Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Mathematik für Anwender II

Vorlesung 40

Wir haben schon gewöhnliche Differentialgleichungen samt einiger Lösungsverfahren zu Beginn der Vorlesung besprochen. Dort ging es um die Bewegungen auf einer Geraden, die durch ein von der Zeit und dem Ort (der Lage auf der Geraden) abhängiges Vektorfeld bestimmt wurden. Eine physikalische Bewegung spielt sich aber häufig höherdimensional (im $\mathbb{R}^2$ oder im $\mathbb{R}^3$) ab, so dass wir jetzt gewöhnliche Differentialgleichungen allgemein besprechen. Die Zeitkomponente wird sich nach wie vor in einem reellen Intervall bewegen, die Ortskomponente wird ein Element in einem beliebigen endlichdimensionalen reellen Vektorraum sein. Diesen statten wir mit einem Skalarprodukt aus, sodass wir eine Norm, eine Metrik, offene Mengen, stetige Abbildungen, etc. zur Verfügung haben.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Definition 40.1. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f\colon I \times U \longrightarrow V,\, (t,v) \longmapsto f(t,v),$$

ein Vektorfeld auf U. Dann nennt man

$$v' = f(t,v)$$

die *gewöhnliche Differentialgleichung* (oder *gewöhnliches Differentialgleichungssystem*) zum Vektorfeld f.

(Zeitabhängige) Vektorfelder und gewöhnliche Differentialgleichungssysteme sind im Wesentlichen äquivalente Objekte. Man spricht auch von einem *dynamischen System*. Von Differentialgleichungen spricht man insbesondere dann, wenn man sich für die Lösungen im Sinne der folgenden Definition interessiert.

Definition 40.2. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f\colon I \times U \longrightarrow V,\, (t,v) \longmapsto f(t,v),$$

ein Vektorfeld auf U. Zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$v' = f(t,v)$$

heißt eine Abbildung

$$v\colon J \longrightarrow V,\, t \longmapsto v(t),$$

auf einem offenen (Teil)Intervall[1] $J \subseteq I$ eine *Lösung der Differentialgleichung*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(1) Es ist $v(t) \in U$ für alle $t \in J$.
(2) Die Abbildung v ist differenzierbar.
(3) Es ist $v'(t) = f(t, v(t))$ für alle $t \in J$.

Eine Lösung ist also eine differenzierbare Kurve, d.h. eine (orts-)vektorwertige Abbildung

$$v\colon J \longrightarrow V.$$

Wenn $V = \mathbb{R}^n$ ist, so wird eine solche Abbildung durch ihre Komponenten

$$(v_1(t), \ldots, v_n(t))$$

beschrieben. Ebenso wird das Vektorfeld durch n, von t und $v = (v_1, \ldots, v_n)$ abhängige Funktionen $(f_1, \ldots, f_n)$ beschrieben. Die Differentialgleichung lautet dann ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, v_1, \ldots, v_n) \\ \vdots \\ f_n(t, v_1, \ldots, v_n) \end{pmatrix}.$$

Daher spricht man auch von einem *Differentialgleichungssystem.*

Häufig soll eine Kurve nicht nur eine Differentialgleichung erfüllen, sondern sich zusätzlich zu einem bestimmten Zeitpunkt an einem bestimmten Ort befinden. Dies führt zum Begriff des Anfangswertproblems.

Definition 40.3. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f\colon I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf U. Es sei $(t_0, w) \in I \times U$ gegeben. Dann nennt man

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w$$

das *Anfangswertproblem* zur gewöhnlichen Differentialgleichung $v' = f(t, v)$ mit der *Anfangsbedingung* $v(t_0) = w$.

Definition 40.4. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f\colon I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf U. Es sei $(t_0, w) \in I \times U$ vorgegeben. Dann nennt man eine Abbildung

$$v\colon J \longrightarrow V,\ t \longmapsto v(t),$$

---

[1] Rein formal gesehen ist hier auch das leere Intervall zugelassen, wobei diese „leere Lösung" natürlich uninteressant ist. Bei einem Anfangswertproblem sichert bereits die Anfangsbedingung, dass die Lösung nicht leer ist.

auf einem Intervall $J \subseteq I$ mit $t_0 \in J$ eine *Lösung des Anfangswertproblems*

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w\,,$$

wenn v eine Lösung der Differentialgleichung $v' = f(t, v)$ ist und wenn zusätzlich

$$v(t_0) = w$$

gilt.

