微積溯源

微積溯源卷六

英國華里司輯

英國　傅蘭雅　口譯
金匱　華蘅芳　筆述

求虛函數微分式之積分

第一百二十三款　凡微分式內之虛函數若能變之爲實函數者則可依前卷之各法求其積分

如有微分式 $\frac{一\text{丄}\sqrt[三]{天}}{(一\text{丄}\sqrt{天}\text{丅}\sqrt[三]{天^{二}})}彳天$ 觀此式易知若令 $天=人^{六}$ 則所有根號內

之數。易開其方。因 $彳夭 = 六人^{五}彳人$。故可變所設之微分式為 $\frac{一丄人^{二}}{六人^{五}彳人(一丄人^{三}丅人^{四})}$。此

式若以分母約分子。可得 $丅六(人^{七}丅人^{六}丅人^{五}丄人^{四}丅人^{三}丄一)彳人丅\frac{一丄人^{二}}{六彳人}$。其積分為 $丅六\left[\frac{八}{人^{八}}丅\frac{七}{人^{七}}丅\frac{六}{人^{六}}丄\frac{五}{人^{五}}丅\frac{三}{人^{三}}丄人丅正切^{丅一}人\right]丄常數$。再將人

之同數$\frac{\text{六}}{\text{一}}$天。代還之。即能以有天之各項明其積分。

第一百二十四款

茲專論微分式內之有虛函數。其形如$\sqrt{\text{甲丄乙天丄丙天}^{\text{二}}}$者。此種虛函數不外乎下兩式。一為 $\text{吧伏}\sqrt{\text{甲丄乙天丄丙天}^{\text{二}}}$。一為 $\frac{\sqrt{\text{甲丄乙天丄丙天}^{\text{二}}}}{\text{吧伏}}$。其吧為天之任何實函數

惟此兩式亦可以一總式包括之如將其第一式依其根之次數自乘而以未乘之虛函數爲其分母則可變之爲

$$\frac{\sqrt{甲+乙天+丙天^{二}}}{吧(甲+乙天+丙天^{二})伕}$$

而與第二式爲同類

其簡式

$$\frac{\sqrt{甲+乙天+丙天^{二}}}{伕}$$

之形有兩種一其分母內之丙爲正二其分母內之丙爲負

第一百二十五款　玆先論其第一種丙爲正者

設有微分式 $\frac{\text{彳天}}{\sqrt{\text{甲}+\text{乙天}+\text{丙天}^{2}}}$。欲求其積分。可令 $\sqrt{\text{甲}+\text{乙天}+\text{丙天}^{2}}=\text{巳地}+\frac{\text{午}}{\text{地}}$ ㈠。其巳午為未定之常數。乃將其左右兩邊之數各自乘。而變為無根號之式。如 $\text{甲}+\text{乙天}+\text{丙天}^{2}=\text{巳}^{2}\text{地}^{2}+\text{二巳午}+\frac{\text{午}^{2}}{\text{地}^{2}}$。若欲令此式之左邊變為正乘方之式

必將其第一項移至右邊。而兩邊俱以丙乘之。又各以

$\frac{四}{乙^{二}}$ 加之。則變為

$$\frac{四}{乙^{二}} \perp 乙丙天 \perp 丙^{二}天^{二} = 丙\left[巳^{二}地^{二} \perp 二巳午 \top 甲 \perp \frac{四丙}{乙^{二}} \perp \frac{地^{三}}{午^{三}}\right]。$$

再令其右邊之

$$二巳午 \top 甲 \perp \frac{四丙}{乙^{二}} = \top 二巳午。$$

即

$$四巳午 = \frac{四丙}{四甲丙 \top 乙^{二}}。$$

如此則恆可變為正乘方式。

$$\frac{四}{乙^{二}} \perp 乙丙天 \perp 丙^{二}天^{二} = 丙\left[巳^{二}地^{二} \top 二巳午 \perp \frac{地^{三}}{午^{三}}\right]。$$

乃將其左右兩邊各開

平方得

$$\frac{三}{乙}\perp丙天=\sqrt{丙}\left[巳地\top\frac{地}{午}\right]$$

㊁。將此式求微分得

$$\sqrt{丙}彳天=\frac{地}{彳地}\left[巳地\perp\frac{地}{午}\right]=\frac{地}{彳地}\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}。$$

從此式又可得

$$\frac{\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}}{彳天}=\frac{\sqrt{丙}}{一}\times\frac{地}{彳地}$$

㊂。乃將丙約㊁式。以與㊀式相加。得

$$\frac{二\sqrt{丙}}{乙}\perp天\sqrt{丙}\perp\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}=二巳地。$$

配其對

數。即得

訥[二丙/乙 天丙 丄 √(甲 丄 乙天 丄 丙天三)] ═ 訥㊞地 丄 訥㊁巳

㊃。惟因

訥㊞地 ═ 禾(地/他) 丄 呐。

其呐為任何常數。故可令之為

呐 ═ 呐 丄 訥㊁巳。

其呐又為他常數。所以

訥㊞地 丄 訥㊁巳 ═ 禾(地/他) 丄 呐。

將此式與㊂㊃兩式

相比得

$$\text{禾}\frac{\sqrt{\text{甲}\perp\text{乙天}\perp\text{丙天}^{\text{二}}}}{\text{彳天}}=\frac{\sqrt{\text{丙}}}{\text{二}}\text{訥}\left[\frac{\text{二}\sqrt{\text{丙}}}{\text{乙}}\perp\text{天}\sqrt{\text{丙}}\perp\sqrt{\text{甲}\perp\text{乙天}\perp\text{丙天}^{\text{二}}}\right]\text{呐}$$

$$=\frac{\sqrt{\text{丙}}}{\text{二}}\text{訥}\left[\text{乙}\perp\text{二丙天}\perp\text{二}\sqrt{\text{丙}}\sqrt{\text{甲}\perp\text{乙天}\perp\text{丙天}^{\text{二}}}\right]\text{呐}$$

此式中各項對數之函數所不同者。惟在常數訥$(\text{二}\sqrt{\text{丙}})$而已。

第一百二十六款　兹論其第二種丙爲負者。

如有微分式 $\frac{\text{彳天}}{\sqrt{\text{甲}\bot\text{乙天}\top\text{丙天}^{\text{二}}}}$。欲求其積分。則可令其式中之分母 $\sqrt{\text{甲}\bot\text{乙天}\top\text{丙天}^{\text{二}}}=\text{巳正弦斗}$ (一)。其巳爲未定之常數。斗爲變角。則

$$\text{甲}\bot\text{乙天}\top\text{丙天}^{\text{二}}=\text{巳}^{\text{二}}\text{正弦}^{\text{二}}\text{斗}=\text{巳}^{\text{二}}\top\text{巳}^{\text{二}}\text{餘弦}^{\text{二}}\text{斗}$$

依前款之法變之。得

$$\frac{\text{乙}^{\text{二}}}{\text{四}}\top\text{乙丙天}\bot\text{丙}^{\text{二}}\text{天}^{\text{二}}=\text{丙巳}^{\text{二}}\text{餘弦}^{\text{二}}\text{斗}\bot\frac{\text{乙}^{\text{二}}}{\text{四}}\bot\text{甲丙}\top\text{巳丙}$$

此式之左邊。巳爲正乘方。若欲變其右

邊亦爲正乘方。可令

丙巳² ＝ 四乙²甲丙。

卽

巳丙 ＝ √(二乙²四甲丙)

㊁由此得

四乙²乙丙天丙天³ ＝ 丙巳²餘弦斗²。

兩邊

一

各開平方得

三乙丙天 ＝ √丙巳餘弦斗

㊂求其微分。而以丙約之。得

伏 ＝ √丙/斗 巳正弦斗 ＝ √丙/斗 √(甲乙天丙天³)。

所

以 $\frac{\sqrt{甲丄乙天丅丙天^{二}}}{伕}=\frac{\sqrt{丙}}{一}彳斗$。求其積分。得

$$禾\frac{\sqrt{甲丄乙天丅丙天^{二}}}{伕}=\frac{\sqrt{丙}}{一}斗丄常數$$。

如欲求其斗。則從㊂㊁兩式得

$$餘弦斗=\frac{二\sqrt{丙}巳}{乙丅二丙天}=\frac{\sqrt{乙^{二}丄四甲丙}}{乙丅二丙天}$$。

所以其積分之式。或為

$$禾\frac{\sqrt{甲丄乙天丅丙天^{二}}}{伕}=\frac{\sqrt{丙}}{一}餘弦^{丅一}\left[\frac{\sqrt{乙^{二}丄四甲丙}}{乙丅二丙天}\right]呐$$。

或為

$$禾\frac{\sqrt{甲丄乙天丅丙天^{二}}}{伕}=\frac{\sqrt{丙}}{一}正弦^{丅一}\left[\frac{\sqrt{乙^{二}丄四甲丙}}{二丙天丅乙}\right]呐$$。

此兩式

因其餘弦之角亥與正弦之角孩其較恆為正角所以其較角為常數而兩角之積分不出乎此兩式之外

第一百二十七款

如有微分式 $\frac{天^{卯}彳天}{\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}}$ 欲求其積分

因其卯為任何整數故可令

$$呋=\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}$$

而

$$地^{二}=天^{寅}\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}=天^{寅}呋$$

則

$$地^{二}=甲天^{二寅}\perp乙天^{二寅\perp一}\perp丙天^{二寅\perp二}$$

將此式

求其微分得

$$二地彳地＝\left[二寅甲天^{二寅丅一}\ 丄\ (二寅丄一)乙天^{二寅}\ 丄\ (二寅丄二)丙天^{二寅丄一}\right]彳天$$

以

$$地＝天^{寅}呋$$

約之得

$$二彳地＝二寅甲\frac{呋}{天^{寅丅一}彳天}\ 丄\ (二寅丄一)乙\frac{呋}{天^{寅}彳天}\ 丄\ (二寅丄二)丙\frac{呋}{天^{寅丄一}彳天}$$

乃令

$$寅丄一＝卯$$

則

$$寅＝卯丅一$$

$$寅丅一＝卯丅二$$

將此式求其積分而以地與呹所代之數仍還之則可

$$二寅=二卯丅二$$

$$二寅丄一=二卯丅一$$

$$二寅丄二=二卯$$

由此得

$$二彵=(二卯丅二)甲\frac{呹}{天^{卯丅二}伕}丄(二卯丅一)乙\frac{呹}{天^{卯丅一}伕}丄二卯丙\frac{呹}{天^{卯}伕}$$

依法序其各項得

$$\frac{呹}{天^{卯}伕}=\frac{卯丙}{彵}丅\frac{二卯}{二卯丅一}\times\frac{丙}{乙}\times\frac{呹}{天^{卯丅一}伕}丅\frac{卯}{卯丅一}\times\frac{丙}{甲}\times\frac{呹}{天^{卯丅二}伕}$$

所以可

得

$$禾\frac{\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}}{天^{卯}彳天}\;═$$

$$\frac{卯丙}{一}天^{卯丅二}\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}\;丅\;\frac{二卯}{二卯丅一}\times\frac{丙}{乙}禾\frac{\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}}{天^{卯丅一}彳天}\;丅\;\frac{卯}{卯丅一}\times\frac{丙}{甲}禾\frac{\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}}{天^{卯丅二}彳天}.$$

則此式之積分今以實函數並同類之他

積分式。其天之方數降等者明之。

若欲將此式如第一百二十五六兩款之禾$\frac{\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{三}}}{戊}$禾$\frac{\sqrt{甲\perp乙天\top丙天^{三}}}{戊}$兩

式之法。求其同數。則因前兩款之式。其卯等于〇。而此

式不能如此求之若令卯$=$〇。則卯入于各分數之分母內

而其項俱變爲無窮。惟可令卯$=$一。則式之右邊所有兩

箇降等之積分式。其末一箇可不見。因其倍數爲〇故

也。

所以可令公式中卯＝一。而從卯＝〇得

禾$\frac{\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}}{天彳天}$ 二

$\frac{丙}{二}\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}$ 丅 $\frac{二丙}{乙}$ 禾$\frac{\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}}{彳天}$

之同數。又可令公式中卯＝二卯＝三。而從卯＝一卯＝二之式。得其同數。如是推之。可求至卯為任何數。惟其卯必為正整之數。

第一百二十八款　若令卯為負數。則其式可變為他形。法以丁卯代其卯。而將所得之各項。從新排列之。則其式

為

$$\text{禾}\frac{\text{天}^{\text{卯}}\sqrt{\text{甲}\perp\text{乙天}\perp\text{丙天}^{\text{三}}}}{\text{彳天}}=$$

$$\frac{(\text{卯丅一})\text{甲}}{\text{丅一}}\times\frac{\text{天}^{\text{卯丅一}}}{\sqrt{\text{甲}\perp\text{乙天}\perp\text{丙天}^{\text{三}}}}\text{丅}\frac{\text{二卯丅二}}{\text{二卯丅三}}\times\frac{\text{甲}}{\text{乙}}\text{禾}\frac{\text{天}^{\text{卯丅一}}\sqrt{\text{甲}\perp\text{乙天}\perp\text{丙天}^{\text{三}}}}{\text{彳天}}\text{丅}\frac{\text{卯丅一}}{\text{卯丅二}}\times\frac{\text{甲}}{\text{丙}}\text{禾}\frac{\text{天}^{\text{卯丅二}}\sqrt{\text{甲}\perp\text{乙天}\perp\text{丙天}^{\text{三}}}}{\text{彳天}}$$

而此式中之卯可以正數代之

第一百二十九款

惟$卯＝一$者則不能用前款之變式因分母內凡有$卯丅一$者其項俱變爲無窮故$\frac{天\sqrt{甲⊥乙天⊥丙天^{二}}}{彳天}$之積分必分求之令$天＝\frac{地}{一}$則$\frac{天}{彳天}＝\frac{地}{丅彳地}$所以其$\frac{天\sqrt{甲⊥乙天⊥丙天^{二}}}{彳天}＝\frac{\sqrt{丙⊥乙地⊥甲地^{二}}}{丅彳地}$惟此變式之微分其積分之形有兩種視

甲之正負而異。

如甲爲正數。則依第一百二十五款之法得積分之式

爲 丅 $\frac{呷}{二}$ 訥（乙丄二甲地丄二㕑丙丄乙地丄甲地^{三}）丄哂。其呷可任爲正負之數。如令之爲負則積分之

式變爲 $\frac{呷}{一}$ 訥（乙丄二甲地丅二㕑丙丄乙地丄甲地^{三}）丄哂。以地之同數天二代還之則得 禾 $\frac{天㕑甲丄乙天丄丙天^{三}}{伕天}$ ＝ $\frac{呷}{一}$ 訥 $\frac{天}{二甲丄乙天丅二㕑甲㕑甲丄乙天丄丙天^{三}}$ 丄哂。惟

須勿忘其$\sqrt{\text{甲}}$或可為正。或可為負。

如甲為負數。則

$$\frac{\text{天}\sqrt{\text{丅甲丄乙天丄丙天}^{\text{二}}}}{\text{伕}}=\frac{\sqrt{\text{丙丄乙地丅甲地}^{\text{二}}}}{\text{丅彳地}}$$。

依第一百二十六款。得其積分式

$$\text{禾}\frac{\sqrt{\text{丙丄乙地丅甲地}^{\text{二}}}}{\text{丅彳地}}=$$

$$\text{丅}\frac{\sqrt{\text{甲}}}{\text{一}}\text{正弦}^{\text{丅一}}\frac{\sqrt{\text{乙}^{\text{二}}\text{丄四甲丙}}}{\text{二甲地丅乙}}\text{丄呐}=$$

$$\frac{\sqrt{\text{甲}}}{\text{一}}\text{餘弦}^{\text{丅一}}\frac{\sqrt{\text{乙}^{\text{二}}\text{丄四甲丙}}}{\text{二甲地丅乙}}\text{丄呐}$$。

以$\frac{\text{天}}{\text{一}}$代其地。即得

$$\text{禾}\frac{\text{天}\sqrt{\text{丅甲丄乙天丄丙天}^{\text{二}}}}{\text{伕}}=$$

$$\frac{\sqrt{\text{甲}}}{\text{一}}\text{餘弦}^{\text{丅一}}\frac{\text{天}\sqrt{\text{乙}^{\text{二}}\text{丄四甲丙}}}{\text{二甲丅乙天}}\text{丄呐}$$。

第二百三十款　以上各款之法。謂從第一百二十五款至一百二十九款也已足爲多種微分式求積分之用。

卽如從第一百二十五款之法可得

$$\text{禾}\frac{\sqrt{\text{甲}\bot\text{天}^{\text{三}}}}{\text{伕}}=\text{訥}\left(\text{天}\bot\sqrt{\text{甲}\bot\text{天}^{\text{三}}}\right)\bot\text{哂}。$$

及

$$\text{禾}\frac{\sqrt{\text{乙天}\bot\text{天}^{\text{三}}}}{\text{伕}}=\text{訥}\left(\text{三乙}\bot\text{天}\bot\sqrt{\text{乙天}\bot\text{天}^{\text{三}}}\right)\bot\text{哂}。$$

從一百二十九款之法可得

$$\text{禾}\frac{\text{天}\overline{|\text{甲丄丙天}^{\text{三}}}}{\text{甲彳天}}=\text{二訥}\frac{\text{天}}{\text{二甲丅二甲}\overline{|\text{甲丄丙天}^{\text{三}}}}\Big|\text{呐}$$

若以 $\text{訥}(\text{二甲})$ 約之令 $\frac{\text{訥}(\text{二甲})}{\text{呐}}$ 爲 呐 則

$$\text{禾}\frac{\text{天}\overline{|\text{甲丄丙天}^{\text{三}}}}{\text{甲彳天}}=\text{二訥}\frac{\text{天}}{\text{甲丅}\overline{|\text{甲丄丙天}^{\text{三}}}}\Big|\text{呐}$$

此式又可用法變之因其

$$\text{禾}\frac{\text{天}\overline{|\text{甲丄丙天}^{\text{三}}}}{\text{二甲彳天}}=\text{訥}\frac{\text{丅丙天}^{\text{三}}}{\left(\text{甲丅}\overline{|\text{甲丄丙天}^{\text{三}}}\right)^{\text{三}}}\Big|\text{呐}$$

而

$$\text{丅丙天}^{\text{三}}=\left(\text{甲丄}\overline{|\text{甲丄丙天}^{\text{三}}}\right)\left(\text{甲丅}\overline{|\text{甲丄丙天}^{\text{三}}}\right)$$

所以

代而化之可得

$$\text{禾}\frac{\text{天}\sqrt{\text{甲}^{二}\text{丄丙天}^{二}}}{\text{甲天}}=\frac{\text{二}}{\text{一}}\text{訥}\left|\frac{\text{甲}\text{丄}\sqrt{\text{甲}^{二}\text{丄丙天}^{二}}}{\text{甲}\text{丅}\sqrt{\text{甲}^{二}\text{丄丙天}^{二}}}\right|\text{呐}$$

由此可見凡積分之式每能隨其所用之常數而有多種變形

第一百三十一款

凡對函數之積分每類中各有其相配之一幅積分數可以角度或平圓之弧明之

即如依第一百二十六款之法可得

$$禾\frac{\sqrt{甲^{二}丅天^{二}}}{彳天}=正弦^{丅一}\frac{甲}{天}\perp ⿰口丙$$

及

$$禾\frac{甲天\sqrt{天^{二}丅甲^{二}}}{彳天}=餘弦^{丅一}\left(丅\frac{甲}{天}\right)\perp ⿰口丙$$

又如依第一百二十九款第二法可得

$$禾\frac{天\sqrt{天^{二}丅甲^{二}}}{甲彳天}=正割^{丅一}\frac{甲}{天}\perp ⿰口丙=餘弦^{丅一}\frac{天}{甲}\perp ⿰口丙$$

第一百三十二款　茲款特設一式。以明微分式內有平方根號。而欲求其積分之法。

如有微分式$\frac{\text{天}}{\text{彳天}}\sqrt{\frac{\text{天}^2\text{丅乙}^2}{\text{甲}^2\text{丅天}^2}}$。欲求其積分。　則依已知之法變之

得$\frac{\text{天}}{\text{彳天}}\sqrt{\frac{\text{天}^2\text{丅乙}^2}{\text{甲}^2\text{丅天}^2}}=\frac{\text{天}\sqrt{(\text{甲}^2\text{丅天}^2)(\text{天}^2\text{丅乙}^2)}}{\text{甲}^2\text{彳天}}\text{丅}\frac{\sqrt{(\text{甲}^2\text{丅天}^2)(\text{天}^2\text{丅乙}^2)}}{\text{天彳天}}$

此兩項之微分。其第一項有他法可明之

為$丅\frac{乙}{甲}乂\frac{\sqrt{(甲^{二}丅天^{二})(天^{二}丅乙^{二})}}{\frac{天^{二}}{二}彳(天^{二})}$。所以得$\frac{天}{伏}\sqrt{\frac{天^{二}丅乙^{二}}{甲^{二}丅天^{二}}}=\frac{\sqrt{(甲^{二}丅天^{二})(天^{二}丅乙^{二})}}{丅天伏}丅\frac{乙}{甲}乂\frac{\sqrt{(甲^{二}丅天^{二})(天^{二}丅乙^{二})}}{\frac{天^{二}}{二}彳(天^{二})}$。可見其兩項之式眞為相類。如欲求其第一項之積分可令其$天^{二}=甲^{二}餘弦斗^{二}丄乙^{二}正弦斗^{二}$。則$天伏=(乙^{二}丅甲^{二})正弦斗餘弦斗科$。而其

$$\text{甲}^{二}\,\text{丅}\,\text{天}^{二}=\left(\text{甲}^{二}\,\text{丅}\,\text{乙}^{二}\right)\text{正弦}^{二}\text{斗}$$

