

Singularitätentheorie

Vorlesung 27

Entfaltungen

DEFINITION 27.1. Zu einer holomorphen Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, nennt man eine holomorphe Funktion $E: U \times V \rightarrow \mathbb{C}$, $V \subseteq \mathbb{C}^m$ offen, mit $E(-, 0) = f$ eine *Entfaltung* von f .

Statt Entfaltung spricht man auch von einer *Deformation* oder einer *Störung* von f . Den Raum V nennt man dabei auch den Entfaltungsraum oder Deformationsraum oder Parameterraum. Typischerweise bezeichnet man die Koordinaten von U mit $z = (z_1, \dots, z_n)$ und die Koordinaten von V (die Deformationsparameter) mit $w = (w_1, \dots, w_m)$. Die Definition bedeutet, dass man, wenn man $w = 0$ setzt, die ursprüngliche Funktion f zurückerhält, und dass man für fixiertes $w \neq 0$ eine variierte, deformierte, gestörte Version von f erhält. Die Funktion $E(-, w): U \rightarrow \mathbb{C}$, wo also der Deformationsparameter w fixiert ist, wird auch mit f_w bezeichnet. Man spricht bei einer Entfaltung auch von einer *Familie* von Funktionen f_w , $w \in V$. Die Grundidee ist, dass diese Deformationen helfen, das eigentliche f zu verstehen. Den Graphen der Ausgangsfunktion f erhält man aus dem Graphen zu E zurück, indem man mit $w = 0$ schneidet.

BEMERKUNG 27.2. Es seien f und g holomorphe Funktionen auf $U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen. Dann besitzt die Entfaltung

$$E: U \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, (P, t) \longmapsto (1 - t)f(P) + tg(P),$$

die Eigenschaft, dass $E(-, 0) = f$ und $E(-, 1) = g$ ist. Von daher gibt es Entfaltungen, die jede holomorphe Funktion in jede andere holomorphe Funktion deformieren. Insbesondere treten glatte Fasern und beliebige singuläre Fasern in einer Entfaltung auf. Von daher ist die Eigenschaft relevanter, wie die deformierten Funktionen bzw. Nullstellengebilde in einer beliebig kleinen Umgebung aussehen. Eine grundsätzliche Beobachtung dabei ist, dass in einer kleinen offenen Umgebung die Funktionen weniger singulär sind als in einer speziellen Faser. Zu einer regulären Funktion sind auch die deformierten Funktionen in einer Umgebung regulär.

BEMERKUNG 27.3. Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf $U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen. Dann besitzt die Entfaltung

$$E: U \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, (x, t) \longmapsto f(x) - t,$$

die Eigenschaft, dass die Nullstellenmenge zu $E(f, t) = f_t$ bei t fixiert einfach das Urbild von t unter f ist. Es ist ja unmittelbar

$$E(-, t)^{-1}(0) = f_t^{-1}(0) = \{x \in U \mid f_t(x) = 0\} = \{x \in U \mid f(x) = t\} = f^{-1}(t).$$

D.h. in dieser Entfaltung treten die benachbarten Fasern $f^{-1}(t)$ zu $t \in \mathbb{C}$ als deformierte Fasern auf. Mit Entfaltungen studiert man also insbesondere auch, wie sich die Nullstellenmenge zu f bezogen auf die benachbarten Fasern verhält.

DEFINITION 27.4. Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität im Nullpunkt $0 \in U$. Es seien

$$h_1, \dots, h_\mu \in \mathcal{O}_n$$

holomorphe Funktionen, deren Restklassen im Restklassenraum

$$\mathcal{O}_n/J_f = \mathcal{O}_n/(\partial_1 f, \dots, \partial_n f)$$

eine Basis bilden. Dann nennt man die holomorphe Abbildung

$$U' \times \mathbb{C}^\mu \longrightarrow \mathbb{C}, (z, w) \longmapsto f(z) + \sum_{j=1}^{\mu} w_j h_j(z),$$

(wobei $U' \subseteq U$ ein gemeinsamer Definitionsbereich der h_j sei) die *Standardentfaltung* von f .

