Prof. Dr. H. Brenner | Osnabrück WS 2014/2015

Analysis III

Vorlesung 67

Das Verhalten von Maßen bei linearen Abbildungen

Lemma 67.1. *Es sei V ein reeller Vektorraum und*

$$L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow V$$

eine bijektive lineare Abbildung. Dann gelten für das Bildmaß $L_*\lambda^n$ des Borel-Lebesgue-Maßes λ^n unter L folgende Eigenschaften.

(1) *$L_*\lambda^n$ ist translationsinvariant.*
(2) *Bei $V = \mathbb{R}^n$ ist $L_*\lambda^n = \frac{1}{\lambda^n(P_L)} \cdot \lambda^n$, wobei P_L das von den Bildvektoren $L(e_1), \ldots, L(e_n)$ erzeugte Parallelotop bezeichnet.*

Beweis. (1). Sei τ_v die Translation um den Vektor $v \in V$. Es sei $w = L^{-1}(v)$. Daher ist

$$\tau_v \circ L = L \circ \tau_w.$$

Somit ist für eine beliebige messbare Menge $B \subseteq V$ aufgrund der Translationsinvarianz von λ^n

$$\begin{aligned} (L_*\lambda^n)(B+v) &= \lambda^n\left(L^{-1}(B+v)\right) \\ &= \lambda^n\left(\tau_w^{-1}\left(L^{-1}(B+v)\right)\right) \\ &= \lambda^n\left(L^{-1}\left(\tau_v^{-1}(B+v)\right)\right) \\ &= \lambda^n(L^{-1}(B)) \\ &= (L_*\lambda^n)(B). \end{aligned}$$

(2) folgt aus (1) mit Lemma 66.13. □

Satz 67.2. *Es sei*

$$L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine lineare Abbildung. Dann gilt für jede messbare Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ die Beziehung

$$\lambda^n(L(S)) = |\det L| \cdot \lambda^n(S).$$

Beweis. Wenn L nicht bijektiv ist, so folgt die Aussage aus Lemma 66.11 und Satz AnhangB.. Wir können also annehmen, dass L bijektiv ist. Dann kann man die Aussage mit dem Bildmaß als

$$L_*\lambda^n = \frac{1}{|\det L|}\lambda^n$$

formulieren. Aufgrund von Satz Anhang B.3 in Verbindung mit Lemma Anhang B.5 gibt es Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_k$ und eine Diagonalmatrix D

mit $L = E_1 \circ \cdots \circ E_\ell \circ D \circ E_{\ell+1} \circ \cdots \circ E_k$. Aufgrund des Determinantenmultiplikationssatzes und wegen Lemma 63.9 und Aufgabe 67.7 genügt es, die Aussage für Diagonalmatrizen und Elementarmatrizen zu beweisen.

Wegen Lemma 67.1 ist also für diese Matrizen zu zeigen, dass das Volumen des von den Bildvektoren der Standardvektoren erzeugte Parallelotop gleich dem Betrag der Determinante der Matrix ist. Für eine Diagonalmatrix ist das erzeugte Parallelotop der Quader, dessen Seitenlängen die Beträge der Diagonaleinträge sind, so dass das Volumen das Produkt davon ist. Nach Lemma Anhang B.9 ist die Determinante das Produkt der Diagonaleinträge, so dass im Betrag Gleichheit gilt. Damit gilt die Aussage auch für eine elementare Skalierungsmatrix, die ja eine Diagonalmatrix ist.

Da die Determinante der übrigen Elementarmatrizen 1 oder -1 ist, müssen wir zeigen, dass das Volumen des von den Spaltenvektoren einer solchen Elementarmatrix erzeugten Parallelotops gleich 1 ist. Dies ist klar für den Typ (1), also für die elementare Vertauschungsmatrix, da es sich um den Einheitswürfel handelt, wobei lediglich die Reihenfolge der erzeugenden Vektoren geändert wird. Es bleibt also eine elementare Scherungsmatrix $A_{ij}(a)$ mit $a \neq 0$ und $i \neq j$ zu betrachten. Wegen (Wir notieren nur die zweidimensionale Situation, da sich alles in zwei Zeilen und zwei Spalten abspielt)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und dem schon bewiesenen kann man $a = 1$ annehmen. Ferner kann man durch umnummerieren annehmen, das $i = 1$ und $j = 2$ ist. Es geht dann um das Volumen des von

$$e_1, e_1 + e_2, e_3, \ldots, e_n$$

erzeugten Parallelotops, also um

$$\begin{aligned} P &= \{t_1e_1 + t_2(e_1 + e_2) + t_3e_3 + \cdots + t_ne_n |\, t_i \in [0,1]\} \\ &= \{(t_1 + t_2)e_1 + t_2e_2 + t_3e_3 + \cdots + t_ne_n |\, t_i \in [0,1]\} \\ &= \{se_1 + t_2e_2 + t_3e_3 + \cdots + t_ne_n |\, t_i \in [0,1] \text{ für } i \geq 2,\, s \in [0,2],\, t_2 \leq s \leq 1 + t_2\}\,. \end{aligned}$$

