大學用書

材料力學

（上）

石志清編著

正中書局印行

大學用書

材料力學

（上）

石志清編著

正中書局印行

中華民國三十三年四月渝初版
中華民國三十六年七月滬三版

材料力學

上冊 定價國幣十三元
（外埠酌加運費匯費）

編著者 石志清
發行人 吳秉常
印刷所 正中書局
發行所 正中書局

（1503）

自　　序

材料力學乃各項工程之基礎，此科書籍中文者太少，難應各級讀者之需；西籍者雖多，無如取材盈缺不純，證解巧拙互異．欲讀者多方參考，難免顧此失彼，抑且吃力費時，得不償失．著者每欲以其個人之消耗，節學者之精力與光陰；爰於應用力學脫稿之後，即着手編輯是書；羅列各家之說，盱衡損益，汰蕪取精，以期有裨於我國之工程教育。自民國二十七年二月在天津開始操觚，至翌年五月在廣西大學完成；期年之間，刪改三次，轉徙流離，未嘗散失，亦云幸矣．

本書多取材於 Timoshenko 所著之 Strength of Materials，並雜採 Case 與 Morley 二氏之 Strength of Materials, Seely 氏之 Resistance of Materials 與其 Advanced Mechanics of Materials, D. A. Low 氏之 Applied Mechanics, 及 Sutherland 氏之 Structural Theory and Design. 提設取其普徧者，證明求其完美者，解釋擇其精審者，習題選其切用者，援引者補證之，缺欠者增益之；期此書可供讀者日後之參考，固不僅爲其初讀時之易解也。書中習題雖多已解出，仍望讀者先行試演，然後以之參證可耳。

本書在整理之時，深得廣西大學學生沈渼平君，扈容君，與李學泌君之協助及製圖，謹誌感於此。

民國二十八年六月一日

石志清序於桂林西林公園紅豆書院

目　　次

——上　册——

第一章　簡單之拉力與壓力

第二章　薄筒及鉚釘

第三章 單純扭力

第四章 簡梁之彎應力及切應力

第五章　混合應力

第六章 梁之彎度

第七章 特殊簡梁之強度與堀強性

第一章　簡單之拉力與壓力

1. 概論　平衡建築物所受之外力(external forces)有兩種:

(1)支點之支持力(reacting force),或支持力偶(reacting couple)。

(2)建造目的欲其擔任之力,曰擔負(load)。

擔負有下列三種:

(1)由零漸漸加至最後值而不再變者,曰不變擔負(steady load,或 static load),

(2)屬於運動物體之碰撞者,曰碰撞擔負(impact load)。

(3)由某值漸增至最大值,復漸減至該值者,曰變動擔負(varying load)。

凡不明言碰撞或變動者,皆指不變者也。

上列之擔負,每種又包含(1)簡單擔負(central 或 simple load),卽外力之合可設爲經過作用面之重心者 (2)彎曲擔負(bending load) (3)扭轉擔負(torsional load)。

如有長 l 之直棒兩端各加拉力 P,此力可散加於底面上,或近一端之外周上,但皆經設法使其合力經底面之重心,則稱爲簡單拉力(simple tension)。反其力之方向曰簡單壓力(simple compression)。任拉之棒,由任一橫斷面截取其一部分以爲自由體(看圖1(a)),則

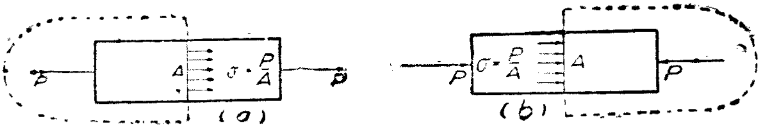


圖 1.

知其橫斷面兩側之材料有互相牽曳之力，而任壓者則有互相抵抗之力，謂之應力。此內應力在橫斷面上如何分配，實平衡之所不能規定者，通常姑假設為平均分配耳，即其綜合之力，等於外力 P，且過橫斷面之重心也。以 A 示橫斷面積，則內應力之強度(unit stress)為

$$\sigma=\frac{P}{A} \tag{1}$$

為拉力時示以正，壓力示以負。在本書中，凡應力之強度皆略去強度，而簡稱為應力(stress)；全面之力，則須指明其為全值(total stress)，而以張應力(tensile stress)及壓應力(compressive stress)，表明應力之性質。上述兩種應力合稱變長應力(directst ress)，變長(elongation)為形變(deformation)之一種。其單位長度所生之變長，曰應變(unit strain，簡稱 strain)，

$$\epsilon=\frac{e}{l} \tag{2}$$

e 示變長，l 示原長，ϵ 即應變也。正號示拉長應變，負號示壓縮應變。

若拉力不甚大，當拉力移去時，可復其原長，是為彈性(elasticity)。若拉力過大，雖將拉力完全移去，但只回復其原長之一部分，謂之彈性衰退(elastic failure)。就壓力言亦復如是。

本書研究平衡建築物內(1)各斷面上應力之性質及強度，(2)沿各方向之應變，與(3)各種材料之彈性

2. **簡單拉力之試驗** 爲研究各種材料之彈性，嘗製成棒狀之試驗品（specimen），先測量其原有之平均橫斷面積 A，裝於試驗機上，以變長之儀器（extensometer）測定之。不加拉力之前，先量儀器所括一段之原長 l，然後漸加拉力，每次量其變長 e，由公式(1)及(2)可求其對應之張應力及應變，列於表中，譜而爲圖；如圖 2 (a) 示延性材料（ductile material）如韌鋼之 $\sigma-\epsilon$ 圖，當張應力不達 A 點之對應值以前，ϵ 與 σ 成正比，或

$$\frac{\sigma}{\epsilon}=\text{常數 } E \tag{3}$$

此常數稱爲線彈性係數（linear modulus of elasticity）。

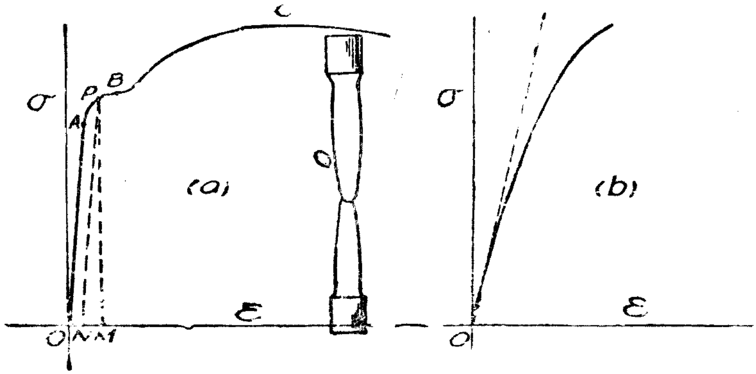


圖 2.

若將式(1)及(2)代入式(3)，則得

$$e=\frac{Pl}{AE} \tag{4}$$

如此時將拉力漸減爲零，由實驗可知其應變仍沿原直線 AO 縮

而爲零，即應變全可恢復。應力過 A 以後，應變之增加，即超過其常比。過 A 以後，若將應力漸減，則其應變常較大於增至該應力時之對應值。譜之圖中，得平行於 OA 之直線，至應力等於零時，尚有不復之應變（permanent set）ON，其可復者爲 MN。故 A 點謂爲完全彈性之限度（proportional limit）。就韌鋼而論，若應力不踰彈性限度，則應力與應變成正比，且應變之全部可復，此爲 Hooke 定律。應力增至 B 點，應變突然驟增，旋即停止，此時之材料謂之屈服（yield），B 點對應之應力曰屈服點（yielding point）。此後材料尚能復振，但應力與應變之比不爲常數，即曲線之水平傾度無定也。愈後愈平，即應力大而常數 E 減小也。至 C 點之應力時，材料因生細頸（necking），應變猛增。雖將拉力急速減低，尚難及頸減之速，故以原面積除拉力，雖得下降之曲線，但最細處實有之應力強度，尚繼續增高，故材料必斷也。C 點之應力曰終極強度（ultimate strength）。

脆性材料（brittle material）如鑄鐵者，拉力試驗之情形如圖 2（b），約作拋物線形，只應力甚低之時，約與應變成正比耳。此項並無所謂屈服現象，應力愈大則應變超過正比者愈多，而常數 E 愈減，應力至 C 而驟斷，不生細頸，是爲終極強度。直至斷時之應變，仍不若韌鋼之大也。

各種材料壓縮試驗之 σ-ϵ 曲線均各與其拉長試驗者相似。延性材料如韌鋼者，其抗壓與抗張中之彈性限度與屈服點皆約相同。脆材料如鑄鐵，其抗壓彈性限度與終極強度，均較抗張者強。但無論何種，在未達彈性限度以前，壓應力與壓縮係數之比，則皆與抗張者相等，即抗張與抗壓之常數 E 相同也。

材料按其彈性係數及應變分為下列四種:

(1)終極應變大者,曰延性材料;如熟鐵,韌鋼,

(2)終極應變小者,曰脆性材料;如鑄鐵,混凝土,

(3)常數E小且不復之應變少者曰彈性材料(elastic material);如橡皮,

(4)不復之應變大者,曰受範性材料(plastic material);如錫。

材料力學為便於研究,對於設想之材料,嘗作下列之假設,學者須默誌之,然後方知所得結果之有效範圍也。

(1)設想材料是均質的(homogeneous),即其中無顆粒,乃混然一致者,故論其橫斷面上之應力時,無須追問何處在顆粒之內,何處位於顆粒之間,而應力當有何差異也;吾人之所知只其平均值耳,如韌鋼、熟銅、鋁棒之橫斷面上各點之應力皆近於平均值;如鑄鐵則較大較小之範圍必廣。

(2)設為各向同性的(isotropic),故沿任一方向之性質,可用於各方向,如韌鋼、鑄鐵頗近似之;木材則辨紋理。

(3)應變常設為甚小,故其平方可約作零。建築材料大約皆合。

(4)設材料服從Hooke定律,故常由觀察所得之應變分配法,而判斷其應力之分配也,故其結論用於脆性材料不若用於延性者之相符也。

(5)若無顯著之說明,則機件及建築物之橫斷面皆無急遽變更。

3. 資用應力及安全因數 資用應力(working stress)者,材料能平安擔任之應力也,任拉之棒,若以資用應力除拉力,可良其

所需之橫斷面積。選定之資用應力大，則省材料，而其強度或不足；資用應力小，則安全，而或有過當消費。故選用適宜之資用應力，實製造者之首要問題。資用應力之大小，因擔負之性質而異。今只就簡單之拉力與壓力而論，其他情形詳後。延性材料如韌鋼、赤銅等，至屈服點則應變驟增十數倍，且多不能復；為保持物件之定形，資用應力須較屈服點 σ_y 低，方為安全。脆性材料如鑄鐵、混凝土，無確定屈服點，雖至破壞，其應變亦甚微，故其資用應力可就終極強度 σ_u 求之。

然則　　$\sigma_w=\dfrac{\sigma_y}{n}$　　或　　$\sigma_w=\dfrac{\sigma_u}{n_1}$

n 及 n_1 皆稱為安全因數（factor of safety），惟其基礎不同，延性材料之基於屈服點者常用 2，脆性材料之基於終極強度者常用 6 或 7。誠以(1)擔負或有意外改變，(2)材料不似意想之均質，(3)理論之基本假設等，或與自然不合；故安全因數用至如此之大也。脆性材料之棒的直徑有驟變，則其安全因數尚須較 n_1 大二倍也。

各種材料之彈性與其資用應力可由附錄 1 之表四檢得。

習　題　一

1. 圖 3 示壓榨機，其兩個鋼柱 N、N 各長 50 吋，最大壓力 $P=100,000$ 磅。設鋼之資用張應力限為每方吋 10,000 磅，求柱之直徑，及其變長。　　答 $d=2.52$ 吋；$e=\dfrac{1}{6}$ 吋。

2. 圖 4 之 AB 及 CB 為二鋼杆，其上端以活軸管於壁上，下端結以活軸。杆之長各 15 呎，與水平各傾 30°。今於結合點懸重

5,000 磅。設資用張應力限爲每方吋 10,000 磅，求其所須之橫斷面積，及其結合點 B 之偏度。

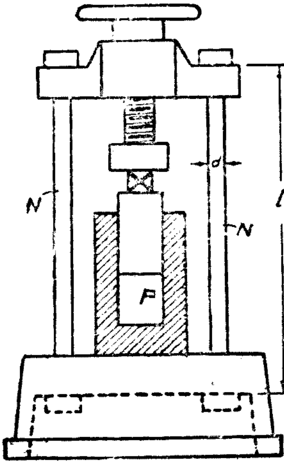


圖 3.

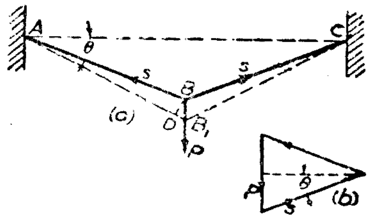


圖 4.

解.　論結合點之平衡，由 $\Sigma F_Y=0$ 得鋼杆之拉力

$$S=\frac{P}{2\sin\theta}=\frac{5000}{2\times\frac{1}{2}}=5000\text{ 磅}.$$

又

$$A=\frac{S}{\sigma_w}=\frac{5000}{10,000}=\frac{1}{2}\text{ 方吋}.$$

$$\text{每杆之增長}=DB_1=\epsilon l=\frac{\sigma_w}{E}\cdot l$$

$$=\frac{10,000}{30\times 10^6}\times 15\times 12=0.06\text{ 吋}.$$

BD 弧可認爲由 B 至 AB 之垂線，又 $\angle BB_1D$ 約爲 $60°$.

$$\therefore\quad BB_1=\frac{DB_1}{\cos 60°}=0.06\times 2=0.12\text{ 吋}.$$

3. 圖 5 之鋼杆,橫斷面爲 1 方吋,$P=10,000$ 磅,$Q=5,000$ 磅;求其增長,

解. 論 A 部之平衡,可知其上下段之拉力各爲 Q,

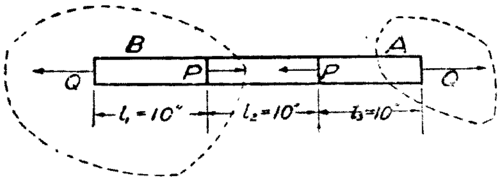


圖 5.

論 B 部之平衡,可知中段之拉力 $=Q-P$.

故全杆共增之長 $$\delta=2\frac{Ql_1}{AE}+\frac{(Q-P)l_2}{AE}.$$

4. 圖 6 (a)之觚杆 BC 爲木材,其資用應力限爲每方吋100磅。

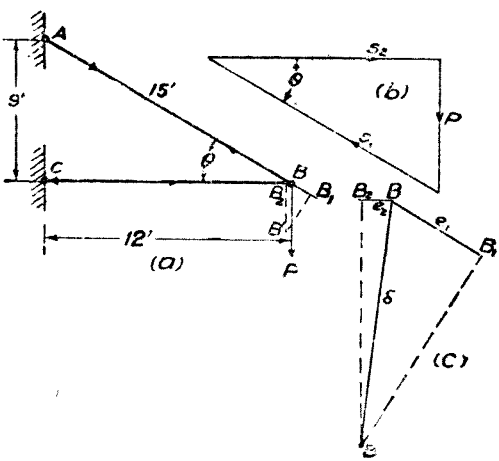


圖 6.

拉杆 AB 爲鋼質，其賫用張應力限爲每方吋 10,000 磅，擠負 P 爲 6,000 磅，長 皆在圖中註明；求其 B 點之偏度。

解. 示力三角形 B 與原架相似，故 AB 之拉力

$$S_1=\frac{15}{9}\times P=10,000\text{ 磅};$$

而 BC 之壓力
$$S_2=\frac{12}{9}\times P=8,000\text{ 磅}.$$

故 AB 之橫斷面積

$$A_1=\frac{S_1}{\sigma_w}=\frac{10,000}{10,000}=1\text{ 方吋}；\text{ 而 } BC\text{ 者}=\frac{8000}{160}=50\text{ 方吋}.$$

又 AB 杆之增長

$$e_1=\frac{S_1l_1}{A_1E_1}=\frac{10,000\times 15\times 12}{1\times 30\times 10^6}=0.060\text{ 吋(圖中之 } BB_1).$$

而 BC 杆之縮短

$$e_2=\frac{S_2l_2}{A_2E_2}=\frac{8000\times 12\times 12}{50\times 30\times 10^6}=0.0154\text{ 吋(圖中之 } BB_2).$$

欲求 B 點之偏度，以 A 及 C 爲中心，以二杆後來之長爲半徑作弧交出 B 點後來之位置 B'。欲將位移圖 (displacement diagram) 放大如 (c) 者，可沿 AB 之方向作 $BB_1=e_1$ 以示 AB 之增長，沿 BC 作 $BB_2=e_2$，以示 BC 之縮短，爲免去中心太遠之苦，可由 B_1 及 B_2 作垂線以代弧，交出 B'。BB' 即 B 點之偏度，可由圖中量得之。

5. 圖 6 ( ) 之結構，AB 以何方向爲最省材料？

解. 設 l_2 爲壓杆之長，P 爲擠負，θ 爲 AB 與壓杆之傾角，

則　　　　AB 之拉力 $= \dfrac{P}{\sin\theta}$,

故其橫斷面積　　　　$A = \dfrac{P}{\sigma_w \cdot \sin\theta}$.

又其長度　　　　$l = \dfrac{l_2}{\cos\theta}$.

故其體積　　　　$Al = \dfrac{Pl_2}{\sigma_w \sin\theta \cdot \cos\theta} = \dfrac{2Pl_2}{\sigma_w \sin 2\theta}$,

當以 $\sin 2\theta = 1$ 爲最小,即　　　　$\theta = 45°$.

6. 圖 7 結構中各構件之橫斷面積皆爲 1 吋,各接點皆係活軸。按(a)及(b)所示之擔負,設 P 爲 10,000 磅; 各求其 A 角與 C 角之形變.

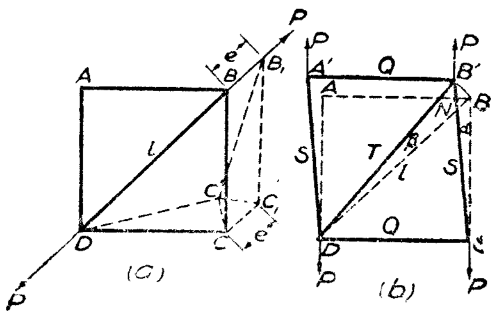


圖 7.

解.　圖(a): 只對角杆任拉力 $= P$ (何故?)

故其增長　　　　$e = \dfrac{Pl}{AE} = BB_1$.