(一).

$$\text{天}^{二}\,\text{丅}\,\text{乙}^{二}=\left(\text{甲}^{二}\,\text{丅}\,\text{乙}^{二}\right)\text{餘弦}^{二}\text{斗}$$

(二). 所以

$$\frac{\sqrt{\left(\text{甲}^{二}\,\text{丅}\,\text{天}^{二}\right)\left(\text{天}^{二}\,\text{丅}\,\text{乙}^{二}\right)}}{\text{丅天伕}}=\frac{\left(\text{甲}^{二}\,\text{丅}\,\text{乙}^{二}\right)\text{餘弦斗正弦斗}}{\left(\text{甲}^{二}\,\text{丅}\,\text{乙}^{二}\right)\text{餘弦斗正弦斗枓}}=\text{枓}.$$

又依同法令

$$\frac{\text{天}^{二}}{一}=\frac{\text{甲}^{二}}{一}\text{餘弦}^{二}\text{井}\,\text{丄}\,\frac{\text{乙}^{二}}{一}\text{正弦}^{二}\text{井}.$$

則得

$$\frac{\text{天}^{二}}{一}\text{彳}\left(\frac{\text{天}^{二}}{一}\right)=\left(\frac{\text{乙}^{二}}{一}\,\text{丅}\,\frac{\text{甲}^{二}}{一}\right)\text{正弦井餘弦井併}.$$

而其

$$\frac{\text{甲}^{二}}{一}\,\text{丅}\,\frac{\text{天}^{二}}{一}=\left(\frac{\text{甲}^{二}}{一}\,\text{丅}\,\frac{\text{乙}^{二}}{一}\right)\text{正弦}^{二}\text{井}$$

(三).

$$\frac{\text{天}^{二}}{一}\,\text{丅}\,\frac{\text{乙}^{二}}{一}=\left(\frac{\text{甲}^{二}}{一}\,\text{丅}\,\frac{\text{乙}^{二}}{一}\right)\text{餘弦}^{二}\text{井}$$

(四). 所以又得

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{\text{甲}^{二}}{一}\,\text{丅}\,\frac{\text{天}^{二}}{一}\right)\left(\frac{\text{天}^{二}}{一}\,\text{丅}\,\frac{\text{乙}^{二}}{一}\right)}}{\text{丅}\frac{\text{天}^{二}}{一}\text{彳}\left(\frac{\text{天}^{二}}{一}\right)}=\frac{\left(\frac{\text{乙}^{二}}{一}\,\text{丅}\,\frac{\text{甲}^{二}}{一}\right)\text{正弦井餘弦井}}{\left(\frac{\text{乙}^{二}}{一}\,\text{丅}\,\frac{\text{甲}^{二}}{一}\right)\text{正弦井餘弦井併}}=\text{併}.$$

總之其斗井二角如

能為

$$餘弦斗 = \sqrt{\frac{甲^{2}\,丅\,乙^{2}}{天^{2}\,丅\,乙^{2}}}$$

$$餘弦井 = \frac{天}{甲}餘弦斗。$$

則

$$禾\frac{天}{彳天}\sqrt{\frac{天^{2}\,丅\,乙^{2}}{甲^{2}\,丅\,天^{2}}} = 斗\,丄\,\frac{乙}{甲}井\,丄\,常數。$$

求二項微分式之積分

第一百三十三款

此種微分式。可用公式 $\left(甲\,丄\,乙天^{卯}\right)^{\frac{午}{巳}}彳天\,天^{寅丅一}$ 明之。茲欲查出用何式能

變其微分式爲實函數．

如令 $甲丄乙天^{卯}=人^{午}$． 則 $\left(甲丄乙天^{卯}\right)^{\frac{午}{巳}}=人^{巳}$． 而 $天^{卯}=\frac{乙}{人^{巳}丅甲}$． 所以 $天^{寅}=\left(\frac{乙}{人^{巳}丅甲}\right)^{\frac{卯}{寅}}$ 而 $天^{寅丅一}彳天=\frac{卯乙}{午}人^{午丅一}\left(\frac{乙}{人^{午}丅甲}\right)^{\frac{卯}{寅}丅一}彳人$． 則所設之微

分式變爲 $\frac{卯乙}{午}人^{巳丄午丅一}彳人\left(\frac{乙}{人^{午}丅甲}\right)^{\frac{卯}{寅}丅一}$． 此式遇 $\frac{卯}{寅}$ 能爲整數者，必爲實函數

設其微分式為$天^{八}彳天\left(甲丄乙天^{三}\right)^{\frac{午}{巳}}$。則此式合于前例。因其$寅=九$。$卯=三$。$\frac{卯}{寅}=三$。

故能變其形為$\frac{三乙}{午}人^{巳丄午丅一}彳人\left(\frac{乙}{人^{午}丅甲}\right)^{二}$。

設其微分式為$天^{寅丅一}彳天\left(甲丄乙天^{卯}\right)^{\frac{午}{巳}}$。則可變之。使其括弧中天之指數

爲負。

法將括弧內之數變爲 $甲┴乙天^{卯}$ 約 $天^{卯}$ 即得

$$天^{寅丅一}彳天\left(甲┴乙天^{卯}\right)^{\frac{巳}{午}}=$$

$$天^{寅丅一}彳天\left[\left(甲天^{丅卯}┴乙\right)天^{卯}\right]^{\frac{巳}{午}}=$$

$$天^{寅┴\frac{巳卯}{午}丅一}彳天\left(甲天^{丅卯}┴乙\right)^{\frac{巳}{午}}.$$

又依前法變之。至其末式中之 $\dfrac{寅┴\frac{巳卯}{午}}{卯}$。每遇能爲整數之時

則微分式可爲實函數。或可云每遇 $\frac{寅}{卯}┴\frac{巳}{午}$ 能爲整數則

其微分式可變爲實函數。

設有微分式$天^{四}彳天(甲丄乙天^{三})^{\frac{三}{二}}$此式亦與以上所言者爲一類。因其

$\frac{卯}{寅}=\frac{三}{五}$。$\frac{午}{巳}=\frac{三}{一}$。

$\frac{卯}{寅}丄\frac{午}{巳}=\frac{三}{六}=二$。

故可用此諸數于$天^{寅丄\frac{午}{卯巳}丅一}彳天(甲天^{丅卯}丄乙)^{\frac{午}{巳}}$之式中。得$甲天^{丅卯}丄乙=人^{午}$。從

此式化得$甲丄乙天^{卯}=天^{卯}人^{午}$。

若徑將其$天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{\frac{午}{巳}}$如法變之。則易知所得

之式，必與用 $\text{天}^{\text{寅}+\frac{\text{卯巳}}{\text{午}}-1}\,d\text{天}\,(\text{甲天}^{-\text{卯}}+\text{乙})^{\frac{\text{巳}}{\text{午}}}$ 之式所得者相同。

第一百三十四款

有時其微分之式 $\text{天}^{\text{寅}-1}\,d\text{天}\,(\text{甲}+\text{乙天}^{\text{卯}})^{\frac{\text{巳}}{\text{午}}}$。不能徑求積分，則必變爲簡式以求之。其法與第一百十三款之理相同，惟因 $\int\text{戊}\,d\text{亥}=\text{戊亥}-\int\text{亥}\,d\text{戊}$。所以

凡遇微分式若能化其式爲兩箇乘數其一箇乘數能求其積分而以亥明之其又一箇乘數以戌明之則其全微分式之積分必可從求$\text{亥}\,\text{彳戌}$之積分而得用此法變得之微分有時可比所設之式更簡故其積分更易求此爲最妙之法其用甚廣名曰分求積分之法

玆因欲從簡易故令巳代其午丄巳惟推算之時須勿忘巳之所代者常爲分數則所設之微分式變爲$\text{天}^{\text{寅丅一}}\,\text{伕}\,(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}$化

此式爲兩箇乘數共有數法玆言其最便之法如左

變其式為$\text{天}^{\text{寅丅卯}}\text{天}^{\text{卯丅一}}\text{彳天}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}$。其一箇乘數$\text{天}^{\text{卯丅一}}\text{彳天}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}$。為能求積分者。依第一百〇八款之法。無論巳所代之分數如何。必能得其積分。所以可用亥代之。則

$$\text{亥}=\frac{\text{乙卯}(\text{巳丄一})}{(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丄一}}}$$

$$\text{戌}=\text{天}^{\text{寅丅卯}}$$

由此得

$$\text{禾天}^{\text{寅丅卯}}\text{彳天}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}=\frac{\text{乙卯}(\text{巳丄一})}{\text{天}^{\text{寅丅卯}}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丄一}}}\text{丅}\frac{\text{乙卯}(\text{巳丄一})}{\text{寅丅卯}}\text{禾天}^{\text{寅丅卯丅一}}\text{彳天}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丄一}}$$

惟

因

$$\text{禾}\,\text{天}^{\text{寅丅卯丅一}}\,\text{彳天}\,(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丄一}}=$$

$$\text{禾}\,\text{天}^{\text{寅丅卯丅一}}\,\text{彳天}\,(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})=\text{甲禾}\,\text{天}^{\text{寅丅卯丅一}}\,\text{彳天}\,(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}\text{丄乙禾}\,\text{天}^{\text{寅丅一}}\,\text{彳天}\,(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}$$。

以此代入前式中。而將其

$$\text{禾}\,\text{天}^{\text{寅丅一}}\,\text{彳天}\,(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}$$

之同數各項聚而化之。即得㊙式如左。

呷式

$$\text{禾}\,\text{天}^{\text{寅丅一}}\,\text{彳天}\,(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}=\frac{\text{乙}(\text{巳卯丄寅})}{\text{天}^{\text{寅丅卯}}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丄一}}}\;\text{丅}\;\frac{\text{乙}(\text{巳卯丄寅})}{\text{甲}(\text{寅丅卯})}\;\text{乂}\;\text{禾}\,\text{天}^{\text{寅丅卯丅一}}\,\text{彳天}\,(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}$$

觀此易知凡求

$$\text{天}^{\text{寅丅一}}\,\text{彳天}\,(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}$$

之積分者，可變之爲求

$\dfrac{彳(甲\,\text{⊥}\,乙天^{卯})^{巳}}{寅\text{丅}卯一\;天}$式之積分。所以此式又可變爲求$\dfrac{彳(甲\,\text{⊥}\,乙天^{卯})^{巳}}{寅\text{丅}二卯一\;天}$之積分。法將寅丅卯代(呷)式中之寅。再將其寅丅卯變爲寅丅二卯。則能用$\dfrac{彳(甲\,\text{⊥}\,乙天^{卯})^{巳}}{寅\text{丅}三卯一\;天}$禾而求$\dfrac{彳(甲\,\text{⊥}\,乙天^{卯})^{巳}}{寅\text{丅}二卯一\;天}$禾。順是以下。仿此類推。

總言之若以未代其變化之次數則至末得 $禾天^{寅未丅卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}$。而其

末式必爲

$$禾天^{寅(未丅一)丅卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}=$$

$$\frac{乙[巳卯丄寅(未丅一)丄卯]}{天^{寅丅未卯}(甲丄乙天^{卯})^{巳丄一}}丅\frac{乙[巳卯丄寅(未丅一)丄卯]}{甲(寅丅未卯)}禾天^{寅未丅卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}。$$

從此可知寅若爲卯所可度。則能

用代數之式。明其 $天^{寅丅一}\ 伏\ (甲丄乙天^{卯})^{已}$ 之積分。因遞次變化之至末次之積分式。必以 $寅丅未卯=〇$ 為天之方數故也。

用茲款之法所求得之積分。與用第一百三十三款之法所得者無異。

第一百三十五款

又有一種變化之法。可將其括弧外之指數。遞損其一數。

用此法。惟須知其

$$禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}=禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳丅一}(甲丄乙天^{卯})$$

$$=甲禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳丅一}丄乙禾天^{寅丄卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳丅一}。$$

如將呷式中之寅變爲寅丄卯。

又將其巳變爲巳丅一。則其式變爲

$$禾天^{寅丄卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳丅一}=\frac{乙(巳卯丄寅)}{天^{寅}(甲丄乙天^{卯})^{巳}丅甲寅禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳丅一}}。$$

以此代入前

式。卽得𠮙式如左。

𠮙式

$$\text{禾天}^{\text{寅}\top\text{一}}\text{伕}(\text{甲}\bot\text{乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}=\frac{\text{巳卯}\bot\text{寅}}{\text{天}^{\text{寅}}(\text{甲}\bot\text{乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}}\bot\frac{\text{巳卯}\bot\text{寅}}{\text{巳卯甲}}\text{禾天}^{\text{寅}\top\text{一}}\text{伕}(\text{甲}\bot\text{乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}\top\text{一}}。$$

依此式。可令其巳遞減一數　若與呷式竝

用之可令 禾天寅丁一 伏(甲乚乙天卯)巳 藉 禾天寅未卯丁一 伏(甲乚乙天卯)巳申 而得其未卯為寅丁一內所能有卯之

最大之倍數其申為巳所能有之最大整數

如有式 禾天七 伏(甲乚乙天三)三五 可依(呷)式遞次消化之為 禾天四 伏(甲乚乙天三)三三 禾天 伏(甲乚乙天三)三五 又依

(乙乙)式消化其 禾天 伏(甲乚乙天三)三五 為 禾天 伏(甲乚乙三)三三 禾天 伏(甲乚乙天三)三

第一百三十六款　從以上兩款之式。易知其寅與卯若為負數。則不能依甲乙兩式而求其積分。因其指數必反增故也。若然反其術而用之。亦未嘗不可通。

即如從甲式得

$$禾天^{寅丅卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}＝$$

$$\frac{甲(寅丅卯)}{天^{寅丅卯}(甲丄乙天^{卯})^{巳丄一}}丅\frac{甲(寅丅卯)}{乙(寅丄卯巳)}禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}。$$

以寅丄卯代其寅。則得丙式如左。

（丙）式

$$禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}=\frac{甲寅}{天^{寅}(甲丄乙天^{卯})^{巳丄一}}丅\frac{甲寅}{乙(寅丄卯丄卯巳)}禾天^{寅丄卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}$$

依此式則能減其括弧外變數之指數因如

令丅寅代其$\frac{卯丅一}{寅}$中之寅，則為$\frac{卯丅一}{丅寅}$故也。

若欲反其㐅乙式，可令

$$禾\,天^{寅丅一}\,彳\,(甲丄乙天^{卯})^{巳丅一} = 丅\frac{巳卯甲}{天^{寅}(甲丄乙天^{卯})^{巳}} 丄 \frac{巳卯甲丅一}{寅卯巳}\,禾\,天^{寅丅一}\,彳\,(甲丄乙天^{卯})^{巳}$$

以巳丄一代其巳，則得㐅丁式如左。

(丁)式

$$\text{禾}\,\text{天}^{\text{寅丅一}}\,\text{伏}\,(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳}}=\text{丅}\frac{\text{天}^{\text{寅}}(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丄一}}}{\text{卯甲}(\text{巳丄一})}\text{丄}\frac{\text{寅丄卯丄卯巳}}{\text{卯甲}(\text{巳丄一})}\text{禾}\,\text{天}^{\text{寅丅一}}\,\text{伏}\,(\text{甲丄乙天}^{\text{卯}})^{\text{巳丄一}}.$$

依此式．則能減其括弧之指數．因巳若為負數．則其巳丄一能變為𠂆巳丄一故也．

第一百三十七款

如有式 $禾\frac{\sqrt{一丅天^{三}}}{天^{寅丅一}彳天}$ 其寅爲正整之數令

$甲=一$

$乙=丅一$

$卯=三$

$巳=丅三$

即可得

$$禾\frac{\sqrt{一丅天^{三}}}{天^{寅丅一}彳天}=丅\frac{寅丅一}{天^{寅丅二}\sqrt{一丅天^{三}}}\perp\frac{寅丅一}{寅丅二}禾\frac{\sqrt{一丅天^{三}}}{天^{寅丅三}彳天}$$

若以寅代其寅丅一則得

$$禾\frac{\sqrt{一丅天^{三}}}{天^{寅}彳天}=丅\frac{寅}{天^{寅丅一}\sqrt{一丅天^{三}}}\perp\frac{寅}{寅丅一}禾\frac{\sqrt{一丅天^{三}}}{天^{寅丅二}彳天}$$

如令寅之各同數爲遞

加之奇數。則

$$\int\frac{\text{天}\,d\text{天}}{\sqrt{1-\text{天}^2}}=-\sqrt{1-\text{天}^2}+\text{常數}$$

$$\int\frac{\text{天}^3\,d\text{天}}{\sqrt{1-\text{天}^2}}=-\frac{1}{3}\text{天}^2\sqrt{1-\text{天}^2}+\frac{2}{3}\int\frac{\text{天}\,d\text{天}}{\sqrt{1-\text{天}^2}}$$

$$\int\frac{\text{天}^5\,d\text{天}}{\sqrt{1-\text{天}^2}}=-\frac{1}{5}\text{天}^4\sqrt{1-\text{天}^2}+\frac{4}{5}\int\frac{\text{天}^3\,d\text{天}}{\sqrt{1-\text{天}^2}}$$

$$\int\frac{\text{天}^7\,d\text{天}}{\sqrt{1-\text{天}^2}}=-\frac{1}{7}\text{天}^6\sqrt{1-\text{天}^2}+\frac{6}{7}\int\frac{\text{天}^5\,d\text{天}}{\sqrt{1-\text{天}^2}}$$

……從此得

$$\int\frac{\text{天}^3\,d\text{天}}{\sqrt{1-\text{天}^2}}=-\left(\frac{1}{3}\text{天}^2+\frac{2}{1\cdot3}\right)\sqrt{1-\text{天}^2}$$

$$\int\frac{\text{天}^5\,d\text{天}}{\sqrt{1-\text{天}^2}}=-\left(\frac{1}{5}\text{天}^4+\frac{1\cdot4}{3\cdot5}\text{天}^2+\frac{1\cdot2\cdot4}{1\cdot3\cdot5}\right)\sqrt{1-\text{天}^2}$$

$$\int\frac{\text{天}^7\,d\text{天}}{\sqrt{1-\text{天}^2}}=-\left(\frac{1}{7}\text{天}^6+\frac{1\cdot6}{5\cdot7}\text{天}^4+\frac{1\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\text{天}^2+\frac{1\cdot2\cdot4\cdot6}{1\cdot3\cdot5\cdot7}\right)\sqrt{1-\text{天}^2}$$

……則其求各積分之法自明。又每式必加一常數

若寅之各同數為偶則

$$禾\frac{\sqrt{一丅天^{二}}}{天^{二}彳天}=丅\frac{二}{一}天\sqrt{一丅天^{二}}丄\frac{二}{一}禾\frac{\sqrt{一丅天^{二}}}{彳天}$$、

$$禾\frac{\sqrt{一丅天^{二}}}{天^{四}彳天}=丅\frac{四}{一}天^{三}\sqrt{一丅天^{二}}丄\frac{四}{三}禾\frac{\sqrt{一丅天^{二}}}{天^{二}彳天}$$、