Wir betrachten

$$H_1 = \{se_1 + t_2e_2 + t_3e_3 + \cdots + t_ne_n |\, t_i \in [0,1] \text{ für } i \geq 2,\, s \in [0,1],\, t_2 \geq s\}$$

und

$$H_2 = \{se_1 + t_2e_2 + t_3e_3 + \cdots + t_ne_n |\, t_i \in [0,1] \text{ für } i \geq 2,\, s \in [1,2],\, s \geq 1 + t_2\}\,.$$

Dann ist

$$[0,2] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1] = H_1 \cup P \cup H_2,$$

wobei die Durchschnitte dieser drei Mengen jeweils in einer Hyperebene enthalten sind und daher nach Lemma 66.11 das Maß 0 besitzen. Also ist einerseits

$$\lambda^n(P) = 2 - \lambda^n(H_1) - \lambda^n(H_2).$$

Andererseits geht H_2 durch verschieben um e_1 aus

$$G_2 = \{se_1 + t_2e_2 + t_3e_3 + \cdots + t_ne_n | \, t_i \in [0,1] \text{ für } i \geq 2, \, s \in [0,1], \, s \geq t_2\}$$

hervor und besitzt damit wegen der Translationsinvarianz dasselbe Volumen wie G_2. Da $H_1 \cup G_2$ der Einheitswürfel ist, wobei der Durchschnitt wieder in einer Hyperebene liegt, ist

$$\lambda^n(H_1) + \lambda^n(H_2) = \lambda^n(H_1) + \lambda^n(G_2) = 1$$

und somit ist $\lambda^n(P) = 1$. □

KOROLLAR 67.3. *Bei einer Streckung*

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \, v \longmapsto av,$$

um den Streckungsfaktor $a \in \mathbb{R}$ gilt für jede messbare Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ die Formel

$$\lambda^n(\varphi(T)) = |a|^n \cdot \lambda^n(T).$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 67.2. □

KOROLLAR 67.4. *Eine lineare Isometrie*

$$L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ist volumentreu.

Beweis. Dies folgt wegen Lemma 67.1 und Satz 67.2 aus Satz Anhang B.22. □

KOROLLAR 67.5. *Eine Drehung*

$$D(\alpha)\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

(die durch eine Drehmatrix $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ *gegeben ist) ist flächentreu.*

Beweis. Dies folgt wegen Satz 67.2 aus Satz 15.10(6). □

BEISPIEL 67.6. Ein *achsenparalleles Ellipsoid* wird im $\mathbb{R}^3$ durch

$$E = \left\{(x,y,z) | \, ax^2 + by^2 + cz^2 \leq r^2\right\}$$

mit $a, b, c \neq 0$ beschrieben. Es ist das Bild der Einheitskugel

$$K_3 = \left\{(u,v,w) | \, u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\right\}$$

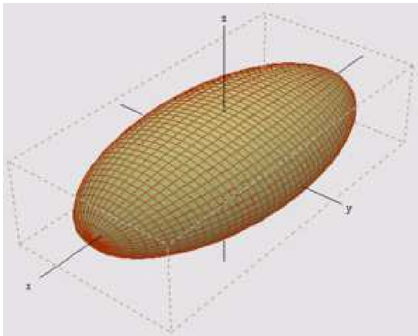
unter der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{a}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{\sqrt{b}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{\sqrt{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

also mit $x = \frac{r}{\sqrt{a}}u$, $y = \frac{r}{\sqrt{b}}v$ und $z = \frac{r}{\sqrt{c}}w$. Nach Satz 67.2 ist daher das Volumen dieses Ellipsoids gleich

$$\operatorname{vol}(E) = \frac{r^3}{\sqrt{abc}} \cdot \operatorname{vol}(K_3).$$

Das Volumen der Einheitskugel ist $\frac{4}{3}\pi$, siehe Beispiel 72.4.



