本書與教科書旨趣不同,將定理及問題分類配列,俾便於自修.

三. 本書所選問題甚為豐富,且均屬扼要,對於代表問題,附以略解,以供讀者之參考.

四. 本書在易忽略之處,加入注意,認為疑難處,則加以詳細之解釋.

五. 本書名詞,均依照教部所審定者.

六. 本書限於時間,匆促譯就,謬誤之處,在所難免,尙希讀者指教是幸.

譯者識於浙江省立民衆教育實驗學校

二十六年四月二十日

# 目　　次

# 平 面 幾 何

## 第一章　直線形

### 1. 三角形的邊的關係

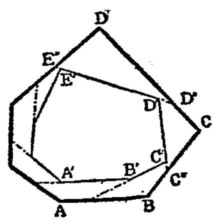
由二點間的最短距離,是爲聯結二點的線分的公理,得如下的定理.

〔定理〕 三角形二邊的和大於其他一邊.

由上關於凸多角形周圍的問題如下例.

(例) 凸多角形 $ABCD\cdots\cdots$ 的周圍, 是比在其內的任意邊數的凸多角形 $A'B'C'D'E'\cdots\cdots$ 的周圍大.

〔解〕 凸多角形 $A'B'C'D'E'\cdots\cdots$ 的一邊 $D'E'$, 不在 $ABCD\cdots\cdots$ 的任何的一邊上, 則其向二方延長的延長線被 $ABCD\cdots\cdots$ 的周所截,其截點各爲 $D''$, $E''$, 則此多角形爲 $D''E''$ 分成二個凸多角形, 如圖.




$$DD''+DE''>D''E''.$$

$\therefore$ $ABCD\cdots\cdots$的周

$>ABCD''E''\cdots\cdots$的周.

延長 $D'C'$ 邊與 $BC$ 邊相截於 $C''$,

$$C''C+CD''+D''D'>D'C''.$$

$\therefore$ $ABCD''E''\cdots\cdots$的周$>ABC''D'E''$ 的周.

順此以同理,得證明

$ABCD\cdots\cdots$ 的周$>A'B'C'D'E'\cdots\cdots$的周;

$A'B'C'D'E'\cdots\cdots$的幾邊在 $ABCD\cdots\cdots$的邊上,

幾個的頂點在 $ABCD\cdots\cdots$的周上時,即可由以上的證明得知.

## 問 題 I

**1.** 設四邊形爲 $ABCD$, 試證

$$AB+CD<AC+BD.$$

**2.** 設 $P$ 爲 $\triangle ABC$ 內的任意一點,則

$$AB+AC>PB+PC.$$

**3.** 三角形內的任意一點,到三項點的聯結線的和小於三角形的周.

**4.** 設 $\triangle ABC$ 的中線 $AD$, 則

$$AB+AC>2AD.$$

〔註〕 由 $D$ 點延長 $AD$ 至 $A'$, 使 $AD=DA'$,

$$AB+AC=AB+BA'>2AA'.$$

**5.** 角 $C$ 爲三角形 $ABC$ 的鈍角, $D$ 及 $E$ 爲 $BC$ 邊的三等分點, 則

$$AB+AC>AD+AE,$$

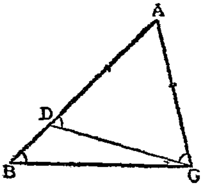
試證明之.

**6.** $\triangle ABC$ 的三中線爲 $AD$, $BE$, $CF$, 則

$$AD+BE+CF<AB+BC+AC<2(AD+BE+CF).$$

## 2. 三角形的邊與角的關係

在 $\triangle ABC$ 中,




$AB=AC$, 則 $\angle B=\angle C$,

又 $\angle B=\angle C$, 則 $AB=AC$.

若 $AB>AC$, 在 $AB$ 上取 $D$ 點,使

$$AC=AD,$$

則
$$\angle ADC=\angle ACD$$
$$=\angle B+\angle BCD$$
$$=\angle C-\angle BCD.$$

$$\therefore\ \angle C-\angle B=2\angle BCD.$$

〔定理〕 三角形大邊的對角比小邊的對角大.

其逆 $\angle B<\angle C$, 在 $\angle C$ 內作直線 $CD$,

$$\angle ACD=\tfrac{1}{2}(\angle B+\angle C),$$

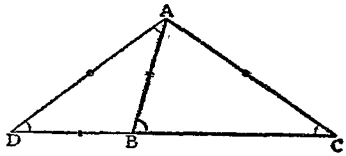
$CD$ 交 $AB$ 於 $D$, $ADC$ 爲等腰三角形,則 $AB>AC$, 故

〔系〕 三角形大角的對邊比小角的對邊大.

(例) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=2\angle C$, 則$AC<2AB$.

〔解〕 由 $B$ 點延長 $CB$ 至 $D$, 使

$$BD=BA,$$




則 $\triangle ABD$ 爲等腰三角形,故

$$\angle D=\tfrac{1}{2}\angle ABC.$$

$$\therefore\quad \angle C=\angle D.\quad \therefore\quad AC=AD.$$

而 $$BA+BD>AD.\quad \therefore\quad 2AB>AC.$$

## 問題 II

**1.** $D$ 爲 $\triangle ABC$ 的 $BC$ 邊上任意的一點,且 $AB$ 比 $AC$ 小,則

$$AB>AD.$$

**2.** 凸四邊形 $ABCD$ 的四邊中, $AD$ 最長, $BC$ 最短,則

$$\angle ABC>\angle ADC,\quad \angle BCD>\angle BAD.$$

**3.** 在 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 中, $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, 且 $AB>A'B'$, 則 $BC>B'C'$, $AC>A'C'$.

**4.** 在 $\triangle ABC$ 中, $AB>AC$, 由 $B$, $C$ 到對邊各作垂線 $BD$, $CE$, 則

(1) $BD>CE$.

(2) $AB+CE>AC+BD$.

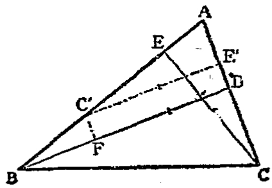
〔註〕 在 $AB$ 上取 $C'$ 點,使

$$AC=AC'.$$

並作 $C'E'\parallel BD$, $C'F\parallel AC$.

$\therefore\quad \triangle ACF\cong\triangle AC'E'$.

$DF=C'E'=CE$,



$$BF<BC',$$

$$AC=AC'.$$

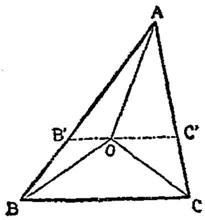
此兩邊相加,得　$AC+BD<AB+CE.$

5. 直角三角形 $ABC$ 的直角頂 $A$ 到斜邊作垂線,則

$$AD+BC>AB+AC.$$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC<CA<AB$, $O$ 爲此三角形內的任意一點,則

$$AO+BO+CO<AB+AC.$$




〔註〕 通過 $O$ 作 $B'C'$, 使 $BC \parallel B'C'$, 在 $\triangle AB'C'$ 中,

$$AB'>AC'>B'C'.$$

又　$AB'>AO,$

$$BB'+B'O>BO,$$

$$CC'+C'O>CO.$$

$\therefore$ $AB+B'C'+C'C>AO+BO+CO.$

$\therefore$ $AB+AC'+C'C>AO+BO+CO,$

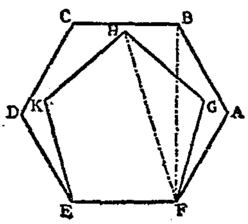
即　$AB+AC>AO+BO+CO.$

7. 在 $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ 中, $AB=DE$, $AC=DF$, $\angle A>\angle D$, 則

$$BC>EF.$$

又 $AB=DE$, $AC=DF$, $BC>EF$, 則 $\angle A>\angle D$.

8. 在線分 $EF$ 的同側,並以 $EF$ 爲邊作正六角形 $ABCDEF$ 及正五角形 $EFGHK$,則正五角形在正六角形之內.




〔註〕 在 $\triangle FAB$, $\triangle FGH$ 中,

$$AF=GF,\ AB=GH,$$

$$\angle FAB>\angle FGH.$$

$\therefore$ $BF>HF.$

而　$\angle EFB=\angle R,$

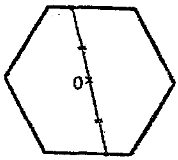
$$\angle EFH<\angle R.$$

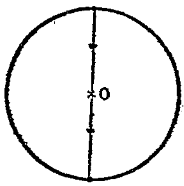
故 $G$, $H$, $K$ 在正六角形之內.

同理,可證明正 $n$ 角形,正 $n+1$ 多角形之內.

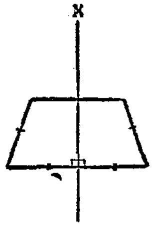
## 3. 對稱的性質

點 $A$, $B$ 若對於點 $O$ 爲對稱的位置, 則 $O$ 卽爲線分 $AB$ 的中點, 從而




某圖形若對於點 $O$ 爲對稱,則通過 $O$, 爲其圖形所截取的線分, 均在 $O$ 點被平分.

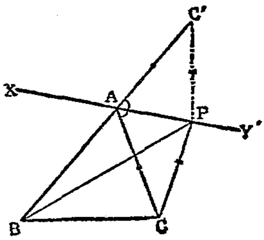



某圖形若對於直線 $XY$ 爲對稱,則該圖形以此直線爲摺紋而摺轉時, 兩側的部分完全一致,此性質應用的範圍甚廣,故特別重要,若由於圖形將其移至關於某直線對稱的位置來看, 則比較的可以容易看出種種的性質.

(例) 設有一點 $P$ 在 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的外角平分線上,則

$$AB+AC<PB+PC,$$

試證明之.




〔解〕 在 $BA$ 的延長線上取點 $C'$, 令 $AC=AC'$.

點 $C, C'$ 卽爲與 $\angle A$ 外角的二等分線 $XY$ 有關的對稱點.

$$\therefore\ PC=PC'.$$

$$\therefore\ PB+PC=PB+PC'.$$

但在 $\triangle BPC'$, $\quad BC'<PB+PC'$.

$$\therefore\ AB+AC<PB+PC.$$

### 問　題　III

1. 在直線 $XY$ 的同側有點 $A$, $B$, 對於 $XY$ 爲對稱的 $A$ 的對稱點

爲 $A'$, 直線 $A'B$ 與 $XY$ 的交點爲 $C$, 又不在 $C$ 的 $XY$ 上任意的點爲 $D$, 則

$$AC+BC<AD+BD$$

2. 若以與正三角形 $ABC$ 的一邊 $AB$ 上的點 $P$ 的邊 $CB$, $CA$ 有關的對稱點,各爲 $D$, $E$; 直線 $DE$ 與邊 $CB$, $CA$ 的交點,各爲 $Q$, $R$; 則由 $P$ 向 $Q$ 所打出的球,經 $R$, 再通過 $P$, 試證之,但球落於邊上而跳回的前後的通路,在此三角形的平面內,適與其邊成等角.

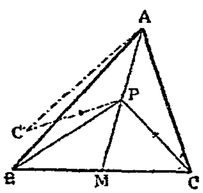
3. 在 $\triangle ABC$ 爲 $AB>AC$, 若以 $P$ 爲由 $A$ 所引中線上任意的點,則 $AB-AC>PB-PC$, 試證明之.

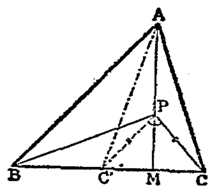
又 $P$ 爲由 $A$ 所作垂線上任意的點時,上式的不等號又該如何?

〔註〕 若對於中線 $AM$ 爲對稱的 $C$ 的對稱點爲 $C'$, 則

$$\angle CAP>\angle BAP.$$

故 $C'$ 在三角形外,而由四邊形 $BPAC'$,




$$AB+PC'>BP+AC'.$$

$$\therefore\quad AB+PC>BP+AC.$$

$$\therefore\quad AB-AC>PB-PC.$$

又 $AM$ 若爲垂線,則

$$\angle CAP>\angle BAP.$$

因而由四邊形 $BC'PA$,

$$AB+PC'<BP+AC'.$$

$$\therefore\quad AB-AC<PB-PC.$$

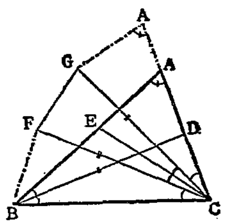
4. 在 $\triangle ABC$ 內, $AB>AC$. 若在 $\angle A$ 的平分線上,取任意的一點 $P$, 則

$$AB-AC>PB-PC.$$

5. 三角形的大角的平分線,較小角的平分線爲短.

〔註〕 在 $\triangle ABC$ 內, $\angle B<\angle C$; $\angle B$, $\angle C$ 的平分線,各爲 $BD$, $CE$.

$$\angle CBF=\angle BCA,$$
$$\angle BCF=\tfrac{1}{2}\angle B,$$
$$\angle ACG=\tfrac{1}{2}\angle B,$$
$$CA'=AB,$$
$$A'G \parallel AB.$$




若如上,則

$$\triangle BCD\equiv\triangle CBF,$$
$$\triangle BDA\equiv\triangle CGA'.$$

故 $CGF$ 爲等腰三角形, $G$ 在 $\triangle ABC$ 的形外,且 $CE$ 爲頂角 $FCG$ 的平分線的一部分.

$$\therefore\quad CE<CG.\quad \therefore\quad CE<BD.$$

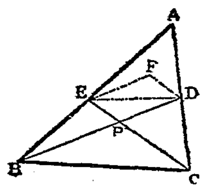
6. 已知底邊及高的三角形之中,其周圍最小的爲等腰三角形.

〔註〕 若以底邊爲 $BC$, 等腰三角形爲 $ABC$, 其他的三角形爲 $BCD$, 則頂點 $D$ 在 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 外角的平分線上.

7. 若以 $\triangle ABC$ 內的一點爲 $P$; $BP$, $CP$ 的延長線與 $AC$, $AB$ 的交點各爲 $D$, $E$, 則

$$AD+AE>PD+PE.$$

〔註〕 若作平行四邊形 $PDFE$, 則 $F$ 與 $ED$ 有關,與 $P$ 在反對的側面,且可決定是在 $\triangle AED$ 內.




$$\therefore\quad FE+FD<AE+AD.$$
$$\therefore\quad PD+PE<AD+AE.$$

8. 以 $A$ 爲頂點的等腰三角形 $ABC$ 與三角形 $PBC$ 爲等周,邊 $AC$ 與 $PB$ 在 $D$ 點相交時,則 $AD>PD$.

〔註〕 因 $BP>CP$, 故

$$AB=AC>CP,$$
$$AB=AC<BP.$$

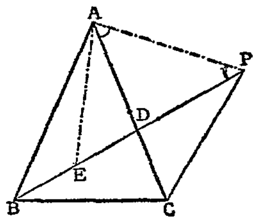
故於 $PB$ 上取 $E$ 點,令 $PE=AB$, 且

$$PB+PC=AB+AC.$$

$$\therefore\ PB-AB=AC-PC.$$

$$\therefore\ BE=AC-PC,$$

即 $$PC+BE=AC=AB.$$




且在 $\triangle ABE$ 內,

$AE+BE>AB.\quad \therefore\ AE>PC.$

因此比較 $\triangle ACP$, $\triangle PEA$, 即可決定 $\angle CAP<\angle EPA$.

故在 $\triangle ADP$ 中為 $AD>PD$.

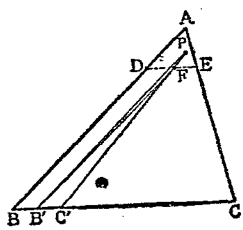
**9.** 在不等邊三角形 $ABC$ 內,選適當的一點 $P$, 又在邊 $BC$ 上選適當的二點 $B'$, $C'$; 則得 $PB'+PC'>AB+AC$, 試證之.

〔註〕 今為 $AB>AC$, 邊 $AB$ 上取一點 $D$, 令為

$$2BD=AB+AC.$$

通過 $D$ 平行於 $BC$ 的直線,與 $AC$ 的交點為 $E$.

由 $DE$ 上任意的點 $F$, 引與 $AB$ 的平行線,若與 $BC$ 的交點為 $C'$, 則 $FC'=DB$.




但為 $\angle B<\angle C$;

故 $\angle FC'B>\angle R$.

依此,若 $BC'$ 內任意的點為 $B'$, 則

$$FB'>FC'.$$

$$\therefore\ FB'+FC'>2FC'.$$

$$\therefore\ FB'+FC'>AB+AC.$$

若又在 $C'F$ 的延長上 $\triangle ADE$ 內,取點 $P$, 則

$$PB'>FB'.\quad \therefore\ PB'+PC'>AB+AC.$$

這樣,在線分 $DE$ 上,或 $\triangle ADE$ 內取點 $P$, 則雖說成問題,但可得如上的結果.

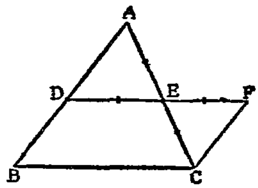
## 4. 重心問題

$\triangle ABC$ 的邊 $AB$, $AC$ 的中點各為 $D$, $E$, $DE$ 延長至 $F$, 使 $DE=EF$, 則

$\triangle ADE \cong \triangle CEF$.

$\therefore \angle DAE = \angle FCE$.

$\therefore AD = CF$，且 $AD \parallel CF$.




由 $BD \parallel CF$，且 $BD = CF$，故 $BCFD$ 為平行四邊形.

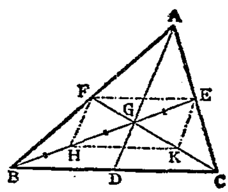
$\therefore BC \parallel DE$，且 $DE = \frac{1}{2}BC$，

即得下面的一重要定理.

〔定理〕 三角形二邊中點的聯結線，若與第三邊平行，且等於其一半.

此定理很重要，為基本定理之一，其應用最著的為三角形的重心定理，即

〔定理〕 $\triangle ABC$ 的三中線 $AD, BE, CF$ 相交於一點 $G$.




$AG = 2GD$,

$BG = 2GE$,

$CG = 2GF$.

$BE, CF$ 相交於一點 $G$，$BG, CG$ 的中點各為 $H, K$，則

$EF \parallel BC$，且 $EF = \frac{1}{2}BC$;

$HK \parallel BC$，且 $HK = \frac{1}{2}BC$.

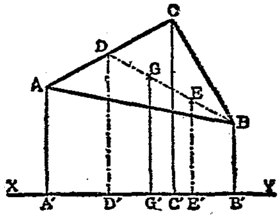
$\therefore EF \parallel HK$，且 $EF = HK$.

$EFHK$ 為平行四邊形，其對角線 $EH, FK$ 在 $G$ 互相平分，同樣，$AD$ 與 $BE$ 相交於 $G$.

(例) 設 $\triangle ABC$ 的重心為 $G$，由 $A, B, C, G$ 四點作四條平行線 $AA'$, $BB'$, $CC'$, $GG'$ 與一直線 $XY$ 相交，則

$AA' + BB' + CC' = 3GG'$.

〔解〕 $BD$ 為過 $B$ 點的中線，$BG$ 的中點為 $E$，且 $DD' \parallel EE' \parallel GG'$.




由梯形的性質，

$AA' + CC' = 2DD'$ ………(1)

$DD' + EE' = 2GG'$ ………(2)

$GG' + BB' = 2EE'$ ………(3)

(1)+(3)+(2)×2, 相加後將兩邊相同的部分消去,

$$AA'+BB'+CC'=3GG'.$$

〔注意〕 梯形 $AA'CC'$ 的一腰 $AC$ 的中點 $D$, 過 $D$ 點平行於底 $AA'$ 的直線,截 $A'C'$ 於 $D'$, 則 $AA'+CC'=2DD'$, 此與本節第一定理有很大的關係.

## 問 題 IV

1. $\triangle ABC$ 的邊 $AC$ 的中點爲 $M$, $AB$ 邊上的一點爲 $N$, 若 $MN$ 等於 $BC$ 的一半,則 $MN$ 平行於 $BC$.

2. 四邊形各邊中點順次聯結所成的四邊形,爲平行四邊形.

3. 四邊形 $ABCD$ 的邊 $AB, BC, CD, DA$ 的中點各爲 $P, Q, R, S$.

(1) $AC=BD$, 則 $PR$ 垂直二等分 $QS$.

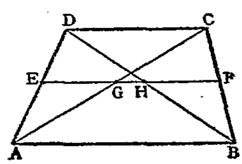
(2) 若 $AC\perp BD$, 則 $PR=QS$.

4. 由平行四邊形 $ABCD$ 的頂點 $A, B, C, D$ 至一直線 $XY$, 各引平行線 $AA', BB', CC', DD'$, 則

$$AA'+CC'=BB'+DD'.$$

5. 梯形 $ABCD$ 的腰 $AD, BC$ 及對角線 $AC, BD$ 的中點各爲 $E, F, G, H$, 則此四點在一直線上,且

$$GH=\tfrac{1}{2}(AB-CD).$$




〔註〕 聯結 $GE$ 及 $GF$, 由 $EG\parallel CD\parallel AB$, $GF\parallel AB$, 則 $E, G, F$ 在一直線上,同樣, $E, H, F$ 在一直線上,所以四點都同在一直線上,其次

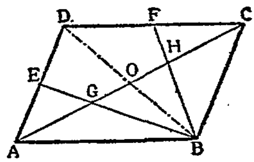
$$EH=\tfrac{1}{2}AB,\quad EG=\tfrac{1}{2}CD.$$

$$\therefore\ GH=\tfrac{1}{2}(AB-CD).$$

6. 四邊形 $ABCD$ 的邊 $AB, BC, CD, DA$ 的中點各爲 $E, F, G, H$, 又對角線 $AC, BD$ 的中點各爲 $M, N$, 則三直線 $EG, FH, MN$ 相交於一點.

7. 平行四邊形 $ABCD$ 的邊 $DA, DC$ 的中點各爲 $E, F$, 則 $AC$ 被 $BE, BF$ 三等分.

〔註〕 $AC, BD$ 的交點爲 $O$, 則 $O$ 爲 $AC, BD$ 的中點,故 $BE, AO$ 的交點 $G$ 及 $BF, CO$ 的交點 $H$, 各爲三角形 $ABD$, $BCD$ 的重心.



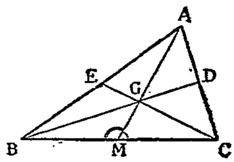

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB>AC$, $A, B, C$ 的中線各爲 $AM, BD, CE$, 則

(1) $\angle AMB>\angle R$.

(2) $BD>CE$.

〔註〕 把 $\triangle AMB$, $\triangle AMC$ 比較,得證 $\angle AMB>\angle AMC$, 由此得知

$$\angle AMB>\angle R.$$




$G$ 爲三角形的重心,比較 $\triangle BMG$, $\triangle CMG$, 得知

$$BG>CG.$$

9. 過三角形的重心的任意直線, 由其同側的二頂點到此直線的垂線的和,與他側的項點到這直線的垂線必相等,

10. 設 $A, B$ 爲在直線 $LM$ 一側的二點, $C$ 爲在其他側的一點, 由 $A, B$ 至 $LM$ 的垂線 $AD, BE$ 的和等於由 $C$ 至 $LM$ 的垂線 $CF$, 則 $LM$ 必通過 $\triangle ABC$ 的重心.

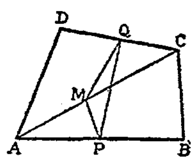
11. 四邊形相對兩邊的中點聯結線,大於其他相對兩邊的和的一半.

〔註〕 $AB, CD$ 邊的中點爲 $P, Q$, 對角線 $AC$ 的中點爲 $M$, 則

$$PM=\tfrac{1}{2}BC,\quad QM=\tfrac{1}{2}AD.$$

故由 $\triangle MPQ$,

$$MP+MQ>PQ.$$




或 $M$ 在 $PQ$ 上, 因此則 $BC \parallel AD$, 故上之不等式,卽變爲等式了.

12. 四邊形兩對角線中點的聯結線分,小於其相對兩邊的差的一半

13. $\triangle ABC$ 中, $\angle B=2\angle C$, $BC$ 的中點與由頂點 $A$ 到對邊 $BC$ 所作的垂線足間的距離,等於 $AB$ 邊的一半.

〔註〕 垂線爲 $AH$, 又 $BC, CA$ 的中點爲 $M, N$, 則

$MN \parallel AB,$

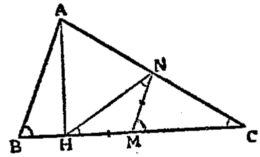
$MN=\frac{1}{2}AB,$

$\angle NMC=\angle ABC.$

又 $\angle NHC=\angle NCH.$

$\therefore \angle NMC=2\angle NHM.$

$\therefore MH=MN=\frac{1}{2}AB.$




**14** 四邊形的兩對角線 $AC$, $BD$ 相等,且一對對邊中點的聯結直線與 $AC$, $BD$ 直線成一三角形,則此三角形爲等腰三角形.

## 5. 直角三角形問題

關於直角三角形的問題非常之多, 以前對於這類問題已有練習, 本節多爲對於此方面有特色的問題.

(例) 過正方形 $ABCD$ 的頂點 $B$, 作一直線與對角線 $AC$ 平行, 並在此直線上取一點 $E$, 使 $AC=AE$, 則

$$\angle CAE=2\angle EAB.$$

但 $C$, $E$ 在 $AB$ 的同側.

〔解〕 設對角線的交點爲 $O$, 由 $E$ 到 $AC$ 的垂線足爲 $F$, 則

$EF \parallel BO$, 且 $EF=BO.$

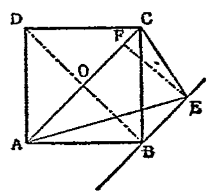
$\therefore EF=\frac{1}{2}AE.$

即直角三角形 $AEF$ 的直角邊 $EF$, 等於斜邊 $AE$ 的 $\frac{1}{2}$. 故

$\angle EAF=30°.$

$\therefore \angle EAB=15°.$

$\therefore \angle CAE=2\angle EAB.$




## 問 題 V

**1.** 在 $\triangle ABC$ 中, $BC$ 的中點爲 $D$, 若

(1) $AD=BD$, 則 $\angle A=\angle R.$

(2) $AD>BD$, 則 $\angle A<\angle R.$

(3) $AD<BD$, 則 $\angle A>\angle R.$

2. 三角形一角的平分線,在其由頂點到對邊的中線與垂線之間或與此二線相合.

3. 在直角三角形 $ABC(\angle C=\angle R)$ 中,由 $A$ 作 $AD$, 與 $BC$ 相截於 $E$, 又由 $B$ 作平行於 $AC$ 的直線,與 $AD$ 相交於 $D$, 且 $DE=2AB$, 則 $\angle DAC$ 等於 $\angle BAC$ 的 $\frac{1}{3}$.

4. 過正方形 $ABCD$ 內的一點 $O$, 作互相垂直的二直線,則其二組的對邊或其延長線間所夾的二部分必相等.

5. 直角三角形 $ABC$ 的直角 $A$ 的平分線 $AD$ 爲由直角項 $A$ 到斜邊的垂線與中線所夾角的平分線.

6. 過直角三角形 $ABC$ 的斜邊 $BC$ 的中點 $D$ 的垂線,與直角 $A$ 的平分線相交於 $E$, 則

$$AD=DE.$$

7. $BC$ 爲直角三角形 $ABC$ 的斜邊,由 $C$ 各作 $B$ 角的內角及外角的平分線上的垂線, 其垂足各爲 $D$, $E$, 則 $A$, $C$ 二點爲對於直線 $DE$ 爲對稱.

8. 過正方形 $ABCD$ 的頂點 $A$, 且與對角線 $BD$ 平行的直線上的一點 $E$, $BE$ 與 $AD$ 相交於 $F$, 若

$$BD=BE, \text{ 則 } DE=DF.$$

9. 過正方形 $ABCD$ 的頂點 $A$ 作直線 $AEF$, 與 $CD$ 邊相交於 $E$, 與 $BC$ 邊的延長線相交於 $F$, 則 $AE$ 與 $AF$ 的和必大於 $AC$ 的 2 倍.

〔註〕 在直角三角形 $CFE$, 聯結 $EF$ 的中點 $G$ 與 $C$.

$$\angle GCE=\angle CEG=\angle BAE>45°.$$

$$\therefore\ \angle ACG>\angle R.\quad \therefore\ AG>AC.$$

又

$$AE+AF=2AG.$$

$$\therefore\ AE+AF>2AC.$$

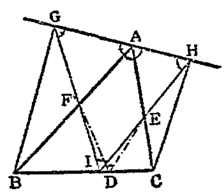
10. 直角三角形的二直角邊 $AB$, $AC$ 的外側,各作正方形 $ABDE$, $ACFG$, 延長 $DE$, $FG$ 相交於 $H$, 則過 $H$ 與 $A$ 的直線必與斜邊 $BC$ 垂直.

11. $\triangle ABC$ 的三邊 $BC$, $AC$, $AB$ 的中點各爲 $D$, $E$, $F$; 過頂點 $A$ 作任意直線,由 $B$, $C$ 到此直線上的垂足爲 $G$, $H$, 延長 $EH$, $FG$ 相交於

$I$，則 $\angle EIF$ 與 $\angle EDF$ 相等或相補.

〔註〕 $E, F$ 各爲直角三角形 $CHA$, $BGA$ 的斜邊的中點,故

$$\angle EAH=\angle EHA,$$
$$\angle FAG=\angle FGA.$$




而 $\angle EAH+\angle BAC+\angle FAG=2\angle R$,

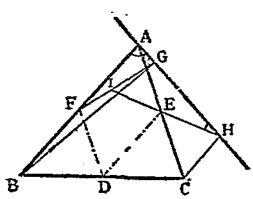
$\angle IHG+\angle IGH+\angle GIH=2\angle R$.

$\therefore\quad \angle BAC=\angle EIF$.

但 $\quad \angle BAC=\angle EDF$.

$\therefore\quad \angle EIF=\angle EDF$.

由後圖,




$$\angle FGA=\angle HIG+\angle GHI.$$

$\therefore\quad \angle HIG=\angle FGA-\angle GHI$

$\qquad\qquad =\angle FAG-\angle EAG$

$\qquad\qquad =\angle BAC$.

$\therefore\quad \angle EIF+\angle BAC$

$\qquad =\angle EIF+\angle EDF=2\angle R$.

**12.** $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 及 $AB+AC$ 各爲一定,則 $AB-AC$ 小,邊 $BC$ 亦小.

## 6. 外心及垂心問題

線分 $AB$ 的垂直平分線 $XX'$ 上的點,到兩端 $A, B$ 的距離相等.其逆,到 $A, B$ 等距離的點必在 $XX'$ 上.因之 $\triangle ABC$ 的邊 $AB$, $BC$ 的垂直平分線各爲 $XX'$, $YY'$, 其交點爲 $O$, 則

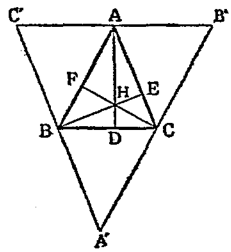
$$AO=BO,\quad BO=CO.$$
$$\therefore\quad AO=CO.$$

$O$ 亦在另一邊 $AC$ 的垂直平分線上.由此得

〔定理〕 三角形各邊的垂直平分線,相交於一點,此點至三頂點的距離相等(外心).

過三角形 $ABC$ 的頂點各作對邊的平行線,成 $\triangle A'B'C'$, $A, B, C$ 各爲 $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ 的中點.故由 $A, B, C$ 各到 $BC, CA, AB$ 所作的

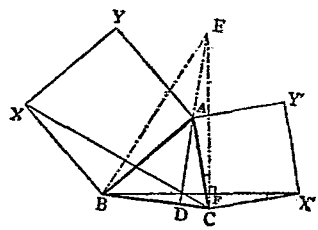
垂線必各爲 $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ 的垂直平分線,由前定理相交於一點,故




〔系〕 三角形由各項點,到對邊的垂線相交於一點(垂心).

(例) $\triangle ABC$ 的邊 $AB$, $AC$ 外側的各正方形 $ABXY$, $ACX'Y'$, 作直線 $BX'$, $CX$ 及由 $A$ 到 $BC$ 的垂線 $AD$ 相交於一點.

〔解〕 將 $AD$ 由 $A$ 方延長到 $E$, 使 $AE=BC$.




在 $\triangle BCX'$, $\triangle EAC$ 中,

$$BC=AE,$$

$$CX'=AC,$$

$$\angle BCX'=\angle EAC.$$

$$\therefore \quad \triangle BCX' \equiv \triangle EAC.$$

因之 $BX'$, $CE$ 的交點爲 $F$, 則

$$\begin{aligned}\angle EFX' &= \angle FCX' + \angle CX'B \\ &= \angle FCX' + \angle ACE \\ &= \angle R.\end{aligned}$$

同樣, $CX$ 與 $BE$ 垂直,故 $BX'$, $CX$, $ED$ 爲 $\triangle BCE$ 的由各項點到對邊的垂線而相交於一點.

## 問題 VI

1. $\triangle ABC$ 的邊 $AB$, $AC$ 各外側的正方形 $ABXY$, $ACX'Y'$, 則 $BY'$ 與 $CY$ 垂直.

2. $\triangle ABC$ 的邊 $BC$ 上的一點 $D$, 在 $CA$ 上取 $CE$ 等於 $CD$, $AB$ 上取 $BF$ 等於 $BD$, 則 $\triangle DEF$ 的 $D$ 角的大小及其外心的位置與 $D$ 的定方無關.

3. 在 $\triangle ABC$ 的二邊 $AB$, $AC$ 上各作正方形 $BX$ 及 $CY$, 由 $A$ 到 $XY$ 作垂線 $AN$, 則 $AN$ 爲通過 $BC$ 的中點 $M$, 且 $AM$ 等於 $XY$ 的一半.

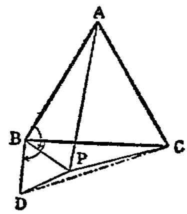
〔註〕 $BC$ 的中點 $M$ 與 $A$ 聯結,在 $AM$ 的延長線上取 $A'$, 使

$$AM=MA'.$$

4. 設 $P$ 爲正三角形 $ABC$ 的角 $BAC$ 內的一點,則

$$PB+PC \text{ 不小於 } PA.$$

〔註〕 $\triangle BPC$ 的一邊 $BP$ 的外側作一正三角形 $BPD$, 並作三角形 $CBD$, 此三角形卽爲以 $B$ 爲中心,將 $ABP$ 迴轉 $60°$ 而得.



$$\therefore \quad AP=CD.$$

因 $P$ 不在 $CD$ 上,則

$$PB+PC>PA.$$

若 $P$ 在 $CD$ 上,則

$$\angle BPC=120°.$$

$$\therefore \quad PB+PC=PA.$$

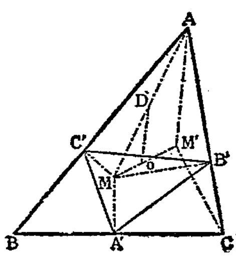
5. 在 $\triangle ABC$ 各邊的外側,各作正三角形 $BCD$, $CAE$, $ABF$, 則直線 $AD$, $BE$, $CF$ 相等.

6. $\triangle ABC$ 的二邊 $AB$, $AC$ 上,在原三角形的外方各作正三角形 $APB$, $AQC$, 又邊 $BC$ 爲一邊,在原三角形上作正三角形 $BRC$, 則 $PAQR$ 爲平行四邊形.

7. 平行四邊形 $ABCD$ 的內側,作正三角形 $BCE$, $CDF$, 則 $AEF$ 爲正三角形.

8. $\triangle ABC$ 內的一點 $M$ 到邊 $BC$, $CA$, $AB$ 的正射影各爲 $A'$, $B'$, $C'$, 則由 $A$, $B$, $C$ 到 $B'C'$, $C'A$, $A'B'$ 所作的垂線爲 $\triangle A'B'C'$ 的外心,關於 $M$ 的對稱點 $M'$ 相交.

〔註〕 設 $\triangle A'B'C'$ 的外心爲 $O$, $AM$ 的中點爲 $D$, 則 $D$ 爲三角形 $AC'B'$ 的外心,故由 $D$ 到 $B'C'$ 的垂線爲 $B'C'$ 的垂直平分線且過 $O$, 由 $A$ 到 $B'C'$ 作垂線與 $DO$ 平行, $D$ 爲 $AM$ 的中點,故此垂線與 $MO$ 的延長線的交點,卽爲與 $M$ 對於 $O$ 爲對稱的 $M'$ 點,其由 $B$, $C$ 的頂點,所作垂線同理可證明.



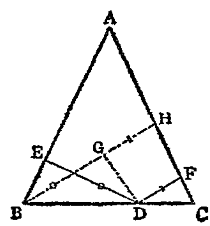
## 7. 一定問題

線分的大小有一定,直線通過一定點,此類的問題,都叫做一定問題.

關於這類的問題的一般解法,沒有一定.

(例) 等腰三角形 $ABC$ 的底邊 $BC$ 上的任意一點到 $AB$, $AC$ 的垂線,其和一定.

〔解〕 設 $BC$ 上任意一點 $D$ 到 $AB$, $AC$ 的垂線各爲 $DE$, $DF$, 又因 $B$ 到 $AC$ 作垂線 $BH$, 與由 $D$ 作與 $AC$ 平行的直線相交於 $G$, 則




$$\triangle BDE \equiv \triangle DBG.$$

$$\therefore \quad BG = DE.$$

又 $DFHG$ 爲矩形,

$$GH = DF.$$

$$\therefore \quad DE + DF = BH,$$

即 $DE+DF$ 等於 $BH$, 而 $BH$ 爲一定.

### 問題 VII

1. 由等腰三角形 $ABC$ 的底邊 $BC$ 延長線上的任意一點 $D$ 到他二邊 $AB$, $AC$ 或其延長線的垂線,其差爲一定.

2. 由正三角形 $ABC$ 內的一點 $O$ 到各邊的垂線 $OD$, $OE$, $OF$ 的和.

3. $\triangle ABC$ 內的一點 $O$, 到各邊的垂線的和, 爲其 $O$ 點的任何位置均爲一定 則此三角形 $ABC$ 爲正三角形.

4. 將定長的直線內分,在其上各作正三角形,則其高的和爲一定; 又外分時如何?

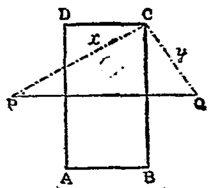
5. 正三角形 $ABC$ 的 $AB$ 邊上一動點 $D$, 又在 $AC$ 邊上取 $AE$ 等於 $BD$, 則直線 $BE$, $CD$ 的交角爲一定.

6. $\triangle ABC$ 的頂角 $A$ 爲一定, $\angle B$ 及 $\angle C$ 的平分線的交點爲 $I$, 其外角的平分線的交點爲 $O$, 則

$$\angle BIC \text{ 及 } \angle BOC \text{ 的大小一定.}$$

〔註〕　$\angle BIC=\angle R+\frac{1}{2}\angle A$,　$\angle BOC=\angle R-\frac{1}{2}\angle A$.

7. 由 $P, Q$ 二定點到一定矩形頂點的距離的和及其差各為一定.




〔註〕 設距離的和為 $m$, 差為 $n$, 又由 $P$, $Q$ 到 $C$ 的距離各為 $x, y, x>y$, 則

$$x+y=m,\quad x-y=n.$$

$$\therefore\quad x=\frac{m+n}{2},\quad y=\frac{m-n}{2}.$$

## 8. 軌　跡

(1) 適合於此條件的各點,都在此圖形上.

(2) 此圖形上的各點都適合於所設的條件.

具備此二條件的圖形,為適合於其條件的點的軌跡;在軌跡研究上,不能不注意其定義.

雖某命題及其對偶常共有眞偽,但其逆及裏不一定是如此;故 (1), (2) 的一方或雙方將其對偶互換亦可.

$A$ 為 $B$.

此命題的

| | |
|---|---|
| 逆為 | $B$ 為 $A$; |
| 反面為 | $A$ 不為 $B$; |
| 對偶為 | $B$ 不為 $A$. |

故反面為逆的對偶.

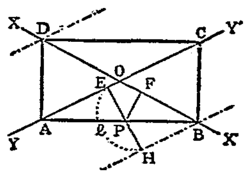
### 問　題　VIII

1. 垂直於等腰三角形 $ABC$ 的底邊 $BC$ 與 $AB, AC$, 或其延長線上的交點各為 $M, N$, 試求 $MN$ 的中點的軌跡.

2. 內分於定線分 $AB$ 上的一點 $C$, 在此直線的同側 $AC, BC$ 上各作正三角形 $ACM, CBN$, 求線分 $MN$ 的中點的軌跡.

〔註〕 以 $AB$ 為一邊作正三角形, 則得以 $MN$ 為對角線的平行四邊形.

3. 一點到相交二定直線的距離的和為一定長,求此點的軌跡.




〔註〕 設二定直線爲 $XX'$, $YY'$, 距離的和爲 $l$, 作與 $YY'$ 平行, 且距離爲 $l$ 的直線與 $XX'$ 相交於 $B, D, XX', YY'$ 的交點 $O$ 爲中心, 作頂點在 $XX', YY'$ 上的矩形 $ABCD$, 即爲所求的軌跡.

證明如第 7 節的例.

4. 一點到相交二定直線的距離的和爲一定長, 求此點的最小 (或大) 的範圍.

〔註〕 上題矩形 $ABCD$ 的內部 (或外部) 爲所要的範圍.

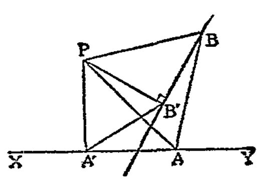
5. 正三角形 $ABC$ 內的一點, 到二邊 $AB$, $AC$ 的距離的和, 等於到 $BC$ 的距離的 2 倍, 求此點的軌跡.

〔註〕 通過重心, 平行於 $BC$ 的線分 (三角形內).

6. 由平行四邊形外的一點, 到各邊或其延長線上的四垂線的和爲一定, 則此點的軌跡, 其圖形如何?

7. 正三角形的一頂點在定直線 $XY$ 外的一定點 $P$, 他一頂點 $A$ 在 $XY$ 上, 求第三頂點 $B$ 的軌跡.

〔註〕 由 $P$ 到 $XY$ 的垂線 $PA'$, 作正三角形 $PA'B'$, 聯結 $B$, $B'$, 則




$$\triangle PA'A \equiv \triangle PB'B.$$

$$\therefore \angle PB'B = \angle R.$$

故 $B$ 在通過定點 $B'$ 與定直線 $PB'$ 垂直的定直線上.

若將正三角形置於相反的位置, 其理相同, 故 $B$ 點的軌跡爲二直線.

## 9. 作圖

作圖題的解法:

(1) 解析. (2) 作圖.

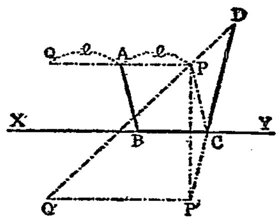
(3) 證明. (4) 討論.

解作圖題的普通技術:

(1) 圖形對稱的性質.　　(2) 將圖形平行移動等應用很廣.

(例) $A, D$ 爲定直線 $XY$ 的同側二定點,求在 $XY$ 上的二點 $B, C$, 而 $BC$ 的長等於已知線分 $l$, 且

$AB+BC+CD$ 爲最小.




〔解析〕 作圖,得 $XY \parallel AP, AP=l$, 則 $AB+BC+CD=AP+PC+CD$
$=l+PC+CD.$

由對於 $XY$ 爲對稱的 $P$ 的對稱點 $P'$ 與 $D$ 聯結的直線與 $XY$ 的交點爲 $C$.

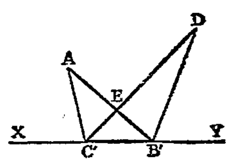
〔作圖〕 由 $A$ 向 $D$ 方作平行於 $XY$ 的線分, $AP$ 其長使等於 $l$, 對於 $XY$ 爲對稱的 $P$ 的對稱點 $P'$, 與 $D$ 聯結的直線與 $XY$ 相交於 $C$, 由 $A$ 作平行於 $PC$ 的直線與 $XY$ 相交於 $B$.

〔證明〕 $ABCD$ 爲平行四邊形,以 $BC=l$,

$$AB+BC+CD=AP+PC+CD.$$

$$\therefore\quad AB+CD=PC+CD.$$

在 $XY$ 上 $BC$ 以外取長爲 $l$ 的線分 $B'C'$.




(1) $\overrightarrow{BC}$ 與 $\overrightarrow{B'C'}$ 同方向,則

$$AB'+C'D=PC'+C'D,$$

$$PC'+C'D>PC+CD.$$

$$\therefore\quad AB'+C'D>AB+CD.$$

(2) $\overrightarrow{BC}$ 與 $\overrightarrow{B'C'}$ 爲反對方向.

$AB'$, $C'D'$ 的交點爲 $E$, 則

$$AE+EC'>AC',\quad DE+EB'>DB'.$$

$$\therefore\quad AB'+C'D>AC'+B'D.$$

但由 (1),

$$AC'+B'D>AB+CD.$$

$$\therefore\quad AB'+C'D>AB+CD.$$

因此所求得的點 $B, C$, 卽爲所要的點.

〔討論〕 點 $P$ 及 $P'$ 頗易求得, $DP'$ 與 $XY$ 的交點求得爲唯一點 $C$.

## 問 題 IX

1. $X, Y$ 爲平行二直線，$P$ 爲定點;過 $P$ 作一直線與 $X, Y$ 的交點各爲 $A, B$，且線分 $AB$ 等於已知長 $l$.

2. $\triangle ABC$ 內的一點 $P$，過 $P$ 點作平行於 $BC$ 的直線與邊 $AB$, $AC$ 的交點各爲 $D, E$，且

$$BD+CE=DE,$$

求 $P$ 點.

〔註〕 注意在內心.

3. $P$ 爲 $\triangle ABC$ 外的一點,過 $P$ 平行於 $BC$ 的直線與邊 $AB$, $AC$ 的交點各爲 $D, E$.

(1) $BD+CE=DE$.

(2) $BD-CE=DE$.

求 $P$ 點.

〔註〕 注意在傍心.

4. 二定直線相交於 $O$ 點,過定點 $P$ 又作一直線，此三直線以 $O$ 爲項點作三角形,今此三角形的一底角爲他一底角的三倍,求其作圖法.

〔註〕 在項點 $O$ 的外角四等分着想.