以 D 爲中心，以 B_1 爲中心，皆以 $DC\left(=\dfrac{l}{\sqrt{2}}\right)$ 爲半徑，作弧交出 C 點。作 $CC_1 \parallel$ 且 $=BB_1$，則在三角形 $CC'C_1$ 內其 C 角與 C_1 角相等約仍各爲 $45°$。

故 $$CC'=\frac{e}{\sqrt{2}}.$$

$$DC \text{ 所轉之角}=\frac{CC'}{DC}=\frac{e}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{l}=\frac{P}{AE}=\frac{1}{3000}\text{ 半徑角}.$$

$$C \text{ 角共增 } 2\times\frac{1}{3000}=\frac{1}{1500}\text{ 半徑角}.$$

圖(b)：設 S 爲立杆之拉力，T 爲斜杆之拉力，Q 爲橫杆之觝力。設 D 點之位置不變，而 DC 之方位不改，則形變如圖(b)。

論 D 點之平衡，由 $\Sigma F_X=0$ 得

$$Q=T\cos(45°+\beta)-S\sin\alpha \fallingdotseq T\cos(45°+\beta),$$

由 $\Sigma F_Y=0$ 得

$$S\cos\alpha+T\cos(45°-\beta)=P.$$

論 C(或 C')點之平衡，由 $\Sigma F_Y=0$ 得

$$S\cos\alpha=P.$$

然則 $$T\cos(45°-\beta)=0.$$

$$\therefore\quad T=0,\text{而 } Q \text{ 亦} \fallingdotseq 0,\ \text{只 } S=\frac{P}{\cos\alpha}\text{ 耳}.$$

故只立杆增長 $$e=NB'=\frac{S\cdot l\cos 45°}{AE}=\frac{Pl}{AE}\cdot\frac{\cos 45°}{\cos\alpha}.$$

但 $$NB'\fallingdotseq NB=(l\cos 45°)\sin\alpha$$

故

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{P}{AE}=\frac{1}{3,000}.$$

$$\therefore\quad \sin 2\alpha=\frac{1}{1,500}\doteqdot 2\alpha.$$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{1}{3,000}\text{半徑角}.$$

7. 圖 8 之 P，可在 BD 一段上移動，至何處則 BC 之擔負為最強？又 θ 為若干度，則 BC 之體積最小？　　答在 D；45°.

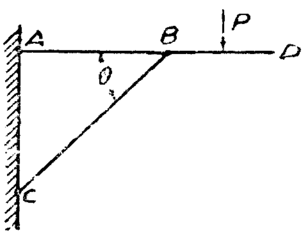


圖 8.

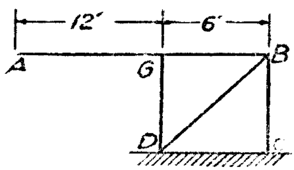


圖 9.

8. 圖 9 之 AB 杆上，每呎負重 1000 磅，BC 為鋼杆，其資用應力限為 15,000 磅每方吋，求其橫斷面積。　　答 0.6 方吋.

9. 圖 10 (a) 與 (b) 皆示結構梁，設資用應力為 16,000 磅每方吋；各求其 AB 與 BC 之橫斷面積。

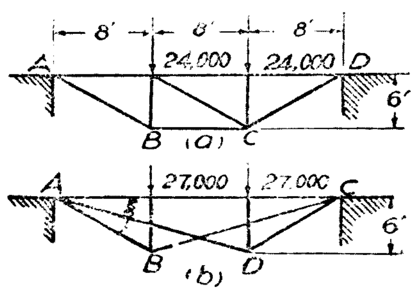


圖 10.

答(a) $AB=$ .5 方吋， $BC=2.05$ 方吋.

(b) $AB=2.5$ 方吋，$BC=$ .03 方吋.

4. 本身重量所生應力及應變 礦坑提重之索，坑底壓水機若自地表上發動時，其長連臂，除擔負外，其自己重量所生之應力與應變皆關重要。

設以 γ 代索之密度，l 代其全長，則距下端等於 x 處之橫斷面 A 共任之拉力 $=P+\gamma Ax$

故其張應力
$$\sigma_x=\frac{P}{A}+\gamma x \tag{a}$$

其最大張應力顯於極上之橫斷面上，$\sigma_大=\frac{P}{A}+\gamma l$，此值宜等於材料之容用張應力 σ_w

$$\therefore \quad A=\frac{P}{\sigma_w-\gamma l} \tag{b}$$

距下端 x 處之應變
$$\epsilon_x=\frac{\sigma_x}{E},$$

由式(a)得
$$\epsilon_x=\frac{P}{AE}+\frac{\gamma x}{E} \tag{c}$$

在此處之一小段索 dx，因其長極短，故其各處之應變皆等於 (c) 式，而其共增之長 $=\epsilon_x dx=\left(\frac{P}{AE}+\frac{\gamma x}{E}\right)dx$.

故全索共增之長，

$$\delta=\frac{P}{AE}\int_0^l dx+\frac{\gamma}{E}\int_0^l x\,dx=\frac{Pl}{AE}+\frac{\gamma l^2}{2E} \tag{d}$$

末項 $=\frac{\gamma Al}{2}\cdot\frac{l}{AE}$，恰如其本身重量之半加於下端所生之增長。

等强之索或柱 若索甚長，其 γl 竟等於 σ_w，則(b)式之 A 得無限，故須減少索下端(或柱上端)之橫斷面積，以減輕其本身之重量。其最經濟之法厥爲各橫斷面上之應力皆恰等於材料之資用應力 σ_w，此謂之等強(equal strength)之索。其橫斷面積改變之規律如下：

設距下端 x 處之橫斷面積爲 A，因其應力恆等於 σ_w，故 x 增大，A 必增大，即 A 爲 x 之函式，再上 dx 處者爲 $A+dA$，其宜增之 dA，若以任 dx 一段之重量，而應力亦等於 σ_w，則全面之應力皆等於 σ_w 矣。

故
$$\gamma\frac{A+(A+dA)}{2}\cdot dx=\sigma_w\cdot dA;$$

或
$$\frac{dA}{A+\frac{1}{2}dA}=\frac{\gamma}{\sigma_w}\cdot dx;$$

其極也
$$\frac{dA}{A}=\frac{\gamma}{\sigma_w}dx.$$

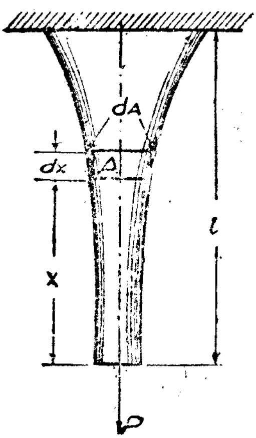


圖 11.

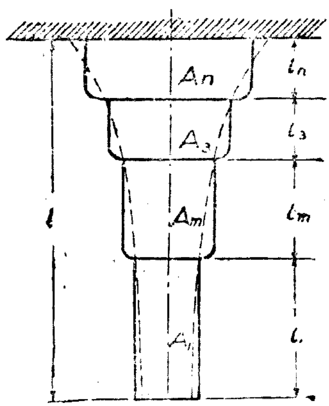


圖 12.

積分之得 $$\log_e A = \frac{\gamma}{\sigma_w}x + C.$$

或 $$A = \epsilon^{\frac{\gamma}{\sigma_w}x + C} = \epsilon^{C} \cdot \epsilon^{\frac{\gamma}{\sigma_w}x}.$$

在最下端 $x=0$，橫斷面積 $$A_0 = \frac{P}{\sigma_w} = \epsilon^{C} \times \epsilon^{0}$$

$$\therefore \quad A = \frac{P}{\sigma_w} \cdot \epsilon^{\frac{\gamma}{\sigma_w}x} \tag{e}$$

最上端之橫斷面積最大， $$A_n = \frac{P}{\sigma_w} \cdot \epsilon^{\frac{\gamma l}{\sigma_w}}.$$

設索之重量 $=W$，則 $$W + P = A_n \sigma_w.$$

$$\therefore \quad W = P\left(\epsilon^{\frac{\gamma l}{\sigma_w}} - 1\right). \tag{f}$$

等強索各處張應力皆等於 σ_w，故其應變皆等於 $\frac{\sigma_w}{E}$；

而其全體之增長， $$\delta = \frac{\sigma_w}{E} l \tag{g}$$

為便於製造，長索常分為 n 段，其各段之橫斷面積皆不變，如圖12。就第一段而論，橫斷面積既不變，則由(b)式得其橫斷面積

$$A_1 = \frac{P}{\sigma_w - \gamma l_1}.$$

又就第二段而論，其下面之擔負 $= A_1 \sigma_w$.

故 $$A_2=\frac{A_1\sigma_w}{\sigma_w-\gamma l_2}=\frac{P\sigma_w}{(\sigma_w-\gamma l_1)(\sigma_w-\gamma l_2)}.$$

論第三段，其下面上之擔負$=A_3\sigma_w$.

$$\therefore\quad A_3=\frac{A_2\sigma_w}{\sigma_w-\gamma l_3}=\frac{P\sigma_w^2}{(\sigma_w-\gamma l_1)(\sigma_w-\gamma l_2)(\sigma_w-\gamma l_3)}.$$

然則第 m 段之橫斷面積

$$A_m=\frac{P\sigma_w^{m-1}}{(\sigma_w-\gamma l_1)(\sigma_w-\gamma l_2)\cdots(\sigma_w-\gamma l_m)};\qquad\text{(h)}$$

若 $l_1=l_2=\cdots=\frac{l}{n}$，則

$$A_m=\frac{P}{\sigma_w}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{\gamma}{\sigma_w}\cdot\frac{l}{n}\right)^m}\qquad\text{(i)}$$

再往下推想一步 $\frac{l}{n}\cdot m=x$，卽由下端至第 m 段之長.

$$\therefore\quad\left(1-\frac{\gamma}{\sigma_w}\cdot\frac{l}{n}\right)^m=\left(1-\frac{\gamma}{\sigma_w}\cdot\frac{x}{m}\right)^m=\left\{1+\frac{\left(-\frac{\gamma}{\sigma_w}\cdot x\right)}{m}\right\}^m$$

但 $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n_{n=\infty}=\epsilon^x$. 故若 $m=\infty$， 則上式$=\epsilon^{-\frac{\gamma}{\sigma_w}x}$.

以此代入(i)式卽得以前之(e)式，$m=\infty$ 卽不分段矣。

$$\text{全索之重 } W+P=A_n\sigma_w=\frac{P}{\left(1-\frac{\gamma}{\sigma_w}\cdot\frac{l}{n}\right)^n}\text{，由(i).}$$

$$\therefore\quad W = P\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{\gamma l}{n\sigma_w}\right)^n}-1\right\} \tag{j}$$

全索變長 $\delta = \frac{\sigma_w}{E} l$

習　題　二

1. 橫斷面積不變之索，長 720 呎，下端懸重 70,000 磅。設材料之密度爲每方呎 490 磅、資用張應力限爲每方吋 10,000 磅。求其橫斷面積與增長。　　答由( )式得 $A=9.2$ 方吋；由(d)式得 $\delta=2.53$ 吋．

2. 圖 13 示正圓錐形之棒，直下懸之 底面直徑爲 d，長爲 l，密度爲 γ。求其變長。

解． 距頂點 x 處橫斷面上之共擔負 $= \frac{\gamma}{3} A_x \cdot x$.

如圓錐角甚小（卽棒甚長），則橫斷面上之應力可認爲平均分配者故此處橫斷面上之應力 $= \frac{\gamma}{3} x$,

而應變 $= \frac{\gamma x}{3E}$.

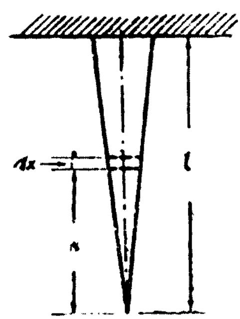


圖 13.

其 dx 一段之應變再約作相等。則全體之變長

$$\delta = \frac{\gamma}{3E}\int_0^l x\,dx = \frac{\gamma l^2}{6E}.$$

3. 礦用壓水機，連臂長 320 呎，橫斷面積不變。下壓時抵抗力 200 磅，上提時抵抗力 2000 磅。設材料之密度爲每立方呎 490 磅，

容用應力限每方吋7,000磅,壓水機內之動程(stroke) $s=8$ 吋;求其曲柄之長。

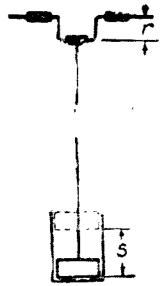


圖 14.

解. 最大擔負爲2,000磅,故由(b)式得其橫斷面積

$$A=\frac{2,000}{7,000-\frac{490\times320\times12}{12^3}}=0\cdot338\text{ 方吋.}$$

其自己重量所生之增長,在上下行時相同,故對動程之長短不生影響。

上行時由擔負所生之增長,

$$\delta_1=\frac{2,000\times320\times12}{0\cdot338\times30\times10^6}=0.757\text{ 吋.}$$

下行時由擔負所生之縮短,

$$\delta_2=\frac{200\times320\times12}{0\cdot338\times30\times10^6}=0.0757\text{ 吋.}$$

設曲柄之長爲 γ,活塞上行之動程爲 s_1,下行者爲 s_2,平均值爲 s

則　　　$s_1+\delta_1=2\gamma$,　而 $s_2+\delta_2=2\gamma$,

故　　　$\gamma=\frac{s_1+s_2}{4}=\frac{s}{2}+\frac{\delta_1+\delta_2}{4}$.

設 $\gamma=4$ 吋,則 $s_1=8-0.757=7.243$ 吋;

$$s_2=8-0.0757=7.929\text{ 吋.}$$

設平均動程 $s=8$ 吋,則

$$\gamma=\frac{8}{2}+\frac{0.757+0.0757}{4}=4.21\text{ 吋.}$$

4. 兩面作工(double acting)之壓水機,活塞杆直徑3吋,長

10 呎，活塞直徑 10 吋；每衝前面之壓力爲每方吋 1,000 磅，後面者每方吋 40 磅。求活塞杆中之最大應力，及往返一周，活塞杆之長度變遷。若動程爲 8 吋，求曲柄之長度。已知密度爲 486 磅每方呎，$E=30\times10^6$ 磅每方吋。　　答 10,700 磅每方吋；0.085 吋；4.021 吋

5. 鋼棒共長 480 呎，由五段組成，各段之長度相等。下端任重 $P=40,000$ 磅。若密度爲 490 磅每立方呎，實用張應力限爲 5,600 磅每方吋，求其重量。

解. 由 16 頁式(i)其最上段(第五段)之橫斷面積

$$A_5=\frac{40,000}{5,600}\times\frac{1}{\left(1-\frac{490\times480\times12}{12^3\times5\times5,600}\right)^5}=9.65\text{ 方吋}.$$

由式(j)得全棒重量

$$W=A_5\sigma_w-P=9.65\times5,600-40,000=14,000\text{ 磅}.$$

6. 若將題 5 之棒製成正確等強，其他情形皆相同，求其重量。

解. 由式(e)最上端之橫斷面積

$$A_n=\frac{40,000}{5,600}\times2.718^{0.2916}=9.56\text{ 方吋}.$$

由式(f)得棒之重量

$$W=9.56\times5,600-40,000=13,500\text{ 磅}.$$

其分成 5 段者，只較重 3.5% 耳。

7. 題 5 之棒，若用等長的 10 段製成，較等強者費料百分之幾？若用等徑者，費料百分之幾？　　答 1.7%；21.8%.

8. 橋墩任重 600,000 磅，高 120 呎，材料之密度每立方呎 160

磅，脊用壓應力限每方吋150磅。今製成等強之形狀，求所須材料之體積。 答5,360立方呎.

9. 題8之橋墩，若$E=4\times10^6$磅每立方吋，其他已知量皆仍舊。求其壓縮量。 答$\delta=0.^{\circ}54$吋.

5. 迴轉棒之抗張應力及變長* 迴轉之棒，自任一橫斷面至其外端的一段之離心力，須該橫斷面上之張應力以平衡之。若橫斷面不變，則其計算不難；若橫斷面不規則，則須圖解求之。

習 題 三

1. 圓鋼棒長24吋，繞其一端之垂直軸迴轉。已知密度$\gamma=0.283$磅每立方吋，$E=30\times10^6$磅每方吋，設其最大張應力爲11,000磅每方吋，求其每分鐘之轉數及變長。

解. 以ω代表角速度(以秒及半徑角論)，A爲棒之橫斷面積。距軸等於x處之小段dx之離心力

$$=\frac{\gamma A dx}{g}\omega^2 x;$$

由此橫斷面至外端共有之離心力

$$=\frac{\gamma A\omega^2}{g}\int_x^l x\,dx=\frac{\gamma A\omega^2}{g}\cdot\frac{(l^2-x^2)}{2}。$$

故此橫斷面上之張應力 $\sigma_x=\frac{\gamma\omega^2}{g}\cdot\frac{l^2-x^2}{2}。$

---

*本節選 J. Case 之 Strength of Materials, 15 節。

在 $x=0$ 處其值最大，　　$\sigma_{大}=\dfrac{\gamma\omega^2 l^2}{2g}$.

然則　　$$11,000=\frac{0.283\times 24^2\times\omega^2}{2\times(32.2\times 12)},$$

$$\therefore\ \omega=231\text{ 半徑角每秒，即 } 2,200\text{ 轉每分.}$$

小段 dx 之增長 $=\epsilon_x\cdot dx=\dfrac{\sigma_x}{E}dx=\dfrac{\gamma\omega^2}{2gE}(l^2-x^2)dx.$

故全棒共增之長　　$$e=\frac{\gamma\omega^2}{2gE}\int_0^l(l^2-x^2)dx=\frac{\gamma\omega^2 l^3}{3gE}$$

$$=\frac{0\cdot 283\times(231)^2\times 24^3}{3(32.2\times 12)\times 30\times 10^6}=0\cdot 006\text{ 吋.}$$

2. 飛機風輪之迴轉棒，每分 1,650 轉，長 50 吋，以核桃木製成，密度為 0.024 磅每立方吋，$E=1.4\times 10^6$ 磅每方吋，其距軸等於 x 處之橫斷面積 A 如下表：

x 吋	5	10	15	20	25	30	35	40	45	47.5	50
A 方吋	26	21.[illegible]	16.5	1[illegible].6	1[illegible].4	9.1	6.7	4.3	2.1	1.5	0

求其各橫斷面之張應力，及全棒之增長。

解. 距軸等於 x 處之橫斷面積設為 A_x，

其共任之拉力

$$=\frac{\gamma\omega^2}{g}\int_x^{50}A\cdot x\cdot dx=\frac{0\cdot 024}{32\cdot 2\times 12}\times\left(\frac{1650\times 2\pi}{60}\right)^2\int_x^{50}A\cdot x\cdot dx$$

$$=1\cdot 85\int_x^{50}A\cdot x\cdot dx.$$

而此處橫斷面上之張應力 σ_x，即其共任之拉力，以 A_x 除之也，故欲

求 σ_x，須將上式之 $A\cdot x$ 列入表中第三列，譜爲曲線．由 $x=50$ 時起至 x 等於任一值時，該曲線下之面積，按 A 與 x 之比例尺校正者，卽示 $\int_x^{50} A\cdot x\cdot dx$，卽入表之第四列．

x 吋	5	10	15	20	25	30	35	40	45	47.5	0
A 方吋	28	1.5	16.5	13.6	11.4	9.1	6.7	4.3	2.4	1.5	0
$A\cdot x$	140	215	248	272	285	273	235	172	108	71.2	0
$\int_x^{50} A\cdot x\cdot dx$	3,669	3,300	7,400	3,120	4,720	3,300	2,040	1,040	32	100	0
σ_x 磅/方吋	572	714	830	830	763	671	562	458	243	23	0

將第四列之數乘以 1.85，再以 x 對應之面積除之，卽得 σ_x，列入表之第五列，且將其譜於圖中，得其最大值約 840 磅每方吋，在距迴轉

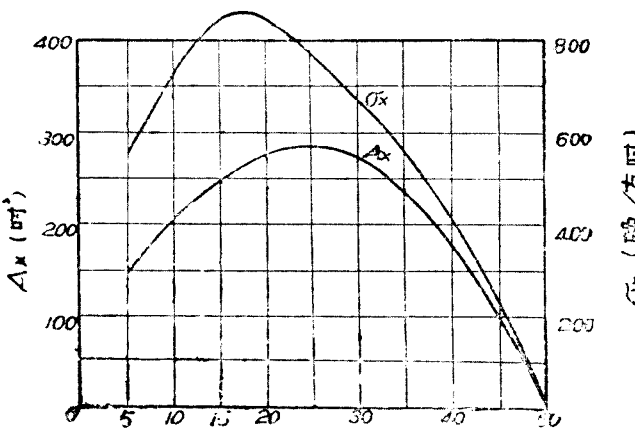


圖 15.