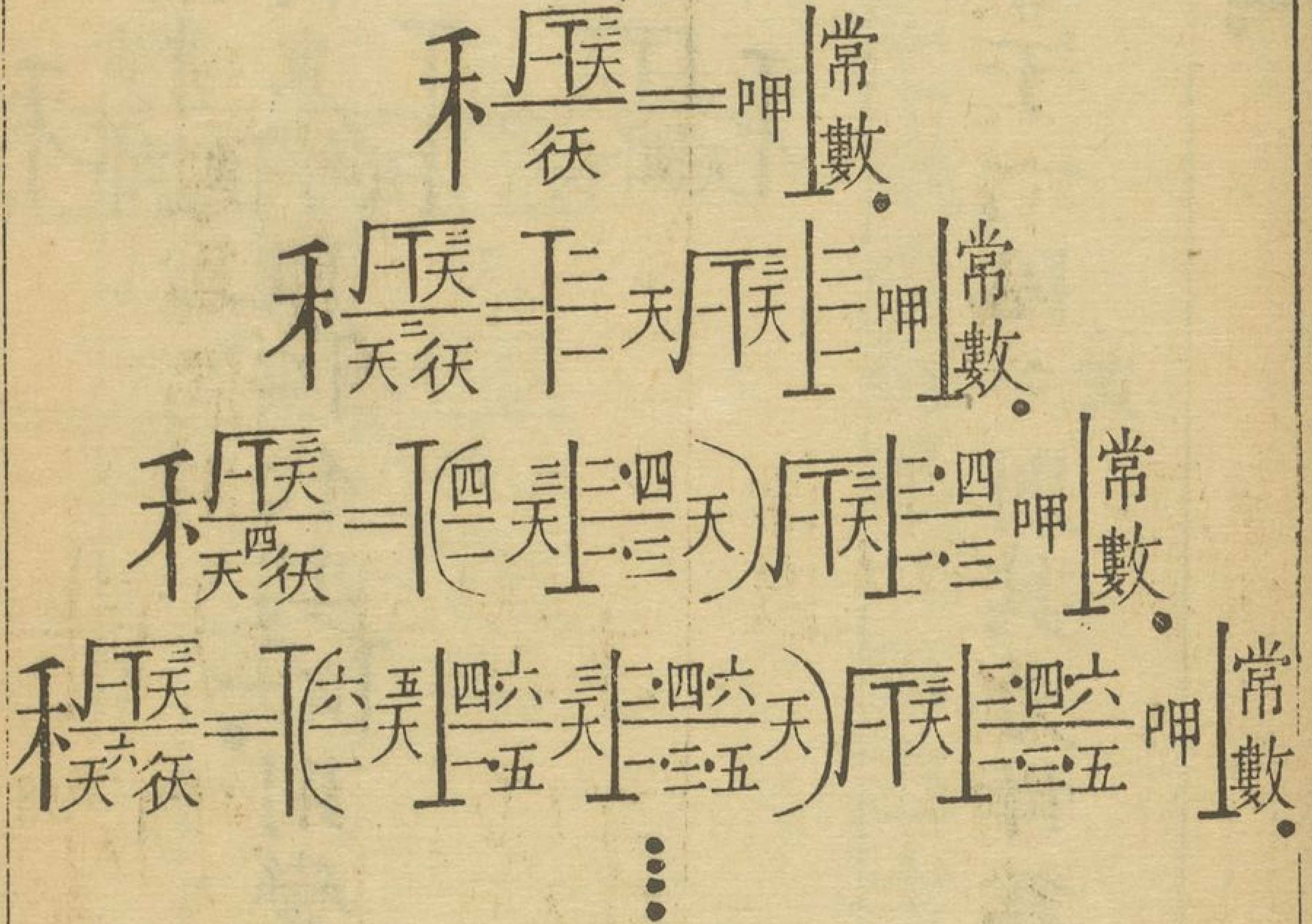
$$禾\frac{\sqrt{一丅天^{二}}}{天^{六}彳天}=丅\frac{六}{一}天^{五}\sqrt{一丅天^{二}}丄\frac{六}{五}禾\frac{\sqrt{一丅天^{二}}}{天^{四}彳天}$$

……依第二十三款之理。以此各式從

$$禾\frac{\sqrt{一丅天^{二}}}{彳天}=正弦^{丅一}天丄常數$$

之例。令所有天為正弦之弧

爲呷即得



第一百三十八款　前款之式其寅俱爲正數茲款乃論寅爲負數之式

從(丙)式得

$$\text{禾}\frac{\text{一丅天}^{\text{三}}}{\text{天}^{\text{丅寅丅一}}\,\text{彳天}}=\text{丅}\frac{\text{寅}}{\text{天}^{\text{丅寅}}\,\text{一丅天}^{\text{三}}}\text{丄}\frac{\text{寅}}{\text{寅丅一}}\,\text{禾}\frac{\text{一丅天}^{\text{三}}}{\text{天}^{\text{寅丄一}}\,\text{彳天}}$$

以丅寅代其丅寅丅一。則變為

$$\text{禾}\frac{\text{天}^{\text{寅丄一}}\,\text{丅天}^{\text{三}}}{\text{彳天}}=\frac{(\text{寅丄一})\,\text{天}^{\text{寅丄一}}}{\text{丅一丅天}^{\text{三}}}\text{丄}\frac{\text{寅丄一}}{\text{寅丄二}}\,\text{禾}\frac{\text{天}^{\text{寅丄一}}\,\text{一丅天}^{\text{三}}}{\text{彳天}}$$

惟此式中之寅不能等于一。因$\text{寅}=\text{一}$。則其分母為〇。而其倍數必為無窮之故也。

寅等于一之式可從第一百三十款之例得

$$\int \frac{d天}{天\sqrt{1-天^2}} = \ln\frac{1-\sqrt{1-天^2}}{天} + \text{常數}.$$

再令

寅＝三．

寅＝五．

……即得

$$\int \frac{d天}{天^3\sqrt{1-天^2}} = -\frac{\sqrt{1-天^2}}{2天^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d天}{天\sqrt{1-天^2}}.$$

$$\int \frac{d天}{天^5\sqrt{1-天^2}} = -\frac{\sqrt{1-天^2}}{4天^4} + \frac{3}{4}\int \frac{d天}{天^3\sqrt{1-天^2}}.$$

$$\int \frac{d天}{天^7\sqrt{1-天^2}} = -\frac{\sqrt{1-天^2}}{6天^6} + \frac{5}{6}\int \frac{d天}{天^5\sqrt{1-天^2}}.$$

……

再令
寅＝二。
寅＝四。
寅＝六。
……即得

$$\int\frac{彳天}{天^{二}\sqrt{一-天^{二}}}=-\frac{\sqrt{一-天^{二}}}{天}+常數。$$

$$\int\frac{彳天}{天^{四}\sqrt{一-天^{二}}}=-\frac{\sqrt{一-天^{二}}}{三天^{三}}+\frac{二}{三}\int\frac{彳天}{天^{二}\sqrt{一-天^{二}}}。$$

$$\int\frac{彳天}{天^{六}\sqrt{一-天^{二}}}=-\frac{\sqrt{一-天^{二}}}{五天^{五}}+\frac{四}{五}\int\frac{彳天}{天^{四}\sqrt{一-天^{二}}}。$$

……

此款所論之各式。皆可如前款之法得其級數之式。以對數及代數明其積分。

以級數求積分法

第一百三十九款

如將函(呹)詳爲級數則其禾呹⿰彳天易求得之因祗須將級數之各項用第一百〇四款之法二一求其積分故也

卽如

$$呹 = 呷天^{寅} 丄 ⿰口乙天^{寅丄卯} 丄 ⿰口丙天^{寅丄二卯} 丄 叮天^{寅丄三卯} 丄 \cdots\cdots$$

兩邊俱以⿰彳天乘之各項求積分得

$$禾呹⿰彳天 = \frac{寅丄一}{呷天^{寅丄一}} 丄 \frac{寅丄卯丄一}{⿰口乙天^{寅丄卯丄一}} 丄 \frac{寅丄二卯丄一}{⿰口丙天^{寅丄二卯丄一}} 丄 \cdots\cdots 丄 常數$$

若其

呅詳得之級數中有任一項之形爲$\frac{天}{呅}$。則此項之積分數依第二十款之例必爲呅訥天。

茲設數題于下。以明本款之法。

一題 設微分式爲$\frac{甲\perp天}{彳天}$。欲求其積分。則依第二十款之例。已知其級數中有甲丄天之訥對。惟依除法則得

$$\frac{甲\perp天}{一}=\frac{甲}{一}\top\frac{甲^{二}}{天}\perp\frac{甲^{三}}{天^{二}}\top\frac{甲^{四}}{天^{三}}\perp\frac{甲^{五}}{天^{四}}\top\cdots\cdots$$

以彳天徧乘之而求其積分。則

得

$$禾\frac{甲丄天}{伕}=\frac{甲}{天}丅\frac{二甲^{二}}{天^{二}}丄\frac{三甲^{三}}{天^{三}}丅\frac{四甲^{四}}{天^{四}}丄\cdots\cdots丄呐.$$

此級數能明其積分之公式而不論其專式內之用法.如令其級數為明訥(甲丄天).即得

$$訥(甲丄天)=\frac{甲}{天}丅\frac{二甲^{二}}{天^{二}}丄\frac{三甲^{三}}{天^{三}}丅\frac{四甲^{四}}{天^{四}}丄\cdots\cdots丄呐.$$

其常數呐

非爲未定之數。故其天之同數無論如何必能合于

此式之用。如令 天＝〇。則級數中有天之各項俱不見

而得 訥甲＝呐。如此。則呐之同數已知。所以得 $訥(甲+天)=訥甲+\frac{天}{甲}-\frac{天^{二}}{二甲^{二}}+\frac{天^{三}}{三甲^{三}}-\cdots\cdots$。此式與

第八十六款所得者同。

二題　設有微分式$\dfrac{\text{彳天}}{\text{一丄天}^{\text{二}}}$。欲以級數明其積分。

則以約法得$\dfrac{\text{一}}{\text{一丄天}^{\text{二}}}=\text{一丅天}^{\text{二}}\text{丄天}^{\text{四}}\text{丅天}^{\text{六}}\text{丄}\cdots\cdots$。將此式之兩邊。俱以彳天乘之。乃如法求各項之積分。則得積分之式為

$$\text{禾}\dfrac{\text{彳天}}{\text{一丄天}^{\text{二}}}=\text{天丅}\dfrac{\text{天}^{\text{三}}}{\text{三}}\text{丄}\dfrac{\text{天}^{\text{五}}}{\text{五}}\text{丅}\dfrac{\text{天}^{\text{七}}}{\text{七}}\text{丄}\cdots\cdots\text{丄丙}$$

此式若但

以代數之法攷之不能得其㖶之同數。惟從第二十二款之第三式。則知 $\frac{彳天}{一 + 天^{二}}$ 為以天為切綫半徑為一之弧之微分式。故用 $正切^{-1}天$ 以明其級數。則 $正切^{-1}天 = 天 - \frac{天^{三}}{三} + \frac{天^{五}}{五} - \frac{天^{七}}{七} + \cdots + 㖶$。求其㖶之定同數之法。可令 $正切^{-1}天$ 及天。為任何相配之各同數而攷之。惟因 $正切^{-1}天 = 〇$。則 $天 = 〇$。所以知級數中有天之各項不見之時

必得$○＝○丄呐$。故知其常數呐必等于○。

三題　欲以天之斂級數明$\int\frac{一}{一丄天^{二}}彳天$之積分。因前題之解法其所得之級數中天之各方漸增大而為發級數惟此式亦可以漸減之項明之故更設此題。

先以約法得

$$\frac{一}{天^{二}丄一}＝\frac{一}{天^{二}}丅\frac{一}{天^{四}}丄\frac{一}{天^{六}}丅\frac{一}{天^{八}}\cdots\cdots$$

則

$$\int\frac{一}{天^{二}丄一}彳天＝丅\frac{一}{天}丄\frac{一}{三天^{三}}丅\frac{一}{五天^{五}}\cdots\cdots丄呐$$

卽

$$正切^{丅一}天＝丅\frac{一}{天}丄\frac{一}{三天^{三}}丅\frac{一}{五天^{五}}\cdots\cdots丄呐$$

此式中若令$天＝○$則

不能攷得其呐之同數。因弧＝○。則天＝○。而級數之各項皆爲無窮之故。惟令其弧爲象限。則弧＝$\frac{周}{二}$。而天爲無窮。其級數之各項俱爲○而$\frac{周}{二}$＝呐。所以得

$$正切\,丅天＝\frac{周}{二}\;丅\frac{天}{一}\;丄\frac{三天^{三}}{一}\;丅\frac{五天^{五}}{一}\;丄\cdots\cdots$$

四題　設有正弦爲天之弧微分式$\frac{\sqrt{一丅天^{二}}}{彳天}$。欲以級數之法求其積分。

則依二項例得

$$\frac{\sqrt{一丅天^{二}}}{一}=(一丅天^{二})^{丅\frac{二}{一}}=一丄\frac{二}{一}天^{二}丄\frac{二·四}{一·三}天^{四}丄\frac{二·四·六}{一·三·五}天^{六}丄\frac{二·四·六·八}{一·三·五·七}天^{八}丄\cdots\cdots$$

所以得

$$正弦^{丅一}天=禾\frac{\sqrt{一丅天^{二}}}{彳天}=天丄\frac{二·三}{一天^{三}}丄\frac{二·四·五}{一·三天^{五}}丄\frac{二·四·六·七}{一·三·五天^{七}}丄\cdots\cdots$$

此式中令弧＝〇。則正弦＝〇。

而其左右兩邊之項同時俱變爲〇故不必有常數配之自能相等

第一百四十款　凡用級數以求積分其意謂積分之眞同數不能得則可用此法以求其略近之數也所以必用各法求得數種級數而擇其最易密合者用之

凡發級數其天之指數爲正則其方數恆增除其天本爲甚微之數以外皆不合于用如前款二題所得者是也惟其天之指數若爲負者卽爲斂級數除天爲大數以外亦不合于用

第一百四十一款　用級數之法以求積分不過欲查得

一式能分爲多項而各求其積分耳。雖所分之各項。其形與$\frac{卯}{寅}$伏天呷爲一類者。亦可用之。蓋無論其各項之形如何。祇須其化得之級數。能以代數對數。或平圓之弧。明之者。皆可用之。總以其函數之同數最易知。而得數易啇者爲佳。因其所用之若干項和數。與其全積分數。所差極微。故可用也。

凡必用級數以求積分者。因其全積分式之性情。不能以有窮之項明之。故不得已而借代數對數或平圓弧答式以無窮級數明之。然則級數求積分之法。必爲他

法所不能得者。方可用此法也。

如能將各種函數與變數相配。以其各同數列爲表。則用以求積分最便。惟因造此表之工夫極大。卷帙必多。而用此表之時甚少。所以無人爲之。凡立成之表。能省人推算之工者。除八線表之外。惟有對數表而已。

求對函數微分式之積分

第一百四十二款

如有微分式吧伏(訥天)卯。欲求其積分。其吧爲天之對函數。則可

用

$\text{禾彳戊彳亥} = \text{戊亥} \mathrel{\text{丅}} \text{禾亥彳戊}$

之例。令

$\text{戊} = (\text{訥天})^{\text{卯}}$。

則

$\text{彳戊} = \text{卯}(\text{訥天})^{\text{卯丅一}}\frac{\text{天}}{\text{彳天}}$。

又令

$\text{彳亥} = \text{吧彳天}$

因欲從簡易。故可令其

$\text{禾吧彳天} = \text{口卯}$。

則

$\text{禾吧彳天}(\text{訥天})^{\text{卯}} = \text{口卯}(\text{訥天})^{\text{卯}} \mathrel{\text{丅}} \text{卯禾}\frac{\text{天}}{\text{彳天}}(\text{訥天})^{\text{卯丅一}}\text{口卯}$。

如將其

$\text{禾}\frac{\text{天}}{\text{彳天}}\text{口卯}$

以口寅代之。則爲

$\text{禾}\frac{\text{天}}{\text{彳天}}\text{口卯}(\text{訥天})^{\text{卯丅一}} = \text{口寅}(\text{訥天})^{\text{卯丅一}} \mathrel{\text{丅}} (\text{卯丅一})\text{禾}\frac{\text{天}}{\text{彳天}}(\text{訥天})^{\text{卯丅二}}\text{口寅}$

依此法屢

變化之，則可令其對數之指數遞損一數，而藉同類之式得其積分。

設有 $吧 = 天^{寅}$，即可得

$$禾天^{寅}彳天(訥天)^{卯} = \frac{寅丄一}{天^{寅丄一}}(訥天)^{卯} 丅 \frac{寅丄一}{卯}禾(訥天)^{卯丅一}天^{寅}彳天。$$

如是遞變之，可得

$$禾天^{寅}彳天(訥天)^{卯} = 天^{寅丄一}\left[\frac{寅丄一}{(訥天)^{卯}} 丅 \frac{(寅丄一)^{二}}{卯(訥天)^{卯丅一}} 丄 \frac{(寅丄一)^{三}}{卯(卯丅一)(訥天)^{卯丅二}} 丅 \cdots\cdots\right] 丄 丙。$$

觀此式，易

知其卯若為整正之數則其級數恆能有窮。

第一百四十三款

卯若為負整數則用

$禾戌彳亥＝戌亥丅禾亥彳戌$。

其對數之方必增大。如

$\frac{(訥天)^{卯}}{吧彳天}＝\frac{丅卯丄一}{吧天}(丅卯丄一)(訥天)^{丅卯}\frac{天}{彳天}$。

若

令

$吧天＝戌$

$(訥天)^{丅卯}\frac{天}{彳天}＝彳亥$。

則

$\frac{丅卯丄一}{(訥天)^{丅卯丄一}}＝亥$。

而其

$禾\frac{(訥天)^{卯}}{吧彳天}＝$

$\frac{丅卯丄一}{吧天}(訥天)^{丅卯丄一}丄\frac{卯丅一}{二}禾(訥天)^{丅卯丄一}彳(吧天)$。

設

$吧＝天^{寅}$。

則上式又可變

爲

$$\text{禾}\frac{(\text{訥天})^{\text{卯}}}{\text{天}^{\text{寅}}\text{彳天}}=\frac{(\text{卯丅一})(\text{訥天})^{\text{卯丅一}}}{\text{丅天}^{\text{寅丄一}}}\text{丄}\frac{\text{卯丅一}}{\text{寅丄一}}\text{禾}\frac{(\text{訥天})^{\text{卯丅一}}}{\text{天}^{\text{寅}}\text{彳天}}$$

如是屢變之至末必可藉

$$\text{禾}\frac{\text{訥天}}{\text{天}^{\text{寅}}\text{彳天}}$$

而得其積分再令

$$\text{天}^{\text{寅丄一}}=\text{人}$$

則

$$\text{訥天}=\frac{\text{寅丄一}}{\text{訥人}}$$

$$\text{天}^{\text{寅}}\text{彳天}=\frac{\text{寅丄一}}{\text{彳人}}$$

所以

$$\frac{\text{訥天}}{\text{天}^{\text{寅}}\text{彳天}}=\frac{\text{訥人}}{\text{彳人}}$$

此爲最奇之越函數其積分除用無窮級數之外無他法能明之

求指函數微分式之積分

第一百四十四款

從第十九款已知 $\text{彳}(\text{甲}^{\text{天}})=\text{訥}(\text{甲})\text{甲}^{\text{天}}\text{彳天}$。所以 $\text{禾}\text{甲}^{\text{天}}\text{彳天}=\left.\frac{\text{訥甲}}{\text{甲}^{\text{天}}}\right|\text{丙}$。惟因 $\text{彳天}=\frac{\text{甲}^{\text{天}}\text{訥甲}}{\text{彳}(\text{甲}^{\text{天}})}$。所以亥若為$\text{甲}^{\text{天}}$之任何對函數，則令 $\text{甲}^{\text{天}}=\text{戊}$。即得 $\text{亥彳天}=\frac{\text{戊訥甲}}{\text{亥彳戊}}$。若就戊而論之，此式有代數之形，如令 $\text{亥}=\frac{\text{上甲}^{\text{卯天}}}{\text{甲}^{\text{天}}}$。即可得 $\text{禾}\frac{\text{上甲}^{\text{卯天}}}{\text{甲}^{\text{天}}\text{彳天}}=\text{禾}\frac{\text{訥甲上戊}^{\text{卯}}}{\text{彳戊}}$。此式之級

數。可依以上各款之法求之。

設人為天之任何函數。令戊為其訥＝一之數。則

$彳(人戊^{天})＝戊^{天}彳人 \perp 戊^{天}人彳天$。

所以

其

$禾戊^{天}彳天\left(\frac{彳人}{彳天} \perp 人\right)＝人戊^{天} \perp 呐$。

若令

$人＝天^{三} \perp 一$。

則

$\frac{彳人}{彳天}＝三天^{二}$。

而

$禾戊^{天}彳天\left(三天^{二} \perp 天^{三} \perp 一\right)＝戊^{天}\left(天^{三} \perp 一\right) \perp 呐$。

第一百四十五款　其餘各式。可用第一百三十四款之

法分求其積分。

設有微分式$\text{天}^{\text{卯}}\text{甲}^{\text{天}}\text{彳天}$。欲求其積分。則可從$\text{禾戊彳亥}=\text{戊亥}\,\text{丅}\,\text{禾亥彳戊}$式之例。令其

$\text{戊}=\text{天}^{\text{卯}}$。

$\text{彳亥}=\text{甲}^{\text{天}}\text{彳天}$。

即得$\text{禾天}^{\text{卯}}\text{甲}^{\text{天}}\text{彳天}=\dfrac{\text{甲}^{\text{天}}\text{天}^{\text{卯}}}{\text{訥甲}}\,\text{丅}\,\dfrac{\text{卯}}{\text{訥甲}}\text{禾甲}^{\text{天}}\text{天}^{\text{卯一}}\text{彳天}$。再將其$\text{甲}^{\text{天}}\text{天}^{\text{卯一}}\text{彳天}$以同法遞變若干次至末

則得

$$\text{禾}\,\text{甲}^{\text{天}}\,\text{天}^{\text{卯}}\,\text{彳天}=\text{甲}^{\text{天}}\left[\frac{\text{天}^{\text{卯}}}{\text{訥甲}}-\frac{\text{卯天}^{\text{卯}-\text{一}}}{(\text{訥甲})^{\text{二}}}+\frac{\text{卯}(\text{卯}-\text{一})\text{天}^{\text{卯}-\text{二}}}{(\text{訥甲})^{\text{三}}}-\cdots\pm\frac{\text{一}\cdot\text{二}\cdot\text{三}\cdots\text{卯}}{(\text{訥甲})^{\text{卯}+\text{一}}}\right]+\text{丙}.$$

即所求之式也。

第一百四十六款　若卯為負指數則可依同法。以天之

指數增之故可從

$$\text{禾戊彳亥}=\text{戊亥}\ \text{丅}\ \text{禾亥彳戊}$$

式之例令

$$\text{戊}=\text{甲}^{\text{天}}$$

$$\text{彳亥}=\frac{\text{天}^{\text{卯}}}{\text{彳天}}$$

即可得

$$\text{禾}\frac{\text{天}^{\text{卯}}}{\text{甲}^{\text{天}}\text{彳天}}=\frac{(\text{卯丅一})\text{天}^{\text{卯丅一}}}{\text{丅甲}^{\text{天}}}\ \text{丄}\ \frac{\text{卯丅一}}{\text{訥甲}}\text{禾}\frac{\text{天}^{\text{卯丅一}}}{\text{甲}^{\text{天}}\text{彳天}}$$