5. 作正六邊形 $ABCDEF$ 的一邊 $DE$ 上的一點 $P$，則 $AP$ 與 $PD$ 的差與一邊相等.

〔註〕 $ED$ 的延長線上一點 $Q$，使 $DQ=ED$，作 $AQ$ 的垂直平分線.

6. 已知二邊 $AB$, $AC$ 及其中線 $AD$ 的長,求作 $\triangle ABC$.

〔註〕 將 $AD$ 延長至二倍,卽已知三邊可作三角形.

7. 已知三中線作三角形.

8. 已知二邊 $AB$, $AC$ 及高 $AH$，作三角形.

9. 求作下列各三角形:

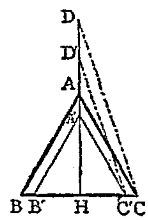
(1) 已知周長與二角.

(2) 已知一邊與二中線.

(3) 已知一邊與一中線及其一高.

(4) 已知二中線及一高.

**10.** 已知一邊與高的和,作一正三角形.




〔註〕 作任意的正三角形 $A'B'C'$, 以 $D'$ 爲高, 在 $A'H$ 的延長線上.

$$HD'=B'C'+A'H.$$

$HD'$ 或其延長線上的和等於線分 $HD$, 作 $DC$ 與 $D'C'$ 平行與 $B'C'$ 相交於 $C$, 作 $AC$ 使 $AC \parallel A'C'$ 與 $DH$ 相交於 $A$, 以 $AC$ 爲一邊,作正三角形 $ABC$.

**11.** 已知一邊與高的差,作正三角形.

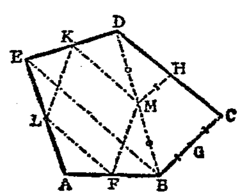
**12.** 已知一對角線與一邊的和或差,作正三角形.

**13.** 已知平行四邊形的對角線的交點及其四邊上的各一點, 求作此平行四邊形.

〔註〕 由對於對角線爲對稱的性質着想

**14.** 已知各邊中點的位置作五角形.

〔註〕 $F, G, H, K, L$ 各爲五角形 $ABCDE$ 的中點.




(1) 作平行四邊形 $KLFM$.

(2) 過 $G$ 點作直線 $BGC$ 與 $MH$ 平行, 則 $$BG=GC=MH.$$

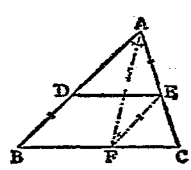
(3) 以 $M$ 爲中點,將 $BM$ 延長至 $D$ 點.

(4) 將 $BF$ 延長至 $A$ 點, 以 $F$ 爲 $AB$ 的中點

(5) 將 $DK$ 延長至 $E$ 點, 以 $K$ 爲 $DE$ 的中點.

因此證明 $H$ 爲 $CD$ 的中點, $L$ 爲 $AE$ 的中點卽可.

**15.** 作一直線與 $\triangle ABC$ 的一邊 $BC$ 平行,與其他二邊 $AB, AC$ 各交於 $D, E$, 並 $BD=AE$.

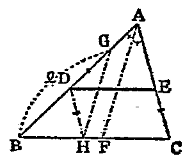



〔註〕 作 $\angle A$ 的平分線 $AF$, 由 $F$ 作 $EF$ 平行於 $AB$, 與邊 $AC$ 相交於 $E$.

**16.** 作與定直線 $MN$ 平行的直線,與 $\triangle ABC$ 的二邊 $AB, AC$ 各交於 $D, E$, 且 $AD=EC$.

〔註〕 由 $C$ 作與 $MN$ 平行的直線,與 $\angle A$ 的平分線相交於一點.

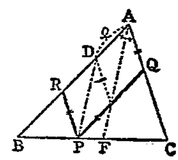
17. 作一直線與 $\triangle ABC$ 的邊 $BC$ 平行,且與 $AB$, $AC$ 各交於 $D, E$, 且 $BD+CE=l$.




〔註〕 在 $BA$ 上取 $BG=l$, 由 $G$ 點作 $GH$ 與 $\angle A$ 的平分線 $AF$ 平行.由 $H$ 作 $HD$ 與 $AC$ 平行,卽得 $D$ 點.

18. 由上題,若 $BD-CE=l$.

〔註〕 如上題, $BG=l$, 作 $GH\perp AF$.




19. 所給 $\triangle ABC$ 的邊 $BC$, $AC$, $AB$ 上取 $P, Q, R$, 則 $ARPQ$ 爲平行四邊形, 且二邊 $PQ$, $PR$ 的差爲定長 $l$.

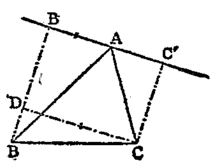
〔註〕 在 $AB$ 上取 $D$, 使

$$AD=PQ-PR=l.$$

由 $A$ 作與 $\angle A$ 的平分線 $AF$ 平行的直線,則點 $P$ 的位置卽定.

20. 前題平行四邊形 $PQAR$ 的周長,等於所給的長.

21. 過 $\triangle ABC$ 的頂點 $A$ 作一直線,使 $AB$, $AC$ 在其上的正射影的和爲最大.




〔註〕 $B, C$ 的正射影各爲 $B'$, $C'$.

(1) 直線在三角形外,作

$$B'C' \parallel CD,$$

則 $$B'C'=CD\leqq BC.$$

故 $B'C'$ 平行於 $BC$ 時,則

$$AB'\pm AC'=BC,$$

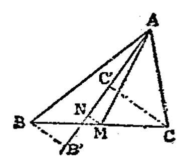
爲極大 (但 $B, C$ 爲銳角).

(2) 直線在三角形內, $AM$ 爲中線,作

$$B'C'\perp MN,$$

$$AC'+AB'=2AN,$$

$$AN\leqq AM.$$




故直線 $AB'$ 與 $AM$ 相重時,則

$$AB'+AC'=2AM,$$

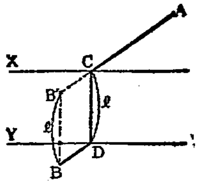
爲極大 ($B$ 或 $C$ 爲鈍角亦相同).

$\angle A=\angle R$, 則 $BC=2AM$;

$\angle A<\angle R$, 則 $BC<2AM$;

$\angle A>\angle R$, 則 $BC>2AM$.

**22.** 平行二直線 $X, Y$, 在其二外側各有一定點 $A, B$, 求由其一定點 $A$ 至他一定點 $B$ 的最短路線,但路線在平行間的部分,須與平行線垂直.




〔註〕 $X, Y$ 的距離爲 $l$, 由 $B$ 作 $Y$ 的垂線,在其上取 $B'$, 使 $BB'=l$, 直線 $AB'$ 與 $X$ 的交點爲 $C$, 由 $C$ 作 $Y$ 的垂線 $CD$, 則 $ACDB$ 爲所求的路線.

**23.** 河的兩邊岸上不等的距離處,各有一人家,今在二家等距離之處架設一橋,求其位置,設河的兩岸爲平行,橋與岸成直角架設.

〔註〕 如前題求 $B'$, $AB'$ 的垂直平分線與 $X$ 的交點爲 $C$, 即爲此橋的一端.

**24.** 二定直線 $XOX'$, $YOY'$ 相交於 $O$, 角 $XOY$, 角 $YOX'$ 內各有定點 $A, B$, 在直線 $XOX'$, $YOY'$ 上各取 $P, Q$, 使四邊形 $APQB'$ 爲平行四邊形.

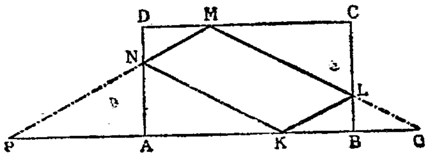
〔註〕 由 $XX'$ 上的任意一點 $M$ 作線分, $MN$ 與 $AB$ 平行,且與 $AB$ 等長,通過 $N$ 作與 $XX'$ 平行的直線,與 $YY'$ 的交點爲 $Q$

**25** 所給矩形 $ABCD$ 的一邊 $AB$ 上有一定點 $K$, 以 $K$ 爲頂點作平行四邊形 $KLMN$, $L, M, N$ 各在 $BC, CD, DA$ 上,且其平行四邊形的周爲最小.

〔註〕 $KLMN$ 爲矩形的內接四邊形.

$$\triangle KBL\equiv\triangle MDN.$$

$$\therefore\ KB=DM.$$



$M$ 卽爲已知的定點.

其次求對於 $DA$ 及 $BC$ 的 $K$ 的對稱點 $P, Q$ 與 $M$ 聯結.

**26.** 所給銳角 $BAC$ 及角內的一點 $O$, 求 $AB, AC$ 上的各點 $M, N$, 使 $OM+MN+NO$ 爲最小

**27.** 在所給的銳角內有二點 $P, Q$, 由 $P$ 至此角的一邊上的一點 $A$, 由 $A$ 至他邊上的一點 $B$, 由 $B$ 至 $Q$, 使路程 $PABQ$ 爲最短,求 $A, B$ 的位置.

**28.** $\triangle ABC$ 的邊 $AB, AC$ 上各有一點 $P, Q$, 將 $B, Q, P, C$ 四點順次聯結,使 $BQ+QP+PC$ 爲最小,求 $P, Q$ 二點.

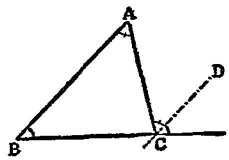
**29.** 求作一正三角形,此三角形的頂角各在三條所給的平行直線上.

〔註〕 應用問題 VIII, 第 7 題.

**30.** 在所給正方形的一邊上的一點爲頂點,作一內接正三角形.

**31.** 以平行二直線間的一定點爲頂點,其他二頂點在各直線上,作正三角形.

## 10. 計算問題




直線形的計算問題, 多數爲關於多角形的邊或角的大小的問題.

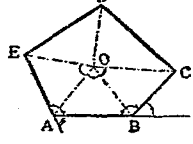
〔定理〕 三角形三內角的和,等於 2 直角.

過此三角形的一頂點, 作與對邊平行的直線,卽可證明.

基此定理.

〔系 1〕 $n$ 角形的內角的和,等於 $2n-4$ 直角.

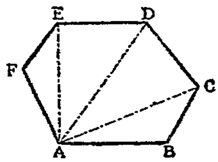
例如多角形 $ABCDE$ 內一點 $O$, 可作三角形 $OAB, OBC, \cdots\cdots OEA$, 其個數與多角形的邊數相同.




$O$ 點一周的角的總和爲 4 直角.

又由 $n$ 角形的各頂點 $A, B, \cdots\cdots$ 將邊延長, 各頂點的內角與外角的和,都爲 2 直角,則其總和爲 $2n$ 直角,由此卽可得內角的和

〔系 2〕 $n$ 角形的外角的和,等於 4 直角




多角形的對角線分,分此多角形成幾個三角形.

例如由一頂點 $A$ 作得的對角線的個數,為除去 $A$ 與其相鄰的兩頂點 $B$ 及 $F$ 所引的線而定.

〔定理〕　由 $n$ 角形的頂點所作的對角線的個數,等於 $n$

〔系〕　$n$ 角形的對角線的總數,等於 $\frac{1}{2}n(n-3)$.

## 問　題　X

**1.**　求正八角形,正十五角形的各一角的大小.

**2.**　正多角形的各內角為 $135°$, 其邊數如何?

**3.**　正多角形的一外角為 $15°$, 求其邊數.

**4.**　對角線的總數為 44, 求此多角形的邊數.

**5.**　梯形 $ABCD$ 的三邊 $AB$, $BC$, $CD$ 相等,邊 $AD$ 為邊 $AB$ 的 2 倍,此梯形的各內角的大小如何?

**6.**　等角六角形的四邊的長, 順次為 1 公尺, 3 公尺, 3 公尺, 2 公尺,求其他二邊的長.

〔註〕　將一邊延長,即得一正三角形.

**7.**　邊數為 $m$, $n$, $p$ 的三種正多角形,各內角的和為 4 直角,則

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}.$$

〔註〕　$\dfrac{2m-4}{m}+\dfrac{2n-4}{n}+\dfrac{2p-4}{p}=4.$

$$\therefore\quad 6-4\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)=4.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}.$$

**8.**　在凸七邊形 $ABCDEFG$ 中,角 $A$, $B$, $C$ 的大小,各為 $a$, $b$, $c$, 且 $AG \parallel DE$, 則角 $D$ 的大小如何?

**9.**　三角形的周邊的長為一定, 一邊的長為其他一邊的長的 2 倍, 則

其最短一邊與周邊的長的比爲在 $\frac{1}{6}$ 與 $\frac{1}{4}$ 之間,試證明之.

〔註〕 三角形三邊的長,各爲 $x$, $2x$, $y$, 周長爲 $l$, 則

$$3x+y=l, \quad y>2x-x, \quad \therefore \quad y>x.$$

故 $x$ 爲最短的一邊,因此 $y<2x+x$.

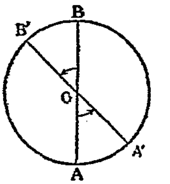
$$6x>l>4x, \quad \therefore \quad \frac{1}{6}<\frac{x}{l}<\frac{1}{4}.$$

# 第 二 章　圓

## 11. 弧及弦的關係問題

圓爲對於其中心爲對稱,一切半徑均相等,故在中心的周任何迴轉,常與原圓一致. 由此得

〔定理〕 在同(或等)圓中,相等弧所對的弦及中心角各各相等;其逆,相等的弦或中心角所對的劣弧相等.




又圓心與弦的兩端聯結,即得一等腰三角形,故比較其等腰三角形,得

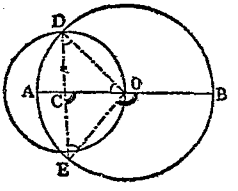
〔系 1〕 在同(或等)圓中,兩劣弧不等,則大弧所對的弦及中心角比小弧所對的弦及中心角大. 其逆亦眞.

下系很易證明.

〔系 2〕 在同(或等)圓中,中心角與其所對的弧互爲比例.

〔系 3〕 在同(或等)圓中,大弦到中心的距離比小弦到中心的距離小. 其逆亦眞. 因此等弦與中心的距離相等.

〔例〕 圓 $O$ 的任意直徑爲 $AB$, 設 $C$ 爲半徑 $AO$ 的中點與 $A$ 間的一點,以 $C$ 爲中心, $CO$ 爲半徑的圓與圓 $O$ 相交於 $D$, $DC$ 的延長線與圓 $O$ 相交於 $E$, 則弧 $BE$ 等於弧 $AD$ 的 3 倍.




〔解〕 $\triangle COD$ 爲等腰三角形.

$\therefore\ \angle OCE = 2\angle COD.$

又 $\triangle ODE$ 爲等腰三角形.

$\therefore\ \angle D = \angle E = \angle COD.$

但　$\angle BOE = \angle OCE + \angle OEC.$

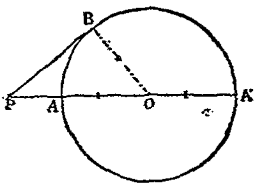
$\therefore\ \angle BOE = 3\angle AOD.$

因此圓 $O$ 的弧 $BE$ 等於弧 $AD$ 的 3 倍.

## 問題 XI

1. 不在中心 $O$ 圓周上的一點 $P$,與此圓周上的一點 $A$ 聯結線分 $PA$ 的長是直線 $PA$ 通過中心 $O$ 時爲最大或最小.

〔註〕 直徑的一端 $A$ 通過 $P$, 又圓周上 $A$ 以外的任意一點 $B$, 則在 $\triangle PBO$ 中,




$$OP-OB<PB.$$

$$\therefore\quad PA<PB.$$

又直徑的他一端爲 $A'$, 則

$$OP+OB>PB.$$

$$\therefore\quad PA'>PB.$$

2. 通過中心 $O$ 圓內的一點 $P$ 的弦中最小的一條,爲垂直於直線 $PO$ 的弦.

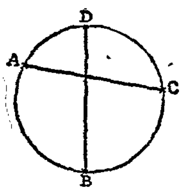
3. 圓的弦 $AB$ 延長至 $C$, 使 $BC$ 等於其半徑, $C$ 與中心的聯結線 $CDE$ 與圓周相交於 $D, E$, 則弧 $AE$ 等於弧 $BE$ 的 3 倍.

4 將中心 $O$ 圓的弦 $AB$ 三等分,由 $O$ 通過此分點作二半徑,將弧 $AB$ 分爲三部分,此三部分的大小如何?

5. $ABCD$ 爲一圓的周上順次四點,

弧 $AB>$ 弧 $BC>$ 弧 $CD>$ 弧 $DA$,

則弦 $BD>$ 弦 $AC$.



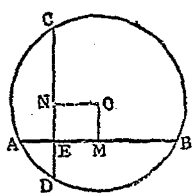

〔註 弧 $AB>$ 弧 $CD$,

弧 $BC>$ 弧 $AD$.

$\therefore$ 弧 $DAB>$ 弧 $ADC$,

弧 $BCD>$ 弧 $ADC$.

因此弧 $DAB$, $BCD$ 任一爲劣弧, 則必比弧 $ADC$ 大.

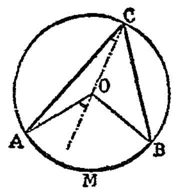



6. 與圓的定弦 $AB$ 與垂直的弦 $CD$, 被定弦分爲二部分,其差與弦 $CD$ 的位置無關.

〔註〕 與圓的定弦 $AB$ 垂直的弦 $CD$ 與 $AB$ 的交點爲 $E$. 由中心 $O$ 到 $AB, CD$ 的垂足爲 $M, N$,

則
$$CN=ND.$$
$$\therefore\quad CE-DE=2EN=2OM.$$

## 12. 圓周角的問題

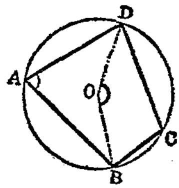



圓 $O$ 的弧 $AMB$ 的共軛弧上的任意一點 $C$, 則可作二個等腰三角形 $OAC$, $OBC$, 詳察此各等腰三角形的底角與頂角的外角的大小,得

〔定理〕 圓周角等於對同弧上的中心角的一半.

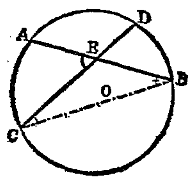
此爲很重要的定理,由此,得

〔系 1〕 同弧上的圓周角相等.




〔系 2〕 圓內接四邊形的對角互爲補角. 其逆亦眞.

〔例〕 過圓內一點的二弦所成的角,等於其相對二截弧所對的中心角的和的半.




〔解〕 過圓內的一點 $E$ 的二弦 $AB$, $CD$, 則於 $\triangle BCE$,
$$\angle AEC=\angle EBC+\angle ECB.$$
但 $O$ 爲中心,故
$$\angle EBC=\tfrac{1}{2}\angle AOC,$$
$$\angle ECB=\tfrac{1}{2}\angle BOD.$$
$$\therefore\quad \angle AEC=\tfrac{1}{2}(\angle AOC+\angle BOD).$$

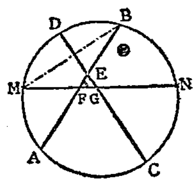
### 問 題 XII

1. 在 $P$ 點相交的二直線,與一定圓各相交於 $A$, $A'$; $B$, $B'$, 則 $\angle APB$ 與立於弧 $AB$, $A'B'$ 上的圓周角的關係,就 $P$ 點的種種位置而研究之.

2. 中心 $O$ 的圓的直徑 $AOC$ 上,在 $O$ 與 $C$ 之間的一點 $B$, 通過 $B$ 作弦 $EBD$, 若弧 $AD$ 爲弧 $CE$ 的任何倍,則 $\angle BEO$ 是 $\angle BOE$ 的 $n$ 倍 但 $n$ 爲正整數.

3. 圓的二弦 $AB$, $CD$ 相交於此圓內一點 $E$, 過弧 $AD$ 的中點 $M$ 與弧 $BC$ 的中點 $N$ 的直線與 $AB$, $CD$ 成等角.

〔註〕 $MN$ 與弦 $AB$, $CD$ 的交點各爲 $F$, $G$, 則 $\angle EFG=\angle FBM+\angle FMB=$弧 $AM$ 上的圓周角+弧 $BN$ 上的圓周角$=\frac{1}{2}$(弧 $AD$ 上的圓周角+弧 $BC$ 上的圓周角).



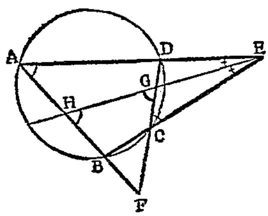

$\angle EGF$ 同様.

$\therefore\ \angle EFG=\angle EGF$.

4. $\triangle ABC$ 的外接圓的弧 $AB$, $AC$ 的中點聯結的直線,爲角 $A$ 的垂直平分線.

5. 圓內接四邊形的對邊的延長線所成的角的平分線互相垂直.

〔註〕 內接四邊形 $ABCD$ 的對邊 $BC$, $AD$ 及 $AB$, $CD$ 延長的交點各爲 $E$, $F$, $\angle AEB$ 的平分線與 $DF$, $AF$ 的交點各爲 $G$, $H$, 則




$\angle FGH=\angle GCE+\angle CEG$,

$\angle FHG=\angle HAE+\angle AEH$.

但 $\angle GCE=\angle HAE$,

$\angle CEG=\angle AEH$.

$\therefore\ \angle FGH=\angle FHG$.

6. 四邊形的二組對邊延長所成的角的平分線爲正交, 則此四邊形爲內接於圓.

7. 通過圓內接四邊形對角線的交點與一組對邊所成的角的平分線垂直的直線,爲二對角線所成的角的平分線.

8. 圓內接六邊形的二組對邊爲互平行,則其第三組對邊亦互相平行.

9. 一圓的內接凸四邊形 $ABCD$, 對邊 $AB$, $CD$ 延長的交點爲 $P$, $AD$, $BC$ 延長的交點爲 $Q$, $\angle APD=30°$, $\angle CQD=40°$; 則此四邊形的各內角爲幾度? 但 $B$ 爲在 $A$ 與 $P$ 之間, $D$ 爲在 $A$ 與 $Q$ 之間. 有如此之限制, 上述的情形將有幾種解答?

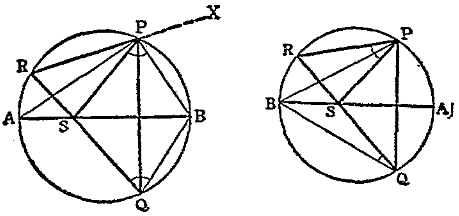
〔註〕 在 $AB$ 的二側 $CD$ 的位置,又在 $AD$ 的二側 $BC$ 的位置來着想,將有四種解答.

**10.** $\triangle ABC$ 的角 $A$ 的外角的平分線與外接圓相交於 $P$, 則

$$PB=PC.$$

**11.** 由圓周上的一點 $P$ 作垂直於其直徑 $AB$ 的弦 $PQ$, 由 $Q$ 作與 $AB$ 相交於 $S$ 的任意弦 $QR$, $R$, $S$, $B$ 各與 $P$ 聯結, 則 $PB$ 爲 $\angle SPR$ 或其補角的平分線.

〔註〕 $P$, $Q$ 爲對於直徑 $AB$ 爲對稱, 故 $\angle BPS=\angle BQS$.

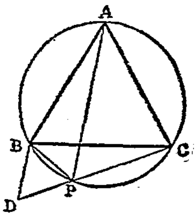



但 $RP$ 的延長線爲 $PX$, 則

$$\angle BPR=\angle BQR, \text{ 或 } \angle BPX=\angle BQR.$$

$$\therefore \quad \angle BPS=\angle BPR, \text{ 或 } \angle BPX=\angle BPS.$$

**12.** 設 $P$ 爲正三角形 $ABC$ 的外接圓周上的一點, 則 $AP$, $BP$, $CP$ 中何邊等於其他二邊的和.

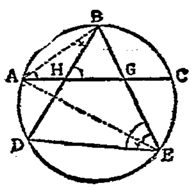



〔註〕 如圖在 $BP$ 上作正三角形 $BPD$, $C$, $P$, $D$ 爲在同一直線上.

$$\triangle ABP\equiv\triangle CBD.$$

$$\therefore \quad AP=CD=BP+CP.$$

**13.** 弧 $AC$ 的中點爲 $B$, 由 $B$ 作二弦 $BD$, $BE$, 與弦 $AC$ 各交於 $H$, $G$, 則 $D$, $H$, $G$, $E$ 爲在同一圓周上.




〔註〕 $B$ 爲弧 $AC$ 的中點, 故

$$\angle BAC=\angle BEA,$$

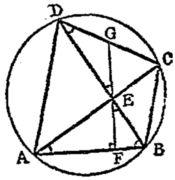
又 $$\angle ABD=\angle AED.$$

$$\therefore \quad \angle BHC=\angle DEG.$$

**14.** $A, B, C, D$ 爲圓周上順次的四點,弧 $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ 的中點各爲 $a, b, c, d$, 則直線 $ac$, $bd$ 爲垂直.

**15.** 圓內接四邊形的二對角線互相垂直相交, 由其交點到一邊的垂線的延長線爲平分其對邊.

〔註〕 由內接四邊形 $ABCD$ 的對角線的交點 $E$, 到 $AB$ 的垂線 $EF$ 與對邊 $CD$ 相交於 $G$ 點,則




$$\angle BAC=\angle BDC,$$

$$\angle BEF=\angle DEG,$$

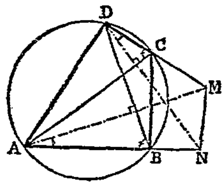
又 $\angle BAE=\angle BEF=\angle R-\angle ABE.$

$$\therefore\ \angle GDE=\angle GED.$$

**16.** 圓 $O$ 的內接四邊形 $ABCD$, 對角線 $AC$, $BD$ 爲直交,則由中心 $O$ 到 $AB$ 的距離 $OM$ 等於 $CD$ 的半分.

〔註〕 由上題的圖,將 $G, E$ 各與 $O, M$ 聯結即得平行四邊形.

**17.** 圓內接四邊形 $ABCD$ 的頂點 $A, D$ 各作對角線 $BD$, $AC$ 的垂線與邊 $CD$, $AB$ 相交於 $M, N$, 則直線 $MN$, $BC$ 互相平行.




〔註〕 $\angle MDN=\angle R-\angle ACD,$

$$\angle MAN=\angle R-\angle ABD.$$

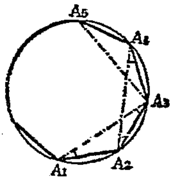
$$\therefore\ \angle MDN=\angle MAN.$$

因 $ANMD$ 爲圓的內接四邊形.

$$\therefore\ \angle BCD=\angle NMD.$$

**18** 由圓 $O$ 外的一點 $A$, 作二割線 $ABC$, $ADE$, 與圓周相交於 $B$, $C$; $D$, $E$, 則 $A$ 點爲直線 $BD$ 截圓 $ACE$ 的弧的中點.

**19.** 圓的內接奇數邊的多角形的內角都相等,則其多角形爲正多角形,試證明之.




〔註〕 內接多角形 $A_1A_2\cdots\cdots$ 爲奇數邊且等角.

$$\angle A_2A_1A_3=\angle A_2A_4A_3.$$

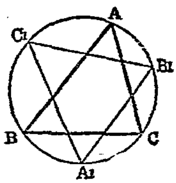
且 $\angle A_1A_2A_3=\angle A_2A_3A_4.$

$$\therefore\ \angle A_1A_3A_2=\angle A_3A_2A_4.$$

$$\therefore\ A_1A_2=\angle A_3A_4.$$

即由於一邊相等,則邊數爲奇數時,全部的都相等.

**20.** 一圓有內接三角形 $ABC$, 其各等角的平分線與圓相交的點爲頂點作第二三角形 $A_1B_1C_1$, 再以此三角形的各頂角的平分線與圓的交點爲頂點作第三三角形 $A_2B_2C_2$, 順次作得三角形如 $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$,……, $A_nB_nC_n$, 此等三角形以 $n$ 增大愈近於正三角形,試證明之.




〔註〕 $A_1$, $B_1$, $C_1$ 各爲弧 $BC$, $CA$, $AB$ 的中點,

$$\angle A_1=\tfrac{1}{2}(\angle B+\angle C)=\angle R-\tfrac{1}{2}\angle A.$$

同様

$$\angle A_n=\angle R-\tfrac{1}{2}\angle A_{n-1},$$

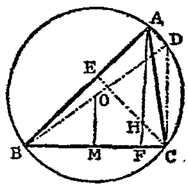
$n$ 順次爲 2, 3,……代入

$$\lim_{n\to\infty}\angle A_n=\angle R\left\{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots\right\}=\frac{2}{3}\angle R.$$

## 13. 關於三角形的外接圓問題

關於三角形外接圓問題非常之多,其應用亦廣.

〔定理〕 由三角形的頂點到垂心的距離,爲由外接圓的中心到對邊所作垂線的 2 倍.




$\triangle ABC$ 的外接圓的中心爲 $O$, 過 $B$ 的直徑爲 $BD$, 又由 $C$, $A$ 到對邊各作垂線 $CE$, $AF$, 卽得垂心 $H$.

$$\angle BAD=\angle BCD=\angle R.$$

$CDAH$ 爲平行四邊形,又由 $\triangle BCD$ 的斜邊中點 $O$ 作 $BC$ 的垂線 $OM$, 則

$$CD=2OM. \quad \therefore \quad AH=2OM.$$

如此這定理卽可簡單的證明.

〔例〕 三角形的外心,重心,垂心在同一直線上,而垂心與重心的距離爲外心與重心的距離的 2 倍.

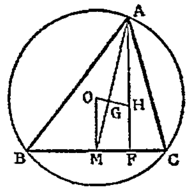
〔解〕 由 $\triangle ABC$ 的外接圓的中心 $O$ 到 $BC$ 的垂線爲 $OM$, 則 $AM$ 爲中線,又垂心爲 $H$, 則

$AH=2OM$.

故 $AM$ 與 $OH$ 的交點爲 $G$, 則

$$AG=2GM,$$

$$GH=2OG.$$



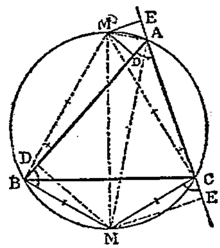

$G$ 爲重心,故垂心與重心的距離,爲外心與重心的距離的 2 倍.

## 問 題 XIII

1. 由 $\triangle ABC$ 的外接圓的弧 $BC$ 的中點到二邊 $AB, AC$ 所作垂線的足各爲 $D, E$, 則

$$AD=AE=\tfrac{1}{2}(AB\pm AC).$$

〔註〕 設弧 $BC$ 的中點爲 $M$, $M$ 在 $\angle A$ 之內.




$\triangle MBD\equiv\triangle MCE$.

$\therefore\ BD=CE$.

又 $\triangle ADM\equiv\triangle AEM$.

$\therefore\ AD=AE=\tfrac{1}{2}(AB+AC)$.

若 $M$ 爲弧 $BAC$ 的中點,則

$\triangle MBD\equiv\triangle MCE$. $\therefore\ BD=CE$.

又 $\triangle ADM\equiv\triangle AEM$. $\therefore\ AD=AE$.

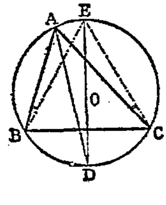
$\therefore\ AD=AE=\tfrac{1}{2}(AB-AC)$.

2. 中心 $O$ 的圓的內接三角形 $ABC$, 邊 $BC$ 的對頂點 $A$, 其反對側的弧 $BC$ 的中點爲 $D$, 則

$$\angle ADO=\tfrac{1}{2}(\angle B-\angle C).$$

〔註〕 弧 $BAC$ 的中點爲 $E$, 則

$$\angle EBC=\angle ECB.$$




設此角爲 $\theta$, 又

$$\angle ABE=\angle ACE=\angle ADE.$$

設此角爲 $x$.

$\therefore\ \angle B=\theta+x,\quad \angle C=\theta-x.$

$\therefore\ 2x=\angle B-\angle C.$

**3.** 由銳角三角形 $ABC$ 的外接圓 $O$ 的劣弧 $BC$ 的中點 $M$，到 $AC$，$BC$ 的距離爲 $x$，由中心 $O$ 至 $AC$，$AB$ 的距離各爲 $y$，$z$，則 $x=y+z$.

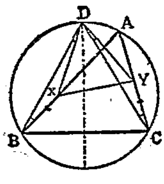
〔註〕 $AN$ 爲直徑，則直線 $MN$ 截取角 $BAC$ 爲等腰三角形，故可應用第 7 節的例.

**4.** 由三角形的一頂點至對邊所作垂線的足，爲在此垂線與圓周的交點與垂心的中途.

**5.** 三角形 $ABC$ 的 $A$ 的內角及其外角的平分線與外接圓各交於 $P$，$Q$，$BC$ 交於 $R$，$S$，則 $S$ 爲三角形 $PQR$ 的垂心，試證明之.

**6.** $\triangle ABC$ 的二邊 $AB$，$AC$ 上各取相等的線分 $BX$，$CY$，聯結 $XY$，則 $\triangle AXY$ 的外接圓必通過弧 $BAC$ 的中點.

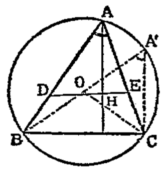
〔註〕 垂直於 $BC$ 的直徑與弧 $BAC$ 的交點爲 $D$，則




$$BD=CD,$$
$$\angle ABD=\angle ACD,$$
$$BX=CY.$$
$$\therefore\quad \triangle BDX\equiv\triangle CDY.$$
$$\therefore\quad \angle BDC=\angle XDY$$
$$=\angle XAY.$$

**7.** $O$ 爲銳角三角形 $ABC$ 的外心，$H$ 爲垂心，在 $AB$ 上的 $AD$ 等於 $AH$，$AC$ 上的 $AE$ 等於 $AO$，則 $DE$ 等於 $\triangle ABC$ 的外接圓的半徑.

〔註〕 設通過 $B$ 的直徑的他端爲 $A'$，則




$$AD=A'C,\quad AE=A'O,$$
$$\angle DAE=\angle OA'C.$$
$$\therefore\quad \triangle ADE\equiv\triangle A'CO.$$
$$\therefore\quad DE=CO$$

**8.** $\triangle ABC$ 的外接圓周的一點 $P$ 到邊 $BC$，$CA$，$AB$ 或其延長線上的垂線足爲 $L$，$M$，$N$ 在同一直線上.

〔註〕 聯結 $L$，$N$ 與 $M$，$N$，以 $PB$ 爲直徑的圓通過 $L$，$N$.

$$\therefore\quad \angle BNL=\angle BPL.$$

又 $PBCA$ 爲內接於圓，故

$\angle PBL=\angle PAM.$

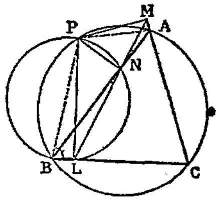
由此直角三角形 $PBL$, $PAM$ 為等角.

$\angle BPL=\angle APM.$

$\therefore\ \angle BNL=\angle APM.$

但 $PNAM$ 爲以 $PA$ 爲直徑的圓的內接形,故 $\angle APM=\angle ANM.$

$\therefore\ \angle BNL=\angle ANM.$




**9.** $\triangle ABC$ 的外接圓周上一點 $P$ 的西摩松線 (Simson's line, 前題的 $LNM$) 爲與垂直於 $BC$ 的直線 $PL$, 與外接圓周上的交點 $Q$ 與 $A$ 的聯結直線平行.

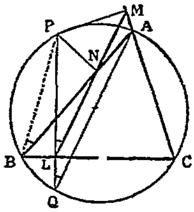
〔註〕 以 $PB$ 爲直徑的圓來看,則

$\angle PLN=\angle PBN.$

但在弧 $AP$ 上的圓周來比較,則

$\angle PQA=\angle PBA.$

$\therefore\ \angle PLN=\angle PQA.$




**10.** $\triangle ABC$ 的外接圓周上一點 $P$ 的西摩松線,爲平分此三角形的垂心與 $P$ 的聯結線分.

〔註〕 $AH$ 與外接圓周的交點爲 $K$, 則 $HK$ 被 $BC$ 垂直平分.

$PK$ 與 $BC$ 的交點爲 $D$, 則 $DK=DH$, 故

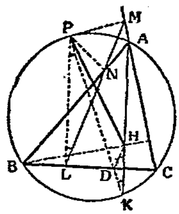
$\angle DKH=\angle DHK.$

又 $\angle PKA=\angle LPK=\angle PLN.$

故 $LN$ 平分直角三角形 $PLD$ 的斜邊 $PD$.

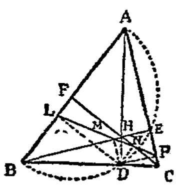
但 $\angle PLN=\angle DHK$, $PL\parallel KH$.

$\therefore\ LN\parallel DH.$



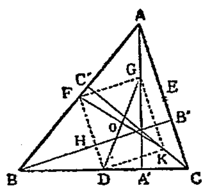

**11.** $\triangle ABC$ 的三垂線爲 $AD$, $BE$, $CF$; $D$, $E$, $F$ 爲其垂足,則由 $D$ 至 $AB$, $BE$, $CF$, $AC$ 所作四垂線的足在同一直線上.

〔註〕 例如以 $AB$ 爲直徑畫一圓, $D$ 爲 $\triangle ABE$ 的外接圓上的點, $L$, $M$, $P$ 即可決定爲其西摩松線.



**12.** 三角形的各頂點至對邊的垂線足,及各頂點與垂心間線分的中點,與三角形各邊的中點,都在同一圓周上.

〔註〕 由 $\triangle ABC$ 的頂點 $A, B, C$ 到各對邊的垂線足各爲 $A', B', C'$, 又邊的中點各爲 $D, E, F$, 又頂點與垂心聯結線分的中點各爲 $G, H, K$, 但由 $DKGF$ 爲矩形,故此四點爲 $DG$ 的中點 $O$ 爲中心的圓周上,此圓亦可知其爲通過 $A', C'$.




同樣在 $DEGH$ 來看.

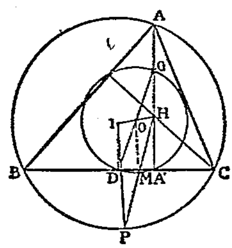
**13** 三角形的九點圓的直徑等於此三角形的外接圓的半徑,而九點圓的中心,爲外心與垂心聯結線分的中點.

〔註〕 由本節的定理.

**14.** 三角形的垂心與此三角形的外接圓周上的點聯結線分,爲被此三角形的九點圓周所平分.

〔註〕 $\triangle ABC$ 的垂心爲 $H$, $BC$ 的中點爲 $D$, $AH$ 的中點爲 $G$, 外心爲 $I$, 九點圓的中心爲 $O$, 外接圓周的點 $P$ 與 $H$ 的聯結線分與九點圓周的交點爲 $M$, 則 $DG$ 爲九點圓的直徑, $O$ 爲 $HI$ 的中點,且

$$IP=2OM.$$




**15.** 圓內接四邊形的對角線爲正交,則由其交點到各邊的垂線足及各邊的中點,在同一圓周上.

**16.** 銳三角形 $ABC$ 的一邊 $AB$ 上有任意一點 $P$, 以 $PC$ 爲直徑畫圓,與他二邊 $AC$, $BC$ 各交於 $D$, $E$; 其次在 $DC$ 上有任意一點 $Q$, 以 $PQ$ 爲直徑的圓,與 $DE$ 相交於 $R$, $QR$ 的延長線與 $BC$ 或其延長線的截點爲 $S$, 則 $\triangle PES$ 與 $\triangle PDQ$ 爲等角三角形,試證明之.

〔註〕 $PSER$ 爲以 $PS$ 爲直徑的圓的內接形.

**17.** 互相相交四直線的四個三角形的外接圓,爲通過同一點,試證明之.

**18.** 二圓 $O$, $O'$ 相交於 $A$, $B$, 過 $A$ 作與公弦 $AB$ 成等角的二直線

$PAX$, $QAY$, 與圓 $O$ 相交於 $P$, $Q$, 與圓 $O'$ 相交於 $X$, $Y$, 則 $PX=QY$, 試證明之.

〔註〕 $ABPQ$ 爲內接於圓,

$$\angle BAY=\angle BPQ.$$

$$\therefore\ \angle BPQ=\angle BAP.\quad \therefore\ BP=BQ.$$

其次證明 $\triangle BPX\equiv\triangle BQY$.

**19.** 有 $\triangle ABC$, 邊 $AC$ 及 $AB$ 上各有任意一點 $D$ 及 $E$, 以 $BD$, $CE$ 爲底邊, 在此等底邊與頂點 $A$ 同側作頂角,等於角 $A$ 的等腰三角形 $BDA_1$, $CEA_2$, 則頂點 $A$, $A_1$ 及 $A_2$ 同在一直線上.

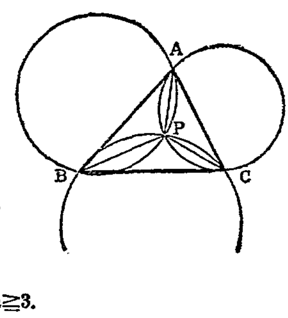
**20.** 在 $\triangle ABC$ 的邊 $BC$, $CA$, $AB$ 上, 每一邊各作正 $l$, $m$, $n$ 角形, 此三個正多角形的各外接圓的周通過於三角形內的同一點 $P$, 中心各在直線 $BC$, $CA$, $AB$ 對於 $P$ 的反對側,則

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1,$$

試證明之,並求 $l$, $m$, $n$ 之值.

〔註〕 $\angle BPC$ 爲正 $l$ 角形的 $l-1$ 邊上的圓周角,故

$$\angle BPC=\frac{2(l-1)}{l}\angle R.$$




同樣

$$\angle CPA=\frac{2(m-1)}{m}\angle R,$$

$$\angle APB=\frac{2(n-1)}{n}\angle R.$$

$$\therefore\ \frac{2(l-1)}{l}+\frac{2(m-1)}{m}+\frac{2(n-1)}{n}=4.$$

$$\therefore\ \frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1.$$

但 $$l,\ m,\ n\geqq 3.$$

若 $l$, $m$, $n$ 大於 3, 則上式不能成立.故

$$l=m=n=3.$$

**21.** $\triangle ABC$ 的邊 $BC$, $CA$, $AB$ 上各有一點 $P$, $Q$, $R$, 則 $\triangle AQR$, $\triangle BRP$, $\triangle CPQ$ 的外接圓周相交於一點.

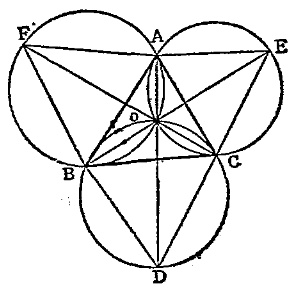
22. 在 $\triangle ABC$ 各邊上的外側作正三角形 $ABF, BCD, CAE$; $AD$, $BE, CF$ 爲通過於同一點,而

$$AD=BE=CF=AO+BO+CO.$$

〔註〕 $\triangle ABF$, $\triangle ACE$ 的外接圓的交點爲 $O$, 則 $O$ 在原三角形內,

$\angle BOF=\angle FOA=60°$,

$\angle COE=\angle EOA=60°$.




故 $BOE$, $COF$ 各爲直線.

$\angle BOC=120°$.

故 $\triangle BCD$ 的外接圓亦通過 $O$,

$\angle BOD=60°$.

$AOD$ 爲一直線.其次

$\triangle ACD\equiv\triangle ECB$,

$\triangle ABD\equiv\triangle FBC$.

$\therefore$ $AD=BE=CF$.

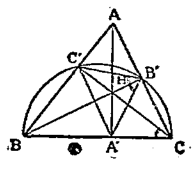
其次由問題 XII 第十二題.

〔注意〕 點 $O$ 與 $A$ 爲在三角形外 $BC$ 的同側,故

$$AD=BO+CO+AO.$$

23. 銳角三角形的高爲其垂足三角形的角的平分線.

〔註〕 銳角三角形 $ABC$ 的高 $AA', BB', CC'$, 垂心爲 $H$, 以 $BC$ 爲直徑的圓通過 $B', C'$.




$\therefore$ $\angle BB'C'=\angle BCC'$.

又以 $CH$ 爲直徑的圓通過 $C, A', H, B'$.

$\therefore$ $\angle HB'A'=\angle HCA'$.

$\therefore$ $\angle BB'C'=\angle BB'A'$.

24. 由 $\triangle ABC$ 的頂點 $A, B, C$ 到對邊所作垂線的足各爲 $A', B'$, $C'$, 則直線 $AA'$ 爲角 $C'A'B'$ 或其鄰角的平分線.

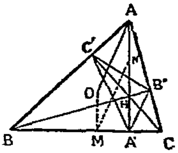
〔註〕 爲鈍角三角形鄰角的平分線.

25. 三角形的外心與各頂點的聯結直線,各與垂足三角形的各邊垂直.

〔註〕 $\triangle ABC$ 的外心爲 $O$, 垂足三角形爲 $A'B'C'$, 垂心爲 $H$, 由 $O$ 到 $BC$ 的垂線足爲 $M$, $AH$ 的中點爲 $N$, 但

$AN \parallel OM$, 且 $AN=OM$.

$\therefore \quad AO \parallel MN$.




由直角三角形 $BCB'$ 及 $BCC'$,

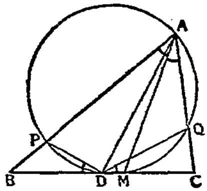
$MB'=MC'$.

且九點圓爲以 $MN$ 爲直徑, $B'C'$ 爲弦, 故 $MN$ 爲 $B'C'$ 的垂直平分線.

**26.** $\triangle ABC$ 的角 $A$ 的平分線與 $BC$ 的交點爲 $M$, $BC$ 的中點爲 $D$, $\triangle AMD$ 的外接圓周與 $AB$, $AC$ 的交點各爲 $P$, $Q$, 則 $BP=CQ$.

〔註〕 聯結 $P, D$ 及 $Q, D$, 得 $AMDP$ 爲內接於圓,

$\angle BDP=\angle MAP$.




又比較弧 $MQ$ 上的圓周角,得

$\angle MDQ=\angle MAQ$.

$\therefore \quad \angle BDP=\angle CDQ$.

又 $APDQ$ 爲內接於圓,故

$\angle APD=\angle CQD$.