軸 1.75 吋之橫斷面上。

全棒之增長 $=\frac{1}{E}\int_{5}^{50}\sigma_x\cdot dx$，卽 σ_x 曲線下之面積(按 x 與 σ_x 比例尺校正者)，以 E 除之也。由圖得 σ_x 曲線下之面積爲 27,320 磅/吋，

故　　全棒之增長 $=\frac{27,320}{1,400,000}=0.02$ 吋.

6. 迴轉圓箍之張應力與形變　設有薄筒，其平均半徑爲 r，其厚爲 h。厚度較半徑小，方稱爲薄筒。今沿半徑加以平均分布之壓力(向內或向外)，如蒸汽壓力，或繞其中軸迴轉之離心力，其每方吋上者，設爲 p 磅。含幾何中軸之剖面曰縱剖面(diametral 或 longitudinal section)。欲求縱剖面上之應力，當論半個圓筒之平衡。其對中心角 $d\phi$ 長 l 之窄條共受之沿徑壓力 $=plrd\phi$.

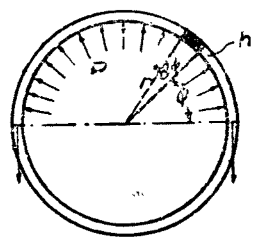


圖 16.

其垂直縱剖面之分力 $=plr\sin\phi\cdot d\phi$.

就半筒而積分之得　　$plr\int_0^{\pi}\sin\phi\, d\phi=2r\cdot l\cdot p.$

其平行縱剖面者 $=plr\cos\phi\cdot d\phi$.

就半筒而積分之得　　$plr\int_0^{\pi}\cos\phi\, d\phi=0.$

故知兩個縱剖面 lh，只任張應力 σ，且因圓筒甚薄，可設爲平均分配。

故　　$2lh\sigma=2rlp$，　　$\therefore\quad \sigma=\frac{pr}{h}$　　(5)

此謂之環周張應力（hoop stress）。

圓周應變，
$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{pr}{Eh}.$$

圓周共增長
$$e = \frac{pr}{Eh} \times 2\pi r \qquad (6)$$

半徑增長者＝圓周者除以 $2\pi = \frac{pr}{Eh} \cdot r$.

故直徑應變亦等於 $\frac{pr}{Eh}$.

若用於迴轉之圓箍，則

$$p = \text{每方吋之離心力} = \frac{\gamma(h \times 1)}{g} \omega^2 r.$$

故由公式(5)得迴轉所生之環周張應力

$$\sigma = \frac{\gamma \; r}{g} \qquad (7)$$

習 題 四

1. 火車製曳輪外箍鋼皮，其內直徑較輪之直徑 d 小 $\frac{1}{1500}d$. 若 $d = 60$ 吋，鋼皮之厚度 $h = \frac{3}{4}$ 吋，將鋼皮加熱而箍於輪上。設輪徑不變，求(a)鋼皮之增長，(b)其張應力，及(c)其與輪表間之壓力。

答 (a) 0.126吋；(b) 20,000 磅每方吋；(c) 500 磅/方吋.

2. 上題之車輪若以每時 60 哩之速度開行，求鋼箍與輪間之壓力。

7. 平衡不能解析之問題　用小段材料組成之物，曰結構(framed structure)。其必須鉚接而後方能保持其原形者，曰固定結構(rigid frame)；其用活軸管束，即能保持其原形者，曰針管結構(pin connected truss)。各段材料相接之處曰接點(joint)，二接點間者爲一構件(member)。各構件之結合成三角形，或四邊形而有二邊不能轉動者，則爲自足穩定之針管結構(simply firm structure)。若擠負加於各接點上，則各構件內之其應力 s 非簡單之拉力即壓力，易由平衡求得之。再由公式(4)，可求各構件之變長

$$e=\frac{Sl}{AE}.$$

雖然，靜力學之平衡法尚遺留兩個不能解決之問題：

(1)結構上各接點之位移，本非平衡所能規定者。簡單者，其接點之位移與其各構件變長之關係，常可由幾何圖形看出，如習題一題2及題4.

(2)結構之含多餘構件者(redundant member)，其未知之應力較多於平衡式，故亦不能解。其他相關之式，須由接點之位移與各構件應力之關係考求之。

惟以結構之形式各殊，此種關係亦不能概論。此處數節，只討論其易由幾何圖形看出者，而示其解決之法。第10及第11節論複雜結構之解析法。其他方法俟諸第十二章。

茲以圖17爲例，中間之鋼絲長爲 l，橫斷面積爲 A_s。兩旁者爲銅絲，皆傾 α 角，其橫斷面積爲 A_c。在結合點 O 懸重 P。今求三絲分任之拉力如下:

以結合點 O 爲自由體，由 $\Sigma F_X=0$ 可知二銅絲之拉力皆等於 Y.
由 $\Sigma F_Y=0$，得鋼絲中拉力，

$$X=P-2Y\cos\alpha \tag{a}$$

X 與 Y 皆屬未知量，不能解，故須考求其變長之關係如下:

$$鋼絲實有之變長=OO_1=e_s=\frac{Xl}{A_sE_s};$$

$$銅絲實有之變長=O_1F=e_c=\frac{Y}{A_cE_c}\cdot\frac{l}{\cos\alpha}.$$

因變長皆甚小，故 OF 可認爲垂直 O_1D，而 $OO_1F=\alpha$.

由圖可知 $$e_c=e_s\cos\alpha;$$

或 $$\frac{Xl}{A_sE_s}\cos\alpha=\frac{Yl}{A_cE_c\cos\alpha}.$$

$$\therefore\quad\frac{Y}{X}=\frac{A_cE_c}{A_sE_s}\cos^2\alpha \tag{b}$$

代入(a)式得 $$X=\frac{P}{1+2\frac{A_cE_c}{A_sE_s}\cos^3\alpha} \tag{c}$$

既知 X 可求 e_s，即結合點之位移 δ 也.

若三絲等徑且同質，則 $$X=\frac{P}{1+2\cos^3\alpha},$$

而 $$\delta=\frac{Pl}{AE(1+2\cos^3\alpha)}.$$

若 α 復等於 0°，則 $$X=\frac{P}{3};$$

(b)式之 $Y=X=\dfrac{P}{3}$；　　而　$\delta=Pl/(3AE)$.

再以圖 18 爲例：棒之兩端固定不能移動，中部任擔負 P. 以

R_2 示下端支持力，以 R_1 示上端者。

由 $\Sigma F_Y=0$，得 $$R_1+R_2=P \tag{d}$$

第二個相關之式，由兩段之變長考究之：因上下端皆不能動，故下段 b 之壓縮者必等於上段 a 之拉長者，即

$$\frac{R_1 a}{AE}=\frac{R_2 b}{AE} \qquad \therefore \quad \frac{R_2}{R_1}=\frac{a}{b} \tag{e}$$

解(d)及(e)得 $$R_1=\frac{b}{a+b}P; \qquad R_2=\frac{a}{a+b}P. \tag{f}$$

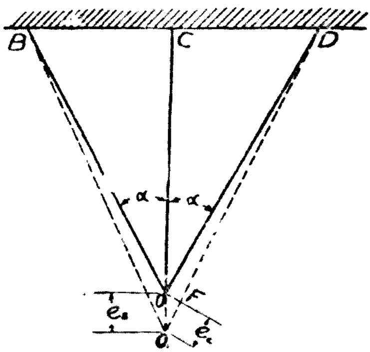


圖 17.

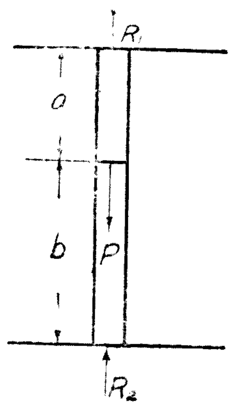


圖 18。

習題五

1. 銅筒內裝鋼柱（圖 19），兩端相齊，以任壓力 10,000 磅。設銅管之外直徑 $D=8$ 吋，內直徑 $d=4$ 吋＝鋼柱之直徑，求二者之壓應力。已知銅之 $E=16\times10^6$ 磅每方吋；鋼者為 30×10^6 磅每方吋。

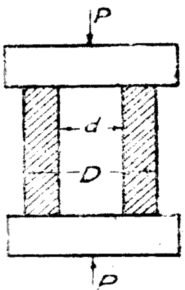


圖 19.

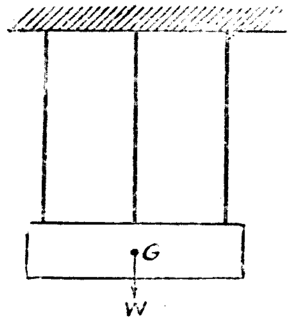


圖 20.

解．　每一個柱體爲他個之多餘者．以 σ_s 代鋼柱之壓應力，σ_e 代銅筒壓應力。

則　$$\frac{\pi}{4}d^2\sigma_s+\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)\sigma_e=P=100,000\text{ 磅}\qquad\text{(a)}$$

又二者之變長相等，即　$$\frac{\sigma_s}{E_s}\cdot l=\frac{\sigma_e}{E_e}\cdot l.$$

或　$$\frac{\sigma_s}{\sigma_e}=\frac{E_s}{E_e}=\frac{30}{16}\qquad\text{(b)}$$

解(a)及(b)，得　$\sigma_e=1,630$ 磅每方吋；　$\sigma_s=3,060$ 磅每方吋．

2．　鋼骨混凝土之柱頂，任重 60,000 磅，鋼骨橫斷面積相當於混凝土之 $\frac{1}{10}$ 倍；求二者分任之擔負。

3．　圖 20 示等長三絲，共懸重體 W，其結束點對物體之重心爲對稱者，中間者爲鋼絲，兩旁者爲銅絲，其橫斷面積相等。求三者之張應力．

4．　正方几四角各有一足，皆直立。兩足間距離爲 a．在對角線

上距中心 e 處有重體 P. 求其各足之支持力.

解. 由對稱可知足 2 與 4 之支持力相等, 皆代以 Y.

故
$$X+2Y+Z=P \tag{a}$$

又以 2－4 爲軸論力矩, 則
$$(Z-X)\frac{\sqrt{2}}{2}a=Pe \tag{b}$$

設几面極勁, 各足壓縮之後, 仍爲平面, 則足 2 或 4 之壓縮者, 必爲1與 3 者之平均.

故
$$\frac{Yl}{AE}=\frac{X+Z}{2}\cdot\frac{l}{AE}, \qquad 即 \quad X+Z=2Y. \tag{c}$$

由 (c) 與 (a) 得
$$Y=\frac{P}{4}.$$

以此代入 (b) 與 (c) 聯立而解之 得
$$X=P\left(\frac{e}{\sqrt{2}a}-\frac{1}{4}\right); \qquad Z=P\left(\frac{e}{\sqrt{2}a}+\frac{1}{4}\right).$$

若 $e>\frac{\sqrt{2}}{4}a$, 則 X 得負. 若足與地板相連則足 1 任拉力. 如不相連, 則 $X=0$, 而足 1 無作用, 其 Y 與 Z 由平衡式 (a) 與 (b) 卽可解求.

5. 上題之几以對角線 1－3 爲 X 軸, 以對角線 2－4 爲 Y 軸; 設擔負加於 $x=\frac{a}{4}$, $y=\frac{a}{5}$ 處, 求各足之支持力.

解. 經擔負點作一直線交 X 軸於 e_x, 交 Y 軸於 e_y. 將 P 分解爲經此二點之分力 P_x 及 P_y, 則
$$P_x\cdot e_x=\frac{Pa}{4}, \qquad 而 \quad P_y\cdot e_y=\frac{Pa}{5}.$$

因
$$P_x+P_y=P. \qquad \therefore \quad \frac{a}{4e_x}+\frac{a}{5e_y}=1.$$

如　$e_x=\frac{a}{2}$，　則　$e_y=\frac{2}{5}a$，　而　$P_x=\frac{P}{2}$，$P_y=\frac{P}{2}$．

以 P_x 及 e_x 代入上題之結果式中；再以 P_y 及 e_y 代入 以求各足之部分支持力，相加即得之矣。

． 圖 23 示矩形結構 其各段材料相同，兩個直立杆橫斷面積各為 A，其餘四段者各為 A_1。以任圖示之壓力 P，求其各段之分任之擔負。

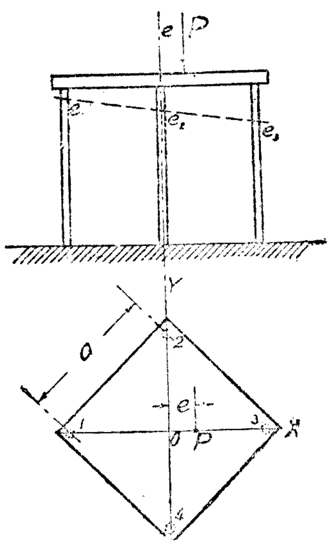


圖 21.

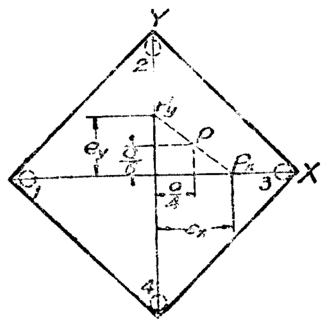


圖 23.

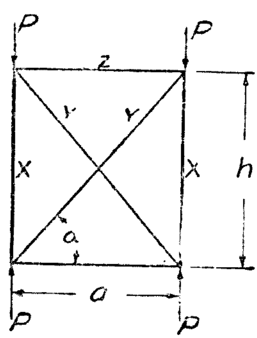


圖 22.

解. 以 X 代直立杆之壓力，Y 代斜杆之壓力，Z 代橫杆之拉力。論其一角之平衡：

由 $\Sigma F_Y=0$，得 $$Y\sin\alpha+X=P \tag{a}$$

由 $\Sigma F_X=0$，得 $$Z=Y\cos\alpha \tag{b}$$

由對稱可知至形變之後，各角仍爲 $90°$。故

$$\left(h-\frac{Xh}{AE}\right)^2+\left(a+\frac{Za}{A_1E}\right)^2=\left(\sqrt{a^2+h^2}-\frac{Y\sqrt{a^2+h^2}}{A_1E}\right)^2$$

或略去變長之平方各項，則得

$$\frac{Y}{A_1}=\frac{X}{A}\sin^2\alpha-\frac{Z}{A_1}\cos\alpha \tag{c}$$

解(a)，(b)，(c)三式，得

$$X=\frac{P(1+\cos^3\alpha)}{\frac{A_1}{A}\sin^2\alpha+1+\cos^3\alpha};\quad Y=\frac{P\sin\alpha}{\frac{A}{A_1}(1+\cos^3\alpha)+\sin^3\alpha}.$$

7. 銅管之內有鋼釘，管之橫斷面積2方吋，釘之橫斷面積1方吋，長度皆30吋。釘之一端有螺旋紋，其紋距 $\frac{1}{8}$ 吋。今將螺旋帽緊 $\frac{1}{4}$ 周，求二者所生之應力。

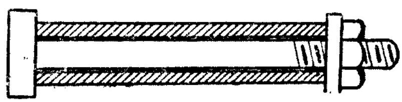


圖 22.

解. 以 Q 代其互相作用之力，對管爲壓，對釘爲拉。平衡條件只知二者相等而已。其他相關之式，由變長考之：銅管被壓而縮短者 $\frac{Ql}{A_cE_c}$，鋼釘被拉而增長者 $\frac{Ql}{A_sE_s}$。二者之一端相差，爲此二式之合，故釘帽必緊進此程，以保持其與管端相接也。於是

$$\frac{Ql}{A_cE_c}+\frac{Ql}{A_sE_s}=\frac{1}{4}p.$$

$$\therefore \quad Q=\frac{P}{4l\left(\frac{1}{A_cE_c}+\frac{1}{A_sE_s}\right)}$$

$$=\frac{10^6}{32\times 30\times\left(\frac{1}{2\times 16}+\frac{1}{30}\right)}=16,100 \text{ 磅.}$$

故鋼釘內之張應力 $\sigma_s=16,100$ 磅每方吋；而銅管內之壓應力 $\sigma_c=8,050$ 磅每方吋。

8. 上題之釘帽既緊 $\frac{1}{4}$ 周後，若於螺釘之兩端各加拉力 $P=5,000$ 磅，則二者之應力各生何變遷？

解. 設釘內共拉力 Q 增加者為 X，而管內之共壓力減少者為 Y。

則論釘帽之平衡，由 $\Sigma F_X=0$ 得

$$(Q-Y)+P=Q+X. \qquad \therefore \quad X+Y=P \tag{a}$$

又二者增減之變長相等，即

$$\frac{Xl}{A_sE_s}=\frac{Yl}{A_cE_c} \tag{b}$$

解(a)與(b)，可求 X 與 Y，及其相應之應力變遷。

9. 空筒 C 之兩端各有蓋 A 及 B，以螺旋釘管合之。管與釘之材料相同，橫斷面積相等。在管合之初，緊釘帽，使釘內拉力為 5 短

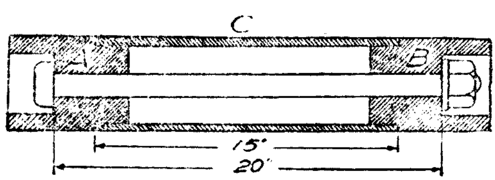


圖 2.

噸，用時則 A 與 B 各任拉力 3 短噸。求用時釘內之拉力。

答 $6\frac{2}{7}$ 短噸。

10. 圖 26 之棒上下端固着於基礎之上不能動移。在 m 與 n 二橫斷面上，加下向之力 P_1 與 P_2，求其上下端之支持力。

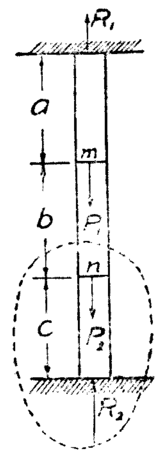


圖 26.

解. 由平衡得 $$R_1+R_2=P_1+P_2 \qquad (a)$$

設棒段之長度自上而下，為 a, b, c.

則上段任拉力 R_1，其增長 $=\dfrac{R_1a}{AE}$.