Diese Standardentfaltung ist in einem präzisierbaren Sinn die universelle Entfaltung, d.h. jede Entfaltung lässt sich in einem gewissen Sinne durch die Standardentfaltung erfassen. Dies werden wir hier nicht durchführen. Wenn f ein Polynom ist, das eine isolierte Singularität definiert, so ist

$$\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]_{(X_1, \dots, X_n)}/J_f \cong \mathcal{O}_n/J_f$$

gemäß Satz 24.12, d.h. der Parameterraum zur Standardentfaltung lässt sich rein algebraisch beschreiben. Die 1 kann man stets als ein Basiselement nehmen. Wenn man allerdings nur an Entfaltungen mit $f_w(0) = 0$ interessiert ist, so kann man dies weglassen und spart eine Parameterdimension.

BEISPIEL 27.5. Zu einer Variablenpotenz $f(x) = x^n$

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, x \longmapsto x^n,$$

ist die Ableitung $f'(x) = nx^{n-1}$ und somit bilden die Funktionen $1, x, x^2, \dots, x^{n-2}$ eine Basis von $\mathcal{O}/(nx^{n-1})$. Die Standardentfaltung ist also

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{C}, (x, a_0, a_1, \dots, a_{n-2}) \longmapsto x^n + a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-2} x^{n-2}.$$

BEMERKUNG 27.6. Bei einer Entfaltung

$$E: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}$$

variieren die kritischen Punkte von

$$f_w = E(-, w)$$

(und die singulären Punkte der Hyperflächen $V(f_w)$) mit dem Parameter $w \in \mathbb{C}^m$. Eigenschaften der kritischen Punkte (wie ihre Anzahl, ihre Multiplizität, ihre Milnorzahl) definieren Bedingungen an die Parameter. Bei $n = 1$ sind die kritischen Punkte einfach die Nullstellen der Ableitung von f_w , die einfach oder mehrfach sein können. Bei

$$E(x, w) = x^3 + wx$$

liegt zum Parameterwert $w = 0$ ein kritischer Punkt im Nullpunkt der Ordnung 3 (Milnorzahl 2) vor, bei $w \neq 0$ gibt es zwei kritische Punkte, nämlich bei

$$x = \pm\sqrt{w/3},$$

die jeweils Ordnung 2 haben (Milnorzahl 1). Reell betrachtet (man skizziere den Gesamtgraphen von E) liegt in einem der Punkte ein lokales Minimum, im anderen ein lokales Maximum vor. Wenn sich der Parameter auf 0 zubewegt, so fallen die beiden singulären Punkte zusammen. Solche Phänomene, wie Singularitäten parameterabhängig zusammen- oder auseinanderfallen, werden unter dem Stichwort „Katastrophentheorie“ studiert.

BEISPIEL 27.7. Zur Funktion $X^2 - Y^3$ bilden $1, Y$ eine Basis von $\mathcal{O}/(2X, 3Y^2)$. Die Standardentfaltung ist also

$$\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}, (x, y, v, w) \longmapsto x^2 - y^3 + v + wy.$$

Zu einem fixierten Parameterpaar (v, w) besitzt die dadurch parametrisierte Funktion $f_{v,w}$ die partiellen Ableitungen $2x$ und $-3y^2 + w$. Bei $w = 0$ besitzt $f_{v,w}$ den einzigen singulären Punkt $(0, 0)$ (der aber nur bei $v = 0$ auf der Faser liegt), der ausgeartet ist (mit Milnorzahl 2), bei $w \neq 0$ besitzt $f_{v,w}$ die beiden singulären Punkte $(0, \sqrt{w/3})$ und $(0, -\sqrt{w/3})$, die beide nicht ausgeartet sind. Die Anzahl der nichtausgearteten kritischen Punkte stimmt also mit der Milnorzahl der Ausgangshyperfläche überein.