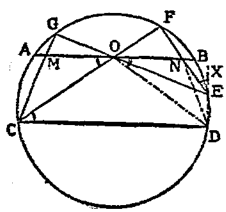
因此三角形 $BDP$ 的外接圓與 $CDQ$ 的外接圓相等 ($BD=CD$, $\angle BPD+\angle CQD=2\angle R$), 而

$\angle BDP=\angle CDQ. \quad \therefore \quad BP=CQ.$

**27.** $AB, CD$ 爲已知圓內的平行二定弦,弦 $AB$ 的中點爲 $O$, 弧 $BD$ 上的任意點爲 $E$, 作弦 $COF$ 及 $EOG$; 弦 $AB$ 與弦 $CG$, $EF$ 的交點各爲 $M$, $N$, 則四邊形 $ODEN$ 爲內接於圓,且 $OM=ON$.

〔註〕 將 $DE$ 延長得 $EX$, 四邊形 $CDEF$ 爲內接於圓.

$\angle FEX=\angle FCD$.




但 $\quad \angle OCD=\angle COA$.

$AB \parallel CD$, $O$ 爲 $AB$ 的中點.故

$\angle AOC=\angle BOD$.

$\therefore \quad \angle BOD=\angle FEX$.

因此四邊形 $ODEN$ 爲內接於圓.

$\therefore \quad \angle ODN=\angle OEN$.

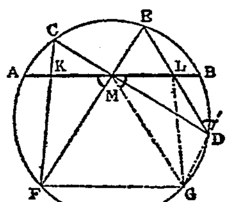
但 $\quad \angle MCO=\angle OEN$.

$$\therefore \quad \angle MCO = \angle NDO.$$

由此 $$\triangle MCO \equiv \triangle NDO.$$

$$\therefore \quad OM = ON.$$

**28.** 通過一圓的弦 $AB$ 的中點 $M$，作二任意弦 $CD$ 及 $EF$，$CF$，$ED$ 與 $AB$ 的交點各爲 $K$, $L$，則 $KM=ML$.



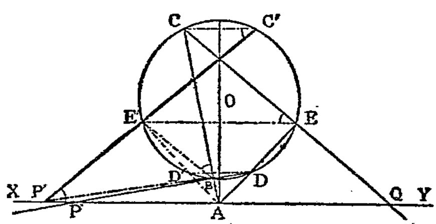

〔註〕由 $F$ 作與 $AB$ 平行的弦 $FG$，與上題同樣四邊形 $LDGM$ 爲內接於圓.

$$\triangle KFM \equiv \triangle LGM.$$

$$\therefore \quad KM = ML.$$

**29.** 由圓的中心 $O$ 作到圓外的直線 $XY$ 的垂線 $OA$，通過垂足 $A$ 作二割線 $ABC$, $ADE$；$BD$, $CE$ 與 $XY$ 的交點各爲 $P$, $Q$，則 $AP=AQ$.

〔註〕對於 $OA$ 爲對稱的 $C$, $D$, $E$ 的對稱點各爲 $C'$, $D'$, $E'$；$C'E'$ 與 $XY$ 的交點爲 $P'$，則 $AP'E'B$ 爲內接於圓.




又由對稱的關係 $A$, $D'$, $E'$ 爲在同一直線上，因之

$$\angle AE'B = \angle AP'B, \quad \angle BE'D' = \angle BDD' = \angle APB.$$

$$\therefore \quad \angle APB = \angle AP'B.$$

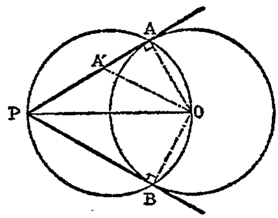
故 $P$ 與 $P'$ 一致，但

$$AP' = AQ. \quad \therefore \quad AP = AQ.$$

## 14. 關於內接圓的問題

圓 $O$ 外的一點 $P$，以 $PO$ 爲直徑畫一圓，則此圓必與圓 $O$ 僅在 $A$, $B$

二點相交. 此時 $\triangle PAO$, $PBO$ 爲全等的直角三角形, $PA=PB$.




今例如在 $PA$ 上,任意取 $A$ 以外的一點 $A'$, 則

$$OA'>OA.$$

故 $A'$ 在圓 $O$ 之外. 因此直線 $PA$ 與圓 $O$ 僅在 $A$ 一點爲兩者所共有,即 $PA$ 爲圓 $O$ 的切線*.

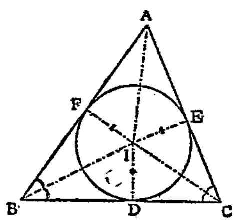
由此理出發,可得重要的定理如下:

〔定理〕 在圓周上的一點,與通過此點的直徑作正交的直線,即爲此圓的切線. 其逆亦眞.

〔系〕 從圓外的一點,僅得作二條切線,而其長相等.

由角的平分線上的一點,至該角二邊的垂線,其長相等.故今若由$\triangle ABC$的二角 $B$, $C$ 的平分線的交點 $I$, 到各邊的垂線 $ID$, $IE$, $IF$, 則

$$ID=IE=IF.$$




由此,

$$\triangle AIE\cong\triangle AIF.$$

$$\therefore\ \angle EAI=\angle FAI.$$

即 $I$ 在角 $A$ 的平分線上. 故三角形的三個角的平分線相會於同一點, 此卽內心.

〔定理〕 三角形有一個內接圓,而且只限於一個.

若就三角形一角的平分線與其他二角的外角的平分線而言,亦爲同樣.

〔系〕 三角形一角的平分線與其他二角的外角的平分線, 相會於一點. 以此點爲中心,得畫三角形的一邊及其他二邊的延長線所切的圓.

此卽關於傍心的定理.

(例) $\triangle ABC$ 的內接圓 $I$, 及角 $A$ 內的傍接圓 $O$, 與邊 $AB$ 及其延長線所切之點設各爲 $P$, $Q$, 則

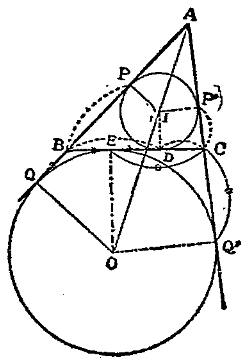
$$AP=\tfrac{1}{2}(AB+AC-BC),$$

$$AQ=\tfrac{1}{2}(AB+BC+CA).$$

---

* 與圓周只共有一點的直線,叫做切線.

〔解〕 若圓 $I$ 及 $O$ 與 $AC$ 所切之點各爲 $P'$, $Q'$; 又邊 $BC$ 與圓 $I$ 及 $O$ 所切之點各爲 $D$, $E$, 則




$$AP=AP',$$

$$BP=BD,\quad CP'=CD.$$

$$\therefore\quad AP+AP'=AB+AC-BC,$$

即 $$2AP=AB+AC-BC.$$

$$\therefore\quad AP=\tfrac{1}{2}(AB+AC-BC).$$

又 $AQ=AQ'$, $BQ=BE$, $CQ'=CE$.

$$\therefore\quad AQ+AQ'=AB+AC+BC,$$

即 $$2AQ=AB+AC+BC.$$

$$\therefore\quad AQ=\tfrac{1}{2}(AB+BC+CA).$$

此問題甚爲重要,故須注意.

## 問 題 XIV

1. 若 $\triangle ABC$ 的周爲 $2s$, 內接圓及角 $A$ 內的傍接圓與邊 $BC$ 所切之點各爲 $D$, $E$, 則

(1) $BE=s-c$. (2) $DE=c-b$.

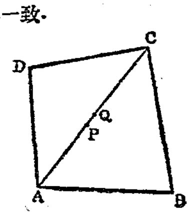
但 $b$, $c$ 各爲角 $B$, $C$ 的對邊.

2. 外接於圓的四邊形的對邊之和爲相等.

3. 在四邊形 $ABCD$, 爲 $AB+CD=BC+DA$ 時,則可畫內接於此四邊形的圓.

4. 將外接於圓的四邊形 $ABCD$, 用其一對角線 $AC$ 所分的二個三角形 $ABC$ 及 $ADC$ 的內接圓,與 $AC$ 所切之點爲一致.

〔註〕 設 $\triangle ABC$ 及 $\triangle ADC$ 的內接圓,與 $AC$ 所切之點,各爲 $P$, $Q$.




在 $\triangle ABC$,

$$AP=\tfrac{1}{2}(AB+AC-BC).$$

在 $\triangle ADC$,

$$AQ=\tfrac{1}{2}(AD+AC-DC).$$

$\therefore\quad AP-AQ=\frac{1}{2}\{(AB+CD)-(BC+AD)\}.$

但 $ABCD$ 外接於圓,

$$AB+CD=BC+AD.\quad \therefore\quad AP=AQ.$$

**5.** 若以直角三角形 $ABC$ 的斜邊 $BC$ 爲直徑畫圓,圓的 $A$ 點的切線與以其他二邊 $AB$, $AC$ 爲直徑的圓的交點各爲 $D$, $E$; 試證 $AD=AE$.

**6.** 三角形的二底角之差,與直角相等時,則在頂點所作三角形的外接圓的切線與底邊成垂直.

〔註〕 若於 $\triangle ABC$ 內, $\angle C-\angle B=\angle R$, $A$ 的切線與 $BC$ 延長的交點爲 $D$, 則

$$\angle ACB=\angle CAD+\angle ADC.$$

但 $$\angle CAD=\angle B.$$

$$\therefore\quad \angle ADC=\angle ACB-\angle CAD=\angle C-\angle B=\angle R.$$

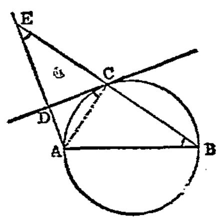
**7.** 若中心 $O$ 的圓周上一點 $A$ 的切線,與半徑 $OB$ 由 $B$ 方延長的交點爲 $C$, 又由 $A$ 引垂線 $AD$ 於 $CO$, 連結 $BA$, 則 $AB$ 將角 $DAC$ 平分.

**8.** 由圓的弦 $AB$ 的一端 $A$, 作垂直於他端 $B$ 的切線及直徑 $AD$, 則 $\angle BAC=\angle BAD$.

**9.** 通過等腰三角形 $ABC$ 的頂點 $A$, 引一直線,使其與底邊 $BC$ 或其延長線相交於 $D$, 與外接圓周相交於 $E$, 則 $AB$ 爲切於 $\triangle BDE$ 的外接圓.

**10.** 由圓的直徑 $AB$ 的一端 $A$, 作垂直於圓周上點的切線的垂線 $AD$, 若以此延長與 $BC$ 的延長之交點爲 $E$, 則 $AE=AB$.

〔註〕 若在 $C$ 的切線與 $AE$ 的交點爲 $D$, 則




$$\angle ACD=\angle ABC,$$

又 $$AC\perp BE.$$

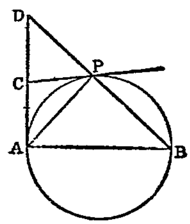
$$\therefore\quad \angle AEC=\angle ACD.$$

因此,

$$\angle AEB=\angle ABE.$$

$$\therefore\quad AB=AE.$$

**11.** 以 $AB$ 為直徑的半圓周上，在任意一點 $P$ 的切線，與在 $A$ 的切線的交點為 $C$，直線 $AC$，與 $BP$ 的延長線的交點為 $D$，則 $AC=CD$.




〔註〕 如連結 $AP$，則 $APD$ 為直角三角形.

又比較由 $C$ 的切線，

$$CA=CP.$$

$$\therefore\ CA=CD.$$

**12.** 將定圓周上的一點 $P$ 與定直徑上 $AB$ 的兩端所連結的直線，若與 $A$，$B$ 二點的二切線的交點各為 $Q$，$R$；則直線 $QR$，在 $P$ 點所引的切線及直徑 $AB$ 的三直線，在同一點相會，或互相平行，試證明之.

**13.** $AB$ 為定圓的定直徑，$s$，$t$ 為其兩端 $A$，$B$ 的切線，若此圓周上的一點為 $C$，直線 $AC$ 與 $t$ 的交點為 $E$，又直線 $BC$ 與 $s$ 的交點為 $D$. 直線 $DE$ 如與直線 $AB$ 在 $F$ 相交，則直線 $CF$ 為此圓之切線，試證明之.

**14.** 設 $\triangle ABC$ 的角 $C$ 為直角，其內接圓的 $AB$，$BC$ 所切之點各為 $D$，$E$；直線 $DE$，$AC$ 所延長的交點為 $F$，則 $BD=CF$.

〔註〕 設圓的中心為 $O$，則

$$CE=OD.$$

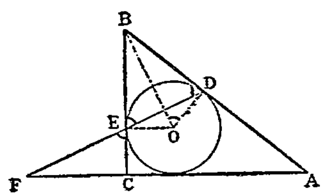
又 $\angle BOD=\angle BDE$

$$=\angle BED$$

$$=\angle CEF.$$

$$\therefore\ \triangle BOD\equiv\triangle FEC.$$

$$\therefore\ BD=CF.$$




**15.** 在中心 $P$ 的圓的直徑 $AB$ 的同側，引二弦 $AC$，$BD$，其交點為 $E$，若外接於 $\triangle DEC$ 的圓的中心為 $Q$，則二半徑 $PD$，$QD$ 即正交.

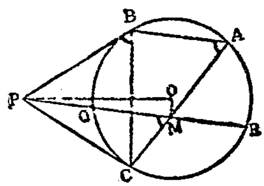
**16.** 由銳角三角形 $ABC$ 的 $A$ 向 $BC$ 所引的垂線與外接圓周的交點為 $D$，由 $D$ 向 $AC$ 所引的垂線，與外接圓周的交點為 $E$ 時，則 $BE$ 與外接圓上 $A$ 點的切線 $AT$ 成平行，試證明之.

**17.** 若在圓的直徑 $AB$ 的延長上，任意取一點 $P$，由 $P$ 向圓引切線，切點為 $T$，$\angle APT$ 的平分線與 $AT$ 的交點為 $C$，則 $\angle PCT$ 的大小有幾何?

〔註〕 若 $PC$ 與 $BT$ 的交點爲 $D$, 則 $TCD$ 即爲等腰三角形.

**18.** 若三角形 $ABC$ 的角 $A$ 的平分線,與邊 $BC$ 的交點爲 $D$, 在 $D$ 而切於 $BC$, 且通過頂點 $A$ 的圓,與邊 $AB$, $AC$ 的交點各爲 $E$, $F$, 則 $EF$ 與 $BC$ 爲平行.

**19.** 一圓周上有 $A$, $B$, $C$ 三點,由 $B$ 及 $C$ 點的切線的交點 $P$ 與 $AB$ 平行的直線 $PQR$($Q$, $R$ 與圓周相交) 與弦 $AC$ 相交於 $M$, 則 $M$ 即爲弦 $QR$ 的中點.




〔註〕 由於題意,

$$\angle BAC = \angle PMC.$$

但 $$\angle BAC = \angle PBC.$$

$$\therefore \quad \angle PMC = \angle PBC.$$

由此 $PBMC$ 爲內接於圓,而 $\triangle PBC$ 的外接圓爲以 $P$ 與圓的中心 $O$ 的聯結線分 $PO$ 爲直徑.故 $OM$ 與 $QR$ 爲垂直, $M$ 爲 $QR$ 的中點.

**20.** 若$\triangle ABC$的內接圓(中心 $O$)與邊$AB$, $AC$所切的點各爲$D$, $E$; 直線 $AO$ 與內接圓的交點爲 $P$, $Q$; 試證明 $P$, $Q$ 爲 $\triangle ADE$ 的內心, 傍心.

**21.** 在圓內接的三角形 $ABC$ 頂點 $A$ 的切線, 與 $BC$ 的延長線在 $D$ 相交,若在 $BD$ 上取等於 $AD$ 的 $DE$, 則 $AE$ 即將角 $BAC$ 平分.

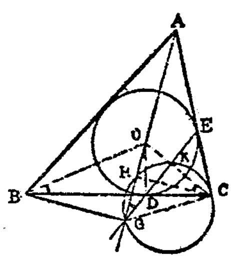
〔註〕 $$\angle DAE = \angle DAC + \angle CAE,$$

$$\angle DEA = \angle B + \angle BAE.$$

但 $$\angle DAE = \angle DEA, \quad \angle DAC = \angle B.$$

$$\therefore \quad \angle CAE = \angle BAE.$$

**22.** 若以 $\triangle ABC$ 的內切圓(內接圓)與 $BC$, $CA$ 的切點爲 $D$, $E$, 內心爲 $O$, $AO$ 與 $ED$ 的交點爲 $G$, 則 $BG$ 與 $AG$ 成垂直.




〔註〕 若由 $C$ 作 $AG$ 的垂線 $CH$, $CO$ 與 $DE$ 的交點爲 $K$, 則以 $CG$ 爲直徑的圓, 即通過 $H$, $K$, 故

$$\angle OCH = \angle HGK.$$

而　　$\angle OCH=\angle R-\angle COH$

$$=\angle R-\left(\frac{\angle A}{2}+\frac{\angle C}{2}\right)=\frac{\angle B}{2}.$$

故爲 $\angle OBD=\angle OGD$; $D$, $G$ 在以 $BO$ 爲直徑的圓周上.

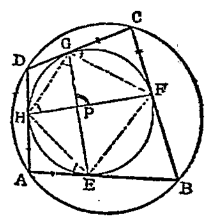
**23.** 將圓的弦 $AB$ 的兩端俱各延長,在其上取二點 $P$, $Q$, 使 $AP=BQ$. 由 $P$ 及 $Q$ 各引切此圓的切線 $PR$, $QS$, 其切點各爲 $R$, $S$ (但 $R$ 與 $S$ 在與弦 $AB$ 有關的反對之側),則弦 $RS$ 將弦 $AB$ 平分,試證明之.

**24.** 通過圓的弦 $AB$ 的中點爲 $M$, 在任意弦 $PQ$ 兩端的切線,與 $AB$ 延長的交點各爲 $C$ 及 $D$, 則 $BC=AD$.

**25.** 若由中心 $O$ 的圓周上任意的一點 $P$, 作以該圓周上的一定點 $C$ 爲中心的圓的二條切線,與 $O$ 圓的交點各爲 $A$, $B$, 則直線 $AB$ 與直線 $OC$ 成垂直.

**26.** 一個四邊形得畫內切圓及外接圓,將其內切圓不相鄰的切點連結的二直線,互成垂直.

〔註〕 畫內切圓及外接圓於 $ABCD$, 若以內切圓的切點爲 $E$, $F$, $G$, $H$. $EG$, $FH$ 的交點爲 $P$, 則




$$\angle GPF=\angle PGH+\angle PHG.$$

但　　$\angle PGH=\angle AEH$,

$\angle PHG=\angle CGF$.

又 $ABCD$ 爲內接於圓,

$$\angle A+\angle C=2\angle R \cdots\cdots(1)$$

又 $AEH$, $CGF$ 皆爲等腰三角形,故

$$\tfrac{1}{2}\angle A+\angle AEH=\angle R,$$

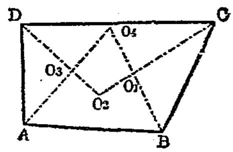
$$\tfrac{1}{2}\angle C+\angle CGF=\angle R \cdots\cdots(2)$$

由 (1), (2) 可得 $\angle GPF=\angle R$.

**27.** 任意四邊形每三邊(必要時則其延長)的內側或外側,各作相切的四圓,則其四個中心在同一圓周上.

〔註〕 如圖作各角的平分線,每二個交點 $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$; 則此爲畫於內側的四圓的中心.

$\angle AO_4B+\angle O_4AB$
$+\angle O_4BA=2\angle R,$

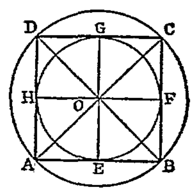



$\angle CO_2D+\angle O_2CD$
$+\angle O_2DC=2\angle R.$

但　$\angle O_4AB+\angle O_4BA$
$+\angle O_2CD+\angle O_2DC$
$=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D)=2\angle R.$

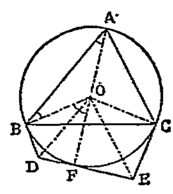
$\therefore\quad \angle AO_4B+\angle CO_2D=2\angle R.$

**28.** 有二個同心圓,其外切於內圓,同時內接於外圓的四邊形,將成如何的四邊形?




〔註〕 四邊形 $ABCD$, 各角的平分線及各邊的垂直平分線,皆在同一點 $O$ 會合.從而 $OAB$, $OBC$, $OCD$, $ODA$, 皆爲全等的等腰三角形,故 $ABCD$ 爲正方形.

**29.** $\triangle ABC$ 的外接圓的中心爲 $O$, 由 $O$ 引一與邊 $AB$ 及 $AC$ 的平行線,使與 $B$ 及 $C$ 的切線各在 $D$ 及 $E$ 會合,則直線 $DE$ 爲切於此圓.



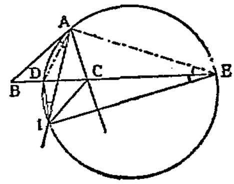

〔註〕 通過 $A$ 的直徑的一端爲 $F$, 連結 $D$ 與 $F$, 則　$\angle OAB=\angle OBA$
$=\angle BOD=\angle DOF.$

故　$\triangle OBD\equiv\triangle OFD.$

$\therefore\quad DF\perp OF.$

同樣　$EF=OF.$

**30.** 在 $\triangle ABC$ 的頂點 $A$ 而切於一邊,且通過此三角形的角 $A$ 內的傍心 $I$ 的圓周,與底邊 $BC$ 及其延長線的交點爲 $D$ 及 $E$, 則 $IC$ 爲角 $DIE$ 的平分線.




〔註〕 若爲 $\angle BAD=\alpha$, $\angle DAI=\beta$, 則
$\angle AIC=\frac{1}{2}\angle B,$
$\angle DIC=\frac{1}{2}\angle B+\alpha,$

$$\angle CIE = \angle BCI - \beta$$
$$= \tfrac{1}{2}\angle A + \tfrac{1}{2}\angle B - \beta$$
$$= \tfrac{1}{2}\angle B + \alpha.$$

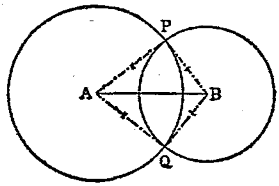
## 15. 關於圓的相切的問題

若直線 $AB$ 外的一點為 $P$, 對於 $AB$ 為對稱的 $P$ 的對稱點為 $Q$, 則

$\triangle PAB \equiv \triangle QAB.$

$\therefore \quad AP = AQ,$

$BP = BQ.$




因之,若圓 $AB$ 將 $P$ 共有,則同時又非將 $Q$ 共有不可. 由此得

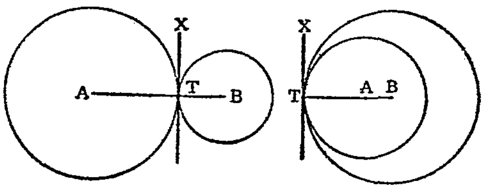
〔定理〕 二個圓因互相切, 故必要且充分的條件,為兩圓中心的連結直線上共有的唯一點.

故以二圓的半徑各為 $R$, $r$; 中心間的距離為 $d$, 則

外切的條件為 $R + r = d,$

內切的條件為 $R - r = d.$

二圓 $A$, $B$ 在 $T$ 相切時, $T$ 為在直線 $AB$ 上.



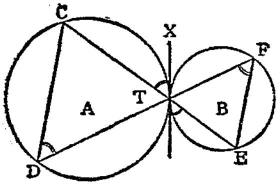

故在 $T$ 若引 $AB$ 的垂線 $TX$, 則此垂線卽成為兩圓所共同的切線, 故

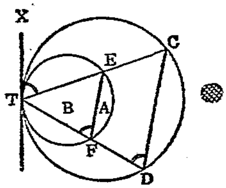
〔系〕 二個圓互相切時, 則在其切點之一圓的切線, 同時卽為他圓的切線.

(例) 若圓 $A$, $B$ 在 $T$ 點相切時,通過 $T$ 的二條割線,與圓 $A$, $B$ 的交點各為 $C$, $D$, $E$, $F$; 則 $CD$ 與 $EF$ 為互成平行.

〔解〕 若在切點 $T$ 引兩圓的公切線 $TX$, 則

$$\angle CTX = \angle CDT = \angle EFT. \quad \therefore \quad CD \parallel EF.$$




## 問　題　XV

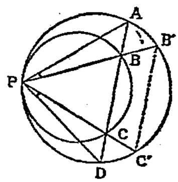
**1.** 若二圓 $O, O'$ 在點 $A, B$ 相交時,通過 $A, B$ 的二條割線,與 $O, O'$ 的交點各爲 $C, D$; $E, F$, 則 $CD \parallel EF$.

〔註〕 依例改變其公切線爲公弦卽可.

**2.** 聯結相切的二圓互成平行的二直徑之端,則四條直線之中有二條爲通過二圓的切點.

**3.** 二圓在 $P$ 內切,一條割線將二圓周在 $A, D$; $B, C$ 截過時,則

$$\angle APB=\angle CPD.$$




〔註〕 如圖若 $PB, PC$ 截外圓之點各爲 $B', C'$; 則由例

$$AD \parallel B'C'.$$

$$\therefore \quad \text{弧 } AB'=\text{弧 } C'D.$$

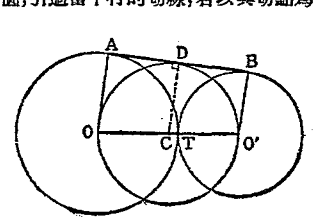
$$\therefore \quad \angle APB'=\angle C'PD.$$

**4.** 二圓在 $A$ 內切,外圓的弦 $CD$ 若與內圓在 $B$ 相切,則

$$\angle CAB=\angle DAB.$$

**5.** 有在 $C$ 外切的二圓,在此各圓,引適當平行的切線,若以其切點爲 $A, B$, 則直線 $AB$ 卽通過 $C$.

**6.** 二圓 $O, O'$ 在 $T$ 外切時,不通過 $T$ 的一條公切線,切於兩圓之點若爲 $A, B$, 則以線分 $OO'$ 爲直徑的圓,爲切於直線 $AB$.



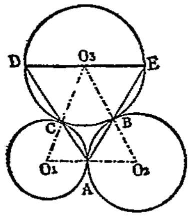

〔註〕 若由 $OO'$ 的中點 $C$ 引一 $AB$ 的垂線 $CD$, 則 $D$ 爲 $AB$ 的

中點. $CD=\frac{1}{2}(OA+O'B)=\frac{1}{2}OO'$.

**7.** 若梯形的兩底邊為 $AB$, $CD$; 對角線的交點為 $E$, 則 $\triangle ABE$, $\triangle CDE$ 的外接圓互為外切.

〔註〕 在 $E$ 引一方之圓的切線,示此切線或為他圓的切線.

**8.** 三個圓在 $A, B, C$ 相切,弦 $AB$, $AC$ 的延長線與第三圓在 $E, D$ 相交時,則該圓的中心與二點 $E$, $D$ 在同一直線上.




〔註〕 若以圓的中心各為 $O_1$, $O_2$, $O_3$, 而將中心互相聯結,則切點在其直線上.

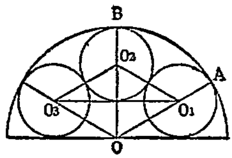
若聯結 $DO_3$, $O_3E$, 則

$$O_1A \parallel DO_3,\quad AO_2 \parallel O_3E.$$

而 $O_1AO_2$ 為一直線,故 $DO_3E$ 也為一直線.

**9.** 每二個互作外切的三個等圓,內切於半徑 $R$ 的半圓之弧,此二圓是否能切於該半圓的直徑 試討論之.

〔註〕 半徑 $r$ 的三個等圓 $O_1, O_2, O_3$, 內切於半圓,則 $O_1O_2O_3$ 即成正三角形.若 $OO_1$ 及 $OO_2$ 與半圓周的交點各為 $A$, $B$; 則在 $O_1A=O_2B=r$, 在 $\triangle OO_1O_2$ 中的 $\angle OO_2O_1=30°$, $\angle OO_1O_2>60°$.

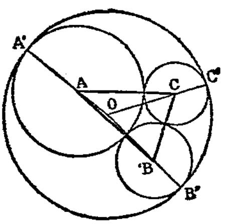



$$\therefore\quad OO_2>OO_1.$$

$$\therefore\quad OB>OA,$$ 故不合理.

**10.** 半徑各為 $a$, $b$, $c$ 的三個圓,互相外切,且此二圓對半徑 $r$ 的一圓作內切時,則成為

$$a+b+c<\tfrac{2}{3}r,$$ 試證明之.




〔註〕 內切於圓 $O$ 的三圓的中心為 $A$, $B$, $C$; $A'$, $B'$, $C'$ 為各切點,則

$AO=r-a$, $BO=r-b$, $CO=r-c$,

$AB=a+b$, $BC=b+c$, $CA=c+a$,

$BC\leqq BO+CO$, $AB\leqq AO+BO$,

$AC\leqq CO+AO$.

此三式中的等號, 不能同時成立 (因為如果同時成立, 則 $O$ 必在 $AB$,

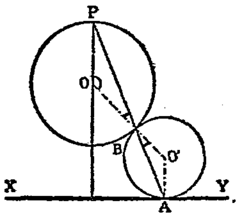
$BC$, $CA$ 的交點).

$$\therefore\quad AO+BO+CO>\tfrac{1}{2}(AB+BC+CA).$$

## 16. 一定問題

〔例〕 畫一切於定直線，且不與定直線相交的定圓作外切的任意之圓時，聯結二切點的直線卽通過一定點.

〔解〕 若定直線爲 $XY$，定圓的中心爲 $O$，$XY$ 及圓 $O$ 在圓 $O'$ 上所切之點各爲 $A$, $B$；而以直線 $AB$ 與圓 $O$ 的周的交點爲 $P$，此時 $B$ 必在直線 $OO'$ 上. 因爲二個等腰三角形 $OBP$, $O'BA$ 其底角爲相等，故頂角亦必相等.




$$\therefore\quad PO \parallel AO'.$$

但 $AO' \perp XY$，故 $P$ 爲圓 $O$ 與 $XY$ 成垂直的直徑的一端，此卽爲定點.

## 問 題 XVI

**1.** 頂角及夾頂角的二邊之和爲一定的三角形的外接圓，爲通過頂角的平分線上的定點，試證明之.

**2.** 以一條線分的兩端各爲中心，互相外切的任意二圓的外公切線爲常切於定圓.

**3.** 以所設點 $A$ 爲頂點大小一定的角 $XAY$ 的二邊 $AX$, $AY$ 上，由其他所設點 $B$ 所作的垂線各爲 $BE$, $BF$, $E$ 及 $F$ 爲其足，則 $EF$ 的中心必在某定圓周上，試證明之.

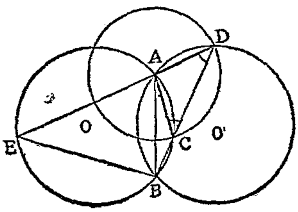
**4.** 若相交二圓的交點爲 $A$, $B$，通過 $B$ 的直線與兩圓再交的點爲 $C$, $D$；則 $\angle CAD$ 與直線 $CD$ 的方向無關，恆爲一定，試證明之.

〔註〕 試以二圓的中心爲 $O$, $O'$，作 $\triangle AOO'$ 而着想.

**5.** 若由定點 $P$ 向定圓 $O$ 所引的定切線爲 $PA$，定割線爲 $PCD$，通過二點 $A$, $P$ 的任意之圓與圓 $O$ 的交點爲 $B$，與割線的交點爲 $E$，則直線 $BE$ 常通過定點.

**6.** 以相交的二個相等圓的公共弦爲 $AB$，以 $A$ 爲中心，以較 $AB$ 爲

小的任意長爲半徑而畫圓,與 $AB$ 同側的二等圓的交點各爲 $C$, $D$, 則角 $CAD$ 爲一定,試證明之,




〔註〕 以圓 $O$, $O'$ 爲等圓,此時爲

$$AC=AD.$$

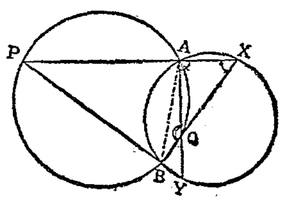
故若聯結 $B$ 於 $C$ 及 $D$, 則

$$\angle ABC=\angle ABD.$$

故 $B$, $C$, $D$ 在同一直線上.

7. $AB$, $CD$ 爲一圓的弦, $AB$ 爲一定, $CD$ 爲長短一定, 位置不定, 此時 $AC$, $BD$ 的交點及 $AD$, $BC$ 的交點常各在一定的圓周上.

8. 二個定圓的交點爲 $A$, $B$, 在其一個的圓周上任意取一點 $P$, $PA$, $PB$ 與他圓的交點各爲 $X$, $Y$, 則 $BX$, $AY$ 的交點 $Q$ 必在定圓周上.




〔註〕 弦 $AB$ 爲一定,而 $\angle APB$ 及 $\angle AXB=\angle AYB$ 亦各爲一定. 設爲 $\alpha$, $\beta$, 則

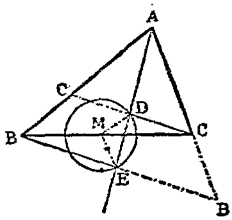
$$\angle XAY=\alpha+\beta,$$

$$\angle AQB=\angle XAQ+\angle QXA$$
$$=\alpha+\beta+\beta=\alpha+2\beta.$$

即一定,故此點必在定圓周上.

9. 有一相交於二點 $A$, $B$ 的二圓周,若由其一圓周上任意一點 $P$, 引直線 $PA$, $PB$, 與他圓周的交點爲 $Q$, $R$, 則弦 $QR$ 必爲定長.

10. 在三角形底邊的位置,大小及其他二邊之差爲一定時,則由底邊的兩端向頂角的平分線所作垂線之足,必在定圓周上.



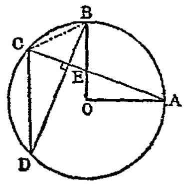

〔註〕 若在 $\triangle ABC$ 的頂角 $A$ 的平分線由 $B$, $C$ 所作垂線的足各爲 $E$, $D$, 則以 $BC$ 的中心點爲 $M$ 時,

$$MD=ME=\tfrac{1}{2}(AB-AC).$$

11. 三角形底邊的位置, 大小及其他二邊之和爲一定時, 則由底邊的兩端到頂角外角的平分線上所作垂線之足,

必在一定圓周上.

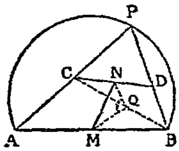
**12.** 圓 $O$ 兩個定半徑爲 $OA, OB$, 由 $A$ 引任意之弦 $AC$, 由 $B$ 引於 $AC$ 成垂直的弦 $BD$, 則弦 $CD$ 的長短常爲一定.




〔註〕 若 $AC, BD$ 的交點爲 $E$.

$$\angle CED=\angle ACB+\angle CBD$$
$$=45^\circ+\angle CBD.$$
$$\therefore\quad \angle CBD=\angle CED-45^\circ$$
$$=90^\circ-45^\circ=45^\circ.$$

**13.** 弓形 $APB$ 的弧上一點 $P$, 聯結於弦 $AB$ 之兩端, 在直線 $PA$, $PB$ 上各取 $C, D$; $AC, BD$ 各等於所設長時, 則 $AB, CD$ 的中點距離, 不拘點 $P$ 的位置, 常有一定的大小.

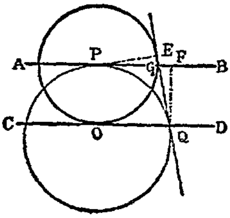



〔註〕 若 $AB, CD, BC$ 的中點各爲 $M, N, Q$, 則

$$MQ\parallel AC,\quad MQ=\tfrac{1}{2}AC;$$
$$NQ\parallel BD,\quad NQ=\tfrac{1}{2}BD.$$

故 $\triangle QMN$ 的角 $Q$ 及此角所夾的二邊長度皆爲一定

**14.** 有二條定平行線 $AB, CD$, 畫一圓 $O$ 切於 $AB$ 上的定點 $P$, 而與 $CD$ 相交於 $Q$, 在 $Q$ 對圓 $O$ 所引的切線常切於某定圓.



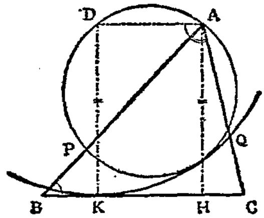

〔註〕 若以在 $Q$ 的切線與 $AB$ 的交點爲 $G$, 由 $P, Q$ 對 $QG, AB$ 所作的垂線, 各爲 $PE, QF$, 則

$$GP=GQ,$$
$$\angle PGE=\angle QGF.$$
$$\text{故}\qquad \triangle PGE\equiv\triangle QGF.$$
$$\therefore\quad PE=QF.$$

$PE$ 即爲平行線間的距離而一定

**15.** 有形狀及大小一定的 $\triangle ABC$, 其二邊 $AB, AC$ 各通過二定點 $P, Q$ 時, 則頂點 $A$ 畫一定圓, 又底邊 $BC$ 常切於一定圓.

〔註〕 若作高 $AH$, 爲一定的大小. 點 $A$ 畫一定圓, 立即判別, 由 $A$ 對

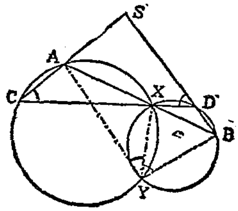



$BC$ 引平行線,若與〔此〕圓的交點爲 $D$, 則

$$\angle BAD=\angle ABC.$$

故 $D$ 爲此定圓周上的定點. 若由 $D$ 對 $BC$ 引垂線 $DK$, 則 $DK=AH$, 故 $BC$ 切於以 $D$ 爲中心,半徑等於 $AH$ 的圓.

**16** 若通過相交二圓的一交點, 引二直線,在其一圓周的 $A$, $C$, 他圓周的 $B$, $D$ 使之相交的弦 $AC$, $BD$ 所延長的交點爲 $S$, 則 $AS$, $BS$ 所作角之大小爲一定不變.



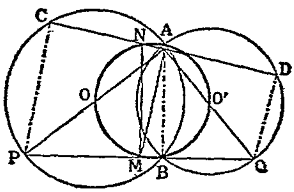

〔註〕 若二圓的交點如圖爲 $X$, $Y$, 則

$$\angle SCD=\angle AYX,$$
$$\angle SDC=\angle BYX.$$
$$\therefore\quad \angle SCD+\angle SDC=\angle AYB.$$

但 $\angle AYB$ 爲一定.

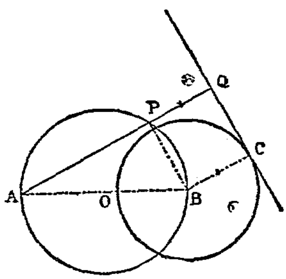
$$\angle AYB+\angle CSD=2\angle R.$$

**17.** 若通過相交二定圓的一個交點,而引被夾於二圓周之間任意的線分,則其中點必在一定圓周上.




〔註〕 若二定圓 $O$, $O'$ 的交點爲 $A$, $B$, 過 $A$ 的割線 $CD$ 的中點爲 $N$, 又與 $AB$ 垂直而通過 $B$ 的割線爲 $PQ$, $PQ$ 的中點爲 $M$, 則 $MN$ 與 $PC$ 及 $QD$ 平行,而成 $\angle PCA=\angle R$, 故 $N$ 必在以定線分 $AM$ 爲直徑的圓周上.

**18.** 定圓周上有定點 $A$ 及動點 $P$,在過 $AP$ 的 $P$ 的延長線上取一點 $Q$, 使 $PQ$ 的長度爲一定時,則在 $AQ$ 上 $Q$ 點的垂線必切於其他的一定圓.

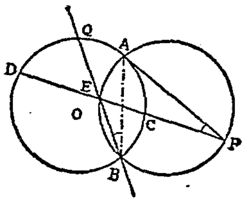



〔註〕 若定圓的中心爲 $O$, 過 $A$

的直徑爲 $AB$，由 $B$ 到 $AQ$ 垂線上所作的垂線爲 $BC$，則 $PQ=BC$.

若其長爲 $l$，則 $QC$ 爲切於以 $B$ 爲中心，半徑爲 $l$ 的圓.

**19.** 由定點 $P$ 向定圓 $O$ 所引的定切線爲 $PA$，定割線爲 $PCD$，通過二點 $A$，$P$ 任意的圓與圓 $O$ 的交點爲 $B$，與割線的交點爲 $E$，則直線 $BE$ 常通過定點.




〔註〕 若直線 $BE$ 與圓 $O$ 的周的交點爲 Q，則

$$\angle APE=\angle ABE.$$

但以 $AP$，$PE$ 各爲定直線，$\angle ABQ$ 爲定角，故 $Q$ 爲定點.

**20.** 若在 $\triangle ABC$ 邊 $BC$ 的位置，大小皆爲一定，角 $A$ 的大小爲一定，則其內心 $P$ 與角 $A$ 內的傍心 Q 的距離爲一定.

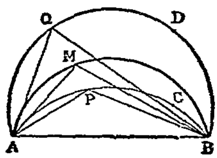
## 17. 軌跡

關於圓的軌跡問題最基本的定理，有下列二個：

〔定理〕 與一定點的距離等於已知距離的點的軌跡，爲以定點爲中心，以已知距離相等，爲半徑的圓周.

〔定理〕 在定線分上定角之點的軌跡，爲以其線分爲弦，以其角所含一組弓形的弧.

〔例 1〕 在公共弦 $AB$ 的同側，有二個定弓形 $ACB$，$ADB$，$P$，$Q$ 各爲弧 $ACB$，$ADB$ 上任意點，試求角 $PAQ$，$PBQ$ 的平分線交點的軌跡.




〔解〕 若角 $PAQ$，$PBQ$ 的平分線的交點爲 $M$，則

$$\angle MAB=\tfrac{1}{2}(\angle PAB+\angle QAB),$$

$$\angle MBA=\tfrac{1}{2}(\angle\quad A+\angle QBA).$$

$$\therefore\ \angle MAB+\angle MBA$$

$$=\tfrac{1}{2}\{(\angle PAB+\angle PBA)+(\angle QAB+\angle QBA)\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\{(2\angle R-\angle APB)+(2\angle R-\angle AQB)\}$$

$$=2\angle R-\tfrac{1}{2}(\angle APB+\angle AQB).$$

故若 $\angle APB=\alpha$，$\angle AQB=\beta$，則

$$\angle MAB+\angle MBA=2\angle R-(\alpha+\beta).$$

$$\therefore\quad \angle AMB=\alpha+\beta\cdots\cdots\cdots\cdots\text{一定}$$

由上,適合於所設的條件的點 $M$, 在以 $AB$ 爲弦, 以 $\alpha+\beta$ 爲其內角的弓形弧上.

其次若此弧上任意的一點爲 $M$, 在弧 $ACB$ 上取任意一點 $P$ (但在 $\angle AMB$ 內)與 $AM$ 有關的 $P$ 的反對側使爲 $\angle PAM=\angle MAQ$, 引 $AQ$ 與弧 $ADB$ 的交點爲 $Q$, 作 $BP$, $BQ$, 則由於作圖,

$$\angle MAB=\tfrac{1}{2}(\angle PAB+\angle QAB),$$

$$\angle AMB=\tfrac{1}{2}(\angle APB+\angle AQB).$$

但 $\angle MAB+\angle AMB+\angle MBA$

$$=\tfrac{1}{2}(\angle PAB+\angle APB+\angle PBA+\angle QAB+\angle AQB+\angle QBA)$$

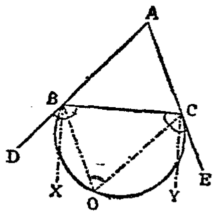
$$\therefore\quad \angle MBA=\tfrac{1}{2}(\angle PBA+\angle QBA).$$

即以 $BM$ 將 $\angle PBQ$ 平分之,故弧 $AMB$ 即爲所求的軌跡

(例 2) 底邊 $BC$ 的位置,大小及頂角 $A$ 的大小 $\alpha$, 頂點 $A$ 僅在底邊 $BC$ 的一側,求所設三角形 $ABC$ 的傍心 $O$ 的軌跡.

〔解〕 使適合於條件的點 $O$ 與 $B$, $C$ 聯結,則

$$\angle BOC=\angle R-\tfrac{1}{2}\angle A=\angle R-\tfrac{1}{2}\alpha.$$




故 $O$ 以 $BC$ 爲弦,在含 $\angle R-\frac{1}{2}\alpha$ 弓形的弧上,但在 $B$ 及 $C$ 的外角不可超過 $2\angle R$. 故 $O$ 僅在由於 $B$ 及 $C$ 的 $BC$ 垂線 $BX$ 及 $CY$ 所夾的弧上.

其次在此弧上取任意的一點 $O$, 聯結 $BO$, $CO$, 各成爲平分線, 如此作角 $CBD$, $BCE$, 試將 $DB$, $EC$ 向其頂點方面延長,此時即成

$$\angle OBC+\angle OCB=2\angle R-(\angle R-\tfrac{1}{2}\alpha)=\angle R+\tfrac{1}{2}\alpha.$$

$$\therefore\quad \angle DBC+\angle ECB=2\angle R+\alpha\ (\text{但 } \alpha<2\angle R).$$

故此二直線在 $O$ 的反對側必相交. 若以此交點爲 $A$, 則 $O$ 爲 $\triangle ABC$ 的傍心.
$$\angle BOC=\angle R-\tfrac{1}{2}\angle A.$$

但由於作圖,
$$\angle BOC=\angle R-\tfrac{1}{2}\alpha.$$

$$\therefore\quad \angle A=\alpha,\ \text{由此 } O \text{ 即與條件相適合}.$$

## 問 題 XVII

1. 一定點 $P$ 與以 $O$ 爲中心的定圓周上的點 $A$ 相聯結,求線分 $PA$ 中點的軌跡.

2. 使定圓內的定點 $A$ 與此圓周上的點 $B$ 聯結,將 $AB$ 過 $B$ 而延長之,在其上取點 $C$, 使 $AB=BC$, 試求點 $C$ 的軌跡.

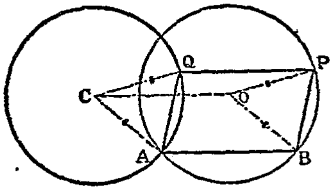
〔註〕 使與中心有關的 $A$ 的對稱點 $A'$ 與 $C$ 相聯結,試思線分的長度.