下段任壓力 R_2，其縮短 $=\dfrac{R_2c}{AE}$.

$$\text{中段任壓力}=R_2-P_2=P_1-R_1,$$

$$\text{其縮短}=\frac{(P_1-R_1)b}{AE}.$$

因全長不變，故 $$R_1a=R_2c+(P_1-R_1)b \qquad (b)$$

解(a)與(b)，得 $$R_1=\frac{P_1(b+c)+P_2c}{a+b+c};$$

$$R_2=\frac{aP_1+(a+b)P_2}{a+b+c}.$$

11. 試用第 7 節式(f)，分別計算 P_1 與 P_2 各需之支持力，然後合併，以校對上題之解。

12. 圖 27 之結構，對 OA 為對稱，求其各杆分任之擔負。

答 $OA=0;\ OC=OB=\pm\dfrac{P}{2\sin\alpha}$.

13. 圖 28 之 A 與 B 為二堅強之橫棒，用以連接三個平行縱

杆，三者之橫斷面相等，材料相同。中間縱杆上有軸承 C。安裝以後，各處皆無應力。今以軸穿於 C 承，在橫棒 B 上懸重 1,000 磅，求兩旁縱杆之拉力，及中間者自 C 以下之拉力與其自 C 以上之壓力

答兩旁者各 214 磅；中間者 C 以下 572 磅.

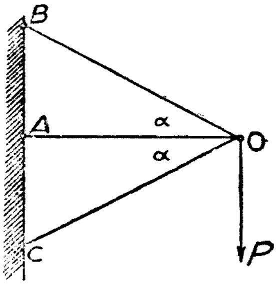


圖 27.

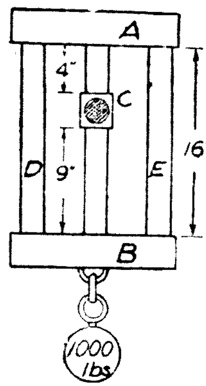


圖 28.

8. 安裝不正及溫度變遷所生之應力　構件之長度若與原計畫不合，則於安裝以後，常生互相作用之力，故雖無擔負，亦有原有內力（initial stress）。此力在互相作用之構件中，有拉有壓，由平衡只知其相等而已，故關於原有內應力之計算亦多屬平衡不能解決之問題，仍須按結構之幾何形及材料之性質而考求其各部分變長之關係也。

例如圖 17 中間鋼杆若置成 $l+a$，而兩旁者恰為 $\dfrac{l}{\cos\alpha}$。則安裝之後，中間者受壓力 X，而兩旁者受拉力 Y。由平衡只知

$$2Y\cos\alpha = X. \tag{a}$$

今中間鋼杆被壓縮者 $$e_s=\frac{X(l+a)}{A_sE_s}\doteqdot\frac{Xl}{A_sE_s};$$

而兩旁銅杆被拉長者 $$e_c=\frac{Y}{A_cE_c}\cdot\frac{l}{\cos\alpha}.$$

由圖，可知 $$e_s+\frac{e_c}{\cos\alpha}=a,$$

或 $$\frac{Xl}{A_sE_s}+\frac{Yl}{A_cE_c\cos^2\alpha}=a. \tag{b}$$

解(a)與(b)，得 $$X=\frac{a}{l\left(\frac{1}{2A_cE_c\cos^2\alpha}+\frac{1}{A_sE_s}\right)}.$$

若用不同質之材料製爲結構，則後來溫度改變，其脹縮不等，恰如安裝時之長度不合者，亦生互相拉壓之力。例如圖 17，在 t_0 時安裝正好，均無應力，但溫度增至 t，則鋼杆將脹 $\delta_s=\alpha_s(t-t_0)l$，而銅杆將脹 $\delta_c=\alpha_c(t-t_0)\frac{l}{\cos\alpha}$. 今以其下端相結，故鋼杆受拉力 X 而增長 $e_s=\frac{Xl}{A_sE_s}$；而銅杆受壓力 Y 而縮短 $e_c=\frac{Y}{A_cE_c}\cdot\frac{l}{\cos\alpha}$.

由圖 29，可知 $$\frac{\delta_c}{\cos\alpha}-\delta_s=e_s+\frac{e_c}{\cos\alpha},$$

或 $$\frac{Y}{A_cE_c}\cdot\frac{l}{\cos^2\alpha}+\frac{Xl}{A_sE_s}$$
$$=\left(\frac{\alpha_c}{\cos^2\alpha}-\alpha_s\right)(t-t_0)l.$$

以(a)式之 Y 代入此式，可求 X.

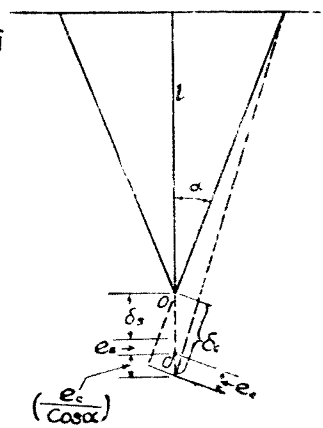


圖 29.

習 題 六

1. 圖 24 之螺旋既已扭緊，若溫度由 t_0 增至 t，求釘與管內應力之變遷。

解. 因銅之熱脹係數 α_c 較大於鋼之熱脹係數 α_s。故溫度增高，則銅管受壓而鋼杆受拉。

以 X 代此新生之力，則

$$\text{銅管共增之長} = \alpha_c(t-t_0)l - \frac{Xl}{A_cE_c};$$

而

$$\text{鋼釘共增之長} = \alpha_s(t-t_0)l + \frac{Xl}{A_sE_s}.$$

此二者相等，故

$$X = \frac{(\alpha_c-\alpha_s)(t-t_0)}{\frac{1}{A_cE_c}+\frac{1}{A_sE_s}}.$$

既知 X，可求其應力之變遷。

2. 以兩條鋼板夾一銅板，兩端固結之。若溫度由 t_0 增至 t，求其所生之應力。

3. 圖 19 之複棒，溫度增若干度則鋼柱不任擔負？已知每華氏一度，鋼之熱脹係數 $\alpha_s = 70\times10^{-7}$；銅之熱脹係數 $\alpha_c = 92\times10^{-7}$。

解.

$$(\alpha_c-\alpha_s)(t-t_0) = \frac{4P}{\pi(D^2-d^2)E_c}.$$

$$\therefore\ t-t_0 = 75.4°\text{F}.$$

4. 圖 23 之矩形結構設無擔負。只上方橫杆之溫度由 t_0 增至 t 度，求其各構件內之應力。

9. 冷縮之複薄筒 不同質之複薄筒，其一之內直徑較其他之外直徑爲小，若將前者燒熱，可將後者插入，俟冷卻後卽可箍合，兩者中間生相互之壓力。外筒因內壓而直徑增長，而生張應力；內筒因外壓而直徑縮短，而生壓應力。相互壓力 p 及二筒之應力爲三個未知量。由平衡只能得公式 (5)，示相互壓力與每筒應力之關係而已，故亦爲平衡不能解析之問題也。其他相關之式則由變長求之，蓋外筒直徑之增長者與內筒直徑之縮短者相加，必得其原來直徑之差。

習　題　七

1. 複薄筒外筒鋼質，內筒銅質。初製之時，外筒內徑較內筒外徑小 δ。將鋼筒燒熱，然後插入銅筒，俟冷而箍合之。設其接觸面之直徑爲 d，鋼筒之厚度爲 h_s，銅筒之厚度爲 h_c。此二者較 d 皆甚小，故鋼筒與銅筒之平均直徑皆可約作 d。複筒之長度可設爲 1；試求其相互壓力及應力。

解. 設相互壓力爲每方吋 p 磅，則由公式(5)：

銅筒壓應力，　$\sigma_c = \dfrac{pd}{2h_c}$；

又鋼筒張應力，　$\sigma_s = \dfrac{pd}{2h_s}$ 　(a)

（因二者皆甚薄，故其平均直徑皆約作 d。關於厚筒可參看著者之進級材料力學）。

然則銅筒直徑之縮短，$e_c=\frac{\sigma_c}{E_c}\cdot d=\frac{pd^2}{2E_ch_c}$；

而鋼筒直徑之增長，$e_s=\frac{\sigma_s}{E_s}\cdot d=\frac{pd^2}{2E_sh_s}$．

此二者相加，必等原來直徑之差，即

$$\delta=\frac{pd^2}{2}\left(\frac{1}{E_ch_c}+\frac{1}{E_sh_s}\right) \qquad \text{(b)}$$

由式(b)，得 $p=\frac{2\delta}{d^2}\cdot\frac{E_ch_cE_sh_s}{E_ch_c+E_sh_s}$． (c)

將此 p 代入(a)式，則 $\sigma_c=\frac{\delta}{d}\cdot\frac{E_cE_sh_s}{E_ch_c+E_sh_s}$；

$$\sigma_s=\frac{\delta}{d}\cdot\frac{E_sE_ch_c}{E_ch_c+E_sh_s}. \qquad \text{(d)}$$

2. 上題之複筒，在平常溫度時，外筒內徑較內筒外徑爲小，但不知其差（即不知 δ 也），只知將外筒燒高 t 度，則能相容；求冷卻後之相互壓力及每筒之應力。

3. 設銅筒在外，鋼筒在內；雖在平常溫度 t_0 時不能相容，但設將二者皆燒熱至 t 度，則能插入，求冷卻後之相互壓力，及每筒之環周應力。

解． 插入以後，因溫度降低，故外筒直徑將縮 $\alpha_c(t-t_0)d$；但壓於內筒，必少縮 $\frac{pd^2}{2E_ch_c}$．故外筒直徑實縮 $\alpha_c(t-t_0)d-\frac{pd^2}{2E_ch_c}$．

內筒直徑將縮 $\alpha_s(t-t_0)d$；但受外筒壓迫，必多縮 $\frac{pd^2}{2E_sh_s}$：故其直

徑實縮 $\alpha_s(t-t_0)d+\dfrac{pd^2}{2E_sh_s}$. 自熱至冷，二筒常相接觸，故其直徑實縮之量必相等。消去 d，得

$$\alpha_s(t-t_0)+\frac{pd}{2E_sh_s}=\alpha_c(t-t_0)-\frac{pd}{2E_ch_c}.$$

$$\therefore\quad p=2\,\frac{(\alpha_c-\alpha_s)(t-t_0)}{d}\cdot\frac{E_ch_c\cdot E_sh_s}{E_ch_c+E_sh_s}.$$

或將題 1 之結果式(c) 之 δ，換爲$(\alpha_c-\alpha_s)(t-t_0)d$ 亦可。既知 p 可求其應力。

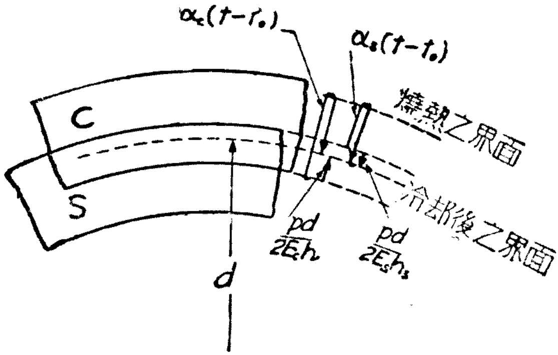


圖 30.

4. 題 3 之筒內充每方吋 100 磅之水。內直徑 $d_1=4$ 吋，$h_s=0.1$ 吋，$h_c=\dfrac{E_s}{E_c}\cdot h_s=\dfrac{15}{8}\times0.1$ 吋. 求二筒之環周張應力。

解. 設 σ_c 爲銅外筒多增之張應力，σ_s 爲鋼內筒之所增者。則按半個複筒之平衡，得

$$1\cdot h_c\cdot\sigma_c+1\cdot h_s\cdot\sigma_s=\frac{1}{2}p\cdot d_1\cdot 1;$$

或
$$\frac{15}{8}\sigma_c+\sigma_s=2000. \tag{a}$$

因二筒增多之環周應變相等，故

$$\frac{\sigma_c}{E_c}=\frac{\sigma_s}{E_s};\qquad 或\quad \frac{\sigma_c}{\sigma_s}=\frac{8}{15} \tag{b}$$

解(a)與(b)得 $\sigma_c=533$ 磅每方吋； $\sigma_s=1,000$ 磅每方吋。

5. 題1之複筒，若繞其中軸每分鐘作 n 轉，求其多生之環周張應力。

解. 因銅內筒之密度大且 E 小，故迴轉之際，每欲較外筒多脹，而壓於外筒。以 p 代其相互之壓力，則銅內筒因外壓力而生之環周壓應力由公式(5)為 $\frac{pd}{2h_c}$；

銅內筒因離心力而生之環周張應力，由公式(7)為

$$\frac{\gamma_c h_c}{g}\left(\frac{n\pi}{30}\right)^2\cdot\left(\frac{d-h_c}{2}\right)^2.$$

故

$$實有之環周張應力=\frac{\gamma_c h_c}{g}\left(\frac{n\pi}{30}\right)\left(\frac{d-h_c}{2}\right)^2-\frac{pd}{2h_c}.$$

而

$$實有之環周應變=\frac{1}{E_c}\left[\frac{\gamma_c h_c}{g}\left(\frac{n\pi}{30}\right)\left(\frac{d-h_c}{2}\right)^2-\frac{pd}{2h_c}\right].$$

同法得

$$外筒實有之環周應變=\frac{1}{E_s}\left[\frac{\gamma_s h_s}{g}\left(\frac{d+h_s}{2}\right)+\frac{pd}{2h_s}\right].$$

令此二者相等，可由已知之 γ, h, E, d，以求 p 及 σ。

6. 題3之複筒，係燒高至 100°C 而插合者，設 $h_c=h_s$；又每磅

氏一度，銅之熱脹係數 $\alpha_c=18\times10^{-6}$，鋼之熱脹係數 $\alpha_s=11\times10^{-6}$．求冷卻後銅內筒之環周張應力。　答 2,300 磅每方吋．

7．題 5 之複筒，當縮箍以後，銅內筒之環周壓應力為 σ_0；又 $h_c=h_s$，$E_s=2E_c$．問每分鐘若干轉時，銅內筒之應力恰等於零？

答每分轉數 n 須合 $2\sigma_0=\left(\frac{2\pi n}{60}\right)^2\left[\frac{\gamma_c}{g}\left(\frac{d-h_c}{2}\right)^2+\frac{\gamma_s}{g}\left(\frac{d+h_s}{2}\right)\right]$．

8．直徑 6 吋厚 $\frac{1}{8}$ 吋之赤銅筒，外纏直徑 0.072 吋之鋼絲，絲中拉力為 2.5 磅。今筒任內壓力每方吋 40 磅，設(a)筒中流體之溫度與纏絲之時約相同，(b)高 200°C；各求筒與絲之應力。

解． (a)．鋼絲之橫斷面積

$$=\frac{\pi}{4}(0.072)^2=0.00406\text{ 方吋}.$$

$$\text{其原有之張應力}=\frac{2.5}{0.00406}=616\text{ 磅每方吋}.$$

$$\text{每吋共纏鋼絲之環數}=\frac{1}{0.072}=13.9;$$

$$\text{此諸環共任之拉力}=13.9\times2.5=34.7\text{ 磅}.$$

此拉力在銅筒內環周壓應力

$$=\frac{34.7}{1\times\frac{1}{8}}=278\text{ 磅每方吋}.$$

一吋長之筒受水壓力而生兩剖之力

$$=400\times6\times1=2,400\text{ 磅}.$$

設 σ_c 爲銅筒增多之張應力，σ_s 爲鋼絲內所增者。則

$$\frac{1}{8}\times 1\times \sigma_c+13.9\times 0.00406\times \sigma_s=\frac{2400}{2};$$

或 $$\sigma_c+0.4512\sigma_s=9,600 \qquad (a)$$

筒與絲增多之應變相等，即 $\dfrac{\sigma_c}{E_s}=\dfrac{\sigma_s}{E_s}$.

$$\therefore \quad 2\sigma_c=\sigma_s \qquad (b)$$

解(a)與(b)，得 $\sigma_c=5,040$ 磅每方吋； $\sigma_s=10,080$ 磅每方吋.

故銅筒內實有之張應力

$$=5,040-278=4,760 \text{ 磅每方吋};$$

鋼絲中實有之張應力

$$=10,080+616=10,700 \text{ 磅每方吋}.$$

(b). 由溫度增高，銅筒內多生之壓應力設爲 σ_c'，而鋼絲多任之張應力設爲 σ_s'

$$\text{銅筒直徑實有之增長率}=20\ \alpha_c-\frac{\sigma_c'}{E_c};$$

$$\text{鋼絲環之直徑實有增長率}=0\ \alpha_s+\frac{\sigma_s'}{E_s}.$$

此二者相等，故 $$2\sigma_c'+\sigma_s'=42,000 \qquad (c)$$

$$\text{一吋銅筒共增之壓力}=\frac{1}{8}\times 1\times \sigma_c';$$

又 13.9 環鋼絲共增之拉力 $=13.9\times 0.00406\times \sigma_s'$.

由平衡，此二者相等，故 $\sigma_c'=0.4512\sigma_s'$. (d)

解(c)與(d)，得 $\sigma_c'=9,940$ 磅每方吋；

$\sigma_s'=22,100=$ 磅每方吋.

故此時鋼筒實任之壓應力

$=9,940-4,760=5,180$ 磅每方吋.

鋼絲實任之張應力

$=22,100+10,700=32,800$ 磅每方吋.

10. 應用位移圖求結構各接點之位移* 在習題一題 4，曾用位移圖求簡單結構接點之位移，今當重申此法，而廣其用於複雜之結構。結構如無多餘構件，則易由平衡求各構件之內應力 S，更由公式(4)可求其變長 $e=\frac{Sl}{AE}$. 惟(1)結構各接點之位移，與(2)多餘構件之內應力，皆為平衡之所不能解析者，但皆用位移圖求之。

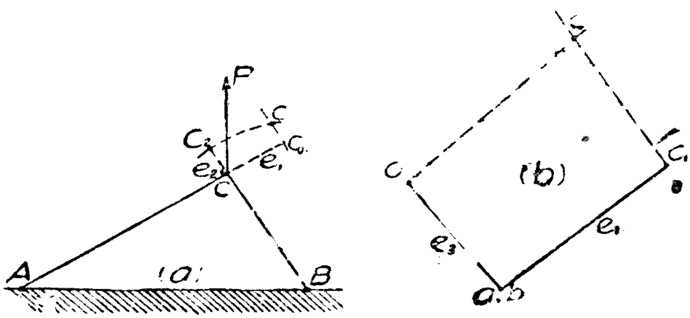


圖 31.

圖 31 (a)示 ABC 三角結構，其 AB 之方位與長度皆不變。設於 C 點加擔負 P，先求二杆之內應力 S 及變長 e，然後以 A 及 B 為中心，以二杆後來之長 AC_1 及 BC_2 為半徑，分別作弧，可交出 C 後來之位置。此法固甚正確，惟變長較原長甚小，故圖雖甚大，而 C 點

* 本節選 J. Case 之 Strength of Materials, 34 節.

