



\*0031897000\*

0031897-000

712-126

統計学講義案

寺尾琢磨・編

慶応義塾出版局

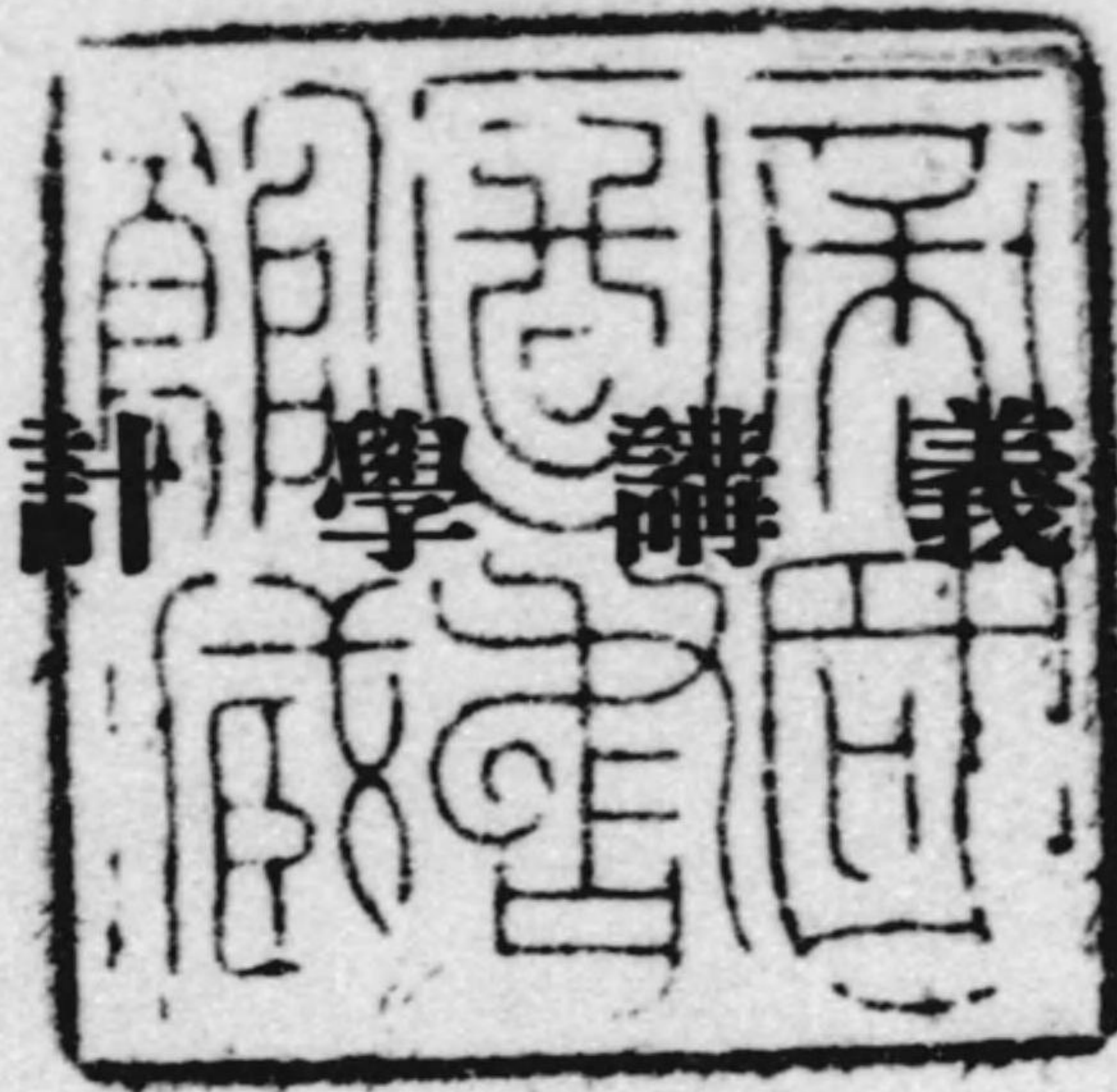
昭12

AFA

712  
126

納本

統 計 學 講 義 案



寺 尾 琢 磨 編

慶 應 義 塾 出 版 局



712  
126

目 次

第一章	統計學の成立と變遷 .....	1
第二章	統計調査 .....	6
第三章	圖示法 .....	12
第四章	平均 .....	23
第五章	散布度と歪度 .....	31
第六章	指數 .....	40
第七章	時系列の解析(1) .....	47
第八章	時系列の解析(2) .....	59
第九章	時系列の解析(3) .....	70
第十章	相關々係 .....	74
第十一章	統計學の論理的基礎 .....	87
第十二章	誤差の法則と信頼度の測定 .....	90
附 錄	.....	95



## 第一章 統計學の成立と變遷

1. 大學統計學 (Universitätsstatistik).  
Conring, H. (1606—81), *Notitia rerum publicarum*.  
Schmeitzel, M. (1679—1747), *Collegium politico-statisticum*.  
Achenwal, G. (1719—72), *Abriss der Staatswissenschaft der europäischen Reiche*.  
Anchersen (1700—65) の *Tabellenstatistik*.  
*Staatenkunde* なる名稱に就て.
2. 政治算術 (Political Arithmetic).  
Graunt, J. (1620—74), *Observations upon the Bills of Mortality* (1662).  
Petty, W. (1623—87), *Political Arithmetic* (1676).  
Halley, E. の死亡表.  
Süssmilch, J. P. (1707—67), *Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechtes, aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen* (1741).
3. 近代統計學  
Quetelet, A. (1796—1884) *Sur l'homme et de développement de ses facultés, ou Essai de physique sociale* (1835)—*Physique Sociale* (1869).

Herschel, J. の宿命論と Schmoller の解釋.  
社會統計學派と方法論派との分離.

4. 社會統計學派.

Mayr, G. v. Statistik und Gesellschaft (1895—1917)  
Wappäus, Engel, Ottingen, Haushofer, Wagner,  
Conrad, Zizek, H. Wolff.

5. 方法論派.

Lexis, W.

數理統計學の發生.

Pearson, Edgeworth, Bowley, Yule, Bortkiewicz,  
Tschuprow, Anderson, Czuber.

6. 最近に於ける主要なる文献.

英米.

Secrist—An Introduction to St. Methods (1923).

Mills—St. Methods, applied to Econ. and Business (1929).

Davis and Nelson—Elements of St. with applications to econ. data (1935).

Arkin and Colton—St. Methods, as applied to economics, business, education, social and physical sciences, etc. (1934).

Harper—Elements of Practical St. (1930).

Rhodes—Elementary St. Methods (1933).

Croxton and Cowden—Practical Business St. (1934).

King—Elements of St. Method (1913).

獨逸.

Winkler—Theoretische St. (Grundriss der St. I. Bd) (1931).

Tischer—Grundlegung der St. (1929).

Moeller—Statistik (1928).

Anderson—Einführung in die mathematische St. (1935).

Wolff—Theoretische St. (1926).

Müller—Theorie und Technik der St. (1927).

佛蘭西.

March—Principes de la Méthode Statistique (1930).

Darmonis—St. mathématique (1928).

" —St. et application (1934).

Jardan—St. mathématique (1927).

Aftalion—Cours de St. (巴里大學講義案).

Moncetz—Initiation aux méthodes de la St. (1935).

日本

田村市郎—經濟統計 (日本評論社).

中川友長—統計研究法の基礎 (日本評論社).

森田 優三—統計學概論 (森山書店).  
小林 新一—經濟統計學 (ダイヤモンド社).  
汐見 三郎—統計學 (日本評論社).  
蜷川 虎三—統計學概論 (岩波全書).  
" —統計利用に於ける基本問題 (岩波書店).  
小倉金之助—統計的研究法 (積善館).

7. 統計學に關する雜誌.

Journal of the Royal St. Society (London).  
Journal of the American St. Association (U.S.A.).  
Allgemeines St. Archiv (Berlin).  
Annals of Mathematical St. (U.S.A.).  
Econometrica.  
Jahrbücher für Nationalökonomie und St. (Jena).  
Zeitschrift für Nationalökonomie (Wien).  
Journal of Political Econ. (Chicago).  
Quarterly Journal of Econ. (Harvard).  
Vierteljahrshefte zur Konjunkturforschung  
(Berlin).  
Archiv f. math. Wirtschafts-u. Sozialforschung.  
Revue de l'Institut International de St.  
Deutsches St. Zentralblatt (Leipzig).  
Biometrika (London).  
Journal de la Société de St. de Paris.

Metron (Rome).

8. 統計機關.

(1) 內閣統計局.

(2) 國際統計機關.

Union Télégraphique Universelle, 1868,  
Bern.

Union Postale Universelle, 1874, Bern.

Institut International d'Agriculture, 1905,  
Rome.

國際聯盟事務局. 國際勞働事務局.

(3) 私人統計機關.

(a) 國際的研究團體.

Congrès International des St. (1853-1878).

Institute International de St. (1886 —).

(b) 國內的研究團體.

Royal St. Society (England).

American St. Association (U.S.A.).

Deutsche St. Gesellschaft (Deutschland).

Société de St. de Paris (France).

日本統計學會.

帝國統計協會. 柳澤統計研究所.

大原社會問題研究所. 各種新聞及雜誌社.

銀行. 株式取引所. 商工會議所.

## 第二章 統計調査と結果の整理

統計材料の蒐集.

(1) 単位の決定.

観察単位 { 人的単位.  
物的単位.

(2) 標識の決定.

時間的標識.

場所的標識.

物的標識.

(a) 一般的と限定的.

(b) 不變的と可變的.

(c) 客觀的に容易に認識しうるものと然らざるもの.

(d) 自然的と社會的.

(e) 各單位に一つしかあり得ざるものと然らざるもの.

(f) 質的と量的 { 計量.  
計數.

(3) 第一次統計と第二次統計.

(4) 靜態調査と動態調査.

(5) 調査の様式.

單記票と列記票.

自計と他計.

(6) 調査の障碍.

( 6 )

結果の整理.

粗整と精整.

數へ上げの方法.

度數分布 (Frequency Distribution).

a. 階級の大きさ.

(Class Intervals)	Tally	(frequency)
4 - 7.99		5
8 - 11.99		15
12 - 15.99		46
16 - 19.99		68
20 - 23.99		58
24 - 27.99		32
28 - 31.99		22
32 - 35.99		10
36 - 39.99		2
40 - 43.99		2
44 - 47.99		0
48 - 51.99		1
		261

Sturges による級の數の決定

$$M = 1 + \log N / \log 2$$

$$= 1 + 3.32193 \log N \quad (N = \text{度數の合計}).$$

(1)

Month	1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928	1929	1930
Jan.	4.88	4.63	4.38	3.63	4.31	4.13	3.88	5.50	4.85
Feb.	4.88	4.69	4.78	3.65	4.19	3.88	4.00	5.56	4.63
Mar.	4.78	5.00	4.59	3.94	4.28	4.00	4.15	5.69	4.19
Apr.	4.60	5.13	4.63	3.95	4.19	4.09	4.40	5.90	3.88
May	4.25	5.13	4.23	3.88	4.00	4.13	4.55	6.00	3.72
June	4.05	4.88	3.91	3.88	3.88	4.13	4.70	6.00	3.50
July	3.94	4.94	3.53	3.93	3.97	4.06	5.13	6.00	3.13
Aug.	3.91	5.03	3.23	4.00	4.25	3.90	5.39	6.09	3.00
Sept.	4.25	5.16	3.13	4.25	4.43	3.91	5.59	6.13	3.00
Oct.	4.38	5.13	3.13	4.44	4.50	4.00	5.50	6.13	3.00
Nov.	4.63	5.09	3.28	4.38	4.43	3.94	5.38	5.41	2.97
Dec.	4.63	4.98	3.56	4.38	4.38	3.95	5.43	5.00	2.88

( 7 )



(2)

$X$	$f$	$X$	$f$	$X$	$f$	$X$	$f$	$X$	$f$	$X$	$f$	$X$	$f$		
2.88	1	3.56	1	3.94	3	4.15	1	4.43	1	4.70	1	5.09	1	5.56	1
2.97	1	3.63	1	3.95	2	4.19	3	4.44	2	4.78	2	5.13	4	5.59	1
3.00	3	3.65	1	3.97	1	4.23	1	4.50	1	4.85	1	5.16	1	5.69	1
3.13	3	3.72	1	4.00	5	4.25	4	4.55	1	4.88	4	5.38	1	5.90	1
3.23	1	3.88	6	4.05	1	4.28	1	4.59	1	4.94	1	5.39	1	6.00	3
3.28	1	3.90	1	4.06	1	4.31	1	4.60	1	4.98	1	5.41	1	6.09	1
3.50	1	3.91	3	4.09	1	4.38	4	4.63	5	5.00	2	5.43	1	6.13	2
3.53	1	3.93	1	4.13	3	4.40	1	4.69	1	5.03	1	5.50	2	$\Sigma f$	108

$\Sigma f = N = \text{total frequency.}$

$$m = 1 + 3.32193 \times \log 108 = 1 + 3.32193 \times 2.03342$$

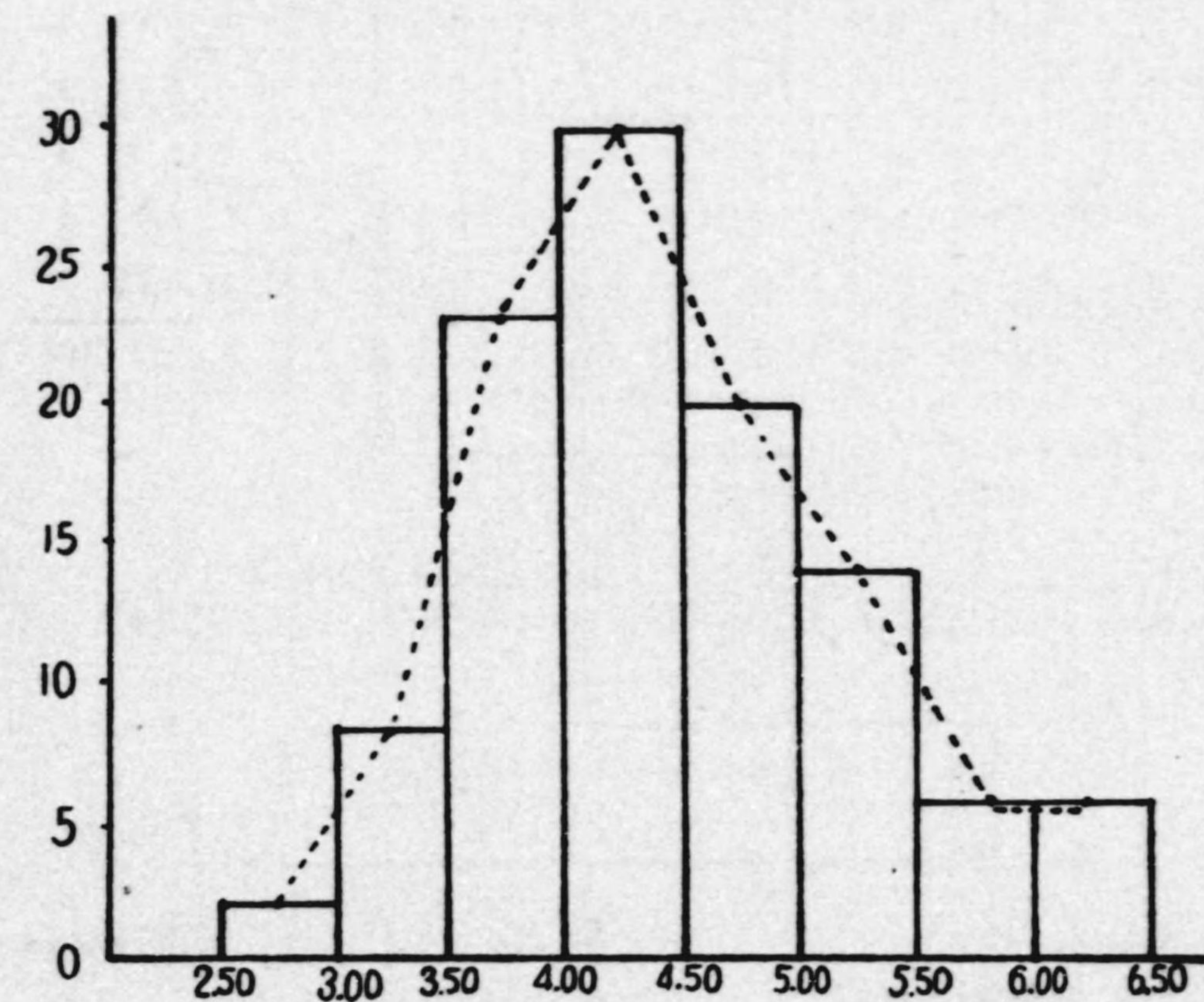
$$= 7.75 \div 8$$

(3)

Classes (inclusive)	Class Marks	Frequencies
2.50—2.99 %	2.75 %	2
3.00—3.49	3.25	8
3.50—3.99	3.75	23
4.00—4.49	4.25	30
4.50—4.99	4.75	20
5.00—5.49	5.25	13
5.50—5.99	5.75	6
6.00—6.49	6.25	6

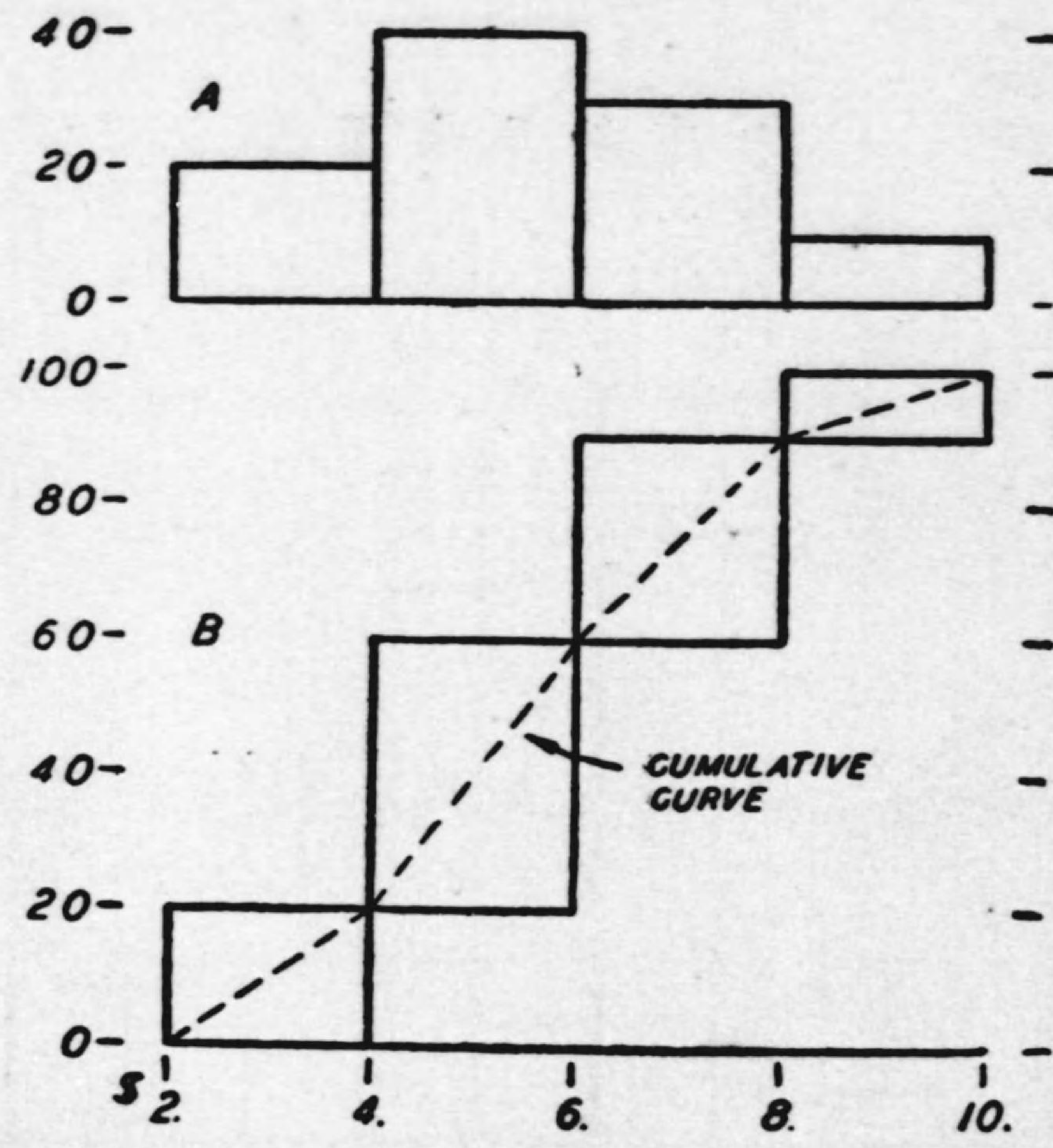
( 8 )

(4) 度數分布圖表



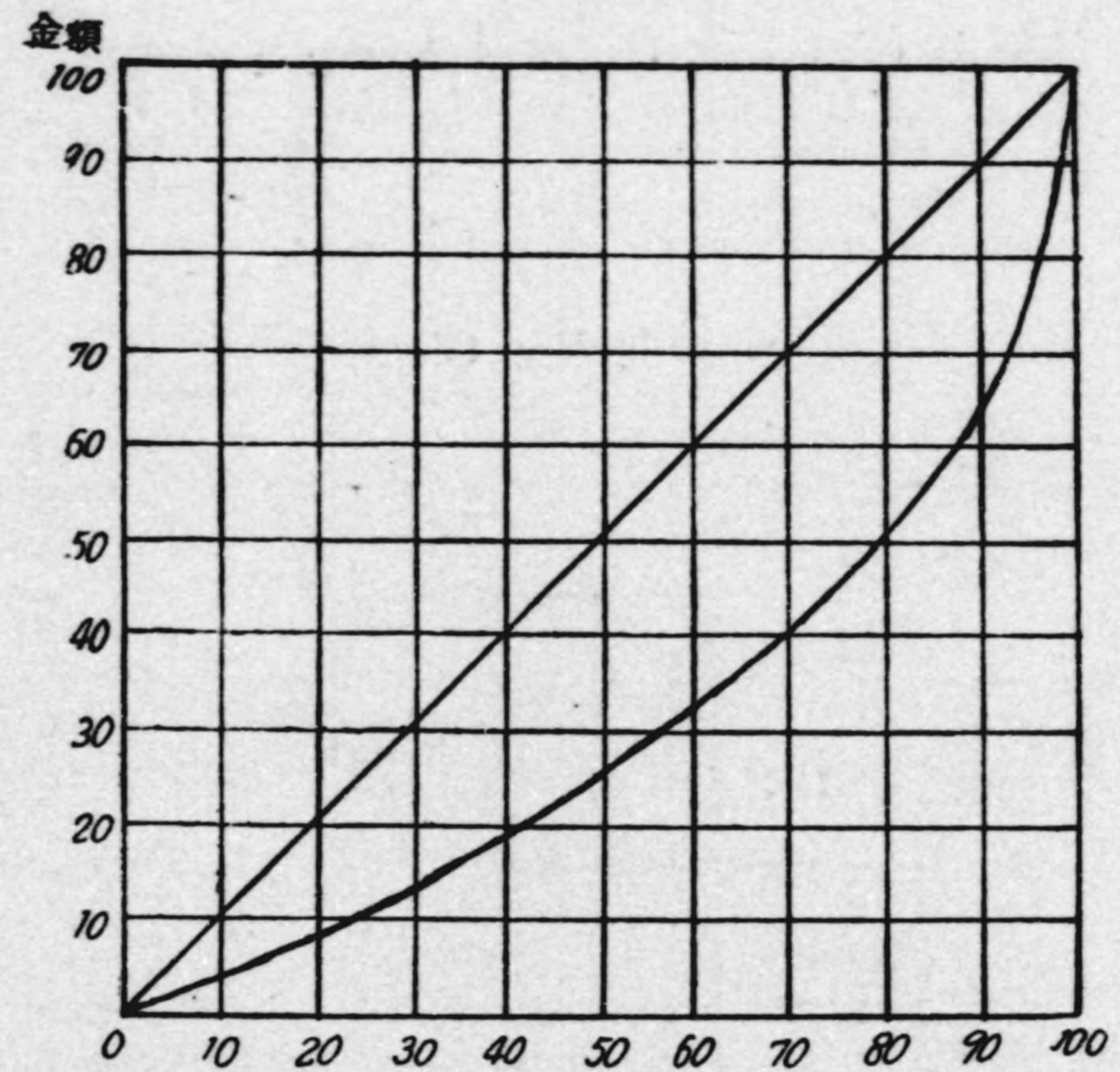
( 9 )

累積度數圖表 (Cumulative Curve, Ogive).



Lorenz-Curve.

所得金額	人員	累積人員	%	金額	累積金額	%
1.000未滿	537,991	537,991	28.3	396,063	396,063	12.6
2.000 "	844,371	1,382,362	72.8	866,880	1,262,943	40.1
5.000 "	366,032	1,748,394	92.1	776,240	2,039,183	64.7
10.000 "	92,607	1,841,001	97.0	397,762	2,436,945	74.2
20.000 "	36,176	1,877,177	98.9	264,946	2,701,891	85.8
50.000 "	16,011	1,893,188	99.3	218,384	2,920,275	92.7
100.000 "	3,759	1,896,947	99.9	102,488	3,022,763	95.9
100.000以上	1,674	1,898,621	100.0	127,920	3,150,683	100.0
	1,898,621			3,150,683		



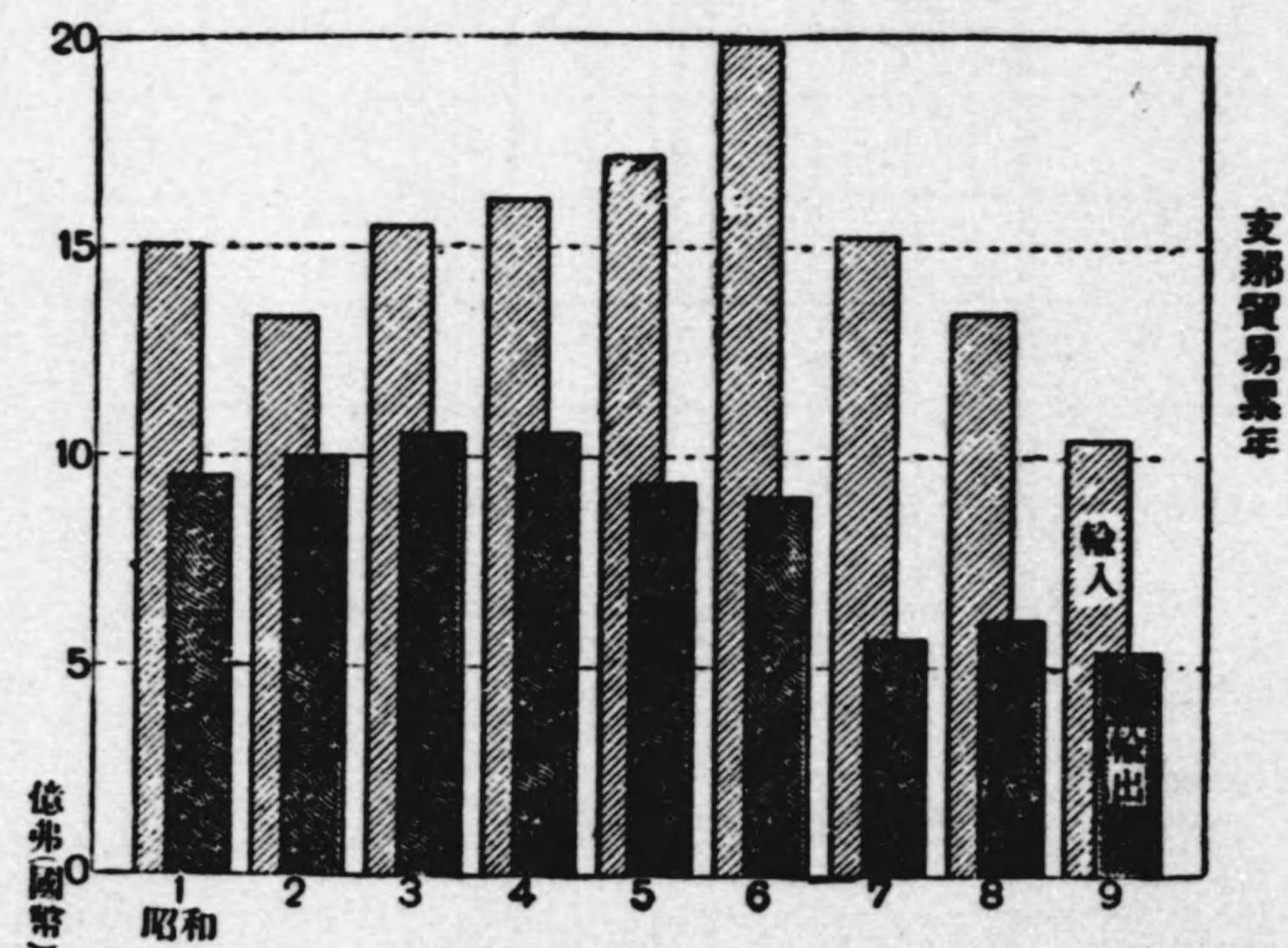
A (對角線) = 所得的等線

B (曲線) = Lorenz Curve

### 第三章 圖 示 表

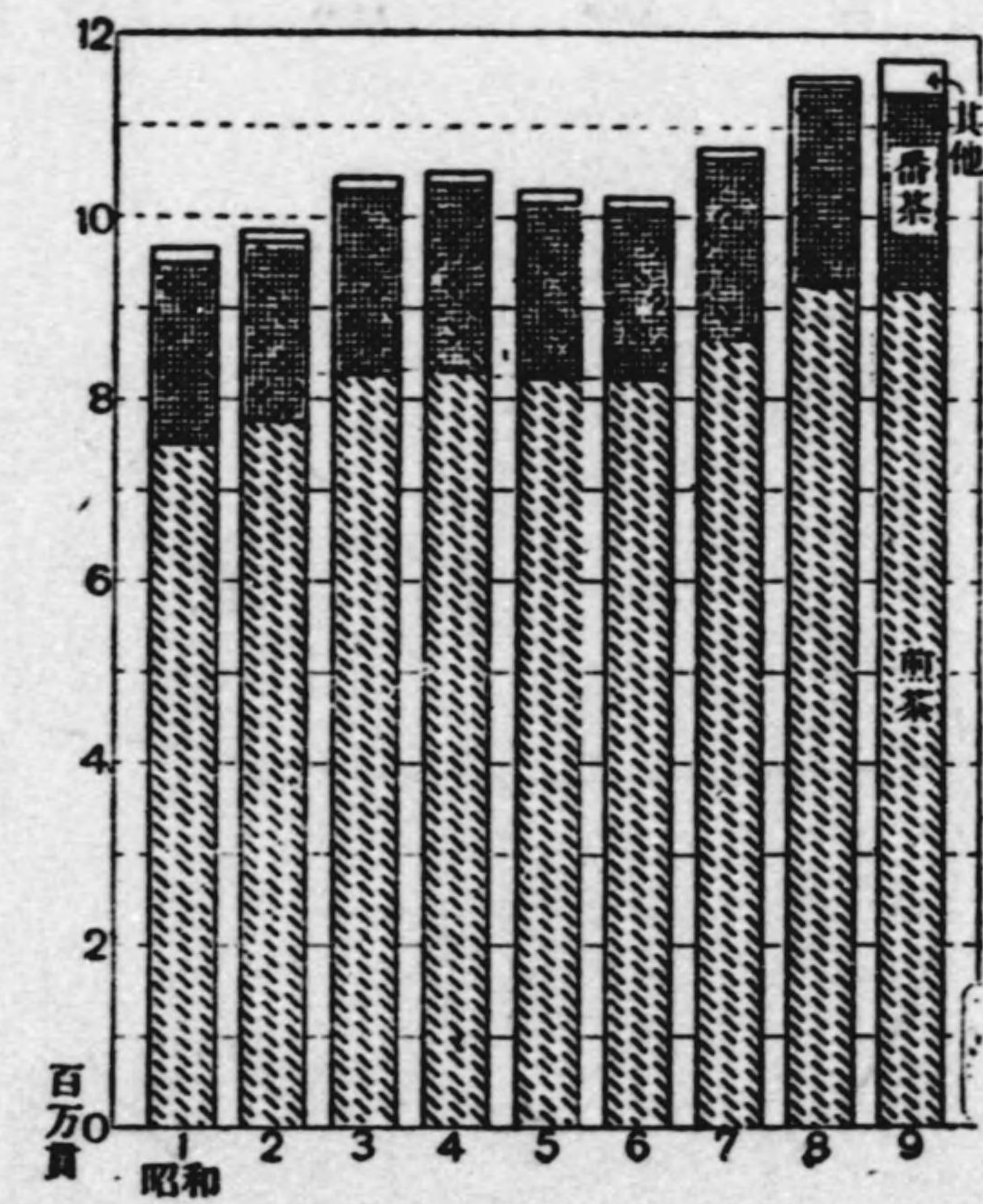
#### (1) 棒圖表 (Bar Chart)

