Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Diskrete Mathematik

Arbeitsblatt 17

Übungsaufgaben

Aufgabe 17.1. Es sei G ein Graph. Wir betrachten die Zuordnung, die einem Weg $v_1, \ldots, v_m$ die Kantenfolge $\{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{m-1}, v_m\}$ zuordnet.

(1) Zeige, dass die Zuordnung nicht injektiv sein muss.
(2) Man gebe ein Beispiel für eine Kantenfolge e_1, e_2, e_3 in einem Graphen mit $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$ und $e_2 \cap e_3 \neq \emptyset$, die nicht als ein Weg realisiert werden kann.

Aufgabe 17.2. Man gebe ein Beispiel für einen Weg in einem Graphen derart, dass in dem Weg ein Blatt vorkommt, aber weder als Anfangs- noch als Endpunkt.

Aufgabe 17.3. Bestimme die Anzahl der Zusammenhangskomponenten der Berliner U-Bahn (Stand 2020).

Aufgabe 17.4. Bestimme die Anzahl der Zusammenhangskomponenten des Erreichbarkeitsgraphen für den Läufer im Schachspiel.

Aufgabe 17.5. Zeige, dass ein Graph die disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten ist.

Aufgabe 17.6. Wir betrachten die Menge der Wörter der deutschen Sprache als Knotenmenge eines Graphen, wobei wir zwei Wörter durch eine Kante verbinden, wenn sie eine Silbe gemeinsam haben. Bestimme für die folgenden Wörter jeweils einen möglichst kurzen verbindenden Weg.

Hintereinanderschaltung, Verzweiflungstat, Wasserfall, Bruchschreibweise, Behördenwillkür, Eistanz.

Sei M eine Menge. Eine Abbildung $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik* (oder *Distanzfunktion*), wenn für alle $x, y, z \in M$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $d(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$ ist (Definitheit),
(2) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie), und
(3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Dreiecksungleichung).

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (M, d), wobei M eine Menge und $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ eine Metrik ist.

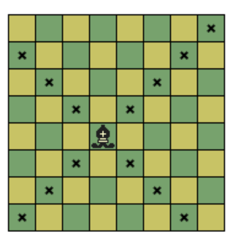
Aufgabe 17.7. Zeige, dass ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ mit dem Abstand zu einem metrischen Raum wird.

Aufgabe 17.8. Bestimme für einen linearen Graphen mit n Knotenpunkten den Radius und den Durchmesser.

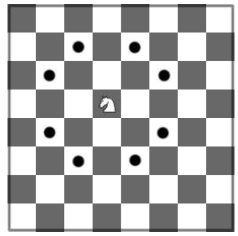
Aufgabe 17.9. Bestimme für einen Rundgang mit n Knoten den Radius und den Durchmesser.

Aufgabe 17.10. Wir betrachten die Felder eines Schachbrettes als Knotenpunktmenge V und verbinden zwei Felder, wenn sie durch einen direkten Turmzug miteinander verbunden sind. Bestimme den Grad der Punkte, den Abstand zwischen zwei Punkten und den Durchmesser dieses Graphen.

Aufgabe 17.11. Wir betrachten die schwarzen Felder eines Schachbrettes als Knotenpunktmenge V und verbinden zwei Felder, wenn sie durch einen direkten Läuferzug miteinander verbunden sind. Bestimme den Grad der Punkte, den Abstand zwischen zwei Punkten, den Radius und den Durchmesser dieses Graphen.



Aufgabe 17.12. Wir betrachten die Felder eines Schachbrettes als Knotenpunktmenge V und verbinden zwei Felder, wenn sie durch einen direkten Pferdsprung miteinander verbunden sind. Bestimme den Grad der Punkte, den Abstand zwischen zwei Punkten, den Radius und den Durchmesser dieses Graphen.



AUFGABE 17.13. Man gebe ein Beispiel für einen Graphen (V, E), der zumindest zwei Blätter besitzt, und bei dem der Durchmesser nicht in einem Blatt angenommen wird.

AUFGABE 17.14. Bestimme die Taille und den Umfang eines vollständigen Graphen mit $n \geq 3$ Knoten.

AUFGABE 17.15. Bestimme den Umfang des Erreichbarkeitsgraphen zur Schachfigur Läufer auf einem 4×4-Brett.

AUFGABE 17.16. Bestimme die Taille und den Umfang der Prager U-Bahn.

AUFGABE 17.17. Es seien $u, v \in G$ Knoten in einem Baum G mit dem Abstand 35419. Zeige, dass es in G einen Weg von u nach v der Länge 43425 gibt, aber keinen Weg der Länge 51796.

Aufgabe 17.18. Es sei (V, E) ein Baum mit zumindest zwei Knotenpunkten. Zeige, dass der Durchmesser in einem Blatt des Graphen angenommen wird.

Aufgabe 17.19. Zeige, dass in einem Baum die Anzahl der Blätter zumindest so groß ist wie die Summe

$$\sum_{d(v) \geq 3} (d(v) - 2) \, .$$

Aufgabe 17.20. Man gebe ein Beispiel für einen Graphen (V, E), der kein Baum ist, und dessen Knotenanzahl um 1 größer als seine Kantenanzahl ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 17.21. (3 (1+1+1) Punkte)

(1) Zeige, dass der Durchmesser eines Graphen mindestens so groß ist wie sein Radius.
(2) Zeige, dass der Durchmesser eines Graphen höchstens doppelt so groß ist wie sein Radius.
(3) Man gebe für jede natürliche Zahl n einen Graphen an, bei dem sowohl der Durchmesser als auch der Radius gleich n ist.

Aufgabe 17.22. Bestimme zum Netzgraphen G der Münchner U-Bahn die folgenden graphentheoretischen Invarianten.

(1) Die Blätter von G.
(2) Den Abstand vom Hauptbahnhof zum Innsbrucker Ring.
(3) Die Exzentrizität des Odeonsplatzes.
(4) Den Durchmesser von G. Zwischen welchen Stationen wird er angenommen?
(5) Den Radius von G. In welcher Station ist dies die Exzentrizität?
(6) Den Grad des Sendlinger Tores.
(7) Die Taille von G.
(8) Den Umfang von G.

Aufgabe 17.23. (2 Punkte)

Bestimme die Taille der Erreichbarkeitsgraphen zu den Schachfiguren König, Dame, Läufer, Turm, Springer.

Aufgabe 17.24. (4 Punkte)

Bestimme den Umfang des Erreichbarkeitsgraphen zur Schachfigur Springer auf einem 4×4-Brett.

Aufgabe 17.25. (3 Punkte)

Es sei $G = (V, E)$ ein Baum und seien $u, v \in V$ Punkte. Es sei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf V, bei der u und v zueinander äquivalent seien und ansonsten nur jeder Punkt zu sich selbst. Zeige, dass $G/\sim$ genau dann ein Baum ist, wenn $d(u, v) \leq 2$ ist.

Abbildungsverzeichnis