位移猶未能顯示，是以改作(b)圖。其法以 a 示 A 點，平行 AC 作 ac_1 以示 e_1。因 B 點對 A 點不動，故 a 點亦可示 B 點之位置，圖中兆註以 b。然後平行 BC，作 bc_2 以示 e_2。自 c_1 及 c_2 各作線垂直 ac_1 及 bc_2，以代(a)圖之弧，亦約交得 C 點之位移 ac。如是，則位移圖（即圖(b)）可任意放大若干倍，而無與於原長矣。

作位移圖應注意：(1)因 e_1 爲 AC 之增長，故自 a 點按圖(a)由 A 向 C 之方向繪之；若係縮短，則須由 C 向 A 繪之。(2)較複雜之結構，宜先選其不動之接點以爲基點，及一不變方位之構件以爲基線，而作其最接近的三角結構之位移圖；既得此三角結構之新位置，即可作其相鄰三角結構之位移圖，如此推及全體，可求得其接點對該基點與基線之位移（displacement 或稱偏度 deflection）矣。

例題． 圖 32 示飛機翼右半之結構。各接點之擔負爲氣流之浮力（即吹於翼上之直上分力），今假設其最大值爲圖示之平均者 5 倍，求 G 與 F 對 C 點之位移。

解． 以 B 及 C 爲二支點，擬用結構肱梁之解法，先求各構件之內應力 S，列入下表第二行。然後列入其餘各行。

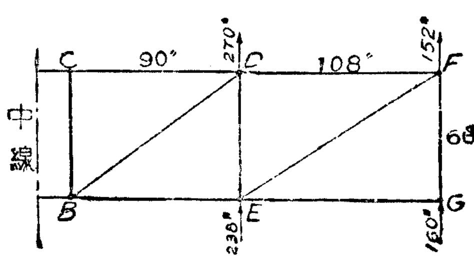
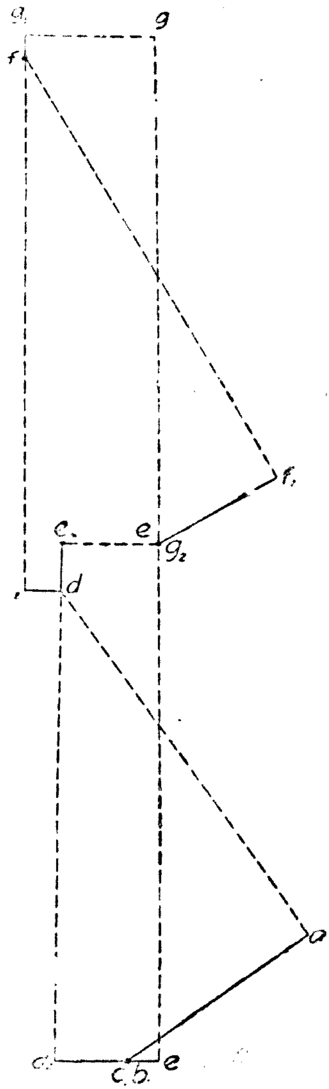


圖 32.

作位移圖如下:(1)以C爲基點,BC爲基線,先作BCD三角結構之位移圖:因B對C不動,故在位移圖(圖33),b點合於c點。由c按圖32由D向C之方向作cd_2,以示CD之壓縮,由b按B向D之方向作bd_1,以示BD之伸長;由d_1及d_2各作垂線交出接點D之新位置d。(2)以b及d爲起點,作DBE三角結構之位移圖:卽自b點按BE之方向作be_1,以示BE之伸長,由d按ED之方向作de_2,以示DE之壓縮;由e_1及e_2各作垂線交出E點之位置e。(3)以d及e爲起點,作DEF之位移圖,遂得F點之新位置f。(4)以e及f爲起點作EFG之位移圖,因EG之變長$=0$,故g_2合於e點,而垂直eg_2之線卽垂直EG而直上也;如此遂得G點之新位置g。(5)由d量至經b(卽c)之水平線,卽得D點之直上位移$=0.638$吋,由f量至經b之水平線,得F點之直上位移$=1.358$吋;由g量至該水平線,得G點之直上位



1公分示0.01吋　　圖 35.

移＝1.378 吋；由 b 水平量至 f 與 g 之垂線足，得 F 點水平左移＝0.1475 吋，而 G 點水平右移＝0.04 吋。

構　件	內應力 S 磅	長度 l 吋	E 磅每方吋	横斷面 A 方吋	$e=\frac{Sl}{AE}$	$5\times\frac{Sl}{AE}$
CD	−1,650	90	1.6×10^6	4.8	−0.0193	−0.0965
DF	− 512	108	1.6×10^6	3.4	−0.0102	−0.0510
BE	+ 512	90	1.6×10^6	3.5	+0.0083	+0.0412
EG	0	108	1.6×10^6	3.5	0	0
DE	− 550	66	1.6×10^6	2.1	−0.0108	−0.0540
FG	− 160	66	1.6×10^6	1.65	−0.0040	−0.0200
BD	+1,435	115,5	30×10^6	0.093	+0.0594	+9.2970
EF	+ 600	127	30×10^6	0.096	+0.0368	+0.1480

習　題　八

1.　圖 34 所示之結構，在接點 E 任重力 W，A 點以活軸管於地基上，B 點承以滾柱。其各構件之横斷面積，曾經設計適宜，凡抗拉者其張應力皆每方吋 6 短噸，抗壓者每方吋皆 3 短噸。作位移圖以求接點 E 之水平及直下位移。

答左移 $\frac{480}{E}$ 吋；下移 $\frac{1068}{E}$ 吋.

2.　圖 35 之結構，CD 與 EF 各 8 呎，餘皆 11 呎；横斷面積皆 1 方吋，E 皆為 30×10^6 磅每方吋。設 A 與 B 二點支持力皆直上，作位移圖以求 A 對 B 之位移。

答 [illegible].45 吋.

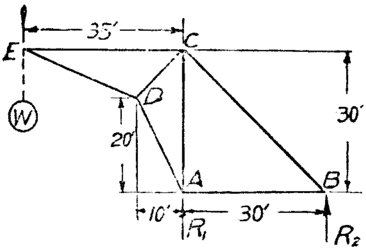


圖 34.

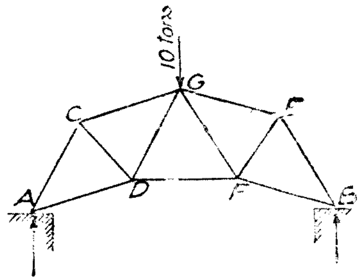


圖 35.

3. 圖 36 之結構，其各構件之橫斷面積如下：$BC=8$ 方吋，$AB=CD=4$ 方吋，$FA=FB=FC=FD=3$ 方吋．A 與 D 之支持力皆在上，各構件之 E 皆為 14,000 短噸每方吋。求各構件之變長，A 與 D 之分離，及 F 點之下移．

答 A 與 D 之分離 0.0217 吋；F 點下降 0.0182 吋．

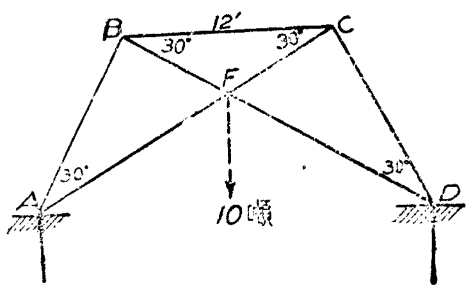


圖 36.

11. 應用位移圖求多餘構件之應力* 前在圖 17，曾用位移圖以求多餘構件之應力，惟該圖簡單，易由幾何形看出其 O 點實有之位移，與各構件變長之關係，故不須條理之步驟，已足解明。若複雜結構之含多餘構件者，則各接點之位移與各構件變長之關係，不能由幾何圖形看出，故有下列運用之步驟。

設 AB 爲複雜結構之多餘構件，欲求其應力須

(1)移去多餘構件，就原有之擔負，求其他各構件之內應力，

(2)計算其各構件之變長，然後利用位移圖，以求 A 與 B 之相對位移。設爲 a。

(3)設無擔負，在 A 與 B 沿 AB 添入一對平衡力 P(1000 磅，或 1 短噸)；求此一對力在各構件內所生之內應力。

(4)計算其各構件之變長，然後利用位移圖，以求 A 與 B 之相對位移，設爲 b，

設 Q 爲 AB 實任之其應力。若無擔負，而只有 Q，則 A 與 B 之相對位移必爲 $\frac{b}{P}\cdot Q$，又設無 Q，而只有原來擔負，則爲 a；故若有原來擔負，並任平衡力 Q 時，二點之相對位移必爲 $a+\frac{b}{P}\cdot Q$。但此値應爲 AB，任 Q 磅全値應力時之變長 $\frac{Q\cdot AB}{A\cdot E}$.

故
$$a+\frac{b}{P}\cdot Q=\frac{Q}{A\cdot E}\cdot AB \tag{8}$$

由此式可求 Q。既求得多餘構件之全値應力，則其他各構件內者必

* 本節選 J. Case 之 Strength of Materials, 46 節.

第(1)步內之得數，加 $\frac{Q}{P}$ 倍第(3)步內之對應數。

習　題　九

1. 圖 37 所示之結構，AC 與 BD 在其交叉處並未定合。$AC=5$ 呎，$BD=4.8$ 呎。各構件之橫斷面積皆 0.5 方吋，E 皆 13,000 短噸每方吋。求各構件之擔負。

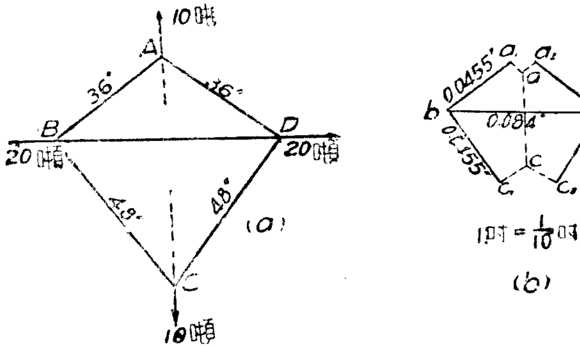


圖 37.

解. 設於圖 (a) 中移去多餘構件 AC，遂得自足穩定之結構，就原有之擔負，用平衡規則，可求其餘各構件之內應力，再由長度，橫斷面，與彈性係數 E，可求其各構件之變長，計得

構　件	全值應力 S 短噸	變長(吋)
AB 與 AD	+8.33	0.0455
BC 與 CD	+6.25	0.0455
BD	+9.60	0.0480

以 B 為基點，BD 為基線，以 1 吋表 $\frac{1}{10}$ 吋，作位移圖(b)。量得 A 對 C 由 C 向 A 之相對位移 $a=+0.0455$ 吋.

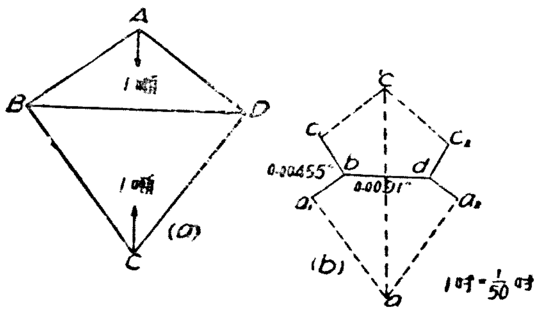


圖 38.

設無擔負，而於 A 與 C 各添 1 短噸相向之力如圖 38 (a)，然後求各構件之內應力與變長:

AB 與 AD	-0.833 短噸壓	-0.00455 吋縮
CB 與 CD	-0.625 短噸壓	-0.00455 吋縮
BD	$+1.01$ 短噸拉	$+0.00910$ 吋伸

以 1 吋表 $\frac{1}{50}$ 吋，自 B 點起沿 BD 作 bd，以表 0.0091 吋，並續作全體位移圖如圖 38 (b)。量 ac，得 A 對 C 之位移沿 AC (由 A 向 C 為縮短)。　　　　$\therefore\quad b=-0.018$ 吋.

設 AC 實任 Q 短噸之拉力，若無擔負，則 A 對 C 之位移必為 $-0.018\times\frac{Q}{1}$. 既有原來擔負，而 AC 復任拉力 Q，則 A 對 C 之位移必為 $0.0455+(-0.018Q)$；而此實為 AC 之拉長，即 $\frac{60Q}{0.5\times 13,000}$ 也. 令此二式相等，得 $Q=1.68$ 短噸拉.

其他各構件之內應力:

AB $8.33+1.68(-0.833)=\ 7.13$ 短噸拉.

BC $6.25+1.68(-0.625)=\ 5.20$ 短噸拉.

BD $9.60+1.68\times1.04=11.35$ 短噸拉.

2. 圖 39 示雙肱結構,圖中無單位之數字,為橫斷面積以方吋計者。各構件之 E 皆相同。C 與 D 之支持力皆直立。求 AB 之應力。

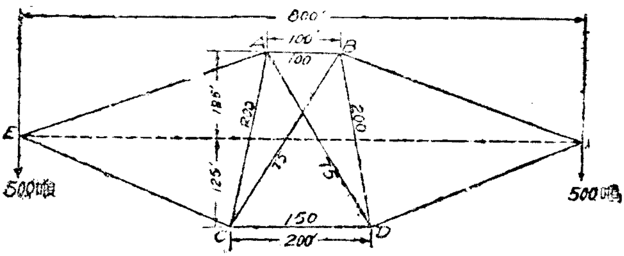


圖 39.

答

構件	A 方吋	l 呎	移去 AB 時擔負所生之 S 短噸	$e=\dfrac{Sl}{AE}$ 吋	移去擔負沿 AB 施 10 短噸拉力所生之 S_1	$e_1=\dfrac{S_1l}{AE}$ 吋
$AD=BC$	75	292	$+875$	$+3,400\times\dfrac{12}{E}$	-14.6	$-56.8\times\dfrac{12}{E}$
$AC=BD$	200	255	$-1,000$	$-1,274\times\dfrac{12}{E}$	$+12.75$	$+16.3\times\dfrac{12}{E}$
CD	150	200	-900	$-1,200\times\dfrac{12}{E}$	$+5.0$	$+6.7\times\dfrac{12}{E}$

移去 AB,只加擔負,A 對 B 之位移,$a=2\times7,000\times\dfrac{12}{E}$ 吋.

移去擔負,沿 AB 加 10 短噸拉時,$b=-2\times104.5\times\dfrac{12}{E}$ 吋.

$$\therefore\ (2\times7,000-2\times10.45\,Q)\times\frac{12}{E}=Q\times\frac{100}{100}\times\frac{12}{E}.\qquad Q=3.4\text{ 短噸拉}.$$

12. 柔索之張力：(a)設二支點在一水平線上　目的上欲索擔任之擔負常散布於一水平面上，故每水平一呎索上之擔負相等。惟索本身之重量則沿索一呎相同。設 l 爲二支點間之距離，f 爲其最低點之弛度(sag)。工程界應用之索之弛度皆甚小，故每沿索一呎之擔負約卽其水平一呎之擔負也，以 q 表之；又以 H 代其最低點之水平拉力。圖 40 示二支點在一水平線上之索，以半索爲自由體，移去左半，易以 H，半索上之擔負（或只索之重量）$=\dfrac{ql}{2}$，其力線約經 $\dfrac{l}{4}$ 處。由 $\Sigma F_X=0$，可知 B 點支持力之水平分力爲 H，而直立者爲 $\dfrac{ql}{2}$。

又由 $\Sigma M_B=0$，得

$$Hf=\frac{ql}{2}\cdot\frac{l}{4}.$$

$$\therefore\quad H=\frac{ql^2}{8f}. \tag{9}$$

此式示擔負增多，則弛度增大，因而增大張力也。

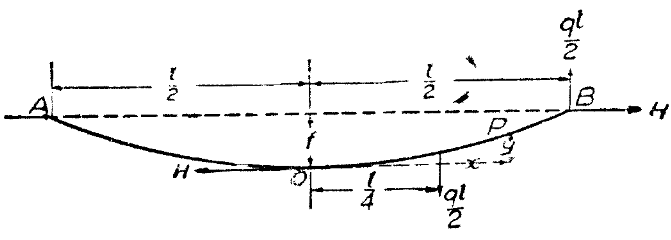


圖 40

若擔負爲沿索一呎相等者，則其詳解稍難（參看著者應用力學 110 頁）。但若 $\dfrac{f}{l}<\dfrac{1}{20}$，則此約略解析所差不及 1%；若 $\dfrac{f}{l}<\dfrac{1}{10}$，則差 4%。工程所遇之實例 $\dfrac{f}{l}$ 常甚小，均可約略解析之。

又支點之張力
$$T=\sqrt{H^2+\left(\frac{ql}{2}\right)^2} \tag{10}$$

其方向沿支點之切線，與水平傾角之正切$=\dfrac{ql}{2H}$.

設 x, y, 為 P 點之坐標，論 OP 一段之平衡，則得 P 點張力與水平傾角之正切等於
$$\frac{dy}{dx}=\frac{qx}{H} \tag{a}$$

全索之長
$$L=2\int_0^{\frac{l}{2}}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$
$$=2\int_0^{\frac{l}{2}}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dx \tag{b}$$

以(a)式之$\dfrac{qx}{H}$代$\dfrac{dy}{dx}$而積分之，可得 L 之確式，但不便於計算，故約略論之如下。因$\dfrac{dy}{dx}$(即曲線之傾度)甚小，故

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\doteq 1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\frac{1}{2}\left(\frac{qx}{H}\right)^2.$$

代入(b)式中，得

$$L=2\int_0^{\frac{l}{2}}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{qx}{H}\right)^2\right]dx=l+\frac{q^2l^3}{24H^2}.$$

代入公式(9)之 H，則
$$L=l\left(1+\frac{8}{3}\frac{f^2}{l^2}\right). \tag{11}$$

此式示索長與弛度之幾何關係。

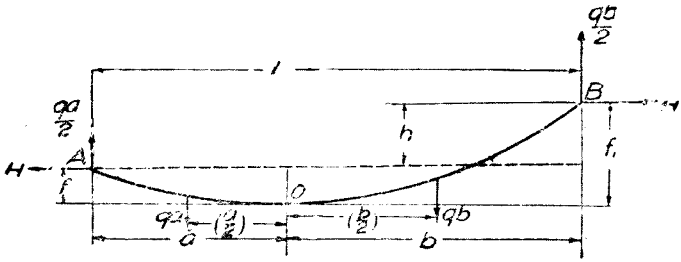


圖 41.

(b) 設二支點不在一水平線上　二支點高度之差設為 h。最低點之弛度距較低支點 A 為 f，距較高之 B 點為 f_1．則 $f_1-f=h$．又以 a 表最低點至較低支點之水平距離，b 表其距較高支點 B 者設索甚平，而求此諸量之關係如下：

自最低點 O 以左之擔負 $=qa$，其力線約經 a 之中點。故左支點之水平支持力為 H，而直立者為 qa。

論左半索之平衡，由 $\Sigma M_0=0$，得　　$Hf=\dfrac{qa^2}{2}$

$$\text{(c)}$$

論右半索之平衡，由 $\Sigma M_0=0$，得　　$Hf_1=\dfrac{qb^2}{2}$

由下式減上式得　　$Hh=\dfrac{q}{2}(a+b)(b-a)$．

與 $a+b=l$ 聯立解之，得

$$a=\frac{l}{2}-\frac{Hh}{ql};\qquad b=\frac{l}{2}+\frac{Hh}{ql}\tag{12}$$

以(12)式代(c)式之 b，得

$$H^2-2q\frac{l^2}{h}\left(f_1-\frac{h}{2}\right)H+\frac{q^2l^4}{4h^2}=0$$

$$\therefore \quad H=q\frac{l^2}{h^2}\left[f_1-\frac{h}{2}\pm\sqrt{f_1(f_1-h)}\right]. \tag{13}$$

因(12)式之 a 爲正,故 $\frac{Hh}{ql}<\frac{l}{2}$, 或 $H<\frac{q}{2}\frac{l^2}{h}$.