如是屢變至末則

$$\text{禾}\frac{\text{天}^{\text{卯}}}{\text{甲}^{\text{天}}\text{彳天}}$$

可藉

$$\text{禾}\frac{\text{天}}{\text{甲}^{\text{天}}\text{彳天}}$$

而得若令

$$\text{甲}^{\text{天}}=\text{人}$$

則

$$\text{天訥甲}=\text{訥人}$$

$$\text{天}=\frac{\text{訥甲}}{\text{訥人}}$$

$$\text{彳天}=\frac{\text{訥甲}}{\text{一}}\times\frac{\text{人}}{\text{彳人}}$$

所以

$$\frac{\text{天}}{\text{甲}^{\text{天}}\text{彳天}}=\frac{\text{訥甲}}{\text{一}}\times\frac{\text{訥人}}{\text{彳人}}$$

$$\text{禾}\frac{\text{天}}{\text{甲}^{\text{天}}\text{彳天}}=\frac{\text{訥甲}}{\text{一}}\text{禾}\frac{\text{訥人}}{\text{彳人}}$$

求此二積分之同數其難大略相

同算學家曾經極費心思求其解法大約除用無窮級數之外無他法可得其同數

第一百四十七款 卯若爲分指數則可用以上各法將其天之指數變之得一分數在〇與丄一丅一之間乃用無窮之級數求其積分

凡求天卯甲天伕之積分無論用何法皆可用吧甲天伕代之惟其吧必爲天之任何函數

求圓函數角函數微分式之積分

第一百四十八款 凡有一箇變數之圓函數微分或角

函數微分其求積分有數法。

第一法。以天為正弦之弧。令

$\text{正弦天}=\text{人}$。

則

$\text{餘弦天}=\sqrt{\text{一}\,丅\,\text{人}^{\text{二}}}$。

$\text{彳天}=\dfrac{\text{彳人}}{\sqrt{\text{一}\,丅\,\text{人}^{\text{二}}}}$。

而

$\text{彳天}\,\text{正弦}^{\text{寅}}\text{天}\,\text{餘弦}^{\text{卯}}\text{天}=\text{人}^{\text{寅}}\left(\text{一}\,丅\,\text{人}^{\text{二}}\right)^{\frac{\text{卯}\,丅\,\text{一}}{\text{二}}}\text{彳人}$

若其卯為奇數。則依二項之法變化而得之式。其方根之號可不見。若其寅為奇數而括弧外人之指數加一與括弧內人之指數相等者。則合于第一百三十三款之第一例。而其微分式可變為實函數。若寅卯俱為偶

數則合于一百三十三款之第二例。而其積分亦可求。

題　設其微分式為$伕正弦^{三}天$。欲求其積分。

則令$人＝正弦天$。即可變其微分式為$\frac{\sqrt{一丅人^{二}}}{人^{三}伔}$。乃依第一百三十七款之法求其積分得

$$禾\frac{\sqrt{一丅人^{二}}}{人^{三}伔}＝丅\frac{三}{一}餘弦天\left(二丄正弦^{二}天\right)丄丙。$$

第一百四十九款

第二法。其正弦之方。或餘弦之方。可以化爲級數。而其級數之各項。以正弦之弧。或餘弦之弧爲乘數者。則其各項之形。必如 伏餘弦子天。或 伏正弦子天。惟因

$$禾伏餘弦子天＝\frac{子}{一}正弦子天 丄 呐。$$

$$禾伏正弦子天＝丅\frac{子}{一}正弦子天 丄 呐。$$

故其積分易得。

一題　設其微分式爲 伏餘弦^{五}天。欲求其積分。

則可從代數術第二百五十八款。得

餘弦^{五}天＝$\frac{一}{一六}$（餘弦五天⊥五餘弦三天⊥一〇餘弦天）

所以求得

其積分式。為

禾彳天餘弦^{五}天＝$\frac{一}{八〇}$正弦五天⊥$\frac{五}{四八}$正弦三天⊥$\frac{五}{八}$正弦天⊥丙。

此為常用之法。因任幾倍弧之正

弦餘弦。比正弦弦餘弦之方。其數更易得也。

二題 設其微分式爲彳天餘弦^{二}天正弦^{三}天欲求其積分。

則可從代數術第二百六十款之式得餘弦^{二}天正弦^{三}天〓$\frac{一}{六二}$（丅正弦五天丄正弦三天丄二正弦天）。以彳天乘

之而求其積分得

$$\text{禾彳天}\,\text{餘弦}^{二}\text{天}\,\text{正弦}^{三}\text{天}=\frac{八〇}{一}\text{餘弦五天}\ 丅\ \frac{四八}{一}\text{餘弦三天}\ 丅\ \frac{八}{一}\text{餘弦天}\ \perp\ \text{呥}$$

第一百五十款

第三法已于代數術第二百七十款內言戊爲訥對之

底則

$$\text{餘弦天}=\frac{\text{二}}{\text{戊}^{\text{天斤一}}\perp\text{戊}^{\text{天斤一}}}$$

$$\text{正弦天}=\frac{\text{二斤一}}{\text{戊}^{\text{天斤一}}\top\text{戊}^{\text{天斤一}}}$$

從此式能將圓函數微分式內有正弦餘弦爲指數者變爲有指函數與對函數之微分則可用第一百四十款至一百四十五款之各法求其積分

第一百五十四款

第四法凡微分式如 $\text{正弦}^{\text{寅}}\text{天}\ \text{餘弦}^{\text{卯}}\text{天}\ \text{彳天}$ 者求其積分之法能將其式變

為他微分式令正弦餘弦之指數為更小之數

如依

$$\text{禾戊彳亥}=\text{戊亥}\,\text{丅}\,\text{禾亥彳戊}$$

之例令

$$\text{戊}=\text{正弦}^{\text{寅丅一}}\text{天}$$

$$\text{彳亥}=\text{彳天正弦天餘弦}^{\text{卯}}\text{天}$$

即得

$$\text{亥}=\text{丅}\frac{\text{卯丄一}}{\text{餘弦}^{\text{卯丄一}}\text{天}}$$

故其

$$\text{禾彳天正弦}^{\text{寅}}\text{天餘弦}^{\text{卯}}\text{天}=\text{丅}\frac{\text{卯丄一}}{\text{正弦}^{\text{寅丅一}}\text{天餘弦}^{\text{卯丄一}}\text{天}}\,\text{丄}\frac{\text{卯丄一}}{\text{寅丅一}}\text{禾彳天餘弦}^{\text{卯丄二}}\text{天正弦}^{\text{寅丅二}}\text{天}$$

此式中之

$餘弦^{卯丄二}天$。

若以其同數 $\left(一丅正弦^{二}天\right)餘弦^{卯}天$ 代之，而移其項，則得

$$禾伏正弦^{寅}天餘弦^{卯}天 = 丅\frac{寅丄卯}{正弦^{寅丅一}天餘弦^{卯丄一}天} 丄 \frac{寅丄卯}{寅丅一}禾伏正弦^{寅丅二}天餘弦^{卯}天$$

爲角式。

若將所設之式。化為兩箇乘數。如$伏餘弦天正弦^{寅}天$。與$餘弦^{卯丅一}天$而依前法變之。則可得

$$禾伏正弦^{寅}天餘弦^{卯}天 = \frac{寅丄卯}{正弦^{寅丄一}天餘弦^{卯丅一}天} 丄 \frac{寅丄卯}{卯丅一} 禾伏正弦^{寅}天餘弦^{卯丅二}天。$$

為亢式。

觀以上兩式。其角式能將正弦之指數遞變小。其亢式能將餘弦之指數遞變小。若其寅與卯為正整之數則

將(角)(亢)兩式迭用之。可得其積分。

如有

$$禾伏正弦^{三}天餘弦^{二}天＝丅\frac{五}{一}正弦^{二}天餘弦^{三}天丄\frac{五}{二}禾伏正弦天餘弦^{二}天。$$

則

$$禾伏正弦天餘弦^{二}天＝\frac{三}{一}正弦^{二}天餘弦天丄\frac{三}{二}禾伏正弦天。$$

惟因

$$禾伏正弦天＝丅\frac{三}{一}餘弦天丄丙。$$

所以得

$$禾伏正弦^{三}天餘弦^{二}天＝餘弦天\left(丅\frac{五}{一}正弦^{二}天餘弦^{二}天丄\frac{一五}{二}正弦^{二}天丅\frac{四五}{三}\right)丄丙。$$

第一百五十二款

其寅與卯若爲負指數，則必改其公式，法將㊜式之卯

變爲丅卯，即得

$$禾\frac{餘弦^{卯}天}{矢正弦^{寅}天}=丅\frac{(寅丅卯)餘弦^{卯丅}天}{正弦^{寅丅}天}丄\frac{寅丅卯}{寅丅一}禾\frac{餘弦^{卯}天}{矢正弦^{寅丅二}天}$$

爲㊞式。

依此式遞變之，則所求之積分，可藉 $\frac{\text{餘弦}^{卯}\text{天}}{\text{伕正弦天}}$ ㈠，或 $\frac{\text{餘弦}^{卯}\text{天}}{\text{伕}}$ ㈡

之積分而得，視寅之奇偶而異。

如令 人 ═ 餘弦天 則㈠式變為 $\text{丅人}^{卯}\text{伙}$，而其積分易得。 欲求其㈡

式之積分，在下款明之。

若將㈡式（亢），令其指數卯變為負，又令其右邊之數為

此邊獨有之項，變其卯為丅二，謂令其右邊之指數卯獨變，而左邊不變也。則得

（房）式如左

如

$$禾\frac{餘弦^{卯}天}{伕正弦^{寅}天}=\frac{(卯丅一)餘弦^{卯丅一}天}{正弦^{寅⊥一}天}丅\frac{卯丅一}{寅丅卯⊥二}禾\frac{餘弦^{卯丅二}天}{伕正弦^{寅}天}$$

為㊢式。

依此式遞變之，則所求之積分，可藉

$$伕正弦^{寅}天$$

㊀，或

$$\frac{餘弦天}{伕正弦^{寅}天}$$

㊁，而

得視卯之奇偶而異．其㈠式可依㊜式求其積分．其㈡式求積分之法俟後詳解之．

第一百五十三款

若寅或卯等于〇．即得

$$禾彳正弦天^{寅}=\frac{寅}{丅餘弦天正弦^{寅丅一}天}\bot\frac{寅}{寅丅一}禾彳正弦^{寅丅二}天．$$

$$禾彳餘弦天^{卯}=\frac{卯}{正弦天餘弦^{卯丅二}天}\bot\frac{卯}{卯丅一}禾彳餘弦^{卯丅二}天．$$

$$禾\frac{正弦^{寅}天}{彳}=\frac{(寅丅一)正弦^{寅丅一}天}{丅餘弦天}\bot\frac{寅丅一}{寅丅二}禾\frac{正弦^{寅丅二}天}{彳}．$$

$$禾\frac{餘弦^{卯}天}{彳}=\frac{(卯丅一)餘弦^{卯丅一}天}{正弦天}\bot\frac{卯丅一}{卯丅二}禾\frac{正弦^{卯丅二}天}{彳}．$$

第一百五十四款　若其正弦餘弦之指數皆為負可將其分子以

$$\text{餘弦}^{二}\text{天}\ 丄\ \text{正弦}^{二}\text{天} ══ 一$$

乘之則得

$$禾\frac{\text{正弦}^{寅}\text{天}\,\text{餘弦}^{卯}\text{天}}{彳天} ══ 禾\frac{\text{正弦}^{寅二}\text{天}\,\text{餘弦}^{卯}\text{天}}{彳天}\ 丄\ 禾\frac{\text{正弦}^{寅}\text{天}\,\text{餘弦}^{卯二}\text{天}}{彳天}$$

此各積分有正弦天或餘弦天在其

分母內。因寅＝卯而正弦天餘弦天＝$\frac{\text{二}}{\text{一}}$正弦二天。故可令二天＝人。而變其積分之式。爲前款中第三式之形。

第一百五十五款

茲款特設數種簡要之題。以畢圓函數微分中求積分之事。

一題　設有微分式如$\frac{\text{正弦天}}{\text{彳天}}$。欲求其積分。

則因 $正弦天＝二正弦\frac{二}{一}天餘弦\frac{二}{一}天$。所以

$$\frac{正弦天}{彳天}＝\frac{二正弦\frac{二}{一}天餘弦\frac{二}{一}天}{彳天}＝\frac{二}{一}\times\frac{正切\frac{二}{一}天}{彳正割\frac{二}{一}天}＝\frac{正切\frac{二}{一}天}{彳正切\frac{二}{一}天}$$。

故求得

$$禾\frac{正弦天}{彳天}＝訥\left(正切\frac{二}{一}天\right)丄兩$$。

二題 設有微分式如 $\frac{餘弦天}{彳天}$。欲求其積分。

以 $\frac{二}{一}周$ 代九十度之弧。令 $天＝\frac{二}{一}周丅人$。則其 $彳天＝丅彳人$。

$$餘弦天＝正弦人$$。

$$禾\frac{餘弦天}{彳天}＝禾\frac{正弦人}{丅彳人}＝$$

$$丅訥正切\frac{二}{一}人＝訥\frac{正切\frac{二}{一}人}{一}丄兩$$。

惟

$$\frac{\text{正切三人}}{二}=\frac{\text{正切}\left(\frac{四}{二}\text{周}\overset{因}{丅}三\text{天}\right)}{一}=\text{正切}\left(\frac{四}{二}\text{周}丄\frac{三}{}\text{天}\right)$$

所以求得

$$\text{禾}\frac{\text{餘弦天}}{\text{彳天}}=\text{訥正切}\left(\frac{四}{二}\text{周}丄三\text{天}\right)丄\text{呐}$$

以上兩題之積分亦可以他法明之如

$$\text{禾}\frac{\text{正弦天}}{\text{彳天}}=\frac{三}{二}\text{訥}\frac{一丄\text{餘弦天}}{一丅\text{餘弦天}}丄\text{呐}$$

$$\text{禾}\frac{\text{餘弦天}}{\text{彳天}}=\frac{三}{二}\text{訥}\frac{一丅\text{正弦天}}{一丄\text{正弦天}}丄\text{呐}$$

是也

三題　設有微分式如 $\frac{正切天}{彳天}$ 欲求其積分。

惟因 $禾\frac{正切天}{彳天}=禾\frac{正弦天}{彳天餘弦天}$。所以其積分之式為 訥（正弦天）丄两。

四題　設有微分式如 彳天正切天。欲求其積分。

則因 $禾彳天正切天=禾\frac{餘弦天}{彳天正弦天}$。所以其積分之式為 訥 $\frac{餘弦天}{一}$ 丄两。

以上各款之法。已足備尋常算學中求積分之用。故下卷且未暇論積分術中奧賾之理。而先將以上之理。解明幾何中各種最要之題。

興化劉彝程校算

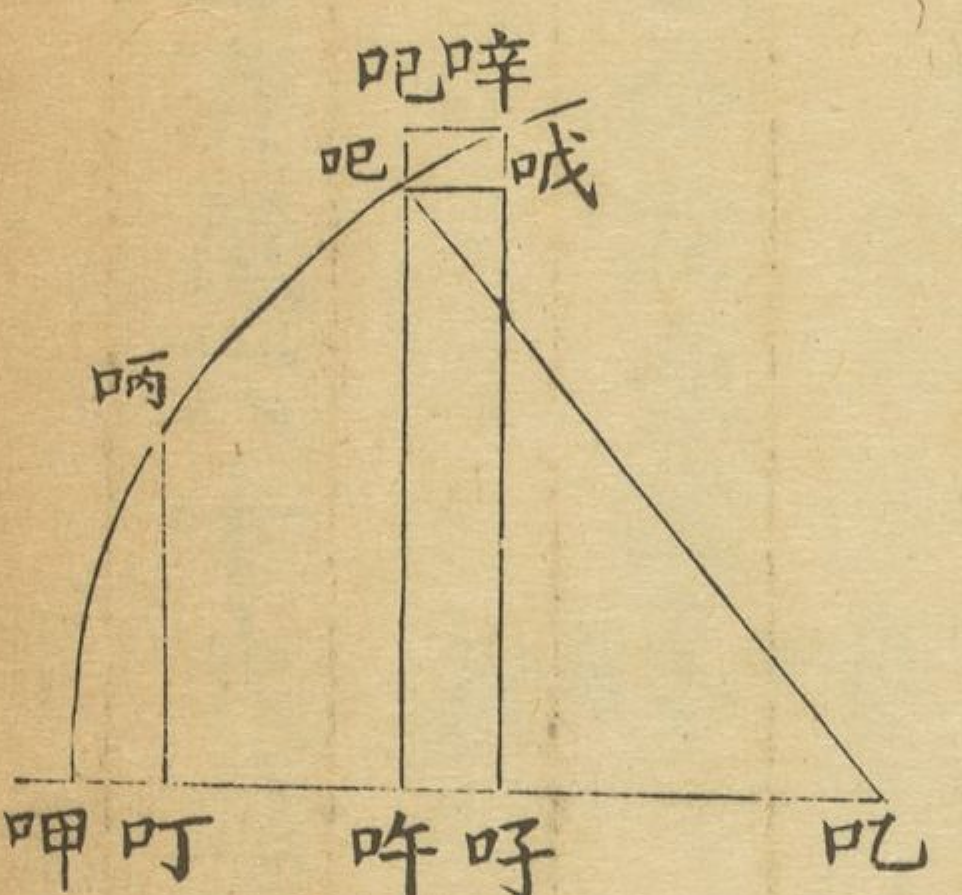
微積溯源卷七

英國華里司輯

英國　傅蘭雅　口譯
金匱　華蘅芳　筆述

求曲線之面積

第一百五十六款



設呷吃爲曲線之軸。呷咋爲橫線。以天代之。吧咋爲縱線。以地代之。又令已知方位之他縱線㖠叮與本縱線吧咋閒所有之面積。㖠叮咋吧爲申。

已在第六十九款證明 $神＝地彳天$。所以無論何種曲線其面積之公式必為 $彳申＝禾地彳天$。

一題 設曲線為拋物線巳為通徑欲求其面積。

則依本曲線之理 $地^{二}＝巳天$。故 $地＝巳^{三}天^{三}$。而 $地彳天＝巳^{三}天^{三}彳天$。所以可依第一百〇

四款之法求其積分得

申＝禾地伕＝$\frac{二}{三}$巳$^{\frac{三}{二}}$天$^{\frac{三}{二}}$丄呐

即

申＝禾地伕＝$\frac{二}{三}$地天丄呐

㊀若

$\frac{呷}{叮}$＝甲

$\frac{呐}{叮}$＝乙

則

申＝〇

天＝甲

地＝乙

如將此各同數代入㊀式中即得

〇＝$\frac{二}{三}$甲乙丄呐

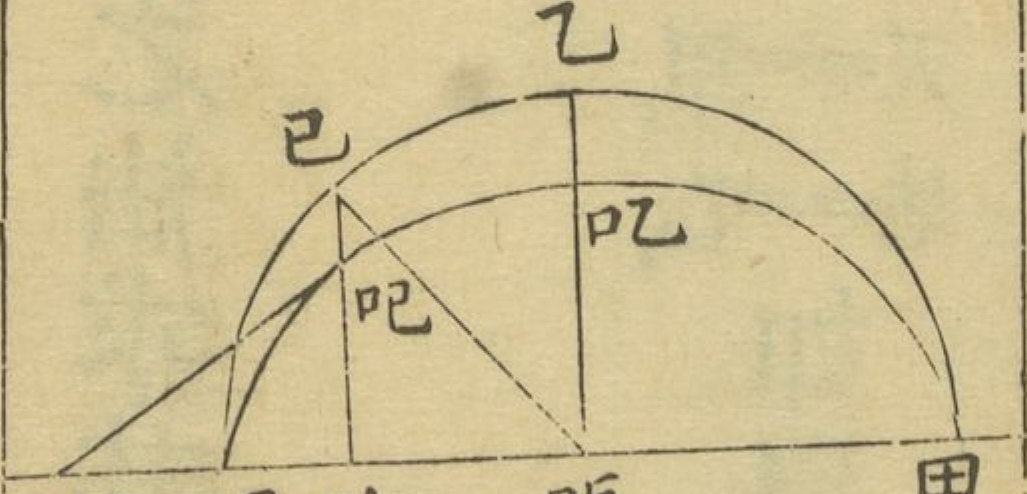
㊁再將㊁式減㊀式得

申＝$\frac{二}{三}$（天地丅甲乙）

此為消去積分式中常數之最便之法若其曲線之面積從曲線之頂點而起者

則其甲═○。乙═○。而縱橫線天地與曲線所成之面積$\frac{二}{三}$天地。恆為縱橫線所成之矩形三分之二。

二題　設曲線為平圓線。欲求其面積。



如呷巳甲為平圓。呷甲為圓徑。設圓心⿰口長為原點。⿰口長乙半徑。與⿰口長呷軸為垂線。令⿰口長吘為天。巳午為地。呷⿰口長半徑為甲。面積⿰口長吘巳乙為申。則依本曲線之理$天^{二}\perp地^{二}═甲^{二}$。故$地═\sqrt{甲^{二}-天^{二}}$。以此代入公式中得