Simple Bar Chart



#### Subdivided Bar Chart

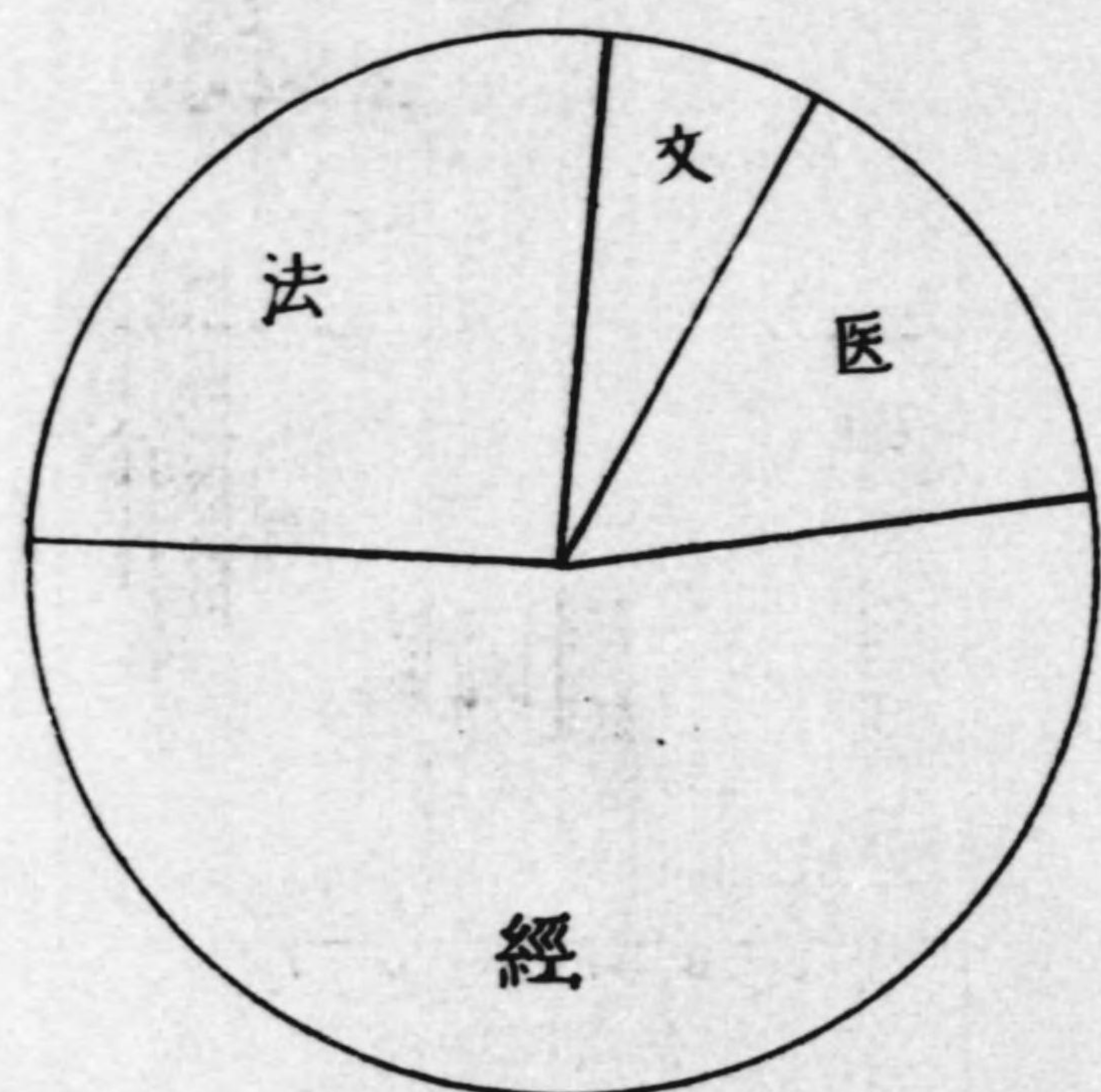
内地製茶産額



#### (2) 面積圖表 (Area Diagram)

正方形又は圓による圖示は、正確なる作製が困難なるのみならず、見る人に正しき判断を與へ難し。面積圖表の一種たるパイ圖表 (Pie-Chart) は利用の途多し。

慶應義塾大學々部別學生數		%	パイ圖表中心角度
文 學 部	200	6.4	23°
經 濟 學 部	1661	53.3	192°
法 學 部	798	25.7	92°
醫 學 部	455	14.6	53°
計	3114	100.0	360°



(3) 立體圖表又は繪畫圖表は面積圖表よりも一層多くの困難を伴ふ。

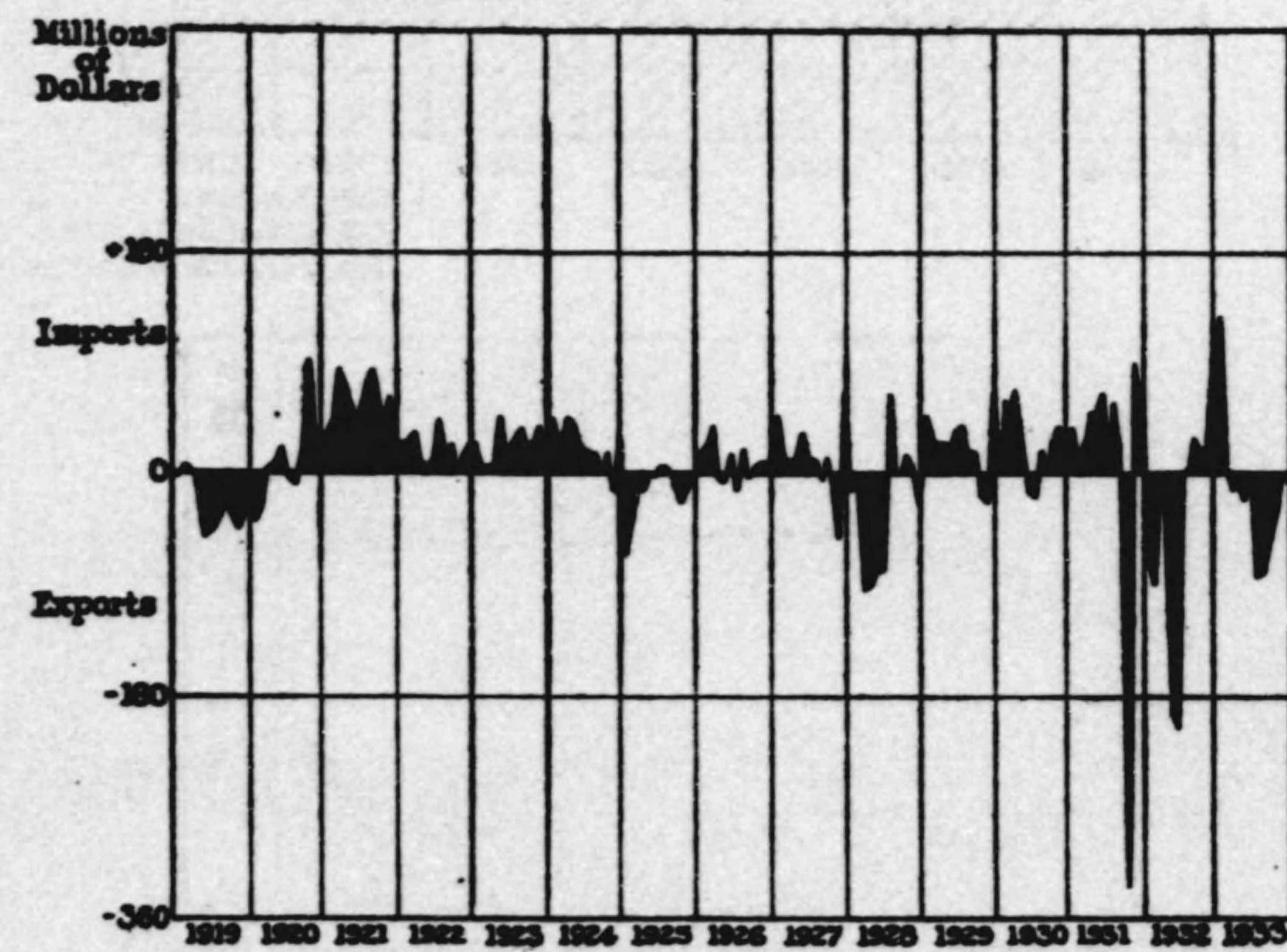
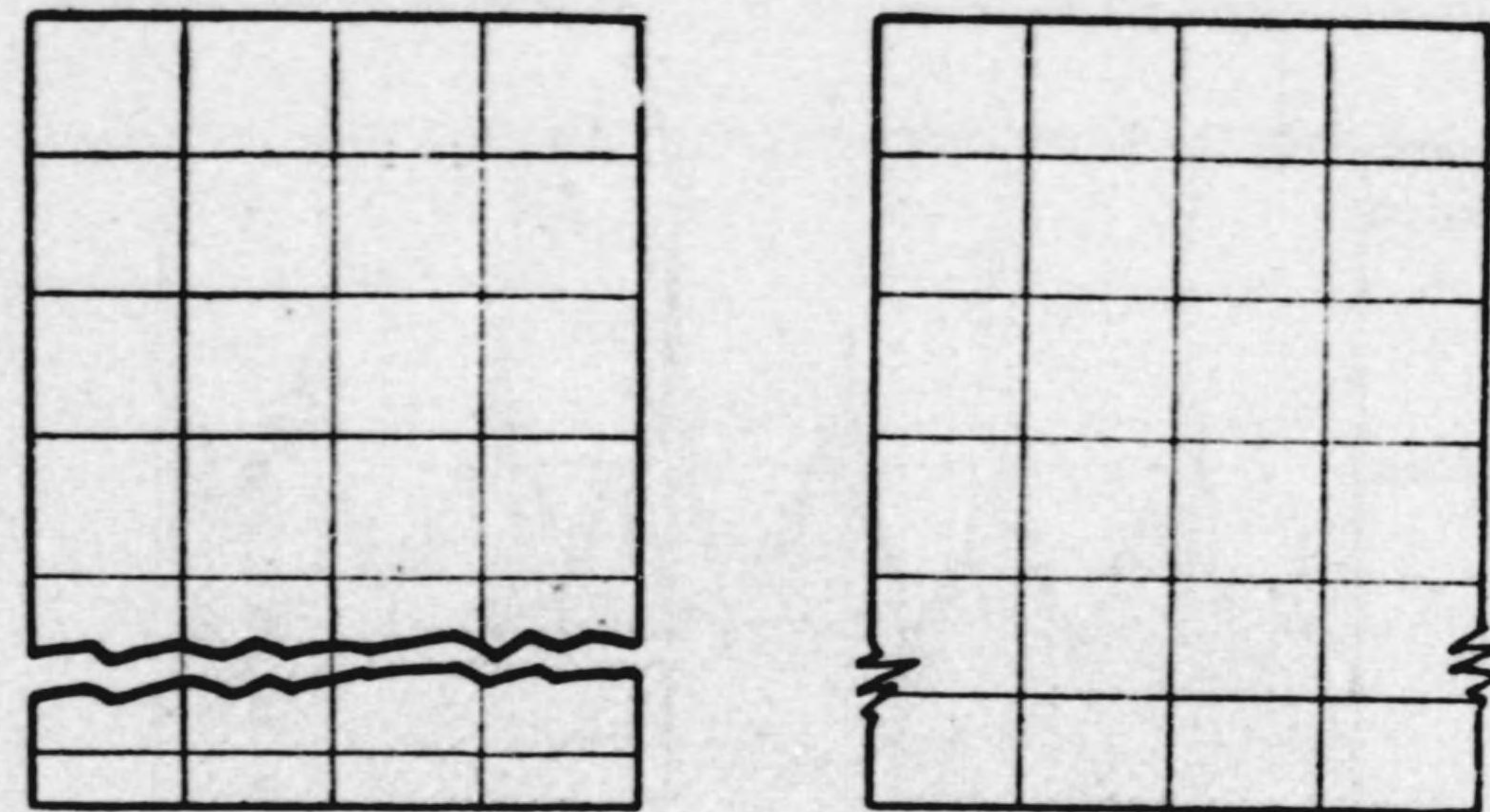
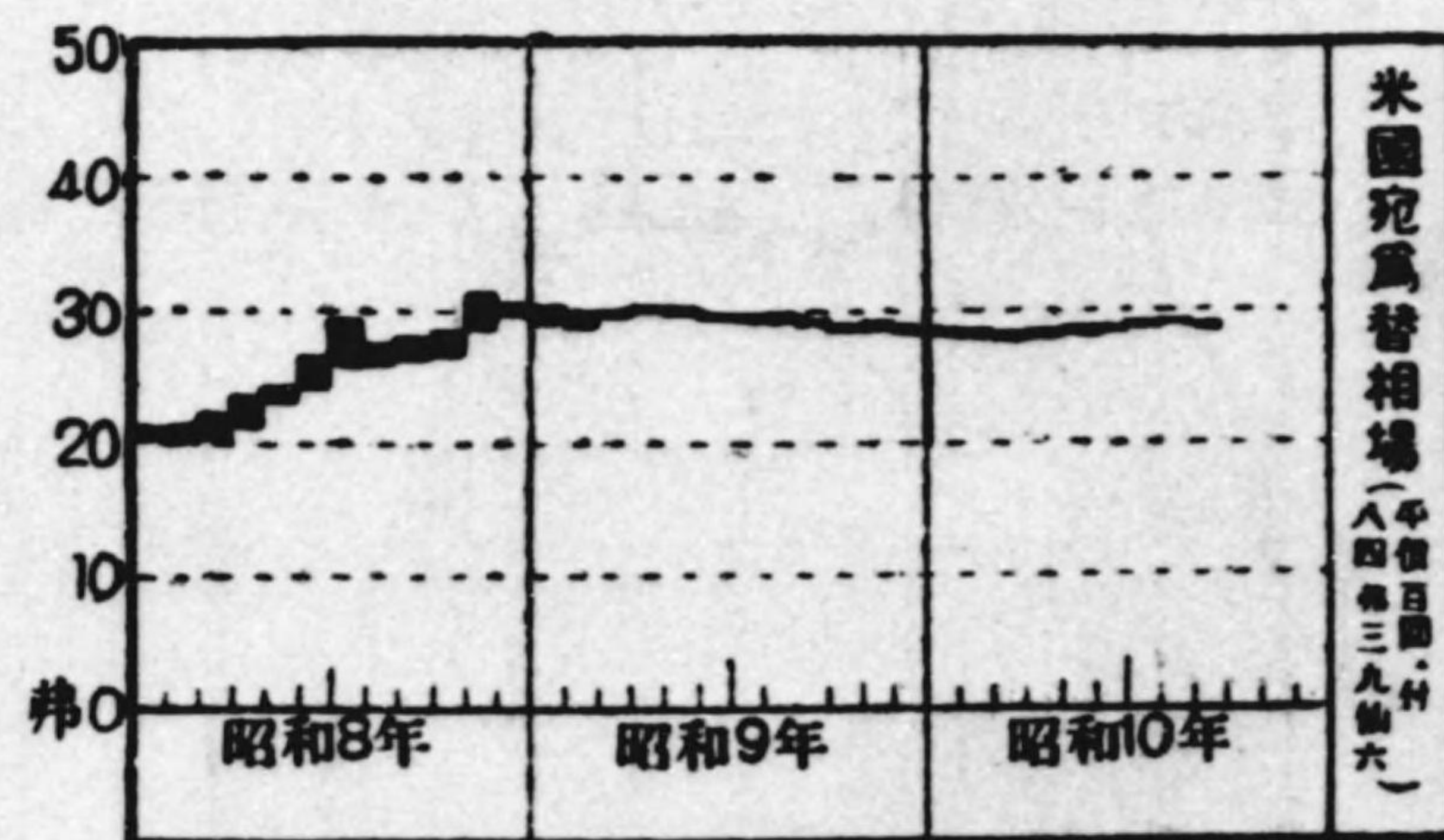
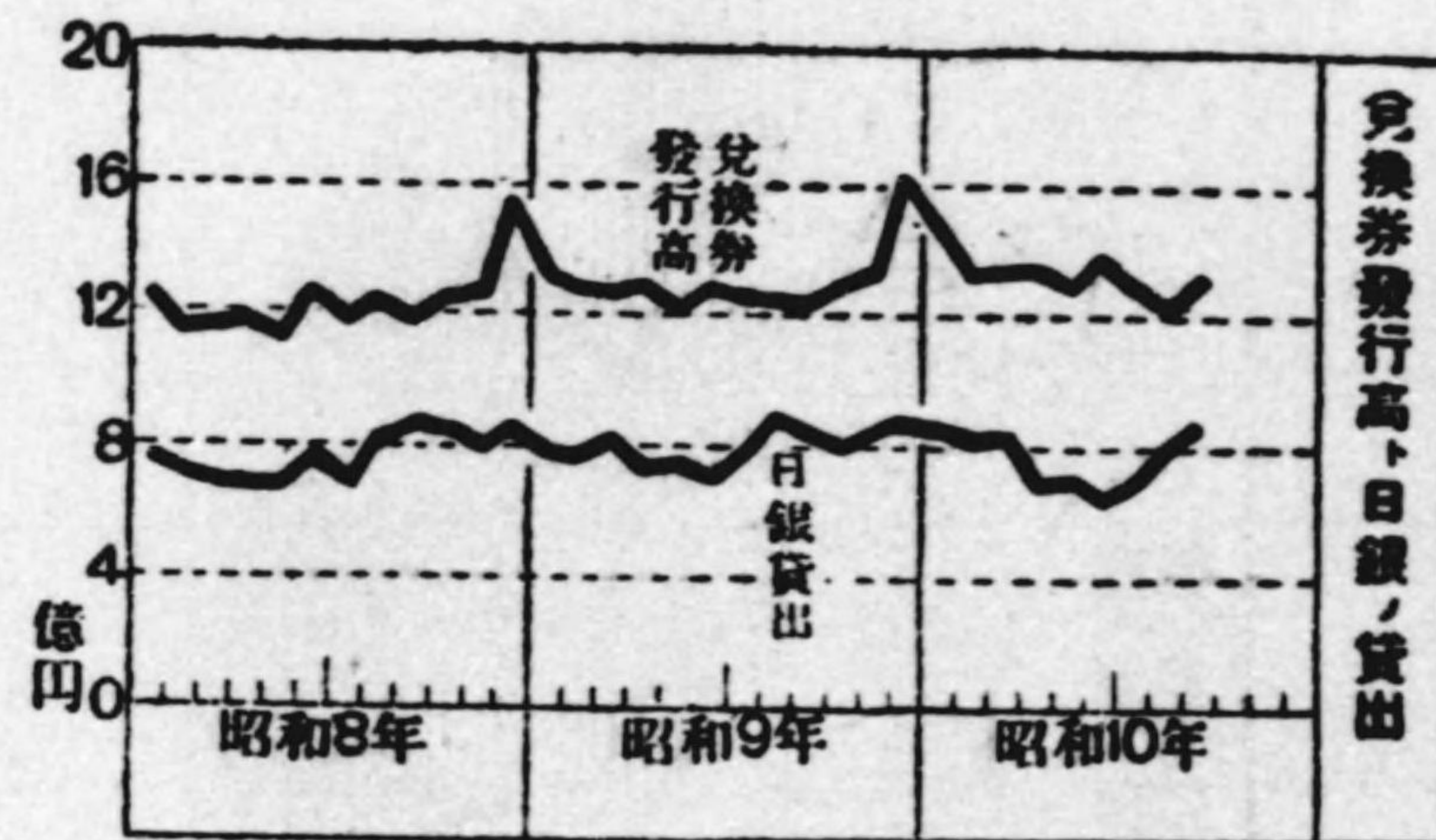
(4) 統計地圖。

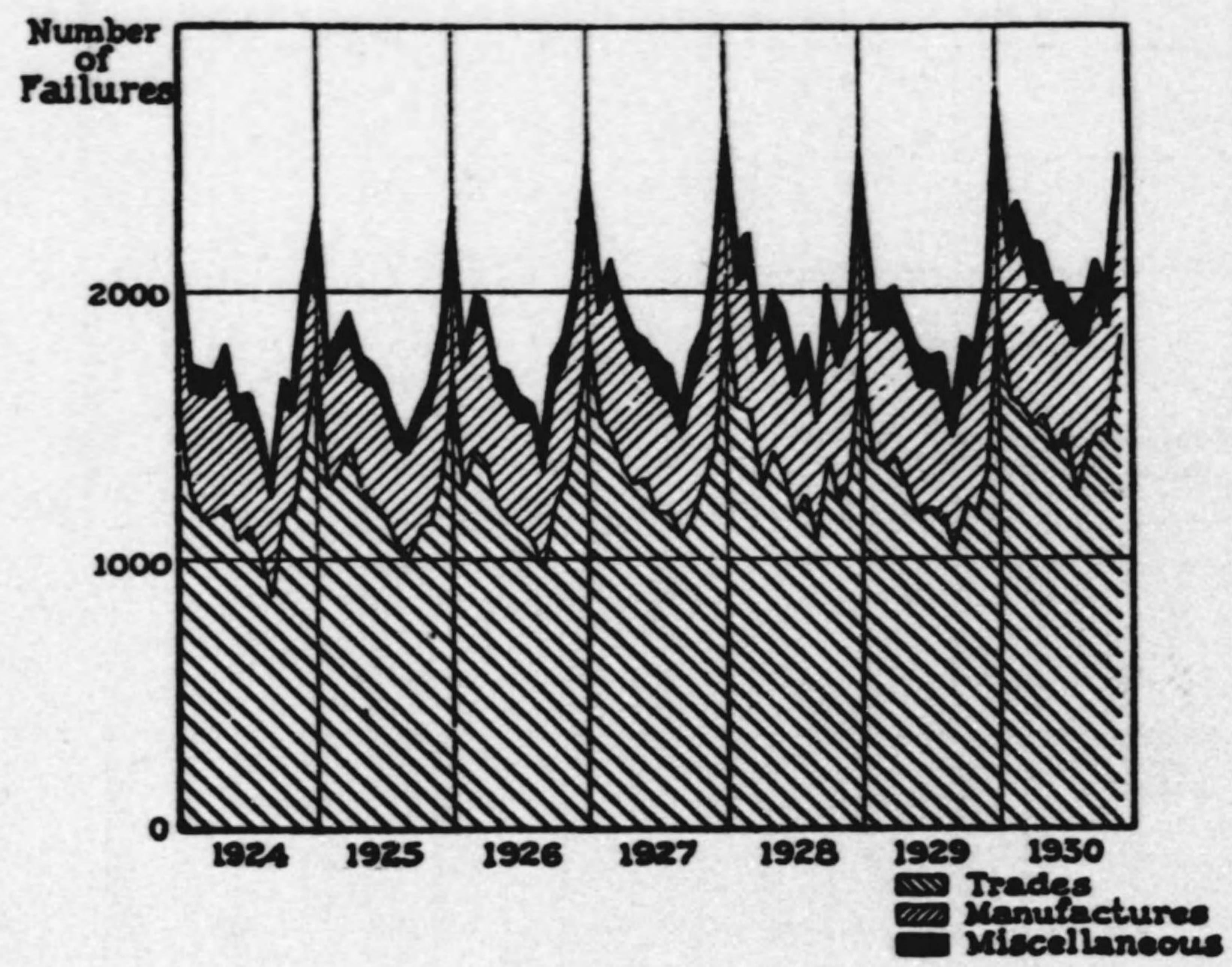
東北地方冷害郡別状況  
(稲作面積に対する收穫5割以上減収見込面積の%)



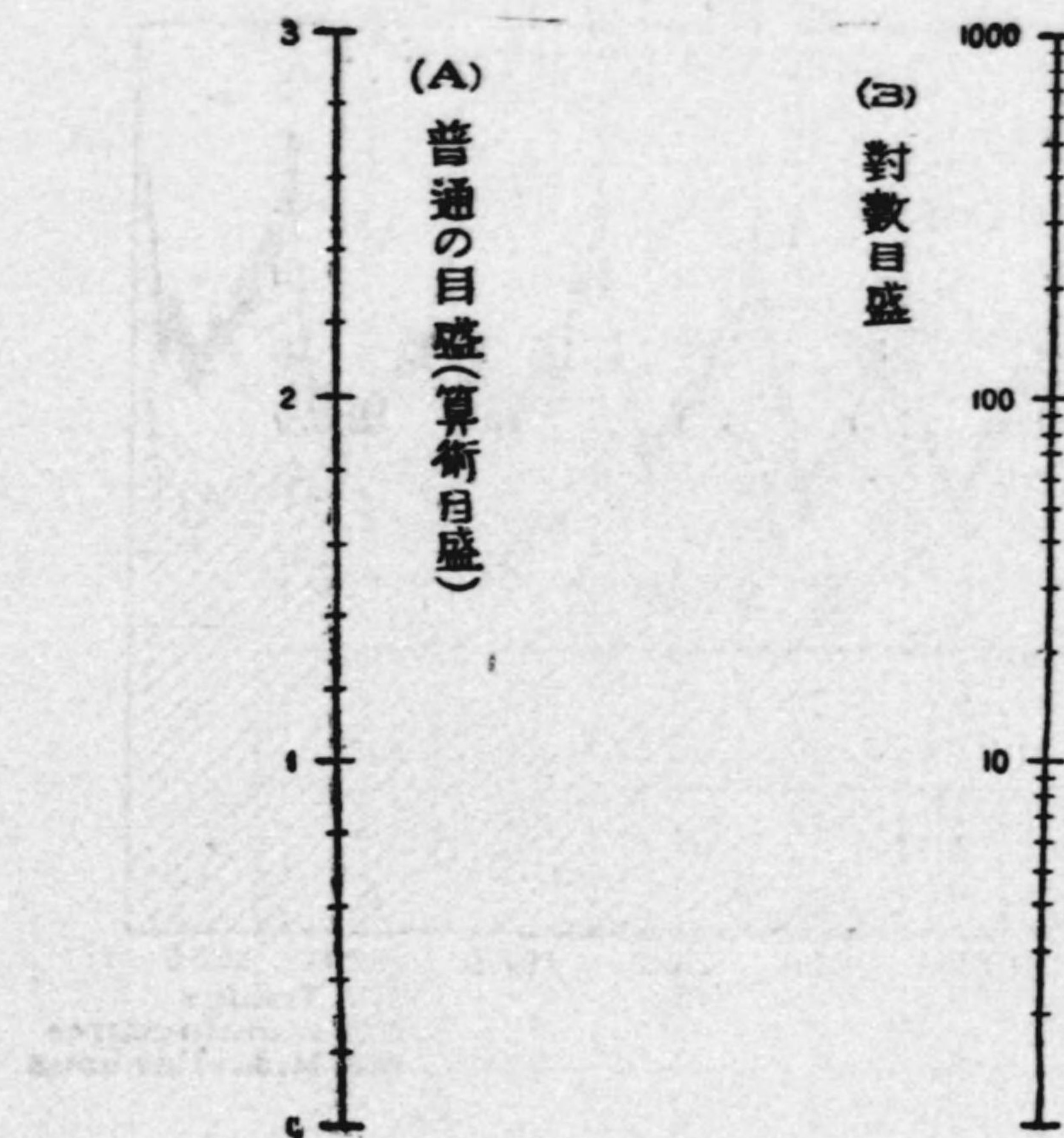
(5) 直線又は曲線圖表 (Line or Curve Graph).