由(13)式,因 H 爲實有之量,故 $f_1>h$, 而 $\left(f_1-\frac{h}{2}\right)>\frac{h}{2}$.

欲(13)式之 $H<\frac{ql^2}{2h}$,則$\left[\quad\right]$內者必須$<\frac{h}{2}$,故方根前必須用負號.

公式(13)示擔負,弛度,與張力之關係.

(c)**溫度變遷所生之張力變遷** 仍論二支點在一水平線上者。設在高溫 t 度時,每呎之擔負爲 q,弛度爲 f,最低點之張力爲 H,索長爲 L, 迨低至 t_0 度,每呎擔負增爲 q_0(索每呎之重量增多),索長縮爲 L_0,弛度減爲 f_0,張力增爲 H_0.則索實有之縮短 $=L-L_0$; 其原因有二:

(1)因溫度降低而縮短者 $=\alpha(t-t_0)L_0$;

(2)因擔負加多,並因冷縮而張力增大,故索必增長 $\frac{H_0-H}{AE}L_0$。

然則 $$L-L_0=\alpha(t-t_0)L_0-\frac{H_0-H}{AE}L_0$$

由公式(11), $$L-L_0=\frac{8}{3l}(f^2-f_0^2);$$

再由公式(9), $$L-L_0=\frac{l^3}{24}\left(\frac{q^2}{H^2}-\frac{q_0^2}{H_0^2}\right)$$

若將 L_0 約作跨度(span)l,則

$$\frac{l^2}{24}\left(\frac{q^2}{H^2}-\frac{q_0^2}{H_0^2}\right)+\frac{H-H_0}{AE}=\alpha(t-t_0). \tag{14}$$

若由公式(9),以 $\frac{64f}{l^4}$ 代 $\frac{q^2}{H^2}$, 以 $\frac{64f_\circ^2}{l^4}$ 代 $\frac{q_\circ^2}{H_\circ^2}$. 則得

$$\frac{8}{3l^4}(f^2-f_\circ^2)+\frac{l^3}{8AE}\left(\frac{q_\circ}{f_\circ}-\frac{q}{f}\right)=\alpha(t-t_\circ) \tag{15}$$

公式(14)及(15),若將已知量代入皆化為 $x^3=ax+b$ 之形式。必須用圖解如圖 42 所示者,或用嘗試方法(trial and error)。

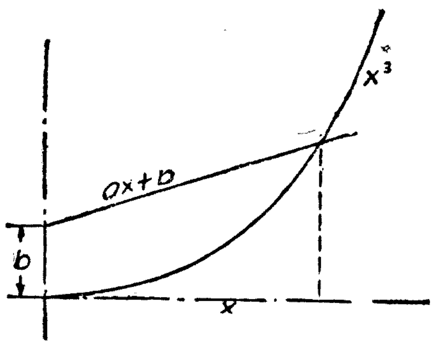


圖 42.

習題十

1. 柔索 $\frac{f}{l}$ 之比須為若干,而後其懸點張力方較其最低點者大百分之二?

解. 由公式(10), $\frac{T}{H}=\sqrt{1+\left(\frac{ql}{2H}\right)^2}$.

又由公式(9)，以$\frac{ql^2}{8f}$代1式右側之H，則得$\frac{T}{H}=\sqrt{1+\left(\frac{4f}{l}\right)^2}$.

欲$\frac{T}{H}$ 1=.02， 則 $1+\left(\frac{4f}{l}\right)^2$須等於1.04， 而 $\frac{f}{l}=0.05$. 故工業常見弛度甚小之索，其張力均可約爲沿索不變者。

2. 鋼絲懸於A,B二點之間(圖41)。設$l=300$呎，$f_1=40$呎，$f=20$呎，鋼之密度每立方呎490磅，求絲之張應力。

答 $\sigma=1,310$ 磅每方吋.

3. 銅絲之原長恰等於二懸點間之距離$l=120$呎，求張起後之弛度。

解. 設張起後拋物線長爲L.

則 絲其增之長$=L-l=\frac{8}{3}\frac{f^2}{l}$. 由公式(11)。

但此即張力H其生之增長 $\frac{Hl}{AE}$.

由公式(9)， $$L-l=\frac{ql^3}{8fAE}=\frac{\gamma l^3}{8fE}.$$

故 $$\frac{8}{3}\frac{f^2}{l}=\frac{\gamma l^3}{8fE}.$$

$$\therefore\quad f=\sqrt[3]{\frac{3\gamma l^4}{64E}}=\sqrt[3]{\frac{3\times560\times120^4\times12^4}{64\times12^3\times16\times10^6}}=16\text{ 吋}.$$

又此時之張應力 $$\sigma=\frac{H}{A}=\frac{ql^2}{8fA}=\frac{\gamma l^3}{8f}=5,250\text{ 磅每方吋}.$$

4. 銅絲每碼重0.7磅。在華氏25°時，每碼上冰雪之重爲0.3磅，此時之張應力$\sigma_0=25,000$磅每方吋。若兩懸點相距$l=600$呎，

銅之熱脹係數 $\alpha=92\times10^{-7}$ 每華氏一度，橫斷面積 $A=0.06$ 方吋，$E=16\times10^{6}$ 磅每方吋。求在華氏 95° 安裝時之弛度。

解．
$$q_{\circ}=\frac{1}{3}(0.7+0.3)=\frac{1}{3}\text{磅每呎}.$$

由公式(9)，得
$$f_{\circ}=\frac{q_{\circ}l^{2}}{8H_{\circ}}=\frac{600}{8\times0.06\times25,000}=10\text{ 呎}.$$

由公式(15)，
$$\frac{8}{3\times600^{2}}(f^{2}-100)+\frac{600^{2}}{8\times0.06\times16\times10^{6}}\left(\frac{1}{30}-\frac{0.7}{3f}\right)$$
$$=\frac{92}{10^{7}}\times70,$$

即
$$f^{2}-100+21.1\left(1-\frac{7}{f}\right)=87,$$

或
$$f(f^{2}-156)=147.7.$$
$$\therefore\quad f=\text{正，且必}>\sqrt{156}.$$

設 $f=13$，則 $f(f^{2}-156)=169$.

設 $f=12.8$，則 $f(f^{2}-156)=100$.

設 $f=12.9$，則 $f(f^{2}-156)=134$.

設 $f=12.95$，則 $f(f^{2}-156)=151.5$.

故 $f=12.93$ 呎(約合)．

設高溫度時之張應力為 σ，則由公式(9)，
$$\sigma=\frac{q}{f}\cdot\frac{f_{\circ}}{q_{\circ}}\cdot\sigma_{\circ}=\frac{0.7}{12.93}\times\frac{10}{1}\times25,000=13,000\text{ 磅每方吋。}$$

5. 鋼絲之熱脹係數為 70×10^{-7} 每華氏一度，密度每立方呎 490 磅。在華氏 65° 時，張於 150 呎之二點間，欲其於最低溫度 -15°

時之張應力不得超過每方时 22,000 磅。求初張時之弛度。

6. 設索之擔負改變，求其弛度之變遷。

答 $\frac{8}{3l}(f^2-f_0^2)=\frac{l}{AE}\left(\frac{ql^2}{8f}-\frac{q_0l^2}{8f_0}\right)$.

13. 簡單拉力所生之橫應變 以前只論沿拉力（或壓力）方向之應變，是爲縱應變 (longitudinal strain)。吾人習知拉長之棒之橫度縮短，而壓縮者之橫度增長。其橫度變遷與原來橫度之比曰橫應變(lateral strain)。橫應變實生於縱應變，非直接生於拉力也，故與縱應變有直接關係。詳細試驗之結論，謂各種材料不踰彈性限度以前，其橫應變與縱應變常有一定之比，曰泊松比 (Poisson's ratio)，以 μ 表之。就各種材料而言，μ 皆小於 $\frac{1}{2}$ 而大於 0。設有每邊單位長之立方體，若沿一度拉長，其縱應變爲 ϵ，則橫應變 $=\mu\epsilon$，故其體積變爲 $(1+\epsilon)(1-\mu\epsilon)^2 \fallingdotseq 1+(1-2\mu)\epsilon$，凡含 ϵ 之高次方者皆約爲零。故因拉長而生之體應變 (volume strain)，卽每單位體積所生之體積變化 $=(1-2\mu)\epsilon$. 泛言之，沿一度拉長者，其體積概皆增大，故 $(1-2\mu)\epsilon$ 必爲正，或 $(1-2\mu)\geqq 0$，卽 $\mu\leqq\frac{1}{2}$ 也。如橡皮者，μ 頗近於 0.5，脆性材料如混凝土 (concrete)，則由 $\frac{1}{8}$ 至 $\frac{1}{12}$，平常韌鋼則約爲 0.3.

習題十一

1. 習題二題 6 之等強之鋼棒，任重以後，求其體積之變化。(已知 $\mu=0.3$).

解. 體應變 $=(1-2\mu)\epsilon=(1-\ \mu)\dfrac{\sigma_w}{E}$

$$=(1-0.6)\times\frac{5600}{30\times10^6}=74.7\times10^{-6}.$$

故 增加之體積 $=\dfrac{13,500}{490}\times\dfrac{74.7}{10^6}=0.00206$ 立方呎.

2. 橫斷面積不變之長棒，下端懸重量；求其體積之變化。（用第 4 節所設之字母）。

答 $\dfrac{1-2\mu}{E}\left(\dfrac{P}{A}-\dfrac{\gamma l}{2}\right)Al.$

14. 簡單拉力與壓力所儲之應變能 拉力或壓力既生應變，則材料之中必有功加入，若擔負由零緩緩加至 P，其長度由零增至 e.

則對全棒加入之功， $U=\displaystyle\int_0^e P\cdot de$

在達彈性限度之前，由公式(4)，

$$e=\frac{Pl}{AE}. \qquad \therefore \quad de=\frac{l}{AE}\cdot dP$$

故
$$U=\frac{l}{AE}\int_0^P P\cdot dP=\frac{P^2l}{2AE}. \tag{16,a}$$

由公式(4)， $P=\dfrac{AE}{l}e.$ $\therefore$ $U=\dfrac{AE}{l}\cdot\dfrac{e^2}{2}$ (16, b

以 σA 代(16,a)式之 P，則 $U=\dfrac{\sigma^2}{2E}\cdot Al,$

(17,a)

而對每立方吋材料加入之功， $w=\dfrac{\sigma^2}{2E}.$

以 ϵl 代(16, b)式之 e,

則　　$$U=\frac{E\epsilon^2}{2}\cdot Al\,;\qquad 而\qquad w=\frac{E\epsilon^2}{2}\tag{17, b}$$

當 P 漸減爲零時，材料完全複其原長，此時材料對於擔負 P 爲在作功，仍等於(16)式之值。故知在達彈性限度以前，加入之功，儲爲應變能(strain energy)，仍可顯爲功而復其原長也。

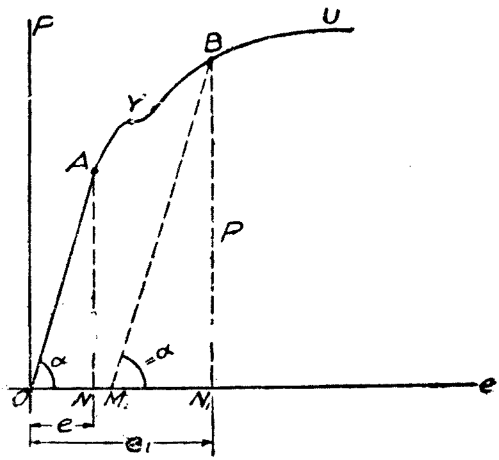


圖 43.

既過彈性限度以後，公式(4)不可復用，故公式(16)與(17)皆不合。其加入之功，當由 P-e 圖(或 σ-ϵ 圖)求之:

拉至彈性限度 A 時，加入之功 $=\int_0^e P\cdot de=OA$ 線下之面積

$$=\frac{1}{2}\cdot AN\cdot ON=\frac{1}{2}(\sigma A)(\epsilon l)$$

$$=\frac{\sigma\epsilon}{2}\cdot Al=\frac{\sigma^2}{2E}\cdot Al.$$

拉過彈性限度至B點，加入之功$=OAYB$線下之面積。若拉力由P_1漸減爲零，則$P-e$曲線沿直線BM_1而下降，由試驗得知其與OA約略平行，物體可復之變長$=M_1N_1$，故可復之功$=\Delta M_1BN_1$之面積$=\frac{1}{2}P_1(M_1N_1)$；其不復之變長爲ON_1，故其不復之功$=OABM_1$之面積。可復者稱爲儲於材料中之應變能，其不可復者，已於分子相對移動時耗於摩擦，化而爲熱。

工程界利用材料時，其長度變遷均須可復，而後其形變方不甚大，且當擔負改變之時，方能復其原長也。故達到彈性限度時，每立方吋之應變能乃工程界可利用之最多儲能係數（modulus of resilience）。韌鋼之彈性限度爲30,000磅每方吋，E爲30×10^6磅每方吋，故每立方吋之應變能$w=\frac{(30,000)^2}{2\times30\times10^6}=15$吋磅每立方吋。就彈性限度之應力而論，安全因數常用2，亦即資用應力$=\frac{1}{2}\sigma_{p.l.}$，故就儲能係數言，每立方吋資用之儲能係數宜爲最多儲能係數之$\frac{1}{4}$。泛言之，基於彈性限度之安全因數爲n，則就應變能言，宜爲n^2。

每磅之應變能等於每立方吋之應變能除以每立方吋材料之磅數。

材料	密度 磅每立方吋	E 磅每方吋	彈性限 磅每方吋	w 吋磅 每立方吋	w_1 吋磅 每磅
建築鋼料	0.283	30×10^6	28,000	13.1	46
工具用鋼	0.283	30×10^6	120,000	240.0	840
銅	0.312	16×10^6	4,000	0.5	1.6
柞木	0.0333	1.5×10^6	4,000	5.3	146
橡皮	0.0337	150	300	300.0	8900

習 題 十 二

1.　由圖 17，外力加入之功必等於三棒共儲之能。試用此法校對第 7 節（c）式之結果。

解.　設 X 為中間鋼桿之拉力，Y 為兩旁銅杆之拉力。

由平衡，得
$$X=P-2Y\cos\alpha$$

$$\therefore\quad Y=\frac{P-X}{2\cos\alpha} \tag{a}$$

擔負之位移＝鋼杆之增長＝$\dfrac{Xl}{A_sE_s}$.

故
$$\text{加入之功}=\frac{P}{2}\cdot\frac{Xl}{A_sE_s}.$$

由公式（16, a）鋼杆儲存之能＝$\dfrac{X^2l}{2A_sE_s}$;

$$\text{兩旁銅杆共儲之能}=2\times\frac{Y^2\left(\dfrac{l}{\cos\alpha}\right)}{2A_cE_c}.$$

故
$$\frac{P}{2}\cdot\frac{Xl}{A_sE_s}=\frac{X^2l}{2A_sE_s}+2\frac{Y^2l}{2A_cE_c\cos\alpha} \tag{b}$$

由（a）式得 $X^2\left(1+2\dfrac{A_cE_c}{A_sE_s}\cos^3\alpha\right)-2P\left(1+\dfrac{A_cE_c}{A_sE_s}\cos^3\alpha\right)X+P^2=0.$

解此式得
$$X=\frac{P}{1+2\dfrac{A_cE_c}{A_sE_s}\cos^3\alpha}.$$

2. 就任何結構而言，擔負加入之功，必等於其各構件共儲之能，用此理試證習題一題 2 擔負之位移

$$BB_1=\frac{Pl}{2AE\sin^2\theta}.$$

3. 圖 44 (a)，(b) 二棒，材料相同，皆屬圓形。設 (b) 棒之應力皆屬平均分佈者，且略去直徑驟變處應力之加強而不計。若二者之最大應力相同，求其儲能之比。

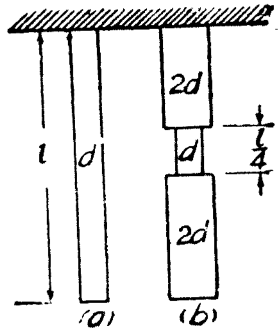


圖 44.

解. 設 σ 爲 (b) 棒細處之應力＝細棒各處者。

(b)棒粗處之應力 $\sigma'=\frac{d^2}{(2d)^2}\cdot\sigma=\frac{1}{4}\sigma.$

故 (b)棒共儲之能 $=\frac{\sigma^2}{2E}\cdot\frac{\pi}{4}d^2\cdot\frac{l}{4}+\left(\frac{\sigma}{4}\right)^2\frac{1}{2E}\cdot\frac{\pi}{4}(2l)^2\cdot\frac{3}{4}l$

$$=\frac{\sigma^2}{2E}\cdot\frac{\pi}{4}d^2l\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{16}\right).$$

$$\therefore\quad \frac{U_b}{U_a}=\frac{1}{4}+\frac{3}{16}=\frac{7}{16}.$$

但二棒能任之穩定擔負，皆等於$\frac{\pi}{4}d^2\sigma$. 若以任碰撞擔負，如吸收墜體之能，則(b)較弱$\frac{7}{16}$倍。

4. 求習題二題 6 等強棒能儲之應變能(未踰彈性限度)。

答 24,[illegible]00 吋磅.

15. 簡單拉力在斜斷面上所生之應力 對於任簡單拉力或壓力之長方棒，以前只討論其橫斷面上之應力。欲考其斜斷面上之應力，當以斜斷面 pq，截取長方棒之一部以爲自由體，移去餘部，易以垂直力 N 及正切力 T. 若 pq 與橫斷面之傾角爲 ϕ，

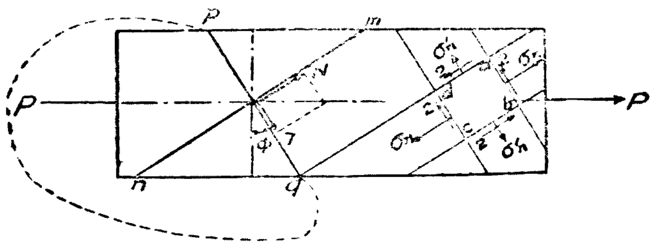


圖 45.

則沿 N 之 $\Sigma F=0$, $\quad\therefore\quad N=P\cos\phi$;

又沿 T 之 $\Sigma F=0$, $\quad\therefore\quad T=P\sin\phi$.

T 與 N 在 pq 面上之分配法無由決定，惟以其合力經 pq 面之重心，姑假設爲平均分佈耳.