3. 試求通過定圓之定直徑 $AB$ 的一端 $A$, 任意弦 $AP$ 的延長線與在 $P$ 點的切線上,由他端 $B$ 所作垂線的延長線的交點 $Q$ 的軌跡.

4. 已知三角形底邊的長度及位置,且已知由底邊一端所引出的中線的長度,試求其頂點的軌跡.

5. 平行四邊形 $ABPQ$ 的 $AB$ 邊爲已知圓 $O$ 的定弦, $P$ 爲此圓周上的任意點,試求 $Q$ 點的軌跡.

〔註〕 作平行四邊形 $ABOC$, 則 $COPQ$ 亦成平行四邊形,故以 $C$ 爲中心,以 $CA$ 爲半徑的圓,即爲所要的軌跡.




6. 在定圓周上置中心 $O$, 半徑 $R$ 的動圓在此動圓上引一定方向的切線,試求其切點的軌跡.

〔註〕 若切點爲 $A$, 則線分 $AO$, 其長度及方向爲一定.

7. 一直線上順次有三點 $A, B, C$, 今取一點 $P$, 使 $\triangle PAB$ 的外接圓與 $\triangle PAC$ 的外接圓相等,試求此點 $P$ 的軌跡.

〔註〕 成爲 $PB=PC$.

8 $\triangle ABC$ 的底邊 $BC$ 的位置及大小,和其他的二邊 $AB$, $AC$ 的

(1) 和爲一定時,試求由底邊一端對 $\angle A$ 外角的平分線所作垂線的足的軌跡.

(2) 差爲一定時,試求由底邊一端對 $\angle A$ 的平分線所作垂線的足的軌跡.

9. 內接於定圓的 $\triangle ABP$ 的邊 $AB$ 爲定弦.在二邊 $AP$, $BP$ 上各

取點 $C, D$, 使 $AC, BD$ 各與定線分 $l, m$, 相等時,試求線分 $CD$ 中點的軌跡.

**10.** 三角形底邊的位置和大小及頂角的大小爲已知時,試求其內心及重心的軌跡.

**11.** 三角形底邊的位置和大小及頂角的大小爲已知時,試求其垂心的軌跡.

〔註〕 試準本節例 2 而思考之.

**12.** $\triangle ABC$ 的頂角 $A$ 的位置,大小及二邊 $AB, AC$ 之和爲已知時,試求外接圓中心的軌跡.

**13.** 引任意一直線,截 $\triangle ABC$, 使與 $A, B, C$ 的對邊(如必要延長之)各在 $X, Y, Z$ 相交時,試求 $\triangle AZY$, $\triangle CXY$ 的外接圓另一交點的軌跡.

**14.** 通過定點 $P$, 引任意直線與定圓 $O$ 的周相交於 $A, B$, 試求弦 $AB$ 中點的軌跡.

**15.** 若定圓的定直徑爲 $AB$, 定長的弦爲 $CD$, 則 $AD, BC$ (或各延長)的交點 $P$ 的軌跡如何?

**16.** 由 $AA'$ 爲直徑的圓周上任意一點 $P$, 向 $AA'$ 作一垂線 $PM$, 在半徑 $OP$ 上取與 $PM$ 相等的 $OQ$ 時,點 $Q$ 的軌跡如何?

〔註〕 $\triangle BQO \equiv \triangle OMP$.

**17.** 試求至正三角形的一頂點的距離,與至其他二頂點的距離之和相等之點的軌跡.

**18.** 二圓切於定直線 $XY$ 上的定點 $A, B$, 且在 $P$ 點互作外切,則 $P$ 點的軌跡如何?

〔註〕 $PAB$ 爲直角三角形.

**19.** $\triangle ABC$ 的 $\angle BAC$ 爲直角,在 $BC$ 引任意的垂線 $EF$ 時,令與 $AB, AC$ 或其延長線各在 $D, F$ 相交,求 $BF$ 與 $CD$ 的交點的軌跡.

〔註〕 $F$ 爲 $\triangle BCD$ 的垂心.

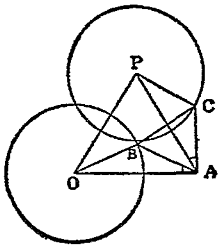
**20.** 過相交二圓的一交點 $A$ 的定直線與二圓周的交點爲 $B, C$; 過 $A$ 的任意直線與二個圓周的交點爲 $P, Q$ 時,試求 $BP, CQ$ 或其延長線的交點的軌跡. 但 $B$ 與 $P$, $C$ 與 $Q$ 爲各在同一圓周上.

21. 試求對正方形 $ABCD$ 相鄰的二邊 $AB$, $BC$ 張相等的角一點 $P$ 的軌跡.

〔註〕 過 $B$, $D$ 的直線及向對角線 $AC$ 雙方的延長,與 $ABCD$ 外的圓的弧 $ADC$, 卽成所要的軌跡

22. 試求以定圓周上的一定點爲頂點,定長的動弦爲底邊的三角形垂心的軌跡.

23. 在定點 $A$ 置一頂點,定圓 $O$ 的周上置頂點 $B$, 試求正三角形 $ABC$ 的第三頂點 $C$ 的軌跡.



〔註〕 若在線分 $OA$ 上作正三角形 $OAP$, 則

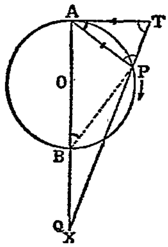
$$\triangle OAB \equiv \triangle PAC.$$

$$\therefore \quad OB = PC.$$

因此以 $P$ 爲中心畫一等圓與 $O$ 卽可.

與 $AO$ 有關的對稱的位置亦爲同樣.

24. 由以 $O$ 爲中心的圓周上一點 $A$, 引任意的弦 $AP$, 其次在 $A$ 的切線上取等於 $AP$ 的 $AT$, 而以 $TP$ 與 $AO$ 的交點爲 $Q$, 此時點 $Q$ 在如何的範圍?



〔註〕 $P$ 與 $A$ 相近,故

$$\angle PAT = \angle ABP$$

則減少, $\angle ATP$ 則增大. 又 $P$ 與 $B$ 相近,故 $\angle ATP$ 則減少, $P$ 經過 $B$ 與 $A$ 一致時, $\angle ATP$ 則成爲 0. 由此 $Q$ 的範圍則爲半直徑 $AX$.

25. 由定圓 $O$ 的定直徑 $AB$ 的 $B$ 方的延長線上一點 $C$, 引此圓的切線 $CD$, 在 $\angle OCD$ 的平分線 $CX$, 由 $O$ 作垂線 $OE$ 時,試求其垂足的軌跡.

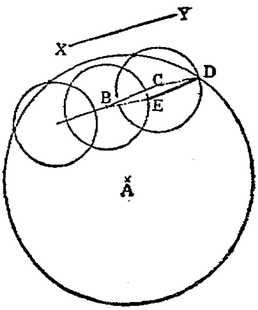
〔註〕 若以由 $E$ 所作 $AB$, $CD$ 的垂線各爲 $EF$, $EG$, 則

$$EF = EG, \quad EF + EG = OD.$$

## 18. 作圖

關係於圓的作圖題,用軌跡來解決的非常之多,如果從技術的方面來說,

則所謂軌跡交截法的方法,爲數已不少.



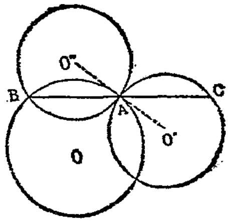

(例) 有中心各爲 $A$, $B$ 的二圓與定直線 $XY$, 作一直線與 $XY$ 平行且有一定的長,其兩端在兩圓周上.

〔解〕 引得所要的線分爲 $DE$, 其兩端 $D$, $E$ 各爲在圓周 $A$, $B$ 上, $DE$ 的長爲 $l$, $D$ 點爲與 $XY$ 平行,一端置於圓周 $B$ 上,長 $l$ 線分他端的軌跡與圓周 $A$ 的交點,爲必要且充分的條件,依上理作圖如次.

以 $B$ 爲一端,與 $XY$ 平行長 $l$ 線分的他端爲 $C$, 以 $C$ 爲中心,畫一與 $B$ 相等的圓,與圓周 $A$ 的交點爲 $D$, 若由 $D$ 引一與 $CB$ 平行而等長的線分 $DE$ 卽得. 故所解的個數,等於圓周 $A$ 與 $C$ 交點的個數.

## 問 題 XVIII

1. 通過二圓交點的 $A$, 作一直線,使與二圓由此截取的弦相等.




〔註〕 設二圓的中心爲 $O$, $O'$; 延長 $O'A$, 令 $O'A=AO''$ 取 $O''$, 以 $O''$ 爲中心, $O''A$ 爲半徑的圓,使在圓 $O$ 的交點 $B$ 與 $A$ 連結,引一直線卽得.

2. 有定圓 $O$ 及二定點 $P$, $Q$. 作直徑 $AB$, 使 $PA=BQ$.

3. 有定圓 $O$ 及二定點 $P$, $Q$. 作定長的弦 $AB$, 令成 $PA=BQ$.

〔註〕 如 $\angle AOB=\angle POP'$, $OP=OP'$ 而定 $P'$.

若以 $\triangle OAP\equiv\triangle OBP'$ 而看,則 $BP'=BQ$.

4. 試畫一圓,不在同一點相交,且任何二線不相平行的三直線,由各線截取同一的所設長之弦.

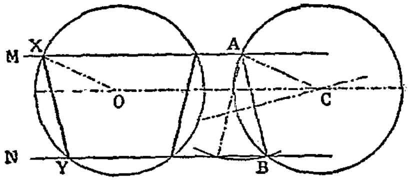
〔註〕 作三直線的三角形的內心及傍心爲中心的圓.

**5.** 試畫不在一直線上的所設三點 $A$, $B$, $C$, 各爲中心而互相切的三個圓.

〔註〕 通過 $\triangle ABC$ 的內接圓及傍接圓切於三直線 $AB$, $BC$, $CA$ 之點,試畫一圓.

**6.** 試畫一圓,以一定點爲中心,與所設平行二直線各在 $XY$ 點相交,使線分 $XY$ 和所設長相等.

〔註〕 設一定點爲 $O$, 平行二直線爲 $M$, $N$, 所設長爲 $l$ 時,在 $M$, $N$




間引長 $l$ 的線分 $AB$, 其垂直平分線與通過 $O$ 和 $M$ 平行的直線的交點爲 $C$, 畫一以 $O$ 爲中心,半徑等於 $AC$ 的圓卽得.

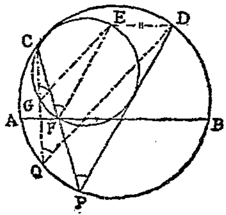
**7.** 求所設弓形 $APB$ 的弧 $APB$ 之上一點 $P$, 與弦的兩端 $A$, $B$ 聯結,使線分之和爲 $PA+PB$ 與定長的線分 $l$ 相等.

**8.** 於定圓弧 $AB$ 上,作定長的弦 $CD$, 使弦 $AC$, $BD$ 之和與定長相等.

〔註〕 在弧 $ACB$ 上取點 $E$, 爲 $\widehat{CD}=\widehat{BE}$, 弧 $AE$ 上取一點 $C$, 使 $AC+CE$ 爲一定,而熟思之.

**9.** $AB$ 爲一個圓的弦,在弧 $ACDB$ 上有二點 $C$, $D$, 其共軛的弧上求一點 $P$, 二個弦 $PC$, $PD$ 使由弦 $AB$ 所截取的部分和所設長相等(無須討論).

〔註〕 由 $D$ 作與 $AB$ 平行,且和所設長相等的線分 $DE$, 在弧 $ACDB$ 連結共軛弧上的任意的一點 $Q$ 和 $D$, 由 $E$ 與 $QD$ 引平行線,此線與 $CQ$ 相交於 $G$ 時, $\triangle CGF$ 的外接圓,連結與 $AB$ 的交點 $F$ 和 $C$ 而求點 $P$.

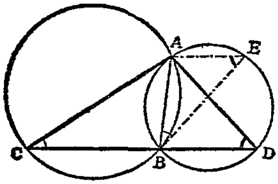


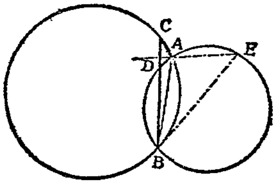
**10.** 已知三角形一邊的方向,及其對角的平分線的長與此平分線通過一點的位置,作此三角形內接於一已知圓.

〔註〕 一角的平分線,通過於其相對的弧的中點,故能知此平分線所通過的二點.此直線的位置卽定.在此上面亦可取平分線之長,但與點和弧的中點一致時則爲不定.

**11.** 通過相交二圓的交點 $A$, $B$ 之一點 $B$ 的割線與兩圓周的交點爲 $C$, $D$ 時,公共弦 $AB$ 卽爲 $\triangle ACD$ 的 $A$ 的頂角或其外角的平分線,求作此割線.

〔註〕 在 $B$ 引圓 $ABC$ 的切線,此切線與圓 $ABD$ 的交點爲 $E$, $\angle BAE$ 或其接角的平分線與圓 $ABD$ 的交點爲 $D$ 卽可.




**12.** 有一如 $AB=AC$ 的 $\triangle ABC$, 過所設的 $P$ 作直線,使二邊 $AB$, $AC$ 各在 $XY$ 相交,並使爲 $XY=BX+CY$.

〔註〕 試熟思以在 $B$, $C$ 各切於 $AB$, $AC$ 的圓爲傍接圓的三角形 $AXY$.

**13.** 由定圓 $O$ 外的一定點 $A$ 作割線 $ABC$, 與圓周的交點爲 $B$, $C$; 令 $AB=2BC$.

〔註〕 若畫一圓,將 $OA$ 在 $D$ 作內分,令 $AD=2DO$, 以 $D$ 爲圓心,圓 $O$ 的半徑的 $\frac{2}{3}$ 爲半徑,則此圓與圓 $O$ 的交點卽爲 $B$.

**14.** 所設頂角 $A$ 的大小,和邊 $AB$ 所引的中線及邊 $AC$ 所引的中線之長,爲已知,試作一三角形.

〔註〕 $AC$ 所引的中線爲 $BD$, 重心爲 $G$, 設在 $BD$ 的延長線上取點 $E$, 令 $GD=DE$, 則 $AE=CG$.

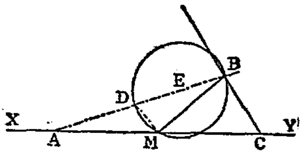
**15.** 試作一圓,切於所設直線 $XY$ 上的所設點 $T$, 且切於所設圓 $O$.

〔註〕 注意和圓 $O$ 的 $XY$ 垂直的直徑一端與點 $T$ 相聯結的直線,與圓周 $O$ 的交點爲切點.

**16.** 試畫一圓,其中心在所設直線 $XY$ 上,並通過直線上的定點 $A$,而切於其他所設的圓 $O$.

〔註〕 與 $XY$ 平行的圓 $O$ 直徑的一端與 $A$ 相聯結,此聯結與圓周 $O$ 的交點即爲切點.

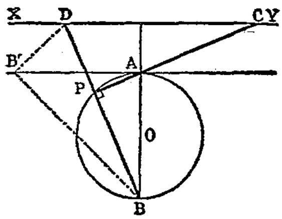
**17.** 定直線 $XY$ 上有定點 $A$,通過此直線外的定點 $B$ 的一直線與 $XY$ 在 $C$ 相交時,通過 $B$ 的 $BC$ 的垂線爲通過 $AC$ 的中點,試述直線 $BC$ 的作圖法. 又在何種情形時,作圖爲不可能.




〔註〕 $AB$ 的中點爲 $B$,畫一以 $BD$ 爲直徑的圓,令其與 $XY$ 的交點爲 $M$,由 $B$ 引與 $BM$ 垂直的 $BC$ 即得.

故 $BD$ 的中點 $E$ 與 $XY$ 的距離若較 $BD$ 半分爲大則不可能.

**18.** 有一條不與定圓 $O$ 相交的定直線 $XY$,通過此圓的中心 $O$ 而與 $XY$ 垂直的直線和此定圓周的交點爲 $A$, $B$. 在此圓周上取點 $P$,二直線 $AP$, $BP$ 與 $XY$ 的交點各爲 $C$, $D$, 使 $CD=AB$.




〔註〕 所要的點 $P$ 如可求出,則

$$\angle CPD=\angle R.$$

今在 $A$ 的切線上取點 $B'$ 如爲

$$AB'=AB,$$

則 $CDB'A$ 即成平行四邊形.

$$\therefore \quad \angle BDB'=\angle R.$$

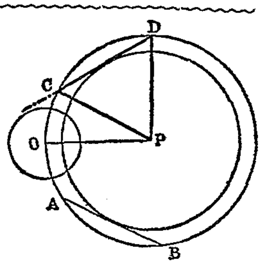
故 $D$ 爲以 $BB'$ 爲直徑的圓周與 $XY$ 的交點.

**19.** 過定點作與定圓相交的直線,使圓內的部分和所設長相等.

**20.** 以距半徑 $a$ 的圓的中心 $O$ 爲 $3a$ 的距離的一點 $P$,爲一頂點,一邊的長等於 $3a$,令正三角形頂點 $P$ 的對邊的延長線切於此圓.

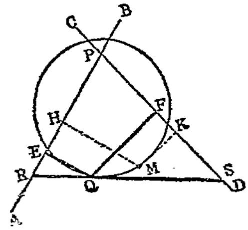
〔註〕 畫一以 $P$ 爲圓心, $OP$ 爲半徑的圓,在圓 $P$ 使作等於 $3a$ 的弦

$AB$，以 $P$ 爲圓心，畫一切於 $AB$ 的圓，若作此內圓與圓 $O$ 的共通切線，則此切線爲外圓所截取的部分 $CD$ 爲確定的正三角形 $PCD$.




21. 二條直線 $AB$, $CD$ 在圓 $O$ 內的一點相交，在此圓周上求一點 $Q$，由 $Q$ 向直線 $AB$, $CD$ 的垂線之和，令其成爲最大.

〔註〕 引切線 $RS$ 作等腰三角形 $PRS$，其切點爲 $Q$，由 $Q$ 對 $AB$, $CD$ 所作的垂線，各爲 $QE$, $QF$，又由圓周上任意一點 $M$，對 $AB$, $CD$ 作垂線 $MH$, $MK$，試比較 $QE+QF$ 與 $MH+MK$.

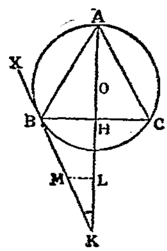



22. 設底邊與高之和爲 $l$，試作一內接於定圓 $O$ 的等腰三角形.

〔註〕 通過圓周上的一點 $A$，在直徑線上取一點 $K$，使 $AK=l$. $AK$ 上取一點 $Z$，在 $Z$ 處 $AK$ 的垂線上取點 $M$，使

$$KL=2ML.$$

通過 $KM$ 的直線 $KX$ 與圓周的交點爲 $B$，若由 $B$ 引一與 $AK$ 垂直的弦 $BC$，則 $\triangle ABC$ 卽爲所求的等腰三角形.




23. 作底邊與高之和成最大的等腰三角形，內切於定圓.

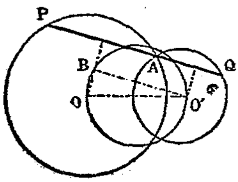
〔註〕 可將前題的 $KX$ 作爲圓的切線.

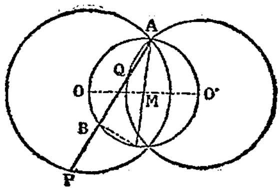
24. 通過二圓 $O$, $O'$ 的交點 $A$，作割線與各圓周的交點各爲 $P$, $Q$ 時，令 $AP+AQ=2l$（定長）.

〔註〕 $P$, $Q$ 爲 $A$ 的反對側時，以 $OO'$ 爲直徑的圓引長 $l$ 的弦 $O'B$，由 $A$ 引於 $O'B$ 平行的割線.

$P$, $Q$ 爲 $A$ 的同側時，則以 $OO'$ 的中點 $M$ 爲圓心，$MA$ 爲半徑的圓引長 $l$ 的弦 $AB$，此弦與圓 $O$, $O'$ 的交點各爲 $P$, $Q$，則

$$AP+AQ=2AB=2l.$$



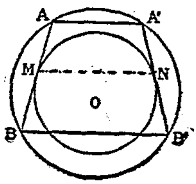

**25.** 在前題:

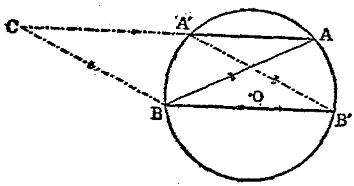
(1) 令 $AP-AQ=2l$.

(2) 令 $AP+AQ$ 成爲最大.

**26.** 由圓周上的二點 $A$, $B$ 作互相平行的二弦 $AA'$, $BB'$, 令 $AA'+BB'=2l$ (定長).

〔註〕 畫一切於 $AB$ 的同心圓,可引長 $l$ 的弦 $MN$. 若由 $A$, $B$ 引一與 $MN$ 平行的外圓的弦 $AA'$, $BB'$ 卽得,但弦 $AA'$, $BB'$ 互作反對方向時,則必須如下的作圖.



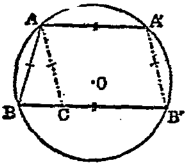

卽以 $AB$ 爲等邊之一,作有等於 $2l$ 的底邊 $AC$ 的等腰三角形 $BAC$, $AC$ 與圓周的交點爲 $A'$ 卽可.

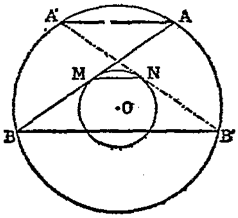
**27.** 在前題令 $AA'+BB'$ 成爲最大.

〔註〕 $MN$ 成爲內圓的直徑,卽得.

**28.** 由圓周上的二點 $A$, $B$ 作一互成平行的二個弦 $AA'$, $BB'$, 令 $AA'-BB'=2l$ (定長).

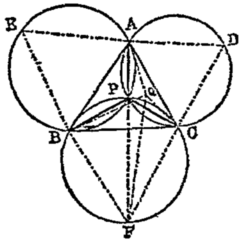
〔註〕 $AA'$, $BB'$ 爲同方向時,及互爲反對方向的二種情形,如下圖,可準第 26 題而思之.




**29.** 試求距 $\triangle ABC$ 頂點距離之和最小的點的位置.

〔註〕 先使三角形的三個角,皆比 120° 爲小.各邊上作正三角形 $ACD$ $BAE$, $CFB$, 以其外接圓的交點爲 $P$, 則 $PA+PB+PC=AF$. 設 $P$ 以外的任意一點爲 $Q$, 則 $Q$ 至少不在兩個圓周上, 依此,今若不在圓周 $BCF$ 之上, 則爲 $QB+QC>QF$. 故




$$QA+QB+QC>QA+QF.$$

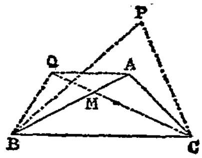
依此, $Q$ 不拘在 $AF$ 之上與否,

$$QA+QB+QC>AF.$$

其次, 例如 $\angle A=120°$, 則 $P$ 與 $A$ 爲一致, 故爲所要之點, 又例 $\angle A>120°$, 則 $P$ 在三角形外, 而 $A$ 與 $P$ 在 $BC$ 的同側, $A$ 爲 $\triangle PBC$ 內之點. 故

$$AB+AC<PB+PC.$$

故 $P$ 不是所要之點,點 $A$ 爲所要之點, 由下情形卽可證明, 若在 $\triangle ABC$ 外與 $BC$ 有關與 $A$ 同側的任意一點爲 Q, $QC$ 與 $AB$ 的交點爲 $M$, 則




$$QA+QB>AB, \quad MC>AC.$$

$$\therefore \quad QA+QB+QC>AB+AC.$$

又以 $\triangle ABC$ 內之點爲 $Q$ 時,

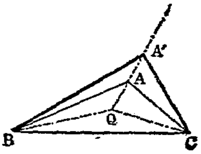
$$QA+QB+QC<AB+AC;$$

則 $QA$ 的延長線上取 $A'$, 可令爲

$$QA'+QB+QC=AB+AC.$$

但　$$A'B+A'C>AB+AC.$$

$$\therefore\ A'B+A'C>QA'+QB+QC\cdots\cdots(1)$$

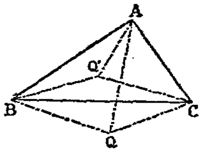



由上若與前同樣,則線分 $QA$ 的延長線上,往下可取 $A^1, A^2,\cdots\cdots$ 等點而 $\angle A^1, \angle A^2,\cdots\cdots$ 爲 $120°$ 或者比 $120°$ 爲小,且常成立如 (1) 的關係,此實爲不合理.

又試在與 $BC$ 有關 $A$ 的反對側取 $Q$.

若對於 $BC$ 爲對稱的 $Q$ 的對稱點爲 $Q'$, 則

$$AQ>AQ'.$$




$$\therefore\ AQ+BQ+CQ>AQ'+BQ'+CQ'.$$

但由前述, $AQ'+BQ'+CQ'>AB+AC.$

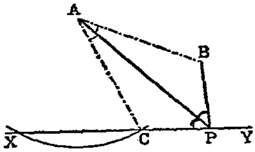
$$\therefore\ AQ+BQ+CQ>AB+AC.$$

**30.** 由直線 $XY$ 的兩側二定點 $A, B$, 對直線 $XY$ 所引垂線之足各爲 $F, H$. 試求線分 $FH$ 的延長線上的一點 $P$, 並令

$$\angle APF=\angle HBP.$$

〔註〕 $\angle APB=\angle R.$

**31.** 有定直線 $XY$ 與在其外的二定點 $A, B$, 在 $XY$ 上求一點 $P$, 作一 $BP$ 與 $XY$ 的角,使爲 $AP$ 與 $XY$ 所成的角的 2 倍.



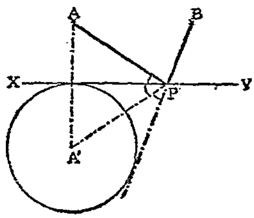

〔註〕 $\angle BPX=2\angle APX$ 時,

$XY$ 上取一點 $C$, 令 $AB=AC$, 引 $\angle BAC$ 的平分線,此線與 $XY$ 的交點若爲 $P$, 則

$$\triangle ABP\equiv\triangle ACP.$$

$$\therefore\ \angle BPX=2\angle APX,$$

$$\angle BPY=2\angle APX.$$




以對於 $XY$ 爲對稱的 $A$ 的對稱點 $A'$ 爲中心,畫一切於 $XY$ 的圓,由 $B$ 作到此圓的切線,此線與 $XY$ 的交點若爲

$P$ 則可.

**32.** 所設四邊形 $ABCD$ 的邊 $BC$ 上求一點 $P$, 令

$$\angle BAP=\angle CDP.$$

〔註〕 對於 $AB$ 爲對稱的 $A$ 的對稱點爲 $A'$

$A'P$ 與 $CD$ 的交點爲 $E$, 如已求得 $P$, 則

$$\angle BAP+\angle APB+\angle B=2\angle R,$$

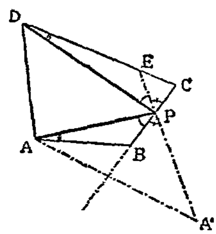
$$\angle CDP+\angle DPC+\angle C=2\angle R.$$

$$\therefore\ \angle APB+\angle B=\angle DPC+\angle C.$$

$\therefore\ \angle DPC-\angle APB=\angle B-\angle C=\theta$ (一定).

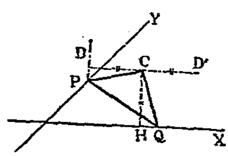
依上, $\angle DPE=\theta$ 爲一定.

$\therefore\ \angle DPA'=2\angle R-\theta$ (一定).



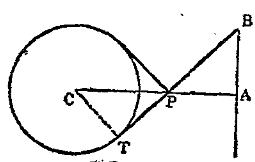

**33.** 以 $C$ 爲所設點,在所設二直線各取點 $P$, $Q$, 令 $CP=CQ$, 且令 $\angle PCQ=\angle R$. 又若一直線代以一圓周則如何?

〔註〕 以二直線爲 $X$, $Y$, 由 $C$ 對 $X$ 所作的垂線 $CH$, 又取通過 $C$ 與 $X$ 平行而且與 $CH$ 相等的線分 $CD$. 由 $D$ 作 $CD$ 的垂線, 此線與 $Y$ 的交點爲 $P$, 若以 $Y$ 換圓周,亦全與上相同.




**34.** $A$ 爲中心 $C$ 的圓外一定點,今在直線 $AC$ 上求一點 $P$, 令 $AP$ 與由 $P$ 對此圓所作的切線相等.

〔註〕 在 $A$ 作 $AC$ 的垂線, 在其上取一點 $B$, 令 $AB$ 之長與圓 $C$ 的半徑相等. 由 $B$ 對圓 $C$ 作切線 $BT$, 此切線 $BT$ 與 $AC$ 的交點卽爲 $P$.




**35.** 過定點 $P$, 作一與定角 $XAY$ 的二邊在 $B$, $C$ 相交的直線, 令 $\triangle ABC$ 的周爲一定長 $2s$.

**36.** 頂角 $A$ 的大小,及其二邊切於內接圓的切點 $M$, $N$, 與此角內的傍接圓的半徑,均爲已知,試作 $\triangle ABC$.

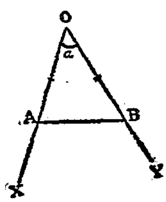
**37.** 設 $\triangle ABC$ 的二邊 $BC$, $CA$ 之和 $l$ 及角 $A$, $B$ 內傍接圓的半徑 $r_1$, $r_2$ 爲已知,試作 $\triangle ABC$.

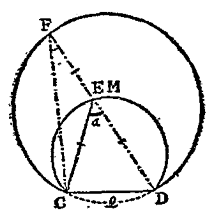
〔註〕 二個傍接圓,切於邊 $AB$ 的延長線上的點各爲 $D$, $E$, 則

$$DE=BC+CA=l.$$

**38.** 定角 $XOY$ 的邊 $OX$, $OY$ 上各求點 $A$, $B$; 令 $AB$ 及 $OA+OB$ 各與所設長相等.

〔註〕 若 $AB=l$, $OA+OB=m$, 長 $l$ 的線分 $CD$ 上畫含 $\angle XOY=\alpha$ 的弓形 $CMD$, 以其弧的中點 $M$ 爲中心, 畫一以 $MC$ 爲半徑的弓形,則其所含之角爲 $\frac{\alpha}{2}$. 在此弓形以 $D$ 爲一端作長 $m$ 的弦 $DF$, 此 $DF$ 與弓形 $CMD$ 的弧的交點爲 $E$, 倘在 $OX$, $OY$ 上截取等於 $EC$, $ED$ 的線分 $OA$, $OB$ 即得,這樣的作圖法叫做逆作圖法.




**39.** 有以一點 $O$ 爲一端的三條半直線 $OX$, $OY$, $OZ$ 在 $A$, $B$, $C$ 各作與此三條半直線相交的另一直線 $ABC$, 令 $AB$, $BC$ 的長各與定長 $l$, $m$ 相等.

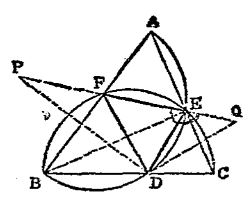
**40.** 試作一圖,一直線與已知 $\triangle ABC$ 的二邊 $AB$, $AC$ 及第三邊 $BC$ 的延長線,各在 $M$, $P$, $N$ 相交二線分 $MP$, $PN$ 之長,使與二已知線分 $m$, $n$ 相等.

**41.** 已知三個傍心的位置,試作一三角形.

〔註〕 原三角形乃以傍心爲頂點的三角形的垂足三角形.

**42.** 使周圍最小的三角形,內接於所設銳角三角形 $ABC$.

〔註〕 所要的三角形 $DEF$ 既已作成,對於 $AB$, $AC$ 爲對稱的 $D$ 點的對稱點若



各爲 $P$, $Q$, 則 $F$, $E$ 必各爲直線 $PQ$ 上截取邊 $AB$, $AC$ 的截點,因此 $DEF$ 必爲垂足三角形.

**43.** 試作外接於所設四邊形 $ABCD$ 的正方形.

〔註〕 若畫一以各邊爲直徑的圓,則所要正方形的對角線與其圓周的交點卽爲定點.

**44.** 有三定點 $A$, $B$, $C$. 作以 $A$ 爲一頂點的正方形,令 $B$, $C$ 在其頂點不相鄰的二邊或其延長線上.

**45.** 已知下列各條件,試作三角形.

(1) 底邊,高及外接圓的半徑.

(2) 底邊,頂角及到底邊的中線.

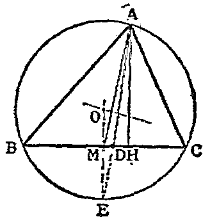
(3) 底邊,頂角及內接圓的半徑.

(4) 底邊,頂角及頂點與內心的距離.

(5) 底邊,頂角及頂角的平分線與底邊交點的位置.

(6) 底邊,頂角及他二邊之和(或差).

**46.** 設底邊其他二邊之和及由底邊的一端至對邊的距離均爲已知,試作三角形.



**47.** 底邊,兩底角之差及他二邊之差爲已知,試作三角形.

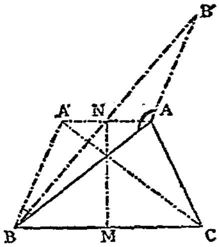
**48.** 已知由一頂點所作的垂線,中線,頂角的平分線,試作三角形.

**49.** 已知底邊,二底角之差及高,試作三角形.

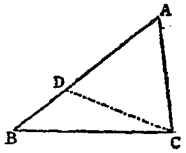
〔註〕 與 $\triangle ABC$ 的底邊 $BC$ 的垂直平分線 $MN$ 有關的 $A$ 的對稱點爲 $A'$, 則

$$\angle ABA' = \angle BCA - \angle ABC.$$

又與 $AA'$ 的中點 $N$ 有關的 $B$ 的對稱點爲 $B'$, 則 $\angle BAB'$ 爲 $\angle ABA'$ 的補角. 故取 $BC$ 的垂直平分線 $MN$ 和所與的高相等,其次取與 $N$ 有關的 $B$ 的對稱點 $B'$, 畫一弓形,以 $BB'$ 爲弦,而含兩底角之差的補角.



**50** 已知周的長,二底角之差及由頂點向對邊所作垂線之長,試作此三角形.



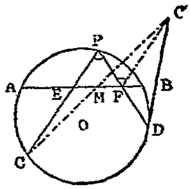

**51.** 已知兩底角之差及非底邊的其他二邊之長,試作此三角形.

〔註〕 在 $\triangle ABC$ 中,若 $AD=AC$, 則

$$\angle BCD=\tfrac{1}{2}(\angle C-\angle B).$$

**52.** 使一邊 $l$ 的菱形,外接於所與的圓 $O$.

**53.** 圓 $O$ 的定弦為 $AB$, 其上的一定點為 $M$; 今以在弦 $AB$ 一方之側的弓形弧上的二定點為 $C$, $D$. 求其共軛弧上的一點 $P$, $CP$, $DP$ 截 $AB$ 之點各為 $E$, $F$, 點 $M$ 為 $EF$ 的中點 試作此圖.




〔註〕 若以與點 $M$ 有關的 $C$ 的對稱點為 $C'$, 則

$$\angle DFC'=2\angle R-\angle CPD\cdots\cdots\cdots\text{一定}$$

**54.** 在定圓周 $O$ 上所設二點 $A$, $B$, 及定直線 $XY$ 上所設一點 $P$ 時,求圓周 $O$ 上一點 $Q$, 直線 $QA$, $QB$, 與 $XY$ 的交點各為 $C$, $D$, 令 $PC+PD=2l$ (定長).

〔註〕 與線分 $CD$ 的中點 $M$ 有關的 $A$ 的對稱點為 $A'$, $\angle A'DB$ 的大小為一定.

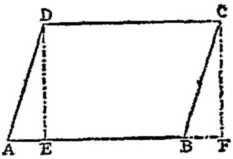
**55.** 有 $\triangle ABC$ 與其內的一點 $O$, 作 $OA$, $OB$, $OC$, 使角 $OAB$, $OBC$, $OCA$ 各為 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ 時,則可成為 $\frac{\beta+2\gamma}{\alpha}=\frac{\gamma+2\alpha}{\beta}=\frac{\alpha+2\beta}{\gamma}$. 試求 $O$ 的位置.

# 第三章　面積

## 19. 關於矩形面積之問題

玆列關於面積最要之基礎定理於下：

〔定理〕 矩形之面積，等於其底邊與其高之相乘積.




根據此定理，應用三角形之全等關係，得推出以下諸系：

〔系 1〕 平行四邊形之面積，等於其底邊與其高之相乘積.

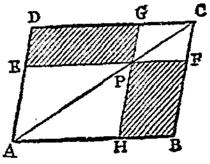
〔系 2〕 三角形之面積，等於其底邊與其高之相乘積之半.

〔系 3〕 底邊與高皆相等之兩三角形，其面積相等.

〔例〕 過平行四邊形 $ABCD$ 之對角線 $AC$ 上之任一點 $P$，直線 $GH$ 與邊 $CB$ 及 $DA$ 相平行，又直線 $EF$ 與邊 $DC$ 及 $AB$ 相平行，則

$$\square EPGD=\square FPHB.$$

〔解〕 平行四邊形之對角線，分此四邊形爲二等積.




$$\triangle ACD=\triangle CAB \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\triangle APE=\triangle PAH \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\triangle PCG=\triangle CPF \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由於 △ (1) 之各邊減去 △ (2), (3) 之各邊，則

$$\square EPGD=\square FPHB.$$

### 問　題　XIX

**1.** 自 $\triangle ABC$ 之頂點 $A$，引 $AD$ 直線，與邊 $BC$ 相平行且等長，又自

邊 $AC$ 之 $C$ 端,延長直線 $CE$ 而與 $AC$ 等長.

(1) 設 $D$ 對 $AC$ 而言,與 $B$ 同側,則 $\triangle BDE=\triangle ABC$.

(2) 設 $D$ 對 $AB$ 而言,與 $C$ 同側,則 $\triangle BDE=3\triangle ABC$.

**2.** 直線 $AB$ 為△ $ABC$, $ABD$ 之底邊,連 $C$, $D$ 兩頂點,設其所連結線之中點為 $E$,則

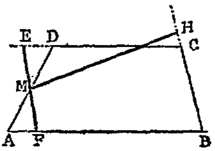
$$\triangle ABE=\tfrac{1}{2}(\triangle ABC+\triangle ABD),$$

又

$$\triangle ABE=\tfrac{1}{2}(\triangle ABC-\triangle ABD).$$

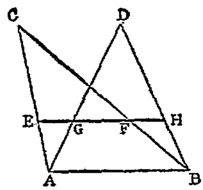
**3.** 試證梯形之面積,等於其兩底之和之半與其高之相乘積.

**4.** 梯形中兩不相平行之邊,其一腰與由其對腰之中點,所引之垂線之所包之矩形之面積,與原梯形之面積相等.



〔註〕 過梯形 $ABCD$ 中之一腰 $DA$ 之中點 $M$,引直線 $EF$ 與 $BC$ 相平行,此 $E$ 點為梯形中 $CD$ 之延長線中之一點,$F$ 點為梯形中 $AB$ 邊中之一點;而 $E$, $F$ 兩點為與 $BC$ 邊相平行線上之兩點,則得一平形四邊形,與原梯形面積相等.

**5.** 設 $AB$ 為兩等積△ $ABC$, $ABD$ 共有之一邊,且此兩△之頂點 $C$, $D$ 均在 $AB$ 之同側,於 $\triangle ABC$ 之 $CA$ 邊上取 $E$ 點,$CB$ 邊上取 $F$ 點,連此直線 $EF$ 與 $AB$ 相平行,又於 $\triangle ABD$ 之 $DA$ 邊上取 $G$ 點,$DB$ 邊上取 $H$ 點,連直線 $GH$ 與 $AB$ 平行,則 $EF=GH$.



〔註〕 試以 $h$ 為 $C$ 及 $D$ 至 $EH$ 間之距離,$k$ 為 $EH$ 至 $AB$ 間之距離計算之.

**6.** 試證過梯形之對角線之交點與底平行,而為兩腰所截分之直線兩線分相等.

**7.** 設點 $D$, $E$ 分為 $\triangle ABC$ 之邊 $AB$ 及邊 $AC$ 之中點,則

$$\triangle ABC=4\triangle ADE.$$

**8.** 試證由四邊形之各邊之中點相連成之四邊形,為原四邊形之積之半,且為一平行四邊形.

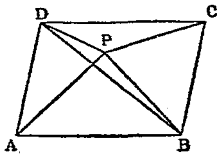
**9.** 設 $P$ 為平行四邊形 $ABCD$ 內之任一點,試證

$$\triangle PAB+\triangle PCD=\triangle PBC+\triangle PDA.$$

**10.** 設 $P$ 爲四邊形 $ABCD$ 中 $AD$ 對角線上之中點 $M$, 與同四邊形中 $BD$ 對角線上之中點 $N$, 所連結線上之任意點. 試證

$$\triangle PAB+\triangle PCD=\triangle PBC+\triangle PAD.$$

**11.** 設 $P$ 爲平行四邊形內之一點,由此點分向 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, 連結直線 $PA$, $PB$, $PC$, $PD$. 試證 $\triangle BPD$ 之面積等於 $\triangle CPD$ 與 $\triangle APD$ 之差.




〔註〕 $\triangle APD+\triangle CPB=\frac{1}{2}\square ABCD$,

$\triangle CPD+\triangle BPD+\triangle CPB=\frac{1}{2}\square ABCD$.

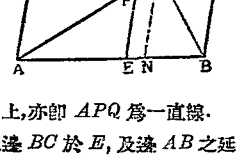
$\therefore\ \triangle APD=\triangle CPD+\triangle BPD$.

$\therefore\ \triangle BPD=\triangle APD-\triangle CPD$.

**12.** 設 $P$ 爲平行四邊形 $ABCD$ 內之一點, 過此點引兩線,平行於底邊及一腰, 此平行於腰之直線,交 $AB$ 邊於 $H$, $DC$ 邊於 $G$, 而平行於底之直線,交 $BC$ 邊於 $F$, $DA$ 邊於 $E$, 設 $\square PGDE=\square PHBF$, 試證 $P$ 爲對角線 $AC$ 上之一點.

**13.** 過平行四邊形內之 $P$ 點,引兩平行線,一平行於底邊,其他平行於一腰,而 $P$ 點之位置爲不在 $AC$ 對角線上者,則 $\triangle APC$ 之面積爲 $\square PB$, $\square PD$ 兩平行四邊形之差之半.反之, $P$ 若在對角線 $AC$ 上,則又如何?

**14.** 設 $HF$ 及 $GE$, 爲通過 $\square ABCD$ 內之 $P$ 點,所引平行於底及腰之兩直線,而 $H$ 爲 $DA$ 邊上之點, $F$ 爲 $CB$ 上者, $G$ 爲 $DC$ 上, $E$ 爲 $AB$ 上者;又 $DF$ 及 $GB$ 之交點爲 $Q$, 試證 $APQ$ 爲一直線.




$BG$ 爲 $\square EBCG$ 之對角線,

$DF$ 爲 $\square HFCD$ 之對角線.

$\therefore\ \square QLCM=\square QE=\square QH$.

$\therefore\ \square QE=\square QH$.

$\therefore\ \square PN=\square PK$.

依此,可知 $P$ 爲 $\square ANQK$ 之對角線 $AQ$ 上,亦卽 $APQ$ 爲一直線.

**15.** 過 $\square ABCD$ 之頂角 $D$, 引一直線交邊 $BC$ 於 $E$, 及邊 $AB$ 之延

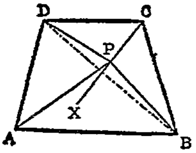
長線上於 $F$，則 $\triangle ABE=\triangle CEF$.

**16.** 若 $P$ 爲四邊形內之任一點，則連此四邊形之頂點 $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$，其所成之 $\triangle PAB$ 與 $\triangle PCD$ 之和，永爲一定時（$P$ 爲任意點），則此四邊形爲一平行四邊形.

**17.** 設四邊形之一對角線，分此四邊形爲二等分時，則其一之對角線必過他之對角線之中點.

**18.** 設 $P$ 爲四邊形 $ABCD$ 內之一點，試證

$$\triangle PAB=\triangle PBC=\triangle PCD=\triangle PDA.$$




〔註〕設 $\triangle PAB=\triangle PDA$,

則 $AP$ 必等分 $BD$.

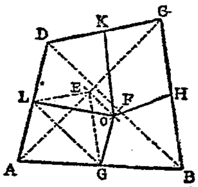
又 $\triangle PBC=\triangle PCD$,

則 $CP$ 必等分 $BD$.

$\therefore$ $P$ 如爲 $BD$ 之中點，則對角線 $AC$ 必穿 $BD$ 之中點（$P$ 點）.

又 $AC$ 過 $BD$ 之中點，且 $P$ 爲 $AC$ 之中點則佳. 又設 $A, P, C$ 不爲一直線時，而 $P$ 爲 $BD$ 之中點，以前例相衡，則 $BD$ 必過 $AC$ 之中點. 在此情形之下最少，亦須此之一對角線，過他之對角線之中點，則此問題方可成立.

**19.** 四邊形 $ABCD$ 之對角線 $AC$ 及 $BD$ 之中點 $E, F$，過 $E$ 而平行於 $DB$ 之直線，與過 $F$ 而平行於 $AC$ 之直線交於 $O$，又由 $O$ 各引直線至此四邊形各邊之中點，則分此四邊形爲四等分.




〔註〕設 $G$ 爲 $AB$ 邊之中點，

$H$ 爲 $BC$ 邊之中點，

$K$ 爲 $DC$ 邊之中點，

$L$ 爲 $DA$ 邊之中點；

$LG \parallel EO$. $\therefore$ $\triangle OLG=\triangle ELG$.

$\therefore$ $OLAG=ELAG$.

但 $\triangle ALE=\frac{1}{4}\triangle DAC$; $\triangle AGE=\frac{1}{4}\triangle ABC$.

**20.** 設 $ABCD$ 爲一四邊形，$AC$ 及 $BD$ 爲對角線，過 $D$ 點及 $B$ 點分引兩線，皆平行於 $AC$，又過點 $C$ 及 $A$ 分引兩線，皆平行於 $DB$，則此

所成之四邊形之面積適爲原四邊形之二倍.