其積分之式為

$$申=\int 地\,彳天=\int 彳天\sqrt{甲^{二}\,-\,天^{二}}\,.$$

此式不能以有窮之代數式明之所以必依二項例化為級數。如

$$\sqrt{甲^{二}-天^{二}}=\left(甲^{二}-天^{二}\right)^{\frac{一}{二}}=甲-\frac{一天^{二}}{二\cdot甲}-\frac{一\cdot一天^{四}}{二\cdot四\cdot甲^{三}}-\frac{一\cdot一\cdot三天^{六}}{二\cdot四\cdot六甲^{五}}\cdots\cdots$$

以彳天乘其各

項而求積分得

$$申=甲天\ 丅\ \frac{二}{一}\times\frac{甲^{三}}{天^{三}}\ 丅\ \frac{二\cdot四}{一\cdot一}\times\frac{甲^{五}}{天^{五}}\ 丅\ \frac{二\cdot四\cdot六}{一\cdot一\cdot三}\times\frac{甲^{七}}{天^{七}}\ 丅\cdots\cdots丄\ 㫋$$

欲求㫋之同數可令$天=〇$則$申=〇$而式之兩邊必俱爲〇所以知$㫋=〇$

如令$天=甲$則面積申爲全圜面積之四分之一惟因甲

爲半徑故平圓之全面積爲

$$四甲^{二}\left(\frac{一}{一}-\frac{一}{二}\times\frac{一}{三}-\frac{一\cdot一}{二\cdot四}\times\frac{一}{五}-\frac{一\cdot一\cdot三}{二\cdot四\cdot六}\times\frac{一}{七}-\cdots\cdots\right)$$

此級數之歛甚遲必用多項始能求得其略近之數

如令天爲六十度弧之餘弦作㖺巳線爲半徑則㖺吘巳乙面積必爲心角之面積巳㖺乙即全圓面積十二分之一與㖺吘巳句股形面積即㖺吘與巳吘相乘積之二分之一之和所成

惟因甲二·＝八／巨三＝⿰口長吘巳所以可令甲二代其級數中之天則其斂能較速用其七項之和得甲二·七五〇三八七四·此數中若減去甲二·三六〇五六一二·＝甲二／八巨則所餘者爲甲二·四九九七一六二·卽全圓面積十二分之一也故得甲二·八二九五一四一·三爲平

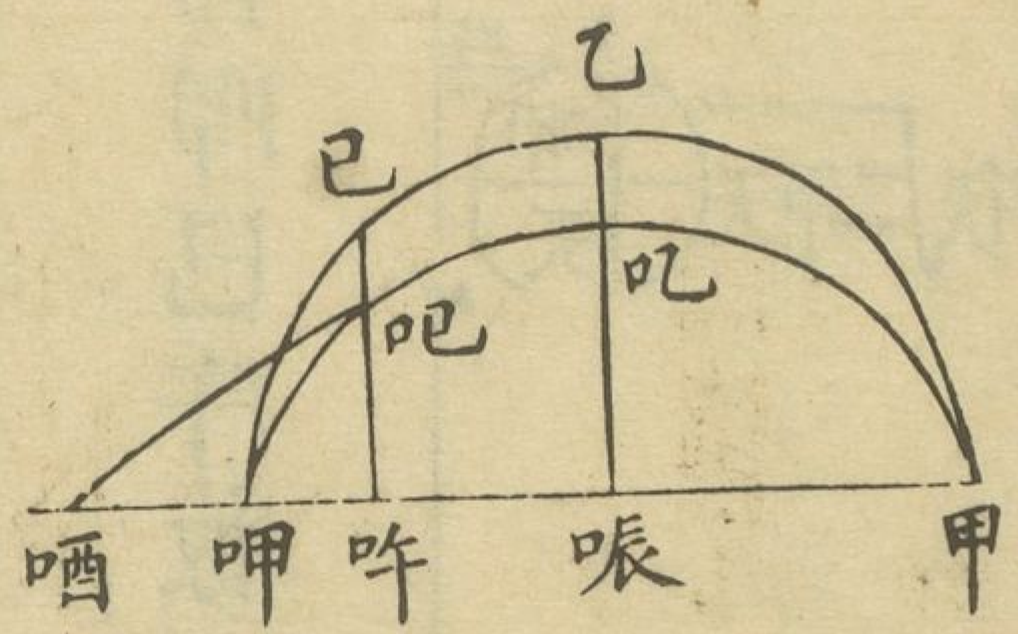
圓全面積之略數。求此數有更簡之法已見于代數術第二百七十三款中。若令呷為原點。以天代呷咋橫線。以地代巳咋縱線。而命呷巳咋截面積為申。則依平圓之理。其$地=\sqrt{二甲天\,丅\,天^{二}}$。所以得

$$申=禾彳天\sqrt{二甲天\,丅\,天^{二}}=禾彳天\sqrt{二甲天}\left(一\,丅\,\frac{天}{二甲}\right)^{\frac{一}{二}}。$$

欲明其積分之數。可將$\left(一\,丅\,\frac{天}{二甲}\right)^{\frac{一}{二}}$化為級數。以

彳天$\sqrt{二甲天}$乘其各項而求積分卽得．

三題 設曲線爲橢圓．欲求其面積．



如呷吧吘爲橢圓形．令㖃呷半長徑爲甲．令㖃叱半短徑爲乙．以呷爲原點．呷吘橫線爲天．吧吘縱線爲地．而呷吧吘面積爲申．則依本曲線之理

$$地=\frac{甲}{乙}\sqrt{二甲天丅天^{二}}$$

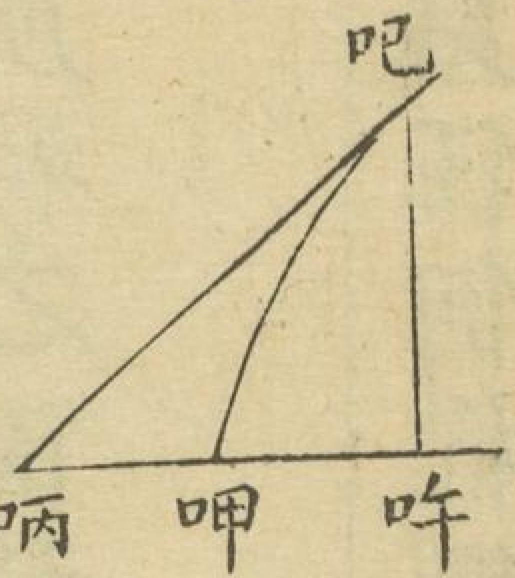
．用此同數代入公式中．卽得

$申=\int 地彳天=\frac{甲}{乙}\int 彳天\sqrt{二甲天-天^{二}}$。

令呷巳甲爲本軸上之半平圓。其巳吧吽縱線所截之面積爲申ˊ。則依上式得 $申ˊ=\int 彳天\sqrt{二甲天-天^{二}}$。所以 $申=\frac{甲}{乙}申ˊ$。由此可見任何橢圓形之截面呷吧吽。必與其長徑上平圓形之截面呷巳吽有比例。其面積之比例。恆與長短二徑之比例同。又因其天爲○之時。面積亦爲○。故

不用常數.

四題 設有雙曲線.欲求其形外之面積.



如吧呐呷為雙曲線之心角.呐為曲線之心.呐呷為半橫徑.今欲求其吧呐呷形之面積.

令其半橫徑呐呷為甲.半縱徑為乙.橫線呐咋為天.縱線吧咋為地.其吧呷呐面積.以申代之.因申等于呐吧咋形內減去呷吧咋形.故申＝$\frac{一}{二}$天地丅禾地彳天.則其面積之微分

為

$$神=\frac{二}{一}天彳地丄\frac{二}{一}地彳天丅地彳天$$

即

$$神=\frac{二}{一}(天彳地丅地彳天)$$

惟依本曲線之理。其

$$地=\frac{甲}{乙}\sqrt{天^{二}丅甲^{二}}$$

所以

$$彳地=\frac{甲}{乙}\times\frac{\sqrt{天^{二}丅甲^{二}}}{天彳天}$$

而其

$$神=\frac{二甲}{乙}\left[\frac{\sqrt{天^{二}丅甲^{二}}}{天^{二}彳天}丅彳天\sqrt{天^{二}丅甲^{二}}\right]$$

$$=\frac{二}{一}甲乙\frac{\sqrt{天^{二}丅甲^{二}}}{彳天}$$

依第一百二十五款之例。得

$$禾\frac{\sqrt{天^{二}丅甲^{二}}}{彳天}=訥\left(天丄\sqrt{天^{二}丅甲^{二}}\right)丄丙$$

所以得

$申=\frac{二}{甲乙}訥\left(天丄\sqrt{天^{三}丅甲^{三}}\right)丄丙$ ㈠。欲求其丙之同數。因每至 $天=甲$。則 $申=〇$。而㈠式變爲

$〇=\frac{二}{甲乙}訥甲丄丙$ ㈡。以此與㈠式相較。又知兩對數之較爲其眞數相約之對數。則可消去其丙。而得

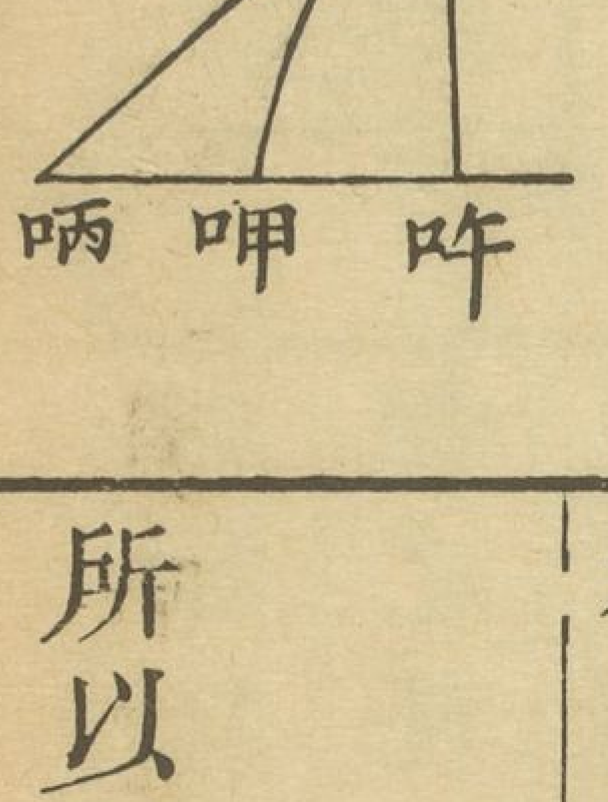
$申=\frac{二}{甲乙}訥\frac{甲}{天丄\sqrt{天^{三}丅甲^{三}}}$。又因其

$$厂天丅\frac{二}{甲}=\frac{乙}{甲地}$$

所以亦可謂

$$申=\frac{二}{甲乙}訥\left[\frac{甲}{天}丄\frac{乙}{地}\right]$$

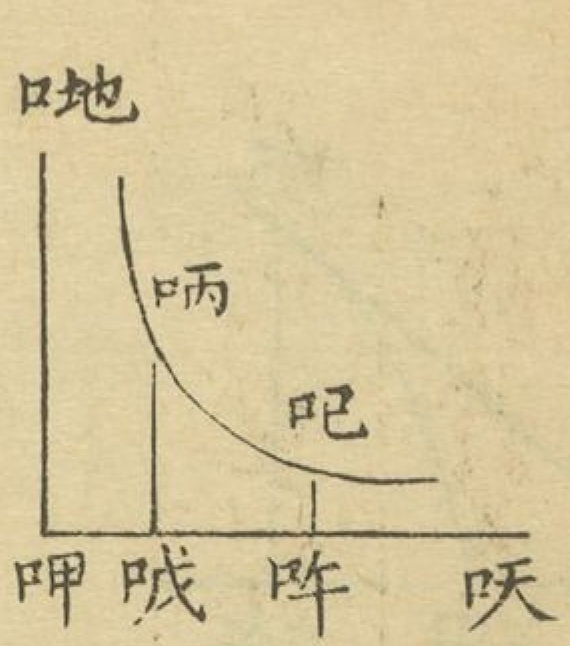
五題　設有雙曲線。欲求其形內之面積。



因呷吧咋面積。為哂吧咋三角形面積內。減去形外之面積吧呷哂所餘。所以其形內之面積為

$$申=\frac{三}{二}天地丅\frac{二}{甲乙}訥\left[\frac{甲}{天}丄\frac{乙}{地}\right]$$

六題　設有正雙曲線。欲求其漸近線與曲線間之任一段面積。



如呷呹與呷吔皆為漸近線。今從雙曲線之任一分𠰍吧。作平行二直線𠰍哦。吧咋。而截其漸近線于哦。于咋。欲求𠰍哦吧咋面積　令呷哦為甲。哦𠰍為乙。呷咋為天。吧咋為地。則依本曲線之理

$$天地=甲乙$$

故

$$地=\frac{天}{甲乙}$$

而

$$申=\int 地\,彳天=甲乙\int\frac{彳天}{天}$$

即

$$申=甲乙\,訥天\Big|^{丙}$$

(一)

因天=甲。則申=〇。而(一)式變爲〇=甲乙訥甲丄丙(二)故丙=丅甲乙訥甲。若將丙之同數代入(一)式而化其訥天丅訥甲爲訥$\frac{甲}{天}$。卽得申=甲乙訥$\frac{甲}{天}$。從此式得訥$\frac{甲}{天}$=$\frac{甲乙}{申}$。由此可見任何數$\frac{甲}{天}$之訥對。可用雙曲線之面積明之。故昔人誤名訥白爾對數爲雙曲線對數。若以噴代任何種對數之根。則必以噴訥$\frac{甲}{天}$爲其$\frac{甲}{天}$之

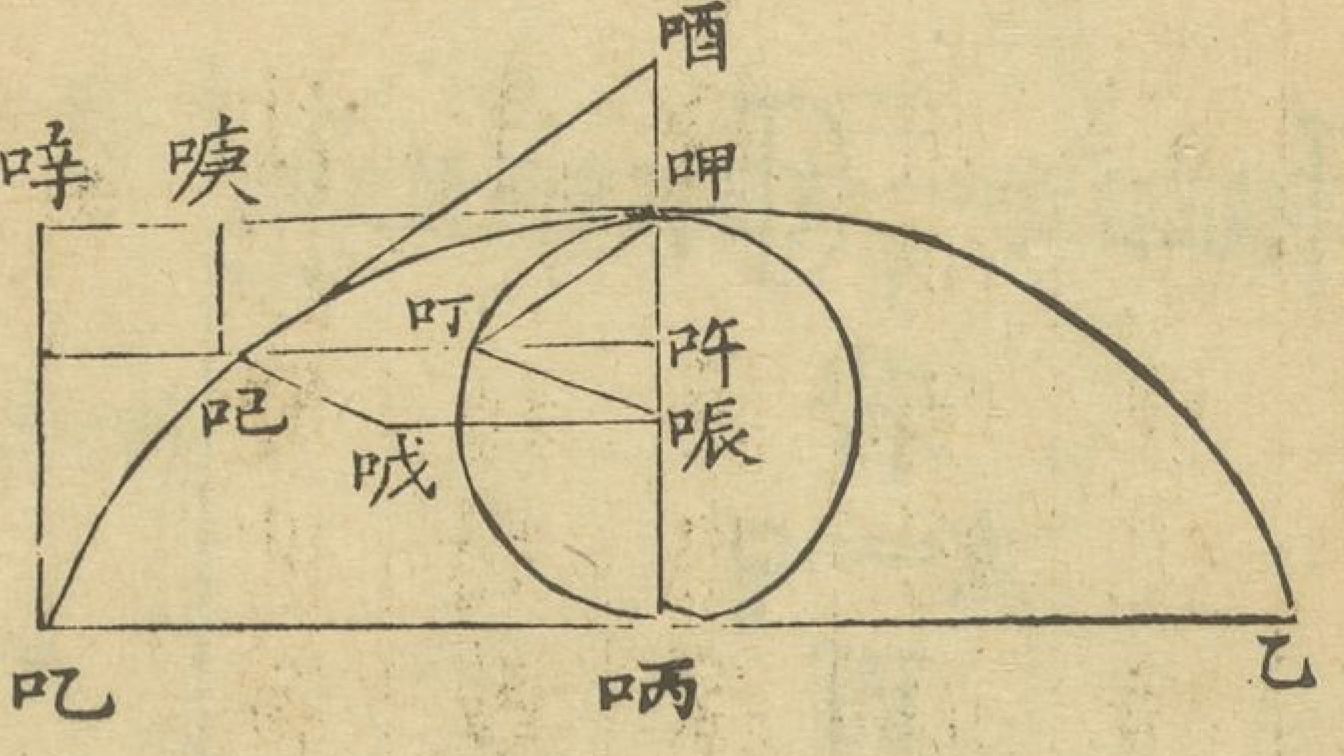
對數所以對數之法中凡以嚬爲對數之根者則有

$\text{申}\frac{\text{乙甲}}{\text{嚬}}=\frac{\text{甲}}{\text{天}}\text{對}$

之式由此可見無論何種對數皆可用幾何之法以雙曲線明之而雙曲線對數其名必不能專屬于一種對數也

七題　設曲線爲擺線欲求其形外之面積

如呷哂爲擺線之軸呷啐爲從擺線之頂點呷所作之垂線吧嗅爲從擺線之任一點所作與呷啐爲垂線之線今欲求呷嗅嗅吧兩直線與擺線之任一段



呷吧所成之呷嗼吧面積。

以㖕爲母輪之心作吧叮哻線爲呷呐之垂線而遇母輪于叮從叮至母輪之心作㖕叮半徑。

令呷嗼爲天吧嗼爲地呷㖕爲甲而呷㖕叮角爲亥

則依第六十六款之理，

吧吘＝甲(亥丄正弦亥)。

呷吘＝甲(一丅餘弦亥)。

則其

天＝甲(亥丄正弦亥)。

地＝甲(一丅餘弦亥)。

所以其

$仸＝禾後(一丄餘弦亥)$。

而

$彳申＝甲^{二}(一丅餘弦亥)(一丄餘弦亥)後$

$＝甲^{二}後正弦^{二}亥$。

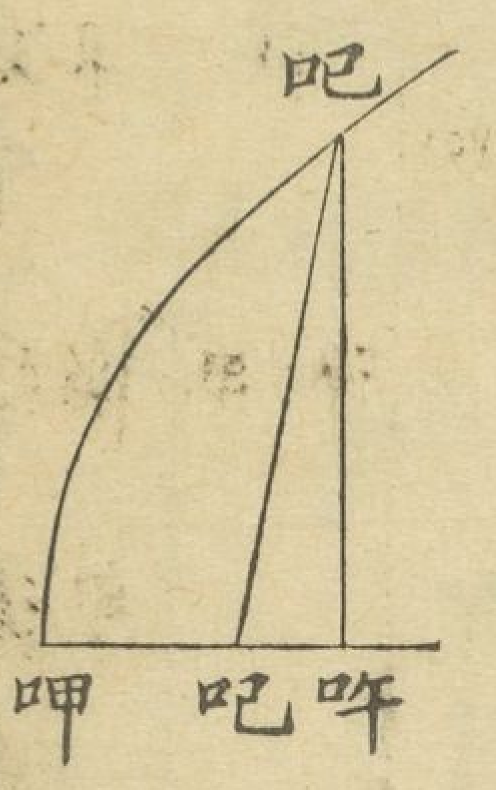
依第一百五十三款之法。求其積分。得

$申＝甲^{二}禾後正弦^{二}亥＝\frac{甲^{二}}{二}(亥丅正弦亥餘弦亥)丄丙$。

若亥＝〇。而欲令申亦為〇。則必令丙＝〇。乃以呷叮弧

代其甲亥．以$\frac{叮}{吘}\times\frac{㖂}{吘}$代其甲三正弦亥餘弦亥．得$申=\frac{二}{一}\frac{呷}{㖂}\times呷叮弧丅\frac{三}{一}\frac{叮}{吘}\times\frac{㖂}{吘}$．卽爲呷叮吘面積．

八題　設曲線爲拋物線．欲求其自心所截之面積．



𠯆爲拋物線之心．呷𠯆爲心頂距線．𠯆吧爲自心至曲線任點之帶徑．呷吧爲所截之一段拋物線．

令甲代其通徑四呷𠯆．以戊代呷𠯆吧角．以未代𠯆吧．以

申代其呷吧吧面積。乃作吧吘線。與呷吧軸為垂線。則依本曲線之理

吧吧＝呷吘丨呷吧。

惟因吧吧呷其角為鈍角。則

吧吘＝丅未餘弦亥

呷吘＝$\frac{四}{二}$甲丅未餘弦亥。

呷吧＝$\frac{四}{二}$甲。

所以

未＝$\frac{二}{二}$甲丅未餘弦亥。

而

未（一丄餘弦亥）＝$\frac{二}{二}$甲。

惟因

一丄餘弦亥＝二餘弦^{二}$\frac{二}{一}$亥

則

未＝$\frac{四}{甲}$ ╳ $\frac{餘弦^{二}\frac{二}{一}亥}{一}$。

依第七十款之㊂式

神＝$\frac{二}{一}$未^{二}後。

則

神＝$\frac{六}{甲^{二}}$ ╳ $\frac{餘弦^{四}\frac{二}{一}亥}{\frac{二}{一}後}$。

欲求此式之積分。可思

$\frac{餘弦^{二}\frac{二}{一}亥}{\frac{二}{一}後}$＝正割^{二}$\frac{二}{一}$亥$\frac{二}{一}$後

＝彳（正切$\frac{二}{一}$亥）。

而

$$\frac{餘弦\overset{二}{三}亥}{一}=正割\overset{二}{\underset{二}{三}}亥=一\perp正切\overset{二}{\underset{二}{三}}亥$$

