

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Vorlesung 12

Wege entstehen dadurch, dass
man sie geht

Franz Kafka

Invertierbare Matrizen

DEFINITION 12.1. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$ -Matrix über K . Dann heißt M *invertierbar*, wenn es eine weitere Matrix $A \in \text{Mat}_n(K)$ gibt mit

$$A \circ M = E_n = M \circ A.$$

DEFINITION 12.2. Es sei K ein Körper. Zu einer invertierbaren Matrix $M \in \text{Mat}_n(K)$ heißt die Matrix $A \in \text{Mat}_n(K)$ mit

$$A \circ M = E_n = M \circ A$$

die *inverse Matrix* von M . Man schreibt dafür

$$M^{-1}.$$

Das Produkt von invertierbaren Matrizen ist wieder invertierbar.

DEFINITION 12.3. Zwei quadratische Matrizen $M, N \in \text{Mat}_n(K)$ heißen *ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix B mit $M = BNB^{-1}$ gibt.

Nach Korollar 11.11 sind zu einer linearen Abbildung $\varphi: V \rightarrow V$ die beschreibenden Matrizen bezüglich zweier Basen ähnlich zueinander.

Eigenschaften von linearen Abbildungen

LEMMA 12.4. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m . Es sei*

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Dann gelten folgende Eigenschaften.

- (1) φ ist genau dann injektiv, wenn die Spalten der Matrix linear unabhängig sind.
- (2) φ ist genau dann surjektiv, wenn die Spalten der Matrix ein Erzeugendensystem von K^m bilden.

- (3) Bei $m = n$ ist φ genau dann bijektiv, wenn die Spalten der Matrix eine Basis von K^m bilden, und dies ist genau dann der Fall, wenn M invertierbar ist.

Beweis. Es seien $\mathbf{v} = v_1, \dots, v_n$ und $\mathbf{w} = w_1, \dots, w_m$ Basen von V bzw. W und es seien s_1, \dots, s_n die Spaltenvektoren von M . (1). Die Abbildung φ hat die Eigenschaft

$$\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^m s_{ij} w_i,$$

wobei s_{ij} der i -te Eintrag des j -ten Spaltenvektors ist. Daher ist

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^n a_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n a_j \left(\sum_{i=1}^m s_{ij} w_i\right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_j s_{ij}\right) w_i.$$

Dies ist genau dann 0, wenn $\sum_{j=1}^n a_j s_{ij} = 0$ für alle i ist, und dies ist äquivalent zu

$$\sum_{j=1}^n a_j s_j = 0.$$

Dafür gibt es ein nichttrivales (Lösungs)Tupel (a_1, \dots, a_n) genau dann, wenn die Spalten linear abhängig sind und genau dann, wenn φ nicht injektiv ist. (2). Siehe Aufgabe 11.2. (3). Sei $n = m$. Die erste Äquivalenz folgt aus (1) und (2). Wenn φ bijektiv ist, so gibt es die (lineare) Umkehrabbildung φ^{-1} mit

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{Id}_W \quad \text{und} \quad \varphi^{-1} \circ \varphi = \text{Id}_V.$$

Es sei M die Matrix zu φ und N die Matrix zu φ^{-1} . Die Matrix zur Identität ist die Einheitsmatrix. Nach Lemma 11.9 ist daher

$$M \circ N = E_n = N \circ M.$$

Die Umkehrung wird ähnlich bewiesen. □

Elementarmatrizen

DEFINITION 12.5. Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$ -Matrix über K . Dann nennt man die folgenden Manipulationen an M *elementare Zeilenumformungen*.

- (1) Vertauschung von zwei Zeilen.
- (2) Multiplikation einer Zeile mit $s \neq 0$.
- (3) Addition des a -fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

DEFINITION 12.6. Es sei K ein Körper. Mit B_{ij} bezeichnen wir diejenige $n \times n$ -Matrix, die an der Stelle (i, j) den Wert 1 und sonst überall den Wert null hat. Dann nennt man die folgenden Matrizen *Elementarmatrizen*.