(a) 算術目盛を用ふるもの.





(b) 半對數圖表 (Semi-logarithmic Chart)-



對數の原理

常用對數と自然對數

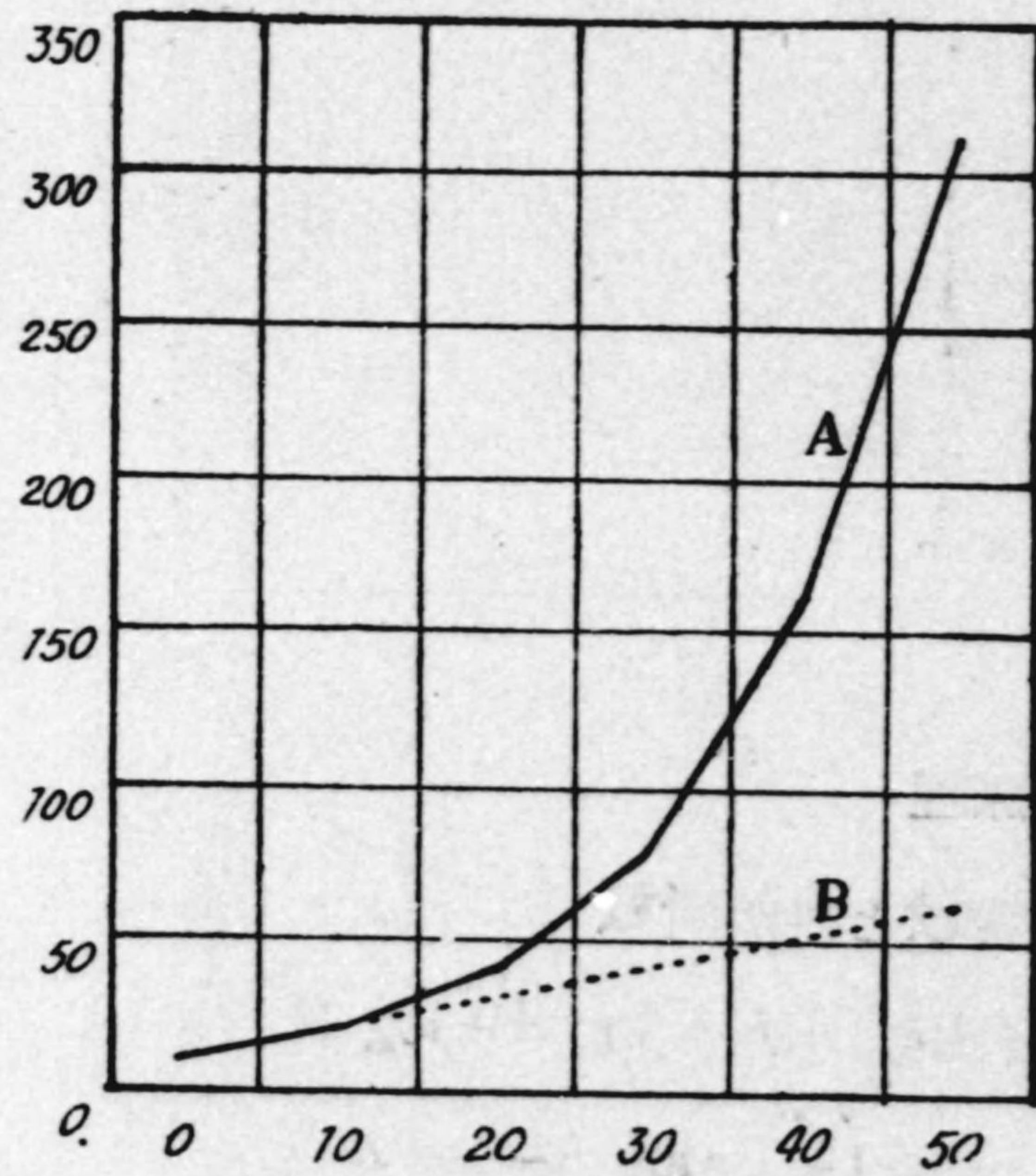
指數法則  $\log (A B) = \log A + \log B$

$\log \left( \frac{A}{B} \right) = \log A - \log B$

$\log (A^n) = n \log A$

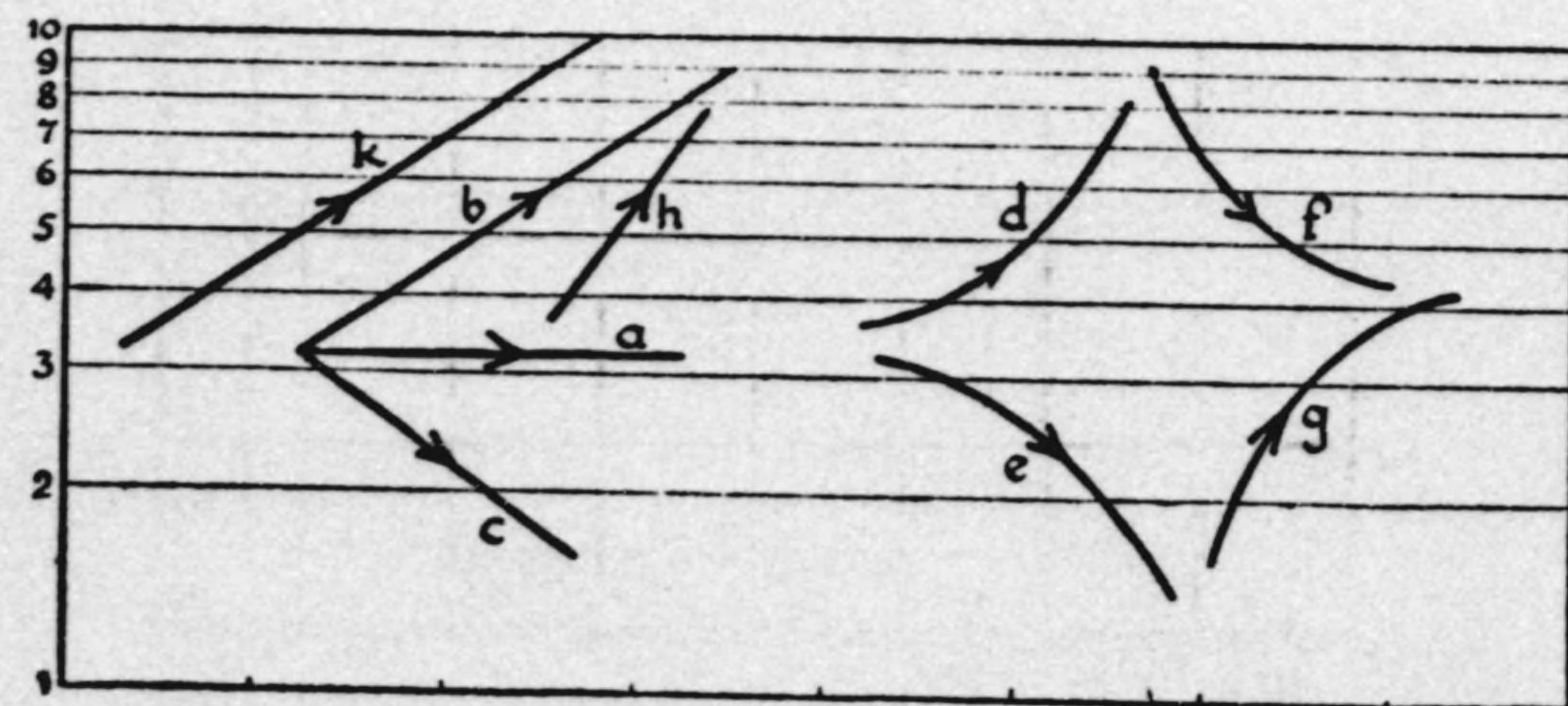
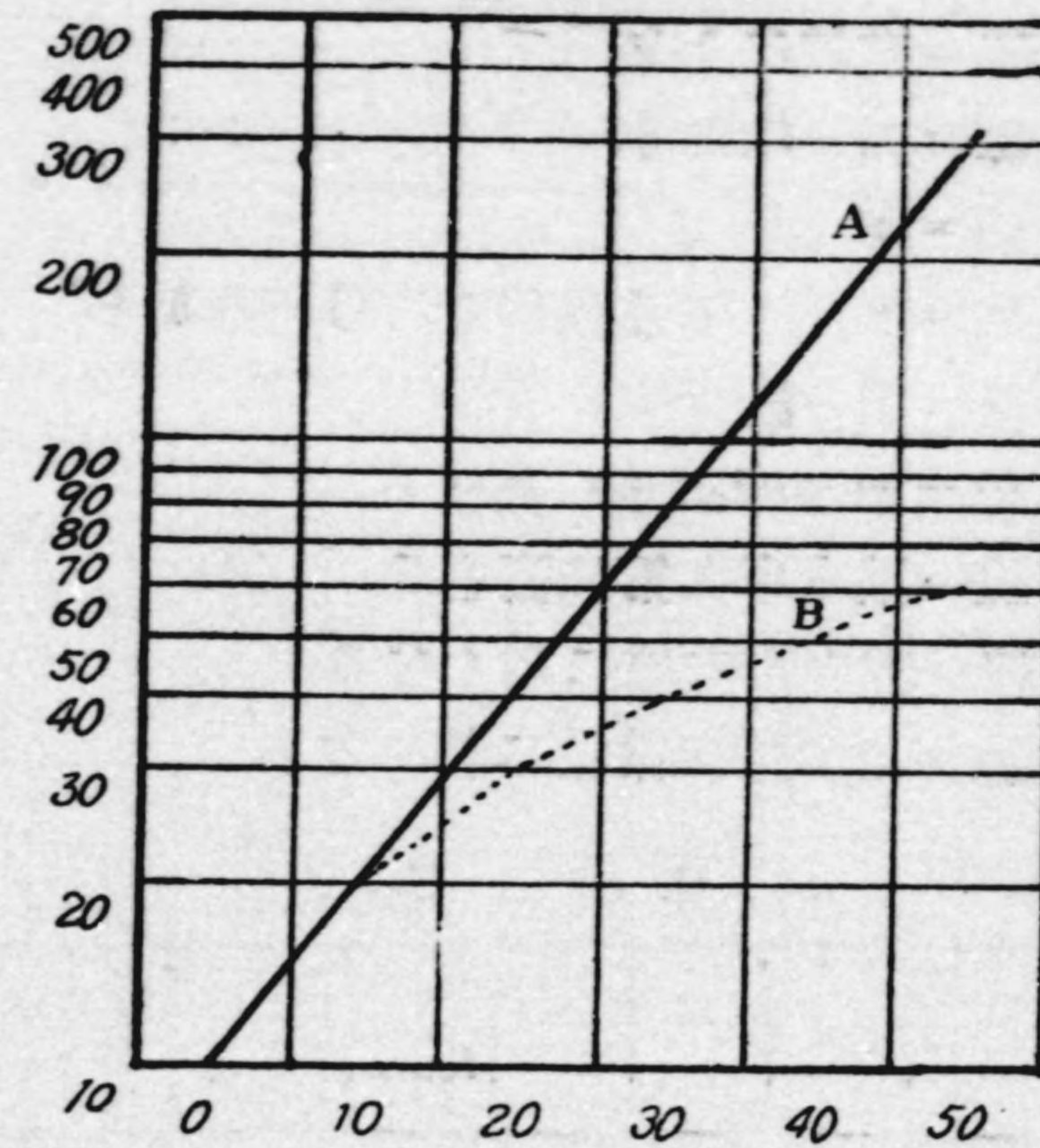
年次	A			B		
	總額	十年間の増加額	%	總額	十年間の増加額	%
0	10	—	—	10	—	—
10	20	10	100	20	10	100
20	40	20	100	30	10	50
30	80	40	100	40	10	23
40	160	80	100	50	10	25
50	350	160	100	60	10	20

算術圖表



( 20 )

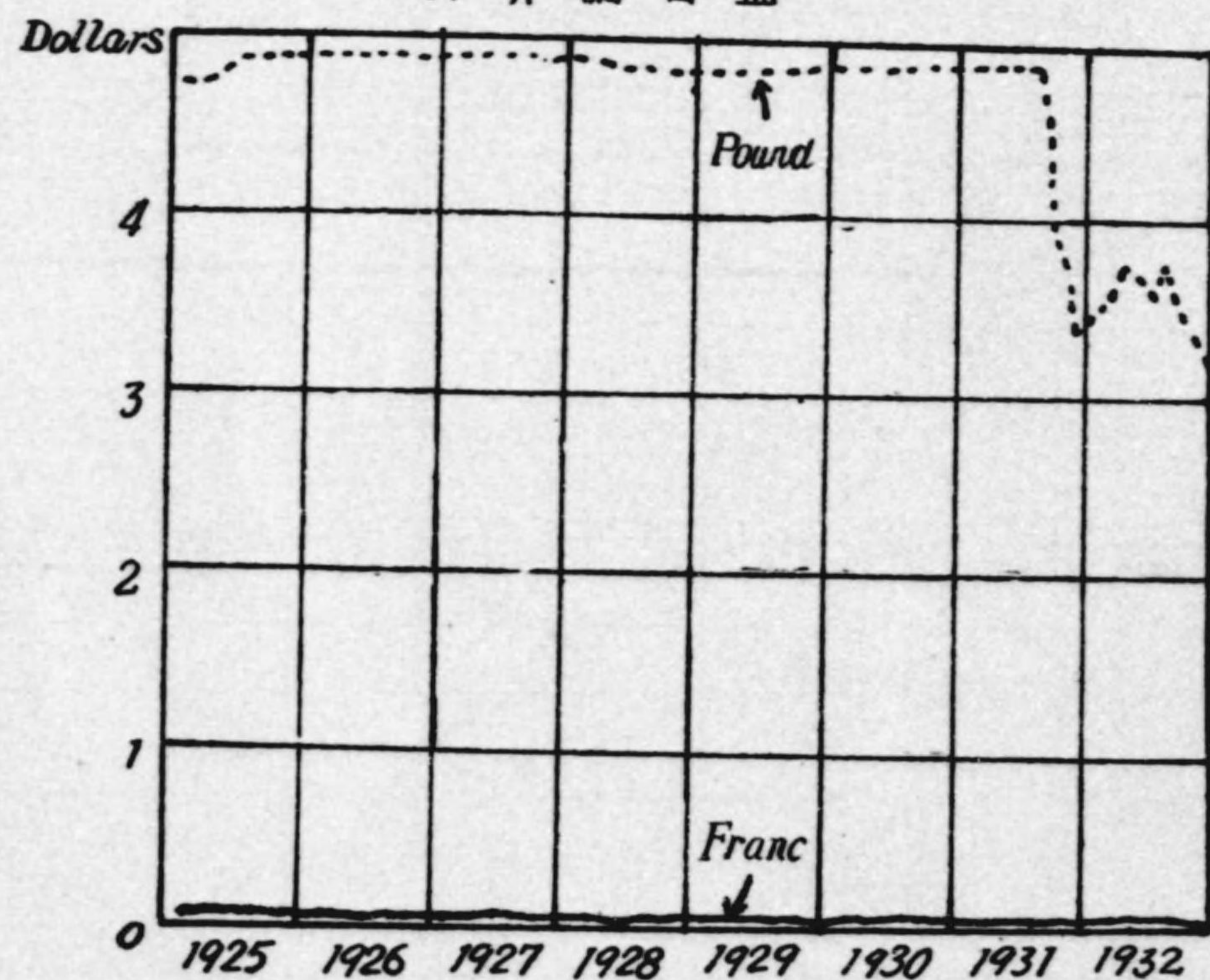
半對數圖表



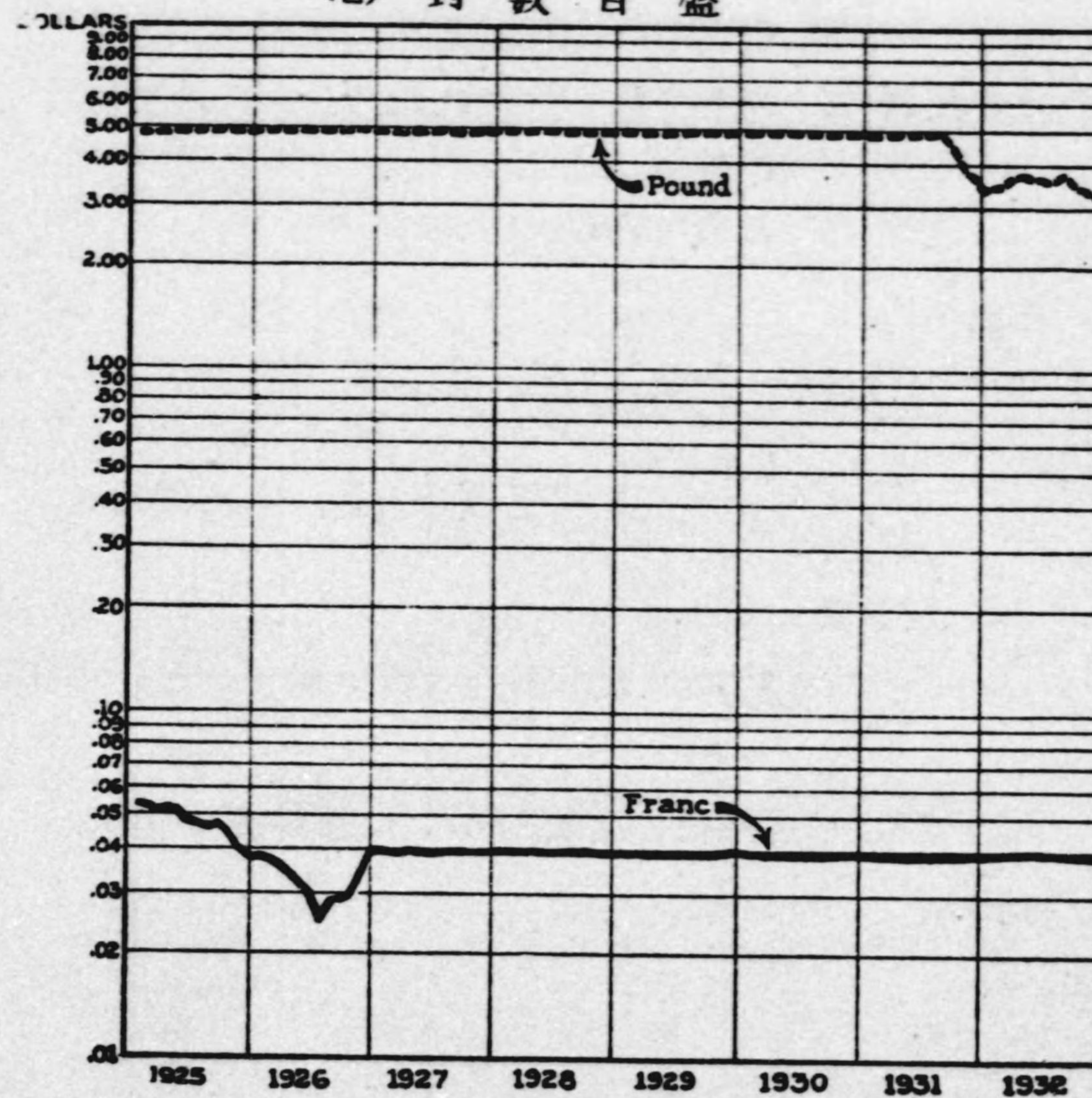
( 21 )

- a 線=増減なきを示す
- b 線=同一増加率
- k 線=b と同じ
- h 線=b よりも急激なる“同一増加率”
- c 線=同一減少率
- d 線=増加率次第に高まる
- e 線=減少率次第に高まる
- f 線=減少率次第に緩くなる
- g 線=増加率次第に緩くなる

(1) 算術目盛



(2) 對數目盛



## 第四章 平均

### 1. 平均の意義.



2. その種類
1. 算術平均 (Arithmetic Mean =  $M_a$ ).
  2. 幾何平均 (Geometric Mean =  $M_g$ ).
  3. 調和平均 (Harmonic Mean =  $M_h$ ).
  4. 中位数 (Median =  $M_e$ ).
  5. 並数 (Mode =  $M_o$ ).

3. 算術平均.

(a) 原材料が一一與へられてゐる時.

$$M_a = \frac{\sum(X)}{N} \quad (X \text{ は各項の大きさ, } N \text{ は項数}).$$

(b) 度数表よりは.

$$M_a = \frac{\sum(f \times M.P.)}{\sum(f)}$$

( $f$  は各階級の度数,  $M.P.$  は各階級の中點).

(例示).

Interval	(M.P.)	(f)	(f) × (M.P.)
\$4—7.99	\$6	5	30
8—11.99	10	15	150
12—15.99	14	46	644
16—19.99	18	68	1204
20—23.99	22	58	1276
24—27.99	26	32	832
28—31.99	30	22	660
32—35.99	34	10	340
36—39.99	38	2	76
40—43.99	42	2	84
44—47.99	46	0	0
48—51.99	50	1	50
		<u>261</u>	<u>5346</u>

$$M_a = \frac{\sum(f \times M.P.)}{\sum(f)} = \frac{5346}{261} = \$20.56$$

簡便法.

(a) の場合. 下例にて 22 を假設的平均とせば.

a.	15	-7
b.	19	-3
c.	22	0
d.	25	+3
e.	30	+8
		<u>+1</u>

$$M_a = 22 + \frac{1}{5} = 22.2$$

(b) の場合. 下例にて \$18 を假設的平均とせば.

Interval	(M.P.)	(f)	(dev.)	(f × dev.)
\$4—7.99	\$6	5	-12	-60
8—11.99	10	15	-8	-120
12—15.99	14	46	-4	-184
16—19.99	18	68	0	0
20—23.99	22	58	4	232
24—27.99	26	32	8	256
28—31.99	30	22	12	264
32—35.99	34	10	16	160
36—39.99	38	2	20	40
40—43.99	42	2	24	48
44—47.99	46	0	28	0
48—51.99		1	32	32
		<u>261</u>		<u>668</u>

$$M_a = 18 + \frac{668}{261} = 18 + 2.56 = 20.56$$

又は階級の大きさ(上例に於ては \$4) を一単位とせば、  
更に簡便なり (Group deviation method).

Interval	(M.P.)	(f)	(d.)	(f×d)
4-7.99	6	5	-3	-15
8-11.99	10	15	-2	-30
12-15.99	14	46	-1	-46
16-19.99	18	68	0	0
20-23.99	22	58	1	58
24-27.99	26	32	2	64
28-31.99	30	22	3	66
32-35.99	34	10	4	40
36-39.99	38	2	5	10
40-43.99	42	2	6	12
44-47.99	46	0	7	0
48-51.99	50	1	8	8
		261		167

$$M_a = 18 + \frac{167}{261} \times 4 = 20.56$$

4. 算術平均の性質.

5. 幾何平均.

(a) 原材料が一々與へられてゐる時.

$$M_g = \sqrt[n]{X_1 X_2 X_3 \dots X_n}$$

$$\therefore \log M_g = \frac{1}{n} (\log X_1 + \log X_2 + \dots + \log X_n)$$

( 26 )

(b) 度数表よりは

$$M_g = \sqrt[\sum(f)]{X_1^{f_1} X_2^{f_2} X_3^{f_3} \dots X_n^{f_n}}$$

$$\therefore \log M_g = \frac{1}{\sum(f)} (f_1 \log X_1 + f_2 \log X_2 + \dots + f_n \log X_n)$$

(例示).

M.P.	(f)	$M_g = \sqrt[108]{2.75^2 3.25^8 \dots 6.25^6}$
2.75	2	$\log M_g = \frac{1}{108} (2 \log 2.75 + 8 \log 3.25 + \dots + 6 \log 6.25)$
3.22	8	
3.75	23	
4.25	30	
4.75	20	
5.25	13	
5.75	6	
6.25	6	$= \frac{69.25727}{108} = 0.64127$
	108	$M_g = 4.38$

6. 幾何平均の性質.

7. 調和平均.

$$M_h = \frac{1}{\frac{1}{n} \left( \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \dots + \frac{1}{X_n} \right)}$$

8. 中位數.

( 27 )

点数 (class)	學生數 (f)	累積度數
25-29.9%	2	2
30-34.9	4	6
35-39.9	5	11
40-44.9	9	20
45-49.9	8	28
50-54.0	7	35
55-59.9	8	43
60-64.9	4	47
65-69.9	14	61
70-74.9	18	79
75-79.9	24	103
80-84.9	21	124
85-89.9	14	138
90-94.9	7	145
95-99.6	5	150
	150	

$$Me = L + \frac{i}{f} C = 70\% + \left(\frac{14}{18}\right) \times 5\% = 73.89\%$$

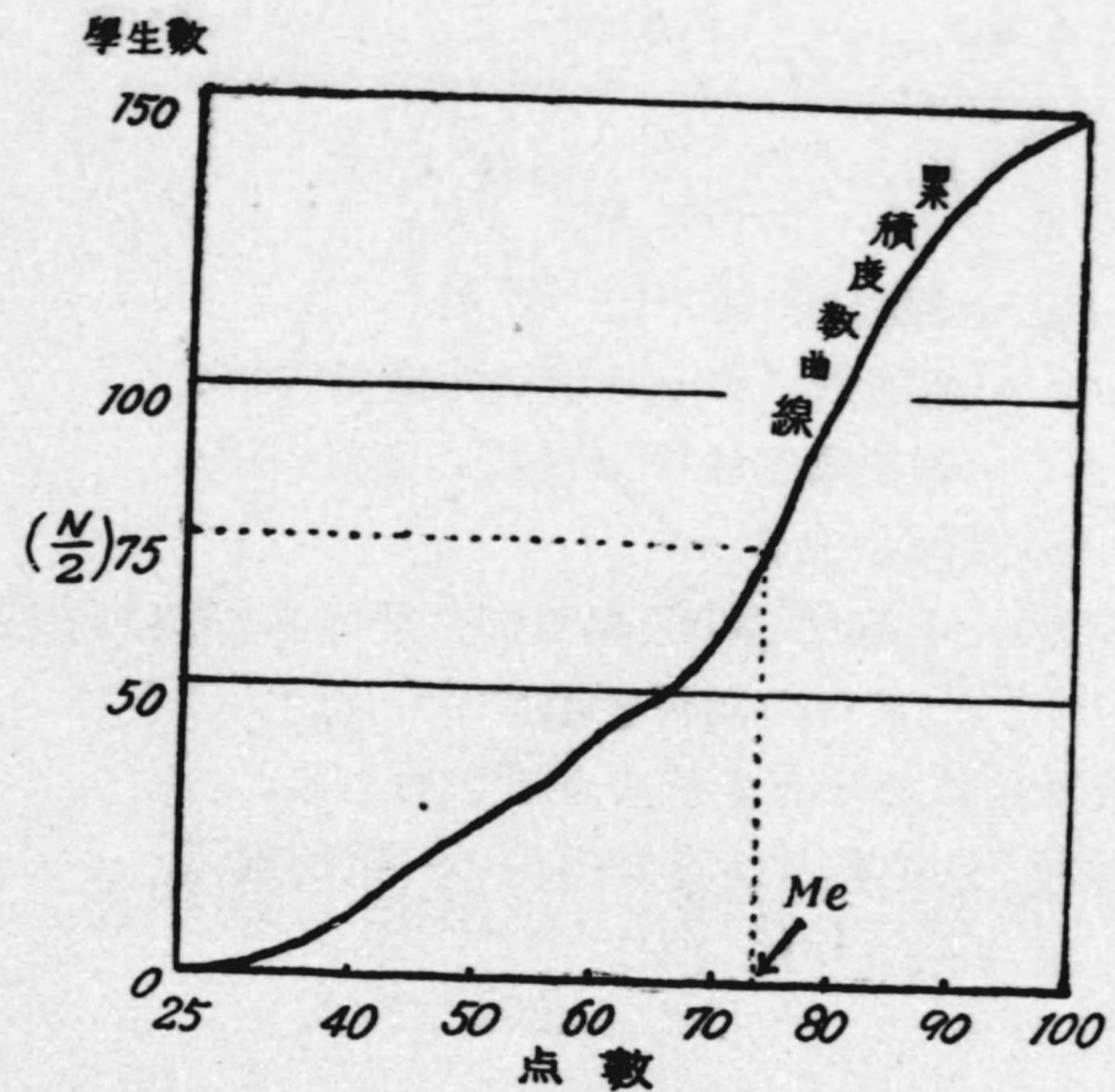
$L$  = 求むる中央項, 上例に於ては 75 人目の學生, を含む階級 (即ち 70-74.9) の下の限界 (即ち 70 點).

$f$  = 如上の階級に含まる度數 (即ち學生數, 18 人).

$i$  = 75 人目は右の 18 人中何番目に當るか (即ち 14 人目).

$C$  = 階級の大きさ (5 點).

9. 累積度數曲線による中位數の圖表的決定法.



10. 中位數の性質.

11. 並數.