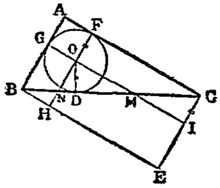
**21.** 設 $\triangle PQR$ 之二邊 $PQ$ 及 $PR$, 與四邊形 $ABCD$ 之對角線 $AC$ 及 $BD$ 各相等,且 $\angle QPB$ 亦等於四邊形中 $AC$ 及 $BD$ 所交之角,則

$$ABCD=\triangle PQR.$$

**22.** 內接於矩形 $ABCD$ 之對角線,所成之三角形 $ABC$ 之圓.由此圓心引垂線至矩形之邊 $BC$ 交於 $F$, 又垂線至矩形之邊 $DA$ 交於 $E$, 則此矩形 $OEDF$ 爲原矩形 $ABCD$ 之半.

**23.** 直角三角形之斜邊 $BC$, 與內接圓切於 $D$ 點,試證

$$\triangle ABC=BD\times DC.$$




〔註〕 過 $O$ 圓心引兩直線,平行△之兩腰,此矩形 $ABCD$ 如圖所示者.

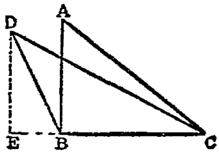
$$\triangle ODM = \triangle ICM,$$

$$\triangle ODN = \triangle BHN.$$

$$\therefore\quad \square OHEI=\triangle BEC$$

$$=\triangle ABC.$$

**24.** 設二△有二邊相等,但其面積以此二邊所夾之角決定之,其角爲直角者其面積最大.




〔註〕 於 $\triangle ABC$, $\triangle BCD$,

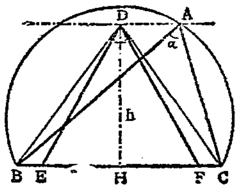
$$\angle ABC=\angle R;\quad \angle DBC\neq\angle R.$$

且 $$DE\perp BC.$$

$$\therefore\quad DE<AB.$$

$$\therefore\quad \triangle ABC>\triangle BCD.$$

**25.** 設頂角及高爲定量時,以二等邊三角形之面積爲最小.




〔註〕 $\triangle ABC$ 爲一二邊不相等之△,其高爲 $h$, 頂角爲 $\angle \alpha$.

$HD$ 爲底邊 $BC$ 之⊥與 $BC$ 相平行之直線交於 $D$ 點者.

$$\triangle ABC=\triangle DBC,$$

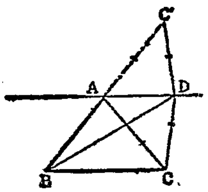
$$\angle BDC>\angle BAC.$$

作等邊 $\triangle DEF$, 其頂角與 $\angle A$ 相等.

$\triangle DEF < \triangle DBC$.

$\therefore \triangle DEF < \triangle ABC$.

**26.** 設△之底邊及面積爲定量時,以二等邊三角形之周邊爲最小.




〔註〕 二等邊 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DBC$ 之面積相等.

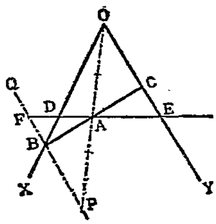
$AD \parallel BC$.

由於 $AD$, $C'$ 爲對 $C$ 之對稱點.

$AC' = AC$, $DC' = DC$.

$\therefore AB + AC < BD + DC$.

**27.** 設 $A$ 爲 $\angle XOY$ 內之一點,由此點引兩直線,一與 $OX$ 邊交於點 $B$,一與 $OY$ 邊交於點 $C$,若 $BA = AC$,則 $\triangle OBC$ 之面積爲最小.




〔註〕 $P$ 爲對 $A$, $O$ 之對稱點.

過 $P$ 點引直線 $PQ$ 平行於 $OY$,而交 $OX$ 於 $B$, $BA$ 與 $OY$ 交於 $C$,使

$BA = AC$.

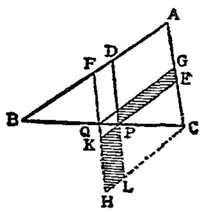
又直線過 $A$ 與 $OX$, $OY$, $PQ$ 交於 $D$, $E$, $F$ 三點.

$\triangle ACE = \triangle ABF$,

$\triangle ABF > \triangle ABD$.

$\therefore \triangle ODE > \triangle OBC$.

**28.** 設 $P$ 爲 $\triangle ABC$ 之 $BC$ 邊上之一點,由此點引兩線平行於他二邊交於 $AB$ 邊者爲 $D$,交於 $AC$ 邊者爲 $E$,此 □$PDAE$ 之面積以 $P$ 爲 $BC$ 邊上之中點時爲最大.




〔註〕 設 $P$ 爲 $BC$ 之中點, $Q$ 爲此邊之另外一點.

則 □$PEAD$ 及 □$QGAF$ 均設立,今過 $C$ 點引直線 $CH \parallel AB$. 如圖所示,因 $CQ$ 爲 □$CGQH$ 之對角線.

$\therefore$ □$PH$ = □$PG$.

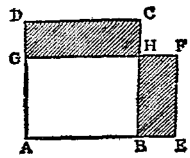
又　　$KH=CE,\ QF=AG.$

$\therefore\ KH>QF.\quad \therefore\ \square PH>\square QD.\quad \therefore\ \square PG>\square QD.$

因之，　$\square PEAD>\square QGAF.$

**29.** 周界定量之矩形之中，以正方形之面積爲最大.

設正方形與矩形之周界相等，試比較其二鄰邊之和.




$$AB+BC=AE+EF.$$

$$\therefore\ AE-AB=BC-EF.$$

$$\therefore\ BE=CH.$$

但　$AB>BH.\quad \therefore\ \square HCDG>\square BEFH.$

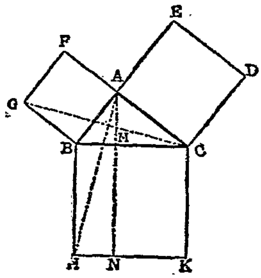
**30.** 定量面積之矩形之中，以正方形之周界爲最小.

〔註〕 據前題之圖，　$\square HCDG=\square BEFH.$

且　　$CD>BH.\quad \therefore\ CH<BE.$

## 20. 關於畢氏定理 (Pythagora's theorem) 之問題

以 $A$ 爲 $\triangle ABC$ 之直角頂，而於此△之各邊作三正方形 如圖所示者，自 $A$ 引垂線過 $BC$ 邊之 $M$，而交 $HK$ 於 $N$.




$$\triangle ABH=\triangle GBC.$$

又　$\triangle ABH=\frac{1}{2}\square BHNM,$

$\triangle GBC=\frac{1}{2}\square BAFG.$

$\therefore\ \square BHNM=\square BAFG.$

同理，　$\square CKNM=\square CDEA.$

按此，得

〔定理〕 直角三角形斜邊上之正方形之積，爲此三角形兩腰上之正方形之和之積.

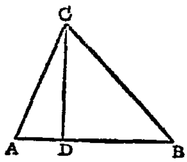
由上之證明，$\square BAFG=\square BHNM$ 得以下諸系.

〔系 1〕 由直角△，直角頂 $A$ 至 $BC$ 邊所做之垂線，設 $D$ 爲垂足，則

$$\overline{AB}^2=BC\times BD.$$

$\triangle ABC$ 內；　　$\angle B<\angle R,\ AB\perp CD,$

$$\overline{AC}^2=\overline{CD}^2+\overline{AD}^2$$
$$=\overline{CD}^2+(AB-BD)^2$$
$$=\overline{CD}^2+\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2AB\times BD$$
$$=\overline{AB}^2+(\overline{CD}^2+\overline{BD}^2)-2AB\times BD$$
$$=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2AB\times BD.$$




故又推出

〔系 2〕 $\triangle ABC$ 內 $\angle B$ 爲銳角時，投於 $AB$ 上之 $BC$ 之正射影爲 $BD$，則

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2AB\times BD.$$

同理

〔系 3〕 $\triangle ABC$ 內，$\angle B$ 爲鈍角時，投於 $AB$ 上之 $BC$ 之正射影爲 $BD$，則

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+2AB\times BD.$$

由定理及系 2, 3, 得

〔系 4〕 $\triangle ABC$ 內，

(1) $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$ 時，$\angle B=\angle R$.

(2) $\overline{AC}^2>\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$ 時，$\angle B>\angle R$.

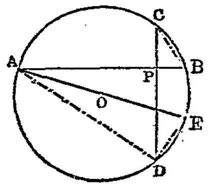
(3) $\overline{AC}^2<\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$ 時，$\angle B<\angle R$.

由於系 2 及系 3, 得

〔系 5〕 三角形之二邊上之正方形之和，爲第三邊之半分上之正方形及由對第三邊角頂至第三邊之中線上之正方形之和之二倍.

此系用於軌跡問題內者甚多.

〔例〕 二弦直交於圓內，其所分之各部分上之四正方形之和，等於依圓之直徑所作之正方形.




〔解〕 $AB, CD$ 爲二弦直交於圓 $O$ 內 $P$ 點，且弦 $BE \parallel CD$.

$$\therefore\ BC=DE,$$
$$\overline{AP}^2+\overline{DP}^2=\overline{AD}^2;\ \overline{CP}^2+\overline{BP}^2=\overline{BC}^2.$$
$$\therefore\ \overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2+\overline{DP}^2=\overline{AD}^2+\overline{DE}^2.$$

但 $\angle ABE=\angle R\ (BE \parallel CD)$,

$$\angle ADE=\angle R \ (AE \text{ 爲直徑}).$$

$$\therefore \quad \overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2+\overline{DP}^2=\overline{AE}^2 \ (\text{直徑之平方}).$$

## 問題 XX

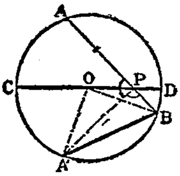
**1.** 於任意 $\triangle ABC$ 之邊 $BC$, $AC$ 上，各作任意之 ▱$CBHK$, $CAED$, $HK$ 與 $ED$ 交於 $L$, 且延長 $LC$ 使交 $AB$ 於 $M$, 更延長 $LM$ 至點 $N$, 使 $MN$ 等於 $LC$, 又自 $A$ 引 $AF$ 使平行,且相等於 $MN$, 則得 ▱$AFGB$, 求證

$$\square BK+\square CE=\square BF.$$

**2.** 平行四邊形之各邊上之正方形之和，等於其兩對角線上之正方形之和.

**3.** 四邊形之兩對角線上之正方形之和，等於此四邊形之各對邊之中點相連之線分上之正方形之和之二倍.

**4.** 弦 $AB$ 交直徑 $CD$ 於點 $P$, 其所成之角爲 $45°$ 時,則 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$ 等於半徑上正方形之二倍.




〔註〕 $CD$ 爲直徑；$A'$ 爲對 $CD$, $A$ 之對稱點,而在圓周上者, $\angle A'PB=\angle R$.

$$\therefore \quad \overline{A'P}^2+\overline{BP}^2=\overline{A'B}^2.$$

且 $\overset{\frown}{A'B}$ 爲圓周之 $\frac{1}{4}$.

$\triangle OA'B$ 爲直角等邊三角形.

$$\therefore \quad \overline{A'B}^2=2\overline{OB}^2. \quad \therefore \quad \overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2\overline{OB}^2.$$

**5.** 設 $D$ 爲直角二等邊三角形 $BC$ 斜邊上之任意點,試證

$$2\overline{AD}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2.$$

**6.** 於正方形 $ABCD$ 之 $BD$ 對角線上,截 $BE$ 等長於 $BC$, 自 $E$ 引垂線垂直於 $DB$, 交 $BC$ 於點 $F$, 試證

(1) $DE=EF=FC$. (2) $\overline{BD}^2=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\overline{BF}^2$.

**7.** 設 $G$ 爲 $\triangle ABC$ 之重心,試證

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+4\overline{AG}^2.$$

**8.** 設直角三角形之內接圓之半徑爲 $p$, 斜邊 $AB$ 之長爲 $c$, 三角形之半圓周爲 $s$, 試證 $p=s-c$.

又自直角項 $C$，引垂線至斜邊 $AB$ 爲 $CD$，則直角三角形 $ACD$ 之內接圓之半徑爲 $r$，而直角 $\triangle BCD$ 之內接圓之半徑爲 $r'$；試證

$$r^2+r'^2=(s-c)^2.$$

**9.** 分 $\triangle ABC$ 之底邊 $BC$ 爲 $BD, DE, EC$ 三等分，試證

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2+4\overline{DE}^2.$$

**10.** 設 $\triangle ABC$ 之底邊 $BC$ 上之一點爲 $D$，而 $BD$ 爲 $CD$ 之半；試證

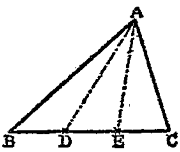
$$2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=6\overline{BD}^2+3\overline{AD}^2.$$

〔註〕設 $E$ 爲 $CD$ 之中點.

$$\overline{AB}^2+\overline{AE}^2=2\overline{BD}^2+2\overline{AD}^2.$$

$$\therefore\quad 2\overline{AB}^2+2\overline{AE}^2=4\overline{BD}^2+4\overline{AD}^2\cdots\cdots(1)$$

又 $$\overline{AD}^2+\overline{AC}^2=2\overline{DE}^2+2\overline{AE}^2\cdots\cdots\cdots(2)$$




因 $BD=DE$，故自 (1) 及 (2)，

$$2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=6\overline{BD}^2+3\overline{AD}^2.$$

**11.** 設 $G$ 爲 $\triangle ABC$ 之重心，而 $P$ 爲任意點，試證

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2+3\overline{PG}^2.$$

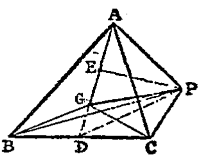
〔註〕設 $E$ 爲 $AG$ 之中點.

$$\overline{PA}^2+\overline{PG}^2=2\overline{PE}^2+2\overline{EG}^2\quad\cdots\cdots(1)$$

$$\overline{PE}^2+\overline{PD}^2=2\overline{PG}^2+2\overline{GD}^2.$$

$$\therefore\quad 2\overline{PE}^2+2\overline{PD}^2=4\overline{PG}^2+4\overline{GD}^2\quad\cdots(2)$$

$$\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=2\overline{PD}^2+2\overline{BD}^2\quad\cdots\cdots(3)$$




(1), (2), (3) 之兩邊相加而整理之.

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=(2\overline{BD}^2+2\overline{GD}^2)+4\overline{GD}^2+3\overline{PG}^2$$
$$=\overline{GB}^2+\overline{GC}^2+\overline{GA}^2+3\overline{PG}^2.$$

$$\therefore\quad \overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\overline{GA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$$
$$=\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2+3\overline{PG}^2.$$

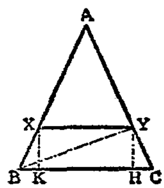
**12.** 三角形之兩邊之平方之差，等於由此兩邊所夾之頂角至第三邊之垂足所分之兩線分之平方之差.

**13.** 設 $D$ 爲直角三角形 $AB$ 邊之中點，由 $D$ 引一垂線 $DE$ 至斜邊 $BC$ 上，則 $\overline{AC}^2=\overline{CE}^2-\overline{BE}^2$.

**14.** 梯形之一底爲其他底之二倍之時，則兩對角線上之正方形之和，等

於此梯形兩腰上之正方形及大底上正方形之和

15. $XY$ 爲截銳角三角形之兩腰 $AB$, $AC$, 與第三邊 $BC$ 相平行之直線,設 $\overline{CY}^2+BC\times XY=\overline{BY}^2$ 時,則 $\triangle ABC$ 爲二等邊三角形.




〔註〕 設 $H$ 爲由 $Y$ 引垂線至 $BC$ 之垂線之足,

$$\overline{BY}^2-\overline{CY}^2=\overline{BH}^2-\overline{CH}^2$$
$$=(BH+CH)(BH-CH).$$

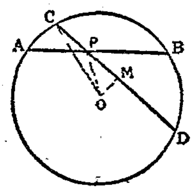
故照題設 $\overline{BY}^2-\overline{CY}^2=BC\times XY$,

$$BH-CH=XY.$$

設 $K$ 爲由 $X$ 引垂線至 $BC$ 之垂線之足,則

$$BH-BK=XY. \quad \therefore \quad BK=CH.$$

16. 兩弦 $AB$, $CD$, 交於圓 $O$ 內 $P$, 求證 $AP\times PB=CP\times PD$.




〔註〕 設 $M$ 爲由 $O$ 至 $CD$ 之垂線之足.

$$CP=CM-MP;\ DP=DM+MP;$$
$$CM=DM.$$

$$\therefore\ CP\times DP=(CM-MP)(CM+MP)$$
$$=\overline{CM}^2-\overline{MP}^2$$
$$=(\overline{OC}^2-\overline{OM}^2)-(\overline{OP}^2-\overline{OM}^2)$$
$$=\overline{OC}^2-\overline{OP}^2.$$

$OC$ 爲半徑, $OP$ 既爲定線分,則其結果固無異, 亦卽 $CD$ 如過 $P$ 點,至其位置固無異也.

17. 由圓外一點 $P$, 引兩割線,其一截於圓周之點爲 $A$, $B$, 其他爲 $C$, $D$ 時,求證 $AP\times BP=CP\times DP$.

18. 自圓外引一切線 $PT$, 又引一割線 $PAB$, 求證

$$PA\times PB=\overline{PT}^2.$$

19. 由兩圓相交之共通弦之延長線上之各點, 所引對兩圓之切線相等.

20. 設有以 $C$ 爲中心之圓, $AB$ 爲一弦,連 $A$, $B$ 兩點各至圓周上另點 $P$. $AP$ 與 $AB$ 之垂直平分線交於 $X$, 而 $BP$ 交 $AB$ 之垂直平分線於 $Y$, 則 $CX\times CY=c^2$.

21. 過以自圓心至直線 $XY$ 之垂線足 $A$, 引一直線截圓周於 $B$, $C$

兩點,又以 $B$ 爲切點,引切線交 $XY$ 於 $P$, 則

$$\overline{AP}^2\sim\overline{BP}^2=AB\times AC.$$

〔註〕 $\overline{AP}^2=\overline{OP}^2-\overline{OA}^2$,

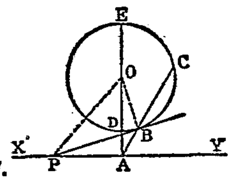
$\overline{BP}^2=\overline{OP}^2-\overline{OB}^2$.

$\therefore\ \overline{AP}^2\sim\overline{BP}^2=\overline{OB}^2\sim\overline{OA}^2$

$=\overline{OD}^2\sim\overline{OA}^2$

$=(OD+OA)(OD\sim OA)$

$=AE\times AD=AB\times AC.$




**22.** 設 $H$ 爲 $\triangle ABC$ 之垂心,由各頂點至各對邊所引之垂線爲 $AA'$, $BB'$, $CC'$ 時,則

(1) $AH\times HA=BH\times HB'=CH\times HC'$.

(2) $\overline{AH}^2+\overline{BC}^2=\overline{BH}^2+\overline{CA}^2=\overline{CH}^2+\overline{AB}^2$.

**23.** 由三角形各頂點向各對邊所畫之三直線,過同一點,而在此點分爲包含相等長方形之線段時,此點爲此三角形之垂心.

**24.** 自 $\triangle ABC$ 之邊 $BC$ 之中點 $D$, 向由 $A$ 所做之外接圓之直徑,引一垂線,且延長之使與外接圓交於 $E$, 則

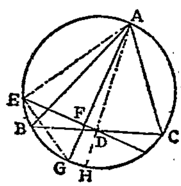
$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AE}^2.$$

〔註〕 $AG$ 爲直徑, $AD$ 與外接圓交於 $H$, $DE$ 與 $AG$ 交於 $F$.

$\angle AEG=\angle AHG=\angle R$,

$\overline{AE}^2=AG\times AF$.

且 $DFGH$ 內切於圓,




$AG\times AF=AD\times AH$

$=AD(AD+DH)$

$=\overline{AD}^2+AD\times DH$

$=\overline{AD}^2+BD\times DC$

$=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2$.

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2)$.

**25.** 設 $AB$ 爲直徑,又弦 $AC$, $BD$ 交於 $P$, 則

$$\overline{AB}^2=AC\times AP+BD\times BP.$$

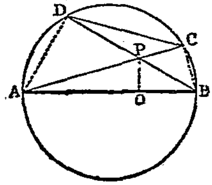
$PQ\perp AB$, 則 $BCPQ$ 內接於圓,

$$AC \times AP = AB \times AQ.$$

同理， $BD \times BP = AB \times BQ.$

$\therefore$ $AC \times AP + BD \times BP$

$= AB(AQ + BQ) = \overline{AB}^2.$




**26.** 設 $\angle C$ 爲 $\triangle ABC$ 之鈍角，又自 $\angle A$ 引垂線至其對邊，其垂足爲 $D$，自 $\angle B$ 引垂線至其對邊而垂足爲 $E$，則

$$\overline{AB}^2 = BC \times BD + AC \times AE.$$

**27.** 設 $ABCD$ 爲一矩形，$DE$ 爲 $DA$ 之一部分，且等於 $DC$，引 $EF$ 垂直於 $AD$，又以 $A$ 爲圓心，$AD$ 爲半徑，使圓周落於 $F$ 點，則 $DF$ 等於同此矩形面積之正方形之對角線.

**28.** 以 $R$ 爲半徑之圓，$AB$，$CD$ 爲其兩弦，直交於彼此之延長線上，此交點爲 $P$，又 $P$ 至圓心之距爲 $d$.

(1) $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = 4R^2.$

(2) $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 8R^2 - 4d^2.$

**29.** 自圓外一點 $A$，引二切線 $AS$，$AT$，又自 $A$ 引割線，使交圓於 $P$，$Q$ 兩點，而 $ST$ 則交 $APQ$ 於 $R$，設 $N$ 爲 $PQ$ 之中點.

(1) $AN \times AR = \overline{AS}^2.$

(2) $\dfrac{1}{AP} + \dfrac{1}{AQ} = \dfrac{2}{AR}.$

**30.** 設 $CD$ 爲平行於直徑 $AB$ 之弦，又 $P$ 爲 $AB$ 上任意點.

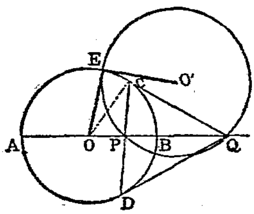
$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2.$$

**31.** 過任意直徑 $AB$ 上之一點 $P$，引弦 $CD$ 與 $AB$ 相垂直，又自 $C$，$D$ 兩點，各引切線會於 $Q$ 點；過 $P$ 及 $Q$ 作圓，使與舊圓交於 $E$. 又自 $E$ 分向兩圓引切線，證此兩切線相垂直.

〔註〕 設 $O$ 爲所與之圓心，而 $O'$ 爲過 $P$，$Q$ 點所做之圓之心.

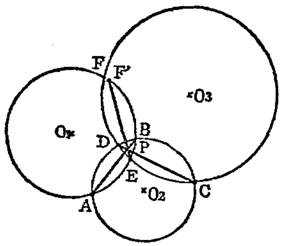
$$\angle OCQ = \angle R.$$

$\therefore$ $OP \times OQ = \overline{OC}^2 = \overline{OE}^2.$



∴ $OE$ 爲 $O'$ 圓之切線.

32. 若三圓互交，其三公弦必過一公點.




〔註〕 公弦 $AB$, $CD$ 之交點爲 $P$.

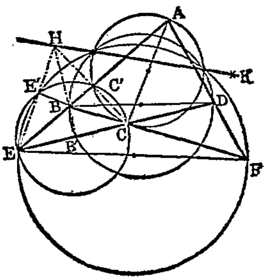
$AP\times PB=CP\times PD$.

於 $O_1$ 內, $AP\times PB=EP\times PF'$.

∴ $EP\times PF=CP\times PD$.

故 $F'$ 在 $O_3$ 之圓周上，亦即 $EP$ 過 $O_1$ 及 $O_3$ 之交點.

33. 設四邊形之各對邊 $AB$ 及 $CD$ 之延長線交於 $E$, 而 $AD$ 及 $BC$ 交於 $F$, 又各以 $AC$, $BD$, $EF$ 爲直徑，則作出之三圓，有一公弦.




〔註〕 $H$ 爲 $\triangle BEC$ 之垂心; $BH$, $EH$, $CH$, 與其對邊交於 $B'$, $E'$, $C'$.

以 $AC$, $BD$, $EF$ 爲直徑，又以 $EC$ 爲直徑，所做之圓，弦 $CC'$, $BB'$, $EE'$ 交於 $H$. ∴ $H$ 爲以 $AC$ 爲直徑及 $BD$ 爲直徑所做之圓之公弦，又以 $AC$ 爲直徑及 $EF$ 爲直徑之公弦之上.

$\triangle CFD$ 之垂心爲 $K$.

同理, $HK$ 爲三圓之公弦.

34. 設四邊形 $ABCD$ 之對邊 $AB$ 及 $DC$ 之延長線交於 $E$, 又 $BC$ 及 $AD$ 之延長線交於 $F$, 則 $AC$, $BD$ 及 $EF$ 之中點在一直線上.

35. 設 $M$ 爲 $\triangle ABC$ 之外接圓之中點，試證

$$AB\times AC=\overline{MB}^2-\overline{MA}^2.$$

〔註〕 以 $M$ 爲圓心, $MB$ 爲半徑所做之圓，與 $BA$ 之延長線交於 $C'$.

$$AB\times AC=AB\times AC'.$$

又直線 $MA$ 與在新圓交於 $D$, $E$ 兩點.

$$AB\times AC'=DA\times AE=\overline{MD}^2-\overline{MA}^2.$$

且 $$MD=MB.$$

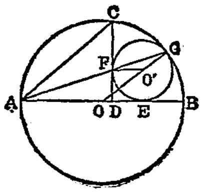
36. 與二邊 $a$, $b$ 及 $\angle A$, 作圖得二三角形，此二三角形之第三邊分爲

$c_1$, $c_2$ 時, $b^2=a^2+c_1c_2$.

37. 自半圓周上一點 $C$, 向 $AB$ 直徑引垂線 $CD$, 過 $BD$ 上之 $E$, $CD$ 上之 $F$, 及半圓周上之 $G$ 作一圓周,則 $A$, $F$, $G$ 在一直線上.

〔註〕 設 $O$, $O'$ 分爲大小圓之圓心, $O$, $O'$, $G$ 在一直線上.

$$FO' \parallel AB.$$




連 $AG$ 及 $FG$, $\triangle OAG$ 及 $O'FG$ 爲二等邊△.

$$\angle AOG=\angle FO'G,$$
$$\angle OAG=\angle O'FG.$$

∴ $AFG$ 爲一直線.

$$\overline{AC}^2=AD\times AB.$$

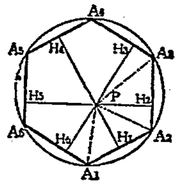
又 $\overline{AE}^2=AF\times AG$. 但 $BGFD$ 內接於圓.

$$AD\times AB=AF\times AG.\quad \therefore\quad AC=AE.$$

## 21. 一定問題

自正多角形內之任意一點,向各邊所引之垂線之和,爲一定量.

〔解〕 自正 $n$ 角形 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$ 內之任意點 $P$, 至 $A_1A_2\cdots\cdots A_nA_1$, 各邊引垂線 $PH_1$, $PH_2\cdots\cdots PH_n$, 此垂線之長,各爲 $h_1\cdots\cdots h_n$. 設內接圓之半徑爲 $r$, 一邊之長爲 $a$, 面積爲 $S$.




$$2\triangle PA_1A_2=ah_1,\ 2\triangle PA_2A_3=ah_2\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad 2S=a(h_1+h_2+\cdots\cdots+h_n).$$

又
$$2S=ar+ar+\cdots\cdots+ar=nar.$$

$$\therefore\quad a(h_1+h_2+\cdots\cdots+h_n)=nar.$$

$$\therefore\quad h_1+h_2+\cdots\cdots+h_n=nr.$$

## 問　題　XXI

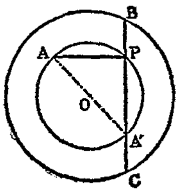
1. 兩四邊形,設其兩對角線各等長,且其各所夾之角爲一定時,則兩四邊形之面積相等.

2. 設 $P$ 爲所與之平行四邊形之周上之任一點,則 $\triangle ACP+\triangle BDP$ 等於某定量.

3. 連梯形上下兩底引一直線，此直線分此梯形爲二等分，試證此直線必過一定點.

4. 自二同心圓之小圓周上之 $P$ 點,引小圓之任意弦 $PA$. 又過 $P$ 引大圓之弦 $BPC$ 垂直於 $PA$, 則 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 爲一定.

〔註〕 $O$ 爲圓之中心, $BPC$ 交小圓於 $A'$, $AA'$ 爲小圓之直徑.




$$PA'=PC-PB.$$

又 $$\overline{AA'}^2=\overline{AP}^2+\overline{PA'}^2$$
$$=\overline{AP}^2+(PC-PB)^2$$
$$=\overline{AP}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2-2PB\times PC.$$

設大圓之半徑爲 $R$, 小圓之半徑爲 $r$.

$$PB\times PC=(R+r)(R-r)=R^2-r^2.$$

$$\therefore\quad 4r^2=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2-2(R^2-r^2).$$

$$\therefore\quad \overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=2(R^2+r^2).$$

5. 設 $AB$ 爲一定圓之定直徑, $PQ$ 爲平行於此定直徑之任意一弦 $AP$, $AQ$ 之平方之和,與 $PQ$ 之位置無關.

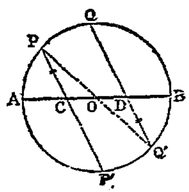
6. 自定圓之直徑上一定點,引兩直線至平行於此直徑之弦之兩端,此兩直線上之正方形之和爲一定.

7. 自二同心圓之小圓周上之 $P$ 點, 引小圓之任意弦 $PA$, 又過 $P$ 引大圓之弦 $BC$ 與 $PA$ 成直交,則 $\triangle ABC$ 之三邊之平方之和,與 $PA$ 之方向無關而爲一定.

8. 設 $A$, $B$ 兩點爲對圓心 $O$, 距離相等,方向相反之二點,過 $B$ 引任何弦 $CD$, 則 $\triangle CAD$ 之三邊之平方之和爲一定.

9. 設 $C$, $D$ 爲半圓之直徑上, 距圓心等距離之兩點,引 $CP$, $DQ$ 互相平行,且交半圓周於 $P$, $Q$ 兩點,則矩形 $CP\cdot DQ$ 爲一定.

〔註〕 $AB$ 爲半圓之直徑, $CP$, $DQ$ 交另半圓周於 $P'$, $Q'$ 二點.




$$CP'=DQ.$$

$$\therefore\quad CP\times DQ=CP\times CP'=AC\times CB.$$

10. 設切於直徑兩端 $A$, $B$ 之兩切線，與切於圓周上任一點 $R$ 之切線，相交於 $P$, $Q$ 兩點，則 $PR\times QR$ 爲一定.

〔註〕 $O$ 爲圓心，$\angle POQ$ 爲直角，

$$PR\times QR=\overline{OR}^2.$$

11. 設切於直徑兩端 $A$, $B$ 之兩切線，與切於圓周上任一點 $R$ 之切線，相交於 $P$, $Q$ 兩點，則 $PA\times QB$ 爲一定.

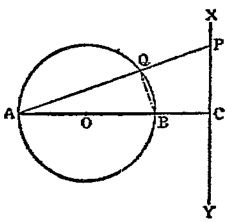
12. 自內接二等邊三角形之項角 $A$，引直線交三角形之第三邊於 $P$，圓周於 $Q$，則 $AP\times AQ$ 爲一定.

13. 設 $BC$ 爲一弦，又 $BAC$ 弧之中點爲 $A$，自 $A$ 引直線至與 $BC$ 弧共軛之弧 $BC$ 上任意點 $Q$，此直線 $AQ$ 交 $BC$ 弦於 $P$ 點，則 $AP\times AQ$ 爲一定.

14. 取正方形 $ABCD$ 之 $BC$ 邊上之一適當點 $P$，又取 $CD$ 上一適當點 $Q$，使 $AQ$ 與 $DP$ 成直交，則 $\triangle PCQ$ 之外接圓，除 $C$ 點外，是否通過其他定點?

〔註〕 過正方形之中心.

15. $XY$ 爲垂直於定圓之定直徑 $AB$ 之直線，$P$ 爲 $XY$ 上之任一點，$PA$ 交圓周於 $Q$，則 $AP\times AQ$ 與 $P$ 之位置無關，且爲一定.




〔註〕 直線 $AB$ 與直線 $XY$ 交於 $C$.

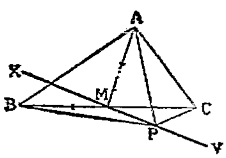
$\angle AQB=\angle R$; $\angle ACP=\angle R$.

$\therefore$ $BCPQ$ 內接於圓.

$\therefore$ $AP\times AQ=AB\times AC$,

故爲一定.

16. 設 $\angle A$ 爲直角三角形之項角，如 $\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=2\overline{PA}^2$ 時，則 $P$ 常爲一定直線上之一點.




〔註〕 $BC$ 上之中點爲 $M$.

$\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=2\overline{BM}^2+2\overline{PM}^2$.

$\therefore$ $\overline{BM}^2+\overline{PM}^2=\overline{PA}^2$.

$\therefore$ $\overline{AM}^2+\overline{PM}^2=\overline{PA}^2$.

$\therefore$ $\angle AMP=\angle R$.

故 $P$ 爲過 $M$ 垂直於 $AM$ 之直線 $XY$ 上之一點.

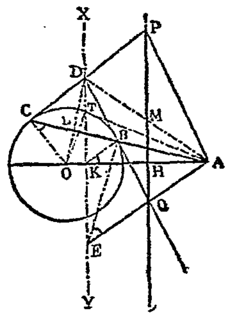
**17.** 一定圓之定弦 $AB$, 分弦 $PQ$ 爲二等分, 又於 $P$, $Q$ 兩點所引出之切線相會於一點, 試證此點在某圓周上.

〔註〕 此定圓爲 $\triangle OAB$ 之外接圓.

**18.** 有定圓及定長之直線 $AB$, 今引弦 $CD$ 平行於 $AB$, 又過 $A$ 及 $C$ 引直線交圓周於 $E$, 更連 $EB$ 交圓周於 $F$, 試證 $FD$ 必過一定點.

〔註〕 直線 $AB$ 及 $DF$ 之交點爲 $P$, $APFE$ 內接於圓, $P$ 爲定點.

**19.** 設定點 $A$ 爲定圓 $O$ 外之一點, 自 $A$ 引任意割線, 交圓周於 $B$, $C$ 兩點, 又切 $C$, $B$ 兩點之兩切線交於 $D$, 今自 $A$ 引直線平行於 $BD$, 且交 $CD$ 之延長線於 $P$, 又引直線平行於 $CD$, 而交 $DB$ 之延長線於 $Q$, 試證 $PQ$ 爲垂直於 $OA$ 之直線.




〔註〕 $AT$ 爲切線, $DK \perp OA$, $DO$ 與 $BC$ 交於 $L$.

以 $AD$ 爲直徑作圓, 必過 $L$, $K$ 點.

$\therefore\ OK \times OA = OL \times OD.$

又 $OCD$ 爲直角 $\triangle$.

$$\overline{OC}^2 = OL \times OD.$$

$$\therefore\ \overline{OC}^2 = OK \times OA.$$

$$\therefore\ \overline{OT}^2 = OK \times OA.$$

$\therefore\ T$ 在 $DK$ 上 ($XY$ 上).

今自 $B$ 引垂線於 $CB$ 交 $XY$ 於 $E$, 則 $A, B, K, E$ 點皆在以 $AE$ 爲直徑之圓周上, $\angle AKB = \angle AEB$. 然

$$AK \times AO = AT^2 = AB \times AC.$$

$\therefore\ O, K, C, B$ 均在同一圓周上.

$\angle AKB = \angle ACO$. $\therefore \angle AEB = \angle ACO = \angle R - \angle ACP$. $\therefore AE \parallel CP$.

故 $Q$ 在 $AE$ 上, $\angle QAB = \angle QBA$. $\therefore\ QA = QB$.

故 $Q$ 爲 $AE$ 之中點; $AD$ 與 $PQ$ 交於 $M$, 且 $M$ 爲 $AD$ 之中點, $PQ$ 與 $AK$ 交於 $H$, 使 $H$ 爲中點, 則

$$XY \parallel PQ, \quad XY \perp AO. \quad \therefore\ PQ \perp AO.$$

**20.** 兩圓 $O$ 及 $O'$ 相交, 自 $O$ 圓周上之一點 $T$, 與某圓相切, 截 $O'$ 圓

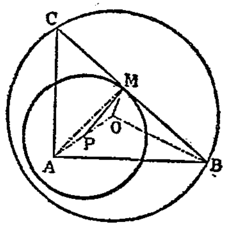
於 $C$, $D$ 兩點,求證 $CD$ 過一定點,但 $T$ 爲 $OO'$ 連心線外之一點.

## 22. 軌 跡

〔定理〕 距二定點 $A$, $B$ 之距離之平方和,爲一定之點之軌跡,在以 $AB$ 之中點爲圓心所作之圓周上.

〔定理〕 距二定點 $A$, $B$ 之距離之平方差,爲一定之點之軌跡,爲垂直 $AB$ 所作之直線.

(例) $A$ 爲定圓 $O$ 內之一定點.過 $A$ 點,引 $AB$, $AC$ 互相垂直,交圓周於 $B$, $C$ 點,求 $BC$ 弦中點之軌跡.




〔解〕 $M$ 爲 $BC$ 弦上之中點(即適宜條件之點),設 $AO$ 之中點爲 $P$.

$$\overline{AM}^2+\overline{OM}^2=2\overline{AP}^2+2\overline{PM}^2.$$

而 $$AM=BM,$$

$$\overline{BM}^2+\overline{OM}^2=2\overline{AP}^2+2\overline{PM}^2.$$

$$\therefore\quad \overline{OB}^2=2\overline{AP}^2+2\overline{PM}^2.$$

$$\therefore\quad \overline{PM}^2=\tfrac{1}{2}(\overline{OB}^2-2\overline{AP}^2).$$

$OB$ 及 $AP$ 皆爲一定長,故 $PM$ 亦爲一定長.因此,$M$ 距定點 $P$ 之距離亦爲一定,即$M$點在以$P$爲中心,以定長爲半徑所作之圓周上.

今於圓周上任意取一點 $M$.通過 $M$ 點作 $BC$ 弦,垂直 $OM$. $M$ 即爲 $BC$ 之中點.

$$\begin{aligned}\overline{AM}^2+\overline{OM}^2&=2\overline{AP}^2+2\overline{PM}^2\\&=2\overline{AP}^2+(\overline{OB}^2+2\overline{AP}^2)\\&=\overline{OB}^2.\end{aligned}$$

又 $$\overline{BM}^2+\overline{OM}^2=\overline{OB}^2.$$

$$\therefore\quad AM=BM.\quad \therefore\quad \angle BAC=\angle R.$$

故此圓即爲所求之軌跡.

### 問 題 XXII

1. 有二定線分 $AB$ 及 $CD$,求使 $\triangle PAB$ 之面積與 $\triangle PCD$ 之面積和,爲一定之 $P$ 點之軌跡.

〔解〕 設 $AB, CD$ 在直線 $XX'$ 及 $YY'$ 線上.此兩直線相交於 $O$ 點.

取 $OE=AB,$

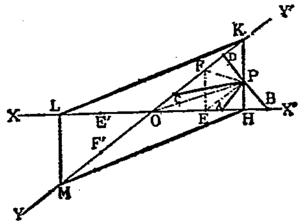
$OF=CD;$

則 $\triangle PAB=\triangle POE,$

$\triangle PCD=\triangle POF.$

$\therefore\ \triangle PAB+\triangle PCD=OEPF$

$=\triangle OEF+\triangle PFE.$




因 $EF$ 爲一定線, $P$ 之軌跡爲平行於 $FE$ 之直線 $KH$.

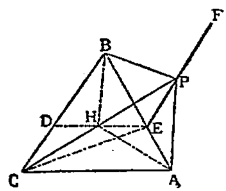
故所求之軌跡爲 $HKLM$ 平行四邊形.

**2.** 設 $P$ 爲定 $\triangle ABC$ 之 $AB$ 邊外 $C$ 之反對側之一動點;若 $\triangle PAC$ 之面積減去 $\triangle PAB$ 之面積爲一定實時,求 $P$ 點之軌跡.

〔註〕 設 $\triangle PAC-\triangle PAB=m^2$ (一定), 由 $B$ 引一線平行 $PA$ 交 $PC$ 於 $H$.

$\triangle PAB=\triangle PAH.$

$\therefore\ \triangle HCA=m^2.$




使過 $H$ 點,且平行於 $AC$ 之 $DE$ 線爲定直線.

$\triangle ECA=\triangle HCA=m^2.$

$\therefore\ \triangle PBE=\triangle PCE.\quad \therefore\ BC \parallel EP.$

**3.** 設銳角三角形之一定邊長爲 8 糎,其面積爲 12 平方糎,求此三角形之重心之軌跡.

〔註〕 注意限界.

**4.** 求距三定點之距離平方和,爲一定之點之軌跡.

**5.** 求距四定點之距離平方和,爲一定之點之軌跡.

**6** 內分定圓之弦,求使其二部分所包矩形面積爲一定之點之軌跡.

**7.** 求至定圓 $O$ 之切線長與距定點 $A$ 之距離相等之點之軌跡.

〔註〕 設 $P$ 爲適於條件之一點,圓之半徑爲 $r$.

$$\overline{PO}^2-\overline{PA}^2=r^2.$$

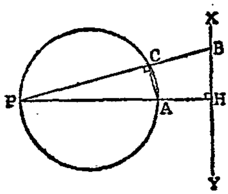
**8.** 求至二定圓之切線相等之點之軌跡.

**9.** 一圓通過直線 $ABC$ 上之二定點 $A, B$, 求由定點 $C$ 至圓之切線之切點軌跡.

**10.** 內分由定點至定直線上任意點所引之線分,求使線分與定點至分點之部分之乘積,為一定之點之軌跡.

〔註〕 $PH$ 為定點 $P$ 至定直線 $XY$ 所引之垂線,又 $B$ 為 $XY$ 線上任意點,於 $PH$ 上取一點 $A$, $PB$ 上取一點 $C$, 且令

$$PH \cdot PA = PB \cdot PC.$$




故 $AHBC$ 內接於一圓內.

$$\therefore \quad \angle PCA = \angle R.$$

故 $PH \cdot PA = K^2$ (一定).

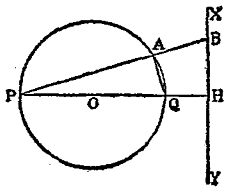
因知 $C$ 點之軌跡為以 $PA$ 為直徑所作之圓周.

**11.** 內分由定點至定直線上任意點所引之線分,其線分與定點至分點之部分之乘積,等於定點至直線之距離平方,求此分點之軌跡.

**12.** $P$ 為定圓周上之一定點,於 $PA$ 之延長線上取一點 $B$, 使 $PA \cdot PB = K^2$ (一定) 時,求 $B$ 點之軌跡.

〔註〕 設直徑為 $PQ$, 於 $PQ$ 之延長線上取一點 $H$, 且令 $PQ \cdot PH = K^2$.

$$\therefore \quad PA \cdot PB = PQ \cdot PH.$$




故 $QHBA$ 必內接於一圓內,

$$\angle QHB = \angle R.$$

故 $B$ 點之軌跡為於 $H$ 點至 $PQ$ 之垂線 $XY$.

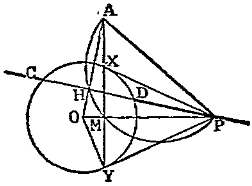
**13.** $B$ 為定圓 $O$ 外之一定點,過 $A$ 點之圓,與圓 $O$ 相交,且切於交點之二圓之切線,彼此正交,求過 $A$ 點圓之中心 (圓心) 之軌跡.

〔註〕 設過 $A$ 點之圓 $O'$, 與圓 $O$ 交於 $C$ 點,切於 $C$ 點之兩圓之切線互相正交時,若設 $OA$ 與圓周 $O'$ 交於 $B$ 點,則 $OA \cdot OB = \overline{OC}^2$. $B$ 亦為一定點.故圓 $O'$ 之中心之軌跡為 $AB$ 之垂直平分線.

**14.** 由圓 $O$ 外之一定點 $A$, 引任意一直線,交圓 $O$ 於 $X, Y$ 兩點,於 $X, Y$ 點所引之圓 $O$ 之切線交於 $P$ 點,求 $P$ 點之軌跡.

〔註〕 $OP$ 為 $XY$ 之垂直平分線,設分點為 $M$, 於 $\triangle OYP$ 內,

$\overline{OY}^2=OM\cdot OP.$



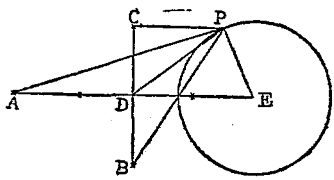

又設 $PH\perp OA$, 則 $AHMP$ 必內接於一圓內. 故

$$OM\cdot OP=OH\cdot OA.$$

$$\therefore\quad OH\cdot OA=\overline{OY}^2\ (\text{一定}).$$

**15** 距一定點 $A$ 之距離之平方,等於距二定點 $B, C$ 之距離之平方和之點之軌跡.

〔註〕 設 $D$ 爲 $BC$ 之中點,於 $AD$ 之延長線上取一點 $E$, 且令




$$AD=DE.$$

$$\because\quad \overline{PB}^2+\overline{PC}^2=2\overline{BD}^2+2\overline{PD}^2,$$

$$\overline{PA}^2+\overline{PE}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{PE}^2.$$

故
$$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2+\overline{PC}^2,$$

$$2\overline{BD}^2+2\overline{PD}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{PD}^2-\overline{PE}^2.$$

$$\therefore\quad \overline{PE}^2=2(\overline{AD}^2-\overline{BD}^2)\ (\text{一定}).$$

故 $P$ 點之軌跡爲以 $E$ 爲中心之圓周.