- (1) $V_{ij} := E_n - B_{ii} - B_{jj} + B_{ij} + B_{ji}$.

- (2) $S_k(s) := E_n + (s - 1)B_{kk}$ für $s \neq 0$.
 (3) $A_{ij}(a) := E_n + aB_{ij}$ für $i \neq j$ und $a \in K$.

Ausgeschrieben sehen diese Elementarmatrizen folgendermaßen aus.

$$V_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$S_k(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A_{ij}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elementarmatrizen sind invertierbar, siehe Aufgabe 12.1.

LEMMA 12.7. *Es sei K ein Körper und M eine $m \times n$ -Matrix mit Einträgen in K . Dann hat die Multiplikation mit den $m \times m$ -Elementarmatrizen von links mit M folgende Wirkung.*

- (1) $V_{ij} \circ M =$ Vertauschen der i -ten und der j -ten Zeile von M .
 (2) $(S_k(s)) \circ M =$ Multiplikation der k -ten Zeile von M mit s .
 (3) $(A_{ij}(a)) \circ M =$ Addition des a -fachen der j -ten Zeile von M zur i -ten Zeile ($i \neq j$).

Beweis. Siehe Aufgabe 12.3. □

Elementare Zeilenumformungen ändern nicht den Lösungsraum von homogenen linearen Gleichungssystemen, wie in Lemma 5.3 gezeigt wurde.

SATZ 12.8. *Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$ -Matrix über K . Dann gibt es elementare Zeilenumformungen und eine (Neu-)Nummerierung der Spalten*

$$j_1, j_2, \dots, j_n$$

und ein $r \leq n$ derart, dass in der entstandenen Matrix die Spalten die Gestalt

$$s_{j_k} = \begin{pmatrix} b_{1,j_k} \\ \vdots \\ b_{k,j_k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } b_{k,j_k} \neq 0 \text{ für } k \leq r$$

und

$$s_{j_k} = \begin{pmatrix} b_{1,j_k} \\ \vdots \\ b_{r,j_k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } k > r$$

besitzen. Durch elementare Zeilenumformungen und zusätzliche Spaltenvertauschungen kann man also eine Matrix auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} d_{11} & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & d_{22} & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{rr} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

mit $d_{ii} \neq 0$ bringen.

Beweis. Dies beruht auf den entsprechenden Manipulationen wie beim Eliminationsverfahren, siehe Vorlesung 5. \square

KOROLLAR 12.9. *Es sei K ein Körper und sei M eine invertierbare $n \times n$ -Matrix über K . Dann gibt es elementare Zeilenumformungen derart, dass nach diesen Umformungen eine Matrix der Gestalt*

$$\begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

mit $d_i \neq 0$ entsteht. Durch weitere elementare Zeilenumformungen kann die Einheitsmatrix erreicht werden.

Beweis. Dies beruht auf den Manipulationen des Eliminationsverfahrens und darauf, dass elementare Zeilenumformungen nach Lemma 12.7 durch Multiplikationen mit Elementarmatrizen ausgedrückt werden können. Dabei können in einer Spalte bzw. in einer Zeile nicht nur Nullen entstehen, da die Elementarmatrizen invertierbar sind und so in jedem Schritt die Invertierbarkeit erhalten bleibt. Eine Matrix mit einer Nullspalte oder einer Nullzeile ist aber (beispielsweise wegen Lemma 12.4 (3)) nicht invertierbar. Wenn eine obere Dreiecksmatrix vorliegt, so kann man mit skalarer Multiplikation die Diagonaleinträge zu 1 machen und damit die in jeder Spalte darüberliegenden Einträge zu 0. \square

Insbesondere gibt es zu einer invertierbaren Matrix M Elementarmatrizen E_1, \dots, E_k derart, dass

$$E_1 \circ \dots \circ E_k \circ M$$

die Einheitsmatrix ist.

Auffinden der inversen Matrix

VERFAHREN 12.10. Es sei M eine quadratische Matrix. Wie kann man entscheiden, ob die Matrix invertierbar ist, und wie kann man die inverse Matrix M^{-1} finden?