Class	f
.00-.09%	19
.10-.19	43
.20-.29	32
.30-.39	27
.40-.49	17
.50-.59	21
.60-.69	14
.70-.79	0
.80-.89	2
.90-.99	2
1.00-1.09	0
1.10-1.19	0
1.20-1.29	1
	187

$$M_0 = L_{mo} + \frac{f_a}{f_a + f_b} C =$$

$$0.10\% + \frac{32}{32 + 19} = 0.163\%$$

$L_{mo}$  = 並數階級の下限 (0.10).

$f_a$  = 並數階級の上の階級の度數 (32).

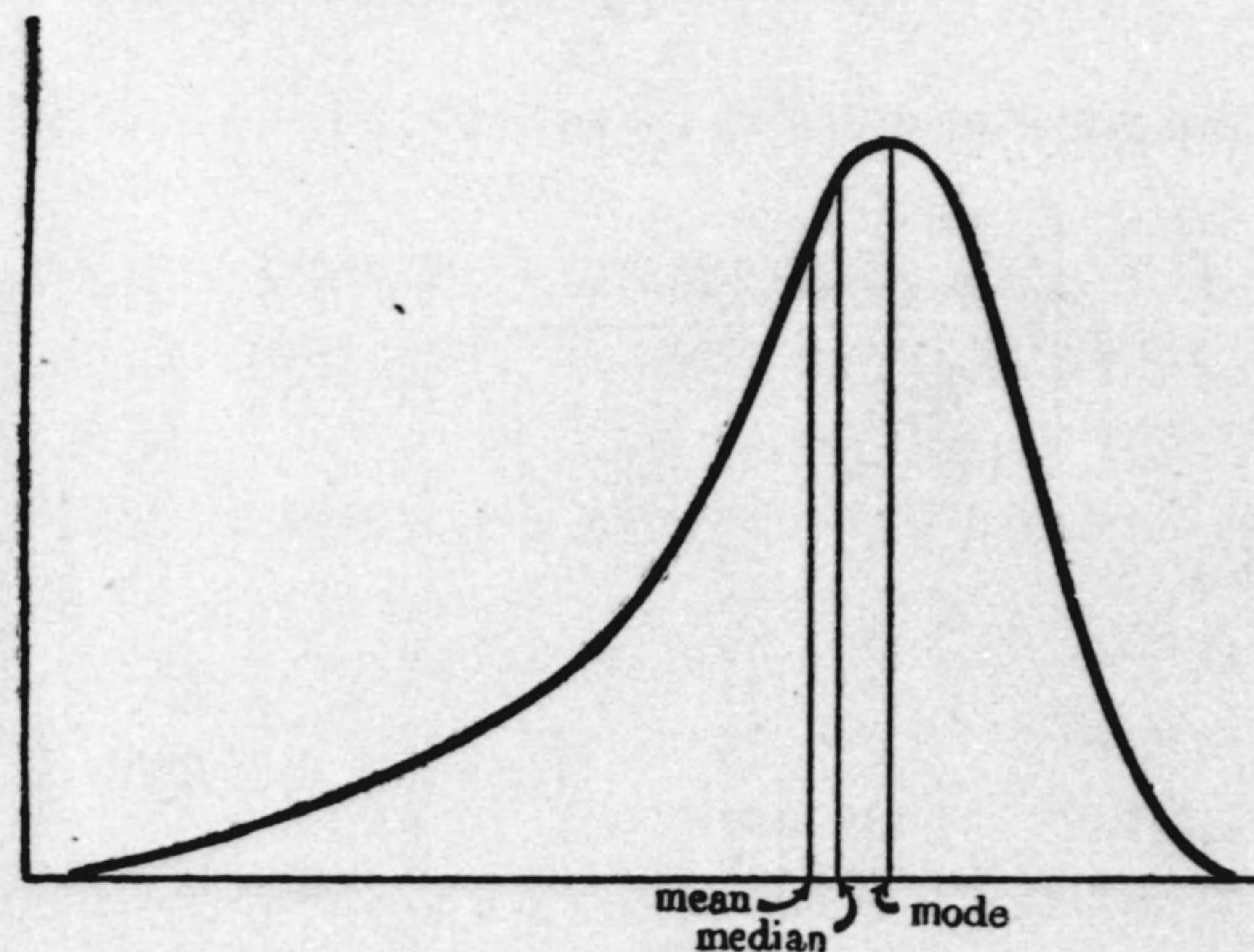
$f_b$  = 並數階級の下の階級の度數 (19).

$C$  = 階級の大きさ.

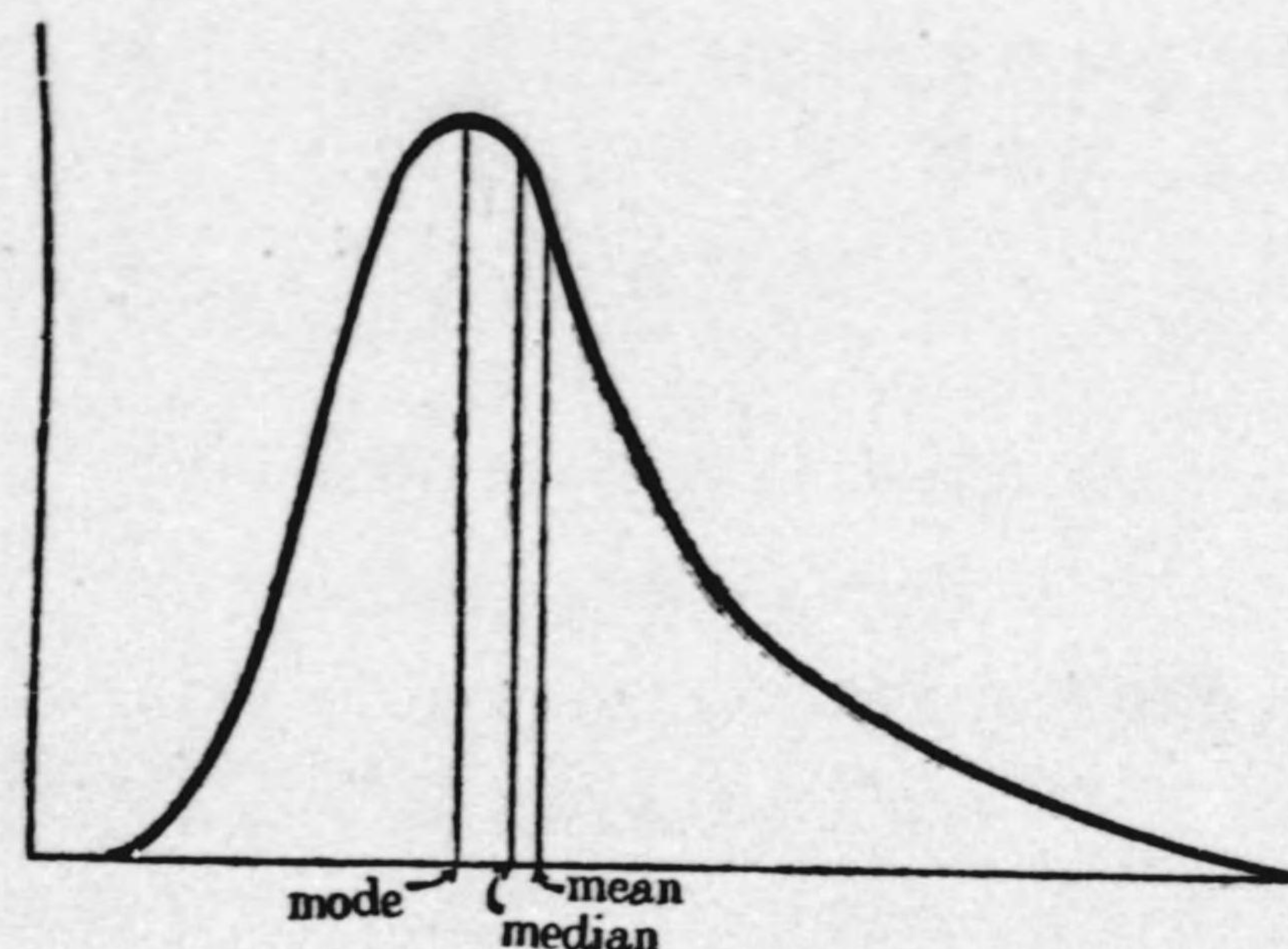
(注意) 上例は 1930 年米國に於ける郡別の被救恤人口の割合を示す.

12. 並數は度數分布曲線よりも求めらる.
13. 並數, 中位數及び算術平均の一般的關係.

$$M_0 = M_a - 3(M_a - M_o)$$



( 30 )



## 第五章 散布度(分散度)と歪度 (非對稱度)

1. 散布度 (Dispersion) の意義.

種類 { Range.  
平均偏差 (MD).  
標準偏差 ( $\sigma$ ).  
四分一偏差 (QD).

2. Range.

株價に於ける最高價格と最低價額との差の如く.  
兩極端の二項の大きさの開きを言ふ.

3. 平均偏差 (Mean Deviation).

算術平均又は中位數からの偏差の絶對值 (即ち正負)

( 31 )

の記號を無視せるもの) の算術平均を言ふ .今  $X_1, X_2, \dots, X_n$  を各項,  $M$  を平均とせば.

$$(a) \quad MD = \frac{(X_1 - M) + (X_2 - M) + \dots + (X_n - M)}{n}$$

$$= \frac{\sum(d)}{n}$$

(b) 度数表よりは.

$$MD = \frac{f_1(X_1 - M) + f_2(X_2 - M) + \dots + f_n(X_n - M)}{\sum(f)}$$

$$= \frac{\sum(fd)}{\sum(f)}$$

又は簡便法により.

$$MD = \frac{\sum(fd')}{\sum(f)} + \frac{(N_s - N_r)c}{\sum|f|}$$

68-69.9	66	12	2	24
70-71.9	71	33	1	33
72-73.6	73	57	0	0
74-75.9	75	25	1	25
76-77.9	77	9	2	18
78-79.9	79	4	3	12
80-81.9	81	6	4	24
82-83.9	83	2	5	10
84-85.9	85	0	6	0
86-87.9	87	0	7	0
88-89.9	89	2	8	16
		150		162

( 32 )

$$MD' = \frac{\sum(fd')}{\sum(f)} + \frac{(N_s - N_r)c}{\sum(f)}$$

$$= \frac{162}{150} + \frac{(102 - 48) \times 0.026}{150} = 1.0894$$

$$MD = MD' \times C = 1.0894 \times 2 = 2.1788 \text{ ヶ月.}$$

(注意)  $\left\{ \begin{array}{l} MD' = \text{階級に於ける } MD. \\ N_s = \text{實際あるべき偏差よりも大なる偏差あるもの.} \\ N_r = \text{實際あるべき偏差よりも小なる偏差あるもの.} \\ c = \text{任意の原點と } M_e \text{ 又は } M_o \text{ との差.} \\ C = \text{階級の大きさ.} \end{array} \right.$

#### 4. 標準偏差 (Standard Deviation).

算術平均と各項との偏差 ( $x$ ) の自乗の總和を算術平均せるもの、平方根を言ふ.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x^2)}{N}}$$

X	x	x <sup>2</sup>
123.7	-0.2	0.04
124.1	+0.2	0.04
123.9	0	0.00
123.8	-0.1	0.01
124.0	+0.1	0.01
$M_a = 123.9$	0	0.10

$$\sigma = \sqrt{\frac{0.10}{5}} = \sqrt{0.02}$$

$$= 0.14$$

( 33 )

度数表よりは、

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(fx^2)}{\sum(f)}}$$

X	f	x	x <sup>2</sup>	fx <sup>2</sup>
3.0	1	-1.38	1.9044	1.9044
3.5	5	-0.88	0.7744	3.8720
4.0	9	-0.38	0.1444	1.2996
4.5	11	+0.12	0.0144	0.1584
5.0	7	+0.62	0.3844	2.6908
5.5	3	+1.12	1.2544	3.7632
$M_a=4.38$	36			13.6884

$$\sigma = \sqrt{\frac{13.6884}{36}} = 0.62$$

簡便法、

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(d'^2)}{N} - \left(\frac{\sum f d'}{N}\right)^2}$$

(d' = 假设平均 ( $\bar{Z}$ ) と各中点との偏差.)

一行當り 廣告料金	新聞紙数 (f)	Z からの偏差 (d')	fd'	fd' <sup>2</sup>
\$.01-.019	2	-5	-10	50
.02-.029	4	-4	-16	64
.03-.039	23	-3	-69	207
.04-.049	30	-2	-60	120
.05-.059	40	-1	-40	40
.06-.069	49	0	0	0
.07-.079	35	1	35	35
.08-.089	25	2	50	100
.09-.099	12	3	36	108
.10-.109	9	4	36	144
.11-.119	6	5	30	150
.12-.129	10	6	60	360
.13-.139	3	7	21	147
.14-.149	1	8	8	64
.15-.159	1	9	9	81
.16-.169	3	10	30	300
	249		120	1970

( 34 )

$$\sigma = 0.01 \sqrt{\frac{1970}{249} - \left(\frac{120}{249}\right)^2} = 0.01 \sqrt{7.9116 - 0.2322}$$

$$= 0.01 \sqrt{7.6794} = 0.0277(\$)$$

(附記) 上記算式の導出の證明は次の如し。

$$d = X - Z$$

$$c = \bar{X} - \bar{Z} \quad (\bar{X} = M_a)$$

$$\therefore d - c = X - \bar{X} = x$$

$$\bar{X} = \bar{Z} + \frac{\sum(f d)}{N}$$

$$\therefore \bar{X} - \bar{Z} = \frac{\sum(f d)}{N} = c$$

$d - c = x$  なるが故に

$$d = x + c$$

$$\therefore d^2 = x^2 + 2cx + c^2$$

$$f(d^2) = f(x^2) + 2cfx + fc^2$$

$$\sum f(d^2) = \sum f(x^2) + 2c \sum(fx) + c^2 \sum f$$

$$= \sum f(x^2) + 2c \sum(fx) + Nc^2$$

$$(\sum f = N)$$

( 35 )



然るに  $m_a$  からの偏差の和は零, 即ち  $\sum f(x) = 0$  なるが故に

$$\sum f(d^2) = \sum f(x^2) + Nc^2$$

$$\text{又は } \sum f(x^2) = \sum f(d^2) - Nc^2$$

$$\therefore \frac{\sum f(x^2)}{N} = \frac{\sum f(d^2)}{N} - c^2$$

然るに

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(x^2)}{N}}$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{\sum f(d^2)}{N} - c^2}$$

然るに

$$c = \frac{\sum f(d)}{N}$$

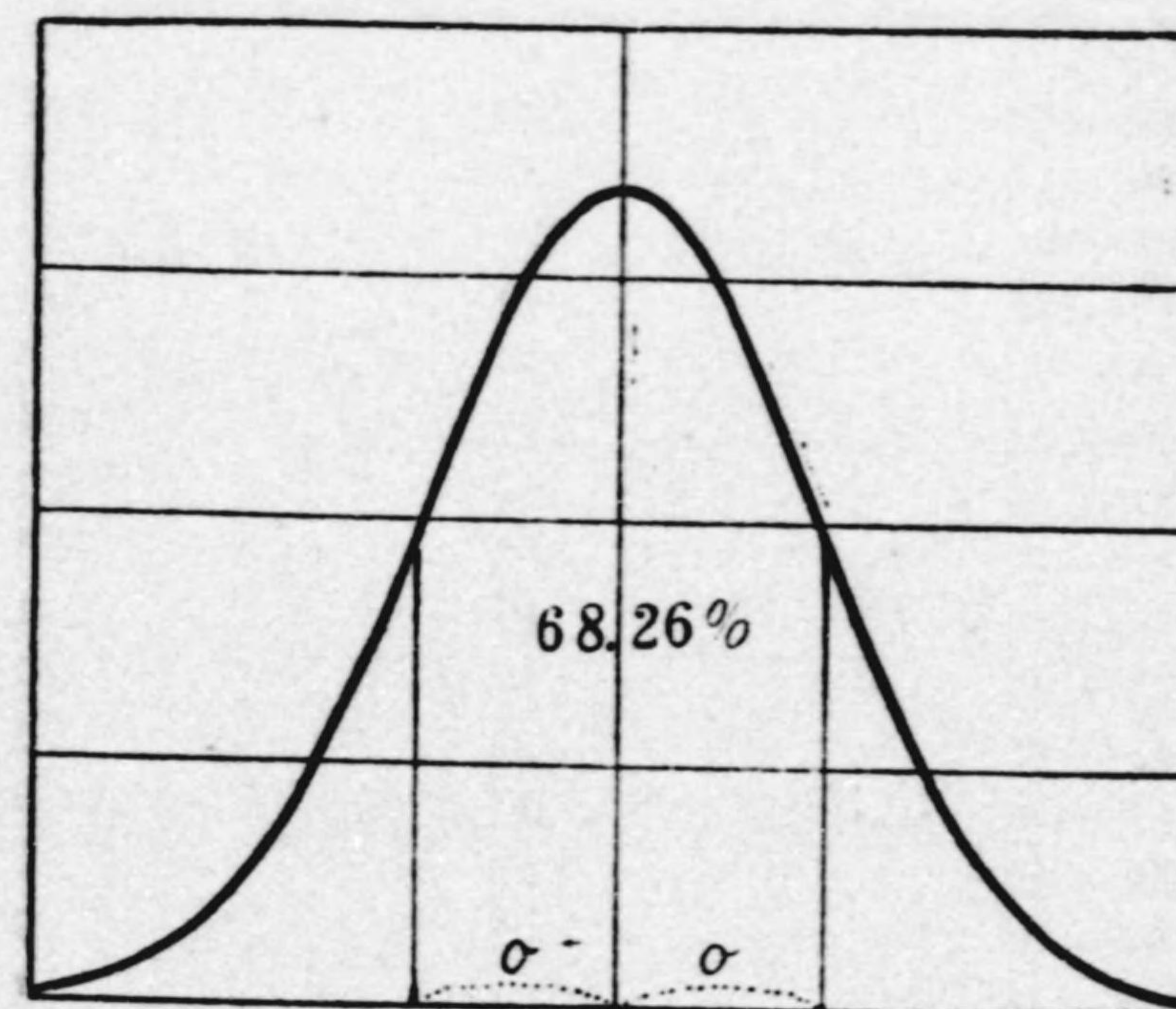
$$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{\sum f(d^2)}{N} - \left(\frac{\sum f(d)}{N}\right)^2}$$

#### 5. 標準偏差の性質.

- (1) 正常分布に於ては  $MD = 0.7979\sigma$  なり.
- (2) 正常分布に於て  $M_a$  を中心として左右に  $\sigma$  に等しき範囲をとれば, 總數の 68.26% は右範圍内に含まる.

( 36 )

- (3)  $2\sigma$  を取れば 95.46%,  $3\sigma$  を取れば 99.73% が右範圍内に含まる.



#### 6. シェパードの補正 (Sheppard's Correction).

$$\sigma = \sigma^2 - \frac{1}{12}h^2$$

#### 6. 四分一偏差 (Quartile Deviation, or Semi-Interquartile Range).

$$QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \dots \dots \left( \begin{array}{l} Q_3 = \text{Third Quartile} \\ Q_1 = \text{First Quartile} \end{array} \right)$$

( 37 )

児童の智能 程 度	児童数 ( $f$ )	累積 度数
135-139	1	1,000
130-134	1	999
125-129	10	997
120-124	19	987
115-119	22	968
110-114	37	946
105-109	71	909
100-104	90	838
95- 99	134	748
90- 94	142	614
85- 89	139	472
80- 84	132	333
75- 79	89	201
70- 74	60	112
65- 69	23	52
60- 64	13	29
55- 59	10	16
50- 54	5	9
45- 49	1	1
Total	1,000	

$$\frac{N}{4} = 250; f_1 = 201; f_m = 132; L = 79.5$$

$$c = 5.$$

$$\therefore Q_1 = L + \frac{\left(\frac{N}{4} - f_1\right)}{f_m} \times C = 79.5 + \frac{(250 - 201)}{132}$$

$$\times 5 = 81.35.$$

( 38 )

$$\text{同様に } \frac{N}{3} = 750; f_1 = 748; f_m = 90, L = 99.5$$

$$c = 5.$$

$$\begin{aligned} \therefore Q_3 &= L + \frac{\left(\frac{3N}{4} - f_1\right)}{f_m} \times c \\ &= 99.5 + \frac{750 - 748}{90} \times 5 = 99.61 \end{aligned}$$

$$\therefore QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{99.61 - 81.36}{2} = 9.12$$

### 8. 変化係数 (Coefficient of Variation ( $v$ )).

$$V = \frac{\sigma}{M_a} \times 100$$

$$\text{例. } \begin{cases} A \text{ 系列} \dots\dots 10 & 20 & 30 \dots\dots M_a = 20 \\ B \text{ 系列} \dots\dots 1 & 2 & 3 \dots\dots M_a = 2 \end{cases}$$

$$A \text{ 系列の偏差 } \sigma_1 = \sqrt{\frac{200}{3}} = 8.16$$

$$B \text{ 系列の偏差 } \sigma_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.816$$

$$\therefore A \text{ 系列に於ては } V_1 = \frac{8.16}{20} \times 100 = 40.8\%$$

( 39 )



B 系列に於ては  $V_2 = \frac{0.816}{2} \times 100 = 40.8\%$

## 第六章 指数の諸問題

- (1) 指数の意義.
- (2) 指数作製法.

- |     |     |     |
|-----|-----|-----|
| (a) | 總和法 | 單純. |
|     |     | 加重. |
| (b) | 平均法 | 單純. |
|     |     | 加重. |

- (a) 總和法.

單純.  $\frac{\sum p_n}{\sum p_0}$

加重. (ウエートとしては生産量, 消費量, 取引量の如き數量を用ふ).

- (1) 基準時點の數量をウエートとせるとき

$$\frac{\sum(p_n q_0)}{\sum(p_0 q_0)} \dots\dots (\text{Laspeyres})$$

- (2) 比較時點の數量をウエートとせるとき

$$\frac{\sum(p_n q_n)}{\sum(p_0 q_n)} \dots\dots (\text{Paasche})$$

- (b) 平均法.

單純.  $\frac{\sum \left( \frac{P_n}{P_0} \right)}{N}$

加重 (ウエートとしては生産額, 取引額, 消費額の如き金額を用ふ).

- (1) 基準時點の金額をウエートとせるとき

$$\frac{\sum \left[ \frac{p_n}{p_0} \times (p_0 q_0) \right]}{\sum(p_0 q_0)} = \frac{\sum(p_n q_0)}{\sum(p_0 q_0)}$$

- (2) 比較時點の金額をウエートとせるとき

$$\frac{\sum \left[ \frac{p_n}{p_0} \times (p_n q_n) \right]}{\sum(p_n q_n)}$$

- (3) 算術平均か幾何平均か又は他の平均か.
- (4) 指数の吟味.

- (1) 時點逆轉試験 (Time-reversal Test) 合格する指数 (單純幾何平均, 單純中位數, 單純並數, 單純總和指數).

- (2) 要素逆轉試験 (Factor-reversal Test).  
價格指數と數量指數との相乗積が價額指數と一致すべきを要求す. 即ち

價格指數を  $\frac{\sum(p_n q_0)}{\sum(p_0 q_0)}$  とすれば

生産数量指數は  $\frac{\sum(q_n p_0)}{\sum(q_0 p_0)}$

生産價額指數は或る時點の生産價額 ( $V_n$ ) と基準時のそれ ( $V_0$ ) との比によりて示さる。

$$\therefore \frac{\sum(p_n q_0)}{\sum(p_0 q_0)} \times \frac{\sum(q_n p_0)}{\sum(q_0 p_0)} = \frac{V_n}{V_0} \text{ なるべし.}$$

然るに  $V_n = \sum(p_n q_n)$  又  $V_0 = \sum(p_0 q_0)$  なるが故に

$$\frac{\sum(p_n q_0)}{\sum(p_0 q_0)} \times \frac{\sum(q_n p_0)}{\sum(q_0 p_0)} = \frac{\sum(p_n q_n)}{\sum(p_0 q_0)} \text{ なるべしと言ふ.}$$

然るに基本算式中にはこの試験に合格するものなし。

(5) Fisher の理想式。

Fisher は時點對偶式を交叉せしめて時點逆轉試験に合格する算式を作り、要素對偶式を交叉せしめて要素逆轉試験に合格する算式を作り、最後にこの二つの算式を二重に交叉せしめて上記二試験に合格する次の理想式を作れり。

$$\sqrt{\frac{\sum(p_n q_0)}{\sum(p_0 q_0)} \times \frac{\sum(p_n q_n)}{\sum(p_0 q_n)}}$$

(6) 我國に於ける重要卸賣物價指數。

a. 東洋經濟新報社“東京卸賣物價指數”。

品目—58。

基年—大正二年一月。

算式—單純算術平均。

b. 商工省“全國卸賣物價指數”

品目—100。

基年—昭和四年十二月。

算式—單純算術平均。

c. ダイヤモンド社“東京卸賣物價指數”。

品目—82。

基年—大正元年八月より大正三年七月に亘る  
二ケ年間の平均價格。

算式—加重幾何平均 (固定ウェート)。

d. 日本銀行“東京卸賣物價指數”。

(1) 昭和十一年十一月分迄のもの。

品目—56。

基年—明治三十三年十月。

算式—單純算術平均。

(2) 昭和十一年十二月分以降のもの。

品目—110。

基年—計算上は昭和八年を基年とすれど發表に  
際しては舊指數に接續せしむるため  
依然明治三十三年十月を用ふ。

算式—加重算術平均。

日銀改正指數の品目とウエート

品目	評量値	品目	評量値
食用農産物	128	布	110
内朝臺大裸内外内滿小	74	羽二重	2
地鮮灣	17	縮	1
地國地洲	8	絹銘富人綾租金天綿白毛羅莫麻	7
小小大	3	絹絹	4
大豆	4	絹絹	2
其他食料及嗜好品	127	絹絹	5
小分精食味醬牛豚鷄鯉魚果大種茶日麥卷	13	絹絹	3
麥蜜	10	絹絹	17
油肉肉卵節詰詰油油	11	絹絹	4
酒酒草	4	絹絹	3
品	2	絹絹	5
品	7	絹絹	12
品	5	絹絹	7
品	3	絹絹	2
品	6	絹絹	30
品	1	絹絹	11
品	6	絹絹	4
品	1	絹絹	8
品	1	絹絹	3
品	1	絹絹	2
品	2	絹絹	2
品	25	絹絹	1
品	8	絹絹	1
品	21	絹絹	83
品	156	絹絹	6
品	47	絹絹	46
品	4	絹絹	9
品	13	絹絹	2
品	16	絹絹	2
品	9	絹絹	2
品	48	絹絹	3
品	7	絹絹	4
品	10	絹絹	3
品	2	絹絹	4
品	2	絹絹	2

品目	評量値	品目	評量値
燃料	45	水	0.5
石重揮散木	24	グ	0.5
炭油油炭炭	4	鹽	0.5
發	6	其	45
肥	3	染塗バ印模更生ゴ絶七硬機皮燐	3
大豆種燐室	8	刷造	1
大菜硫過石魚	20	ゴムタイ化械	3
工業藥材	5	イ電下素	16
硫硝鹽苛曹晒	1	鐵	3
性達	6	鐵	3
曹晒	3	鐵	4
酸酸酸達灰粉	8	鐵	2
酸酸酸達灰粉	1	鐵	1
酸酸酸達灰粉	1	鐵	2
酸酸酸達灰粉	0.5	鐵	5
酸酸酸達灰粉	2	鐵	1
酸酸酸達灰粉	1.5	鐵	1
酸酸酸達灰粉	0.5	鐵	754

○は在來の指數に採用せざりしもの  
×は在來の指數に採用したる品目を分割せるもの

(7) 外國に於ける重要なる物價指數.

北米合衆國.

Bureau of Labor Statistics (加. 綜).

Dun & Bradstreet. (單. 綜).

支那.

財政部國定稅則委員會 (單. 幾).

獨逸.

Statistisches Reichsamt (加, 算).

佛蘭西.

Statistique Générale de la France (單. 算).

英國.

Board of Trade (單. 幾).

Economist (單. 幾).

Statist (單. 算).

濠洲.

Bureau of Census & Statistics (加. 綜).

(8) 小賣物價指數.

商工省“全國小賣物價指數”.

品目 — 100.

基年 — 昭和四年十二月.

算式 — 單純算術平均.

日本銀行“東京小賣物價指數”.

品目 — 100.

基年 — 大正三年七月.

算式 — 單純算術平均.

(9) 生計費指數.

朝日新聞社“全國生計費指數”.

算式 — 各品目に對する價格指數の全國平均に基き單純算術平均によつて類別指數を算出し. これより加重平均によつて費目指數及總指數を算出す.

品目, 類別, ウェート — 下記内閣統計局標準品目より75を選出し, 五費目二十五類に分類す, ウェートも標準ウェートを採用.

基年 — 大正三年七月.

本邦生計費指數品種別 (中分類)

全國標準ウェート (内閣統計局)

飲食物	480.30	住宅修繕	4.43
米麥類	225.66	水道	3.39
魚介類	24.32	光熱	68.88
肉類	16.09	被服	134.79
鶏卵	9.94	衣服類	80.59
牛乾	9.51	身の廻り品	54.20
豆及蔬菜類	25.42	其の他	95.33
乾物類	6.49	保健衛生	43.12
豆腐, 佃煮, 煮物, 漬物類	18.32	育兒	3.62
調味料	46.68	教育	0.92
餛飩	2.39	交通	24.21
嗜好品	95.46	文房具	1.19
住宅	220.70	修養娛樂	20.15
家賃	211.88	家具什器及設備	2.11

第七章 時系列の解析 (1) トレンド

(1) 時系列に於ける運動形態の分類.

1. 長期傾向 (發展傾向, 長期趨勢, Secular Trend).
2. 季節變動 (Seasonal Variation).
3. 循環運動 (景氣變動, Cyclical Movement).
4. 不規則變動 (偶然變動, Irregular Movement).