若橫斷面之面積爲 A 則斜斷面者爲 $\dfrac{A}{\cos\phi}$; 故

斜面上之垂直應力 (normal stress)

$$\sigma_n=\frac{N}{\left(\dfrac{A}{\cos\phi}\right)}=\frac{P}{A}\cos^2\phi=\frac{\sigma}{2}(1+\cos 2\phi) \tag{18,a}$$

又沿斜斷面之正切應力 (tangential stress)

$$t=\frac{T}{\left(\dfrac{A}{\cos\phi}\right)}=\frac{P}{A}\sin\phi\cos\phi=\frac{\sigma}{2}\sin 2\phi \tag{18,b}$$

此正切力 T 使斜斷面兩側之材料相對滑行，以期破除材料之應力

而切開，故曰切力(shear force)，材料之切力強度，則簡稱爲切應力(shearing stress)。由公式(18,a)可知垂直張應力以橫斷面上($\phi=0$ 時)爲最大，恰等於以前所得者；而切應力則以 $\phi=45°$ 時爲最大，其值

$$\tau_{大}=\frac{\sigma}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{P}{A}\right).$$

惟最大切應力只等於最大變長應力之半，但如韌鋼，其切應力屈服點不及張應力屈服點之半，故表面擦光之韌鋼棒施以拉力試驗時，在 45° 之方向先生暗紋。又如脆質之鑄鐵，混凝土等其終極壓應力遠過其終極切應力之二倍，故此種材料施以壓縮試驗，約可沿 45° 之斜面切破也。

斜斷面之垂直於 pq 者如 mn，與橫斷面之傾角爲 $\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)$。以此代 ϕ，則由(18)式得 mn 面上之 $\sigma'=\sigma\sin^2\phi$；又其 $\iota'=\frac{\sigma}{2}\sin 2\phi$。

故 $\sigma_n+\sigma_n'=\sigma$； 而 $\iota'=\iota$。

或謂一對直交之斜斷面上垂直應力之合，常等於橫斷面上者；而其切應力則相等。以此兩組直交之斜斷面界出一長方體，其四方截面上之應力各有兩種。

習 題 十 三

1. 求切應力與垂直應力等強之方面。 答 $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3}{4}\pi$.

2. 圖 45；設 $\sigma=5,000$ 磅每方吋，$\phi=30°$；求 $abcd$ 長方體四面之應力。

第二章　薄筒與鉚釘

16. 任內壓之薄圓筒與薄球　鍋鑪筒或汽管任內壓力時，因其各部分皆受同向之壓力，故必無內外對切之力；又因對稱，亦不能有內外不同之彎曲；而只生環周張應力(hoop stress)而已。欲求其値，可設想一半圓柱面與平底製成之鍋鑪，長爲 l，半徑爲 r，以任每方吋 p 磅之內壓力。論垂直平底方向之平衡，可知加於圓柱面上之壓力，沿該方向之合力，必與底面上之共壓力相等，且等於 $2rlp$。泛言之，加於曲面上之垂直壓力，沿其弦面垂線之作用，恰等於弦面上之共壓力。任內壓之正圓柱薄筒，由任一個縱剖面（含幾何中軸者曰縱）兩分之力亦爲 $2rlp$。此力必與筒皮上二縱斷面之張應力相平衡。若筒甚薄，即其

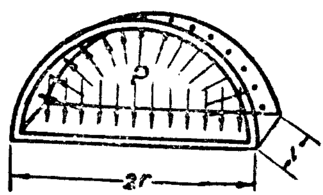


圖 4.

厚度 h 較其平均半徑 r 甚小，則該張應力可設爲平均分布者，設其強度爲 σ_c，則

$$2lh\sigma_c = 2rlp$$

$$\therefore \quad \sigma_c = \frac{pr}{h},$$

此卽公式(5)。

設沿縱剖線有鉚釘孔一行，孔之直徑爲 d，兩孔中心相距爲 l，則

能任張力之面積 $=lh-dh=h(l-d)$. 於是

$$2h(l-d)\sigma_e=2rlp.$$

故在鉚接處之強度 $$\sigma_e=\frac{pr}{h}\div\frac{l-d}{l} \qquad (19)$$

若將 σ_e 等於材料之耷用張應力 σ_w, 則 r 即鍋鑪筒半徑之最大限也。無鉚釘孔,則寬 l 之鋼板能任拉力 $=lh\sigma_w$; 有孔,則只能任 $(l-d)h\sigma_w$.

$$\therefore\quad \frac{(l-d)h\sigma_w}{lh\sigma_w}=\frac{l-d}{l}=\text{鉚接處之抗拉效率 (tearing efficiency)}$$

設筒之兩端有底,則加於底面上之共壓力,每欲由一橫斷面裂爲兩截,故材料中必生縱的張應力 (longitudinal stress)。設兩節圓筒相接之處有鉚釘一周,其二釘相距爲 l, 直徑爲 d, 則能任張力之

橫斷面積 $$A=2\pi rh\cdot\frac{l-d}{l}.$$

由平衡,得 $$\pi r^2p=2\pi rh\cdot\frac{l-d}{l}.$$

故縱張應力 $$\sigma_a=\frac{pr}{2h}\div\frac{l-d}{l}=\text{環周應力之半} \qquad (20)$$

內壓力在鍋鑪筒內生沿徑壓應力 σ_r, 在內表者等於 p, 在外表者等於零. 今日工程界習見之內壓力,每方吋不過三五百磅,而鋼板之耷用張應力達 15,000 磅每方吋,故沿徑壓應力常可約爲零.

任內壓力之薄球,每欲由經中心之剖面分裂爲兩半球. 其分裂之力仍按平底之半球推想,可知其恰等於平底上之共壓力,且此力必與環周斷面上之共張力相平衡。仍設斷口處有一周鉚釘孔,其抗拉效率爲 $\frac{l-d}{l}$, 則 $$\pi r^2p=2\pi rh\frac{l-d}{l}\sigma_a.$$

$$\sigma_a = \frac{pr}{2h} \div \frac{l-d}{l} \qquad (21)$$

習題十四

1. 以$\frac{3}{8}$吋厚之鋼板鉚製直徑 4 呎之鍋爐，以任每方吋 180 磅之壓力，設鉚接效率爲 80%，求其各種應力之強度。

答 $\sigma_c = 14,400$; $\sigma_a = 7,200$ 磅每方吋.

2. 鍋爐筒厚$\frac{5}{8}$吋，直徑 6 呎，每方吋任內壓力 200 磅。鉚接之效率爲 85%。設鋼之終極張應力爲 60,000 磅每方吋，求其安全因數。

答 4.46.

17. 鉚接概論 鉚釘比螺旋釘製造省工。在板上打孔或鑽孔穿入燒紅之鋼柱，此鋼柱一端有帽頭，他端則無之，穿入板孔後，將無帽頭之一端，趁熱打爲帽頭，是爲鉚接(riveted joint) 相接之二板，甲叠乙上，稱爲叠鉚 (lap joint)，如圖 47，如此鉚接，任擔負後，板與釘皆須任額外彎曲，故不適於強大擔負。擔負大，則用對鉚 (butt joint)，兩板對口，上下各蓋蓋板 (cover plate) 如圖 48

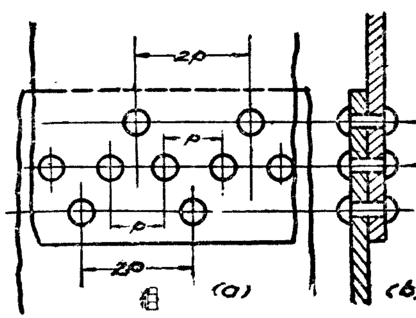


圖 47.

平行接口之一行鉚釘，稱爲一行（a row），對鉚之行數按接口之一面計算之。每行內二鉚釘之中心距離曰縱距（main pitch），兩行之距離曰橫距（transverse pitch）。兩行鉚釘宜交錯打孔，使弱點散開。相鄰二釘之斜距離曰斜距（diagonal pitch）。鉚釘分佈情形相似之部分爲一組（a repeated group）；若各行之縱距相等，則縱距之寬即是一組，梁之構件定於結合板（gusset plate）上，則全部爲一組。鉚釘之強度（strength）係指一組所能任之擔負也。

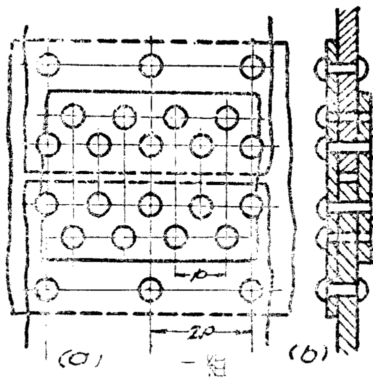


圖 48.

鉚釘失效之情形 (1)一組同時被切斷，——搭鉚者，每釘有一抗切面，對鉚者每釘有兩個抗切面；如圖 49 (a)，示因切斷鉚釘而失效(failure due to shearing all rivets 之情形。

(2)打孔之板，自縱距或斜距拉斷，如圖 49 (b) 示因扯板而失效 (failure due to tearing the plate) 之情形。

(3)由板與釘間之壓力，將釘擠扁或將孔壓長；如圖 48 (c)所示者，是爲因壓擠而失效(failure due to crushing rivet or plate)。

(4)平行於縱距之板邊之失效 (failure in margin)；其由於彎曲者如圖 49 (d) 上部所示者，其由於切力者如同圖下部所示。

18. 鉚接之強度與效率 一組鉚釘能抵抗某種失效之強力曰

該項之強度(strength). 設板之厚度為 h,一組鉚釘所占之縱寬度為 p. σ 為材料之資用張應力。則

(1)不打孔之板能任之拉力 $=ph\sigma$.

(2)打孔之後,設孔之直徑為 d,則打一孔之縱行抗拉強度為 $(p-d)h\sigma$,打二孔者為 $(p-2d)h\sigma$.

(3)設一組鉚釘計有 n 個,τ 為材料之資用切應力;則叠鉚者抗切之強度 $=n\dfrac{\pi}{4}d^2\tau$,對鉚者為 $2n\dfrac{\pi}{4}d^2\tau$.(τ 之分配,俟後第 37 節詳之)。

(4)設 σ_c 為鋼質之資用壓擠應力. 任擔負之後,釘與孔之半面相壓,其壓力分佈之情形不能詳知。若假設其沿徑相壓之強度為 σ_c,則其沿拉力方向之作用 $=hd\sigma_c$(參看圖 46 及其解說)。若一組內計有 n 個鉚釘,則其抗擠之強度,無論叠鉚對鉚,只須釘與一板之間未至壓壞,皆等於 $nhd\sigma_c$.

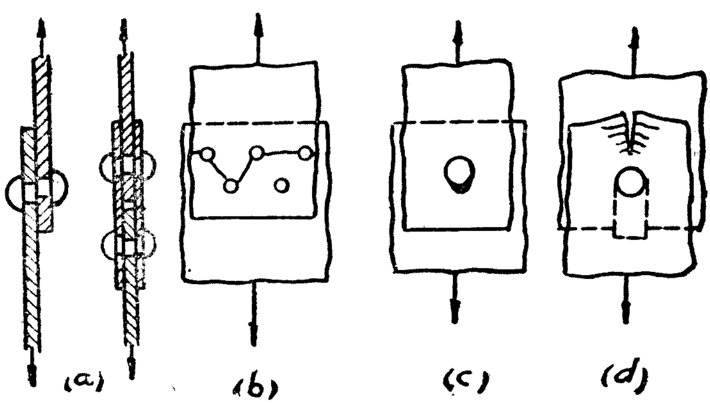


圖 49.

對鉚者，蓋板可被拉斷亦可被擠壞，但每面蓋板之厚用$\frac{5}{8}h$，則共厚大於h，故二者之抗拉抗擠，均較一個主板強，可無庸討論。

擠壓力之分佈既屬假設，故材料對此種擠壓之貧用應力未必與簡單壓力試驗所得者相同。加拉力試驗時，須用薄板鉚接，所以使其板孔最易壓長，而釘最易爲板壓至屈服也。俟其已屈服後，依上述假設，由拉力計算其屈服之擠壓應力，用安全因數除之，即得貧用擠壓應力矣。已往經驗得 $\sigma_c=22,500$ 磅每方吋．又 $\sigma=15,000$ 磅每方吋 $\tau=10,000$ 磅每方吋，皆與平常同意義．

以各種強度與原板抗拉之強度相比，即得各該種效率(efficiency)；如

$$\frac{(2)}{(1)}=\frac{p-d}{p}\quad 或\quad \frac{p-2d}{p}=抗拉效率;$$

$$\frac{(3)}{(1)}=\frac{1\text{ 或 }2\text{ 倍 }n\frac{\pi}{4}d^2\tau}{ph\sigma}=抗切效率\ (\text{shearing efficiency});$$

$$\frac{(4)}{(1)}=\frac{nd\sigma_c}{p\sigma}=抗擠效率(\text{crushing efficiency}).$$

鉚釘在三行以上者，若外行之縱距等於內行者之二倍，則板由內行沿縱距拉斷，須外行鉚釘同時被切斷或擠壞，故兩種失效情形同時發生，而效率亦須就兩種混合之強度而論之也。二縱行之距離，若不小於鉚釘直徑之二倍，則板不至沿斜距扯壞；又平行縱距之邊寬，若不小於鉚釘直徑之二倍，則邊際不至失效。故此兩種強度與效率都不必討論。欲檢查鉚釘須考較其各種強度或效率——其愈近相等者爲愈佳．

習 題 十 五

1. 圖 50 示任拉構件，設其橫斷面爲長方形，寬 6 吋，厚 $\frac{3}{4}$ 吋．今用七個直徑 $\frac{15}{16}$ 吋之鉚釘，叠鉚於結合板上，其排列之法如圖所示者．結合板厚於 $\frac{3}{4}$ 吋．求其能任之最大擔負、最低效率、及其失效之情形．

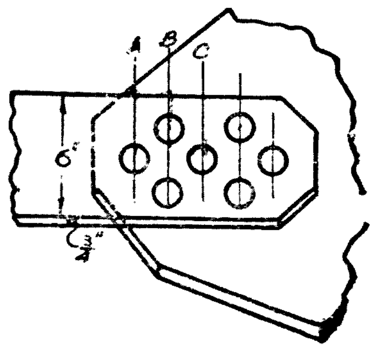


圖 50.

解．(1)任拉之棒原有之強度

$$=6\times\frac{3}{4}\times15,000=67,500 \text{ 磅}.$$

(2)七個鉚釘之抗切強度

$$=7\times\frac{\pi}{4}\left(\frac{15}{16}\right)^2\times10,000=48,300 \text{ 磅}.$$

故 $\qquad$ 抗切效率 $=\frac{48,000}{67,500}=71.7\%$.

(3)七個鉚釘抗擠之強度

$$=7\times\frac{15}{16}\times\frac{3}{4}\times22,500=110,600 \text{ 磅}.$$

故 $\qquad$ 抗擠效率 $=\frac{110,600}{67,500}=164\%$.

鉚釘效率有能超過百分之百者，此必因他種效率有過小者。各種效率愈相近，則設計愈佳．蓋將同時失效，故無偏廢之材．

(4)在橫斷面 A 處之抗拉強度

$$=\left(6-\frac{15}{16}\right)\times\frac{3}{4}\times 15,000=56,900\text{ 磅}.$$

故 A 處之抗拉效率 $=\frac{56,900}{67,500}=84.4\%$.

(5)由橫斷面 B 拉壞,同時切斷鉚釘 A 之強度

$$=\left(6-2\times\frac{15}{16}\right)\times\frac{3}{4}\times 15,000+\frac{\pi}{4}\left(\frac{15}{16}\right)^2\times 10,000$$

$=53,300$ 磅. 故 效率 $=79\%$.

(6)由橫斷面 B 拉壞,同時擠壞,鉚釘 A 之強度與效率皆較(5)項者大。

然則,此棒能任之最大拉力爲 48,300 磅;且將毀於七個鉚釘皆切也;又此鉚接之最大效率爲 71.7%. 若在橫斷面 C 處多加兩個鉚釘,直徑稍減作 $\frac{7}{8}$ 吋,則各種強度或更近相等,而最小者必增大。

2. 對於圖 50 之鉚接,在橫斷面 C 處用三個鉚釘,而各釘直徑皆改用 $\frac{7}{8}$ 吋,求其最小效率及最大擔負.

3. 鍋鑪之縱接口係三行疊鉚者 (triple lap joint). 板厚 $\frac{9}{16}$ 吋,鉚釘直徑 1 吋. 外行縱距 $4\frac{1}{2}$ 吋. 內行者 $2\frac{1}{4}$ 吋,兩行間距離 $2\frac{1}{2}$ 吋. (a)求鉚接之效率,(b)設鍋鑪之直徑爲 90 吋,求其能任之內壓力,用習題十七題 1 之資用應力. 答 76.1%; 143 磅每方吋.

19. *臨界直徑 鉚接以後，兩板間之滑阻力能影響鉚接之各種強度。惟以滑阻力雜入各種抵抗力之間，不易分別計其強弱，故今尚未明。鉚釘之設計即因其一組之各種抵抗力，以求鉚釘之直徑、縱距、及行數是也。各種抵抗力中皆含滑阻力 F 為一項，故常消去，恰如只等於鉚釘之各種強度者然。鍋爐鉚口各行之縱距若相等，則以縱距之寬為一組，恰當構件之全部鉚釘，故前者之行數，恰等於後者之釘數，以 n 代之。此 n 個鉚釘之抗切強度，須等於其抗擠壓者，即

$$n\cdot\frac{\pi}{4}d^2\tau+F=nhd\sigma_c+F;\qquad \text{或}\quad n\frac{\pi}{4}d^2\tau=ndh\sigma_c.$$

未知量 n 常能消去，故利用此式，可由擬定之鋼板厚度 h，而求鉚釘之直徑 d；此為臨界直徑(critical diameter)。

蓋以抗擠強度與直徑 d 以直線相關，而抗切者，則為拋物線。d 大於此值，則抗切者較強，反之，則抗擠者較強，故曰臨界（鉚釘直徑）常不用過一吋者，因太粗則燒紅之際，內外溫度難齊，致於打鉚之後，易生內外不同之變遷。故臨界直徑不一定照用，只比較實選者之大小，以備用耳。

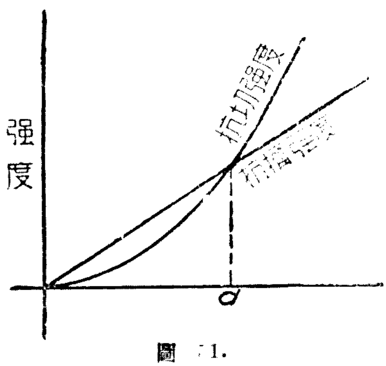


圖 51.