將此兩式相乘則

$$\frac{餘弦\overset{四}{三}亥}{三後}=彳\left(正切\overset{三}{\underset{二}{三}}亥\right)\perp正切\overset{二}{\underset{二}{三}}亥彳\left(正切\overset{二}{三}亥\right)$$

故依第一百〇四款之法求其積分得

$$禾\frac{餘弦\overset{四}{三}亥}{三後}=正切\overset{三}{\underset{二}{三}}亥\perp\overset{三}{\underset{三}{三}}正切\overset{三}{\underset{二}{三}}亥\perp呐$$

若 亥$=$〇 則 申$=$〇 所以 呐$=$〇 則得

$$申=\frac{六}{申}\left(正切\overset{三}{\underset{二}{三}}亥\perp\overset{三}{\underset{三}{三}}正切\overset{三}{\underset{二}{三}}亥\right)$$

案

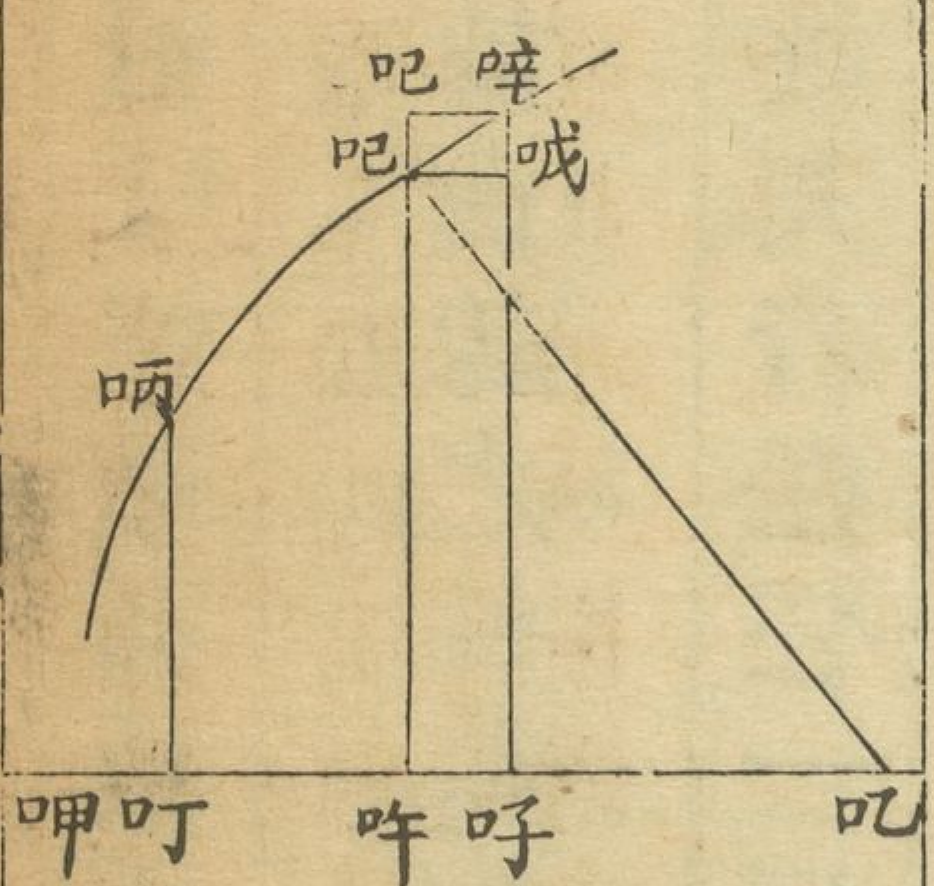
此式之積分數亦可依第一百五十三款之法得之惟不如此法之易耳

從此題所推得之各式為天文家推算彗星軌道所必用之法

第一百五十七款

因平面上任何曲線之面積能以禾地彳天明之其縱線地為橫線天之函數所以反其說則任何積分數亦能用幾何之法以曲線之面積明之觀其積分之幾何式易知異于尋常代數之函數

積分式之所以異于代數之函數者。因代數之函數如甲丄乙天卯。甲天。正弦天。⋯⋯其各式有一定之同數。與天之已知之同數相配。而與其前後之各數不相關。惟積分之式。則不然。其禾地伏所當之面積。在變數天漸變其大小之間。



如呥叮咋吧面積。即可當禾地伏。若其曲線為拋物線。則可用呥丄地天三明之。故非求得其呥之同數。與消去其呥。

則呞叮吘吧面積不能知也。

無論曲線之性情如何。其呞叮吘吧面積。必等于禾地伕其變數天若從任一同數呷叮增大。至為他同數呷吘。而其呷叮呷吘之大小已知。又其天與地相比之式亦已知。則必能推得其呞叮吘吧之面積。故其面積之式。可用公式

禾$^{甲}_{乙}$地伕＝呞叮吘吧面

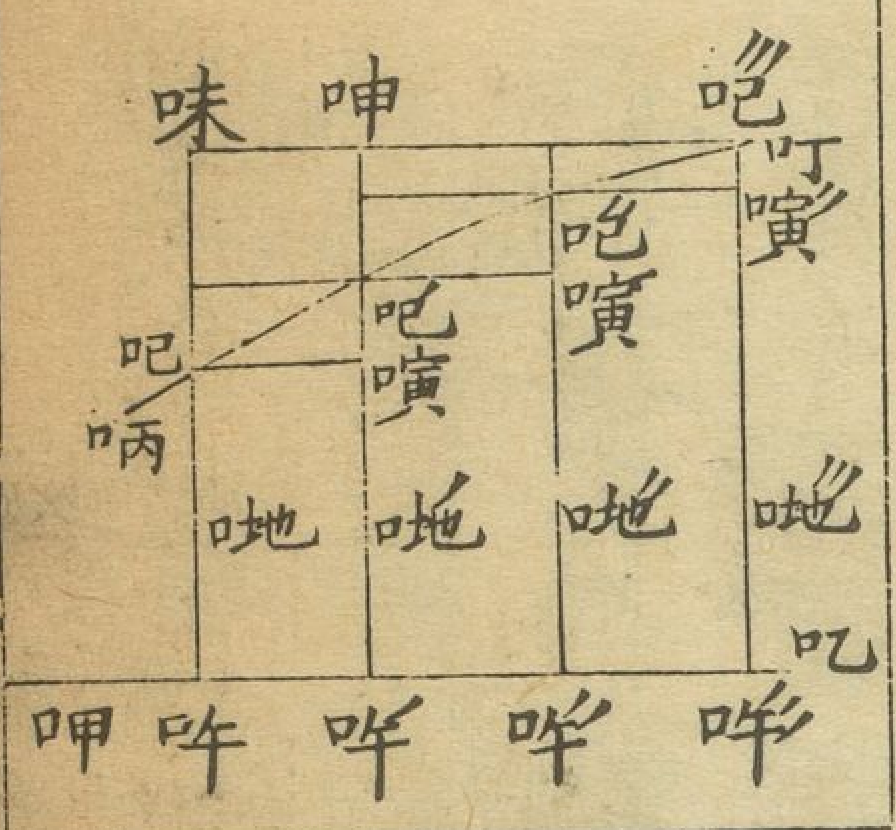
以賅之。其甲與乙。以代呷叮與呷吘。

觀以上所論。可知任何積分式。尚為未定之數。而其所以得此式者。因其變數之同數。能改變之故也。若欲求

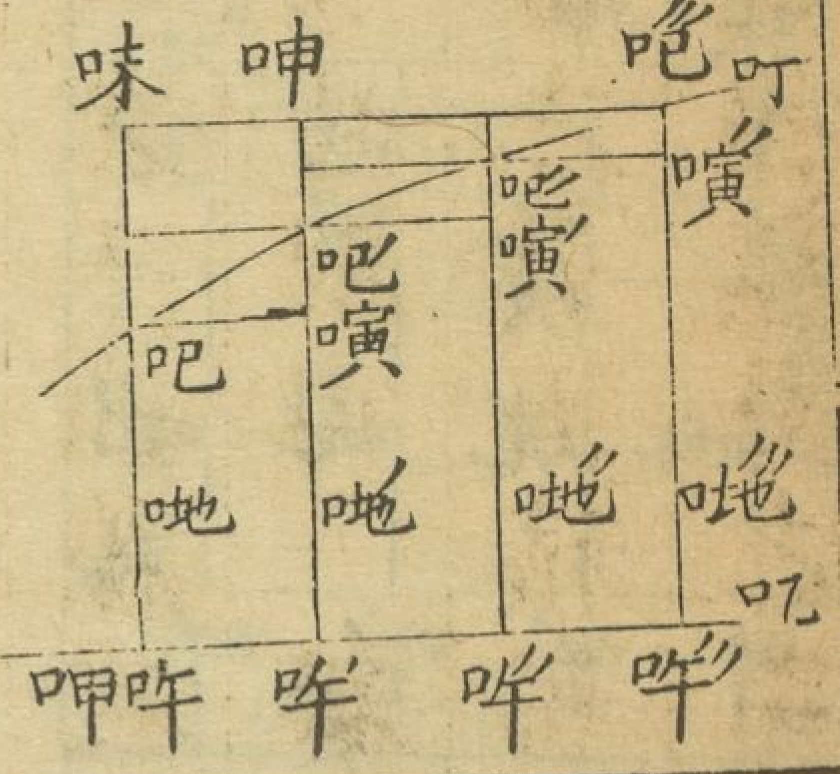
其一定之同數。必查其先後之兩同數。方可知之。

第一百五十八款　如前款之說。則積分式與曲線之面積甚相似。而稍有不同。可見必有一公法。求其面積之數。使甚近于眞。

即如令地爲天之任何函數。而欲求天＝甲天＝乙閒之禾地彳天是也。



如呐吧叮爲任何曲線。呷吃爲其軸。縱線爲地。橫線爲天。其呷咋爲天之小同數。以甲代之。呷咋″爲天之大同數。以乙代之。而作縱線吧咋、吧″咋″。則



吧吘吧″吘″面積。為所設之積分幾何式。無論何種曲線。皆可依此法以求其積分而得面積之數。

若將吘吘″分為任多等分。在吘吘″各點。作吧吘。吧′吘′。各縱線。則能分全形為吧吧′吘′吘。及吧′吧″吘″吘′各段。乃作級式之各矩形。如吧吘′。吧′吘″。吧″吘‴。則諸矩形俱在曲線之內。故其諸矩形之和。必小于曲線之面積。再作級式之各矩形。如吧′吘。吧″吘′。吧‴吘″。則此諸矩形之和。必大于曲線之面積。惟此各矩形之廣恆為已知之數。又

從曲線之理，則各矩形之高，亦爲已知之數，故各矩形之面積，可以從此推得。惟因切于曲線內之各矩形，其和必小于曲線面積，其切而微露于曲線外之各矩形，其和必大于曲線面積，故以兩種矩形相減，卽爲吧嗩呻味，設其底吧嗩吘（卽吘）爲甚小之數，則其吧嗩呻味面積，可小于能名之面，如此則可得積分之略近數，能令其差于曲線之眞面積極微。再作吧吧，吧，吧，吧，吧，各通弦，則得一級形之四不等邊形，而此各形之和，與曲線之眞面積相較，其差更小于兩種矩形之較，如此則能得積分之略數甚近于眞。玆設一題于下，以明

此法之用．

題　設有$\text{禾}^{〇}_{一}\frac{一\perp天^{二}}{彳天}$．欲求其積分之略近數．

其$\text{禾}\frac{一\perp天^{二}}{彳天}$爲有切線爲天之弧．所以得天＝〇與天＝一間積分之同數．其弧爲半平圓四分之一．其平圓以一爲半徑故此題中曲線之式爲地＝$\frac{一\perp天^{二}}{一}$．設分其吘吘″爲十等分．則可令天＝〇天＝〇一天＝〇二以至天＝一．則得十一箇等相距之縱線．各爲地

之同數如下。

(一)一.○○○○○
(二).九九○一○
(三).九六一五四
(四).九一七四三
(五).八六二○七
(六).八○○○○
(七).七三五二九
(八).六七一一四
(九).六○九七五
(十).五五二四九
(十一).五○○○○

欲依幾何之例。求其各四不等邊形所成之總面積。必將縱線之和倍之。以首末兩縱線減之。以二約之。以縱線之數十一乘之則可得$禾_{○}^{一}\frac{丄天}{一伕}$之同數爲.七八九八一。此卽曲線內之面積。

此題若以級數明之。則其眞同數爲$一\,丅\,\frac{一}{三}\,丄\,\frac{一}{五}\,丅\,\frac{一}{七}\,丄$.....此級數之

斂甚遲。故不能用。惟以他法能得其更近之略數為

七八五四不盡。

第一百五十九款　設其吧吘。吧′吘′。各縱線漸增多。則其

內矩形之和積漸增。而外矩形之和積漸損。

惟因各矩形之廣。為天之各同數呷吘。呷吘……之較。故

可以吘吘為各縱線之公相距。而易求禾地伕在 $天=\frac{呷}{吘}=甲$ $天=\frac{呷}{吘''}=乙$

兩限之間面積之略數。

法將甲丅乙分為卯等分。而代以辛。乃求其咃咃咃至卯咃之 吘吘

各同數。卽爲呲之定同數。與

天═甲

天═甲|辛

天═甲|二辛

至

天═甲|卯辛═乙

相配之數。

再設其縱線恆增大。則禾甲乙地伕 大于

辛[呲|呲|呲|…|呲(卯一)] (一)。而小于

辛[呲|呲|呲|…|呲(卯)] (二)。此

兩式之相較爲 (呲(卯)呲 辛)。如令辛爲甚小之數。則其較可甚微。若有正弦在斂級數中者。其理亦同。若各縱線先增而後損。則其甲乙可分爲兩分。其一分爲地之漸增

者．一分為地之漸損者．各依前法求之．

其與地相等之天函數．無論如何．若從天＝甲至天＝乙恆為有窮之數．則令呲呲呲至呲(卯)代其地．可得

禾甲乙地伕＝辛呲丄辛呲丄辛呲丄⋯丄呲辛．　(卯十一)

來本之名其伕地禾為無窮小數辛呲丄辛呲⋯之和．故積分之名．自此而起．

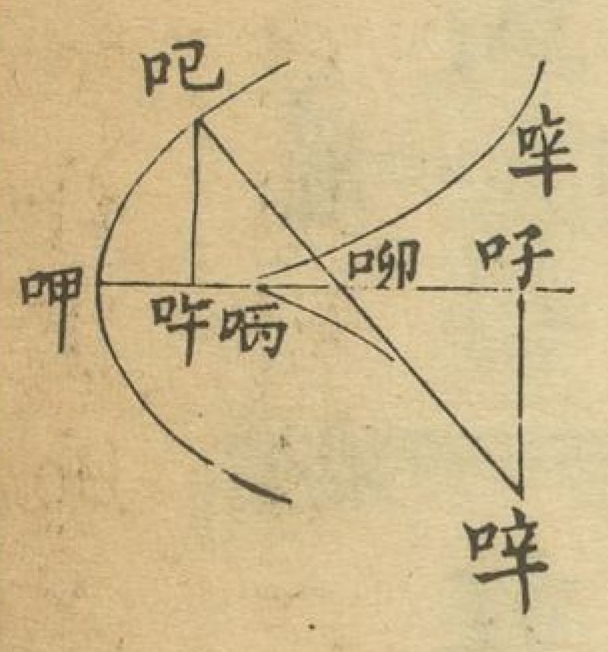
因辛為小至無窮之數．而能以天之微分代之．故伕地為

其積之微分。

求曲線之長

第一百六十款　已于第七十二款中。論以人代曲線之任何弧。而有正角相遇之縱橫線天與地。則其弧微分式為$彳人=\sqrt{彳天^{二}\perp彳地^{二}}$。茲用此公式以解數種曲線之題。

一題　設曲線為拋物線。欲求其弧之長。



命呷咋＝天。吧咋＝地。通徑為二甲。則從本曲線之

式

$$二甲天＝地^{二}$$

得

$$甲彳天＝地彳地。$$

故

$$彳人＝\sqrt{彳天^{二}丄彳地^{二}}＝\frac{一}{甲}彳地\sqrt{甲^{二}丄地^{二}}。$$

以此與第一百三十五款之阝乙式相比得

$$寅＝一。$$
$$卯＝二。$$
$$巳＝三。$$
$$乙＝一$$

地代天而$甲^{二}$代甲。則得

$$禾彳地\sqrt{甲^{二}丄地^{二}}＝\frac{一}{二}地\sqrt{甲^{二}丄地^{二}}丄\frac{甲^{二}}{二}禾\frac{彳地}{\sqrt{甲^{二}丄地^{二}}}。$$

又從

第一百三十款之式。知

$$禾\frac{\sqrt{甲^{二}丄地^{二}}}{彳地}=訥\left(地丄\sqrt{甲^{二}丄地^{二}}\right)丄呐。$$

所以得

$$人=\frac{二甲}{地}\sqrt{甲^{二}丄地^{二}}丄\frac{二}{甲^{二}}訥\left(地丄\sqrt{甲^{二}丄地^{二}}\right)丄呐。$$

其曲線從頂點起時。$人=〇$。而 $地=〇$。所以知 $呐=丅\frac{二}{甲^{二}}訥甲$。而得

$$人=\frac{二甲}{地}\sqrt{甲^{二}丄地^{二}}丄\frac{二}{甲^{二}}訥\frac{甲}{地丄\sqrt{甲^{二}丄地^{二}}}$$

為拋物線之長

二題　設曲線為立方拋物線。欲求其弧之長。

本曲線之式為 $地^{三}=甲天^{二}$。以此從公式得 $彳人=彳地\sqrt{一+\frac{四甲}{九地}}$。故得 $人=\frac{二七}{八}\sqrt{\left(一+\frac{四甲}{九地}\right)^{三}}+丙$。此曲線眞能作之。卽第八十一款第一題之漸伸線也。

三題　設曲線為平圓線。欲求其弧之長。

以圓心為原點。甲為半徑。則本曲線之式為 $天^{二}+地^{二}=甲^{二}$ 所以 $地=\sqrt{甲^{二}-天^{二}}$。$彳地=\frac{\sqrt{甲^{二}-天^{二}}}{天彳天}$。$彳人=\frac{\sqrt{甲^{二}-天^{二}}}{甲彳天}$。此式之積分。除用無窮級數之外。無

他法能明之。已于一百三十九款第四題求得其級數。惟其級數內之半徑爲一。若欲令半徑爲甲。則可將$\frac{甲}{天}$代其天。而得

$$人=天丄\frac{二}{一}\times\frac{三甲^{三}}{天^{三}}丄\frac{二\cdot四}{一\cdot三}\times\frac{五甲^{五}}{天^{五}}丄\frac{二\cdot四\cdot六}{一\cdot三\cdot五}\times\frac{七甲^{七}}{天^{七}}丄\cdots\cdots$$

此級數不必加常數。因其人與天同時而起之故。

觀此題與一百五十六款之第二題及一百三十九

款之第二題。可見凡求等于平圓面積之平方面積及等于圓周之直線。不出乎以下三式。

$$禾 彳天 \sqrt{一丅天^{二}}\text{。}\quad 禾\frac{彳天}{\sqrt{一丅天^{二}}}\text{。}\quad 禾\frac{彳天}{一丄天^{二}}$$

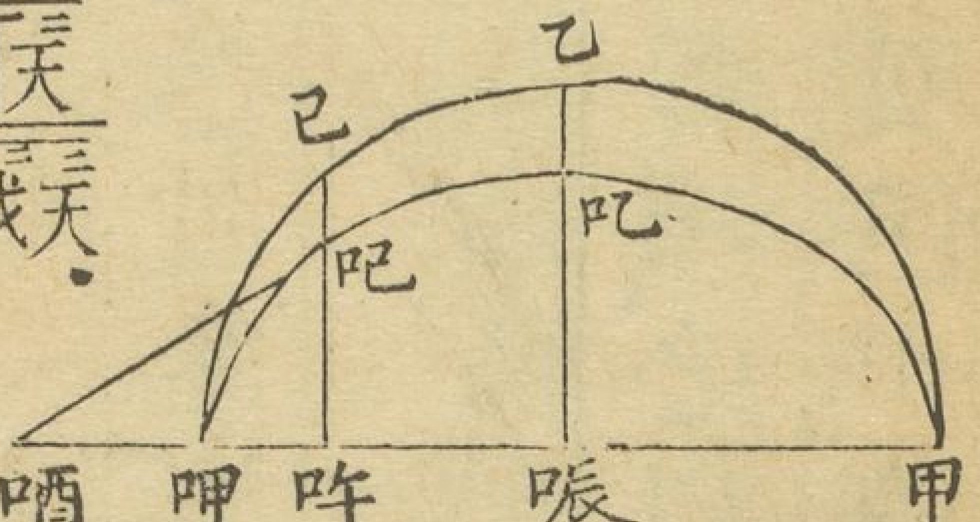
此三式皆須藉訥對而得。其數不能以有窮之代數式明之。所以從古至今。未有人能解此種幾何之題。恐後世之人。亦未必能之也。