Eine zu einem Vektorfeld, einer gewöhnlichen Differentialgleichung und einem Anfangswertproblem passende Vorstellung ist das *Windmodell*. Das Vektorfeld

$$F\colon I \times U \longrightarrow V$$

beschreibt zu einem jeden Zeitpunkt $t \in I$ und einem Ortspunkt $P \in U$ die in diesem Punkt herrschende Windrichtung (oder Windgeschwindigkeit). Die Lösung einer Differentialgleichung ist die Bewegung eines Teilchens, das (beschleunigungsfrei und verzögerungsfrei) vom Wind getragen wird, dessen Momentangeschwindigkeit also zu jedem Zeitpunkt gleich der Windgeschwindigkeit an dem Ort ist, an dem sich das Teilchen gerade befindet. Die Lösung eines Anfangswertproblems beschreibt die Bewegung, wenn das Teilchen an einem bestimmten Punkt losgelassen wird.

Die Vorstellung, dass eine Differentialgleichung die Bewegung in einem Kraftfeld[2] beschreibt, kann irreführend sein. Ein Kraftfeld ist ein Beschleunigungsfeld und kein Geschwindigkeitsfeld. Allerdings führt ein Kraftfeld zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, die in eine Differentialgleichung erster Ordnung (unter Hinzunahme neuer Variablen) übersetzt werden kann. Das werden wir in der nächsten Vorlesung durchführen.

Erste Beispiele

Beispiel 40.5. Wir betrachten ein konstantes Vektorfeld auf dem $\mathbb{R}^n$, also eine Abbildung

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (t, x_1, \ldots, x_n) \longmapsto w,$$

wobei $w \in \mathbb{R}^n$ ein fixierter Vektor ist. Im „Windmodell“ bedeutet dies, dass überall und zu jeder Zeit eine konstante Windgeschwindigkeit herrscht. Die Bewegung eines (durch den Wind getragenen) Teilchens muss sich also auf der durch einen Startpunkt und den Richtungsvektor w gegebenen Geraden vollziehen. In der Tat besitzt das Anfangswertproblem

$$v' = w \text{ und } v(t_0) = P$$

[2] Die physikalische Interpretation eines Vektorfeldes als Kraftfeld ist hingegen bei Wegintegralen (nämlich als Arbeitsintegral) richtig.

die eindeutige[3] (affin-lineare) Lösung

$$v\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n,\, t \longmapsto v(t) = P + (t - t_0)w,$$

wie man durch Ableiten bestätigt.

Beispiel 40.6. Wir betrachten ein stetiges ortsunabhängiges Vektorfeld auf dem $\mathbb{R}^n$, d.h. es sei eine stetige Abbildung

$$g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

auf einem reellen Intervall I gegeben, die wir als Vektorfeld

$$F\colon I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\, (t, x_1, \ldots, x_n) \longmapsto g(t),$$

auffassen. Im „Windmodell“ bedeutet dies, dass zu einem festen Zeitpunkt überall die gleiche Windgeschwindigkeit herrscht, diese sich aber mit der Zeit ändert. Die Bewegungskurven der (durch den Wind getragenen) Teilchen müssen also parallel zueinander sein, also durch eine Ortsverschiebung auseinander hervorgehen. Der Differenzvektor zwischen den Positionen von zwei Teilchen bleibt während des Bewegungsvorgangs erhalten. Die Lösungskurven zu einem Anfangswertproblem

$$v' = F(t, v) = g(t) \text{ und } v(t_0) = P$$

lassen sich einfach berechnen: Die eindeutige Lösung ist die Integralkurve

$$v\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n,\, t \longmapsto v(t) = P + \left(\int_{t_0}^t g_1(s)ds, \int_{t_0}^t g_2(s)ds, \ldots, \int_{t_0}^t g_n(s)ds \right),$$

wobei die g_i die Komponentenfunktionen von g sind.