(2) 長期傾向値の算出.

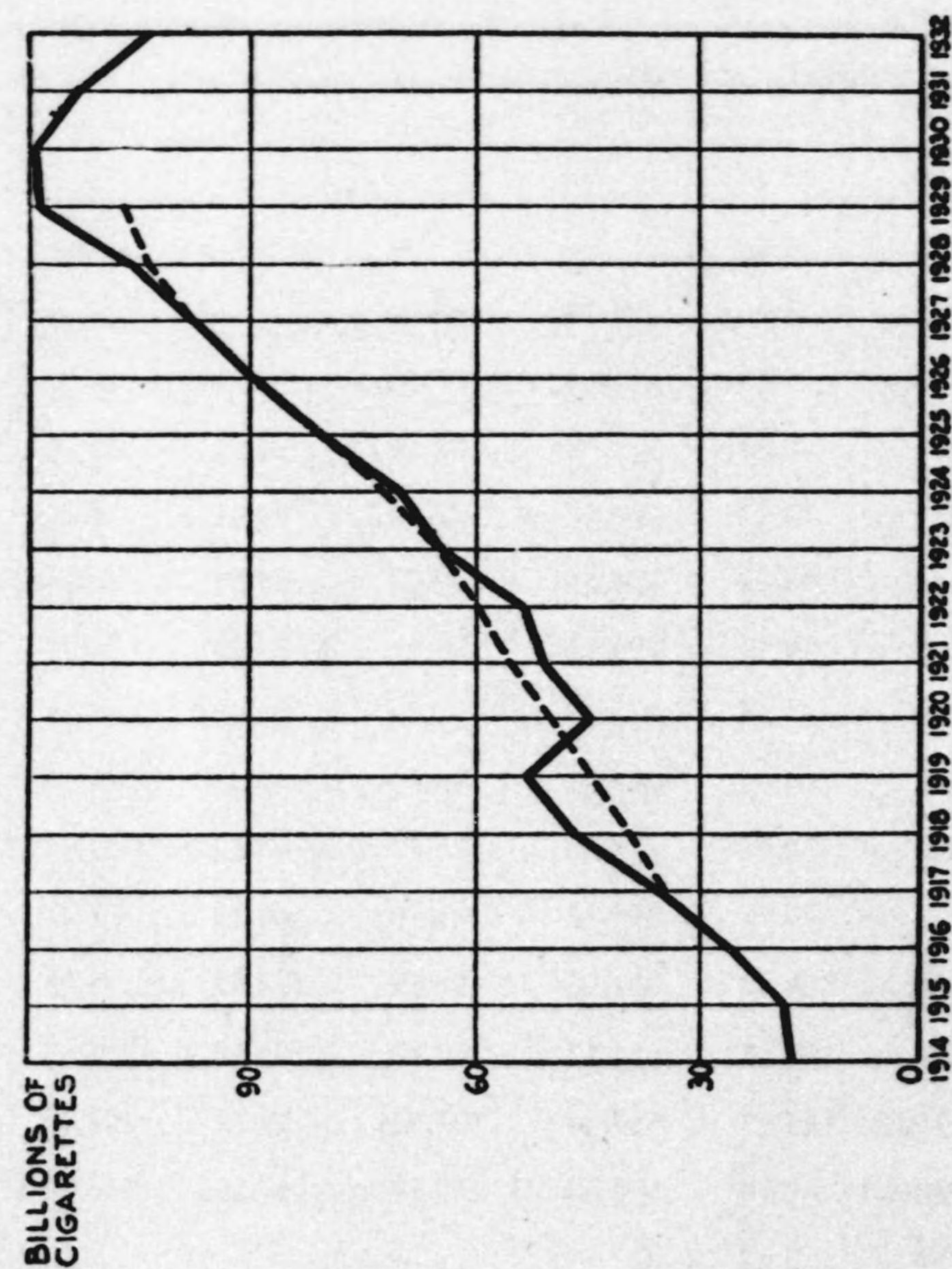
(1) 移動平均法.

Computation of Trend—Moving Average Method  
Consumption of Cigarettes in the United States, 1914—1932

(1) Year	(2) Consumption (Billions of Cigarettes)	(3) Seven Year Moving Total	(4) Seven Year Moving Average (Col. 3 divided by 7)
1914	16.86	—	—
1915	17.96	—	—
1916	25.29	—	—
1917	35.33	239.84	34.21
1918	46.66	278.85	39.12
1919	53.12	309.46	44.21
1920	44.62	348.62	49.80
1921	50.87	383.30	54.76
1922	53.57	416.60	59.51
1923	64.45	452.93	64.70
1924	70.01	505.49	72.21
1925	79.96	560.54	80.08
1926	89.45	626.01	89.43
1927	87.18	681.18	97.21
1928	105.92	724.62	103.52
1929	119.04	748.24	106.89
1930	119.62	—	—
1931	113.45	—	—
1932	103.58	—	—

Computation of Trend—Moving Average Method (Even Year Period)  
Consumption of cigarettes in the United States, 1914—1932

(1) Year	(2) Consumption (Billions of Cigarettes)	(3) Six-Year Moving Total	(4) Six-Year Moving Average	(5) Two-Year Moving Total of Col. 4	(6) Six-Year Moving Average Centered
1914	16.86	—	—	—	—
1915	17.96	—	—	—	—
1916	25.29	195.22	32.54	—	—
1917	35.33	222.98	37.16	69.70	34.85
1918	46.66	255.89	42.65	79.81	39.91
1919	53.12	284.17	47.36	90.01	45.05
1920	44.62	313.29	52.22	99.58	49.79
1921	50.87	336.64	56.11	108.33	54.17
1922	53.57	363.48	60.58	116.69	58.35
1923	64.45	408.31	68.05	128.63	64.32
1924	70.01	454.62	75.77	143.82	71.91
1925	79.96	506.97	84.50	160.22	80.11
1926	89.45	561.56	93.59	178.09	89.05
1927	97.13	611.17	101.86	195.45	97.72
1928	105.92	644.66	107.44	209.30	104.65
1929	119.04	658.79	109.80	217.24	108.62
1930	119.62	—	—	—	—
1931	113.45	—	—	—	—
1932	103.58	—	—	—	—



(2) 數學的直線 (曲線) の當嵌.

(a) 直線方程式

$$y = a + bx$$

二次拋物線方程式

$$y = a + bx + cx^2$$

(b) 最小自乘法

今、自變數  $X_1, X_2, \dots, X_n$  に対する可變數を  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  とすれば、後者に出来る限り近似的な曲線を示す式、即ち

$$y = f(x, a, b, \dots)$$

を求むることを曲線の當嵌と言ふ。この場合、第一に問題となるのは、如何なる函数の形が最も適當なるかを決定することであり、第二には  $x_1, x_2, \dots, x_n$  の値に対する計算値  $y_1, y_2, \dots, y_n$  を  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  に最も近接せしむるやう係數  $a, b, \dots$  を決定することである。第一の問題は要するに曲線の形を直線とすべきか、又は拋物線とすべきか、或ひはより複雑な曲線とすべきかといふ事である。以下、最も簡単な直線形から説明しやう。

略々直線形に數ヶの點が平面上に散在してゐる場合、これら諸點に最も近接せる直線  $y = a + bx$  は、最小自乘法 (the theory of least squares) に従て決定される。即ち與へられた諸點と、求められた直線との偏差  $y_i - (a +$

$bx_1), y_2 - (a + bx_2), \dots, y_n - (a + bx_n)$  の自乗の總和を最も小  
ならしめればよいのである。即ち總和を  $S$  とすれば

$$S = [y_1 - (a + bx_1)]^2 + [y_2 - (a + bx_2)]^2 + \dots + [y_n - (a + bx_n)]^2$$

を最小ならしめるやう未知の係數  $a, b$  を決定する爲に

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \text{ ならしめればよい, 然るに}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial a} = \sum [Y_i - (a + bx_i)] = \sum Y_i - na - b \sum x_i$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial b} = \sum [Y_i - (a + bx_i)] x_i = \sum x_i Y_i - a \sum x_i - b \sum x_i^2$$

であるから

$$na + b \sum x_i = \sum Y_i$$

$$a \sum x_i + b \sum x_i^2 = \sum x_i Y_i$$

の聯立方程式を解く事によつて  $a$  及び  $b$  の値が求めら  
れる。(註)

(註)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{時系列に於ては } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ は時 (年, 月等) を} \\ \text{示す. 今, 全期間の中央を原點とすれば} \\ \sum x_i = 0 \text{ となるから, 上式は} \\ na = \sum Y_i, \quad b \sum x_i^2 = \sum x_i Y_i \\ \text{となり, 計算が甚だ簡単となる.} \end{array} \right.$

若し原數値を一旦對數に換算し, それに對して直線を

當嵌めれば所謂「複利線」が得られる。その解方は原則的  
には上記の直線の場合と同様で、即ち

$$na + b \sum x_i^2 = \sum (x_i \log Y_i)$$

$$a \sum x_i + b \sum x_i^2 = \sum (x_i \log Y_i)$$

なる聯立方程式から  $a$  及び  $b$  が求められる。

二次拋物線  $y = a + bx + cx^2$  も亦最小自乗法によつて各  
係數  $a, b, c$  が決定される。その方程式は

$$na + b \sum x_i + c \sum x_i^2 = \sum Y_i$$

$$a \sum x_i + b \sum x_i^2 + c \sum x_i^3 = \sum x_i Y_i$$

$$a \sum x_i^2 + b \sum x_i^3 + c \sum x_i^4 = \sum x_i^2 Y_i$$

であり、原點を期間の中央に取れば直線の場合に於ける  
と同じく、可成り簡単なものになる。蓋し  $\sum x_i = 0$ ,  
 $\sum x_i^3 = 0$  なるを以てである。

(3) 直線的傾向線の實例。

年次	アルミニウム生産額單位 (百萬封度)			
	X	Y	XY	X <sup>2</sup>
1916	0	110.2	0	0
1917	1	143.3	143.3	1
1918	2	143.3	286.6	4
1919	3	134.5	403.5	9
1920	4	138.0	552.0	16
1921	5	55.0	275.0	25
1922	6	74.0	444.0	36
1923	7	129.0	903.0	49
1924	8	150.0	1200.0	64

年次	X	Y	XY	X <sup>2</sup>
1925	9	140.0	1260.0	81
1926	10	145.0	1450.0	100
1927	11	260.0	1760.0	121
1928	12	210.0	2520.0	144
1929	13	221.0	2925.0	169
1930	14	229.0	3206.0	196
	$\Sigma(X)$ =105	$\Sigma(Y)$ =2186.3	$\Sigma(XY)$ =17328.4	$\Sigma(X^2)$ =1015

注意. Xは1916年を起點とせる年次. Yは米國のアルミニウム年生産額(單位. 百萬封度)

$$\begin{cases} \Sigma(Y) = Na + b\Sigma(X) \\ \Sigma(XY) = a\Sigma(X) + b\Sigma(X^2) \end{cases}$$

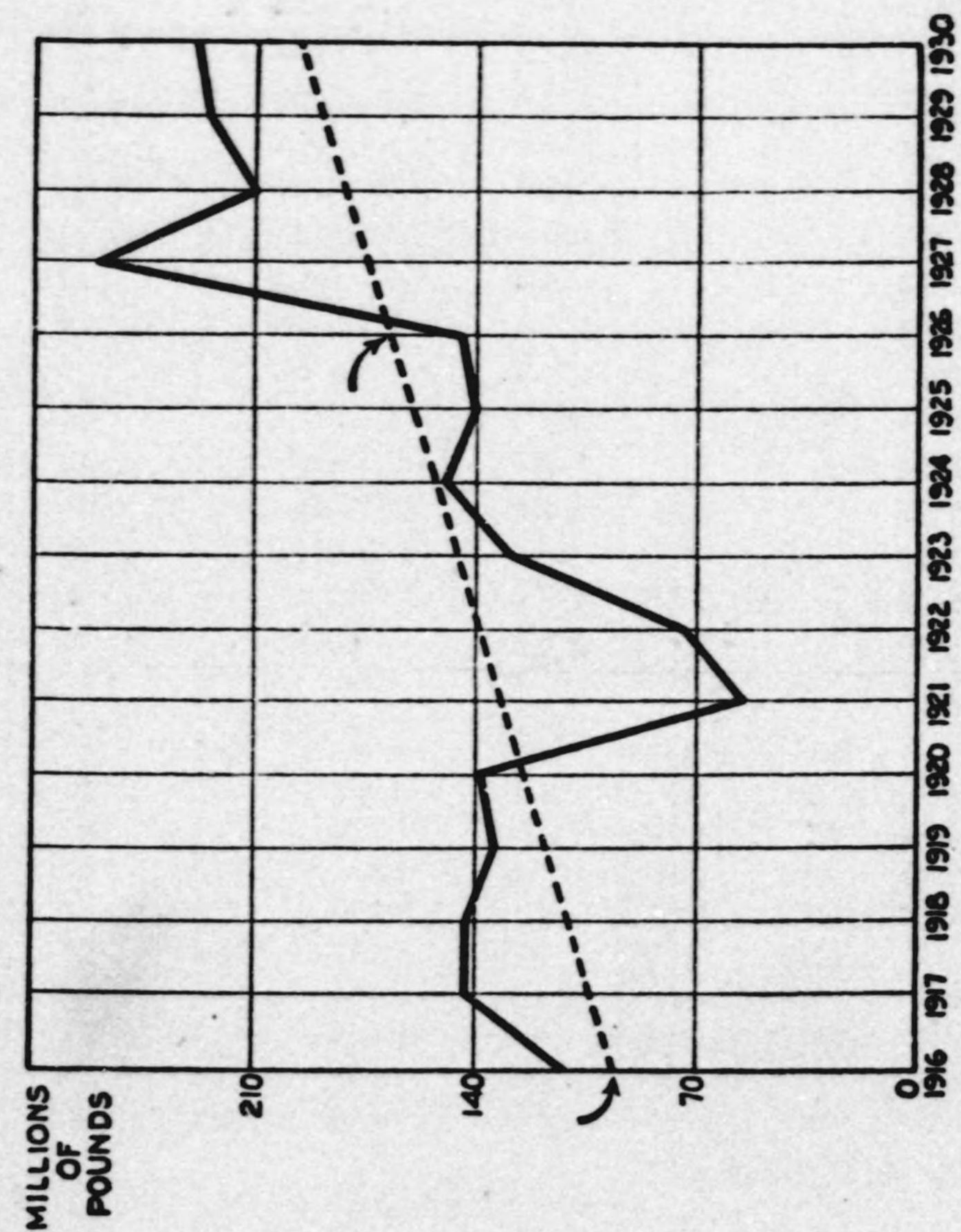
に代入すれば

$$\begin{cases} 2186.3 = 15a + 105b \\ 17328.4 = 105a + 1015b \end{cases}$$

$$\text{これより } \begin{cases} a = 95.14 \\ b = 7.23 \end{cases}$$

∴ 求むる直線は

$$Y = 95.14 + 7.23X \dots\dots\dots(1)$$





期間の中央を原点とせば

	X	Y	XY	X <sup>2</sup>
1916	-7	110.2	-771.4	49
1917	-6	143.3	-859.8	36
1918	-5	143.3	-716.5	25
1919	-4	134.5	-538.0	16
1920	-3	138.0	-414.0	9
1921	-2	55.0	-110.0	4
1922	-1	74.0	-74.0	1
1923	0	129.0	0	0
1924	1	150.0	150.0	1
1925	2	140.0	280.0	4
1926	3	145.0	435.0	9
1927	4	260.0	640.0	16
1928	5	210.0	1050.0	25
1929	6	225.0	1350.0	36
1930	7	229.0	1603.0	49
	$\Sigma(X)$ =0	$\Sigma(Y)$ =2186.3	$\Sigma(XY)$ =2024.3	$\Sigma(X^2)$ =280

$$\begin{cases} \Sigma(Y) = Na \\ \Sigma(XY) = b\Sigma(X^2) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 2189.3 = 15a \\ 2024.3 = 280b \end{cases}$$

これより

$$a = 145.75$$

$$b = 7.23$$

∴ 求むる直線は

( 56 )

$$Y = 145.75 + 7.23 X \dots\dots\dots (2)$$

右の (1) 及び (2) の二つの直線は全く同一なる事に注意せよ。

(4) 曲線的傾向線の當嵌

a, Potential Series

最も簡單なる拋物線の方程式

年次	ガソリン輸出額 (単位百萬 パレル)						
	X	X	XY	X <sup>2</sup>	X <sup>2</sup> Y	X <sup>3</sup>	X <sup>4</sup>
1915	0	2.7	0	0	0	0	0
1916	1	8.5	8.5	1	8.5	1	1
1917	2	9.9	19.8	4	39.6	8	16
1918	3	13.3	39.9	9	119.7	27	81
1919	4	8.9	35.6	16	142.4	64	256
1920	5	15.3	76.5	25	382.5	125	625
1921	6	12.7	76.2	36	457.2	216	1296
1922	7	13.8	96.6	49	676.2	343	2401
1923	8	20.1	160.8	64	1286.4	512	4096
1924	9	23.3	254.7	81	2292.3	729	6561
1925	10	30.6	306.0	100	3060.0	1000	10000
1926	11	42.5	467.5	121	5142.5	1331	14641
1927	12	44.3	531.6	144	6379.2	1728	20736
1928	13	52.9	687.2	169	8940.1	2197	28561
1929	14	62.1	869.4	196	12171.6	2744	38416
1930	15	65.6	984.0	225	14760.0	3375	50625
	120	431.5	4614.8	1240	55858.2	14400	178312

如上の計算の結果を聯立方程式

$$\begin{cases} \Sigma(Y) = Na + b\Sigma(X) + c\Sigma(X^2) \\ \Sigma(XY) = a\Sigma(X) + b\Sigma(X^2) + c\Sigma(X^3) \\ \Sigma(X^2Y) = a\Sigma(X^2) + b\Sigma(X^3) + c\Sigma(X^4) \end{cases}$$

( 57 )

に代入すれば

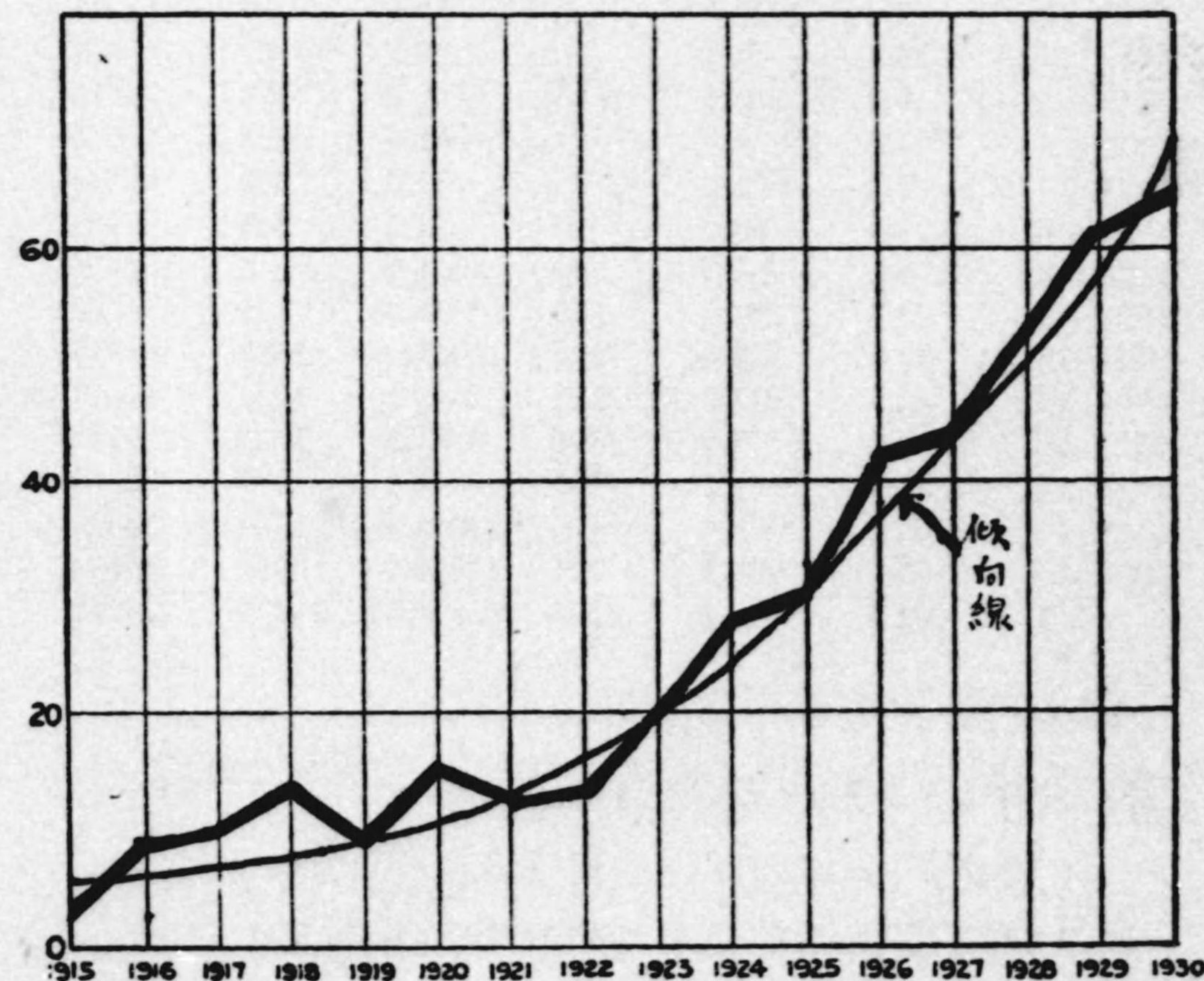
$$\begin{cases} 431.5 = 16a + 120b + 1240c \\ 4614.8 = 120a + 1240b + 14400c \\ 55858.2 = 1240a + 14400b + 178312c \end{cases}$$

これより

$$\begin{cases} a = 7.2131 \\ b = -9.5114 \\ c = 0.3044 \end{cases}$$

∴ 求むる方程式は

$$Y = 7.2131 - 0.5114X + 0.3044X^2$$



## b. Exponential Series

### I. $Y = ab^x$

両邊の對數をとる

$$\log Y = \log a + x \log b$$

斯かる曲線の當嵌に必要な方程式は

$$\begin{cases} \sum(\log y) = n \log a + \log b \sum(x) \\ \sum(x \log y) = \log a \sum(x) + \log b \sum(x^2) \end{cases}$$

### II. Gompertz Curve

$$y = ab^{c^x}$$

### III. Peal-Recd Curve

$$y = d + \frac{b}{e^{-ax} + c}$$

## 第八章 時系列の解析 (2) 季節變動

1. 發展傾向の存せざる系列には月別平均法を用ふ。

(New York 温度表)

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	年平均
	月	月	月	月	月	月	月	月	月	月	月	月	
1917	32	28	39	47	53	68	74	75	63	52	41	25	50
1918	22	30	41	50	64	66	73	75	63	59	46	39	52
1919	35	35	42	49	61	70	74	70	66	58	44	30	52
1920	24	22	41	48	58	68	72	73	67	60	44	38	52
1921	34	35	48	55	60	70	76	71	71	56	45	34	55
1923	31	27	37	49	59	72	72	71	67	56	45	42	52
Ma	30	31	31	50	60	69	73	72	66	57	44	35	52
Me	31	30	41	49	60	70	73	71	67	58	45	34	52
指数	58	62	78	95	114	132	139	137	126	109	84	66	100

上例に於ける季節指数は各月の算術平均を年平均(52)にて除したるものなり。例へば一月の指数 58 は  $\frac{30}{52} \times 100$  として求めたるが如し。中位数を用ふれば季節指数は次の如し。

	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	平均
	月	月	月	月	月	月	月	月	月	月	月	月	
	62	58	78	94	114	135	139	136	128	111	86	65	100

2. 發展傾向の存する系列に就ては連環比率法 (Link-Relative Method, Pearsonian Method) 又は對十二ヶ月移動平均比率法 (Ratio to 12 Months Moving Average Method) 等を用ふ。

(a) 連環比率法

連環比率 (米國に於ける無煙炭生産額)

年次	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二
1914	88.26	128.16	51.94	120.92	110.02	109.23	110.03	103.36	96.59	88.59	113.39	113.39
1915	99.29	78.00	108.46	94.25	103.24	109.76	104.74	107.28	107.34	107.91	101.22	102.39
1916	101.70	97.00	96.99	76.78	115.37	97.27	109.98	112.04	98.59	109.44	100.27	98.15
1917	108.78	86.20	115.77	87.42	112.52	99.43	98.87	192.33	95.23	107.16	98.66	92.35
1918	85.89	103.67	109.89	95.70	109.57	101.39	107.49	100.25	92.87	102.19	83.94	91.53
1919	105.00	76.08	106.82	95.39	116.75	98.69	115.23	100.41	110.35	118.65	33.23	195.90
1920	133.59	82.53	116.54	81.00	102.79	115.71	99.76	108.65	100.54	106.05	98.66	101.29
1921	77.27	76.60	98.51	90.66	120.99	101.70	89.64	113.66	101.64	124.59	82.37	85.98
1922	123.00	108.99	122.41	31.46	128.58	109.95	76.19	152.05	158.67	110.06	100.36	102.64
1923	108.01	84.04	111.00	91.94	107.26	98.72	99.21	108.29	94.58	106.42	87.27	92.82
1924	127.33	90.08	87.29	73.70	106.08	97.46	106.01	107.71	117.98	114.23	87.97	109.90
1925	111.61	75.08	96.52	89.55	105.28	104.76	106.59	113.39	104.32	113.64	95.45	104.00
1926	101.31	86.72	99.05	86.88	97.46	107.51	103.51	106.64	105.66	111.47	109.38	96.38
1927	99.09	93.01	113.68	57.65	102.37	102.88	92.11	123.96	100.53	104.96	92.33	101.66
1928	107.46	93.53	106.31	73.22	113.76	98.20	100.89	113.31	100.46	121.94	91.42	94.22
1929	120.19	91.87	83.24	93.75	108.91	94.77	106.74	108.01	101.42	115.10	89.16	101.12

連環比率及び連鎖比率 (Chain-Relative) の作製に就て。  
 連鎖比率に於ける最初の一月と最後の一月 (本例に於ける 100 と 118.9) との差は發展傾向に基くが故にこの差を修正すべし。

修正は複利の原理に據りて行ふを合理的とす。いま一ヶ月間の誤差の増加率を  $d$  とせば次の如く各月の連鎖比率を修正すべし。

$$100, \frac{C_2}{1+d}, \frac{C_3}{(1+d)^2}, \dots, \frac{C_{12}}{(1+d)^{11}}$$

これが爲には對數を用ふ。蓋し或る月の修正値は

$$\frac{C_n}{(1+d)^{n-1}} \text{ なるが故に、對數的に解けば}$$

$$\log C_n - (n-1) \log (1+d).$$

斯かる計算を行ふ爲には下表の如き方法が便利なり。

	連環比率 数の中 位数	連鎖 比率 (C)	log C	(n-1)× log(1+d)	log C - (n-1)× log(1+d)	修正され たる連鎖 比率	季節 指数
一月	107.5	100.0	2.00000	0.00000	2.00000	100.0	111
二月	87.5	87.5	1.94201	0.00626	1.93575	86.2	96
三月	102.6	89.8	1.95328	0.01253	1.94075	87.2	97
四月	87.2	78.3	1.89376	0.01880	1.87456	74.9	83
五月	109.2	85.5	1.93195	0.02506	1.90689	80.6	90
六月	101.6	86.9	1.93902	0.03133	1.90829	80.9	90
七月	102.3	88.9	1.94890	0.03760	1.91130	81.5	91
八月	108.5	106.4	2.02694	0.04387	1.98307	96.1	107
九月	101.5	108.0	2.03342	0.05013	1.98329	96.2	107
十月	109.0	117.7	2.07078	0.05639	2.01439	103.3	115
十一月	91.9	108.2	2.03423	0.06266	1.97157	93.6	104
十二月	101.2	109.5	2.03941	0.06892	1.97049	93.4	104
一月	107.5	118.9	2.07518	0.07518	2.00000	—	—

Ma=90

(b) 對十二ヶ月移動平均法。

(Graybar lamp sales per calendar day, adjusted for price change)

Year and month	Deflated sales per calendar day (\$000)	12-Month moving total	12-Month moving average (col. 3 ÷ 12)	2-Month moving total of 12-month moving average	12-Month moving average centered (col. 5 ÷ 2)	Per cent of 12-month moving average (col. 2 ÷ col. 6)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1921:						
January	25.76	...	...	...	...	...
February	24.74	...	...	...	...	...
March	17.21	...	...	...	...	...
April	14.16	...	...	...	...	...
May	11.70	...	...	...	...	...
June	13.00	201.87*	16.82	...	...	...
July	10.88	195.73	16.31	33.13	16.57	65.7
August	12.95	188.77	15.73	32.04	16.02	80.8
September	15.27	188.50	15.71	31.44	15.72	97.2
October	16.84	195.36	16.28	31.99	16.00	105.3
November	19.36	202.30	16.86	33.14	16.57	116.8
December	20.00	206.77	17.23	34.09	17.04	117.3
1922:						
January	19.63	210.08	17.51	34.74	17.37	113.0
February	17.77	213.95	17.83	35.34	17.67	100.6
March	16.94	220.35	18.36	36.19	18.10	93.6
April	21.02	228.20	19.02	37.38	18.69	112.8
May	18.65	238.35	19.86	38.88	19.44	95.9
June	17.47	248.76*	20.73	40.59	20.30	86.1
July	14.18	258.55	21.55	42.28	21.14	67.1
August	16.82	270.34	22.53	44.07	22.04	76.3
September	21.68	283.25	23.60	46.13	23.07	94.0
October	24.69	289.89	24.16	47.76	23.88	103.4
November	29.50	295.81	24.65	48.81	24.40	120.9
December	30.42	301.37	25.11	49.76	24.88	122.2
1923:						
January	29.42	308.98	25.75	50.86	25.43	115.7
February	29.55	313.00	26.08	51.83	25.92	114.0
March	29.86	316.36	26.36	52.45	26.22	113.9
April	27.65	319.26	26.60	52.97	26.48	104.4
May	24.57	319.26	26.61	53.21	26.60	92.4
June	23.02	320.17*	26.68	53.29	26.64	86.4
July	21.80	318.97	26.58	53.26	26.63	81.9
August	20.83	323.84	26.99	53.57	26.78	77.8
September	25.04	328.66	27.39	54.38	27.19	92.1
October	27.60	335.10	27.92	55.31	27.66	99.8
November	29.50	337.21	28.10	56.03	28.01	105.3
December	31.33	336.15	28.01	56.11	28.06	111.6