Algebraisch bestimmte Diffeomorphismen

Wir besprechen nun wichtige Kriterien, mit denen man f und $f + h$, wobei h bezogen auf f eine große Nullstellenordnung besitzt, als rechtsäquivalent nachweisen kann. Dazu arbeitet man mit der Entfaltung $f + th$, die ja f in $f + h$ deformiert, und dazu passenden Vektorfeldern.

LEMMA 27.8. *Es seien $f, h: U \rightarrow \mathbb{C}$, $0 \in U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, holomorphe Funktionen. Es sei*

$$H: \mathbb{C} \times U \longrightarrow \mathbb{C}$$

durch

$$H(t, z) := f(z) + th(z)$$

definiert. In den lokalen Ringen \mathcal{O}_P zu den Punkten $P = (s, 0) \in [0, 1] \times \mathbb{C}^n \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ gelte

$$h \in (z_1, \dots, z_n)(\partial_{z_1} H, \dots, \partial_{z_n} H).$$

Dann ist $f + h$ rechtsäquivalent zu f .

Beweis. Es ist

$$\partial_{z_j} H = \partial_{z_j} f + t \partial_{z_j} h$$

und somit auch

$$\partial_{z_j} f = \partial_{z_j} H - t \partial_{z_j} h.$$

Wir fixieren ein $s \in [0, 1]$ und arbeiten im Ring $R = \mathcal{O}_P$ der holomorphen Funktionen im Punkt

$$P = (s, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$$

(in $n + 1$ Variablen). Nach Voraussetzung ist

$$h \in (z_1, \dots, z_n) (\partial_{z_1} H, \dots, \partial_{z_n} H)$$

in diesem Ring. Dies bedeutet, dass es holomorphe Funktionen

$$\alpha_j \in (z_1, \dots, z_n)$$

(als Ideal in R , diese Funktionen hängen auch von t ab) mit

$$-h = \sum_j \alpha_j \partial_{z_j} H$$

gibt, die in einer offenen Umgebung V von P definiert sind. Wir können

$$V =]s - \epsilon, s + \epsilon[\times W$$

mit $W \subseteq \mathbb{C}^n$ offen schreiben. Wir betrachten das holomorphe zeitabhängige (wenn man t als Zeitparameter auffasst) Vektorfeld

$$F = \partial_t + \sum_{j=1}^n \alpha_j \partial_{z_j}$$

auf V . Nach Konstruktion gilt (das Vektorfeld als Derivation aufgefasst) $F(H) = \partial_t H + \sum_j \alpha_j \partial_{z_j} H = h - h = 0$. Da die α_j zu (z_1, \dots, z_n) gehören, ist im Raumpunkt 0 die Raumkomponente des Vektorfeldes gleich 0 . Für die nach Satz 26.11 zugehörige holomorphe lokal einparametrische Gruppe

$$\Psi:]s - \epsilon, s + \epsilon[\times W' \longrightarrow W$$

gilt insbesondere $\Psi_t(0) = 0$ für alle t . Die zugehörigen biholomorphen Abbildungen respektieren also den Nullpunkt. Die Eigenschaft $F(H) = 0$ impliziert, dass die Funktion H längs jeder Lösungskurve $\Psi(-, z)$ konstant ist. Daher ist $H(t, \Psi_t(z))$ unabhängig von $t \in]s - \epsilon, s + \epsilon[$.