Beispiel 40.7. Es seien n reellwertige Funktionen $f_i(t, x)$ in zwei Variablen gegeben. Diese kann man zu einem Vektorfeld

$$F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\, (t, x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (f_1(t, x_1), f_2(t, x_2), \ldots, f_n(t, x_n))$$

zusammenfassen. Dabei hängt die i-te Koordinatenfunktion des Vektorfeldes nur von t und der i-ten Ortskoordinaten x_i ab. Eine Lösungskurve $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ muss die Bedingungen

$$x_i'(t) \,=\, F_i(t, x_1, \ldots, x_n) \,=\, f_i(t, x_i)$$

(für $i = 1, \ldots, n$) erfüllen. Diese n Bedingungen sind unabhängig voneinander, d.h. man kann die n Komponentenfunktionen $x_i(t)$ getrennt mit einem eindimensionalen Ansatz bestimmen. Daher spricht man von einem *entkoppelten Differentialgleichungssystem.*

[3]Ob die Lösung einer Differentialgleichung (existiert und) eindeutig ist, ist ein wichtiges Problem. Der wichtigste Satz zu dieser Fragestellung ist der Satz von Picard-Lindelöf, den wir später besprechen werden. In vielen der hier besprochenen Beispiele ist die Eindeutigkeit der Lösung direkt klar oder folgt aus den Eindeutigkeitsaussagen aus den Vorlesungen 31 bis 33.

Manchmal ist ein Differentialgleichungssystem in den ursprünglich gegebenen Koordinaten nicht entkoppelt, lässt sich aber durch einen Koordinatenwechsel entkoppeln und dann lösen. Dies ist vor allem für lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten wichtig, die mit Mitteln der linearen Algebra entkoppelt werden können.

Beispiel 40.8. Wir betrachten das (zeitunabhängige) Vektorfeld

$$F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t,x,y) \longmapsto (-y,x).$$

Hier steht also der Richtungsvektor $F(t,x,y) = (-y,x)$ stets senkrecht auf dem Ortsvektor (x,y), und ihre Normen stimmen überein. Man erwartet kreisförmige Bewegungen. In der Tat ist zur Anfangsbedingung $v(0) = (r,0)$ die Kurve

$$v\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (r\cos t, r\sin t),$$

die eindeutige Lösung.

Vektorfelder mit konstanter Richtung

Wir betrachten Differentialgleichungen zu Vektorfeldern, die zwar nicht wie in Beispiel 40.5 konstant sind, aber wo die Richtung konstant ist, wo also die Richtungsvektoren stets skalare Vielfache eines festen Vektors $w \in V$ sind.

Definition 40.9. Es sei $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei $w \in V$ ein fixierter Vektor. Es sei

$$g\colon I \times U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t,v) \longmapsto g(t,v),$$

eine Funktion. Dann heißt das Vektorfeld

$$F\colon I \times U \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto F(t,v) = g(t,v) \cdot w,$$

ein *Vektorfeld mit konstanter Richtung*.

Man erwartet direkt, dass die Lösungskurven zu einem solchen Vektorfeld sich auf einer durch den Richtungsvektor w festgelegten Geraden bewegen.

Lemma 40.10. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei $w \in \mathbb{R}^n$ ein fixierter Vektor. Es sei*

$$g\colon I \times U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t,v) \longmapsto g(t,v),$$

eine Funktion mit dem zugehörigen Vektorfeld mit konstanter Richtung

$$F\colon I \times U \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto F(t,v) = g(t,v) \cdot w.$$

Dann ist die Lösung des Anfangswertproblemes

$$v' = F(t,v)$$

mit

$$v(t_0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

von der Form

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \beta(t)w,$$

wobei

$$\beta\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$z' = h(t,z) := g(t, a_1 + zw_1, \ldots, a_n + zw_n)$$

mit

$$\beta(t_0) = 0$$

ist.

Beweis. Es sei

$$\beta\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $J \subseteq I$ eine Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$z' = h(t,z) := g(t, a_1 + zw_1, \ldots, a_n + zw_n)$$

mit

$$\beta(t_0) = 0$$

und sei

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \beta(t)w$$

Dann ist nach Lemma 37.9 (2)

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \beta'(t)w \\ &= g(t, a_1 + \beta(t)w_1, \ldots, a_n + \beta(t)w_n)w \\ &= F(t, \gamma(t)). \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\gamma(t_0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \beta(t_0)w = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

□

Beispiel 40.11. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = g(t,x,y) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$g(t,x,y) = t(x+y)$$

und dem Anfangsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Gemäß Lemma 40.10 müssen wir nach einer Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$z' = h(t,z) := t(2+3z+5+z) = t(4z+7) = 4tz+7t$$

mit $z(0) = 0$ suchen. Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung, die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist e^{2t^2} und die Lösungen sind

$$-\frac{7}{4} + ce^{2t^2}.$$

Um das Anfangswertproblem zu lösen muss man $c = \frac{7}{4}$ nehmen. Deshalb ist

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \left(-\frac{7}{4} + \frac{7}{4}e^{2t^2}\right) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Lösung des Anfangwertproblems.