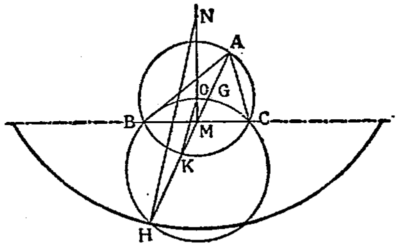
**16.** 由定直線 $XY$ 上之一點 $P$, 至圓 $O$ 引之二切線之切點爲 $A, B$, 求 $\triangle PAB$ 之垂心 $H$ 之軌跡.

〔註〕 注意 $OH$ 與 $OP$ 之積.

**17.** $AB, AC$ 正交於定圓 $O$ 內之定點 $A$, 且交圓周於 $B, C$ 點,求由 $A$ 至 $BC$ 線之垂足 $H$ 之軌跡.

〔註〕 於本節所擧例一致 ($PH=PM$).

**18.** 於 $ABC$ 三角形內, $BC$ 之位置及長皆爲一定. $\angle A$ 之角度亦爲一定, $G$ 爲 $\triangle ABC$ 之重心, 求 $AG$ 線與圓 $GBC$ 之交點 (非爲 $G$ 點) 之軌跡.




〔註〕 設 $\triangle ABC$ 之外接圓心為 $O$, 中線 $AM$ 交圓 $O$ 及圓 $GBC$ 於 $K, H$ 點.

$$BM \cdot MC = AM \cdot MK = GM \cdot MH.$$

$$\therefore \quad 3GM \cdot MK = GM \cdot MH. \quad \therefore \quad MH = 3MK.$$

於過定點 $M$ 之直線 $MO$ 上取 $N$ 點,且使

$$MN = 3MO, \text{ 則 } NH = 3OK.$$

**19.** 定圓內之任意弦為一定弦所平分 求於任意弦之兩端切線之交點之軌跡.

## 23. 作 圖

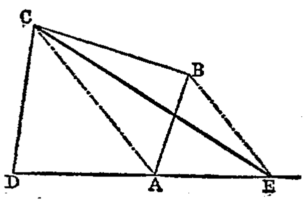
(例 1) 求作一三角形之面積,等於與四邊形 $ABCD$.

〔解〕 過 $B$ 點引一線,平行於對角線 $AC$,與 $DA$ 之延長線交於 $E$ 點.

$$\triangle ABC = \triangle AEC.$$

$$\therefore \quad ABCD = \triangle CDE.$$

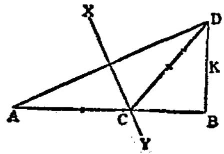
即 $\triangle CDE$ 為所求之三角形.




一般將 $n$ 角形之面積,作一等面積之三角形時,亦順次依上例,一一減少 $n$ 邊形之邊數,且令面積不變 但最後可得無數之三角形,可取其中任意一個,依照上例作圖可也.

(例 2) 於定線 $AB$ 上或其延長線上求一點 $C$, 且使 $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$ 為一定 $(K^2)$.

〔解〕 於 $B$ 點引一垂線 $DB$ 垂直於 $AB$，且令 $DB=K$，作 $XY$ 爲 $AD$ 之垂直平分線，與 $AB$ 或其延長線交於 $C$ 點.




$AC=CD$,　$\overline{CD}^2-\overline{BC}^2=\overline{BD}^2$.

$\therefore$　$\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=K^2$,

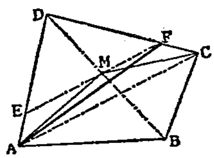
故 $C$ 爲所求之點.

## 問　題　XXIII

1. 求作一直線，過三角形之一邊之一定點，分此三角形爲二等分.

2. 求作二直線，過 $\triangle ABC$ 之 $BC$ 之中點，分此三角形爲三等分.

3. 求作一直線，過四邊形之頂點 $A$，分此四邊形爲二等分.




〔註〕 過對角線 $BD$ 之中點 $M$，引 $EF$ 平行於 $AC$；此 $EF$ 交 $BC$ 或 $CD$ 於 $F$ 點；則 $AF$ 爲所求之二等分四邊形之直線.

4. 求作一直線，自四邊形之一邊上之一定點，分此四邊形爲二等分.

5. 求作一直線，過所與之凸狀五邊形 $ABCDE$ 之頂點 $A$，分此五邊形爲二等分.

6. 求作二直線，過一角頂，分此五邊形爲三等分.

7. 求自四邊形 $ABCD$ 之各邊之中點，引線分至形內某一點，分此四邊形爲四等分.

8. 求自圓外一定點 $A$，作一割線 $ABC$，使 $\triangle OBC$ 爲最大.

9. 求作二平行直線分 過相交二圓之交點 $A$, $B$；此二平行直線爲 $CAD$, $EBF$；$C$, $E$ 爲同一圓；$D$, $F$ 爲又一圓.

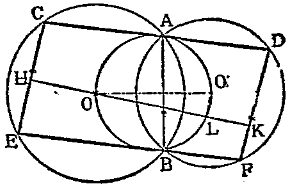
(1) 使四邊形 $CDFE$ 與所與之面積相等.

(2) 使四邊形 $CDFE$ 之面積爲最大.

〔註〕 (1) 四邊形 $CDFE$ 爲平行四邊形，$CE=DF=AB$，設此四邊形之面積爲 $l^2$；$CE$, $DF$ 間之距離爲 $h$，$CDFE=h\times AB=l^2$.

今過 $O$ 引垂線交 $CE$ 於 $H$；$DF$ 於 $K$；$HK=h$，二圓之中心 $O$, $O'$

及弦 $CE$, $DF$ 之距離,若等於 $AB$ 及 $O$, $O'$ 之距離,則自 $O'$ 至 $HK$ 之垂足 $L$ 之長可知,設此長爲 $m$,則問題歸於弦 $OL$ 之長矣




(2) 於 (1) 使 $HK$ 爲最大.

**10.** 求作一最大面積之正三角形外接於一所與之三角形.

**11.** 於圓周上二定點 $A$, $B$, 引兩平行弦 $AD$, $BC$.

(1) 求作 $ABCD$ 梯形與所與之面積相等.

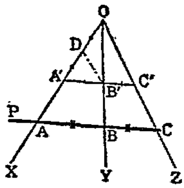
(2) 求作 $ABCD$ 爲最大之梯形.

**12.** 已與 $XOY$ 內一定點 $P$, 過 $P$ 點引直線交 $OX$ 於 $A$, $OY$ 於 $B$, 求作 $\triangle OAB$ 之面積爲最小者.

**13** 求自定三角形 $ABC$ 之一邊 $BC$ 上之點 $D$, 分引兩直線平行於 $AC$ 及 $AB$, 其交於 $AB$ 者爲 $F$; 於 $AC$ 者爲 $E$; 使 $\square DEAF$ 之面積爲最大.

**14.** 過定點 $P$ 引一直線,又自一點 $O$ 引 $OX$, $OY$, $OZ$, 過所與之直線, 其交點爲 $A$, $B$, $C$, 求 $\triangle OAB$, $OBC$ 等積.

〔註〕 取 $OX$ 上一點 $D$, 且延長之至 $A'$, 使 $OD=DA'$, 自 $D$ 引線平行於 $OZ$ 交 $OY$ 於 $B'$. 引直線過 $A'$ 及 $B'$, 交 $OZ$ 於 $C'$; $A'B'=B'C'$, 自 $P$ 引 $PABC$ 平行於 $A'C'$, 則得所求之 $\triangle$ 矣.




**15.** 已與二定點 $A$ 及 $B$, 並直線 $XY$, 求 $XY$ 上之一點 $P$, 使 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$ 之和爲最小.

**16.** 已與二等邊三角形 $ABC$ 之底邊 $BC=a$, 頂角 $\angle BAC=120°$, 自 $B$ 向 $AC$ 上一點 $M$ 引直線.

(1) 求 $M$ 爲自 $A$ 向 $C$ 可移動之點,設法使 $\overline{MB}^2+\overline{MC}^2$ 爲最小.

(2) 於此情形下,求 $\overline{MB}^2+\overline{MC}^2$ 之最小值.

**17** 已與一直線, 一圓, 一定點 $A$, 求自所與之直線上點 $P$, 引切線 $PT$ 與 $PA$ 等距離.

**18.** 已與一直線及二圓周，求以此直線上之點爲圓心，作圓割二已與之圓周爲二等分．

**19.** 求作一平行線 $DE$，平行於直角三角形 $ABC$ 之斜邊 $BC$，延長 $AB$ 及 $AC$，交於 $D$ 及 $E$，使 $\overline{AD}^2+\overline{CE}^2$，等於已與之正方形 $m^2$．

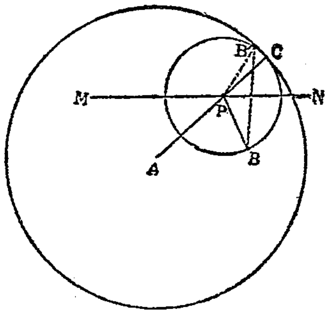
**20.** 求作圓過已與之二點，並切已與之直線．

**21.** 求作圓過已與之點，並切已與之二直線．

**22.** 求作圓過定直線之同側之兩點，其所截直線之長，等於定長之弦．

**23.** 求作圓過二定點，並切一定圓．

**24.** 求 $MN$ 上之一點 $P$，$PA+PB$ 等於定長 $l$，而 $A$，$B$ 兩點爲 $MN$ 同側之點．




〔註〕設 $P$ 爲所求之點；$B'$ 爲對 $MNB$ 之對稱點，以 $PB$ 爲半徑，$P$ 爲中心作圓，交 $PA$ 於 $C$ (圓周)，$AC=l$．

以 $A$ 爲中心，$l$ 爲半徑作圓，切 $P$ 於 $C$，故先以 $A$ 爲中心，$l$ 爲半徑作 $A$ 圓；過二定點 $B$，$B'$ 相切於 $A$ 圓；連切點 $C$ 及 $A$，則 $P$ 可求得．

**25.** 求定直線 $MN$ 上之點 $P$；使 $PA-PB$ 等於定長 $l$；$A$ 及 $B$ 爲 $MN$ 同側之定點．

**26.** 求作圓過二定點，且等分一定圓周．

**27.** 求作圓過二定點，且直交一定圓．

**28.** 求過定點 $P$ 之直線，截定角 $XOY$ 之 $OX$ 邊於 $A$，$OY$ 邊於 $B$，使 $PA\times PB=k^2$ (定量)．

**29.** 過二圓 $O$，$O'$ 之一交點 $A$，引二圓交 $O$ 圓於 $P$；$O'$ 圓於 $Q$．

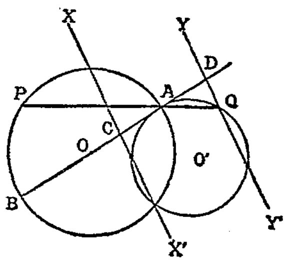
(1) 使 $AP\times AQ=k^2$ ($k$ 爲定量)．

(2) 使 $AP\times AQ$ 爲最大．

〔註〕(1) 取 $O$ 圓之直徑 $AB$ 上之點及其延長線上之 $C$，$D$，使

$$AB\times AC=AB\times AD=k^2.$$

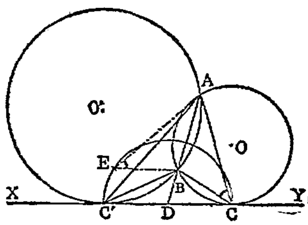
於 $C$ 及 $D$, 引 $AB$ 之垂線 $XX'$, $YY'$, 過截 $O'$ 圓之點,與 $A$ 之直線相連卽得.




(2) 於上圖定 $XX'$, $YY'$ 及切 $O'$ 圓於 $C$ 及 $D$.

**30.** 求定直線 $XY$ 上之一點, 使 $\angle ACB$ 爲最大, $A$ 及 $B$ 乃定直線 $XY$ 之同側之兩定點.

〔註〕 $O$ 及 $O'$ 爲過 $A, B$ 切於 $XY$ 之兩圓.設其切點爲 $C, C'$, 則 $\angle ACB$; $\angle AC'B$ 皆爲極大者, 今 $AB$ 交 $XY$ 於 $D$, 使




$$DC=DC'.$$

以 $D$ 爲圓心, $DC$ 爲半徑作圓, 其圓周內分 $AB$.

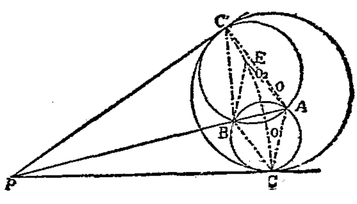
故 $\angle ADC<\angle ADC'$ 時,對 $AD$ 之 $C$ 之對稱點 $E$, 在 $O'$ 圓內 以 $D$ 爲圓心之圓周上.

$$\therefore \angle AC'B<\angle AEB=\angle ACB.$$

故 $C$ 必爲對 $AB$ 之最大角之頂點也.

**31.** 求作點 $C$ 使 $\angle ACB$ 爲最大. $A, B$ 爲已與定圓之內之二定點.

〔註〕 圓 $O_1$ 及圓 $O_2$ 過 $A$, $B$ 兩點,切圓 $O$ 於 $C, C'$, 圓 $O$ 之切線與共通弦 $AB$ 會於 $P$, 以 $P$ 爲中心, $PC$ 爲半徑,內分 $AB$. 故 $\angle APC<\angle APC'$ 時; 對 $AP$ 之 $C$ 之對稱點 $E$, 在圓 $O_2$ 內.




$$\angle AC'B<\angle AEB=\angle ACB.$$

卽 $C$ 及 $C'$ 必爲對 $AB$ 之最大角之點也.

**32.** 已與 $A, B$ 兩定點於圓內,求點 $P$ 使 $PA$ 與 $PB$ 延長交於圓周

$C$, $D$, 而弦 $CD$ 爲最大者.

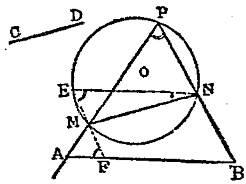
33. 取以 $AB$ 爲直徑圓周上一點 $P$, 更取 $AB$ 之延長線上一點 $C$, 則 $AC\times CB=\overline{PC}^2$, 求 $C$ 之位置.

34. 已與線分 $AB$ 及線分外一點 $C$, 求 $AB$ 線分上一點 $D$, 使

$$\overline{CD}^2=AD\times DB.$$

35. 已知底邊 $BC$, 及自頂點 $A$ 至 $BC$ 所引垂線之足之位置,且夾頂角二邊上之正方形之和,求作 $\triangle ABC$.

36. 過已與之點 $A$, $B$ 之二邊,且第三邊平行於已與之直線 $CD$, 求所構成之 $\triangle MNP$ 內接於圓.



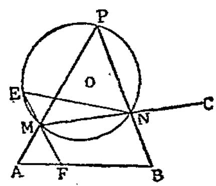

〔註〕 自 $N$ 引弦 $NE\parallel AB$, $EM$ 交 $AB$ 於 $F$, 則 $FBPM$ 可內接於圓, $F$ 爲定點.

$$MN\parallel CD,\ EN\parallel AB.$$

$\therefore$ $\angle MNE$ 爲定角.

自定點 $F$ 引割線,等於定弦 $EM$.

37. 求過三已與定點 $A$, $B$, $C$ 之各邊構成之 $\triangle MNP$, 內接於所與圓 $O$.

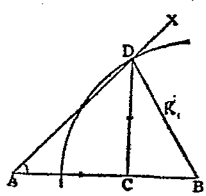



〔註〕 引弦 $EN\parallel AB$; $EM$ 與 $AB$ 交於 $F$; 則 $F$ 仍如前題爲定點. 故二邊可過二定點 $F$; $C$, 且第三邊定直線與 $AB$ 平行,則 $\triangle MNE$ 可內接於圓.

38. 已與面積及周界,求作一矩形.

39. 已與兩鄰邊之差及面積,求作一矩形.

40. 求定線分 $AB$ 上,或其延長線上一點 $C$. 使 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=K^2$ ($K$ 爲定線分).




〔註〕 於 $A$ 引直線 $AX$, 與 $AB$ 成 $45^\circ$ 以 $B$ 爲圓心, $K$ 爲半徑作弧,與 $AX$ 交於 $D$.

自 $D$ 引 $AB$ 之垂線, $C$ 爲其垂足, $C$ 卽爲所求之分點.

41. 大圓之半徑爲內接圓之直徑,求作一弦於大圓內,分內接圓之周爲三等分.

## 24. 計 算 問 題

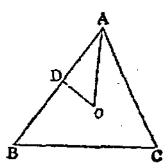
關於計算面積問題,有賴於畢氏定理 (Pythagora's theorem) 者固多,但關於下之定理,亦頗關緊要.

〔定理〕 設三角形之邊 $AC$, $CA$, $AB$ 各爲 $a$, $b$, $c$, 其周界之半爲 $p$, 而其面積爲 $S$, 則

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

〔例〕 $\triangle ABC$ 之內接圓之中心爲 $O$, $OA$, $OB$, $OC$ 之長分爲 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, 又邊 $BC$, $CA$, $AB$ 爲 $a$, $b$, $c$, 試證 $a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2=abc$.

〔解〕 自 $O$ 引 $AB$ 之垂線 $OD$, 以內接圓之半徑爲 $r$.




$$AD=p-a,\quad OD=r.$$

$$\alpha^2=r^2+(p-a)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

又 $\triangle ABC$ 之面積,

$$S=pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$\therefore\quad pr^2=(p-a)(p-b)(p-c).$$

$$\therefore\quad r^2=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

自 (1), (2),

$$\alpha^2=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}+(p-a)^2$$

$$=(p-a)\left\{\frac{p(p-a)+(p-b)(p-c)}{p}\right\}$$

$$=\frac{(p-a)\{2p^2-p(a+b+c)+bc\}}{p}$$

$$=\frac{(p-a)\{2p^2-2p^2+bc\}}{p}=\frac{bc(p-a)}{p}.$$

$$\therefore\quad a\alpha^2=\frac{abc(p-a)}{p}.$$

同理,

$$b\beta^2=\frac{abc(p-b)}{p},\quad c\gamma^2=\frac{abc(p-c)}{p}.$$

$$\therefore\quad a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2=\frac{abc(3p-a-b-c)}{p}=\frac{abcp}{p}=abc.$$

$$\therefore\quad a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2=abc.$$

## 問　題　XXIV

**1.** 正方形之邊爲 $a$, 求其對角線之長.

**2.** 正三角形之邊爲 $a$, 求其高及面積.

**3.** 下列各正多角形,內接於 $r$ 爲半徑之圓,其周界及面積如何?

(1) 正方形.　(2) 正三角形.　(3) 正八角形.　(4) 正六角形.

**4.** 下列各正多角形,外接於 $r$ 爲半徑之圓,其周界及面積如何?

(1) 正方形.　(2) 正三角形.　(3) 正八角形.　(4) 正六角形.

**5.** 試證頂角爲 $45^\circ$ 之二等邊三角形之底邊爲他邊之 $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ 倍.

**6.** 直角三角形之一銳角爲 $15^\circ$, 對邊爲 5 米 (meter), 求斜邊之長.

**7.** 有三平行線,順次排列爲 $g, g', g''$. $g$ 與 $g'$ 之距離爲一米,與 $g''$ 之距離爲 2 米,正三角形 $ABC$ 之各頂點,分在 $g, g', g''$ 上, 求此正三角形一邊之長.

**8.** 求自周界 30 糎, 面積 30 平方糎之直角三角形之重心, 至各邊距離之和.

**9.** $\triangle ABC$ 之 $BC$ 邊長 3 糎, $CA$ 邊長 4 糎, $AB$ 邊長 5 糎,求此三角形之內接圓之圓心,至切 $BC$ 邊之傍接圓之心之距離.

**10.** 取正方形 $ABCD$ 之 $BC$ 邊上一點 $M$, 使 $AB+BM=DM$, 求 $BM$ 與邊之比.

**11.** 三角形之 $AB$ 邊長 3 米, $AC$ 邊長 4 米, 而 $\angle A=90^\circ$; 今以 $C$ 爲圓心, 以 1 米長爲半徑作圓,自 $B$ 引切線切圓於切點 $D$. 更以 $B$ 爲圓心, $BD$ 爲半徑作圓,證明此圓與 $AC$ 相交.又設其交點爲 $E$, 試詳求 $AE$ 之長至糎位爲止.

**12.** 求面積 25 平方糎內接圓之半徑爲二糎之直角三角形, 夾直角二邊之長至糎之小數點第二位爲止.

**13.** 一矩形及一正三角形,同內接於一圓, 且面積相等, 求此矩形之縱橫之長.

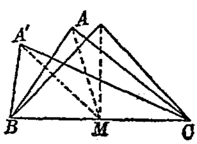
14. 將邊 10 cm 之正方形 $ABCD$ 之各角,割去四等積之直角二等邊三角形,則變正方形爲正八角形.

(1) 試述作圖法.

(2) 證明作圖法

(3) 試求正八角形之各邊之長.

15. 三角形之底邊爲 12 米,又至底邊之中線長 5 米,且知他二邊之差爲 1 米,試求三角形之其餘二邊之長.




16. $\triangle ABC$ 之底邊 $BC$, 及二邊 $AB$, $AC$ 之和爲一定時, 自 $A$ 引之中線之中, 求最小之長.

17. 鈍角三角形三邊爲等比級數,求其公比在如何數字範圍內,但公比爲大於 1 者.

18. 直角三角形 $ABC$ 之直角頂點 $A$ 之位置及夾直角二邊平方之調和中項,作一定之移動時,則斜邊常切於定圓,試證明之.

19. 以長 10 cm 之 $AB$ 線分爲直徑作半圓. 又自半圓周上點 $C$, 向 $AB$ 作垂線,其垂足爲 $D$, $AD+DC=6$ cm, 求 $DC$ 之長.

20. 求正十二邊形內接於半徑 2 糎之圓內之各邊之長,以四捨五入法,至糎之小數第三位爲止.

21. 三等圓互外切,而同內切於以 $r$ 爲半徑之圓內, 求圓之半徑之長.

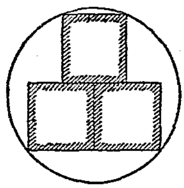
22. 三等圓互外切,而各圓同內切於一邊爲 $a$ 長之正三角形內, 求其半徑之長.

23. 有正方形 $ABCD$, 自 $B$ 爲中心,$BA$ 爲半徑畫弧作扇形 ⌔$ABC$, 圓 $M$ 內切於 ⌔$ABC$ 內. 又圓 $N$ 內切於 $ADC$ 內, 設 $M$ 圓之半徑爲 $m$; $N$ 圓之半徑爲 $n$; 求 $m$, $n$ 之長,且證明 $m^2=an$; 但 $AB=a$.

24. 於 $BC$ 邊長 17 米, $CA$ 邊長 8 米, $BA$ 邊長 15 米之直角三角形內,畫內接圓 $O$. 其切於 $BC$ 邊者爲 $D$; $CA$ 邊者爲 $E$; $BA$ 邊者爲 $F$; 今又於 $\overset{\frown}{EF}$ 與 $AC$ 及 $AB$ 間內,作內切圓 $O'$. 以四捨五入法,求 $O$ 及 $O'$ 之半徑.

25. 二等圓相外切,而同時又內接於以 $r$ 爲直徑之半圓內. 今更作一小圓 切此三圓周,求此小圓之半徑.

**26.** 半徑 10 cm 之二圓相切，其外切線與兩圓周之間，作一正方形，求此正方形一邊之長．此正方形之二頂點，分在二圓周上，其一邊在共切線上．



**27.** 直徑一米之圓，內接三等積正方形，如圖所示者，求正方形一邊之長 ($\sqrt{17}=4.123$)．

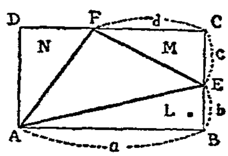
**28.** 三角形之各邊之長爲 25 糎，17 糎，12 糎，求最短邊上之高．

**29.** 有半徑 7 糎與半徑 5 糎之二圓，其二圓心距爲 3 糎，求其共通弦之長．

**30.** 三角形之三邊爲等差級數，三邊和爲 12 糎，面積爲 6 平方糎，求此三角形每邊之長．且證明此三角形爲一直角三角形．

**31.** 凸四邊形（每角 $<180°$ 之四邊形）$ABCD$ 之面積爲 1 平方糎．今將各邊延長，使 $A$ 爲 $DE$ 之中點，$B$ 爲 $AF$ 之中點，$C$ 爲 $BG$ 之中點，$D$ 爲 $CH$ 之中點，求四邊形 $EFGH$ 之面積．

**32.** $\triangle AEF$ 內接於矩形 $ABCD$ 內，而頂角 $E$ 爲在矩形之 $CB$ 邊上者，又頂角 $F$ 爲在矩形 $DC$ 上者．此所造成之三直角三角形 $ABE$，$ECF$，$ADF$ 之面積爲 $L$，$M$，$N$，求原三角形 $AEF$ 之面積．




〔註〕　$AB=a,\quad BE=b,$

$EC=c,\quad CF=d.$

$$2L=ab\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2M=cd\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$2N=(a-d)(b+c).$$

$$\therefore\quad bd=ac-2(M+N-L)\cdots\cdots\cdots(3)$$

$(1)\times(2)\div(3)$，

$$\frac{4LM}{ac-2(M+N-L)}=ac.$$

設 $ac=x$，

$$x^2-2(M+N-L)x-4LM=0.$$

$$\therefore\quad x=M+N-L\pm\sqrt{(M+N-L)^2+4LM}.$$

但　$$\triangle AEF=a(b+c)-(L+M+N)$$

$$=2L+x-(L+M+N)$$

$$=\pm\sqrt{(M+N-L)^2+4LM},$$

得 $$\triangle AEF=\sqrt{(L+M+N)^2-4LN}.$$

**33.** $\triangle ABC$ 之 $AB$ 邊為 $c$; $BC$ 邊為 $a$; $CA$ 邊為 $b$; 又其內接圓之半徑為 $r$; $\angle A$ 之傍接圓之半徑為 $r'$; 而 $\triangle ABC$ 之面積為 $S$, 其周界之半為 $p$. 試證

(1) $S=pr$. (2) $S=(p-a)r'$.

**34.** 求內接於三角形內圓之半徑 此三角形之各邊為 7 糎, 8 糎, 9 糎.

**35.** 有直角三角形,其夾直角之二邊,分為 $a$, $b$, 自直角頂至斜邊之垂線之長為 $h$, 求證

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

〔註〕 斜邊之長為 $\sqrt{a^2+b^2}$.

又面積為 $$S=\tfrac{1}{2}h\sqrt{a^2+b^2}=\tfrac{1}{2}ab.$$

$$\therefore\quad h^2(a^2+b^2)=a^2b^2.$$

**36.** 三角形之三高線為 $l$, $m$, $n$, 其內接圓之半徑為 $r$, 試證

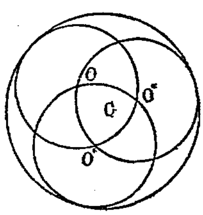
$$\frac{1}{r}=\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}.$$

**37.** 有一二等腰三角形,其高線之二倍及周界之和, 以 $p$ 表之, 其面積以 $S$ 表之,表各邊之長.

**38.** 自圓 $O$ 外之一點 $A$, 引 $AS$, $AT$ 二切線,連直線 $ST$, 更自 $A$ 引任意之割線 $APQ$; $P$, $Q$ 為與圓周相交之點. 又此割線與 $ST$ 直線相交於 $R$. 設 $N$ 為 $PQ$ 之中點. 試證

(1) $AN\times AR=\overline{AS}^2$. (2) $\dfrac{1}{AP}+\dfrac{1}{AQ}=\dfrac{2}{AR}$.

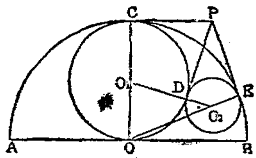
**39.** 有以 $r$ 為半徑之三圓 $O$, $O'$, $O''$. 圓 $O$ 與圓 $O'$ 間之圓心距為 $r$, 圓 $O$ 與圓 $O''$ 間之圓心距亦為 $r$, 又圓 $O'$ 與圓 $O''$ 間之圓心距亦為 $r$. 求此三圓之外接圓之半徑.




**40.** 於以半徑為 $a$ 之半圓形之紙片上,在此半圓形內截一最大圓. 更以所餘之部分, 於可能方法內,再截一最大圓, 求此第二次所截之圓之,

半徑.

〔註〕 設與半圓之中心為 $O$，直徑為 $AB$，初之最大圓之中心為 $O_1$，則 $O_1$ 為 $AB$ 之垂線 $OC$ 之中點，$OC$ 分最大圓為二對稱位置．今設切二圓之圓為 $O_2$，其半徑為 $x$，則




$$O_1O_2=\frac{a}{2}+x,\quad OO_2=a-x.$$

依照愛龍之公式，

$$\triangle OO_2O_1=\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{x\left(\frac{a}{2}-x\right)}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又如圖內兩圓之切點為 $D, E$，切於 $C, D, E$ 三點之切線會於 $P$ 點，因 $P$ 為 $\triangle OO_2O_1$ 之傍心．故

$$\triangle OO_2O_1=PC\left(\frac{a}{2}-x\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由 (1), (2) 式，

$$PC=\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{x}{\frac{a}{2}-x}}.$$

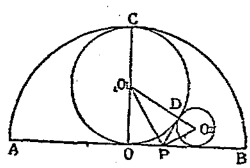
故若 $x$ 增大，則 $PC$ 亦因之增大，在此種情形下，使 $O_2$ 切於 $OB$.

次 $O_2$ 切於圓周 $O_1$ 及半徑 $OB$ 時，考其大小變化如何?

設切於 $D$ 點之共通切線，於 $OB$ 交於 $P$ 點.

$$\angle O_1PO_2=\angle R,\quad \overline{PD}^2=O_1D\cdot DO_2,$$
$$DP=OP.$$

故半徑 $DO_2$ 增大時，則 $OP$ 亦隨之增大.




若將以上二種研究，綜合考察之 $O_2$ 內接於 $CDOB$ 形內時，則為最大，其半徑為 $\frac{a}{4}$.

**41.** 於縱 49 糎，橫 32 糎之矩形鐵板上取兩等圓，若使所殘餘部分為最小面積時，圓之半徑應為幾糎．又所殘餘部分之面積為若干? 但圓周率為

3.1416.

〔註〕 設取之兩等圓之圓心爲 $O$ 及 $O'$, 以 $OO'$ 爲斜邊, 作一直角三角形, 令其兩腰平行矩形之兩邊, 等圓之半徑爲 $x$ 糎時.

$$(32-2x)^2+(49-2x)^2 \geqq 4x^2, \quad (\because\ OO' \geqq 2x)$$

$$2x \leqq 32.$$

解此聯立不等式, 則知 $x$ 之最大實爲 12.5 糎.

**42.** 設 $\triangle ABC$ 內頂角之角度及周圍爲一定.

(1) 證明面積 $S$ 爲最大時 底邊 $BC$ 爲最小.

(2) 證明高 $AH$ 爲最大時 面積 $S$ 亦爲最大.

(3) 證明最大面積時, 此三角形爲等腰.

(4) 設 $\angle A$ 爲直角, 周圍爲 $2p$, 證明面積 $S$ 最大時, 等於

$$(3-2\sqrt{2})p^2.$$

〔註〕 $\angle A$ 內之傍接圓之半徑爲 $r$, $BC=a$, $AH=h$.

〔注意〕 $S=r(p-a)=\frac{1}{2}ah$.

# 第四章　比例

## 25. 關於線分比例問題

三角形 $ABC$ 中，$\angle A$ 及其外角 $(\angle FAC)$ 之分角線交 $BC$ 邊及 $BC$ 邊之延長線於 $D, E$ 兩點時，於 $AB$ 邊及 $AB$ 之延長線上取 $G, F$ 兩點，

令 $AF=AG=AC$,

$AD \parallel FC$.

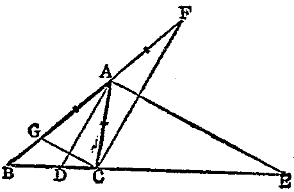
$\therefore\ BD:DC=BA:AF$

$=BA:AC$.

且 $AE \parallel CG$.

$\therefore\ BE:EC=BA:AG$

$=BA:AC$.




〔定理〕 三角形之一角及此角之外角之分角線，必分其對邊與他二邊之比爲內分及外分.

（例） $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 之分角線交 $BC$ 邊於 $D$ 點，$O$ 爲 $\triangle ABC$ 之內心，則 $OA:OD=AB+AC:BC$.

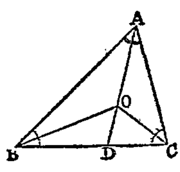
〔證〕 $AO, BO$ 及 $CO$ 爲 $\angle A, \angle B$ 及 $\angle C$ 之分角線，故

$$\frac{AO}{OD}=\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}.$$

按加比定理，則

$$\frac{AO}{OD}=\frac{AB+AC}{BD+CD}=\frac{AB+AC}{BC}.$$

$\therefore\ AO:OD=AB+AC:BC$.




### 問　題　XXV

1　二圓 $O$ 及 $O'$ 相切於 $A$ 點，過 $A$ 點作一直線交圓 $O$ 及 $O'$ 於 $B$,

$C$ 兩點,則 $AB$, $AC$ 之比等於兩圓半徑之比.

2. 通過 $\triangle ABC$ 之 $AB$ 邊上之一點 $D$ 作一直線,與 $BC$ 平行交 $AC$ 於 $E$ 點,過 $C$ 點作一線,與 $EB$ 平行交 $AB$ 之延長線於 $F$ 點,則

$$AD:AB=AB:AF.$$

3. 自 $\triangle ABC$ 之 $A$ 頂點,作一中線 $AD$, $\angle ADB$ 及 $\angle ADC$ 之分角線,交 $AB$ 及 $BC$ 於 $E$, $F$ 兩點,則 $BC \parallel EF$.

4. 兩圓內切於 $A$ 點,切於小圓周上 $B$ 點之直線,交大圓周於 $C$, $D$ 兩點,則

$$AC:AD=CB:BD.$$

5. $\triangle ABC$ 中, $AB$ 邊爲 $AC$ 邊之三倍,自 $B$ 點至 $\angle A$ 之分角線 $AD$ 之延長線上引一垂線,相交於 $E$ 點,則 $D$ 爲 $AE$ 線之中點.

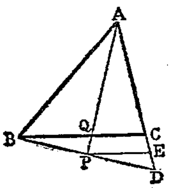
6. 以 $A$ 爲頂點之直角 $\triangle ABC$, 以其 $AB$ 及 $AC$ 爲邊各作一正方形 $ABDE$ 及 $ACFG$, $CD$ 與 $AB$ 交於 $M$ 點, $BF$ 與 $AC$ 交於 $N$ 點,則

$$AM=AN.$$

7. $\triangle ABC$ 中, $AB=nAC$ 時,自 $B$ 點至 $\angle A$ 之分角線上,引一垂線相交於 $P$ 點, $BC$ 與 $AP$ 交於 $Q$ 點,則

$$PQ:QA=n-1:2.$$

〔註〕 $BP$ 之延長線與 $AC$ 之延長線相交於 $D$ 點,自 $P$ 點引一線平行 $BC$ 交 $AD$ 於 $E$ 點,故 $E$ 爲 $CD$ 之中點.




$$\therefore \quad CE=\frac{AD-AC}{2}$$

$$=\frac{AB-AC}{2}$$

$$=\frac{n-1}{2}AC.$$

然 $$PQ:QA=CE:AC$$

$$=\frac{n-1}{2}AC:AC=n-1:2.$$

8. 於 $\triangle ABC$ 中, $AB=nAC$ 時,自底邊 $BC$ 之中點 $M$ 引一線,與 $AC$ 平行,且與 $\angle A$ 之分角線相交於 $P$ 點, $AP$ 與 $BC$ 相交於 $D$, 證明

$$PA:PD=1+n:1-n.$$

9. $\triangle ABC$ 之一邊 $AB$ 之任意點 $P$ (非中點) 引一線 $PP_1$ 平行 $BC$

與 $AC$ 交於 $P_1$ 點,然後由 $P_1$ 點引一線 $P_1P_2$ 平行 $AB$ 線,且與 $BC$ 交於 $P_2$ 點,再由 $P_2$ 點引一線 $P_2P_3$, 與 $CA$ 平行且與 $AB$ 交於 $P_3$, 如此繼續作圖,證明 $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$……等點內必有一點於 $P$ 點符合.

〔註〕 若 $AP:PB=a:b$,

$AP_1:P_1C=a:b$,

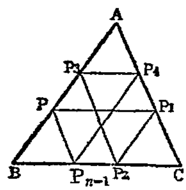
$BP_2:P_2C=a:b$,

$AP_3:P_3B=b:a$,

$AP_4:P_4C=b:a$,

$BP_5:P_5C=b:a$,

$AP_6:P_6B=a:b$.




**10.** 自圓周上之一點引至一弦兩端之直線,將與此弦垂直之直徑分爲調和級數.

**11.** 由圓外一點 $A$ 至圓 $O$ 引一切線 $AP$, $ACD$ 爲由 $A$ 點通過 $O$ 圓心之割線.設由切點 $P$ 至直徑 $CD$ 之垂足爲 $B$, 試證明 $C$, $D$ 兩點分 $AB$ 線爲調和級數.

**12.** 設三角形之內接圓之半徑與一傍接圓之半徑比爲 1:3 時,試證明此三角形三邊之長成等差級數.

**13.** 一三角形之垂心,外心及內心若爲一直線,證此三角形爲等腰.

## 26. 相似形之問題

二個多角形相似之條件.

(1) 對應角若相等則相似.

(2) 對應邊成比例則相似.

但兩三角形相似時之條件.

〔定理〕 兩三角形之三角對應相等時則相似.

〔定理〕 兩三角形之一角對應相等,且夾此角之邊成比例時則相似.

〔定理〕 兩三角形之三邊對應成比例時則相似.

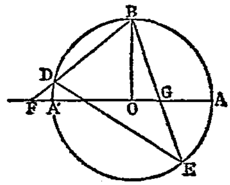
(例) 圓 $O$ 內半徑 $OA$ 及 $OB$ 互相垂直, $DE$ 爲任意一弦, $BD$ 及 $BE$ 與 $OA$ 相交於 $F$, $G$ 兩點,證明 $\triangle BFG \backsim \triangle BED$.

〔證〕 $AA'$ 爲直徑,

$\angle BFO=\frac{1}{2}(\widehat{AB}-\widehat{A'D})$

$=\frac{1}{2}\widehat{BD}$ (因 $\widehat{AB}=\widehat{A'B}$)

$=\angle BED.$




故 $\triangle BFG$ 與 $\triangle BED$ 之三角對應相等.

$\therefore\ \triangle BFG \backsim \triangle BED.$

## 問 題 XXVI

1. 自直角三角形 $ABC$ 之頂角 $A$ 至 $BC$ 引一垂線,垂足爲 $D$, 證
(1) $AD$ 爲 $BD$ 及 $DC$ 之比例中項.
(2) $AB$ 爲 $BD$ 及 $BC$ 之比例中項.

2. 由圓 $O$ 外一點 $P$ 至此圓,引一切線 $PA$ 及一割線 $PBC$ (卽交圓周於 $B, C$ 兩點),證 $PA$ 爲 $PB$ 及 $PC$ 之比例中項.

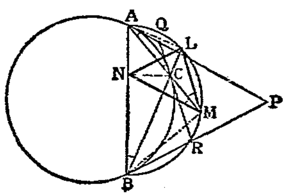
3. 自 $\triangle ABC$ 之外接圓周上之一點至三邊,引三垂線與圓周交於 $D$, $E$, $F$ 各點,證 $\triangle DEF \backsim \triangle ABC$.

4. 等腰梯形 $ABCD$ 之二對角線 $AC$ 及 $BD$, 與底邊 $BC$ 相等且爲 $AB$ (或 $DC$) 之二倍.自 $A$ 點引一線平行 $DC$, 求證此線分 $BC$ 爲 3:1.

5. 圓內接四邊形 $ABCD$, $\angle A$ 之分角線與 $CD$ 或其延長線交於 $P$ 點, $\angle C$ 之外角之分角線與 $AP$ 交於 $Q$ 點,證明 $AP:CP=DP:PQ$.

6. $AE$ 爲 $\triangle ABC$ 之外接圓之切線,過 $B$ 點引一線平行 $AE$ 與 $AC$ 或其延長線交於 $D$ 點,證明 $AD:AB=AB:AC$.

7. 於圓外一點 $P$ 引兩切線交圓於 $A$, $B$ 兩點,自 $AB$ 弧上任意點 $C$ 作一切線,與 $PA$ 及 $PB$ 交於 $Q$, $R$ 兩點,證明 $\triangle ABC$ 之三垂足所成之三角形與 $\triangle PQR$ 相似.




〔註〕 設 $\triangle LMN$ 爲 $\triangle ABC$ 之三垂足所成之三角形,以 $AB$ 爲直徑作一圓通過 $L$, $M$ 兩點.故

$\angle ABL=\angle AML.$

然 $\angle ABL=\angle QAC=\angle QCA,$

$\angle AML=\angle AMN.$

$\therefore\ \angle LMN=\angle PQR.$

$\therefore\ \angle NLM=\angle QRP.$

**8.** $M$ 爲菱形 $ABCD$ 之邊 $BC$ 之中點，$AM$ 與 $BD$ 交於 $F$ 點，過 $F$ 點引一線，平行 $BC$ 交 $AB$，$DC$ 於 $E$，$F$ 兩點；證明 $NE:NF=1:2$.

**9.** $A$ 爲圓 $O$ 外之一點，$AB$ 及 $AC$ 爲二切線，$OA$ 與切點所作之弦 $BC$ 交於 $D$ 點，由 $C$ 點引一任意弦 $CE$，$A$ 點至此弦 $(CE)$ 或其延長線引一垂直線交於 $H$ 點，證明 $\triangle ADH\backsim\triangle CBE$.

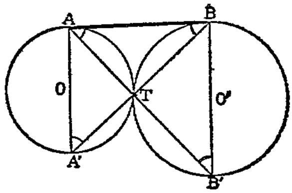
**10.** 二圓外切，其共通切線（外切線）爲兩圓之直徑之比例中項.

〔註〕若 $AA'$ 及 $BB'$ 爲直徑，二圓之切點爲 $T$.

$AB'$ 及 $A'B$ 二線之交點亦爲 $T$，

$\triangle AA'B\backsim\triangle BAB'$.

$\therefore\ AA':AB=AB:BB'$.




**11.** 由圓周上任意點 $P$ 至弦 $AB$ 之垂線，爲自 $A$，$B$ 兩點至通過切點 $P$ 之切線所引之垂線之比例中項.

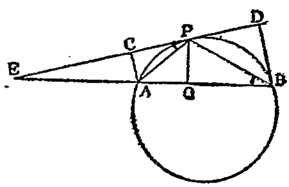
〔註〕延長 $AB$ 弦與過 $P$ 點所引之切線交於 $E$ 點，$AC$ 及 $BD$ 爲至切線所引之垂線.

故 $\triangle EAC$，$\triangle EPQ$ 與 $\triangle EBD$ 互相似.

$\therefore\ AC:PQ=EA:EP$,

$PQ:BD=EP:EB$.

$\therefore\ EA:EP=EP:EB$.




**12.** 圓內任意弦 $AB$，$P$ 爲 $AB$ 弧之中點，過 $P$ 點引一直線交圓於 $C$ 點，交 $AB$ 或其延長線於 $D$ 點，證 $PA$ 爲 $PC$ 及 $PD$ 之比例中項.

**13.** 由圓周上一點 $P$ 引一切線，與另二平行切線交於 $A$，$B$ 兩點，證明圓之半徑爲 $PA$ 及 $PB$ 之比例中項.

**14.** $AD$ 爲由直角 $\triangle ABC$ 之直角頂至 $BC$ 弦所引之垂線，角 $B$ 之分角線交 $AD$ 及 $AC$ 於 $O$，$E$ 兩點，證 $DO:OA=AE:EC$.

〔註〕 $\triangle ABD \backsim \triangle CBA$.

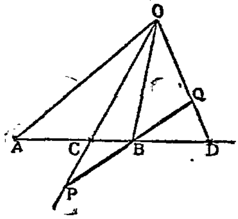
$$DO:OA=BD:BA,\quad AE:EC=BA:BC.$$

**15.** 由 $\triangle ABC$ 之 $B, C$ 兩角頂至 $\angle A$ 之外角之分角線引兩垂線,交於 $D, E$ 兩點,證 $BE$ 與 $CD$ 之交點在 $\angle A$ 之分角線上.

**16.** 於 $AB$ 線上取兩點 $C, D$, 使成 $AB:AD=AD:AC$. 由 $A$ 向任意方向引一線 $AE$. 當 $AE=DA$ 時,證 $DE$ 平分 $\angle BEC$.

**17.** $O$ 爲調和列點 $A, B; C, D$ 之直線外之一點, 過 $B$ 引一線平行 $OA$, 交 $OC$ 及 $OD$ 於 $P, Q$ 兩點,求證

$$BP=BQ.$$




〔註〕 $OA:BP=AC:CB$,

$OA:BQ=AD:BD$.

然 $AC:CB=AD:BD$.

$\therefore\ OA:BP=OA:BQ$.

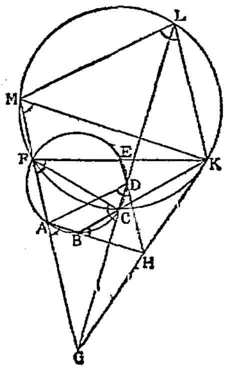
$\therefore\ BP=BQ$.

**18.** 由四邊形之四頂角至其對角線所引之各垂線,若連其各垂足所成之四邊形與原形相似.

**19.** 兩相似多邊形之對應邊互相平行時,連其對應各點所成之直線必會與一點或互相平行.

**20.** 不等兩圓之公切線,必交於兩圓之連心線上.

**21.** 證內接六邊形 $ABCDEF$ 之三組對邊之交點 $G, H$ 及 $K$ 在一直線上.




〔註〕 $\triangle FCK$ 之外接圓與直線 $GF$, $GD$ 之延長線交於 $M, L$ 兩點.

$\angle GAB=\angle BCF=\angle FMK$.

$\therefore\ AH \parallel MK$ ………………(1)

$\angle ADG=\angle AFC=\angle MLC$.