Volumina in euklidischen Räumen

Auf jedem reellen n-dimensionalen Vektorraum V kann man ein sinnvolles Maß definieren, indem man eine Isomorphie

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow V$$

nimmt und das Bildmaß zum Borel-Lebesgue-Maß nimmt. Dieses Maß ist allerdings abhängig von der gewählten Isomorphie, bei zwei verschiedenen Isomorphien unterscheiden sich die so gewonnenen Maße um einen skalaren Faktor. Bei euklidischen Räumen kann man aber mit Hilfe von Orthonormalbasen ein kanonisches Borel-Lebesgue-Maß definieren.

Satz 67.7. *Es sei* $(V, \langle -, - \rangle)$ *ein euklidischer Vektorraum. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes translationsinvariantes Maß* λ_V *auf den Borelmengen von* V*, das jedem von einer Orthonormalbasis aufgespannten Parallelotop den Wert* 1 *zuweist.*

Beweis. Es sei $u_1, \ldots, u_n$ eine Orthonormalbasis von V und es sei

$$L_u \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow V,\ e_i \longmapsto u_i,$$

die dadurch definierte lineare Isometrie. Dann ist das Bildmaß $L_{u*}\lambda^n$ nach Lemma 67.1 translationsinvariant und besitzt auf dem von den $u_1, \ldots, u_n$ erzeugten Parallelotop den Wert 1. Es bleibt also zu zeigen, dass dieses Maß auch jedem anderen orthonormalen Parallelotop den Wert 1 zuweist. Sei also

$v_1, \ldots, v_n$ eine weitere Orthonormalbasis mit dem zugehörigen Parallelotop P_v und der zugehörigen Isometrie

$$L_v \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow V,\, e_i \longmapsto v_i .$$

Dann ist

$$L_u^{-1}(P_v) \,=\, (L_v^{-1} \circ L_u)^{-1}(L_v^{-1}(P_v)) \,=\, (L_v^{-1} \circ L_u)^{-1}(W),$$

wobei W den Einheitswürfel im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Da $L_v^{-1} \circ L_u$ eine Isometrie des $\mathbb{R}^n$ ist, folgt die Aussage aus Korollar 67.4. □

Das in dieser Aussage für euklidische Vektorräume definierte Maß heißt ebenfalls *Borel-Lebesgue-Maß*.

SATZ 67.8. *Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und sei P das davon erzeugte Parallelotop. Dann gilt für das Borel-Lebesgue-Maß λ_V auf V*

$$\lambda_V(P) \,=\, \left(\det\left(\langle v_i, v_j \rangle\right)_{1 \leq i,j \leq n}\right)^{1/2} .$$

Beweis. Die Positivität der Determinante der Gramschen Matrix folgt aus Korollar 48.11. Es sei $u_1, \ldots, u_n$ eine Orthonormalbasis von V und es sei

$$v_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} u_k \,.$$

Die Spalten der Matrix $A = (a_{kj})_{kj}$ sind also die Koeffizienten von v_j bezüglich der gegebenen Orthonormalbasis. Nach Satz 67.2 und aufgrund der Definition des Maßes λ_V in Satz 67.7 ist somit

$$\lambda_V(P) \,=\, |\det A| \,.$$

Wegen

$$\langle v_i, v_j \rangle \,=\, \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki} u_k, \sum_{k=1}^{n} a_{kj} u_k \right\rangle \,=\, \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}$$

ist

$$A^{tr} A \,=\, (\langle v_i, v_j \rangle)_{ij} .$$

Nach Satz Anhang B.15 ist $\det A \,=\, \det A^{tr}$, so dass die Aussage sich aus Satz Anhang B.13 ergibt. □

Die vorstehende Aussage erlaubt es, auch bei $k < n$ das k-dimensionale Maß von k-dimensionalen Parallelotops im $\mathbb{R}^n$ auszurechnen (ihr n-dimensionales Maß ist 0, da sie in einem echten Untervektorraum liegen). Die einfachste Situation liegt bei $k = 1$ vor, dann handelt es sich um eine einfache Längenberechnung mit Hilfe des Skalarproduktes. Ein typischeres Beispiel ist die Flächenberechnung eines Parallelogramms im $\mathbb{R}^3$.

Beispiel 67.9. Wir betrachten das von den Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ aufgespannte Parallelogramm im $\mathbb{R}^3$. Nach Satz 67.8 müssen wir die Skalarprodukte dieser Vektoren berechnen. Es ist

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 13, \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2, \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 21 .$$

Dies führt zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 2 & 21 \end{pmatrix}$$

mit der Determinante 269. Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist also $\sqrt{269}$.

¡¡ — Kurs:Analysis (Osnabrück 2013-2015)/Teil III — ¿¿

PDF-Version dieser Vorlesung

Abbildungsverzeichnis