Dazu legt man eine Tabelle an, wo in der linken Hälfte zunächst die Matrix M steht und in der rechten Hälfte die Einheitsmatrix. Jetzt wendet man auf beide Matrizen schrittweise die gleichen elementaren Zeilenumformungen an. Dabei soll in der linken Hälfte die Ausgangsmatrix in die Einheitsmatrix umgewandelt werden. Dies ist genau dann möglich, wenn diese Matrix invertierbar ist. Wir behaupten, dass bei dieser Vorgehensweise in der rechten Hälfte die Matrix M^{-1} als Endmatrix entsteht. Dies beruht auf folgendem *Invarianzprinzip*. Jede elementare Zeilenumformung kann als eine Matrizenmultiplikation mit einer Elementarmatrix E von links realisiert werden. Wenn in der Tabelle

$$(M_1, M_2)$$

steht, so steht im nächsten Schritt

$$(EM_1, EM_2).$$

Wenn man das Inverse (das man noch nicht kennt, das es aber gibt unter der Voraussetzung, dass die Matrix invertierbar ist) der linken Hälfte mit der rechten Hälfte multipliziert, so ergibt sich

$$(EM_1)^{-1}EM_2 = M_1^{-1}E^{-1}EM_2 = M_1^{-1}M_2.$$

D.h., dass sich dieser Ausdruck bei den Einzelschritten nicht ändert. Zu Beginn ist dieser Ausdruck gleich $M^{-1}E_n$, daher muss zum Schluss für (E_n, N) gelten

$$N = E_n^{-1}N = M^{-1}E_n = M^{-1}.$$

BEISPIEL 12.11. Wir wollen zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ gemäß dem in Verfahren 12.5 beschriebenen Verfahren die inverse Matrix M^{-1} bestimmen.

| | |
|--|--|
| $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 11 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$ |

Rang von Matrizen

DEFINITION 12.12. Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$ -Matrix über K . Dann nennt man die Dimension des von den Spalten erzeugten Unterraums von K^m den (*Spalten-*)Rang der Matrix, geschrieben

$$\text{rang } M.$$

LEMMA 12.13. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m . Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Dann gilt

$$\text{rang } \varphi = \text{rang } M.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 12.21. □

Zur Formulierung der nächsten Aussage führen wir den *Zeilenrang* einer $m \times n$ -Matrix als die Dimension des von den Zeilen erzeugten Unterraumes von K^n ein.

LEMMA 12.14. *Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$ -Matrix über K . Dann stimmt der Spaltenrang mit dem Zeilenrang überein. Der Rang ist gleich der in Satz 12.12 verwendeten Zahl r .*

Beweis. Bei elementaren Zeilenumformungen ändert sich der von den Zeilen erzeugte Raum nicht, und damit ändert sich auch nicht der Zeilenrang. Der Zeilenrang stimmt also mit dem Zeilenrang der in Satz 12.12 angegebenen Matrix in Stufenform überein. Diese hat den Zeilenrang r , da die ersten r Zeilen linear unabhängig sind und ansonsten nur Nullzeilen auftauchen. Sie hat aber auch den Spaltenrang r , da wiederum die ersten r Spalten (wenn man auch noch die Spalten vertauscht hat) linear unabhängig sind und die weiteren Spalten Linearkombinationen dieser r Spalten sind. Die Aufgabe 12.12 zeigt, dass sich bei elementaren Zeilenumformungen auch der Spaltenrang nicht ändert. □

Beide Ränge stimmen also überein, so dass wir im Folgenden nur noch vom *Rang einer Matrix* sprechen werden.

KOROLLAR 12.15. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$ -Matrix über K . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (1) M ist invertierbar.
- (2) Der Rang von M ist n .
- (3) Die Zeilen von M sind linear unabhängig.
- (4) Die Spalten von M sind linear unabhängig.

Beweis. Dies folgt aus Lemma 12.4 und aus Lemma 12.14. □