Zentralfelder

Definition 40.12. Es sei $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei

$$g\colon I \times U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t,v) \longmapsto g(t,v)$$

eine Funktion. Dann heißt das Vektorfeld

$$F\colon I \times U \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto F(t,v) = g(t,v) \cdot v,$$

ein *Zentralfeld*.

Bei einem Zentralfeld sind also der Ortsvektor und der Richtungsvektor linear abhängig, d.h. der Richtungsvektor weist in Richtung des Ortsvektors. Daher findet die durch ein Zentralfeld definierte Bewegung allein auf der durch einen Ortspunkt und den Nullpunkt (dem Zentrum) festgelegten Geraden statt. Es handelt sich also im Grunde um einen eindimensional festgelegten Bewegungsvorgang, was auch im folgenden Lemma zum Ausdruck kommt.

Lemma 40.13. *Es sei $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V. Es sei*

$$F\colon I \times U \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto F(t,v) = g(t,v) \cdot v,$$

ein stetiges Zentralfeld zur stetigen Funktion

$$g\colon I \times U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t,v) \longmapsto g(t,v).$$

Es sei $w \in U$ und es sei

$$\alpha\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Lösung der eindimensionalen Differentialgleichung

$$z' = h(t,z) := g(t,zw) \cdot z \text{ mit } \alpha(t_0) = 1\,.$$

Dann ist

$$v(t) = \alpha(t) \cdot w$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = F(t,v) \text{ mit } v(t_0) = w\,.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} v'(t) &= (\alpha(t) \cdot w)' \\ &= \alpha'(t) \cdot w \\ &= g(t,\alpha(t) \cdot w) \cdot \alpha(t) \cdot w \\ &= F(t,\alpha(t) \cdot w) \\ &= F(t,v(t)) \end{aligned}$$

und

$$v(t_0) = \alpha(t_0) \cdot w = w,$$

so dass eine Lösung des Anfangswertproblems vorliegt. □

Beispiel 40.14. Wir betrachten das Zentralfeld zum zeitunabhängigen identischen Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R} \times V \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto v,$$

die beschreibende Hilfsfunktion ist also durch

$$g(t,v) = 1$$

gegeben. Sei t_0 und $w \in V$ vorgegeben. Nach Lemma 40.13 müssen wir die eindimensionale gewöhnliche Differentialgleichung $z' = z$ betrachten, die gesuchte Lösung ist

$$z(t) = e^{t-t_0}.$$

Daher ist

$$v(t) = e^{t-t_0}w$$

die Lösung des Anfangswertproblems zum Zentralfeld.

Beispiel 40.15. Wir betrachten das Zentralfeld zur Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ (t,x,y) \longmapsto g(t,x,y) = \frac{t^2x^2}{y},$$

also das Vektorfeld

$$F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t,x,y) \longmapsto \frac{t^2x^2}{y} \cdot (x,\, y) = \left(\frac{t^2x^3}{y},\, t^2x^2 \right),$$

und die Anfangsbedingung $\varphi(0) = (4, -3)$. Um dieses Anfangswertproblem zu lösen, müssen wir gemäß Lemma 40.13 die eindimensionale gewöhnliche Differentialgleichung

$$z' = g(t, 4z, -3z) \cdot z = \frac{t^2 16 z^2}{-3z} \cdot z = -\frac{16}{3} t^2 z^2$$

mit der Anfangsbedingung $z(0) = 1$ lösen. Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen, nach Korollar 33.6 ist

$$z(t) = \frac{1}{\frac{16}{9} t^3 + 1}$$

die Lösung mit $z(0) = 1$. Daher ist

$$v(t) = \frac{1}{\frac{16}{9} t^3 + 1} (4, -3)$$

die Lösung des Anfangswertproblems zum Zentralfeld.

Abbildungsverzeichnis