(CONTINUED)

Year and month	Deflated sales per calendar day (\$000)	12-Month moving total	12-Month moving average (col. 3 ÷ 12)	2-Month moving total of 12-month moving average	12-Month moving average centered (col. 5 ÷ 2)	Per cent of 12-month moving average (col. 2 ÷ col. 6)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
<b>1924:</b>						
January	28.22	334.45	27.87	55.88	27.94	101.0
February	34.43	334.44	27.87	55.74	27.87	123.5
March	34.67	333.01	27.75	55.62	27.81	124.7
April	34.09	335.19	27.93	55.68	27.84	122.5
May	26.68	336.10	28.01	55.94	27.97	95.4
June	21.96	341.14*	28.43	56.44	28.22	77.8
July	20.10	347.46	28.95	57.38	28.69	70.1
August	20.83	351.96	29.33	58.28	29.14	71.5
September	23.61	350.24	29.19	58.52	29.26	80.7
October	29.78	348.96	29.08	58.27	29.13	102.2
November	30.41	349.24	29.10	58.18	29.09	104.5
December	36.36	352.07	29.34	58.44	29.22	124.4
<b>1925:</b>						
January	34.54	357.37	29.78	59.12	29.56	116.8
February	38.93	360.97	30.08	59.86	29.93	130.1
March	32.95	367.36	30.61	60.69	30.35	108.6
April	32.82	372.76	31.06	61.68	30.84	106.4
May	26.96	377.85	31.49	62.55	31.28	86.2
June	24.79	383.33*	31.94	63.43	31.72	78.2
July	25.39	385.47	32.12	64.07	32.03	79.3
August	24.43	385.68	32.14	64.26	32.13	76.0
September	30.00	396.35	33.03	65.17	32.58	92.1
October	35.18	398.19	33.18	66.21	33.11	106.3
November	35.50	403.54	33.63	66.81	33.40	106.3
December	41.83	410.15	34.18	67.81	33.90	123.4
<b>1926:</b>						
January	36.68	412.86	34.40	68.58	34.29	107.0
February	39.14	417.06	34.76	69.16	34.58	113.2
March	43.63	427.75	35.65	70.40	35.20	123.9
April	34.65	436.65	36.39	72.03	36.02	96.2
May	32.31	447.36	37.28	73.67	36.83	87.7
June	31.40	453.08*	37.76	75.04	37.52	83.7
July	28.11	458.36	38.20	75.95	37.98	74.0
August	28.63	468.64	39.05	77.25	38.62	74.1
September	40.69	469.48	39.12	78.18	39.09	104.1
October	44.08	479.02	39.92	79.04	39.52	111.5
November	46.20	483.97	40.33	80.25	40.12	115.2
December	47.56	486.20	40.52	80.85	40.42	117.7

( 64 )

(CONTINUED)

Year and month	Deflated sales per calendar day (\$000)	12-Month moving total	12-Month moving average (col. 3 ÷ 12)	2-Month moving total of 12-month moving average	12-Month moving average centered (col. 5 ÷ 2)	Per cent of 12-month moving average (col. 2 ÷ col. 6)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
<b>1927:</b>						
January	41.95	490.30	40.86	81.38	40.69	103.1
February	49.42	495.52	41.29	82.15	41.08	120.3
March	44.48	492.83	41.07	82.36	41.18	108.0
April	44.19	490.71	40.89	81.96	40.98	107.8
May	37.27	492.12	41.01	81.90	40.95	91.0
June	33.63	496.62*	41.38	82.40	41.20	81.6
July	32.20	503.04	41.92	83.30	41.65	77.3
August	33.85	503.89	41.99	83.91	41.96	80.7
September	38.00	502.21	41.85	83.84	41.92	90.6
October	41.96	500.05	41.67	83.52	41.76	100.5
November	47.61	500.20	41.68	83.35	41.68	114.2
December	52.05	502.11	41.84	83.53	41.76	124.6
<b>1928:</b>						
January	48.38	507.22	42.27	84.11	42.06	115.0
February	50.26	510.21	42.52	84.79	42.39	118.6
March	42.78	509.77	42.48	85.00	42.50	100.7
April	42.03	513.85	42.82	85.30	42.65	98.5
May	37.42	514.51	42.88	85.70	42.85	87.3
June	35.54	510.45*	42.54	85.41	42.70	83.2
July	37.31	514.01	42.83	85.37	42.69	87.4
August	36.85	517.10	43.09	85.93	42.96	85.8
September	37.56	524.10	43.68	86.77	43.38	86.6
October	46.04	531.00	44.25	87.92	43.96	104.7
November	48.27	539.98	45.00	89.25	44.62	108.2
December	48.00	546.95	45.58	90.58	45.29	106.0
<b>1929:</b>						
January	51.94	545.02	45.42	91.00	45.50	114.2
February	53.36	548.54	45.71	91.13	45.56	117.1
March	49.77	559.32	46.61	92.32	46.16	107.8
April	48.94	568.36	47.36	93.97	46.99	104.2
May	46.39	573.96	47.83	95.19	47.60	97.5
June	42.51	581.43*	48.45	96.28	48.14	88.3
July	35.38	594.18	49.52	97.97	48.98	72.2
August	40.37	602.60	50.22	99.73	49.87	80.9
September	48.34	609.23	50.77	100.99	50.49	95.7
October	55.08	613.75	51.15	101.92	50.96	108.1
November	53.88	616.72	51.39	102.54	51.27	105.1
December	55.46	621.28	51.77	103.17	51.58	107.5

( 65 )

ARRAYS OF PERCENTAGES OF CENTERED 12-MONTH MOVING AVERAGES AND COMPUTATION OF SEASONAL INDEX, 1922-1930  
(Graybar lamp sales per calendar day, adjusted for price changes)

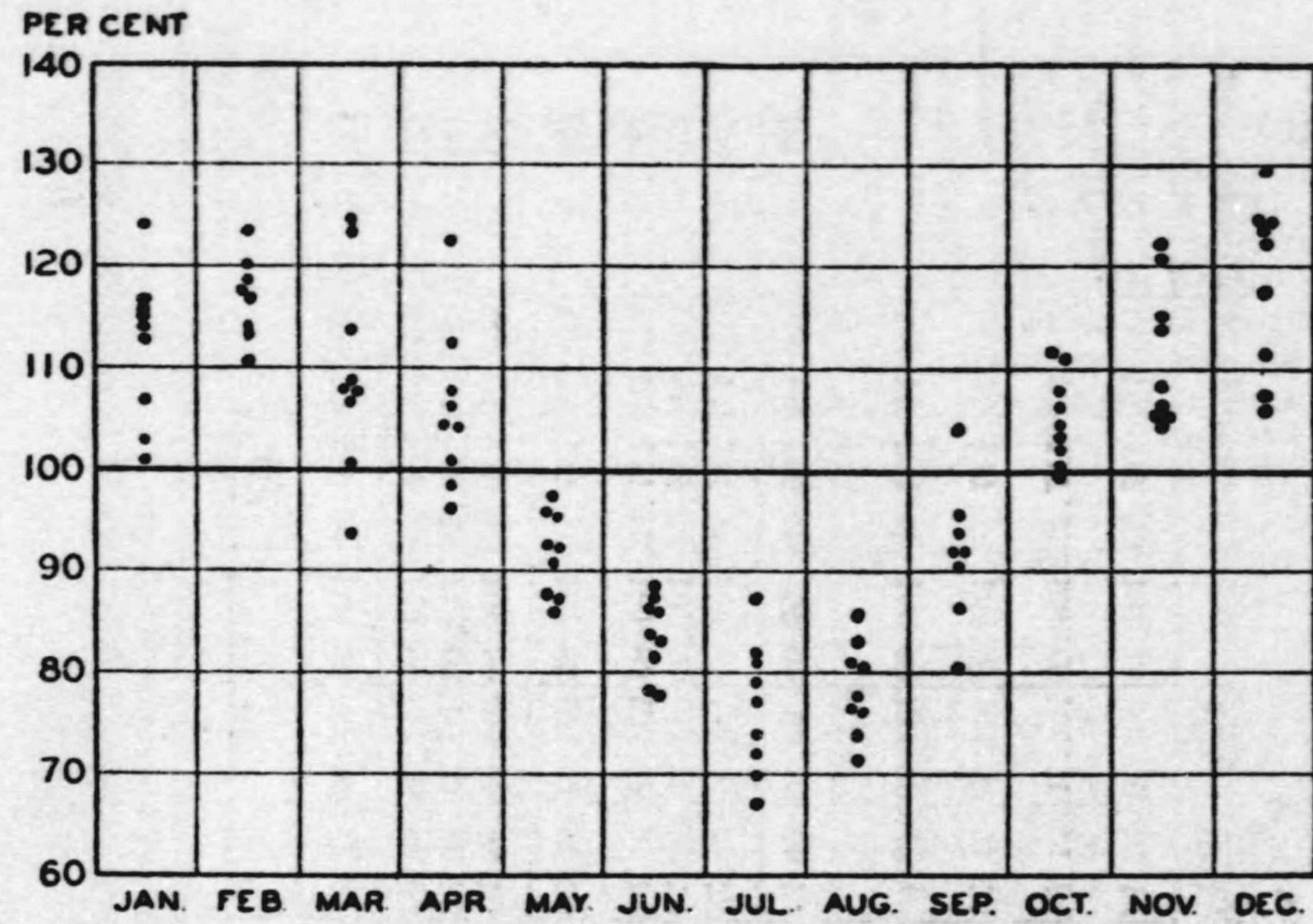
Rank (or row number)	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December	Total
(1)	124.16	130.06	124.66	122.46	97.47	88.31	87.41	85.76	104.10	111.53	122.37	129.62	
(2)	116.84	123.53	123.95	112.46	95.92	87.51	81.87	83.06	99.95	111.35	120.89	124.64	
(3)	115.66	120.31	113.85	107.83	95.38	86.39	81.06	80.95	95.74	108.09	115.15	124.41	
(4)	115.04	118.57	108.59	106.41	92.76	86.06	79.27	80.69	93.97	106.26	114.25	123.38	
(5)	114.16	117.54	107.98	104.41	92.36	83.70	77.31	77.79	92.10	104.72	108.18	122.25	← median
(6)	113.00	117.10	107.83	104.16	91.00	83.24	74.01	76.34	92.05	103.39	106.28	117.65	
(7)	106.96	114.04	106.83	101.00	87.73	81.64	72.23	76.04	90.65	102.21	105.31	111.65	
(8)	103.11	113.18	100.79	98.54	87.33	78.17	70.05	74.13	86.58	100.48	105.09	107.52	
(9)	100.99	100.56	93.63	96.20	86.21	77.83	67.11	71.47	80.69	99.79	104.55	105.99	
(10) Total of middle seven	784.77	824.28	769.82	734.80	642.47	586.71	535.80	549.00	651.04	736.50	775.15	831.50	
(11) Average of middle seven	112.11	117.75	109.97	104.97	91.78	83.82	76.54	78.43	93.01	105.21	110.74	118.79	1203.12
(12) Seasonal index*	111.82	117.45	109.69	104.70	91.54	83.60	76.34	78.23	92.76	104.94	110.45	118.48	1200.00
(13) Corrected median	113.92	117.30	107.76	104.20	92.17	83.53	77.15	77.63	91.91	104.50	107.95	121.99	1200.01

\* Row 11 multiplied by correction factor: .99741 = 1200.00 / 1203.12

(CONTINUED)

Year and month	Deflated sales per calendar day (\$000)	12-Month moving total	12-Month moving average (col. 3 ÷ 12)	2-Month moving total of 12-month moving average	12-Month moving average centered (col. 5 ÷ 2)	Per cent of 12-month moving average (col. 2 ÷ col. 6)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1930:						
January	64.70	629.21	52.44	104.21	52.10	124.2
February	61.78	632.18	52.68	105.12	52.56	117.5
March	56.40	634.86	52.90	105.59	52.79	106.8
April	53.46	635.52	52.96	106.45	53.22	92.8
May	49.37	641.86	53.49	107.58	53.79	87.5
June	47.07	649.12*	54.09	106.86	53.43	81.1
July	43.31	633.20	52.77	104.34	52.17	83.1
August	43.34	618.92	51.58	102.08	51.03	100.0
September	51.01	605.99	50.50	100.11	50.06	111.3
October	55.74	595.37	49.61	98.42	49.21	122.4
November	60.22	585.70	48.81	96.79	48.40	129.6
December	62.73	575.84	47.99			
1931:						
January	48.77	567.60	47.30	95.29	47.64	102.4
February	47.50	557.37	46.45	93.75	46.87	101.3
March	43.46	544.47	45.37	91.82	45.91	94.7
April	42.84	531.70	44.31	89.68	44.84	95.5
May	39.70	517.94	43.16	87.47	43.74	90.8
June	37.21	500.08*	41.67	84.84	42.42	87.7
July	35.07	...	...	...	...	...
August	33.11	...	...	...	...	...
September	38.11	...	...	...	...	...
October	42.97	...	...	...	...	...
November	46.46	...	...	...	...	...
December	44.86	...	...	...	...	...

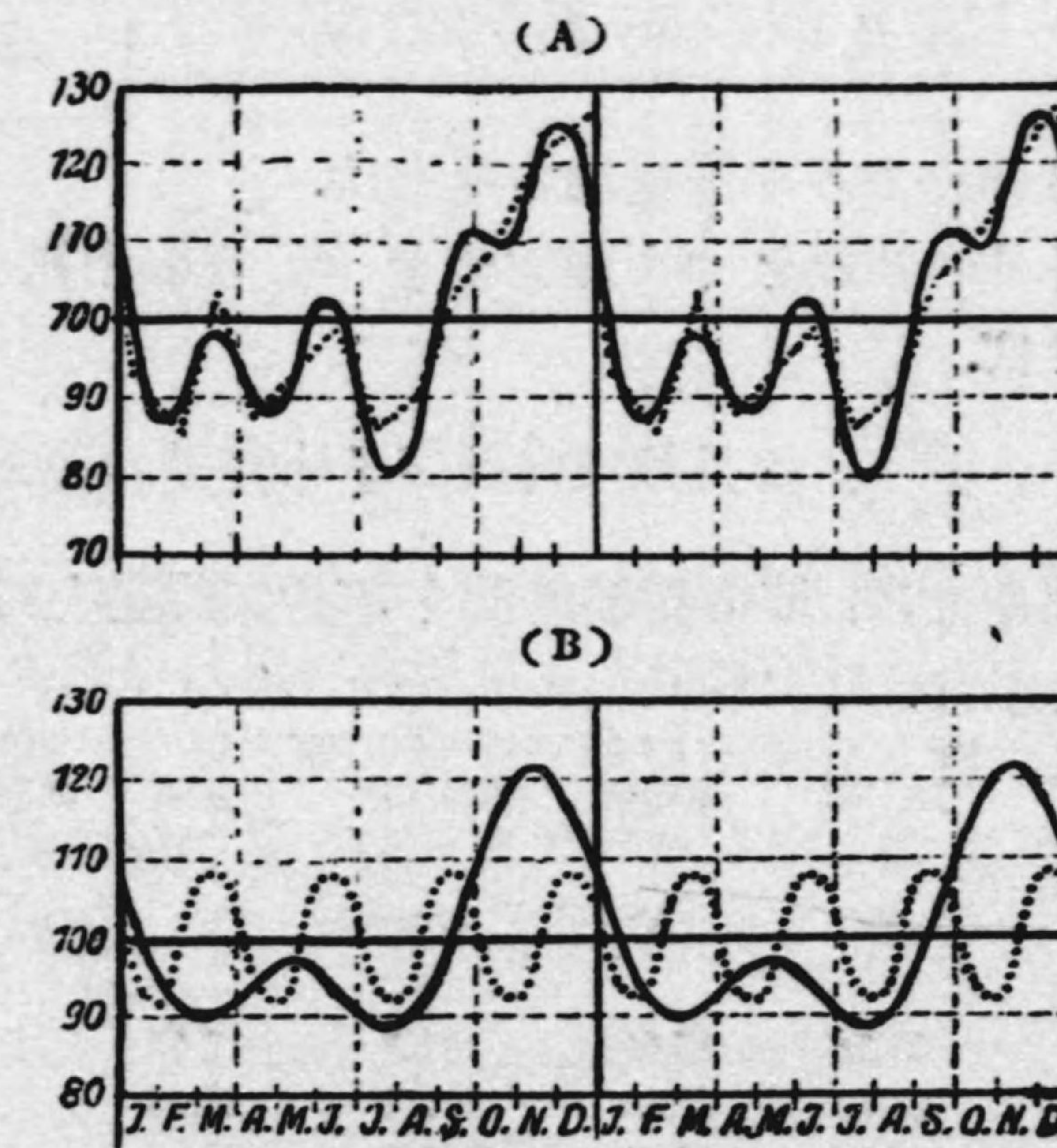
\* Calendar year totals.



THREE METHODS OF EXPRESSING A SEASONAL INDEX  
(Graybar lamp sales per calendar day, adjusted for price changes)

Month	Per cent of average	Per cent deviation from 100	Per cent of yearly total
January.....	111.8	11.8	9.3
February.....	117.4	17.4	9.8
March.....	109.7	9.7	9.1
April.....	104.7	4.7	8.7
May.....	91.5	- 8.5	7.6
June.....	83.6	-16.4	7.0
July.....	76.3	-23.7	6.4
August.....	78.2	-21.8	6.5
September.....	92.8	- 7.2	7.7
October.....	104.9	4.9	8.7
November.....	110.4	10.4	9.2
December.....	118.5	18.5	9.9
Total.....	1,200.0	0.0	100.0

(c) 季節變動に於ける自然的原因と人爲的原因とを分離する方法に就て. (Paul Lorenz によるフーリエ曲線の援用).



(A) 圖に於ける曲線の方程式.

$$y = 100 + 12.14 \sin(117.5^\circ + x) + 9.27 \sin(151^\circ + 2x) + 6.68 \sin(101.5^\circ + 4x).$$

(B) 圖に於ける點線の方程式.

$$y = 100 + 8.68 \sin(101.5^\circ + 4x).$$

(B) 圖に於ける實線の方程式.

$$y = 100 + 12.14 \sin(117.5^\circ + x) + 9.27(151^\circ + 2x).$$

### 第九章 時系列の解析 (3)

(a) 長期傾向及び季節變動の除去法.

各月の原数を  $y$ , 傾向値を  $O$ , 季節指數を  $S$  とせば.

$\frac{y}{O \times S}$  は長期傾向及び季節變動の除去せられ

たるもの, 即ち循環運動と不規則變動との混合物を示す.

年月	原数	傾向値	季節指數	正常値 (3)×(4)	循環+不規則 (%) (2)÷(5) (6)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1921					
Jan.	25.76	17.60	111.8	19.68	130.9
Feb.	24.73	17.88	117.4	20.99	117.8
March.	17.20	18.15	109.7	19.91	86.4
April.	14.17	18.42	104.7	19.29	73.4
May.	11.70	18.70	91.5	17.11	68.4
June.	13.00	18.97	83.6	15.86	82.0
July.	10.88	19.24	76.3	14.68	74.1
Aug.	12.95	19.51	78.2	15.26	84.8
Sep.	15.28	19.79	92.8	18.37	83.2
Oct.	16.83	20.06	105.0	21.06	80.0
Nov.	19.36	20.33	110.5	22.46	86.2
Dec.	20.00	20.61	118.5	24.42	81.9

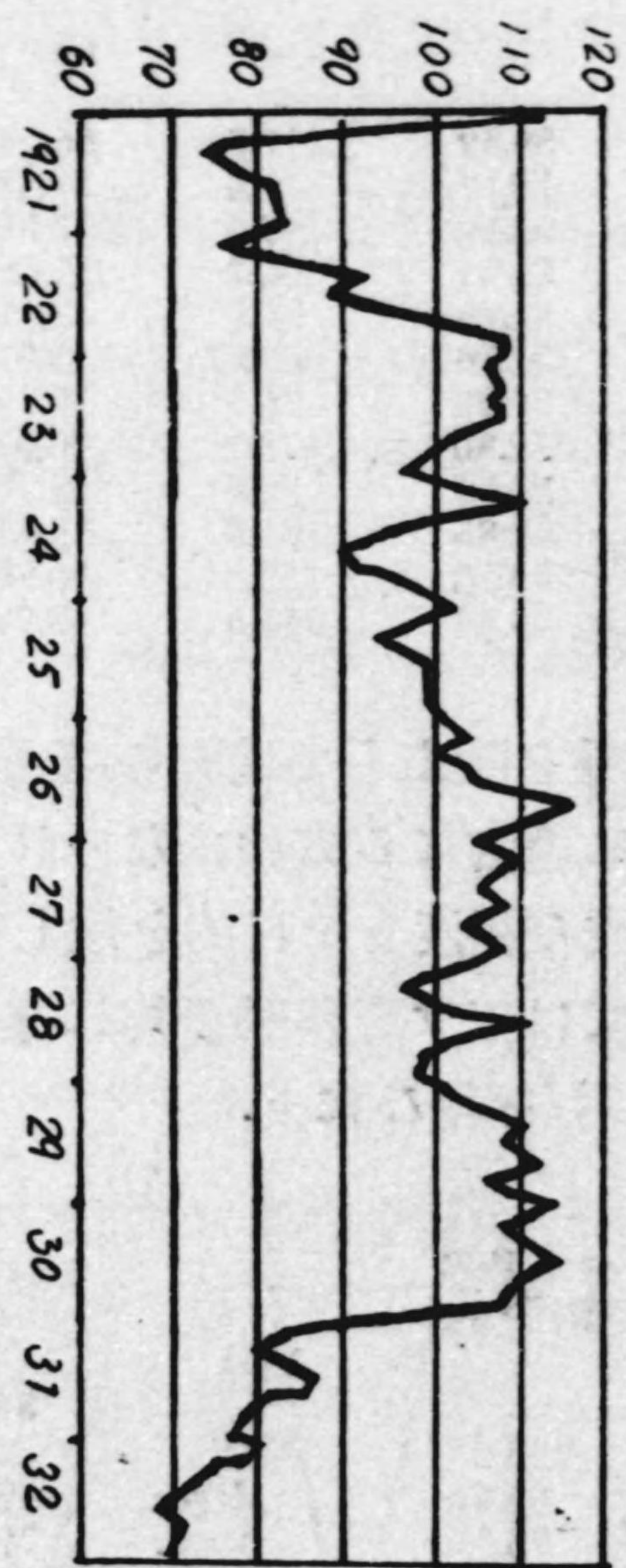
年月	原数	傾向値	季節指數	正常値 (3)×(4)	循環+不規則 (%) (2)÷(5) (6)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1931					
Jan.	48.78	50.39	111.8	56.34	76.6
Feb.	47.50	50.67	117.4	59.49	79.8
March.	43.46	50.94	109.7	55.88	77.8
April.	42.84	51.21	104.7	53.62	79.9
May.	39.70	51.49	91.5	47.11	84.2
June.	37.22	51.76	83.6	43.27	86.0
July.	85.08	52.03	76.3	39.70	88.3
Aug.	33.10	52.30	78.2	40.90	80.9
Sep.	38.12	52.58	79.8	48.79	78.2
Oct.	42.96	52.85	105.0	55.49	77.5
Nov.	46.46	53.12	110.5	58.70	79.2
Dec.	44.86	53.40	118.5	63.28	70.9

(b) 更に不規則變動を除去して純粹の循環運動を抽出する爲には眞に適當なる方法はなけれども. 移動平均法によつて或る程度まで目的を達し得べし.

下掲の例に於ては三ヶ月移動平均に據り. 且つ二項式加重 (1, 2, 1) を用ひたり.

(1)	(2)	三ヶ月移動平均	(1)	(2)	三ヶ月移動平均 (3)
1921			1931		
Jan.	130.9	—	Jan.	86.6	89.7
Feb.	117.8	113.2	Feb.	79.8	81.0
March.	86.4	91.0	March.	77.8	78.8
April.	73.5	75.5	April.	79.9	80.5
May.	86.4	73.1	May.	84.3	83.6
June.	82.0	76.6	June.	86.0	86.2
July.	74.1	78.8	July.	88.4	85.9
Aug.	84.9	81.8	Aug.	80.9	82.1
Sep.	83.2	82.8	Sep.	78.1	78.6
Oct.	79.9	82.3	Oct.	77.4	78.0
Nov.	86.2	83.6	Nov.	79.1	76.4
Dec.	81.9	83.5	Dec.	70.9	76.3





循環運動

循環運動の周期及び振幅を決定する方法.

Periodogram (Schaster's method)

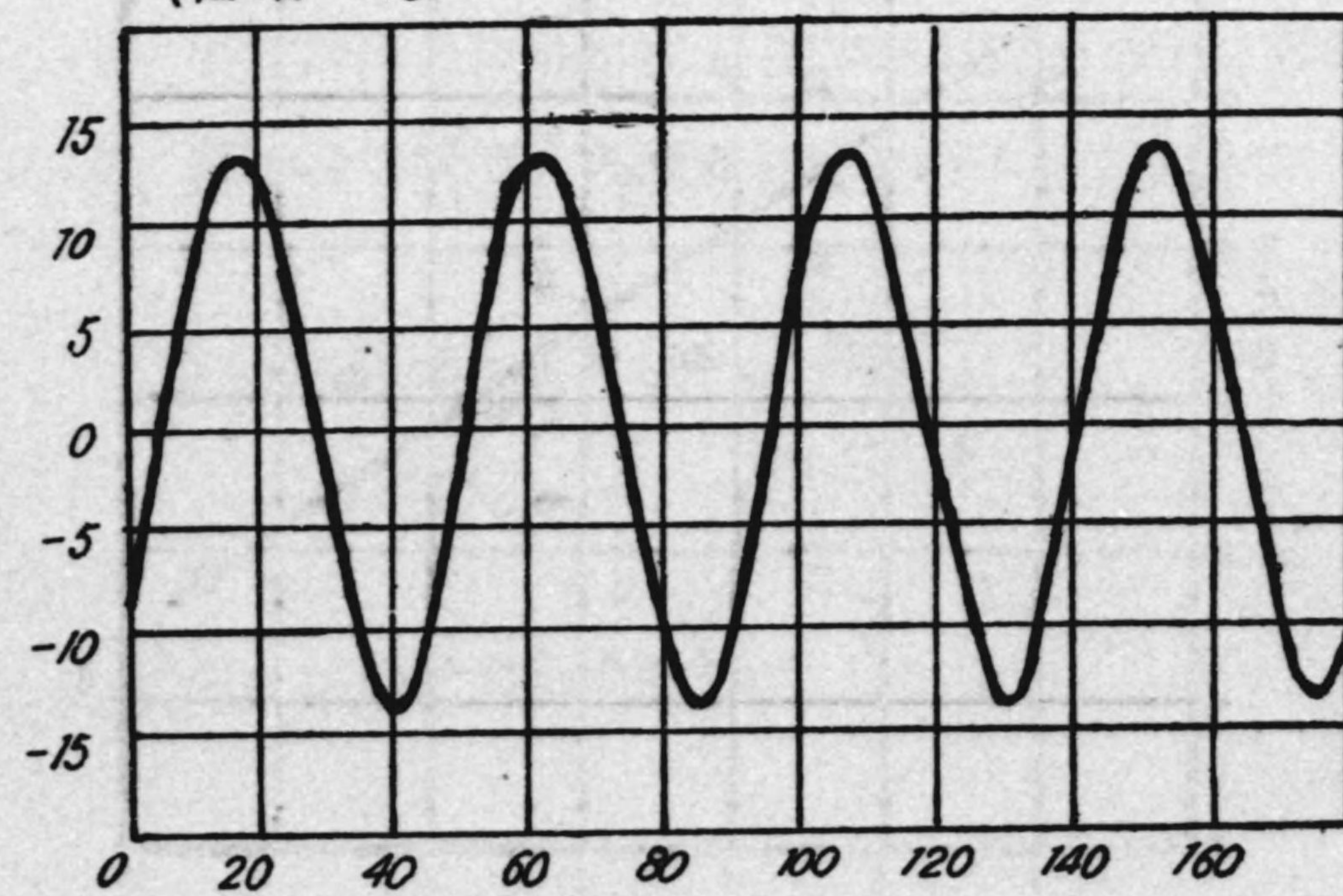
$$y = A \sin(2\pi t/T) + B \cos(2\pi t/T)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = T \dots \dots \text{周期} \\ y = \pm R \dots \text{振幅} \end{array} \right.$$

$$\text{但し } R = \sqrt{A^2 + B^2}$$

例.  $y = 10 \sin \frac{2\pi t}{45} + 10 \cos \frac{2\pi t}{45}$

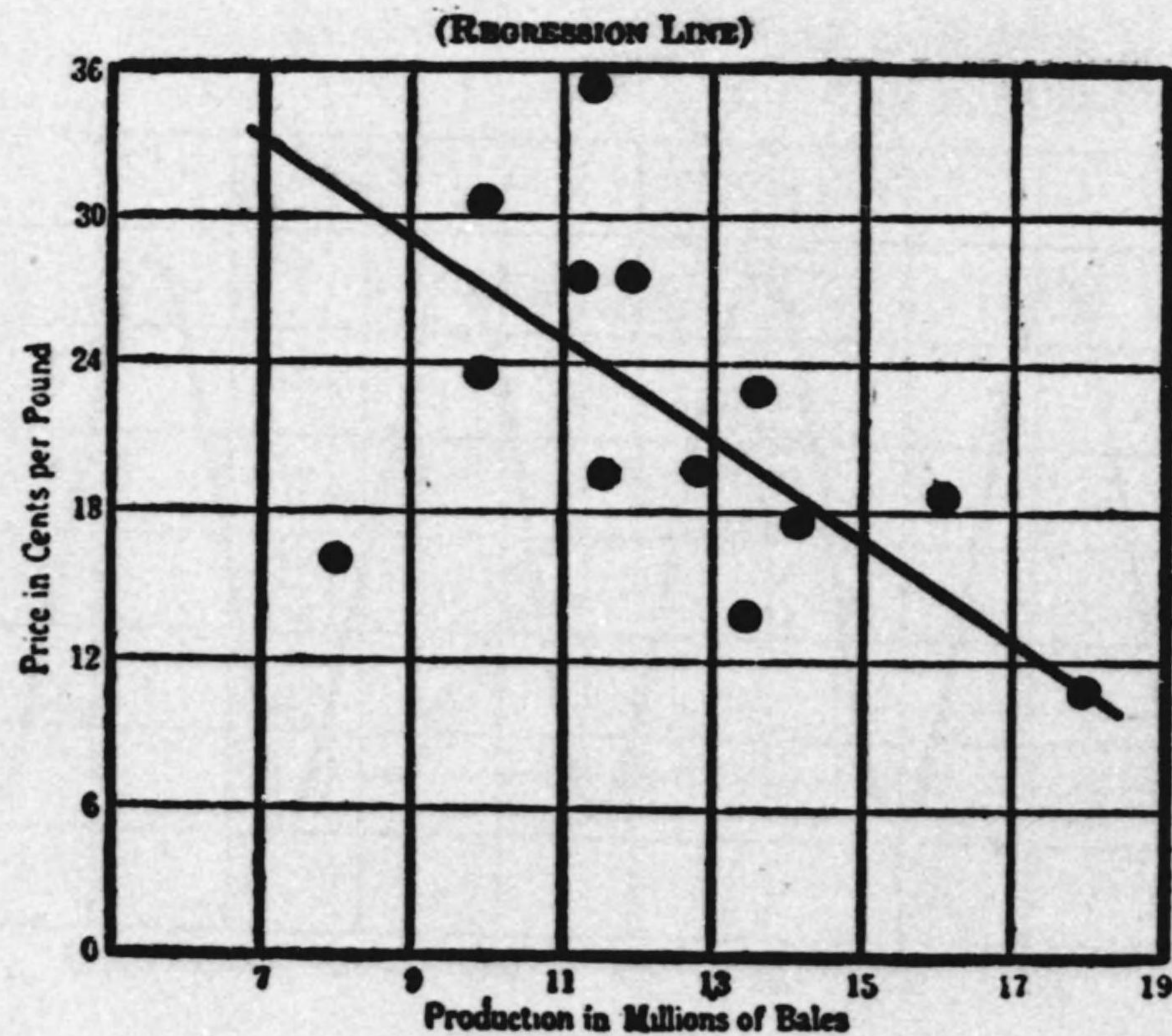
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{振幅} = 14.14 \\ \text{周期} = 45 \end{array} \right.$$