$\therefore\ AD \parallel ML$ ………………(2)

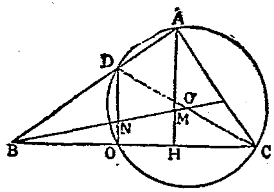
且 $\angle CDH=\angle CFK=\angle CLK$.

$\therefore\ DH \parallel LK$ ………………(3)

由 (1), (2), (3) 式,可知 $\triangle HDA \backsim \triangle KLM$.

而且在相似之位置上,故其對應項點所接連之直線 $MA$, $LD$, $KH$ 交與 $G$ 一點.

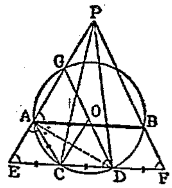
**22.** $O$ 爲直角 $\triangle ABC$ 之弦 $BC$ 之中點, $O'$ 爲 $\triangle ACO$ 之外心. 由 $A$ 至 $BC$ 所引之垂線 $AH$ 與 $BO'$ 交於 $M$ 點,求證 $AM=2MH$.




〔註〕 圓 $O'$ 與 $AB$ 交於 $D$ 點, $CD$ 爲直徑, $\triangle BCD$ 之中線 $DO$ 及 $BO'$ 交於 $N$ 點, $N$ 點卽爲此三角形之垂心.

**23.** 分 $AB$ 弧及 $AB$ 弦爲三等分,連其對應各點交於 $P$ 點,求證

$$\angle APB=\tfrac{1}{3}\angle AOB.$$




〔註〕 $CD$ 爲 $AB$ 弧之三等分點, 直線 $PA$ 與 $PB$ 交 $CD$ 線於 $E$, $F$ 兩點.

$$EC=CD=DF=AC.$$

$$\therefore\quad \angle EAD=\angle R.$$

圓 $O$ 與 $AP$ 線交於 $G$ 點.

因 $AD$ 爲 $\angle CAB$ 之分角線,故 $DG$ 爲直徑.且

$$\angle CAE=\angle CDG.\quad \therefore\quad GD \parallel PF.$$

**24.** 圓內接六邊形 $ABCDEF$ 之對角線 $AD$, $BE$, $CF$ 交於 $P$ 點時,證

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}=1.$$

〔註〕 因 $\triangle PBC \backsim \triangle PFE$, 故 $\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{PE}{PC}$.

以同理可觀察另兩三角形.

## 27. 關於面積之問題

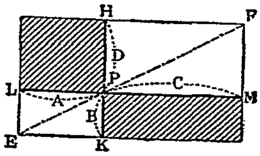
四線分 $A$, $B$, $C$, $D$ 成比例時,於 $A$, $C$ 之和(卽 $LM$)線上定一 $P$ 點,使

$$LP=A,\quad LM=C.$$

過 $P$ 點引一垂線,取 $H$, $K$ 兩點,使

$$PH=D,\quad PK=B$$

通過 $H, K, L, M$ 作一矩形, $EF$ 爲矩形之對角線.




$$\triangle EKP \backsim \triangle FHP.$$

$$\therefore\ \angle EPK = \angle EPH.$$

故 $P$ 點在 $EF$ 直線上,

$$\therefore\ \square LH = \square KM.$$

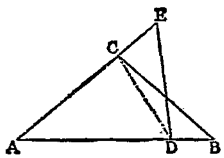
〔定理〕四線分成比例時,其外項所包含之矩形與其內項所包含之矩形相等.反之外項所包含之矩形,若等於內項所包含之矩形,則此四線分成比例.

次夾角 $A$ 之兩邊上取 $B, D$; $C, E$ 各點,作 $\triangle ABC$ 及 $\triangle ADE$ 兩三角形.

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ADC} = \frac{AB}{AD},$$

$$\frac{\triangle ADC}{\triangle ADE} = \frac{AC}{AE}.$$

$$\therefore\ \frac{\triangle ABC}{\triangle ADE} = \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE}.$$




即

〔定理〕兩三角形如一角相等,其面積之比等於夾此角之兩邊乘積之比.

由上定理可推出以下諸系.

〔系 1〕相似多邊形之面積之比,等於其對應邊平方之比.

〔系 2〕兩三角形如有一角相補時,其面積之比等於夾此角之兩邊乘積之比.

(例) $\triangle ABC$ 之外接圓之半徑爲 $r$, $AH$ 爲自 $A$ 頂點至 $BC$ 邊之垂線.

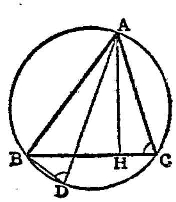
〔求證〕$AB \cdot AC = 2rAH$.

〔證〕自 $A$ 點引 $AD$ 直徑.

$$\angle ABD = \angle AHC = \angle R,$$

$$\angle ADB = \angle ACH.$$

$$\therefore\ \triangle ABD \backsim \triangle AHC.$$

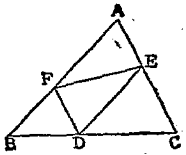



故 $\quad AB : AD = AH : AC.$

$\therefore\ AB\cdot AC=AD\cdot AH.\quad \therefore\ AB\cdot AC=2r\cdot AH.$

## 問題 XXVII

1. 自 $BC$ 邊任意點 $D$ 引 $DE$, $DF$ 兩線平行 $AB$, $AC$, 與 $AC$, $AB$ 交於 $E$, $F$ 兩點,證明 $\triangle AFE$ 之面積為 $\triangle FBD$ 之面積與 $\triangle EDC$ 之面積之比例中項.

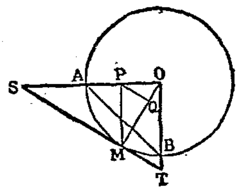



〔註〕 $\dfrac{\triangle FBD}{\triangle AFE}=\dfrac{BF}{FA}=\dfrac{BD}{DC}$,

$\dfrac{\triangle AFE}{\triangle EDC}=\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{DB}{CD}$.

$\therefore\ \triangle FBD:\triangle AFE=\triangle AFE:\triangle EDC.$

2. $OA$, $OB$ 為圓 $O$ 之半徑且互相垂直,過 $AB$ 弧上任意點 $M$ 引一切線,交 $OA$, $OB$ 之延長線於 $S$, $T$ 兩點.若由 $M$ 至 $OA$ 引一垂線 $MP$ 時,則 $\triangle AOB$ 為 $\triangle SOT$ 與 $\triangle OMP$ 之比例中項.




〔註〕 作 $PQ\perp OM$,

$\triangle AOB=\frac{1}{2}OA\cdot OB$,

$\triangle OMP=\frac{1}{2}OM\cdot PQ$.

$\therefore\ \dfrac{\triangle OMP}{\triangle AOB}=\dfrac{QP}{OM}$..............(1)

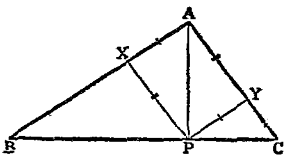
又 $\triangle SOT=\frac{1}{2}ST\cdot OM$.

$\therefore\ \dfrac{\triangle AOB}{\triangle SOT}=\dfrac{OM}{ST}$..............(2)

但 $\triangle POM\backsim\triangle TOS.\quad\therefore$ (1), (2) 兩式相等.

3. 由直角三角形 $ABC$ 之頂點 $A$ 至 $BC$ 弦引一垂線 $AP$, 再自 $P$ 點引 $PX$ 與 $PY$ 兩線垂直 $AB$ 與 $AC$. 證明

$BX:CY=(AB:AC)^3$.




〔註〕 $\triangle ABC$, $\triangle PAB$, $\triangle PCA$, $\triangle XAP$, $\triangle XPB$, $\triangle YCP$ 互相似, $PYAX$ 為一矩形.

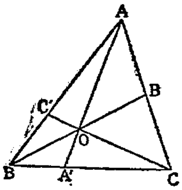
$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BX}{XP}=\dfrac{XP}{XA}=\dfrac{XP}{YP}=\dfrac{YP}{YC}$.

$$\therefore \quad \left(\frac{AB}{AC}\right)^3=\frac{BX}{XP}\cdot\frac{XP}{YP}=\frac{YP}{YC},$$

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^3=\frac{BX}{CY}.$$

**4.** $O$ 爲 $\triangle ABC$ 內之任意點，連 $AO$, $BO$, $CO$ 之延長線交三邊於 $A'$, $B'$, $C'$ 三點，證

$$\frac{AO}{AA'}+\frac{BO}{BB'}+\frac{CO}{CC'}=2.$$




〔註〕 $\dfrac{AO}{AA'}=\dfrac{\triangle ABO+\triangle ACO}{\triangle ABC}$,

$\dfrac{BO}{BB'}=\dfrac{\triangle ABO+\triangle BCO}{\triangle ABC}$,

$\dfrac{CO}{CC'}=\dfrac{\triangle BCO+\triangle CAO}{\triangle ABC}$.

**5.** 由圓周一點 $P$ 至 $AB$ 弦及過 $A$, $B$ 兩點所引之切線上連三垂線，交與 $C$, $E$, $F$ 三點，證明 $\overline{PC}^2=PE\cdot PF$.

〔註〕 $\triangle PEC \backsim \triangle PCF$.

**6.** $I$ 爲 $\triangle ABC$ 之內心，$\angle A$ 內之傍心爲 $O$ 時，證明

$$AI\cdot AO=AB\cdot AC.$$

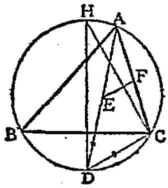
**7.** $\triangle ABC$ 之 $\angle A$ 之分角線交底邊於 $D$ 點，交外接圓周於 $E$ 點，證 $AB\cdot AC=AD\cdot AE$.

**8.** $\triangle ABC$ 之 $\angle A$ 之分角線交底與外接圓周於 $D$, $E$ 兩點時，若

$$AD\cdot AE=2\triangle ABC,$$

則 $\angle A$ 爲直角.

**9.** $\angle BAC$ 之分角線交外接圓周於 $D$ 點，如此三角形之內心爲 $E$，則 $AE\cdot DE=2Rr$，但 $Rr$ 爲此三角形之外接圓及內接圓之半徑.




〔註〕 作 $DH$ 爲直徑， $EF\perp AC$,

$\triangle AEF \backsim \triangle HDC$.

$\therefore \quad AF:EF=HD:DC$.

$\therefore \quad AE:DC=HD\cdot EF$.

故 $\quad DC=DE, \quad HD=2R$.

若能證明 $EF=r$ 即可.

**10.** 按前題,若內心與外心之距離為 $d$. 通過內心及外心之外接圓之直徑被內接圓及外接圓所截取之部分為 $a, b$ 時,則

(1) $d^2=R^2-2Rr$. (2) $r^2=ab$.

〔註〕作 $OM$ 為自外心 $O$ 至 $AD$ 之垂線, $M$ 為 $AD$ 之中點.

$$\overline{DO}^2-\overline{OE}^2=\overline{DM}^2-\overline{ME}^2=AE\cdot DE.$$

**11.** 設三角形之三邊為 $a, b, c$, 其面積為 $S$, 外接圓之半徑為 $R$ 時, 則 $4RS=abc$.

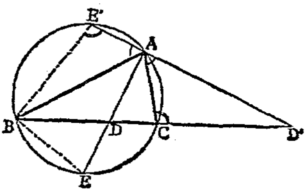
**12.** $\triangle ABC$ 之 $\angle A$ 及其外角之分角線,交於 $BC$ 及其延長線上於 $D, D'$ 兩點,證

(1) $\overline{AD}^2=AB\cdot AC-BD\cdot DC$.

(2) $\overline{AD'}^2=BD'\cdot CD'-AB\cdot AC$.

〔註〕兩分角線交外接圓周於 $E, E'$ 兩點.

$\triangle ABE \backsim \triangle ADC$.




$\therefore\ AB\cdot AC=AD\cdot AE$

$=AD(AD+DE)$

$=\overline{AD}^2+AD\cdot DE$

$=\overline{AD}^2+BD\cdot DC$.

又 $\triangle ABE' \backsim \triangle AD'C$.

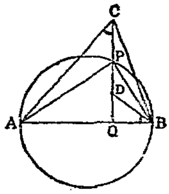
$\therefore\ AB\cdot AC=AD'\cdot AE'$

$=AD'(D'E'-AD')$

$=AD'\cdot D'E'-\overline{AD'}^2$

$=D'B\cdot D'C-\overline{AD'}^2$.

**13.** 由圓周上一點 $P$ 至直徑 $AB$ 引一垂線,垂足為 $Q$, 於 $QP$ 上及其延長線上取 $D, C$ 二點,若 $\overline{PQ}^2=QD\cdot QC$ 時,證明 $\triangle ABC$ 之垂心為 $D$.




〔註〕因 $\overline{PQ}^2=AQ\cdot QB$.

$\therefore\ AQ\cdot QB=QD\cdot QC$.

$\therefore\ AQ:QC=QD:QB$,

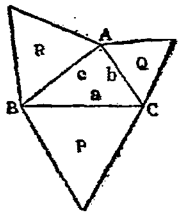
$\triangle AQC \backsim \triangle DQB$.

**14** 圓周上一點 $P$ 至內接四邊形 $ABCD$ 之

一相對邊之垂線之乘積,等於至他相對邊之垂線之乘積.

**15.** 兩圓相交於 $O, Q$ 兩點,一直線通 $O$ 點交兩圓於 $A, B$ 兩點,且 $OA=OB$,又切於 $A, B$ 兩點之切線交於 $P$ 點,試求 $OA\cdot OB=OP\cdot OQ$.

**16.** 以直角三角形之弦爲一邊所作成之正 $n$ 角形,等於以此△之兩腰爲邊所作成之正 $n$ 角形之和.




〔註〕 $\triangle ABC$ 爲以角 $A$ 爲頂角之直角三角形,各邊爲 $a, b, c$,以 $a, b, c$ 爲邊所作成之正 $n$ 角形爲 $P, Q, R$. 因

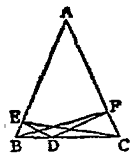
$$P\backsim Q\backsim R,$$

$$\frac{P}{a^2}=\frac{Q}{b^2}=\frac{R}{c^2}=\frac{Q+R}{b^2+c^2}.$$

但知 $a^2=b^2+c^2$. $\therefore$ $P=Q+R$.

**17.** 由等腰 $\triangle ABC$ 之底邊 $BC$ 上之任意點 $D$,引兩線 $DE$ 及 $DF$,交 $AB$ 與 $AC$ 於 $E, F$ 兩點,且 $\angle BDE=\angle FDC$. 試求

$$\triangle BDF=\triangle CDE.$$




〔註〕 因 $\triangle BDE\backsim\triangle CDF$,

$$BD:DE=CD:DF.$$

$$\therefore\quad BD\cdot DF=CD\cdot DE.$$

但 $$\angle BDF=\angle CDE.$$

$$\therefore\quad \triangle BDF:\triangle CDE=BD\cdot DF:CD\cdot DE.$$

**18.** $\triangle ABC$ 之角 $A$ 及其外角之分角線交 $BC$ 及其延長線上於 $P, Q$ 兩點, $O$ 爲 $PQ$ 線之中點,求 $OB:OC=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$.

〔註〕 $\angle CAO=\angle ABO$, $\triangle ABO\backsim\triangle CAO$.

而 $$\frac{\triangle ABO}{\triangle CAO}=\frac{OB}{OC},\quad 又\quad \frac{\triangle ABO}{\triangle CAO}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

**19.** 兩同心圓之外圓周上一點 $A$ 至內圓之切線爲 $AD$ 及 $AE$,延長 $ED$ 及 $AD$ 各交外圓周於 $B, C$ 兩點,試求 $\overline{AB}^2:\overline{BC}^2=BE:BD$.

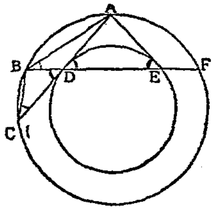
〔註〕 延長 $BE$ 線交外圓於 $F$ 點, $A$ 爲 $\overset{\frown}{BAF}$ 之中點.

$$\angle BCA=\angle ABE.$$

又 $$\angle BDC=\angle AEB.$$

$\therefore \quad \triangle BCD \backsim \triangle ABE.$

$\therefore \quad \triangle ABE : \triangle BCD = \overline{AB}^2 : \overline{BC}^2.$




但 $D$ 為 $AC$ 弦之中點,故

$$\triangle BCD = \triangle ABD.$$

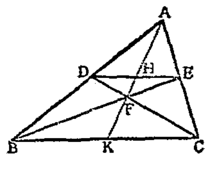
$$\therefore \quad \frac{\triangle ABE}{\triangle BCD} = \frac{\triangle ABE}{\triangle ABD} = \frac{BE}{BD}.$$

$$\therefore \quad \overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 = BE : BD.$$

**20.** 以 $AB$ 為底同側 $\triangle ABC$ 及 $\triangle ABD$ 引一線,平行 $CD$ 交 $AC$, $BC$, $AD$, $BD$ 於 $P$, $Q$, $R$, $S$ 四點,試證明

$$\triangle ABC : \triangle ABD = PQ : RS.$$

**21.** 引 $DE$ 平行 $\triangle ABC$ 之底 $BC$, 且交 $AB$, $AC$ 於 $D$, $E$ 兩點, $DC$ 及 $BE$ 之交點為 $F$, 連 $A$, $F$ 兩點與直線 $DE$, $BC$ 交於 $H$, $K$ 兩點,證明 $A$, $H$, $F$, $K$ 為調和列點.




$\triangle ADE : \triangle FED = AH : HF,$

$\triangle ABC : \triangle FBC = AK : FK.$

$\therefore \quad \triangle ADE : \triangle ABC = \overline{DE}^2 : \overline{BC}^2,$

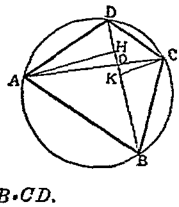
$\triangle FED : \triangle FBC = \overline{DE}^2 : \overline{BC}^2.$

$\therefore \quad \triangle ADE : \triangle ABC = \triangle FED : \triangle FBC.$

$$\therefore \quad ADE : \triangle FED = \triangle ABC : \triangle FBC.$$

**22.** $O$ 為圓內接四邊形 $ABCD$ 之對角線之交點,試證

$AB \cdot AD : CB \cdot CD = AO : CO.$




〔註〕 由 $A$, $C$ 至 $BD$ 引兩垂線 $AH$ 及 $CK$. 因

$$\triangle AHO \backsim \triangle CKO.$$

因 $$\frac{\triangle ABD}{\triangle BCD} = \frac{AH}{CK} = \frac{AO}{CO}.$$

但 $$\angle BAD + \angle BCD = 2\angle R.$$

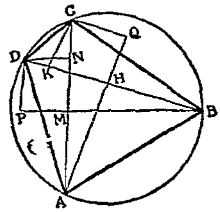
$$\therefore \quad \triangle ABD : \triangle BCD = AB \cdot AD : CB \cdot CD.$$

**23.** $ABCD$ 為圓內接四邊形,試證明

$$AD \cdot AB + CB \cdot CD : BA \cdot BC + DA \cdot DC = AC : BD.$$

〔註〕 由 $A$, $C$ 至 $BD$ 引兩垂線 $AH$ 及 $CK$; $BM$, $DN$ 為由 $B$, $D$ 兩點至 $AC$ 線上之垂線.

設外接圓之直徑爲 $d$, 則




$$AD\cdot AB=AH\cdot d,$$
$$CB\cdot CD=CK\cdot d,$$
$$BA\cdot BC=BM\cdot d,$$
$$DA\cdot DC=DN\cdot d.$$
$$\therefore\ \frac{AD\cdot AB+CB\cdot CD}{BA\cdot BC+DA\cdot DC}=\frac{AH+CK}{BM+DN}.$$

在 $BM$ 及 $AH$ 線上取 $P$, $Q$ 兩點,且

$$MP=DN,\quad HQ=CK.$$

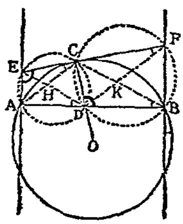
因 $\triangle BPD$ 與 $\triangle AQC$ 共爲直角三角形,故 $\triangle BP\_\backsim\triangle AQC$.

$$\therefore\ \frac{AD\cdot AB+CB\cdot CD}{BA\cdot BC+DA\cdot DC}=\frac{AQ}{BP}=\frac{AC}{BD}.$$

**24.** 由圓 $O$ 之弦 $AB$ 之兩端引兩線 $AE$, $BF$ 垂直 $AB$ 弦,與切 $AB$ 弧上之任意點 $C$ 之切線交於 $E$, $F$ 兩點,連 $C$ 與圓心 $O$ 交 $AB$ 於 $D$ 點,證

$$CE\cdot CF=DA\cdot DB\quad 及\quad \overline{CD}^2=AE\cdot BF.$$

〔註〕 $ADCE$, $BFCD$ 爲內接四邊形時,若 $BC$ 及 $DF$ 之交點爲 $K$, $AC$ 及 $DE$ 爲 $H$, 則可知 $\triangle HCE$, $\triangle KFC$, $\triangle HDA$, $\triangle KBD$ 皆互相似;而且 $CHDK$ 爲一平行四邊形.




$$\therefore\ \frac{EC}{AD}=\frac{HC}{HD}=\frac{KD}{KC}=\frac{BD}{CF}.$$
$$\therefore\ \frac{CE}{AD}=\frac{BD}{CF}.$$

因 $\triangle HEA$, $\triangle HCD$, $\triangle KDC$, $\triangle KBF$ 等相似,故

$$\frac{AE}{CD}=\frac{EH}{CH}=\frac{CK}{KF}=\frac{CD}{FB}.$$
$$\therefore\ \frac{AE}{CD}=\frac{CD}{BF}.$$

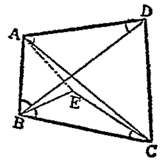
**25.** $P$ 爲正三角形 $ABC$ 之外接圓之 $BC$ 弧上任意點,試求

$$\overline{PA}^2=\overline{AC}^2+PB\cdot PC.$$

**26.** 若四邊形之四頂點不在一圓周上, 則其兩對對邊乘積之和大於其對角線之乘積

〔註〕 於四邊形 $ABCD$ 內取一點 $E$, 使 $\angle BCE=\angle BDA$,

$\angle CBE=\angle DBA.$




因 $ABCD$ 之四項點不在一圓周上,故 $D$ 點不在 $AC$ 線上.

$$\triangle BCE \backsim \triangle BDA.$$

$$\therefore \quad AD \cdot BC = BD \cdot CE \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 $AB:BE=BD:BC,\quad \angle ABE=\angle DBC.$

$$\therefore \quad \triangle ABE \backsim \triangle DBC.$$

$$\therefore \quad AB \cdot CD = BD \cdot AE \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由 (1), (2) 式,

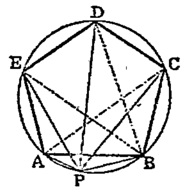
$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD(AE+CE) > AC \cdot BD.$$

27. 證明,若四邊形內接於一圓時,其兩對對邊乘積之和,必等於其對角線之乘積.

28. 圓內接正五邊形 $ABCDE$ 之 $AB$ 弧上取一點 $P$ 時,試求

$$PA+PB+PD=PC+PE.$$

〔註〕 設正五邊形之每邊長爲 $l$, 其對角線長爲 $m$; 又 $PA, PB, PC, PD, PE$ 爲 $a, b, c, d, e$.




按照前題.

由 $PBEA$, $\quad am+bl=el.$

由 $PBCA$, $\quad al+bm=cl.$

由 $PBCD$, $\quad bl+dl=cm.$

由 $PBDE$, $\quad bl+em=dm.$

兩邊相加 $\quad (l+m)(a+b+d)=(l+m)(c+e).$

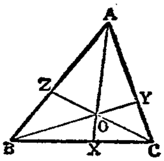
$$\therefore \quad a+b+d=c+e.$$

29. $O$ 爲 $\triangle ABC$ 中之任意點,連 $AO$, $BO$ 及 $CO$ 交 $BC$, $CA$, $AB$ 於 $X$, $Y$ 及 $Z$ 三點, $\dfrac{BX}{XC}\cdot\dfrac{CY}{YA}\cdot\dfrac{AZ}{ZB}=1$. 若 $O$ 爲 $\triangle ABC$ 之任意頂點時,則 $\dfrac{BX}{XC}\cdot\dfrac{CY}{YA}\cdot\dfrac{AZ}{ZB}\doteq 1.$

〔註〕 $\dfrac{\triangle OBX}{\triangle OXC}=\dfrac{BX}{XC},$

$\frac{\triangle OCY}{\triangle OYA}=\frac{CY}{YA}$, $\frac{\triangle OAZ}{\triangle OZB}=\frac{AZ}{ZB}$.

又
$$\frac{\triangle OBX}{\triangle OYA}=\frac{OB\cdot OX}{OY\cdot OA},$$
$$\frac{\triangle OAZ}{\triangle OXC}=\frac{OA\cdot OZ}{OX\cdot OC},$$
$$\frac{\triangle OCY}{\triangle OZB}=\frac{OC\cdot OY}{OZ\cdot OB}.$$



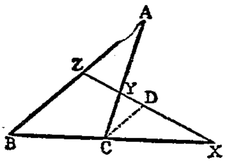

$$\therefore\ \frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=\frac{OB}{OY}\cdot\frac{OX}{OA}\cdot\frac{OA}{OX}\cdot\frac{OZ}{OC}\cdot\frac{OC}{OZ}\cdot\frac{OY}{OB}=1.$$

**30.** 三角形之各頂點與其內接圓 (或傍接圓) 所切對邊之點相連,則此三線必會於一點.

**31.** 一直線交 $\triangle ABC$ 之邊 $BC, CA, AB$ 或其延長線上於 $X, Y, Z$. 試求 $\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$.

〔註〕 作 $AB \parallel CD$.

$$\frac{CY}{YA}=\frac{CD}{AZ},$$
$$\frac{BX}{XC}=\frac{ZB}{CD}.$$




$$\therefore\ \frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=\frac{ZB}{CD}\cdot\frac{CD}{AZ}\cdot\frac{AZ}{BZ}=1.$$

**32.** 一直線交 $\triangle ABC$ 之邊 $BC, CA, AB$ (或其延長線)於 $D, E, F$ 三點,且交 $AB$ 與 $AC$ 成等角.證明 $BD:CD=BF:CE$.

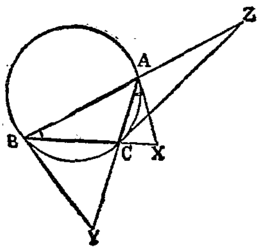
**33.** 由 $\triangle ABC$ 之兩邊 $AB$ 及 $AC$ 取兩點 $P, Q$, 且 $BP=CQ$, 延長 $PQ$ 之連線交 $BC$ 之延長線於 $R$ 點,試證 $RP:RQ=AC:AB$.

**34.** 於 $\triangle ABC$ 內取一點 $F$, 且 $\triangle ABC:\triangle ABF=2:1$, 延長 $AF$ 及 $BF$ 交 $BC$ 及 $AC$ 於 $D, E$ 兩點,於 $FB$ 線上取一點 $G$ 使 $FG=EF$, 證明 $AD:2FD=BE:BG$.

**35.** $\triangle ABC$ 之 $\angle A, \angle B, \angle C$ 之外角分角線,交對邊之延長線於 $X, Y, Z$ 三點.試證明此三點必在一直線上.

**36.** 通過內接$\triangle ABC$之三頂點引三切線,交對邊之延長線於 $X, Y, Z$ 三點,證明此三點必在一直線上.

〔註〕 $\frac{\triangle ABX}{\triangle ACX}=\frac{BX}{CX}$.




但 $\triangle ABX \backsim \triangle CAY$.

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABX}{\triangle ACX}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

$$\therefore \quad \frac{BX}{CX}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

以同理，$\frac{CY}{AY}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2}$, $\frac{AZ}{BZ}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2}$,

$$\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1.$$

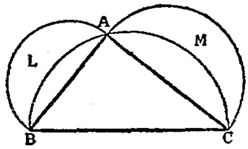
**37.** 設半徑爲 $r$ 之圓之內接正多邊形之邊爲 $a$，又圓外接正多邊形之邊爲 $a'$，且內外接正多邊形之邊數相等時，求

(1) $a=\frac{2a'r}{\sqrt{4r^2+a'^2}}$, (2) $a'=\frac{2ar}{\sqrt{4r^2-a^2}}$.

**38.** 設半徑爲 $r$ 之圓之內接正多角形之邊爲 $a$，他內接正多角形之邊爲 $a'$ 且後者之邊數爲前者之二倍時，求

$$a'=\sqrt{r(2r-\sqrt{4r^2-a^2})}.$$

**39.** 以直角 $\triangle ABC$ 之三邊爲直徑作三半圓，設此三半圓所割成之月形爲 $L$ 及 $M$，求 $L+M=\triangle ABC$.



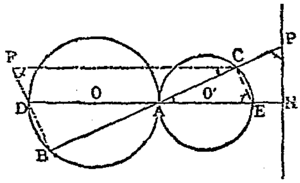

**40.** $AB$ 爲一與圓之直徑，過 $AB$ 上任意點 $C$ 引一垂線交圓周於 $D$ 點，又以 $AC$ 及 $BC$ 爲直徑作兩半圓時，此三半圓所割成之曲線形之面積，等於以 $CD$ 爲直徑所作成之圓之面積.

## 28. 一定問題

(例) 二定圓 $O$, $O'$ 互相外切於 $A$ 點，設垂直 $OO'$ 線之定直線爲 $g$. 過 $A$ 引任意一線交 $O$, $O'$ 二圓於 $B$, $C$；且交 $g$ 於 $P$ 點時，證明 $BC\cdot PA$ 爲一定量.

〔解〕 $OO'$ 之延長線交圓周於 $D$, $E$ 兩點，且與定直線 $g$ 交於 $H$ 點，但

$BD \parallel CE$.




故過 $C$ 點引一線平行 $OO'$, 與 $BD$ 之延長線交於 $F$ 點時,則

$\triangle BCF \backsim \triangle CAE$.

但因 $E, H, P, C$ 四點在一圓周上,

$\angle AEC = \angle APH$.

$\therefore \quad \triangle CAE \backsim \triangle HAP$.

$\therefore \quad \triangle BCF \backsim \triangle HAP$.

$\therefore \quad BC : CF = AH : AP$.

$\therefore \quad BC \cdot PA = CF \cdot AH$.

然而 $CF = DE$, 且 $DE$ 及 $AH$ 之長永爲一定.

故 $BC \cdot PA$ 之質永爲一定量.

## 問　題　XXVIII

1. 兩圓相交於 $A, B$ 兩點;過 $A$ 點任意引一直線,交二圓周於 $C, D$ 兩點,試證 $BC : BD$ 爲一定.

2. 設 $D$ 爲 $\triangle ABC$ 之 $BC$ 邊上之一定點,於 $AD$ 線上任意取一點 $P$, 過 $P$ 引 $PX, PY$ 兩線平行 $AB, AC$, 交 $BC$ 線於 $X, Y$ 點,證明 $BX : CY$ 爲一定,且與 $P$ 點之位置無關.

3. 設一圓切二定圓,試證明過此二切點之直線必經過一定點.

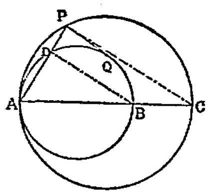
4. 以圓 $O$ 之圓周上任意點 $P$ 爲中心,作一圓爲圓 $P$, 切圓 $P$ 之任意直線交圓 $O$ 於 $A, B$ 兩點,證 $PA$ 及 $PB$ 之乘積爲一定量.

5. 於圓周上兩定點 $A, B$ 引兩切線,相交於 $O$ 點,過 $O$ 點引 $XY$ 直線平行 $AB$, 又 $A, B$ 與圓周上任意點 $P$ 相連; $AP$ 及 $BP$ 之延長線交 $XY$ 於 $C, D$ 點,證明 $CO \cdot OD$ 爲一定量.

6. $AB$ 直徑上定點 $C$ 與圓周上任意點 $M$ 相連,於 $M$ 點引一線垂直 $CM$, 與於 $A, B$ 所作之兩切線交於 $E, F$ 兩點,證明 $\angle ECF = \angle R$, $AE \cdot BF$ 爲一定量.

7. 兩圓互相內切於 $A$ 點, $PQ$ 爲由外圓周上任意點 $P$ 至內圓所引之切線,證明 $PQ : PA$ 之量爲一定.

〔註〕 過 $A$ 引連心線交兩圓於 $B, C$ 點, $PA$ 線交內圓於 $D$ 點.




$$\overline{PQ}^2=PA\cdot PD.$$

$$\therefore \quad \overline{PQ}^2:\overline{PA}^2=PD:PA=BC:AC.$$

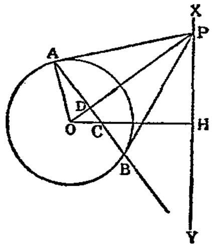
(一定量)

**8.** $\triangle ABC$ 之底邊 $BC$ 之位置及長與頂角 $A$ 之角度爲一定數, $AP$ 爲 $\angle A$ 之分角線. 於 $AP$ 之延長線上取一點 $Q$, 且使 $AP\cdot AQ=AB\cdot AC$ 時,證明 $Q$ 爲一定點.

**9.** $\triangle ABC$ 之邊 $BC$ 之長及 $AB, AC$ 二邊之和爲一定時,證明 $\angle A$ 之外角分角線與 $B, C$ 兩頂點之距離之乘積永爲一定數.

**10.** 設定矩形之內接平行四邊形之兩邊與定矩形之對角線平行,則證明此平行四邊形之周長爲一定.

**11.** 由定圓 $O$ 外之一定線 $XY$ 上之任意點 $P$ 至圓引兩切線 $PA$, $PB$, 過切點 $A, B$ 之直線與由 $O$ 至 $XY$ 線之垂線所交之點爲一定點.




〔註〕 引 $OH\perp XY$,

$C$ 爲 $AB$ 與 $OH$ 之交點,

$D$ 爲 $AB$ 與 $OP$ 之交點,則

$$OC\cdot OH=OD\cdot OP=\overline{OA}^2. \text{ (一定)}$$

故 $C$ 點爲一定點.

**12.** 由圓周上一定點 $A$ 引 $AB$ 及 $AC$ 兩弦.若此二弦之乘積爲一定時,則證明 $BC$ 所切之圓,亦爲一定圓.

**13.** 由定點 $P$ 至定圓 $O$ 任意引一割線,交圓 $O$ 於 $A, B$ 兩點.又 $\triangle OAB$ 之外接圓與 $OP$ 線交於 $C$ 點.試證明 $CA\cdot CB$ 之積爲一定.

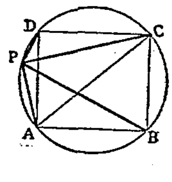
〔註〕 若 $PA\cdot PB=PO\cdot PC$ 爲一定,則 $C$ 爲一定點.

$$\triangle OAB:\triangle CAB=OA\cdot OB:CA\cdot CB=PO:PC. \text{ (一定)}$$

**14.** $AB$ 爲一圓周上之二定點,設 $C$ 爲 $AB$ 弧之中點,若於 $ACB$ 之共軛弧上任取一點 $P$ 時,證明 $PA+PB:PC$ 爲一定.

**15.** 正方形 $ABCD$ 之外接圓 $AD$ 弧上任取一 $P$ 點時,試證

$PC+PA:PB$ 或 $PC-PA:PD$ 之值皆爲定量.




〔註〕 由 $PABC$, 可知

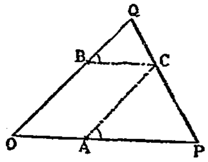
$$PA\cdot BC+PC\cdot AB=PB\cdot AC.$$

$$\therefore\quad PA+PC=\sqrt{2}\cdot PB.$$

又 $$PA\cdot CD+PD\cdot AC=PC\cdot AD.$$

$$\therefore\quad PC-PA=\sqrt{2}\cdot PD.$$

**16.** $AB$ 爲定角 $AOB$ 二邊上之兩點 於 $OA$ 及 $OB$ 之延長線上取 $P, Q$ 兩點,且使 $AP\cdot BQ=OA\cdot OB$, 試證明直線 $PQ$ 永通過一定點.




〔註〕 作 $OACB$ 平行四邊形.

$$AP\cdot BQ=BC\cdot AC.$$

$$\therefore\quad AP:AC=BC:BQ.$$

且 $$\angle PAC=\angle CBQ.$$

$$\therefore\quad \triangle APC\backsim\triangle BCQ.$$

故 $PCQ$ 爲一直線.

**17.** 通過定角 $XOY$ 之分角線 $OZ$ 上一定點 $P$ 引一直線,交 $OX$, $OY$ 於 $M, N$ 點,證明 $\dfrac{1}{OM}+\dfrac{1}{ON}$ 之値爲一定.

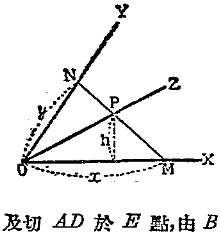
〔註〕 設 $h$ 爲由 $P$ 至兩邊之距離, $OM$ 爲 $x$, $ON$ 爲 $y$. $\triangle OMN$ 之面積爲 $S$, $k$ 爲一常數,則

$$S=kxy.$$

又 $$S=\tfrac{1}{2}h(x+y).$$

$$\therefore\quad kxy=\tfrac{1}{2}h(x+y).$$

$$\therefore\quad \frac{2k}{h}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$




因 $h, k$ 爲常數.

因 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 之値爲一定.

**18.** 於一定菱形 $ABCD$ 內作一圓,切 $AB$ 及切 $AD$ 於 $E$ 點,由 $B$ 點引一線切圓於 $F$ 點,連 $E, F$ 兩點之延長線交 $BC$ 邊於 $G$ 點時,試證明 $ED+CG$ 之値爲一定,且與圓之大小無關.

〔註〕 $ED+CG=BC.$

## 29. 軌跡

若應用以上比例之理論,亦可討論種種的軌跡問題. 但軌跡中最主要之定理謂之阿波勞尼 (Apollonius) 之軌跡定理.

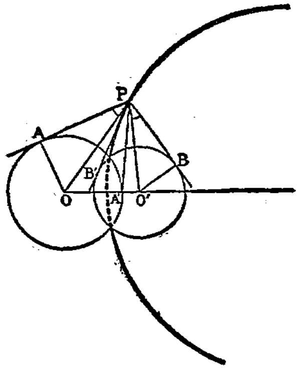
〔定理〕 與二定點距離之比等於一定比之點之軌跡,爲以同比內分點及外分點爲直徑所作之圓.

以上之定理已由第 26 節之定理證明,多應用於作圖題方面.

〔例〕 一點 $P$ 至二定圓引兩組切線,其每組切線間所夾之角相等時,求 $P$ 點之軌跡.

〔解〕 設 $PA$, $PA'$ 及 $PB$, $PB'$ 爲由 $P$ 點至二定圓所引之兩組切線,因 $\angle APA'=\angle BPB'$.

$\therefore\ \angle APO=\angle BPO'$.




故直角 $\triangle APO \backsim$ 直角 $\triangle BPO'$.

若圓 $O$ 及圓 $O'$ 之半徑之比等於 $m:n$.

則 $PO:PO'=m:n$ (即 $P$ 點至 $O$ 及 $O'$ 之距離之比爲一定).

凡 $P$ 點至 $O$ 及 $O'$ 之距離之比爲 $m:n$ 時,若由 $P$ 至兩圓引 $AP$, $BP$ 兩切線,則

直角 $\triangle APO \backsim$ 直角 $\triangle PBO'$.

故　$\angle APO=\angle BPO'$.

即由 $P$ 點至兩圓所引之每組切線內所夾之角相等.

故至 $O$ 及 $O'$ 距離之比爲 $m:n$ 之點之軌跡, 其圖形皆不存在於 $O$ 及 $O'$ 兩圓內,即內分及外分 $OO'$ 線,使其比爲 $m:n$. 以內外分點爲直徑所作之圓周上,圓 $O$ 及圓 $O'$ 以外之部分即爲此點之軌跡.

### 問題 XXIX

1. 設 $D$, $E$ 爲 $\triangle ABC$ 之 $AB$ 及 $AC$ 之中點.求 $\triangle PBC=\triangle PDE$ 之 $P$ 點之軌跡.

2. 求至兩相交線距離之比一定之點之軌跡.

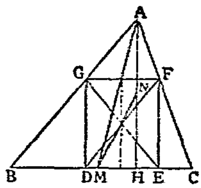
3. 正方形 $ABCD$ 之一邊 $BC$ 在定角 $XOY$ 之 $OX$ 邊上，若其對邊之 $A$ 點在 $OY$ 線上時,求 $D$ 點之軌跡.

4. $D$, $E$ 爲 $\triangle ABC$ 之 $BC$ 邊上兩定點，平行 $BC$ 之直線交 $AB$, $AC$ 於 $F$, $G$ 點時,求 $DG$ 及 $EF$ 之交點 $P$ 之軌跡. 但設 $D$ 點在 $B$, $E$ 兩點之間.

〔註〕 $AP$ 線交 $BC$ 邊於 $M$ 點,

$$BM:MC=BE:DC.$$

5. 設 $\triangle ABC$ 之 $\angle B$ 及 $\angle C$ 皆爲銳角,求此 $\triangle ABC$ 之內接矩形之對角線交點之軌跡.

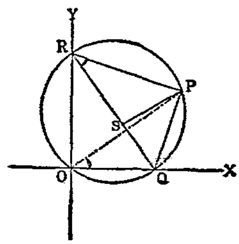



〔註〕 $DEFG$ 爲內接矩形，$AH$ 爲由 $A$ 點至 $BC$ 邊上之垂線，$M$, $N$ 爲 $BC$ 及 $AH$ 之中點，$MN$ 線卽爲所求之軌跡.

6. 設 $P$ 爲一定點，$M$ 爲一定圓上之任意點,於 $PM$ 線上取一點 $N$，且使 $PN:NM=a:b$，求 $N$ 點之軌跡,但 $a$ 及 $b$ 爲已知線分.

7. 一三角形與一已知三角形相似,其一角頂爲一定點,他一角頂在一定直線上.求第三角頂之軌跡.

8. 設 $A$ 爲一定點，$P$ 爲定線 $l$ 上之任意點. 以 $AP$ 爲一邊作一三角形 $APQ$，與一已知三角形相似. $\triangle APQ$ 之重心爲 $G$，若 $P$ 點在 $l$ 線上移動時.求其重心 $G$ 之軌跡.但 $P$ 點移動時,三角形 $APQ$ 仍與已知三角形相似,只變其大小而已.




9. $\triangle ABC$ 與一已知 $\triangle$ 相似,設 $\triangle ABC$ 之垂心 $H$ 點之位置不變. 若 $A$ 在一定直線上時,求頂點 $B$ 之軌跡如何.

10. 設直角三角形 $PQR$ 之直角頂 $P$ 之位置不變. 若 $Q$, $R$ 兩點在二垂直定線上時,求由 $P$ 點至斜邊 $QR$ 上垂線之垂足 $S$ 之軌跡.

〔註〕 垂直二定線 $OX$ 及 $OY$ 交於 $O$ 點.因 $OQPR$ 爲圓內接四邊形,

$\angle PLQ=\angle POQ$. (一定)

故 $\triangle PRS$ 爲一定形狀之直角三角形.

**11.** 設 $\triangle ABC$ 與一已知三角形相似,頂點 $A$ 爲一定點.若 $B$ 點在一定圓周上時,求第三頂點 $C$ 之軌跡.

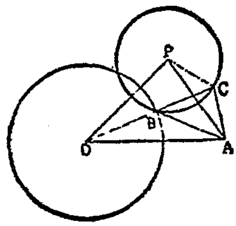
〔註〕 以 $AO$ 爲一邊作 $\triangle AOP$,與一已知三角形相似,於 $\triangle AOB$ 及 $\triangle APC$,可知

$$\angle OAB=\angle PAC,$$

$$OA:AB=PA:AC.$$

$$\therefore\quad \triangle OAB\backsim\triangle PAC.$$

$$\therefore\quad OB:PC=OA:AP.\ (\text{一定})$$




**12.** 設 $\triangle ABC$ 之面積及其 $\angle A$ 之角度與頂點 $A$ 之位置爲一定,若頂點 $B$ 在一定直線上時,求頂點 $C$ 之軌跡.

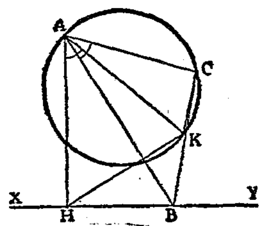
〔註〕 $AH$ 爲由 $A$ 點至定直線 $XY$ 上之垂線作 $\triangle AHK$ 等於定面積,且 $\angle AHK$ 等於定角.

$$AH\cdot AK=AB\cdot AC.$$

$$\therefore\quad AH:AB=AC:AK.$$

且 $$\angle HAB=\angle KAC.$$

$$\therefore\quad \triangle AHB\backsim\triangle ACK.$$



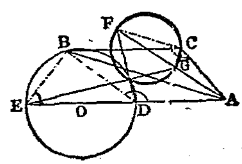

**13.** 連接 $\triangle ABC$ 之頂點 $A$ 及 $BC$ 邊上動點 $D$,於 $AD$ 之延長線上取一點 $P$,且使 $\triangle ACD:\triangle BPD=\overline{CD}^2:\overline{BD}^2$,求 $P$ 點之軌跡.

**14.** 定 $\triangle ABC$ 之 $\angle A$ 之外角之分角線上,於 $A$ 點之兩側各取一點爲 $P$, $Q$,且使 $AB\cdot AC=AP\cdot AQ$,求 $PB$ 與 $QC$ 之交點 $Q$ 之軌跡.

**15.** 定面積 $\triangle ABC$ 之 $A$ 角之角度及 $A$ 頂點之位置爲一定,設頂點 $B$ 在一定圓周上時,求第三頂點 $C$ 之軌跡.

〔註〕 過 $A$ 點至定圓引一直徑,交圓周於 $D$, $E$ 點,設

$$\triangle ABC=\triangle ADF=\triangle AEG.$$



且 $\angle BAC=\angle DAF=\angle EAG.$

因 $AB\cdot AC=AD\cdot AF=AE\cdot AG.$

故 $\triangle ADB\backsim\triangle ACF,\quad \triangle AEB\backsim\triangle ACG.$

$$\therefore\quad \angle DBE=\angle GCF=\angle R.$$

**16.** 於定 $\triangle ABC$ 之 $AB$ 邊及 $AC$ 邊上取 $X$, $Y$ 兩點,令 $BX=CY$. 於 $XY$ 線上取一內分點,使 $XP:PY=m:n$ (但 $m$, $n$ 爲一定線分) 時,求 $P$ 點之軌跡.