四題　設曲線為橢圓線、欲求其弧之長。

令半長徑唇呷為一。半短徑唇吃為乙。以 $\sqrt{一丅乙^{二}}=戊$ 為兩心距。唇為原點。唇吘為天。吧吘為地。令其弧從短徑之

端而起。以人代其叱吧弧。則依本曲線之理 $地=乙\sqrt{一丅天^{二}}$。所以 $彳地=\frac{\sqrt{一丅天^{二}}}{丅乙天彳天}$。則其弧微分之式爲

$$彳人=\sqrt{彳天^{二}丄彳地^{二}}=\frac{\sqrt{一丅天^{二}}}{彳天\sqrt{一丅(一丅乙^{二})天^{二}}}=\frac{\sqrt{一丅天^{二}}}{彳天\sqrt{一丅戊^{二}天^{二}}}。$$



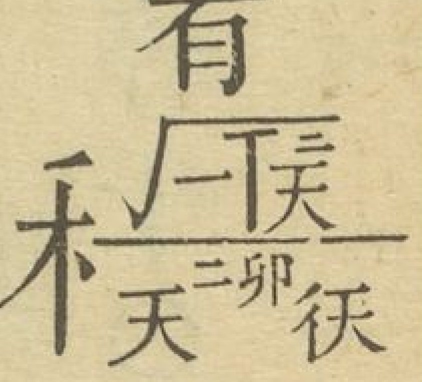
此式之積分。不能以平圓之弧及對數明

之。故只能依二項例化為無窮級數

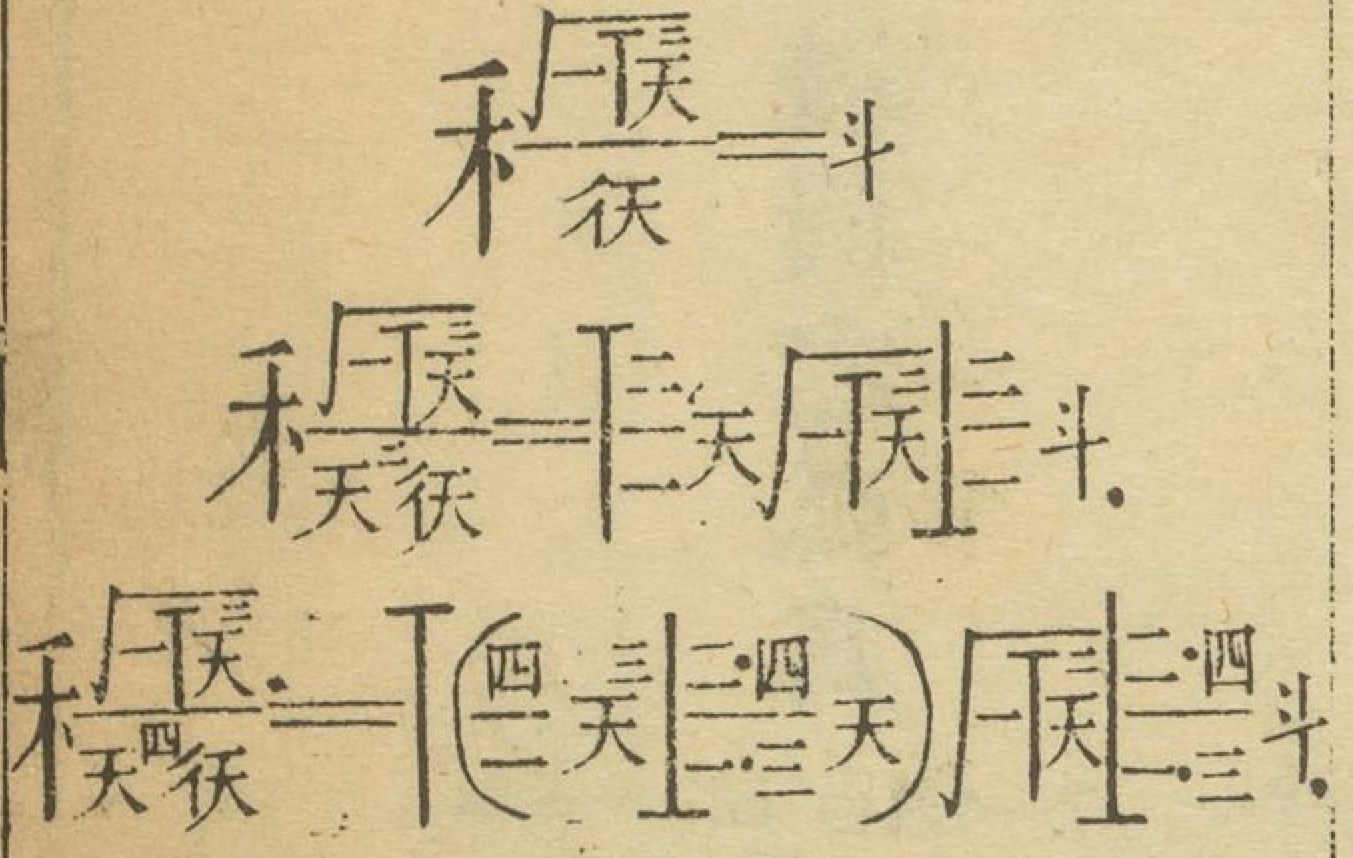
$$\sqrt{\text{一}\,\text{丅}\,\text{戊}^{\text{二}}\text{天}^{\text{二}}}=\text{一}\,\text{丅}\,\frac{\text{一}}{\text{二}}\text{戊}^{\text{二}}\text{天}^{\text{二}}\,\text{丅}\,\frac{\text{一}\cdot\text{一}}{\text{二}\cdot\text{四}}\text{戊}^{\text{四}}\text{天}^{\text{四}}\,\text{丅}\,\frac{\text{一}\cdot\text{一}\cdot\text{三}}{\text{二}\cdot\text{四}\cdot\text{六}}\text{戊}^{\text{六}}\text{天}^{\text{六}}\,\text{丅}\,\frac{\text{一}\cdot\text{一}\cdot\text{三}\cdot\text{五}}{\text{二}\cdot\text{四}\cdot\text{六}\cdot\text{八}}\text{戊}^{\text{八}}\text{天}^{\text{八}}\,\text{丅}\cdots\cdots$$

此級數之各項。必以$\frac{\text{彳天}}{\sqrt{\text{一}\,\text{丅}\,\text{天}^{\text{二}}}}$乘之。乃求其積分。則其諸項之和。能明任一段弧之長。

其級數所以易求積分者，因將其倍數例于禾號之外，則各級皆有



之形，所以皆可依第一百三十七款之二式求之，即如令斗為有正弦為天之弧，可得



……以其原相配之各倍數還之，即

得橢圓之弧爲

$$人＝斗\left(一\,丅\,\frac{一}{二·二}戊^{二}\,丅\,\frac{一·一·三}{二·二·四·四}戊^{四}\,丅\,\frac{一·一·三·三·五}{二·二·四·四·六·六}戊^{六}\,丅\,……\right)$$

$$丄\,\frac{一}{二}戊^{二}\left(\frac{一}{二}天\sqrt{一丅天^{二}}\right)$$

$$丄\,\frac{一·一}{二·四}戊^{四}\left(\frac{一}{四}天^{三}\,丄\,\frac{一·三}{二·四}天\right)\sqrt{一丅天^{二}}$$

$$丄\,\frac{一·一·三}{二·四·六}戊^{六}\left(\frac{一}{六}天^{五}\,丄\,\frac{五}{四·六}天^{三}\,丄\,\frac{一·三·五}{二·四·六}天\right)\sqrt{一丅天^{二}}$$

$$丄\,………$$

此式不必用

常數呐。因天等于〇之時。弧亦爲〇故也。如令$天＝一$。則凡以$\sqrt{一丅天^{二}}$所乘之各項俱不見。而$斗＝象限＝\frac{一}{二}周$。卽得橢圓周四

分之一爲$\frac{呷}{叱}=\frac{周}{二}\left(一-\frac{一^{二}}{二^{二}}戊^{二}-\frac{一^{二}\cdot三^{二}}{二^{二}\cdot四^{二}}\frac{戊^{四}}{三}-\frac{一^{二}\cdot三^{二}\cdot五^{二}}{二^{二}\cdot四^{二}\cdot六^{二}}\frac{戊^{六}}{五}-\cdots\cdots\right)$如戊爲小數。則此式之斂尚速。惟戊若略近于一。則其斂極遲而無用。如必欲藉級數以得橢圓之弧。則更有他種級數式。可合于戊近于一之用。惟因以上各款中。未及證明其$\frac{\sqrt{一-天^{二}}}{彳天\sqrt{一-戊^{二}天^{二}}}$式求積

分之公法故此處亦略之。

如令斗代有正弦為天之弧則亦可以 $彳斗\sqrt{一丅戊^{二}正弦^{二}斗}$ 明之此式為算學家極費工夫所思得者也。

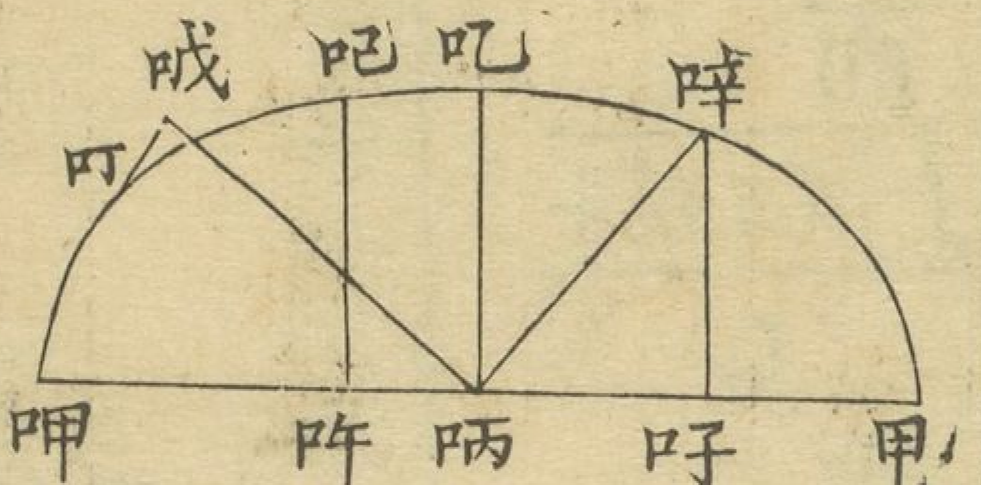
若欲求雙曲線之長可從其本曲線之式 $地=乙\sqrt{天^{二}丅一}$ 如橢圓弧之法求之。

第一百六十一款　兹將法固納尼所致得橢圓形之奇理論之。

近時代數學家所查出算理中最巧妙之事多以法固

納尼之理爲本。

如呷叱甲爲橢圓形。叮爲曲線上之任一點。叮哦爲其



切線。從中點呐作呐哦線。爲切線之垂線。又從呐點與切線平行作呐啐線。則此線爲自呐至叮之縱徑線。又自啐點作啐吁線。與軸成正角。

令呐呷爲一。呐叱爲乙。$\sqrt{\text{丅乙}^{\text{二}}}=\text{戊}$爲兩心距。垂線呐哦爲巳。切線叮哦爲酉。其呷呐哦角等于呐啐吁角。以斗代之。而以呷叮弧爲人。

則依橢圓之理

$$\frac{\text{呐}^{二}}{\text{呷}}\times\frac{\text{啐}^{二}}{\text{呼}}=\frac{\text{呐}^{二}}{\text{吃}}\left(\frac{\text{呐}}{\text{呷}}丅\frac{\text{呐}^{二}}{\text{呼}}\right).$$

因

$$\frac{\text{啐}}{\text{呼}}=\frac{\text{呐}}{\text{啐}}\text{餘弦斗}.$$

$$\frac{\text{呐}}{\text{呼}}=\frac{\text{呐}}{\text{啐}}\text{正弦斗}.$$

而

$$\frac{\text{呐}^{二}}{\text{啐}}\text{餘弦}^{二}\text{斗}=\text{乙}^{二}\left(一丅\frac{\text{呐}^{二}}{\text{啐}}\text{正弦}^{二}\text{斗}\right).$$

從此得

$$\text{乙}^{二}=\frac{\text{呐}^{二}}{\text{啐}}\left(\text{餘弦}^{二}\text{斗}丄\text{乙}^{二}\text{正弦}^{二}\text{斗}\right).$$

所以

$$\text{乙}^{二}=\frac{\text{呐}^{二}}{\text{啐}}\left(一丅\text{戊}^{二}\text{正弦}^{二}\text{斗}\right).$$

而

$$\frac{\text{呐}}{\text{啐}}=\frac{\sqrt{一丅\text{戊}^{二}\text{正弦}^{二}\text{斗}}}{\text{乙}}$$

惟又依橢圓之理

$$\frac{\text{呐}}{\text{啐}}=\frac{\frac{\text{呐}}{\text{哎}}}{\frac{\text{呐}}{\text{呷}}\times\frac{\text{呐}}{\text{吃}}}=\frac{\text{巳}}{\text{乙}}.$$

所以

$$\text{巳}=\sqrt{一丅\text{戊}^{二}\text{正弦}^{二}\text{斗}}.$$

因巳子

第七十五款中證明

$彳(人\perp酉)=巳科$。則其

$人\perp酉=禾巳科$。所以知

$人\perp酉=禾科\sqrt{一丅戊^{二}正弦^{二}斗}$。

如于半長徑呴呷內。令

$\frac{戌}{呴呷}=正弦斗$。$\frac{呴}{咋}=\frac{呴}{呷}正弦$

作縱線咋吧。令

$人=\frac{吃}{吧弧}$。則依

前條之

$仈=科\sqrt{一丅戊^{二}正弦^{二}斗}$。其

$人=禾科\sqrt{一丅戊^{二}正弦^{二}斗}$。從此可見

$人\perp酉$與人之函數其積分之式

必無異理其所以不同者在其常數耳即火丄酉═人丄丙是也惟若人═○則其斗═○．火═○．酉═○．所以其變數人火與酉為同時而生故其丙═○而無常數則火丄酉═人．人丅火═酉．所以攷得橢圓形最奇之性情．

為在曲線上任一點叮作切線叮戉從中點丙作丙戉戉丙呷．為其垂線在丙呷內作丙吘等于弦正丙呷又作吧吘縱線

則橢圓弧叱吧與呷叮之較，必等于切線叮哎，此卽法固納尼所攷得之奇理也。

由此知橢圓之形，無論如何，若其任一段之弧已知，又能依幾何之法求其他弧，則其兩弧之較數，可以直線明之。

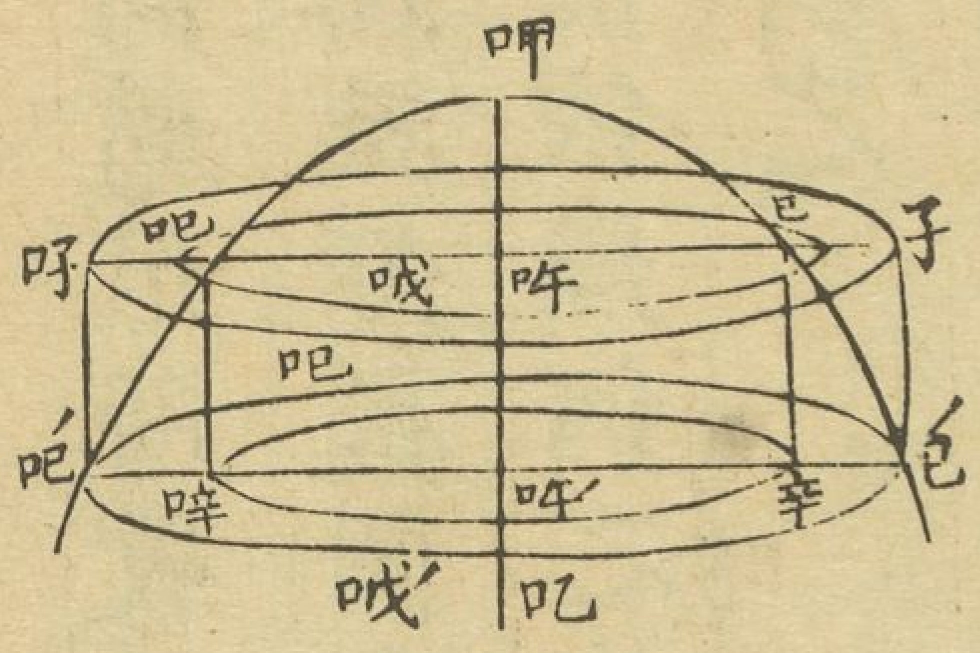
已于第七十五款攷得凡曲線內之 $\text{酉}=\frac{\text{彳斗}}{\text{丅彳巳}}$。故橢圓形內之 $\text{巳}=\sqrt{\text{一丅戊}^{二}\text{正弦}^{二}\text{斗}}$。而其 $\frac{\text{彳斗}}{\text{彳巳}}=\frac{\sqrt{\text{一丅戊}^{二}\text{正弦}^{二}\text{斗}}}{\text{丅戊}^{二}\text{正弦斗餘弦斗}}$。所以無論切線之長若干，必得 $\text{人丅八}=\frac{\sqrt{\text{一丅戊}^{二}\text{正弦}^{二}\text{斗}}}{\text{戊}^{二}\text{正弦斗餘弦斗}}$。

案雙曲線亦有與此相類之性，此書中不及詳言。

求曲線所成之體積。

第一百六十二款

如呷叱為任何曲線平面積吧呷巳′之軸，吧吘及吧′吘為與軸成垂線之縱線，作吧′呼為吧吘之垂線，乃令呷吧′吘平面，繞呷叱軸而旋轉一周，則能成一實體呷吧′哦′巳′，其吧吘吘′啐與吧′吘′吘呼，兩箇距形，必各成圓柱形，其底為吧哦巳與吧′哦′巳′兩箇平圓，而其公高為吘吘′。



其呷咋以天代之其呷咋以天代之其吧咋以地代之

其吧咋以地代之又以申代其呷吧咋面所成之體積

以申代其呷吧咋面所成之體積以周字代周率三・一

四一六則吧哎巳圓柱之積爲地二（天丅天）周吧哎巳圓柱積爲地亻（天丅天）周

其曲線之面積吧咋咋吧所成之體積因大于內圓柱

而小于外圓柱則申丅申大于地二（天丅天）周而小于地亻（天丅天）周所以天丅天／申丅申大于

地二周而小于地亻周再設其吧哎巳平圓漸等于吧哎巳平圓

則其周地^{二}爲$\frac{夭}{申}\Big|\frac{天}{申}$之限。所以$\frac{伕}{神}$＝周地^{二}。而神＝周地^{二}伕。則申＝周禾地^{二}伕。依此式能求得任何曲線之平面積旋轉一周所成之體積。

第一百六十三款

一題　設曲線爲拋物線。欲求其體積。

則依本曲線之理地^{二}＝甲天。所以申＝周禾甲天伕。即申＝三周甲天$^{二}\Big|$呐。即申＝三周天地$^{二}\Big|$呐。其體積在天＝○之時申＝○。故呐＝○。惟因周天地^{二}爲有與拋物體同底同高之圓