Die offenen Intervalle $]s - \epsilon, s + \epsilon[$ zu den verschiedenen s überdecken das Einheitsintervall, daher gibt es wegen dessen Kompaktheit endlich viele Intervalle davon, die es überdecken. Daher gibt es Punkte

$$0 < t_2 < t_3 < \dots < t_{m-1} < 1,$$

wobei je zwei aufeinanderfolgende Punkte in einem der Intervalle liegen, und biholomorphe Abbildungen Ψ_j , die die Situation im Zeitpunkt t_j in die Situation zum Zeitpunkt t_{j+1} überführen. Wegen

$$H(0, z) = f(z)$$

und der Invarianz gilt auch

$$H(t_1, \Psi_{t_1}(z)) = f(z)$$

und dies folgt durch Induktion für alle weiteren Zeitpunkte t_j .

Die Hintereinanderschaltung dieser biholomorphen Abbildungen transformiert die Funktion f insgesamt in die Funktion $H(1, -) = f + h$. \square

LEMMA 27.9. *Es seien $f, h: U \rightarrow \mathbb{C}$, $0 \in U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, holomorphe Funktionen. Im lokalen Ring \mathcal{O}_n gelte $f \in \mathfrak{m}^3$ und $h \in J_f^2$. Dann ist $f + h$ rechtsäquivalent zu f .*

Beweis. Es seien z_1, \dots, z_n die Koordinaten in \mathbb{C}^n und somit ist insbesondere $\mathfrak{m} = (z_1, \dots, z_n)$. Wir setzen

$$H(t, z) := f(z) + th(z)$$

und arbeiten mit Lemma 27.8. Es sei (R, \mathfrak{n}) ein dafür relevanter lokaler Ring, dabei ist $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{n}$. Wegen $h \in J_f^2$ ist

$$h = \sum_{i,j} \beta_{ij} (\partial_{z_i} f) \cdot (\partial_{z_j} f)$$

mit holomorphen Funktionen β_{ij} und wegen

$$\partial_{z_k} (\partial_{z_j} f) \in \mathfrak{m},$$

(was auf $f \in \mathfrak{m}^3$ beruht) folgt mit der Produktregel

$$\partial_{z_i} h \in \mathfrak{m}J_f \subseteq \mathfrak{n}J_f.$$

Es ist

$$\partial_{z_j} H = \partial_{z_j} f + t\partial_{z_j} h$$

bzw.

$$\partial_{z_j} f = \partial_{z_j} H - t\partial_{z_j} h.$$

Daher gilt mit $J_H = (\partial_{z_1} H, \dots, \partial_{z_n} H)$ die Beziehung

$$\mathfrak{m}J_f \subseteq \mathfrak{m}J_H + \mathfrak{m}(\partial_{z_1} h, \dots, \partial_{z_n} h) \subseteq \mathfrak{m}J_H + \mathfrak{m}\mathfrak{n}J_f.$$

Mit dem Lemma von Nakayama folgt $\mathfrak{m}J_f \subseteq \mathfrak{m}J_H$. Aus $h \in J_f^2 \subseteq \mathfrak{m}J_f$ folgt somit $h \in \mathfrak{m}J_H$. \square

BEISPIEL 27.10. Betrachten wir

$$f = x^3 + y^4.$$

Das Jacobiideal ist (x^2, y^3) , das Quadrat davon ist (x^4, x^2y^3, y^6) . Nach Lemma 27.9 ist beispielsweise $x^3 + y^4 + 5x^4 + x^3y^3 + 7xy^9$ rechtsäquivalent zu f . In

der Entfaltung $x^3 + y^4 + tx^4$ kommen also nur zu f rechtsäquivalente Deformationen vor. Wenn man hingegen die Entfaltung $sx^3 + y^4 + x^4$ betrachtet, so ist für $s \neq 0$ die Deformation rechtsäquivalent zu f , für $s = 0$ geht es hingegen um $y^4 + x^4$, das, weil es reduzibel ist, nicht rechtsäquivalent zu f ist.

Der Beweis zu Lemma 29.4 zeigt, dass die Voraussetzung $f \in \mathfrak{m}^2$ für Lemma 27.9 nicht ausreichen würde.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7