## 第十章 相關々係

### 1. 相關圖 (Scatter Diagram)

年次	生産 (單位千俵)	價格 (一封度, 仙)
1916	11,450	19.6
1917	11,302	27.7
1918	12,041	26.6
1919	11,421	35.6
1920	13,440	13.9
1921	7,954	16.2
1922	9,755	23.8
1923	10,140	31.0
1924	13,628	22.6
1925	16,104	18.2
1926	17,977	10.9
1927	12,955	19.6
1928	14,373	18.0



### 2. 回歸線 (Line of Regression).

相關圖上の各點を代表する直線 (又は曲線) を回歸線と云ひ, 二系列間の一般的關係を示す。

回歸線を求めるには, 傾向線と同じく, 最小自乗法に依る。即ち次の聯立方程式を解けばよし。

$$\begin{cases} \sum(Y) = Na + b\sum(X) \\ \sum(XY) = a\sum(X) + b\sum(X^2) \end{cases} \dots\dots\dots(1)$$

### 3. 標準誤差 (Standard Error of Estimate).

回歸線は相關圖上の各點の平均と認めらるゝが故に, 平均の場合に散布度を測定する必要あると同様に, 回歸線に於ても類似の計算を行ふ必要あり。

$$\text{Standard Error } (S_e) = \sqrt{\frac{\sum(d^2)}{N}}$$

### 4. 回歸線及び標準誤差の計算.



(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
新聞紙	発行部数 (単位千)	広告料金 (一行當 り・仙)			回帰線			
	(X)	(Y)	(XY)	(X <sup>2</sup> )	(Y <sup>2</sup> )	(Y <sub>e</sub> )	(d)	(d <sup>2</sup> )
1	166	33	5,478	27,556	1,089	34	-1	1
2	192	42	8,064	36,864	1,764	38	+4	16
3	301	57	17,157	90,601	3,249	55	+2	4
4	149	30	4,470	22,201	900	31	-1	1
5	111	25	2,875	13,225	625	25	+0	0
6	108	23	2,484	11,664	529	25	-2	4
7	446	75	33,450	198,916	5,625	78	-3	9
8	381	65	24,765	145,161	4,225	68	-3	9
9	399	70	27,930	159,201	4,900	71	-1	1
10	158	32	5,056	204,964	1,024	33	-1	1
11	451	79	35,629	203,401	6,241	79	+0	0
12	113	27	3,591	17,689	729	29	-2	4
13	108	22	2,376	11,664	484	25	-3	9
14	154	30	4,620	23,716	900	32	-2	4
15	331	47	10,857	53,361	2,209	44	+3	9
16	150	32	4,800	22,500	1,024	51	+1	1
17	403	70	28,210	162,409	4,900	71	-1	1
18	149	32	4,768	22,201	1,024	31	+1	1
19	343	65	22,295	117,649	4,225	62	+3	9
20	247	50	12,350	61,000	2,500	47	+3	9
21	117	25	2,925	13,689	625	26	-1	1
22	231	47	10,857	53,361	2,209	44	+3	9
23	217	43	9,331	47,089	1,849	42	+1	1
24	196	42	8,230	38,416	1,764	39	+3	9
25	166	33	5,478	27,556	1,089	34	-1	1
26	124	25	3,100	15,376	625	27	-2	4
27	182	35	6,370	33,124	1,225	36	-1	1
28	166	33	5,478	27,556	1,089	34	-1	1
29	112	28	3,136	12,544	784	26	+2	4
30	177	35	6,195	31,329	1,295	36	-1	1
	6,468	1,252	322,227	1,725,088	60,650			125

上記の聯立方程式 (1) に代入すれば.

$$\begin{cases} 1252 = 30a + 6468b \\ 322227 = 6468a + 1725088b \end{cases}$$

これを解きて

$$\begin{cases} a = 7.6254 \\ b = 0.1582 \end{cases}$$

∴ 求むる回帰線 (直線) は

$$Y_e = 7.6254 + 0.182X$$

又 Standard Error of Estimate は

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum(d^2)}{N}} = \sqrt{\frac{125}{30}} = \sqrt{4.17} = 2.04 \text{ (仙)}$$

5. 相関係数 (Coefficient of Correlation = r).

Standard Error の大小は系列間の關聯程度を示す。されどそれは變量 Y の單位によつて示さるゝが故に、直接に相互に比較し得ず。その爲には Standard Error を標準偏差にて割る必要あり。

$$\frac{S_y}{\sigma_y}$$

完全なる關係あらば回帰線よりの偏差は零。即ち

$S_y = 0$  となるが故に  $\frac{S_y}{\sigma_y} = 0$  となる。關係が薄弱な

るときには  $S_y$  は  $\sigma_y$  の範囲までの間の大きさを持つ。即ち無関係のときには  $\frac{S_y}{\sigma_y} = 1$  となる。故に  $1 - \frac{S_y}{\sigma_y} = 0$  ならば無関係、 $1 - \frac{S_y}{\sigma_y} = 1$  ならば完全なる関係の存する事明かなり。不完全なる関係は何れも 0 より 1 までの間の値を有すべし。散布度の相對尺度を測定する如上の係数を相関係数と云ひ、一般に次の式によつて示さる。

$$r = \sqrt{1 - \frac{S_y^2}{\sigma_y^2}}$$

上例に於ては

$$r = \sqrt{1 - \frac{(2.04)^2}{(16.74)^2}} = 99.25\%$$

相関々係が順なるか逆なるかによりて正負の記號を附すべし。

$$r = \sqrt{1 - \frac{S_y^2}{\sigma_y^2}} \text{ を展開せば}$$

$$r = \frac{\sum xy}{n\sigma_x\sigma_y} = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \sum y^2}}$$

その證明。

$$\text{上式に於て } r = \sqrt{1 - \frac{S_y^2}{\sigma_y^2}}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum(d^2)}{N}} \dots\dots\dots(1)$$

$$S_y^2 = \frac{\sum(d^2)}{N} \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{直線回歸線 } Y_c = a + bX \text{ に於て } \dots\dots\dots(3)$$

$$d = Y - Y_c \dots\dots\dots(4)$$

$$\therefore d = Y - (a + bX) \dots\dots\dots(5)$$

$$d = Y - a - bY \dots\dots\dots(6)$$

兩邊に  $d$  を乗じ

$$d^2 = dY - ad - bdX \dots\dots\dots(7)$$

$$\sum(d^2) = \sum(dY) - a\sum(d) - b\sum(dX) \dots\dots\dots(8)$$

$$\sum(d) = 0$$

$$\sum(dX) = 0$$

$$\therefore \sum(d^2) = \sum(dY) \dots\dots\dots(9)$$

$d = Y - a - bX$  に  $Y$  を乗じ

$$\sum(dY) = \sum(Y^2) - a\sum(Y) - b\sum(XY) \dots\dots\dots(10)$$

されど  $\sum(d^2) = \sum(dY)$  なるが故に

$$\sum(d^2) = \sum(Y^2) - a\sum(Y) - b\sum(XY) \dots\dots\dots(11)$$

$N$  にて割り

$$\frac{\sum(d^2)}{N} = \frac{\sum(Y^2) - a\sum(Y) - b\sum(XY)}{N} \dots\dots\dots(12)$$

然るに  $S_y^2 = \frac{\sum d^2}{N}$  なるが故に

$$S_y^2 = \frac{\sum(Y^2) - a\sum(Y) - b\sum(XY)}{N} \dots\dots\dots(13)$$

又

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum(Y^2)}{N} - c_y^2} \dots\dots\dots(14)$$

∴

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum(Y^2)}{N} - c_y^2 \dots\dots\dots(15)$$

なるが故に之を

$$r^2 = 1 - \frac{S_y^2}{\sigma_y^2}$$

に代入すれば

$$r^2 = 1 - \frac{\frac{\sum(Y^2) - a\sum(Y) - b\sum(XY)}{N}}{\frac{\sum(Y^2)}{N} - c_y^2} \dots\dots\dots(16)$$

$$= 1 - \frac{\sum(Y^2) - a\sum(Y) - b\sum(XY)}{\sum(Y^2) - Nc_y^2} \dots\dots\dots(17)$$

$$= \frac{a\sum(Y) + b\sum(XY) - Nc_y^2}{\sum(Y^2) - Nc_y^2} \dots\dots\dots(18)$$

回帰線方程式

$$\begin{cases} \text{(I)} & \sum(Y) = Na + b\sum(X) \dots\dots\dots(19) \\ \text{(III)} & \sum(YX) = a\sum(X) + b\sum(X^2) \dots\dots\dots(20) \end{cases}$$

に於て平均 ( $\bar{X}$  及び  $\bar{Y}$ ) を原点とすれば

$$x = X - \bar{X}$$

$y = Y - \bar{Y}$  となり、従つて上式は

$$\begin{cases} \text{(I)} & \sum(y) = Na + b\sum(x) \dots\dots\dots(21) \\ \text{(II)} & \sum(xy) = a\sum(x) + b\sum(x^2) \dots\dots\dots(22) \end{cases}$$

然るに

$$\Sigma(x)=0$$

$$\Sigma(y)=0 \text{ なるが故に}$$

$$(I) \quad Na=0 \dots\dots\dots(23)$$

$$\therefore a=0 \dots\dots\dots(23)$$

$$(II) \quad \Sigma(xy)=b\Sigma(x^2)$$

$$\therefore b=\frac{\Sigma(xy)}{\Sigma(x^2)} \dots\dots\dots(24)$$

(17) より

$$r^2 = \frac{a\Sigma(y) + b\Sigma(xy) - Nc_y^2}{\Sigma(y^2) - Nc_y^2} \dots\dots\dots(25)$$

但し

$$\Sigma(y)=0$$

$$a\Sigma(y)=0$$

$$c_y=0$$

故に

$$r^2 = \frac{b\Sigma(xy)}{\Sigma(y^2)} \dots\dots\dots(26)$$

(22) より

$$b = \frac{\Sigma(xy)}{\Sigma(x^2)}$$

$$\therefore r^2 = \frac{\Sigma(xy)}{\Sigma(x^2)} \cdot \frac{\Sigma(xy)}{\Sigma(y^2)} \dots\dots\dots(27)$$

$$r^2 = \frac{[\Sigma(xy)]^2}{\Sigma(x^2) \cdot \Sigma(y^2)} \dots\dots\dots(28)$$

$$r = \frac{\Sigma(xy)}{\sqrt{\Sigma(x^2)\Sigma(y^2)}} \dots\dots\dots(29)$$

又 (28) の分子及び分母を  $N$  にて割れば

$$r^2 = \frac{\left(\frac{\Sigma(xy)}{N}\right)^2}{\frac{\Sigma(x^2)}{N} \cdot \frac{\Sigma(y^2)}{N}} = \frac{\left(\frac{\Sigma(xy)}{N}\right)^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} = \frac{[\Sigma(xy)]^2}{N^2 \sigma_x^2 \sigma_y^2}$$

$$\therefore r = \frac{\Sigma(xy)}{N\sigma_x\sigma_y} \dots\dots\dots(30)$$

實例

年次	物價	賃銀	x		xy (+)	xy (-)	x <sup>2</sup>	y <sup>2</sup>
1901	158	101	+13	+1	+13	-	169	1
1902	146	96	+1	-4	-	-4	1	16
1903	141	96	-4	-4	+16	-	16	16
1904	134	95	-11	-5	+55	-	121	25
1905	130	95	-15	-5	+75	-	225	25
1906	137	100	-8	0	0	-	64	0
1907	150	103	+5	+3	+15	-	25	9
1908	158	104	+13	+4	+52	-	169	16
1909	153	104	+8	+4	+32	-	64	16
1910	145	105	0	+5	0	-	0	25
平均又は 合計	145	100	-	-	+258	-4	854	149
					+254			

(a)  $r = \frac{\sum xy}{N\sigma_x\sigma_y}$  に代入すれば

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{854}{10}} = 9.3$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{149}{10}} = 3.8$$

$$\therefore r = \frac{254}{10 \times 9.3 \times 3.8} = +0.72$$

(b)  $r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \sum y^2}}$  に代入すれば

$$r = \frac{254}{\sqrt{854 \times 149}} = \frac{254}{357} = +0.71$$

## 6. 多元相関と部分相関.

以上述べたる二変数の間の相互関係をば単純相関 (Simple Correlation) といひ、これに對して三ヶ又はそれ以上の變数間の相互関係を多元相関 (Multiple Correlation) といふ。多元相関は一ヶの從屬變數と二ヶ又はそれ以上の獨立變數との間に成り立つ。

これに對し、多元相関に於て特に或る一ヶの獨立變數を取り、それと從屬變數との間の關係を見る必要ある事あり。この場合の關係を部分相関 (Partial Correlation) といふ。

### (7) 部分相関係數及び多元相関係數算出の單純なる例.

小 麥	平 均	標準偏差 (σ)
(1) 生産量	742.71 (百萬アツシエル)	124.68 ± 9.7760
(2) 耕地面積	52.49 (百萬エーカー)	7.36 ± 0.5770
(3) エーカー當り 收穫量	14.13 (アツシエル)	1.40 ± 0.1098

	生産量	耕地面積	エーカー當り 收穫量
(1) 生産量	$r_{11} = 1.000$	$r_{12} = 0.782$	$r_{13} = 0.587$
(2) 耕地面積	$r_{21} = 0.782$	$r_{22} = 1.000$	$r_{23} = 0.016$
(3) エーカー當り 收穫量	$r_{31} = 0.587$	$r_{32} = 0.016$	$r_{33} = 1.000$

#### (A) 部分相関係數を求むる方程式.

$$r_{ij.k} = \frac{r_{ij} - r_{ik}r_{jk}}{\sqrt{1 - r_{ik}^2}(1 - r_{jk}^2)}$$

上例に代入すれば

$$(a) \quad r_{12,3} = \frac{0.782 - (0.587)(0.016)}{\sqrt{[1 - (0.587)^2][1 - (0.016)^2]}} = \frac{0.773}{0.809} = +0.956$$

$$(b) \quad r_{13,2} = \frac{0.587 - (0.782)(0.016)}{\sqrt{[1 - (0.782)^2][1 - (0.016)^2]}} = \frac{0.574}{0.623} = +0.921$$

$$(c) \quad r_{23,1} = \frac{0.016 - (0.782)(0.587)}{\sqrt{[1 - (0.782)^2][1 - (0.587)^2]}} = \frac{-0.443}{0.504} \\ = -0.879$$

- (a) はエーカー當り收穫量を不変とせば耕地面積が事實上生産量を決定する事を意味し。  
 (b) は耕地面積を不変とせばエーカー當り收穫量が事實上生産量を決定する事を意味し。  
 (c) は生産量を不変とせばエーカー當り收穫量と耕地面積とは殆ど反比例の関係に立つ事を意味す。

(B) 多元相関係数を求める方程式。

$$1 - R_{i(jk)}^2 = (1 - r_{ij}^2)(1 - r_{ik,j}^2)$$

上例に於ける適用

$$1 - R_{3(12)}^2 = (-r_{31}^2)(1 - r_{32,1}^2) \\ = (0.6554)(0.2274) = 0.1490$$

$$\therefore R_{3(12)}^2 = 0.8510$$

$$R_{3(12)} = 0.9225$$

これは生産量と耕地面積との間に直線的関係あるものと假定したる場合、この兩者とエーカー當り收穫量との間に成立する関係を示すものなり。

- (8) 相關々係に関する理論的考案。  
 (9) 社會的經濟的研究に於ける相関係数の利用。

## 第十一章 統計學の論理的基礎

- (1) 確率 (Probability).  
 先驗的確率 (a priori probability).  
 經驗的確率 (a posteriori probability).  
 (2) 大數法則 (Law of Large Numbers).

(1) 十ヶの骰子による實驗。

6	4	6	8	6	7	3	8	6	5
4	1	6	1	6	5	7	5	7	5
5	5	6	4	4	4	6	8	4	4
5	2	6	4	3	5	5	6	5	3
4	5	4	5	5	4	6	5	3	5
5	3	5	5	3	4	6	5	5	7
4	4	3	5	4	5	4	6	8	6
5	4	2	5	8	5	5	4	5	5
5	7	6	6	7	4	5	3	3	4
5	3	5	6	2	6	3	5	5	6



その要約

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
—	2	3	12	20	33	19	6	5	—	—

(2) 誤差.

10	Coins	6	(誤差率)	20
20	"	(6+4):2=5	"	—
30	"	(10+6):3=5,3	"	6
40	"	(16+8):4=6	"	20
50	"	(24+6):5=6	"	20
60	"	(30+7):6=6,2	"	24
70	"	(37+3):7=5,7	"	14
80	"	48:8	6	20
90	"	54:9	6	20
100	"	59:10	5,9	18
110	"	63:11	5,7	14
120	"	64:12	5,3	6
130	"	70:13	5,4	8
140	"	71:14	5,1	2
150	"	77:15	5,1	2
160	"	82:16	5,1	2
170	"	89:17	5,2	4
180	"	92:18	5,2	2
190	"	99:19	5,2	4
200	"	104:20	5,2	4
300	"	154:30	5,1	2
400	"	198:40	4,9	2
500	"	244:30	4,9	2
600	"	292:60	4,8	4
700	"	341:70	4,9	2
800	"	389:80	4,9	2
900	"	439:90	4,9	2
1000	"	485:100	4,9	2

最大誤差

10	のとき	略々	95 %
100	"	"	30 "
1 000	"	"	10 "
10 000	"	"	3 "
100 000	"	"	1 "
1 000 000	"	"	0,3 "

$$E=0.6745\sqrt{p_1(1-p_1)/n}$$

実験を重ねたる場合の確率.

(公式 1) 或事象が  $n$  回の実験に於て正確に  $r$  回起る確率は

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots r} p^r q^{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r q^{n-r}$$

$$= {}_n C_r p^r q^{n-r}$$

(公式 2) 或事象が  $n$  回の実験に於て少くも  $r$  回起る確率は

$$p_n + {}_n C_1 p^{n-1} q + {}_n C_2 p^{n-2} q^2 + \dots + {}_n C_r p^r q^{n-r}$$

(注意)  $\begin{cases} p = \text{一回の実験に於て事象の起る確率.} \\ q = \text{" " " " 起らざる確率.} \end{cases}$

一般的二項分布曲線.

$$y = (p+q)^n = p^n + np^{n-1}q = \frac{n(n-1)}{2!} p^{n-2}q^2 + \dots + npq^{n-1} + q^n$$

二項的曲線 (上式に於て  $p=q$  なる場合を言ふ).

- 確率曲線 (Probability Curve).
- 誤差曲線 (Curve of Error).
- ガウス曲線 (Gaussian Curve).
- 正常度數曲線 (Normal Frequency Curve).

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

平均 =  $Np$

$$\sigma = \sqrt{Npq}$$

0.6745 $\sigma$ .....	50%
1.0000 $\sigma$ .....	68.26%
2.0000 $\sigma$ .....	95.46%
3.0000 $\sigma$ .....	99.73%

## 第十二章 誤差の法則と信頼度の測定

### 1. Gauss の誤差の公理.

1. 絶対値相等しき二つの誤差は生起の機會相等し.
2. 小なる誤差は大なる誤差よりも生起し易し.
3. 極めて大なる誤差は決して生起せず.

### 2. Gauss の法則.

$x$  なる誤差を生ずべき確率を  $y$  とすれば,  $y$  と  $x$  との間には次の關係あり (誤差曲線).

$$y = \sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{-kx^2} \dots\dots\dots (\text{ガウス曲線})$$

但し  $\begin{cases} \pi = \text{圓周率 (3.1416\dots\dots)} \\ e = \text{自然對數の底 (2.7183\dots\dots)} \\ k = \text{觀測の精密度.} \end{cases}$

### 3. 正常分布曲線は誤差曲線に外ならず.

觀測數  $N$  が極めて大なるときは,  $x$  なる誤差を生ずる度數  $f$  は

$$f = N \sqrt{\frac{k}{\pi}} \cdot e^{-kx^2}$$

$x$  の標準偏差を  $\sigma$  とせば  $k = \frac{1}{2\sigma^2}$

$$\therefore f = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} \dots\dots\dots (\text{ケトラー曲線})$$

4. 正常分布曲線の包む面積.

$$f = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \left( \text{但し } t = \frac{x}{\sigma} \right)$$

に於て  $\frac{N}{\sigma} = \text{Constant}$  なるが故に,  $t=a$ , と  $t=b$  との間の面積はその間の度数に比例す.

$$\frac{a, b \text{ 間の度数}}{I_a^b} = \frac{N}{1}$$

$$\therefore a, b \text{ 間の度数} = N \times (I_b^b - I_a^a)$$

$$\text{又 } t = \frac{x}{\sigma} \quad \therefore \begin{cases} t=a \dots \dots x=a\sigma \\ t=b \dots \dots x=b\sigma \end{cases}$$

即ち

$$a\sigma, b\sigma \text{ 間の度数} = N \times (I_b^b - I_a^a)$$

例へば

$$-\sigma, \sigma \text{ 間の度数} = 0.34135 \times 2 \times N = 62.27\%$$

5. 確率誤差 (蓋然誤差,  $P.E$ )

正常曲線に於て中央の 50% を包む線の区間の長さの半分の値をいふ. 即ち  $I_0^t = 0.25$  なる  $t$  の値.

$$P.E = 0.6745\sigma \doteq \frac{2}{3}\sigma$$

6. 算術平均の信頼度.

$$\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

又は

$$P.E_M = 0.6745 \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

(注意,  $P.E = 0.6745\sigma$ )

7. 中位数の信頼度.

$$\sigma_{M_t} = 1.2533 \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$P.E = 1.2533 \times 0.6745 \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

7.  $M_a$  及び  $M_b$  の信頼度は上記の如く  $\sigma$  に比例し  $\sqrt{N}$  に反比例す.

9. 標準偏差の信頼度.

$$\sigma_s = \frac{\sigma}{\sqrt{2N}}$$

$$P.E._\sigma = 0.4769 \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad \left( \text{但し } 0.4769 = \frac{0.6745}{\sqrt{2}} \right)$$

10. 相関係数の信頼度 (分布が正常的なるとき).

$$\sigma_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$$

$$P.E._r = 0.6745 \frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$$

## 附 録

(1) 常用對數

(2)  $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$  の値

(3)  $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$  の面積

(4) 平方, 平方根, 逆數

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
100	000000	000434	000868	001301	001734	002166	002598	003029	003461	003891	432
1	4321	4751	5181	5609	6038	6466	6894	7321	7748	8174	428
2	8600	9026	9451	9876	10300	10724	11147	11570	11993	12415	424
3	012837	013259	013680	014100	014521	014940	015360	015779	016197	016616	420
4	7033	7451	7868	8284	8700	9116	9532	9947	020361	020775	416
105	021189	021603	022016	022428	022841	023252	023664	024075	4486	4896	412
6	5306	5715	6125	6533	6942	7350	7757	8164	8571	8978	408
7	9384	9789	030195	030600	031004	031408	031812	032216	032619	033021	404
8	033424	033826	4227	4628	5029	5430	5830	6230	6629	7028	400
9	7426	7825	8223	8620	9017	9414	9811	040207	040602	040998	397
110	041393	041787	042182	042576	042969	043362	043755	044148	044540	044932	393
1	5323	5714	6105	6495	6885	7275	7664	8053	8442	8830	390
2	9218	9606	9993	050380	050766	051153	051538	051924	052309	052694	386
3	053078	053463	053846	4230	4613	4996	5378	5760	6142	6524	383
4	6905	7286	7666	8046	8426	8805	9185	9563	9942	060320	379
115	060698	061075	061452	061829	062206	062582	062958	063333	063709	4083	376
6	4458	4832	5206	5580	5953	6326	6699	7071	7443	7815	373
7	8186	8557	8928	9298	9668	070038	070407	070776	071145	071514	370
8	071882	072250	072617	072985	073352	3718	4085	4451	4816	5182	366
9	5547	5912	6276	6640	7004	7368	7731	8094	8457	8819	363
120	079181	079543	079904	080266	080626	080987	081347	081707	082067	082426	360
1	082785	083144	083503	3861	4219	4576	4934	5291	5647	6004	357
2	6360	6716	7071	7426	7781	8136	8490	8845	9198	9552	355
3	9905	090258	090611	090963	091315	091667	092018	092370	092721	093071	352
4	093422	3772	4471	4820	5169	5518	5866	6215	6562	6910	349
125	6910	7257	7604	7951	8298	8644	8990	9335	9681	100026	346
6	100371	100715	101059	101403	101747	102091	102434	102777	103119	3462	343
7	3804	4146	4487	4828	5169	5510	5851	6191	6531	6871	341
8	7210	7549	7888	8227	8565	8903	9241	9579	9916	110253	338
9	110590	110926	111263	111599	111934	112270	112605	112940	113275	3609	335
130	113943	114277	114611	114944	115278	115611	115944	116276	116608	116940	333
1	7271	7603	7934	8265	8595	8926	9256	9586	9915	120245	330
2	120574	120903	121231	121560	121888	122216	122544	122871	123198	3525	328
3	3852	4178	4504	4830	5156	5481	5806	6131	6456	6781	325
4	7105	7429	7753	8076	8399	8722	9045	9368	9690	130012	323
135	130334	130655	130977	131298	131619	131939	132260	132580	132900	3219	321
6	3539	3858	4177	4496	4814	5133	5451	5769	6086	6403	318
7	6721	7037	7354	7671	7987	8303	8618	8934	9249	9564	316
8	9879	140194	140508	140822	141136	141450	141763	142076	142389	142702	314
9	143015	3327	3639	3951	4263	4574	4885	5196	5507	5818	311
140	146128	146438	146748	147058	147367	147676	147985	148294	148603	148911	309
1	9219	9527	9835	150142	150449	150756	151063	151370	151676	151982	307
2	152288	152594	152900	3205	3510	3815	4120	4424	4728	5032	305
3	5336	5640	5943	6246	6549	6852	7154	7457	7759	8061	303
4	8362	8664	8965	9266	9567	9868	160168	160469	160769	161068	301
145	161368	161667	161967	162266	162564	162863	3161	3460	3758	4055	299
6	4353	4650	4947	5244	5541	5838	6134	6430	6726	7022	297
7	7317	7613	7908	8203	8497	8792	9086	9380	9674	9968	295
8	170262	170555	170848	171141	171434	171726	172019	172311	172603	172895	293
9	3186	3478	3769	4060	4351	4641	4932	5222	5512	5802	291
150	176091	176381	176670	176959	177248	177536	177825	178113	178401	178689	289
1	8977	9264	9552	9839	180126	180413	180699	180986	181272	181558	287
2	181844	182129	182415	182700	2985	3270	3555	3839	4123	4407	285
3	4691	4975	5259	5542	5825	6108	6391	6674	6956	7239	283
4	7521	7803	8084	8366	8647	8928	9209	9490	9771	190051	281
155	190332	190612	190892	191171	191451	191730	192010	192289	192567	2846	279
6	3125	3403	3681	3959	4237	4514	4792	5069	5346	5623	278
7	5900	6176	6453	6729	7005	7281	7556	7832	8107	8382	276
8	8657	8932	9206	9481	9755	200029	200303	200577	200850	201124	274
9	201397	201670	201943	202216	202488	2761	3033	3305	3577	3848	272
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
160	204120	204391	204663	204934	205204	205475	205746	206016	206286	206556	271
1	6826	7096	7365	7634	7904	8173	8441	8710	8979	9247	269
2	9515	9783	210051	210319	210586	210853	211121	211388	211654	211921	267
3	212188	212454	2720	2986	3252	3518	3783	4049	4314	4579	266
4	4844	5109	5373	5638	5902	6166	6430	6694	6957	7221	264
165	7484	7747	8010	8273	8536	8798	9060	9323	9585	9846	262
6	220108	220370	220631	220892	221153	221414	221675	221936	222196	222456	261
7	2716	2976	3236	3496	3755	4015	4274	4533	4792	5051	259
8	5309	5568	5826	6084	6342	6600	6858	7115	7372	7630	258
9	7887	8144	8400	8657	8913	9170	9426	9682	9938	203193	256
170	230449	230704	230960	231215	231470	231724	231979	232234	232488	232742	255
1	2996	3250	3504	3757	4011	4264	4517	4770	5023	5276	253
2	5528	5781	6033	6285	6537	6789	7041	7292	7544	7795	252
3	8346	8297	8548	8799	9049	9299	9550	9800	240050	240300	250
4	240549	240799	241048	241297	241546	241795	242044	242293	2541	2790	249
175	3038	3286	3534	3782	4030	4277	4525	4772	5019	5266	248
6	5513	5759	6006	6252	6499	6745	6991	7237	7482	7728	246
7	7973	8219	8464	8709	8954	9198	9443	9687	9932	250176	245
8	250420	250664	250908	251151	251395	251638	251881	252125	252368	2610	243
9	2853	3096	3338	3580	3822	4064	4306	4548	4790	5031	242
180	255273	255514	255755	255996	256237	256477	256718	256958	257198	257439	241
1	7679	7918	8158	8398	8637	8877	9116	9355	9594	9833	239
2	260071	260310	260548	260787	261025	261263	261501	261739	261976	262214	238
3	2451	2688	2925	3162	3399	3636	3873	4109	4346	4582	237
4	4818	5054	5290	5525	5761	5996	6232	6467	6702	6937	235
185	7172	7406	7641	7875	8110	8344	8578	8812	9046	9279	234
6	9513	9746	9980	270213	270446	270679	270912	271144	271377	271609	233
7	271842	272074	272306	2538	2770	3001	3233	3464	3696	3927	232
8	4158	4389	4620	4850	5081	5311	5542	5772	6002	6232	230
9	6462	6692	6921	7151	7380	7609	7838	8067	8296	8525	229
190	278754	278982	279211	279439	279667	279895	280123	280351	280578	280806	228
1	281033	281261	281488	281715	281942	282169	282396	282622	282849	3075	227
2	3301	3527	3753	3979	4205	4431	4656	4882	5107	5332	226
3	5557	5782	6007	6232	6456	6681	6905	7130	7354	7578	225
4	7802	8026	8249	8473	8696	8920	9143	9366	9589	9812	223
195	290035	290257	290480	290702	290925	291147	291369	291591	291813	292034	222
6	2256	2478	2699	2920	3141	3363	3584	3804	4025	4246	221
7	4466	4687	4907	5127	5347	5567	5787	6007	6226	6446	220
8	6665	6884	7104	7323	7542	7761	7979	8198	8416	8635	219
9	8833	9071	9289	9507	9725	9943	300161	300378	300595	300813	218
200	301030	301247	301464	301681	301898	302114	302331	302547	302764	302980	217
1	3196	3412	3628	3844	4059	4275	4491	4706	4921	5136	216
2	5351	5566	5781	5996	6211	6425	6639	6854	7068	7	