**17.** $AB$ 爲圓 $O$ 之直徑, $C$ 爲圓周上一點,於 $BC$ 之延長線上取一點 $D$, 令 $mBC=CD$, 求 $DO$ 於 $AC$ 之交點 $P$ 之軌跡.

〔註〕 由 $P$ 點引一線平行 $BC$, 且交 $AB$ 於 $Q$ 點, $Q$ 爲一定點,且

$$\angle APQ=\angle R.$$

**18.** 設 $A$, $B$, $C$, $D$ 四點順序在一線上時,求 $\angle APB=\angle CPD$ 之 $P$ 點之軌跡.

〔註〕 設 $\angle APD$ 之分角線交 $AD$ 於 $M$ 點;若 $\angle APB=\angle CPD$ 時,

$$PA:PD=AM:MD.$$

若作 $\triangle PAD$ 之外接圓交 $PB$ 及 $PC$ 之延長線於 $B'$ 及 $C'$ 點時,則

$$AD\parallel B'C'.$$

$PA$, $PD$ 於 $B'C'$ 之延長線交於 $A'$, $D'$ 點.

$$A'P\cdot A'A=A'B'\cdot A'C',\quad D'P\cdot D'D=D'C'\cdot D'B',$$

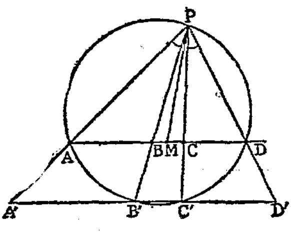
$$\frac{A'P\cdot A'A}{D'P\cdot D'D}=\frac{A'B'\cdot A'C'}{D'C'\cdot D'B'}.$$

而 $\dfrac{A'P}{D'P}=\dfrac{AP}{DP},\quad \dfrac{A'A}{D'D}=\dfrac{AP}{DP},$

$$\frac{A'B'}{D'C'}=\frac{AB}{DC},\quad \frac{A'C'}{D'B'}=\frac{AC}{DB}.$$

$$\therefore\quad \left(\frac{AP}{DP}\right)^2=\frac{AB\cdot AC}{DC\cdot DB}.$$

$$\therefore\quad \left(\frac{AM}{MD}\right)^2=\frac{AB\cdot AC}{DC\cdot DB}.\ (\text{一定})$$




若角 $APD$ 之外角之分角線於 $AD$ 之延長線交於 $N$ 點時,則 $N$ 亦爲定點,故 $P$ 點在以 $MN$ 爲直徑之圓周上.

## 30. 作圖

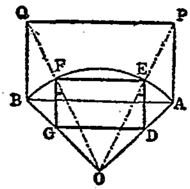
應用於作圖法之比例理論最值得注意者謂之相似法.

(例 1) 作一矩形內接於一定扇形內,且其鄰邊之比爲 $m:n$.

〔解〕 於扇形 $OAB$ 內作內接矩形 $DEFG$, 設

$$DE:EF=m:n.$$

故 $\triangle OEF$ 爲一等腰三角形.




$$\triangle ODE\equiv\triangle OGF.$$

$$\therefore\quad \angle AOE=\angle BOF,\quad EF\parallel AB.$$

以 $BA$ 爲一邊於 $O$ 之反對方面作一矩形 $QBAP$.

$$AP:PQ=m:n,$$

則 $OEP$ 及 $OFQ$ 皆爲一直線. 故

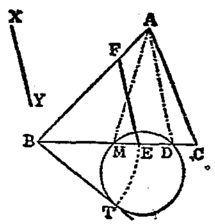
〔作圖〕 以 $BA$ 爲一邊作一矩形 $BAPQ$, 使 $AP:PQ=m:n$. 連 $OP$ 及 $OQ$ 兩線,交弧於 $E$, $F$ 兩點. 於 $E$ 點引一線平行 $PA$, 且交半徑 $OA$ 於 $D$ 點. $F$ 點引一線平行 $QB$, 且交 $OB$ 於 $G$ 點.

則矩形 $DEFG$ 爲所求之矩形. (證明略)

又有一種關於比例作圖題之特色者,即面積等分問題.

(例 2) 作一直線平行一與線 $XY$, 且分一與 $\triangle ABC$ 爲二等分.

〔解〕 設 $EF$ 爲所求之線. 由 $A$ 點引一線平行 $XY$ 交 $BC$ 邊於 $D$ 點, $M$ 爲 $BC$ 邊上之中點,則




$$\triangle ABM=\triangle FBE.$$

$$\therefore\quad AB\cdot BM=FB\cdot BE.$$

然而 $$\triangle ABD\backsim\triangle FBE,$$

$$\frac{\triangle FBE}{\triangle ABD}=\frac{\overline{BE}^2}{\overline{BD}^2}.$$

又 $$\frac{\triangle ABM}{\triangle ABD}=\frac{BM}{BD}.$$

$$\therefore\quad \frac{\overline{BE}^2}{\overline{BD}^2}=\frac{BM}{BD}.$$

$$\therefore\quad \overline{BE}^2=BD\cdot BM.$$

故過 $D, M$ 點任意作一圓,由 $B$ 點引 $BT$ 切線.於 $BC$ 邊上取一點 $E$,使 $BT=BE$; 由 $E$ 點引一線 $EF$ 平行 $XY$, 則 $EF$ 卽爲所求之直線(證明略)

若 $E$ 點在 $BC$ 之延長線上時,則須用他頂點代替 $B$ 點,其所得之結果相同.

## 問題 XXX

1. 作一線爲二與線之比例中項.

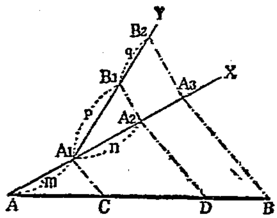
2. 作 $C, D$ 兩點分與線 $AB$ 爲三分,使 $AC:CD=m:n$, $CD:DB=p:q$. 但 $m, n, p, q$ 皆爲與線分.

〔註〕 於 $A$ 點引一線 $AX$, 取 $A_1A_2$ 點令

$AA_1=m,\quad A_1A_2=n.$

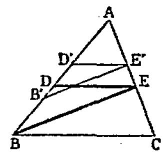
又於 $A_1$ 點引一線 $A_1Y$, 取 $B_1, B_2$ 點令 $A_1B_1=p,\quad B_1B_2=q.$

次由 $B_2$ 引一線平行 $B_1A_2$, 且交 $AX$ 於 $A_3$ 點;由 $A_1$ 及 $A_2$ 引二線平行 $A_3B$, 交 $AB$ 於 $C, D$ 點,則 $C$ 點及 $D$ 點爲所求之點.



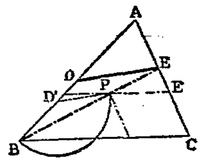

3. 求作一線平行 $\triangle ABC$ 之 $BC$ 邊,且交 $AB, BC$ 於 $D, E$ 點,使 $AE=2DB$.

〔註〕 於 $AB$ 上任取一點 $D'$. 由 $D'$ 點引一線平行 $BC$, 交 $AC$ 於 $E'$ 點;於 $AB$ 邊上取 $D'B'=\frac{1}{2}AE'$, 連 $B'E'$ 線.由 $B$ 引一線平行 $B'E'$, 與 $AC$ 交於 $E$ 點.




4. 作一線平行 $\triangle ABC$ 之 $BC$ 邊, 交 $AB, AC$ 於 $D, E$ 點,且使 $AE:BD=m:n$ (但 $m, n$ 皆爲已知).

5. 於一與 $\triangle ABC$ 之 $AB$ 及 $AC$ 邊上,求作兩點,且使 $BD=DE=EC$.




〔註〕 $AB$ 邊上任意點 $D'$. 於 $AC$ 邊上取

一點 $E'$，使 $BD'=CE'$ 由 $E'$ 點引一線平行 $BC$ 邊，與以 $D'$ 爲中心，$D'B$ 爲半徑所作之圓交於 $P$ 點，連 $BP$ 交 $AC$ 於 $E$ 點，即爲所求之線.

**6.** 於 $\triangle ABC$ 之二邊 $AB$ 及 $AC$ 上取 $D, E$ 兩點，且使 $BD:DE:EC=l:m:n$，但 $l, m, n$ 爲三定線.

**7.** 求作一直線平行 $\triangle ABC$ 之 $BC$ 邊，交 $AB$ 及 $AC$ 於 $D, E$ 點，且使 $DE=2DB+EC$.

**8.** 於一與圓內作一內接四邊形，且與已知四邊形相似.

**9.** 於一與弓形內作一內接正方形.

**10.** 已知一角，由此角至對邊之垂線，及夾此角二邊之比，求作一三角形.

**11.** 已知 $A, B$ 兩點及平行線 $XX'$ 及 $YY'$. 於 $XX'$ 線上取一點 $P$. 連 $AP$ 及 $BP$ 交 $YY'$ 於 $Q, R$ 點，且使 $\triangle PQR$ 之面積，等於一與面積時，求作此 $P$ 點.

**12.** 於圓外一點 $A$ 作一割線，交圓於 $B, C$ 點，且令 $AB=mBC$.

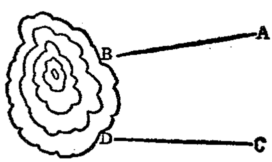
**13.** 求作一線通過一與點 $P$，交一與圓周於 $A, B$ 兩點，且使 $PA:PB$ 等於一與比.

**14.** 於直徑爲 $AB$ 之圓周上，求作一點 $P$，且令 $PA+2PB=2AB$.

〔註〕 於 $AP$ 之延長線上取一點 $D$，且使 $PD=2PB$. 注意 $\angle ADB$ 之角度爲一定不變.

**15.** 求於一與四邊形內作一內接菱形，且使菱形之相鄰二邊與四邊形之兩對角線平行.

**16.** 因有障害物之故，兩相交直線不能相會與交點. 若由一與點 $P$（設 $P$ 於兩直線之水平面上）引一直線通過交點時，須用如何方法.



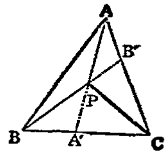

〔註〕 依問題 XXIX 第 2 題.

**17.** 於 $\triangle ABC$ 內求一點 $P$，令 $\triangle PAB:\triangle PAC:\triangle PBC=1:2:3$.

〔註〕 設 $AP$ 及 $BP$ 之延長線各交對邊於 $A'$ 及 $B'$ 兩點.

$\triangle PAB:\triangle PAC=BA':A'C$,

$\triangle PAB:\triangle PBC=AB':B'C$.




18. 求作一直線,與三定點之距離之比爲

$$l:m:n.$$

19. 求作一三角形,其三頂點在三定直線上,且與一定三角形相似.

20. $A$, $B$ 爲定線 $l$ 以外兩點,求取一點 $P$,且令 $BP$ 等於由 $A$ 至 $BP$ 之垂線之二倍.

〔註〕設 $AH$ 爲由 $A$ 點至 $BC$ 上之垂線,由 $P$ 點引一線 $PQ$ 平行 $HA$,且等於 $HA$,作 $\triangle BPQ$,且考察點 $Q$ 之軌跡.

21. 求作一三角形,其一頂點 $A$ 於一定點上 他一頂點 $B$ 於一定圓周上,第三之頂點 $C$ 於一定直線上,且與一定三角形相似.

22. 已知 $\triangle ABC$ 之頂點 $A$ 之位置,$\angle A$ 之角度及其面積,求作此三角形,且頂點 $B$ 於一定圓周上,頂點 $C$ 於一定直線 $XY$ 上.

23. 已知底邊,頂角及他二邊之積.求作一三角形.

24. 已知由一點至對邊之垂線,中線及會此點兩邊之積,求作一三角形.

25. (1) 已知二鄰邊之和及面積, (2) 已知二鄰邊之差及面積, 求作一矩形.

26. 求作一圓,於 $XY$ 定線上截定長 $l$ 爲弦,且通過 $A$, $B$ 兩定點.

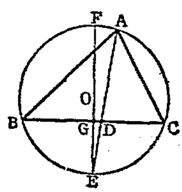
27. 已知 $\triangle ABC$ 之底邊 $BC$,頂角 $A$ 之角度及分角線 $AD$ 之長:求作此三角形.

〔註〕圓 $O$ 爲 $\triangle ABC$ 之外接圓,$AD$ 之延長線交圓周於 $E$ 點,直徑 $EF$ 交 $BC$ 於 $G$ 點.

因 $AFGD$ 爲一內接四邊形.

$$\therefore\ ED\cdot EA=EF\cdot EG.$$

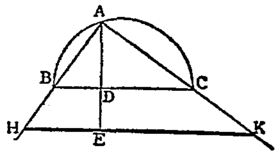
故因此可知 $ED$ 之長.




28. 已知二鄰邊之比爲 $m:n$ 及面積,求作一矩形.

〔註〕以任意線分 $BC$ 爲直徑作一半圓.於 $BC$ 上取一點 $D$,使

$BD:DC=m:n.$




由 $D$ 點引一線垂直 $BC$ 交圓周於 $A$ 點,設與面積爲 $l^2$. 於 $AD$ 或其延長線上取一點 $E$, 令 $EA=l$. 過 $E$ 點引一線平行 $BC$, 且與 $AB$ 及 $AC$ 或其延長線,交於 $H$, $K$ 兩點. $HE$ 及 $EK$ 卽爲所求矩形之二鄰邊.

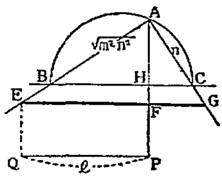
**29.** 求作一矩形,其周圍爲一定,且等於一正方形之面積.

**30.** 分一與線分與二與正方形之面積之比成內分.

**31.** 於一與 $\triangle ABC$ 之 $BC$ 邊上,使 $\triangle ABP:\triangle ACP=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$, 求定此點 $P$.

**32.** 分一與線分與兩與正方形之積成外分.

〔證〕 設與線分爲 $l$, 正方形之邊各爲 $m$, $n$, $\sqrt{m^2-n^2}$ 及 $n$ 爲夾直角之兩邊 $AB$ 及 $AC$. 作 $\triangle ABC$. 由 $A$ 至斜邊 $BC$ 引一垂線 $AH$, 於 $AH$ 上任意點 $P$ 作一線 $PQ$ 垂直 $AH$ 且令 $PQ=l$. 又由 $Q$ 點作一線平行 $AP$, 交 $AB$ 於 $E$ 點,過 $E$ 點引一線平行 $BC$, 交 $AC$ 於 $G$ 點,交 $AH$ 於 $F$ 點,點 $G$ 卽爲所求之點.




**33.** 求作一正方形,與一與正方形之比等於一與比.

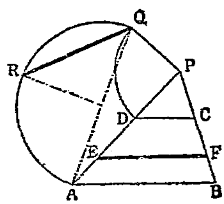
**34.** 求作一直線,分一與三角形之面積爲兩等分,且與底邊平行.

**35** 求作一直線,分三角形爲兩等分,且與一邊垂直.

**36.** 求作二直線,分三角形之面積爲三等分,且與一邊平行.

**37.** 求作一直線,分一梯形爲兩等分,且平行於底邊.

〔註〕 設 $EF$ 平行梯形 $ABCD$ 之底邊 $AB$, 且分 $ABCD$ 爲兩等分; $AD$ 及 $BC$ 之延長線交點爲 $P$.




$$\frac{\triangle PDC}{\triangle PEF}=\frac{\overline{PD}^2}{\overline{PE}^2},\quad \frac{\triangle PAB}{\triangle PEF}=\frac{\overline{PA}^2}{\overline{PE}^2}.$$

$$\therefore\quad \frac{EFCD}{\triangle PEF}=\frac{\overline{PE}^2-\overline{PD}^2}{\overline{PE}^2},$$

$$\frac{EABF}{\triangle PEF}=\frac{\overline{PA}^2-\overline{PE}^2}{\overline{PE}^2}.$$

$$\therefore\ \frac{\overline{PE}^2-\overline{PD}^2}{\overline{PE}^2}=\frac{\overline{PA}^2-\overline{PE}^2}{\overline{PE}^2}.$$

$$\therefore\ \overline{PA}^2+\overline{PD}^2=2\overline{PE}^2.$$

以 $AP$ 爲一邊作一直角三角形 $APQ$，他一邊 $PQ=PD$，$AQ$ 爲斜邊以斜邊 $AQ$ 爲直徑作一半圓，$R$ 爲半圓之中點，令 $PE=QR$.

38. 求作一線，割一與 $\triangle ABC$，所成之三角形爲以 $\angle BCA$ 爲頂角之等腰三角形，且其面積與 $\triangle ABC$ 之面積相等.

〔註〕 可以 $AB$ 及 $AC$ 之比例中項爲一邊.

39. 於 $\triangle ABC$ 之邊 $AB$ 及 $BC$ 或其延長線上，求 $D$，$E$ 兩點，令 $AD=AE$，且 $\triangle ADE$ 之面積爲 $\triangle ABC$ 之面積之 $K$ 倍.

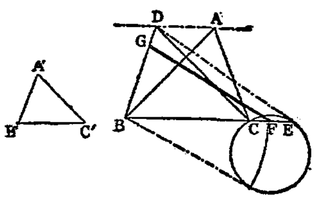
〔註〕 於 $AB$ 或 $AB$ 向 $B$ 方之延長線上求一點 $B'$，使 $AB'=K\cdot AB$. 依照前題，可作 $\triangle AB'C$.

40. 求作一正三角形等於一與三角形.

41. 已知面積及頂角，求作一等腰三角形.

42. 求作一三角形，其面積等於 $\triangle ABC$，且與 $\triangle A'B'C'$ 相似（設 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$ 皆爲已知）.

〔註〕 作 $\triangle DBC$ 使 $\angle DBC=\angle B'$，且其面積等於 $\triangle ABC$，次作 $\triangle DBE$ 使 $\angle BDE=\angle A'$，$BF$ 爲 $BC$ 與 $BE$ 之比例中項. 由 $F$ 點引一線平行 $ED$，交 $BD$ 於 $G$ 點，則 $\triangle BFG$ 爲所求之三角形.




43 求作一三角形與一已知三角形相似，且與已知三角形成一與比.

44. 求分一已知正方形爲五等分，且其中之一爲正方形，他四部分爲直角三角形.

〔註〕 各邊之中點與對邊之一端相連.

45. 設 $D$ 爲三角形 $ABC$ 外接圓 $BDC$ 弧上之中點. 過此點求作一

綫分 $AB$, $AC$ 及包圍 $BDC$ 弧之面積爲二等分.

〔註〕 設 $BC$ 之中點爲 $M$, 由 $M$ 點引一綫平行 $AD$, 且交 $AB$ 及 $AC$ 於 $N$, $D$ 兩點.

**46.** 求作二同心圓周,分與圓爲三等分.

**47.** 分一與綫分,與其外中比成內分及外分.

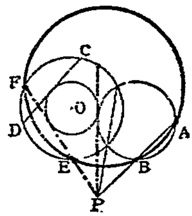
**48.** (1) 求作一正十角形,內接一與圓內.

(2) 求作一正五角形,內接一與圓內.

(3) 求作一正十五角形,內接一與圓內.

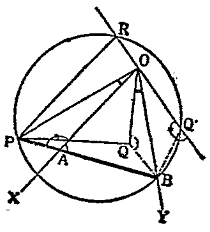
**49.** 求作一圓過兩定點 $A$, $B$, 且分一與圓周爲 1:2.

〔註〕 作一任意圓過 $A$, $B$, 且交與圓 $O$, 連其共通弦 (公共弦) 與 $AB$ 相交於 $P$ 點, 於圓 $O$ 內作一正三角形, 切此三角形一邊 $CD$ 作一同心圓. 由 $P$ 點至此圓作二切綫, 交圓周於 $E$, $F$ 兩點, 通過 $A$, $B$, $E$, $F$ 四點之圓, 即所求之圓.




**50.** 求作一直綫通過定點 $P$, 截 $\angle XOY$ 之二邊於 $AB$, 且使所成之 $\triangle OAB$ 之面積與一與面積相等.

〔註〕 作 $\angle POQ=\angle XOY$, 且 $\triangle POQ$ 等於與面積, 對於 $OY$ 取一點 $Q'$ 與 $Q$ 點互相對稱. 故 $Q$ 及 $Q'$ 點, 皆爲定點. 由 $P$ 點引一綫平行 $OX$, 且交 $QO$ 於 $R$ 點. 作一圓過 $R$, $Q'$, $P$ 三點, 交 $OY$ 於 $B$ 點, 連 $PB$ 綫交 $OX$ 於 $A$ 點. 按以上作圖, 可知




$$\triangle OPA \backsim \triangle OBQ.$$

$$\therefore\quad OP:OA=OB:OQ.$$

$$\therefore\quad OP\cdot OQ=OA\cdot OB.$$

且 $$\angle POQ=\angle AOB.$$

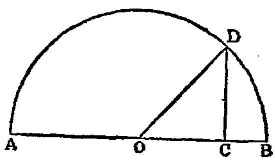
$$\therefore\quad \triangle OAB=\triangle OPQ.$$

**51.** 設定點 $P$ 不在定三角形 $ABC$ 之三邊上, 求作一綫, 過此點 $P$ 且分 $\triangle ABC$ 爲二等積面.

**52.** 內分一與直綫 $AB$ 爲二部分, 且其二部分之差之半與比例中項

相等.

〔註〕以 $AB$ 為直徑作一半圓 $O$. 引 $OD$ 半徑,且令 $\angle BOD=45°$. 由 $D$ 點引 $DC$ 垂直 $AB$. 故 $AC$ 與 $CB$ 之比例中項 $CD$, 等於 $\frac{1}{2}(AC-CB)$.




**53.** $A, B$ 為定直線 $XY$ 同側之兩定點.於 $XY$ 線上求兩點 $M, N$, 令 $MN$ 等於一與線分,且 $AM:BN$ 等於一與比.

〔註〕可應用 Apollonius 定理.

**54.** 已知底邊,項角及他二邊之比,求作一三角形.

**55.** 已知一邊,面積及他二邊之比 求作一三角形.

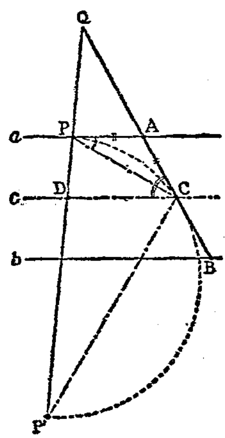
**56.** 已知由一項點至對邊之垂線,中線及會此項點二邊之比 求作一三角形.

〔註〕延長中線爲二倍,按 Apollonius 定理,可推定底邊之一端.

**57.** 於定圓 $O$ 之定直徑上中心 $O$ 兩側有 $A, B$ 兩定點, 求於圓周上取一點,令過 $PA$ 之弦與過 $PB$ 之弦相等.

**58.** 設 $a, b$ 爲平行之兩直線, $P$ 爲 $a$ 線上之一定點,求作一線過一定點 $Q$, 交 $a, b$ 二線於 $A, B$ 點,且使 $AB=2AP$.

〔註〕設 $QB$ 爲要求之直線.於 $a, b$ 兩線間作一線 $c$, 且距 $a, b$ 之距離相等. $c$ 線交 $AB$ 線及 $PQ$ 線於 $C, D$ 點, $PC$ 爲 $\angle ACD$ 之分角線.於 $QP$ 之延長線上定一點 $P'$, 使 $QP:PD=QP':DP'$, 故 $P'$ 爲一定點.以 $PP'$ 爲作一半圓與 $c$ 線所交之點,卽爲 $C$ 點.

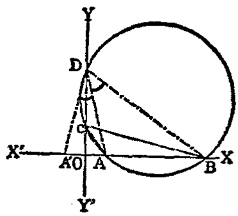



〔注意〕若 $Q$ 點於 $a, b$ 線之間,亦可以同理解之.

**59.** $XOX'$ 及 $YOY'$ 爲兩相交直線(卽交於 $O$ 點).設於半直線 $OX$ 上有兩定點 $A$,

$B$. 於半直線 $OY$ 上求一點 $C$, 且使 $\angle ACB=2\angle ABC$.

〔註〕 設所要之圖已作,三角形 $ABC$ 之外接圓交 $OY$ 於 $D$ 點.




$$\angle ADO=\angle ABC,$$

$$\angle ADB=\angle ACB.$$

$$\therefore\ \angle ADB=2\angle ADO.$$

對 $O$ 取一點 $A'$ 與 $A$ 對稱,

$$\angle A'DA=\angle ADB.$$

$$\therefore\ A'D:DB=A'A:AB.\ (\text{一定})$$

60　求一點距三定點距離之比為一與比.

61. 有甲乙丙三艦,甲艦由 $A$ 點出發經 $m$ 時間後, 乙艦由 $B$ 點出發經 $n$ 時間後,丙艦始由 $C$ 點出發.然復經 $t$ 時間後,則三艦會一地點,求此三艦各行之路途,但設此三艦之速度相等.

62. 已知三角形各邊之比為一與比,求作此三角形 $ABC$.

〔註〕 於 $BC$, $CA$, $AB$ 各邊上取 $A'$, $B'$, $C'$ 三點.使

$$BA':A'C=a:b,\quad CB':B'A=c:d,\quad AC':C'B=e:f.$$

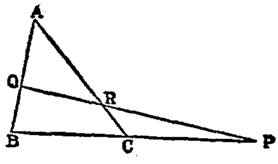
於 $A'B'$ 之延長線上取一點 $D$, 使

$$A'B':B'D=c:d.\quad \text{故}\quad AD\parallel BC.$$

63. 於平行四邊形 $ABCD$ 內求作一點 $P$, 過 $P$ 點,引兩線平行各邊時,則　$\square PA:\square PC=5:9,\quad \square PB:\square PD=5:4.$

64. 求作一線過定三角形 $ABC$ 之邊 $BC$ 延長線上之定點 $P$, 交兩邊 $AB$, $AC$ 於 $Q$, $R$ 點,且使 $BQ=CR$.

〔註〕 設所要之圖已作.




$$\frac{AQ}{BQ}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CR}{RA}=1,$$

$$BQ=CR.$$

$$\therefore\ AQ\cdot BP=PC\cdot RA.$$

$$\therefore\ AQ:AR=PC:PB.$$

65. 依下例各方程式,求作圖.但 $p$, $q$ 皆為正數.

(1)　$x^2-px+q=0$.　　(2)　$x^2+px-q=0$.

(3)　$x^2-px-q=0$.　　(4)　$x^2+px+q=0$.

## 31. 計算問題

〔例 1〕 設正 $\triangle ABC$ 之各邊爲 $a$, 於 $AB$ 及 $AC$ 邊上取 $D, E$ 兩點; 且 $\triangle ABC=2\triangle ADE$, $AD=x$, $AE=y$. 如 $x+y$ 最小之值時, 求 $DE$ 之長.

〔解〕 因 $\triangle ADE:\triangle ABC=AD\cdot AE:AB\cdot AC$.

$$\frac{xy}{a^2}=\frac{1}{2}.\quad\therefore\quad 2xy=a^2.$$

卽 $x, y$ 之乘積爲一定, 等於 $\frac{a^2}{2}$. 故其最小值時必 $x=y$.

$$x=y=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

因 $\triangle ADE$ 爲正三角形, 故 $DE=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

〔例 2〕 求 $\triangle ABC$ 之 $\angle A$ 之分角線, 且以三邊之長表之. 但

$$BC=a,\quad CA=b,\quad AB=c.$$

〔解〕 設 $\angle A$ 之分角線爲 $AD$.

$$\overline{AD}^2=AB\cdot AC-BD\cdot DC.$$

但
$$BD:DC=c:b.$$

$$\therefore\quad BD=\frac{ac}{b+c},\quad DC=\frac{ab}{b+c}.$$

$$\therefore\quad \overline{AD}^2=bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}=\frac{bc\{(b+c)^2-a^2\}}{(b+c)^2}$$

$$=\frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}.$$

$$\therefore\quad AD=\frac{\sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)}}{b+c}.$$

### 問題 XXXI

1. 設 $D, E$ 爲 $\triangle ABC$ 之 $AB$, $BC$ 二邊上之點, 內分 $AD:DE=1:2$, 且 $BE:EC=2:3$ 時, 求三頂點至 $DE$ 之距離之比.

2. 設梯形之上底爲 $a$, 下底爲 $b$, 由內分他任意邊之比爲 $m:n$ 之內

分點，所引之平行底邊之線之長如何．又梯形之兩對角線所截此平行線之線分之長如何．

**3.** 某船取一定之速度直線進行，由此船測對岸 $A$ 燈臺之方位及距離最初由前方偏右 $20°$，可見此燈臺．過 $a$ 分後須偏右 $55°$ 始能見牠，再過 6 分後須在右方 2000 米之距離始能見此燈臺，求此船之速．

**4.** 設 $P, Q$ 爲 $\triangle ABC$ 之 $BC$, $CA$ 兩邊上之點，

$$BP:PC=CQ:QA=2:3.$$

試問 $BQ$ 線被 $AP$ 所分之比如何．

**5.** 設 $\triangle ABC$ 內 $BL\perp AC$, $CM\perp AB$, $C$ 至 $ML$ 之垂線爲 $CN$．現知 $BC=a$, $BL=h$, $CM=k$, 求 $CN$ 之長．

**6.** 設直角三角形之夾直角之一邊之長爲內接圓之直徑之 3 倍時，求直角三角形三邊各長若干．

**7.** $\triangle ABC$ 之 $\angle B$ 及 $\angle C$ 之分角線交於 $O$ 點，過 $O$ 點引一線平行 $BC$，且交 $AB$ 及 $AC$ 於 $D, E$ 兩點，設 $AD=l^{cm}$, $AE=m^{cm}$, $DE=n^{cm}$ 時，求 $AB$, $AC$ 及 $BC$ 各長若干．

**8.** 於 $\triangle ABC$ 之邊 $BC$ 及 $CA$ 上取 $P, Q$ 兩點．設 $BP:PC=m:n$, $CQ:QA=p:q$, $AP$ 與 $BQ$ 之交點爲 $R$ 點，求以 $m, n, p, q$ 表明 $AR:RP$ 之比．

**9.** 於 $\triangle ABC$ 之 $BC$ 之延長線取 $CD$，使 $CD=BC$，設 $E$ 爲 $AC$ 之中點，延長 $DE$ 之連線，與 $AB$ 交於 $F$ 點，求 $EF:FD$ 爲若干．

**10.** 設 $\triangle ABC$ 爲一直角三角形，$BD$ 爲由直角項 $B$ 至 $AC$ 之垂線，$DE\perp BC$．今欲以 $AB, BD, DE$ 作一三角形，$BC$ 邊對 $AC$ 邊之比，須在如何範圍以內．

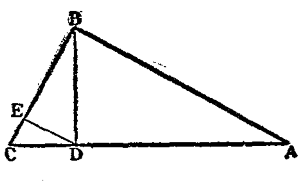
〔註〕 設 $\dfrac{BC}{AC}=x,\quad 0<x<1,$

$BC:AC=BD:AB=DE:BD.$

$\therefore\quad AB:BD:DE=1:x:x^2.$

故欲作一三角形必須要之條件爲

$$BD+DE>AB.$$

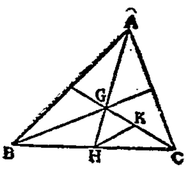



$$\therefore\quad x^2+x>1.\quad \therefore\quad \frac{\sqrt{5}-1}{2}<x<1.$$

**11.** 設 $\triangle ABC$ 爲一直角三角形. 由弦 $AB$ 上之任意點 $P$ 至 $AC$ 及 $BC$ 之垂足爲 $M$, $N$ 點,求 $\triangle APM$ 及 $\triangle BPM$ 之面積之和. 矩形 $PMCN$ 之面積如何.

**12.** (1) 於底邊爲 $b$, 高爲 $h$ 之定三角形內,內接一面積爲 $m^2$ 之矩形,設矩形之一邊與三角形之底相叠時,求矩形二邊之長. 又 $m^2$ 在最大值時,內接矩形之位置如何

(2) 試證明以三角形之三中線所作成之三角形之面積,爲原三角形面積之 $\frac{3}{4}$.




〔註〕 設 $\triangle ABC$ 之重心爲 $G$, $AH$ 爲由 $A$ 點至對邊之中線, $K$ 爲 $CG$ 之中點. 若以三中線所作之三角形之面積爲 $S$, 則 $S=9\triangle GHK$.

又 $$\triangle GBC=\tfrac{1}{3}\triangle ABC,$$
$$\triangle GHK=\tfrac{1}{4}\triangle GBC.$$

**13.** 設 $\triangle ABC$ 之底 $BC$ 爲 $a$, 高爲 $h$, $M$ 爲 $BC$ 邊上之一點,由 $M$ 點,引兩線平行 $AB$, $AC$, 交 $AC$, $AB$ 於 $N$, $P$ 點,若 $\dfrac{BM}{BC}=x$ 時,求以 $a$, $h$, $x$ 表明 $\triangle MNP$ 之面積. 倘求此三角形之最大面積如何.

**14.** 於以正方形 $ABCD$ 之 $AB$ 爲一邊, $CD$ 上一點 $P$ 爲頂點之 $\triangle ABP$ 內,內接甲乙兩矩形 (矩形之一邊於底邊 $AB$ 上). 當甲矩形之横爲縱之二倍,乙横爲縱之半時,則甲乙兩矩形之面積相等.

〔註〕 內接矩形之横縱之和,等於三角形之高,又三角形之高等於底邊.

**15.** $\triangle ABC$ 之 $\angle A=60^\circ$, $AB=10$ 糎, $AC=16$ 糎,求以 $\angle A$ 之分角線所分之二三角形之面積各如何.

**16.** $\triangle ABC$ 之各頂角之分角線 $AD$, $BE$, $CF$ 分此三角形爲六小三角形,求此六三角形中之最大面積者,但知 $AB>BC>CA$. 又 $D$, $E$, $F$ 爲原三角形邊上之點.

**17.** 某三角形之面積爲 378 平方糎,設其二邊之和與他一邊乘積之比爲 88:49:81, 求此三角形之三邊之長

〔註〕 設三邊爲 $a$, $b$, $c$, 且
$$(a+b)c=88k,\quad (b+c)a=49k,\quad (c+a)b=81k.$$

$$ac=28k,\quad bc=60k,\quad ab=21k.$$

$$\therefore\quad a=\frac{7}{\sqrt{5}}\sqrt{k},\quad b=3\sqrt{5}\sqrt{k},\quad c=4\sqrt{5}\sqrt{k}.$$

$$\therefore\quad 378=\frac{7}{5}\sqrt{7^2\times 3^2\times 2^2}=\frac{42}{5}k.$$

$$\therefore\quad k=45.\quad \therefore\quad a=21,\quad b=45,\quad c=60.$$

**18.** 於一直線之同側有 $A$, $B$ 兩點. $A$, $B$ 至此直線所下之垂線 $AC$ 及 $BD$ 之長爲 $a$, $b$. 設 $CD$ 之距離爲 $c$, 今作一圓通過 $A$, $B$ 點, 切直線於 $F$ 點,求 $CF$ 之長如何.

**19.** 設半徑爲 $r$ 糎之圓內接正十角形之邊爲 $a$, 試證明 $a^2+ar=r^2$.

**20.** 設 $\triangle ABC$ 之 $AB=3$ 米, $AC=4$ 米, $\angle A=90°$. 以 $C$ 爲圓心,以半徑 1 米作一圓,由 $B$ 點引一切線,切圓於 $D$ 點,求若以 $B$ 爲中心,以 $BD$ 爲半徑所作之圓必交於 $AC$ 線,如假設其交點爲 $E$, 求 $AE$ 爲若干米.

**21.** $OX$, $OY$ 爲兩相交直線, $AB$ 線長 8 糎,而一端 $A$ 於 $OX$ 線上,他端 $B$ 於 $OY$ 線上. 設 $x$, $y$ 爲 $AB$ 上一點 $P$ 至 $OX$ 及 $OY$ 之距離.

(1) 若 $P$ 爲 $AB$ 線分之中點時 $x$, $y$ 之間成立之等式關係如何.

(2) 若 $AP=6$ 糎時, $x$, $y$ 之間成立之等式關係如何.

**22.** 設有三角形之土地 $ABC$, 於 $AB$, $AC$ 上取 $P$, $Q$ 兩點, 連線分 $PQ$ 可分土地之周圍及面積爲兩等分時,問 $P$, $Q$ 須距 $A$ 若干米. 但設 $BC=60$ 米, $CA=64$ 米, $AB=84$ 米.

**23.** 於 $\triangle ABC$ 之 $AB$ 邊上取一點 $A'$ 使 $AA'=\frac{1}{4}AB$, $BC$ 邊上取一點 $B'$ 使 $BB'=\frac{1}{5}BC$, $CA$ 邊上取一點 $C'$ 使 $CC'=\frac{1}{6}CA$, 連 $A'$, $B'$, $C'$ 所作成之 $\triangle A'B'C'$ 與原 $\triangle ABC$ 之比如何.

〔註〕 $\dfrac{\triangle BA'B'}{\triangle ABC}=\dfrac{3\times 1}{4\times 5}=\dfrac{3}{20}$, $\dfrac{\triangle CB'C'}{\triangle ABC}=\dfrac{4\times 1}{5\times 6}=\dfrac{2}{15}$,

$\dfrac{\triangle AA'C'}{\triangle ABC}=\dfrac{5\times 1}{6\times 4}=\dfrac{5}{24}$.

**24.** 設梯形 $ABCD$($AB \parallel CD$ 即 $AB$, $CD$ 爲兩底) 之對角線相交於 $O$ 點, $\triangle OAB$ 之面積等於 $p^2$, $\triangle OCD$ 之面積等於 $q^2$, 求 $\triangle OBC$, $\triangle ODA$ 及梯形 $ABCD$ 之面積各爲若干.

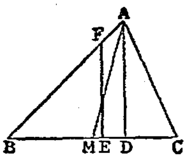
25. 凸四邊形 $ABCD$ (四角均小於 $180°$) 之對角線相交於 $O$ 點，$\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle DAB$ 之面積各為 5, 9, 10, 6 平方米，試計算 $\triangle AOB$ 之面積為若干.

26. 兩圓相內切，自切點引大圓之直徑，由非切點之端作一弦切小圓於一點，且此點(小圓之切點)分弦之長各為 $m$ 糎及 $n$ 糎，求兩圓之半徑各為若干.

27. 設梯形 $ABCD$ 之底 $AB=a$, $CD=b$, 求平行底邊且分此梯形之面積為二等分之線長若干.

28. $EF$ 為垂直 $BC$ 之線，且分 $\triangle ABC$ 為二等積.設由 $A$ 至 $BC$ 之垂足為 $D$, $BD=m$, $CD=n$, 求 $AD$ 與 $EF$ 間距離 $x$, 且以 $m$, $n$ 表之.

〔註〕(1) 設 $E$ 點於 $BC$ 邊上時.




$$\overline{BE}^2=BM\cdot BD\ (M\text{ 為 }BC\text{ 之中點})$$

$$=\frac{(m+n)m}{2}.$$

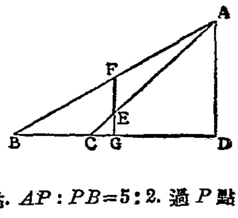
$$\therefore\quad BE=\frac{\sqrt{m(m+n)}}{2},$$

$$x=\frac{2m-\sqrt{m(m+n)}}{2}.\ (\text{但 } AB>AC)$$

若 $\qquad AB<AC,$

$$x=\frac{2n-\sqrt{m(m+n)}}{2}.$$

(2) 設 $E$ 點於 $AC$ 邊上時.




$$\frac{\triangle AEF}{\triangle ABC}=\frac{AF\cdot AE}{AB\cdot AC}=\frac{\overline{DG}^2}{DB\cdot DC}$$

($G$ 為 $EF$ 與 $BC$ 之交點)

$$=\tfrac{1}{2}.$$

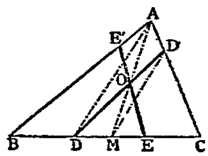
$$\therefore\quad 2x^2=mn.\quad\therefore\quad x=\sqrt{\frac{mn}{2}}.$$

29. 設 $P$ 為 $\triangle ABC$ 之 $AB$ 邊上之一點. $AP:PB=5:2$. 過 $P$ 點引一直線分三角形為兩等分.試證明此線必通過內分 $AC$ 為 $7:3$ 之點.

30. 設 $D, E$ 為 $\triangle ABC$ 之 $BC$ 邊之三等分點，由此兩點各引一線，分

三角形爲兩等積,且相交於 $O$ 點,試證明 $\triangle ODE$ 之面積 $=\frac{1}{7}\triangle ABC$ 之面積.

〔註〕 設 $DD'$ 與 $EE'$ 爲過 $D$, $E$, 兩點,分 $\triangle ABC$ 爲二等分之線, $M$ 點爲 $BC$ 之中點時,則




$$AD \parallel MD',$$

$$AD:MD'=4:3.$$

故 $DD'$ 內分 $AM$ 爲 4:3.

同樣 $EE'$ 亦內分 $AM$ 爲 4:3.

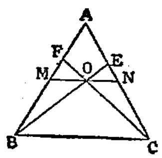
故 $O$ 點在 $AM$ 線上.

$$\frac{\triangle ODE}{\triangle ABC}=\frac{DE\cdot OM}{BC\cdot AM}=\frac{1\times 3}{3\times 7}=\frac{1}{7}.$$

**31.** 設 $O$ 爲正 $\triangle ABC$ 之二邊 $AB$, $AC$ 之中點連線上之任意點,延長 $BO$ 及 $CO$ 與 $AC$, $AB$ 交於 $E$, $F$ 兩點, $CE=x$, $BF=y$, $BC=2a$ 時,試證

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2a}.$$

〔註〕 $MN$ 爲 $AB$, $AC$ 之中點,則 $MN=a$,




$$MO=\frac{2a(y-a)}{y},$$

$$ON=\frac{2a(x-a)}{x}.$$

$$\therefore\quad \frac{2a(y-a)}{y}+\frac{2a(x-a)}{x}=a.$$

$$\therefore\quad 2a\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=3.$$

**32.** 以 $l$ 爲底邊,他二邊之比爲 $a:b(a\neq b)$,求作一最大面積之三角形,又設 $l=5cm.$, $a:b=3:2$ 時,其最大面積之值爲若干.

〔註〕 可應用 Apollonius 之軌跡定理,最大面積爲 15 平方糎.

**33.** 於直徑爲 $AB$ 之內取 $BC$ 弧等於 $\frac{1}{3}$ 之 $AB$ 弧,直線 $BC$ 與切 $A$ 點之切線交於 $P$ 點求 $AP$ 及弧 $ACB$ 之長各若干.

**34.** 有甲乙兩圓柱,甲之半徑爲 $30cm$, 乙之半徑爲 $10cm$, 今欲用鐵絲將兩圓柱平行緊束,須用鐵絲之長若干.

**35.** 設扇形之半徑爲 $r$, 中心角爲 $a$ 度時.

(1) 求弧之長.　　　　(2) 求扇形之面積.

**36.** 設圓 $P$ 等於圓 $Q$, 且圓 $P$ 之圓周通過圓 $Q$ 之中心, 圓 $Q$ 之圓周通過圓 $P$ 之中心. 由兩圓之交點各引圓 $P$ 之一弦平行連心線. 求兩弦, $P$ 圓周及 $Q$ 圓周所包圍之 $P$ 圓內之一部分之面積.

**37.** 以三角形之三頂點爲圓心, 求作三圓, 彼此相切.

又設三角形之三邊之長各爲 1 米, 2 米, $\sqrt{3}$ 米, 一角 $=60°$ 時; 試證明此三角形爲一直角三角形, 並求此三角形被以上三圓所分之四部分之面積各爲若干.

**38.** 三等圓互相外切, 且各內接於半徑 1 米之一圓內, 求此三小圓間所夾部分之面積若干. 又大圓與小圓間所夾部分之面積若干.

**39.** 有一直角三角形, 其夾直角之二邊 $BC$ 及 $CA$ 爲 $3\,cm$ 及 $4\,cm$. 今於三角形內作三等圓切 $AB$ 弦, 且一端之圓切 $BC$ 邊, 他端圓切 $CA$ 邊, 中間之圓切兩端之圓時, 求等圓之半徑若干.

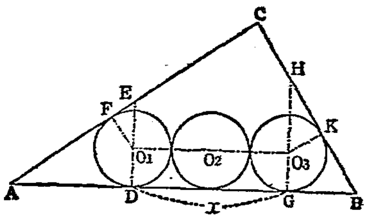
〔註〕 此直角三角形之弦爲 $5cm$. 設三等圓爲 $O_1$ $O_2$, $O_3$; 其半徑爲 $x$.

但依圖,

$\triangle O_1EF$, $\triangle AED$,

$\triangle HO_3K$, $\triangle HBG$,

皆與 $\triangle ABC$ 相似.




$$OE=\tfrac{5}{4}x,\quad DE=\tfrac{9}{4}x.\quad \therefore\quad AD=3x;$$

$$OH=\tfrac{5}{3}x,\quad GH=\tfrac{8}{3}x.\quad \therefore\quad BG=2x.$$

故 $$AB=9x.\quad \therefore\quad 9x=5,\quad x=\tfrac{5}{9}.$$

**40.** 設一扇形之周圍爲定長 $l$, 試求扇形之最大面積爲 $\dfrac{l^2}{16}$.

〔註〕 設半徑爲 $r$, 弧長爲 $p$,

周圍爲 $p+2r=l$ (一定).

面積爲 $\dfrac{1}{2}pr$. 故 $p=2r=\dfrac{l}{2}$ 時, 爲扇形之最大面積.

3
752984
1

✻F一五九八

中華民國二十七年一月初版
中華民國二十七年五月再版

周

(51124·9)

中學各科綱要叢書 平面幾何一册

每册實價國幣肆角

外埠酌加運費匯費

編纂者 陳朔南

發行人 王雲五 長沙南正路

印刷所 商務印書館 長沙南正路

發行所 商務印書館 各埠

版權所有 翻印必究

(本書校對者陳忠杰)