柱積。所以知凡拋物線所成之體積。必得同底同高

圓柱積之半。

從此幾何之理。能求兩箇平剖面內之截拋物體。法

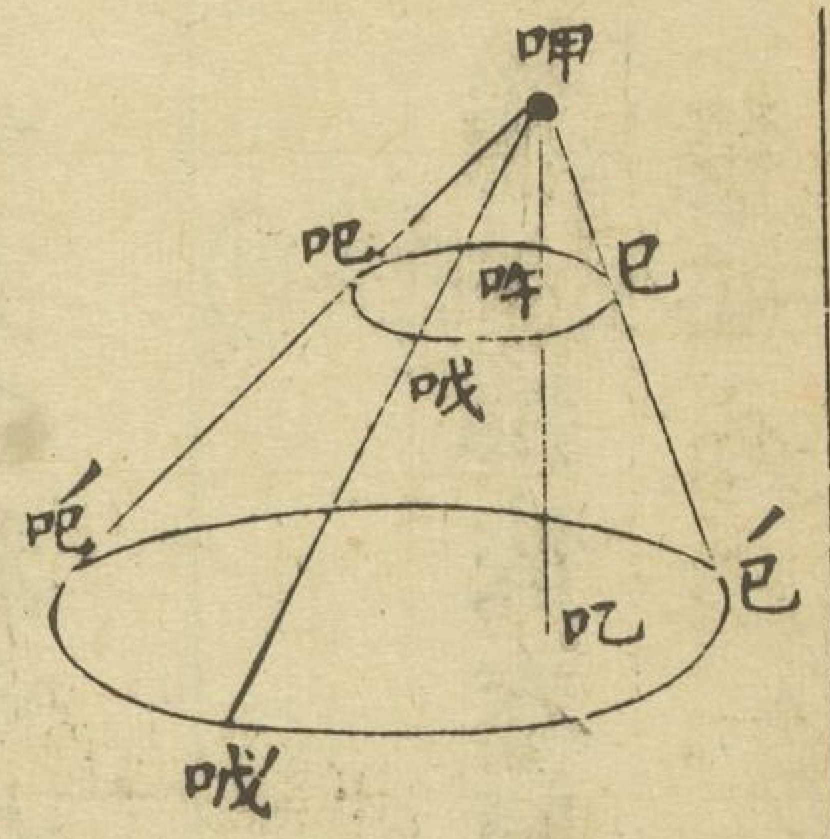
令其全積等于呷(辛丄天)三。截去之積等于天甲三。故其截餘之積

為(甲天丅呷辛丄呷天)三。惟依本題之理 $\frac{甲}{呷}=\frac{天}{天丄辛}$。所以甲辛＝甲天丅呷天。而其所餘之積等

于辛(甲丄呷)三。由此可見凡拋物體之截積。必等于等高之圓

柱。而其圓之底必爲上下兩平剖面之中數。

二題　求尖錐形之積



如吧吙巳爲任何平面形。呷爲尖錐形之頂。呷叱爲其高。吧吙巳爲與底平行之剖面。此面與呷叱線相遇于咋。其形與底爲同式。

以乙代底之面積。以亥代剖面之積。以丙代其呷叱線。以天代其呷咋線。以申代其呷吧吙巳體積。則其微分式爲彳申＝亥彳天。惟依尖錐形之理。其同式之兩平剖面。

必與其相似之平方有比例。所以 $丙^{二}:天^{二}::乙:亥$。則

$$亥=\frac{丙^{二}}{乙天^{二}}$$。

$$神=\frac{丙^{二}}{乙}天^{二}彳天$$。求

其積分得

$$申=\frac{三丙^{二}}{乙天^{三}}\perp 呐=\frac{三}{亥天}\perp 呐$$。因天與申為同時而起。故

$$呐=○$$。而

$$申=\frac{三}{亥天}$$。

由此可知任何類之尖錐形。必為其同底同高之柱積三分之一。

若欲求尖錐之截積。可令底之面積為呷。其與底平行之剖面為甲。所截得之高為辛。所截去之高為天。

則其全尖錐形之積爲 $\frac{一}{三}(辛\perp天)呷$. 截去之積爲 $\frac{一}{三}天甲$. 所以其截餘之積爲

$$\frac{一}{三}(辛呷\perp天呷\top天甲)=\frac{一}{三}辛呷\perp\frac{一}{三}天(呷\top甲).$$

惟因

$$\frac{甲}{呷}=\frac{天^{二}}{(天\perp辛)^{二}}.$$

$$\frac{\sqrt{甲}}{\sqrt{呷}}=\frac{天}{天\perp辛}.$$

所以

$$天=\frac{\sqrt{呷}\top\sqrt{甲}}{\sqrt{甲}}辛.$$

而

$$天(呷\top甲)=\sqrt{甲}(\sqrt{呷}\perp\sqrt{甲})辛.$$

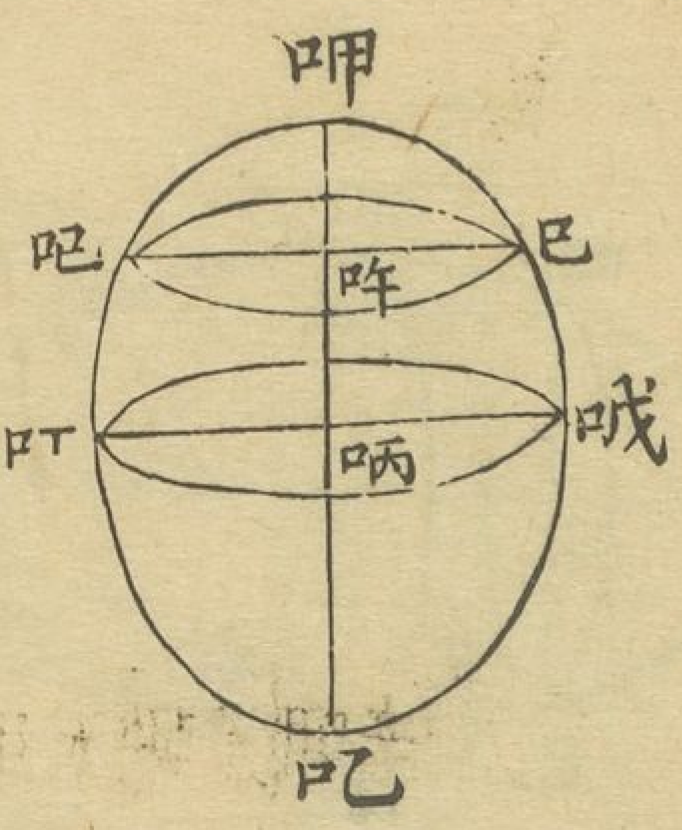
即

$$天(呷\top甲)=(\sqrt{呷甲}\perp甲)辛.$$

故其截積之式爲

$$\frac{一}{三}(呷\perp甲\perp\sqrt{呷甲})辛.$$

三題　求楕圓形以長短二徑為軸所成之楕圓體.



如吧咋巳為楕圓體內與長徑成正角之剖面.以甲代其長徑呷吃.以乙代其短徑叮哦.以呷咋為天.以吧咋為地.

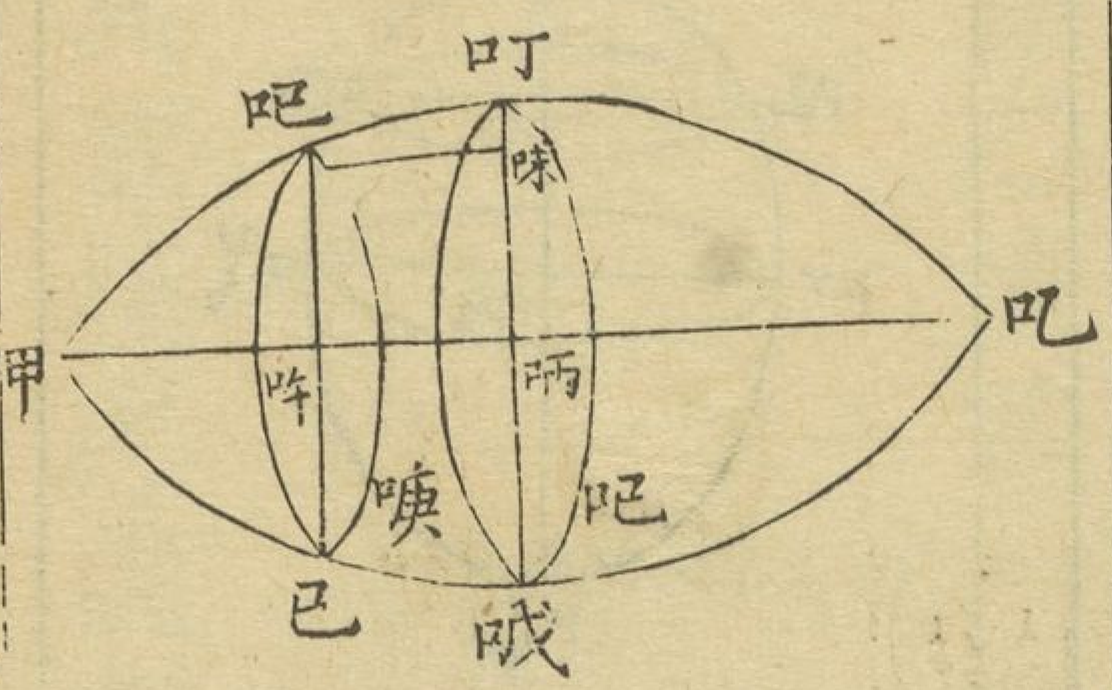
則依楕圓之理 $地^{二}=\frac{甲^{二}}{乙^{二}}(甲天\top天^{二})$. 所以 $申=\frac{甲^{二}}{周乙^{二}}禾(甲天\top天^{二})彳天$. 即 $申=\frac{甲^{二}}{周乙^{二}}(\frac{二}{一}甲天^{二}\top\frac{三}{一}天^{三})\bot㖠$. 因 $天=〇$ 之時.申

亦為〇.故 $㖠=〇$. 如令 $天=甲$. 則全積申為 $\frac{六}{甲乙^{二}周}$. 即 $\frac{三}{二}甲$ 與剖面

相乘之數也。可見橢圓形之體積。爲其外切圓柱形之積三分之二。此爲亞幾默德攷得之理。

若其甲乙二徑相等則爲球形。故其積爲三甲六周。

四題　求拋物線橫旋轉所成之體積。



此題所求謂拋物線之弧呷吧叱。繞其呷㕨叱線旋轉而成之體積也。可自曲線之任一點吧。作吧吘線。與呷叱爲垂線。又作吧味線。與拋物線之本軸爲垂線。

以叮㕨爲巳。以呷㕨爲午。以㕨吘等于吧味爲天。以吧吘

等于呐味爲地。命叮𠯫吧與吧嗹巳兩平剖面間之體積爲申。則依拋物線之理

$\begin{array}{ccccccc} 吧^{二} & \cdot & 呻^{二} & :: & 叮 & \cdot & 叮^{二} \\ 味 & \cdot & 呐 & :: & 味 & \cdot & 呐 \end{array}$。

即

$天^{二}:午^{二}::巳丅地:巳$、

所以

$巳天^{二}=巳午^{二}丅午地$。

$地^{二}=\frac{巳^{二}}{午^{四}}(午^{四}丅二午^{二}天^{二}丄天^{四})$。

故其體積之式爲

$申=\frac{巳^{二}周}{午^{四}}禾(午^{四}彳天丅二午^{二}天^{二}彳天丄天^{四}彳天)$。

即

$申=\frac{巳^{二}周}{午^{四}}(午^{四}天丅\frac{二}{三}午^{二}天^{三}丄\frac{一}{五}天^{五})丄呐$。

其積從 天=〇 之時起。故 呐=〇。如令

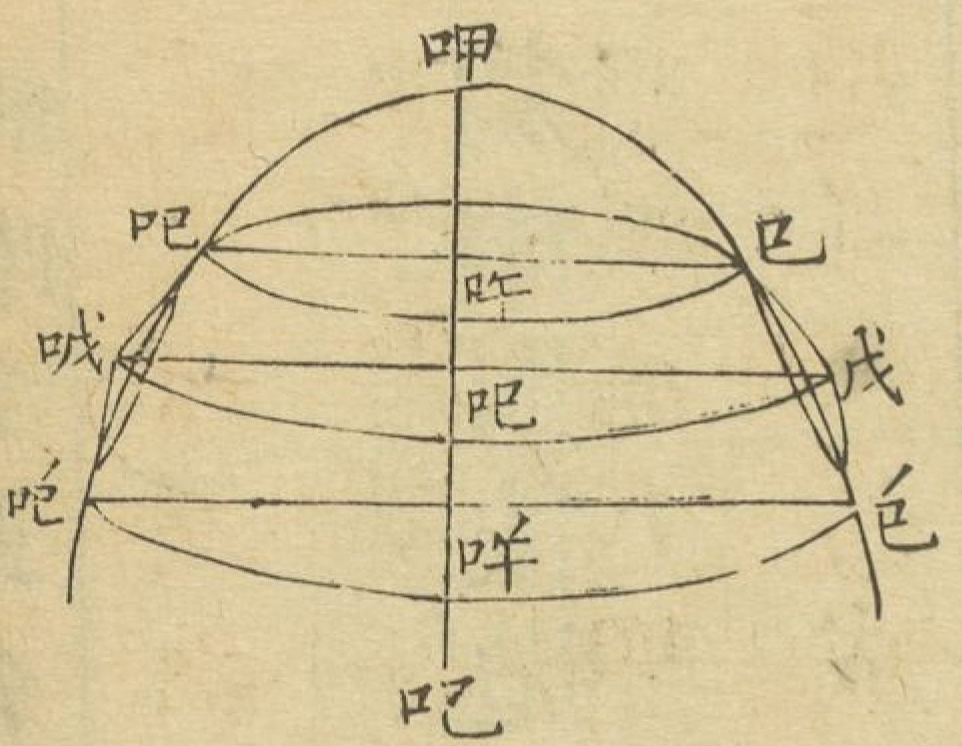
天＝午．

即得 $\frac{一五}{八}巳^{二}午周$．爲呷叮吃繞行一周所成之體積．

求曲體之皮積

第一百六十四款

設呷吧咆爲任何曲線之平面積．呷吃爲其軸線．吧咋



咆咋′．爲曲線之縱線．作吧哦．咆哦′．爲在曲線吧咆兩點之切線．而相遇于哦．作哦吧爲呷吃之垂線．又作通弦吧咆．乃令其曲線繞呷吃軸而旋轉一周．則呷吧咆弧成一曲面積．即皮積

而易見吧吧弧所成之曲面必小于切線吧𠯫吧𠯫所成之圓錐圈面亦必大于通弦吧吧所成之圓錐圈面

令呷吘為天呷吘為天吧吘為地吧吘為地𠯫吧為地呷吧弧為人呷吧弧為人呷吧弧所行成之曲面為亥呷吧弧所行成之曲面為亥則依幾何之理其切線吧𠯫吧𠯫所成之面積為

$$\text{吧𠯫}\cdot\frac{\text{地}'}{\text{地}}\text{周}=\text{吧𠯫}\cdot\frac{\text{𠯫吧}}{\text{吧吘}}\text{周}$$

$$\text{吧𠯫}\cdot\frac{\text{地}'}{\text{地}}\text{周}=\text{吧𠯫}\cdot\frac{\text{𠯫吧}}{\text{吧吘}}\text{周}$$

通弦吧吧所成之面

積。爲

周 (吧/吘 丄 吧/吘) 吧/吧 ═ 周 (地丄地) 吧/吧。

所以亥丄刻必小于

周 [(地丄地) 吧/㖅 丄 (地丄地) 吧/㖅]

而大于

周 (地丄地) 吧/吧弦。

其 人丄人/亥丄刻 必

小于

周 (地丄地) 吧/㖅 丄 (地丄地) 吧/㖅 ——— 吧吧弧

而大于

周 (地丄地) 吧吧弧/吧吧弦。

設其吧吧二點漸相近。則其

大小于$\frac{八丅八}{亥丅亥}$之兩數，至末必變爲相等。此因地地ˊ地ˊˊ三

線變爲相等。則$(地丄地ˊ)\frac{吧}{吰}丄(地丄地ˊ)\frac{吧}{吰}$變爲$(地丄地)\left[\frac{吧}{吰}丄\frac{吧ˊ}{吰}\right]$。其$\frac{吧吧弧}{吧吰丄吧吰}$與$\frac{吧吧弧}{吧吧弦}$。

至末俱等于一。所以其限爲

$$\frac{八丅八}{亥丅亥}＝二周地。$$

故

$$\frac{彳八}{彳亥}＝二周地$$

而

$$彳亥＝二周地\quad 彳八＝二周地\sqrt{彳天^{二}丄彳地^{二}}。$$

惟因

二周地

又爲吧巳剖面之周。所以可云曲面之微分。等于本曲線之弧微分與平面相乘。

第一百六十五款

一題　設有圓球。其半徑爲甲。欲求其皮積。

則仍用前圖。令呷吘爲天。吧吘爲地。呷吧弧爲人。吧巳平剖面爲亥。因本曲線之式爲

$$\text{地}=\sqrt{\text{二甲天}-\text{天}^{2}}$$

故其

$$\text{彳地}=\frac{\sqrt{\text{二甲天}-\text{天}^{2}}}{\text{甲彳天}-\text{天彳天}}$$

$$\text{彳人}=\sqrt{\text{彳天}^{2}+\text{彳地}^{2}}=\frac{\sqrt{\text{二甲天}-\text{天}^{2}}}{\text{甲彳天}}=\frac{\text{地}}{\text{甲彳天}}$$

彳亥＝二周地彳天＝二甲周彳天。而亥＝二甲周天。因天＝〇之時亥＝〇。故不用常數。

因二甲周爲以甲爲半徑之平圓周。則其截皮積必等于以圓周爲直線與截高所成之矩形。故可知圓球之全皮積必比其最大之平剖面爲四倍。此乃亞幾默德所致之理也。

二題　求拋物體之皮積。

仍用前圖。令呷咋爲天。吧咋爲地。呷吧弧爲人。呷吧

弧所成之曲面爲亥以$\frac{甲}{二}$代其通徑則已在第一百六十款得$彳人=\frac{甲}{彳地}\sqrt{甲^{二}丄地^{二}}$所以$彳亥=二周地彳人=\frac{甲}{二周}地彳地\sqrt{甲^{二}丄地^{二}}$求積分得

$$亥=\frac{甲}{二周}\int地彳地\sqrt{甲^{二}丄地^{二}}=\frac{三甲}{二周}(甲^{二}丄地^{二})^{\frac{三}{二}}丄呐 \quad ㊀$$

令$亥=〇$則$地=〇$故皮積在頂點起時$〇=\frac{三甲}{二周甲^{三}}丄呐$則$呐=丅\frac{三甲}{二周甲^{三}}$以此代㊀式中之呐得

$$亥=\frac{三甲}{二周}\left[(甲^{二}丄地^{二})^{\frac{三}{二}}丅甲^{三}\right]$$

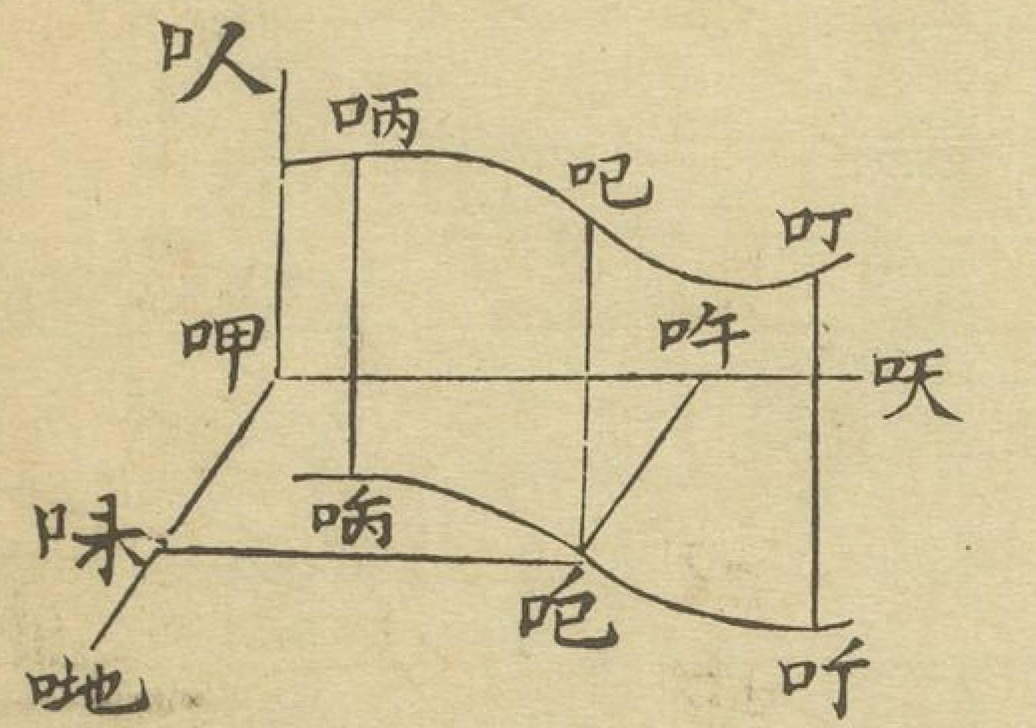
即

$$亥=\frac{三}{二周}\left[\sqrt{甲(一天丄甲)^{三}}丅甲^{三}\right]$$

求與拗捩線等長之直線。曲線不在一箇平面上者謂之拗捩形曲線

第一百六十六款

如吶吧叮爲拗捩形之曲線。從正角縱橫相交作三箇



平面。一爲呭呷呋。一爲叺呷呋。一爲叺呷呭。則從本曲線之各點。作垂線吧吧′。至呭呷呋平面上。其諸垂線必合成一不平之側面。而其遇下面處成吶′吧′叮′線。此卽本曲線之影也。

乃從吧′點作吧′吘。吧′味兩線。與呷呋呷呭成正角。則呷吘等于吧′味。可以天代之。呷味等于吧′吘。可以地代之。

又以人代呃吧以亥代呐吧曲線以亥代其曲線之影呐吧則$彳亥=\sqrt{彳天^{2}\perp彳地^{2}}$此依第七十二款之例再設其不平之側面能展之使平則呐吧叮曲線能變爲尋常平面之曲線而其影呐吧叮變爲等長之直線乃可令人與亥爲其曲線亥之縱橫線則$彳亥=\sqrt{彳亥^{2}\perp彳人^{2}}$所以其彳亥若將同數$彳天^{2}\perp彳地^{2}$代之則得$彳亥=\sqrt{彳天^{2}\perp彳地^{2}\perp彳人^{2}}$此爲求拗捩形曲線等長之直線之公式

無論何種兩彎拗捩形之曲線必能用以下兩式明之

函(天·地)＝○ (一)。哂(天·八)＝○ (二)。從此可知彵＝吧伏與仏＝吘伏兩式中，其吧與吘皆為天之函數。如此則可得味伏＝吘吧尸伏、＝侅。其味專為變數天之函數。故其積分式亥＝禾味伏不能以常法求之。

興化劉彝程校算