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
220	342423	342620	342817	343014	343212	343409	343606	343802	343999	344196	197
1	4392	4589	4785	4981	5178	5374	5570	5766	5962	6157	196
2	6353	6549	6744	6939	7135	7330	7525	7720	7915	8110	195
3	8305	8500	8694	8889	9083	9278	9472	9666	9860	350054	194
4	350248	350442	350636	350829	351023	351216	351410	351603	351796	1989	193
225	2183	2375	2568	2761	2954	3147	3339	3532	3724	3916	193
6	4108	4301	4493	4685	4876	5068	5260	5452	5643	5834	192
7	6026	6217	6408	6599	6790	6981	7172	7363	7554	7744	191
8	7935	8125	8316	8506	8696	8886	9076	9266	9456	9646	190
9	9835	360025	360215	360404	360593	360783	360972	361161	361350	361539	189
230	361728	361917	362105	362294	362482	362671	362859	363048	363236	363424	188
1	3612	3800	3988	4176	4363	4551	4739	4926	5113	5301	188
2	5486	5675	5862	6049	6236	6423	6610	6796	6983	7169	187
3	7356	7542	7729	7915	8101	8287	8473	8659	8845	9030	186
4	9216	9401	9587	9772	9958	370143	370328	370513	370698	370883	185
235	371068	371253	371437	371622	371806	1991	2175	2360	2544	2728	184
6	2912	3096	3280	3464	3647	3831	4015	4198	4382	4565	184
7	4748	4932	5115	5298	5481	5664	5846	6029	6212	6394	183
8	6577	6759	6942	7124	7306	7488	7670	7852	8034	8216	182
9	8398	8580	8761	8943	9124	9306	9487	9668	9849	380030	181
240	380211	380392	380573	380754	380934	381115	381296	381476	381656	381837	181
1	2017	2197	2377	2557	2737	2917	3097	3277	3456	3636	180
2	3815	3995	4174	4353	4533	4712	4891	5070	5249	5428	179
3	5606	5785	5964	6142	6321	6499	6677	6856	7034	7212	178
4	7390	7568	7746	7923	8101	8279	8456	8634	8811	8989	178
245	9166	9343	9520	9698	9875	390051	390228	390405	390582	390759	177
6	390935	391112	391288	391464	391641	1817	1993	2169	2345	2521	176
7	2697	2873	3048	3224	3400	3575	3751	3926	4101	4277	176
8	4452	4627	4802	4977	5152	5326	5501	5676	5850	6025	175
9	6199	6374	6548	6722	6896	7071	7245	7419	7592	7766	174
250	397940	398114	398287	398461	398634	398808	398981	399154	399328	399501	173
1	9674	9847	400020	400192	400365	400538	400711	400883	401056	401228	173
2	401401	401573	1745	1917	2089	2261	2433	2605	2777	2949	172
3	3121	3292	3464	3635	3807	3978	4149	4320	4492	4663	171
4	4834	5005	5176	5346	5517	5688	5858	6029	6199	6370	171
255	6540	6710	6881	7051	7221	7391	7561	7731	7901	8070	170
6	8240	8410	8579	8749	8918	9087	9257	9426	9595	9764	169
7	9933	410102	410271	410440	410609	410777	410946	411114	411283	411451	169
8	411620	1788	1956	2124	2293	2461	2629	2796	2964	3132	168
9	3300	3467	3635	3803	3970	4137	4305	4472	4639	4806	167
260	414973	415140	415307	415474	415641	415808	415974	416141	416308	416474	167
1	6641	6807	6973	7139	7306	7472	7638	7804	7970	8135	166
2	8301	8467	8633	8798	8964	9129	9295	9460	9625	9791	165
3	9956	420212	420286	420451	420616	420781	420945	421110	421275	421439	165
4	421604	1768	1933	2097	2261	2426	2590	2754	2918	3082	164
265	3246	3410	3574	3737	3901	4065	4228	4392	4555	4718	164
6	4882	5045	5208	5371	5534	5697	5860	6023	6186	6349	163
7	6511	6674	6836	6999	7161	7324	7486	7648	7811	7973	162
8	8135	8297	8459	8621	8783	8944	9106	9268	9429	9591	162
9	9752	9914	430075	430236	430398	430559	430720	430881	431042	431203	161
270	431364	431525	431685	431846	432007	432167	432328	432488	432649	432809	161
1	2969	3130	3290	3450	3610	3770	3930	4090	4249	4409	160
2	4569	4729	4888	5048	5207	5367	5526	5685	5844	6004	159
3	6163	6322	6481	6640	6799	6957	7116	7275	7433	7592	159
4	7751	7909	8067	8226	8384	8542	8701	8859	9017	9175	158
275	9333	9491	9648	9806	9964	440122	440279	440437	440594	440752	158
6	440909	441066	441224	441381	441538	1695	1852	2009	2166	2323	157
7	2480	2637	2793	2950	3106	3263	3419	3576	3732	3889	157
8	4045	4201	4357	4513	4669	4825	4981	5137	5293	5449	156
9	5604	5760	5915	6071	6226	6382	6537	6692	6848	7003	155
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
280	447158	447313	447468	447623	447778	447933	448088	448242	448397	448552	155
1	8706	8861	9015	9170	9324	9478	9633	9787	9941	450095	154
2	450249	450403	450557	450711	450865	451018	451172	451326	451479	1633	154
3	1786	1940	2093	2247	2400	2553	2706	2859	3012	3165	153
4	3318	3471	3624	3777	3930	4082	4235	4387	4540	4692	153
285	4845	4997	5150	5302	5454	5606	5758	5910	6062	6214	152
6	6366	6518	6670	6821	6973	7125	7276	7428	7579	7731	152
7	7887	8038	8189	8339	8487	8638	8789	8940	9091	9242	151
8	9392	9543	9694	9845	9995	460146	460296	460447	460597	460748	151
9	460898	461048	461198	461348	461499	1649	1799	1948	2098	2248	150
290	462398	462548	462697	462847	462997	463146	463296	463445	463594	463744	150
1	3893	4042	4191	4340	4489	4639	4788	4936	5085	5234	149
2	5383	5532	5680	5829	5977	6126	6274	6423	6571	6719	149
3	6868	7016	7164	7312	7460	7608	7756	7904	8052	8200	148
4	8347	8495	8643	8790	8938	9085	9233	9380	9527	9675	148
295	9822	9969	470116	470263	470410	470557	470704	470851	470998	471145	147
6	471292	471438	1585	1732	1878	2025	2171	2318	2464	2610	146
7	2756	2903	3049	3195	3341	3487	3633	3779	3925	4071	146
8	4216	4362	4508	4653	4799	4944	5090	5235	5381	5526	146
9	5671	5816	5962	6107	6252	6397	6542	6687	6832	6976	145
300	471121	477266	477411	477555	477700	477844	477989	478133	478278	478422	145
1	8566	8711	8855	8999	9143	9287	9431	9575	9719	9863	144
2	480007	480151	480294	480438	480582	480725	480869	481012	481156	481299	144
3	1443	1586	1729	1872	2016	2159	2302	2445	2588	2731	143
4	2874	3016	3159	3302	3445	3587	3730	3872	4015	4157	143
305	4300	4442	4585	4727	4869	5011	5153	5295	5437	5579	142
6	5721	5863	6005	6147	6289	6430	6572	6714	6855	6997	142
7	7138	7280	7421	7563	7704	7845	7986	8127	8269	8410	141
8	8551	8692	8833	8974	9114	9255	9396	9537	9677	9818	141
9	9958	490099	490239	490380	490520	490661	490801	490941	491081	491222	140
310	491362	491502	491642	491782	491922	492062	492201	492341	492481	492621	140
1	2760	2900	3040	3179	3319	3458	3597	3737	3876	4015	139
2	4155	4294	4433	4572	4711	4850	4989	5128	5267	5406	139
3	5544	5683	5822	5960	6099	6238	6376	6515	6653	6791	139
4	6930	7068	7206	7344	7483	7621	7759	7897	8035	8173	138
315	8311	8448	8586	8724	8862	8999	9137	9275	9412	9550	138
6	9687	9824	9962	500099	500236	500374	500511	500648	500785	500922	137
7	501059	501196	501333	1470	1607	1744	1880	2017	2154	2291	137
8	2427	2564	2700	2837	2973	3109	3246	3382	3518	3655	136
9	3791	3927	4063	4199	4335	4471	4607	4743	4878	5014	136
320	505150	505286	505421	505557	505693	505828	505964	506099	506234	506370	136
1	6505	6640	6776	6911	7046	7181	7316	7451	7586	7721	135
2	7856	7991	8126	8260	8395	8530	8664	8799	8934	9068	135
3	9203	9337	9471	9606	9740	9874	510009	510143	510277	510411	134
4	510545	510679	510813	510947	511081	511215	134				

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
340	531479	531607	531734	531862	531990	532117	532245	532372	532500	532627	128
1	2754	2882	3009	3136	3264	3391	3518	3645	3772	3899	127
2	4026	4153	4280	4407	4534	4661	4787	4914	5041	5167	127
3	5294	5421	5547	5674	5800	5927	6053	6180	6306	6432	126
4	6558	6685	6811	6937	7063	7189	7315	7441	7567	7693	126
345	7819	7945	8071	8197	8322	8448	8574	8699	8825	8951	126
6	9076	9202	9327	9452	9578	9703	9829	9954	540079	540204	125
7	540329	540455	540580	540705	540830	540955	541080	541205	1330	1454	125
8	1579	1704	1829	1953	2078	2203	2327	2452	2576	2701	125
9	2825	2950	3074	3199	3323	3447	3571	3696	3820	3944	124
350	544068	544192	544316	544440	544564	544688	544812	544936	545060	545183	124
1	5307	5431	5555	5678	5802	5925	6049	6172	6296	6419	124
2	6543	6666	6789	6913	7036	7159	7282	7405	7529	7652	123
3	7775	7898	8021	8144	8267	8389	8512	8635	8758	8881	123
4	9003	9126	9249	9371	9494	9616	9739	9861	9984	550106	123
355	550228	550351	550473	550595	550717	550840	550962	551084	551206	1328	122
6	1450	1572	1694	1816	1938	2060	2181	2303	2425	2547	122
7	2668	2790	2911	3033	3155	3276	3398	3519	3640	3762	121
8	3883	4004	4126	4247	4368	4489	4610	4731	4852	4973	121
9	5094	5215	5336	5457	5578	5699	5820	5940	6061	6182	121
360	556303	556423	556544	556664	556785	556905	557026	557146	557267	557387	120
1	7507	7627	7748	7868	7988	8108	8228	8349	8469	8589	120
2	8709	8829	8948	9068	9188	9308	9428	9548	9667	9787	120
3	9907	560026	560146	560265	560385	560504	560624	560743	560863	560982	119
4	561101	1221	1340	1459	1578	1698	1817	1936	2055	2174	119
365	2293	2412	2531	2650	2769	2887	3006	3125	3244	3362	119
6	3481	3600	3718	3837	3955	4074	4192	4311	4429	4548	119
7	4666	4784	4903	5021	5139	5257	5376	5494	5612	5730	118
8	5848	5966	6084	6202	6320	6437	6555	6673	6791	6909	118
9	7026	7144	7262	7379	7497	7614	7732	7849	7967	8084	118
370	568202	568319	568436	568554	568671	568788	568905	569023	569140	569257	117
1	9374	9491	9608	9725	9842	9959	570076	570193	570309	570426	117
2	570543	570660	570776	570893	571010	571126	1243	1359	1476	1592	117
3	1709	1825	1942	2058	2174	2291	2407	2523	2639	2755	116
4	2872	2988	3104	3220	3336	3452	3568	3684	3800	3915	116
375	4031	4147	4263	4379	4494	4610	4726	4841	4957	5072	116
6	5188	5303	5419	5534	5650	5765	5880	5996	6111	6226	115
7	6341	6457	6572	6687	6802	6917	7032	7147	7262	7377	115
8	7492	7607	7722	7836	7951	8066	8181	8295	8410	8525	115
9	8639	8754	8868	8983	9097	9212	9326	9441	9555	9669	114
380	579784	579908	580032	580156	580280	580404	580528	580652	580776	580900	114
1	580925	581039	1153	1267	1381	1495	1608	1722	1836	1950	114
2	2063	2177	2291	2404	2518	2631	2745	2858	2972	3085	114
3	3199	3312	3426	3539	3652	3765	3879	3992	4105	4218	113
4	4331	4444	4557	4670	4783	4896	5009	5122	5235	5348	113
385	5461	5574	5686	5799	5912	6024	6137	6250	6362	6475	113
6	6587	6700	6812	6925	7037	7149	7262	7374	7486	7599	112
7	7711	7823	7935	8047	8160	8272	8384	8496	8608	8720	112
8	8832	8944	9056	9167	9279	9391	9503	9615	9726	9838	112
9	9950	590061	590173	590284	590396	590507	590619	590730	590842	590953	112
390	591065	591176	591287	591399	591510	591621	591732	591843	591955	592066	111
1	2177	2288	2399	2510	2621	2732	2843	2954	3064	3175	111
2	3286	3397	3508	3618	3729	3840	3950	4061	4171	4282	111
3	4393	4503	4614	4724	4834	4945	5055	5165	5276	5386	110
4	5496	5606	5717	5827	5937	6047	6157	6267	6377	6487	110
395	6597	6707	6817	6927	7037	7146	7256	7366	7476	7586	110
6	7695	7805	7914	8024	8134	8243	8353	8462	8572	8681	110
7	8791	8900	9009	9119	9228	9337	9446	9556	9665	9774	109
8	9883	9992	600101	600210	600319	600428	600537	600646	600755	600864	109
9	600973	601082	1191	1299	1408	1517	1625	1734	1843	1951	109
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
400	602060	602169	602277	602386	602494	602603	602711	602819	602928	603036	108
1	3144	3253	3361	3469	3577	3686	3794	3902	4010	4118	108
2	4226	4334	4442	4550	4658	4766	4874	4982	5089	5197	108
3	5305	5413	5521	5628	5736	5844	5951	6059	6166	6274	108
4	6381	6489	6596	6704	6811	6919	7026	7133	7241	7348	107
405	7455	7562	7669	7777	7884	7991	8098	8205	8312	8419	107
6	8526	8633	8740	8847	8954	9061	9167	9274	9381	9488	107
7	9594	9701	9808	9914	610021	610128	610234	610341	610447	610554	107
8	610660	610767	610873	610979	1086	1192	1298	1405	1511	1617	106
9	1723	1829	1936	2042	2148	2254	2360	2466	2572	2678	106
410	612784	612890	612996	613102	613207	613313	613419	613525	613630	613736	106
1	3042	3947	4053	4159	4264	4370	4475	4581	4686	4792	106
2	4897	5003	5108	5213	5319	5424	5529	5634	5740	5845	105
3	5950	6055	6160	6265	6370	6476	6581	6686	6791	6895	105
4	7000	7105	7210	7315	7420	7525	7629	7734	7839	7943	105
415	8048	8153	8257	8362	8466	8571	8676	8780	8884	8989	105
6	9093	9198	9302	9406	9511	9615	9719	9824	9928	620032	104
7	620136	620240	620344	620448	620552	620656	620760	620864	620968	1072	104
8	1176	1280	1384	1488	1592	1695	1799	1903	2007	2110	104
9	2214	2318	2421	2525	2628	2732	2835	2939	3042	3146	104
420	623249	623353	623456	623559	623663	623766	623869	623973	624076	624179	103
1	4282	4385	4488	4591	4695	4798	4901	5004	5107	5210	103
2	5312	5415	5518	5621	5724	5827	5929	6032	6135	6238	103
3	6340	6443	6546	6648	6751	6853	6956	7058	7161	7263	103
4	7366	7468	7571	7673	7775	7878	7980	8082	8185	8287	102
425	8389	8491	8593	8695	8797	8900	9002	9104	9206	9308	102
6	9410	9512	9613	9715	9817	9919	630021	630123	630224	630326	102
7	630428	630530	630631	630733	630835	630936	1038	1139	1241	1342	102
8	1444	1545	1647	1748	1849	1951	2052	2153	2255	2356	101
9	2457	2559	2660	2761	2862	2963	3064	3165	3266	3367	101
430	633468	633569	633670	633771	633872	633973	634074	634175	634276	634376	101
1	4477	4578	4679	4779	4880	4981	5081	5182	5283	5383	101
2	5484	5584	5685	5785	5886	5986	6087	6187	6287	6388	100
3	6488	6588	6688	6789	6889	6989	7089	7189	7290	7390	100

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
460	662758	662852	662947	663041	663135	663230	663324	663418	663512	663607	94
1	3701	3795	3889	3983	4078	4172	4266	4360	4454	4548	94
2	4642	4736	4830	4924	5018	5112	5206	5299	5393	5487	94
3	5581	5675	5769	5862	5956	6050	6143	6237	6331	6424	94
4	6518	6612	6705	6799	6892	6986	7079	7173	7266	7360	94
465	7453	7546	7640	7733	7826	7920	8013	8106	8199	8293	93
6	8386	8479	8572	8665	8759	8852	8945	9038	9131	9224	93
7	9317	9410	9503	9596	9689	9782	9875	9967	670060	670153	93
8	670246	670339	670431	670524	670617	670710	670802	670895	0988	1080	93
9	1173	1265	1358	1451	1543	1636	1728	1821	1913	2005	93
470	672098	672190	672283	672375	672467	672560	672652	672744	672836	672929	92
1	3021	3113	3205	3297	3390	3482	3574	3666	3758	3850	92
2	3942	4034	4126	4218	4310	4402	4494	4586	4677	4769	92
3	4861	4953	5045	5137	5228	5320	5412	5503	5595	5687	92
4	5778	5870	5962	6053	6145	6236	6328	6419	6511	6602	92
475	6694	6785	6876	6968	7059	7151	7242	7333	7424	7516	91
6	7607	7698	7789	7881	7972	8063	8154	8245	8336	8427	91
7	8518	8609	8700	8791	8882	8973	9064	9155	9246	9337	91
8	9428	9519	9610	9700	9791	9882	9973	680063	680154	680245	91
9	680336	680426	680517	680607	680698	680789	680879	0970	1060	1151	91
480	681241	681332	681422	681513	681603	681693	681784	681874	681964	682055	90
1	2145	2235	2326	2416	2506	2596	2686	2777	2867	2957	90
2	3047	3137	3227	3317	3407	3497	3587	3677	3767	3857	90
3	3947	4037	4127	4217	4307	4396	4486	4576	4666	4756	90
4	4845	4935	5025	5114	5204	5294	5383	5473	5563	5652	90
485	5742	5831	5921	6010	6100	6189	6279	6368	6458	6547	89
6	6636	6726	6815	6904	6994	7083	7172	7261	7351	7440	89
7	7529	7618	7707	7796	7886	7975	8064	8153	8242	8331	89
8	8420	8509	8598	8687	8776	8865	8953	9042	9131	9220	89
9	9309	9398	9486	9575	9664	9753	9841	9930	690019	690107	89
490	690196	690285	690373	690462	690550	690639	690728	690816	690905	690993	88
1	1081	1170	1258	1347	1435	1524	1612	1700	1789	1877	88
2	1965	2053	2142	2230	2318	2406	2494	2583	2671	2759	88
3	2847	2935	3023	3111	3199	3287	3375	3463	3551	3639	88
4	3727	3815	3903	3991	4078	4166	4254	4342	4430	4517	88
495	4605	4693	4781	4868	4956	5044	5131	5219	5307	5394	88
6	5482	5569	5657	5744	5832	5919	6007	6094	6182	6269	87
7	6356	6444	6531	6618	6706	6793	6880	6968	7055	7142	87
8	7229	7317	7404	7491	7578	7665	7752	7839	7926	8014	87
9	8101	8188	8275	8362	8449	8535	8622	8709	8796	8883	87
500	698970	699057	699144	699231	699317	699404	699491	699578	699664	699751	87
1	9838	9924	700011	700098	700184	700271	700358	700444	700531	700617	87
2	700704	700790	0877	0963	1050	1136	1222	1309	1395	1482	86
3	1568	1654	1741	1827	1913	1999	2086	2172	2258	2344	86
4	2431	2517	2603	2689	2775	2861	2947	3033	3119	3205	86
505	3291	3377	3463	3549	3635	3721	3807	3893	3979	4065	86
6	4151	4236	4322	4408	4494	4579	4665	4751	4837	4922	86
7	5008	5094	5179	5265	5350	5436	5522	5607	5693	5778	86
8	5864	5949	6035	6120	6206	6291	6376	6462	6547	6632	85
9	6718	6803	6888	6974	7059	7144	7229	7315	7400	7485	85
510	707570	707655	707740	707826	707911	707996	708081	708166	708251	708336	85
1	8421	8506	8591	8676	8761	8846	8931	9015	9100	9185	85
2	9270	9355	9440	9524	9609	9694	9779	9863	9948	710033	85
3	710117	710202	710287	710371	710456	710540	710625	710710	710794	0879	85
4	0963	1048	1132	1217	1301	1385	1470	1554	1639	1723	84
515	1807	1892	1976	2060	2144	2229	2313	2397	2481	2566	84
6	2650	2734	2818	2902	2986	3070	3154	3238	3323	3407	84
7	3491	3575	3659	3742	3826	3910	3994	4078	4162	4246	84
8	4330	4414	4497	4581	4665	4749	4833	4916	5000	5084	84
9	5167	5251	5335	5418	5502	5586	5669	5753	5836	5920	84
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D.
520	716003	716087	716170	716254	716337	716421	716504	716588	716671	716754	83
1	6838	6921	7004	7088	7171	7254	7338	7421	7504	7587	83
2	7671	7754	7837	7920	8003	8086	8169	8253	8336	8419	83
3	8502	8585	8668	8751	8834	8917	9000	9083	9165	9248	83
4	9331	9414	9497	9580	9663	9745	9828	9911	9994	720077	83
525	720159	720242	720325	720407	720490	720573	720655	720738	720821	0903	83
6	0586	1068	1151	1233	1316	1398	1481	1563	1646	1728	82
7	1811	1893	1975	2058	2140	2222	2305	2387	2469	2552	82
8	2634	2716	2798	2881	2963	3045	3127	3209	3291	3374	82
9	3456	3538	3620	3702	3784	3866	3948	4030	4112	4194	82
530	724276	724358	724440	724522	724604	724685	724767	724849	724931	725013	82
1	5095	5176	5258	5340	5422	5503	5585	5667	5748	5830	82
2	5912	5993	6075	6156	6238	6320	6401	6483	6564	6646	82
3	6727	6809	6890	6972	7053	7134	7215	7297	7379	7460	81
4	7541	7623	7704	7785	7866	7948	8029	8110	8191	8273	81
535	8354	8435	8516	8597	8678	8759	8841	8922	9003	9084	81
6	9165	9246	9327	9408	9489	9570	9651	9732	9813	9893	81
7	9974	730055	730136	730217	730298	730378	730459	730540	730621	730702	81
8	730782	0863	0944	1024	1105	1186	1266	1347	1428	1508	81
9	1589	1669	1750	1830	1911	1991	2072	2152	2233	2313	81
540	732394	732474	732555	732635	732715	732796	732876	732956	733037	733117	80
1	3197	3278	3358	3438	3518	3598	3679	3759	3839	3919	80
2	3999	4079	4160	4240	4320	4400	4480	4560	4640	4720	80
3	4800	4880	4960	5040	5120	5200	5279	5359	5439	5519	80
4	5599	5679	5759	5838	5918	5998	6078	6157	6237	6317	80
545	6397	6476	6556	6635	6715	6795	6874	6954	7034	7113	80
6	7193	7272	7352	7431	7511	7590	7670	7749	7829	7908	79
7	7987	8067	8146	8225	8305	8384	8463	8543	8622	8701	79
8	8781	8860	8939	9018	9097	9177	9256	9335	9414	9493	79
9	9572	9651	9731	9810	9889	9968	740047	740126	740205	740284	79
550	740363	740442	740521	740600	740678	740757	740836	740915	740994	741073	79
1	1152	1230	1309	1388	1467	1546	1624	1703	1782	1860	79
2	1939	2018	2096	2175	2254	2332	2411	2489	2568	2647	79
3	2725	2804	2882	2961	3039	3118	3196	3275	3353	3431	78
4	3510	3588	3667	3745	3823	3902	3980	4058	4136	4215	78
555	4293	4371	4449	4528	4606	4684	4762	4840	4919	4997	78
6	5075	5153	5231	5309	5387	5465	5543	5621	5699	5777	78
7	5855	5933	6011	6089	6167	6245	6323	6401	6479	6556	78
8	6634	6712	6790	6868	6945	7023	7101	7179	7256	7334	78
9	7412	7489	7567	7645	7722	7800	7878	7955	8033	8110	78
560	748188	748266	748343	748421	748498	748576	748653	748731	748808	748885	77
1	8963	9040	9118	9195	9272	9350	9427	9504	9582	9659	77
2	9736	9814	9891	9968	750045	750123	750200	750277	750354	750431	77
3	750508	750586	750663	750740	0817	0894	0971	1048	1125	1202	77
4	1279	1356	1433	1510	1587	1664	1741	1818	1895	1972	77
565	2048	2125	2202	2279	2356	2433	2509	2586	2663	2740	77
6	2816	2893	2970	3047	3123	3200	3277	3353	3430	3506	77
7											













昭和十二年五月二十日印刷  
昭和十二年五月二十三日發行



複製

編者 寺尾琢磨

發行者 慶應義塾出版局

代表者 西村富三郎  
東京市芝區三田二ノ二

印刷者 山城龍雄  
東京市芝區田村町五ノ十二

印刷所 愛生舎印刷所