20. 樣件之鉚接法 鉚釘之臨界直徑既可資為選定鉚釘之標準，此外尚有鉚釘數 n 及縱距（垂直擠負者）p 為二未知量。就構

* 以下三節由著者按鍋爐設計擬作，與一般材料力學不同。

件而論，其擔負當爲已知。若實選之直徑小於臨界值，則須擔負等諸抗切強度以求鉚釘數 n. 然後將抗拉強度等諸擔負，以求每行最多之釘數。最後將外行者酌減而排列之。擔負實宜等於一種強度加滑阻力，惟後項不詳知；今日設計仍約爲零，故其得數皆失之平妥，但無不足之虞。

習題十六

1.　一任拉之棒，橫斷面爲矩形，寬 8 吋，厚 $\frac{5}{8}$ 吋，任拉力 48,000 磅。今欲以 $\frac{7}{8}$ 吋直徑之鉚釘疊鉚於結合板上。求(a)最少須用幾個鉚釘，(b)每行最多可打幾孔，(c)試擬其排列法。

解.　設 n 爲所須之鉚釘數。等抗切強度於抗擠強度以求臨界直徑:

$$n\frac{\pi}{4}d^2\times 10,000=n\times\frac{5}{8}\times d\times 22,500\qquad\therefore\ d=1.8\text{ 吋}.$$

今實選之直徑 $\frac{7}{8}$ 吋小於此值，故抗切強度較弱於抗擠強度，而須等擔負於抗切強度以求釘數 n.

$$n\cdot\frac{\pi}{4}\left(\frac{7}{8}\right)^2\times 10,000=48,000.\qquad\therefore\quad n=8.$$

設 x 爲每行釘數(行與拉力垂直)。將擔負等諸抗拉強度以求 x.

$$\left(8-\frac{7}{8}x\right)\times\frac{5}{8}\times 15,000=48,000.\qquad\therefore\quad x=3.3.$$

若每行用三個卽甚平妥. 用 9 個鉚釘按圖 52 之排列, 其邊際之寬 $=1\frac{3}{4}\div\frac{7}{8}=2$ 倍鉚釘直徑.

抗切效率 $=72\%$.

抗擠效率 $=147\%$.

A 處抗拉效率

$=86.6\%$.

B 處抗拉加鉚釘 A 抗切之效率 $=86.0\%$.

C 處抗拉加 A 與 B 處三個鉚釘抗切之效率

$=91.0\%$.

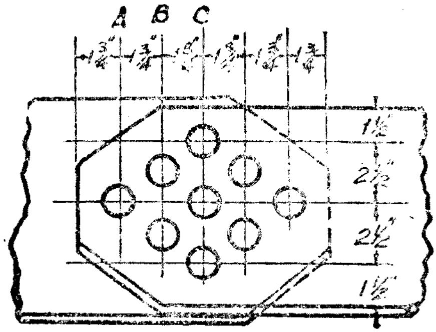


圖 52.

2. 任拉力 50,000 磅之條, 橫斷面爲矩形, 寬 7 吋, 厚 $\frac{3}{4}$ 吋. 今擬用直徑 1 吋之鉚釘, 叠鉚於結合板上, 求 (a) 最少須鉚釘幾個? (b) 每行最多能用幾個? (c) 將如何排列之? 就擬就之排列法, 求其最低效率。

3. 任拉力 38,000 磅之構件, 擬用 [字鋼料; 求次列各事:

(1) 設容用張應力爲 15,000 磅每方吋. 鉚接效率預設爲 80%; 求橫斷面積. 答 3.17 方吋.

(2) 由此檢附錄 B 表一一得最近似者爲 5 吋 11.5 磅者。其 $A=3.36$ 方吋, 脊厚 0.472 吋, 按此脊厚, 求臨界直徑. 答大於 1 吋.

(3) 設用 1 吋直徑之鉚釘, 叠鉚於結合板上, 則按其內槽對釘帽之容量論, 每行只可用一個鉚釘. 試求釘數. 答 5 個.

(4) 求抗拉與抗切效率. 答 8[illegible]%; 78%.

21. 鍋爐的鉚接法　鍋鑪之縱接口大率用對鉚，先設內外行之縱距皆爲 p，並設 n 爲鉚釘之行數，於是寬度等於 p 之一條內計有鉚釘 n 個；等此 n 個鉚釘之抗切強度於其抗擠壓強度，消去 n，可求臨界直徑，在備有之材料中，選其直徑小於 1 吋而近於此值者，於是只 n 與 p 爲二未知量矣。但寬度等於 p 的一條之擠負，亦屬未知，故只將抗拉強度等於抗切或抗擠壓強度不能解決，必須更有其他 n 與 p 相關之式：二鉚釘間之一條容板任板隙間之汽壓力而外偏，恰同兩端固定之梁載以平均分佈之擠負者，其長度 $=(p-d)$，其寬度爲 d，其厚在對鉚者爲蓋板之厚，在叠鉚者爲主板之厚，皆以 h 代之。若 f 爲每方吋之內壓力，則每吋長梁上之擠負 $=(d\times 1)f$，故其最大彎度由公式(124)爲 $\frac{1}{384}\cdot\frac{fd(p-d)^4}{30\times 10^6\times\frac{dh^3}{12}}$。若此彎度不踰0.00035 吋，則漏汽甚微，故

$$p-d=24\sqrt[4]{\frac{h^3}{f}} \tag{22}$$

既知 h, f, d 由此式可求 p。各量皆以磅吋計。然後等抗拉強度於適當之強度（若 d 小於臨界值，宜等諸抗切強度，大則等諸抗擠強度）可以求 n。

習　題　十　七

1.　鍋鑪筒之資用切應力 τ，用至 8,800 磅每方吋，張應力 σ 用至 11,000 磅每方吋，擠壓應力用至 19,000 磅每方吋，試用 $\frac{7}{16}$ 吋厚之鋼板設計鍋鑪，以任每方吋 120 磅之壓力，縱接口用對鉚，橫接口

用叠鉚。

解. 設 n 爲對鉚者之行數,各行之縱距皆設爲相等。就寬等於縱距之一條而言,其 n 個鉚釘之抗切與抗壓強度宜相等,即

$$2n\frac{\pi}{4}d^2\times 8,800=nd\times\frac{7}{16}\times 19,000.$$

故臨界直徑爲0.602吋,設選用直徑$\frac{5}{8}$吋 (=0.625 吋)者(大於臨界值,弱於抗擠壓)。

由公式(22),
$$p-p=24\sqrt[4]{\frac{\left(\frac{7}{16}\times\frac{5}{8}\right)}{120}}=2.32\text{ 吋}$$

(分子爲蓋板厚度大於主板之半)。

$$\therefore\quad p=2.32+0.625=3\text{ 吋}.$$

而
$$\text{抗拉效率}=\frac{p-d}{p}=\frac{3-0.625}{3}=79.2\%.$$

欲求行數 n,宜將抗拉強度等諸抗擠壓者,因實用之鉚釘,大於臨界直徑也。

$$n\times\frac{5}{8}\times\frac{7}{16}\times 19,000=(3-0.625)\times\frac{7}{16}\times 11,000.$$

$$\therefore\quad n=2.2,\ \text{用}\ 2.5.$$

最好之排列法,即外蓋板用兩行縱距皆等於 3 吋,內蓋板用三行縱距亦皆 3 吋;如圖 53,則 n 約近 2.5,蓋外行實疊鉚者;與內外皆用三行,而外行縱距用 6 吋者相差無幾,後法之外行縱距太大,恐漏汽。按圖 53 之排列,其抗拉效率不變,仍爲 79.2%.

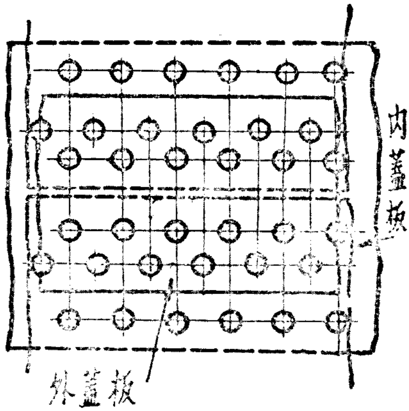


圖 53.

$$\text{抗切效率} = \frac{(2\times 2+1)\frac{\pi}{4}\left(\frac{5}{8}\right)^2\times 8,800}{3\times\frac{7}{16}\times 11,000} = 93.5\%.$$

$$\text{抗擠效率} = \frac{\left(2\times\frac{5}{8}\times\frac{7}{16}+1\times\frac{5}{8}\times\frac{7}{32}\right)\times 19,000}{3\times\frac{7}{16}\times 11,000} = 89.7\%.$$

故最低效率為 79.2%。由公式(19)求鍋鑪直徑:

$$D = 2\times\frac{11,000}{120}\times\frac{7}{16}\times 0.79 = 63.3 \text{ 吋 (或 5 呎} = 60 \text{ 吋)}.$$

環周疊鉚，設 n_1 為行數，則臨界直徑由下式求之:

$$n_1\times\frac{\pi}{4}d^2\times 8,800 = n_1 d\times\frac{7}{16}\times 19,000.$$

$$\therefore\quad d = 1.06 \text{ 吋，用 1 吋.}$$

由公式(22)，
$$p-d=24\sqrt[4]{\frac{\left(\frac{7}{16}\right)}{120}}=24\sqrt[4]{0.007}$$

$$\therefore\quad p=1+0.1625\times24\doteqdot5\text{ 吋}.$$

欲求 n_1，宜將其抗切效率等諸縱接口之最低效率；

$$\frac{n_1\frac{\pi}{4}(1^2)\times8,800}{5\times\frac{7}{16}\times11,000}=0.79\qquad\therefore\quad n=2.75,\text{ 用 }3.$$

22. 銲接 鋼鐵相接可用銲條以氧炔焰燒合之.如圖 54. A 處者稱為橫銲，B 處者稱為縱銲.縱銲之破壞，由於銲藥之切開.最小之切開面為咽喉面.咽喉之寬為臂長以 $\sqrt{2}$ 除之.美國銲條協會限定銲條須於咽喉處每方吋能任切力 11,300 磅，張力 13,000 磅.設所用之銲條能符此標準，欲將 $\frac{3}{8}$ 吋厚之板含銲，以任拉力 48,000 磅.則

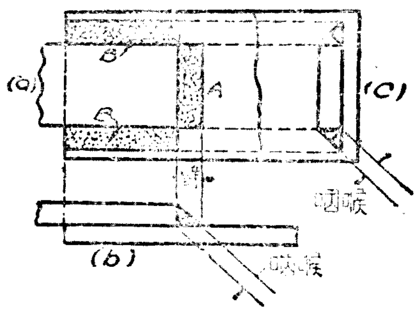


圖 54.

$$\text{臂長}=\frac{3}{8}\text{ 吋},\qquad\text{咽喉寬}=\frac{3}{8}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=0.266\text{ 吋}.$$

故
$$\text{每側縱銲口所須之長}=\frac{24,000}{0.266\times11,300}$$
$$=7.8\text{ 吋(設無橫銲)}。$$

銲條之成分著者不知　友人周旭東君曾製一種銲藥粉：含錳鐵礦 50%，黑金鋼砂（即砂輪料）25%，硼砂 19%，鋼末 10%．彼曾用以銲旋刀之刃，以之旋鋼而不壞，惜著者未曾詳試其應力能否符美國之標準（民國二十四年事）。

第三章　單純扭力

23. 扭力矩　單純扭力擔負(pure torsional load)意謂其無彎曲作用也,欲軸只任扭力須加力偶,且力偶面必須與軸垂直。如以靠背輪(coupling)發動之軸,電機軸,汽輪軸、若屬立式則只任力偶之扭,如曲柄之推力,皮帶之拉力,則除化爲力偶外尙有垂直中軸之力,此力則生彎曲,在本章問題中,雖有時亦設皮帶或曲柄,但只能討論其扭轉作用而已,其與彎曲之混合作用,俟於第九章討論之。

扭力矩(twisting moment).　力偶之扭力矩等於其一力與臂之積,單位爲磅吋。若加於某橫斷面之掣動馬力(horse power)及軸每分鐘之轉數皆爲已知,則扭力矩可由此二者求之:

每分鐘加入之功 $=33,000\times(H.P.)$ 呎磅,其 $H.P.$ 爲馬力數.

每分鐘所轉之角 $=2\pi\times(R.P.M.)$ 半徑角,其 $R.P.M.$ 爲每分鐘轉數.

故推轉之力矩, $$T=\frac{33,000\times12\times(H.P.)}{2\pi\times(R.P.M.)}\text{ 磅吋}\qquad(23)$$

若軸只在一個橫斷面上受掣動力矩,則生角加速度,軸內材料不須抗扭.必在其他橫斷面上受相等對扭之力矩而後平衡(卽不轉或等速度轉也),如是則該二橫斷面間之軸方生扭應力,此一段軸所任之扭力矩只指其一端所受者,亦猶拉力只論一端;與切力只論一面者然;其對方反向者皆不可並論也。

24. 單純切應力 設實體圓柱之半徑爲 r 吋，長爲 l 吋，兩端受對扭之力矩 T 磅吋。圓面上之基線（generating line）不受拉力，雖經扭偏，但其長度無由改變。以二基線及二橫斷面在軸表上界出薄板 $abcd$ 以爲自由體，設其厚爲 dr。在斷面 ab 及 cd 面上，因扭力必生切應力，其強度與半徑之關係雖尚未知，但設板甚薄，可約爲其平均値 τ。由環周方向之平衡，可知此二對面之 τ 相等而相反也。每面其切力 $=(ab)dr\cdot\tau$；此二對面上者合爲力偶，其力矩 $=(ab)dr\cdot\tau\cdot(b)$。但以薄板扭至 $abc'd'$ 位置後，其轉動能得平衡，是必 ad 與 bc 二對面上亦有切應力，合爲力偶以平衡上述者也。設其強度爲 τ'，則其力矩爲 $(ab)dr\cdot\tau'\cdot(ab)$。等此二力偶，得 $\tau'=\tau$。無論 $abcd$ 是否正方，此結論皆正確。泛言之，在材料中一平面上若有切應力，則在垂直該面及該切應力之平面上，必有等強之切應力，此二者稱爲互補切應力（complementary shear stress）。在 $abcd$ 外面無擠負，以外又無材料，故必無切應力；按平衡，其內面亦必無切應力也。如此長方體，其六面均無垂直應力，只兩對對面上有切應力，則稱爲單純切應力（pure shear）。論形變，其一對面仍與原位平行，他一對面由原位扭偏 cbc' 角，此角稱爲切應變（shearing strain），以 γ 表之。

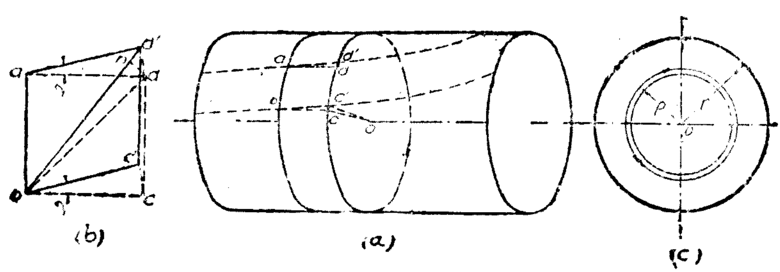


圖 55.

以 abc 三角薄板爲自由體，並在 ac 面論其平衡，可知 ac 斷面上只任張應力，設其強度爲 σ，則

$$(ab)\cdot dr\cdot\tau\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}(ab)\cdot dr\cdot\sigma, \qquad \therefore\ \sigma=\tau,$$

論 abd 三角板之平衡，可知 bd 對角面上之壓應力亦等於 τ 也。故知任單純切力之長方體，其切力作用面所夾之對角面有二：一任等強之張應力，一任等強之壓應力。材料有弱於張應力而強於切應力者如鑄鐵，任扭則沿 45° 之螺旋面而毀於張力。

bd 對角面增長之原因有二：若材料未超過彈性限度，則生於沿 bd 之張力者 $=\dfrac{\tau}{E}$，生於沿 ac 之壓力者 $=\mu\cdot\dfrac{\tau}{E}$（參看 13 節）。

共得
$$\epsilon=\frac{\tau}{E}(1+\mu) \tag{a}$$

由圖 55 (b)，在 bd' 上截取 $nb=bd$，則

$$\epsilon=\frac{nd'}{bd}=\frac{dd'\cos bd'c'}{bd}=\frac{\gamma\cdot ad}{bd}\cos\frac{1}{2}(90^\circ-\gamma)$$

$$=\gamma\cdot\cos 45^\circ\cdot\cos 45^\circ=\frac{\gamma}{2} \tag{b}$$

等(a)與(b)，則得
$$\frac{\tau}{\gamma}=\frac{E}{2(1+\mu)}=G \tag{24}$$

故材料未超過彈性限度，則其切應力與其切應變成正比，該比稱爲切力彈性係數(shearing modulus of elasticity)。

由於單純切應力 $abcd$ 立方體實儲之應變能，等於平均扭力矩（推扭者或抗扭者）乘以扭轉角 $=\dfrac{1}{2}(ab\cdot dr\cdot\tau\cdot ad)\gamma$，即

$$U=\frac{1}{2}\gamma\tau\times\text{體積}.$$

而每立方吋材料由單純切力儲存之應變能:

$$w=\frac{1}{2}\gamma\tau=\frac{\tau^2}{2G}=\frac{G\gamma^2}{2} \tag{25}$$

25. 實圓軸任扭 仍論圖55之實圓軸，設其表面上之薄板 $abcd$ 之長為 dx. 半徑 ρ 所轉之角 $d\phi$ 稱為 dx 一段之扭角 (angle of twist)，γ 稱為切力角(angle of shear, 即切應變)。

因 $\gamma=\frac{cc'}{dx}$, 而 $d\phi=\frac{cc'}{r}$. $\therefore$ $\gamma=r\frac{d\phi}{dx}=r\,\theta$.

θ 為每吋長之扭角，由公式(24)可知表面上縱橫切應力

$$\tau=Gr\theta \tag{a}$$

欲求未達彈性限度以前，內層之切應力，須加下述之二假設：(1)原來橫斷面扭轉以後，仍作平面；(2)其直徑作成直線。如是，則半徑等於 ρ 處之切應變:
$$\gamma':\gamma=\rho:r,$$

故其縱橫切應力
$$\tau'=G\rho\theta=\tau\frac{\rho}{r} \tag{b}$$

即其切應力強度與半徑成正比，在中心為零，而外表為最大也。以任一橫斷面截取軸之左半以為自由體：將斷面分為同心圓環，其半徑等於 ρ 者 (參考圖 55 c) 受移去材料之切應力強度 $=\tau\frac{\rho}{r}$;

以 dA 示管環之面積，其
$$\text{其切力}=\frac{\tau}{r}\rho\cdot dA;$$

其對中軸之
$$\text{扭力矩}=\frac{\tau}{r}\rho^2 dA.$$

故　　全面之扭力矩 $= \frac{\tau}{r}\int^{r}\rho^2 dA = \frac{\tau}{r}\cdot J$.

J 爲全面對中心之極轉動慣量 (polar moment of inertia)，再由繞中軸力矩之平衡，得扭力公式(torsional formula)：

$$\frac{\tau}{r} = \frac{T}{J} \tag{26}$$

由式(a)，得　　$\theta = \frac{\tau}{Gr}$,

再由公式(26)得　　$\theta = \frac{T}{GJ}$;

以 ϕ 示兩端半徑對扭之半徑角，則

$$\phi = \frac{Tl}{GJ}, \tag{27}$$

此謂扭角公式：θ 爲每吋兩端半徑對扭之半徑角。

實間軸之　　$J = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$.（$d$ 爲軸之直徑。）

用扭力試驗機量 T 與 ϕ，可由公式(27)求 G. 再用 E 與 G 由公式(24)可以求 μ.

設 τ_w 爲材料之資用切應力，由公式(26)，

$$\tau_w = \frac{T}{J}r = \frac{16T}{\pi d^3}.$$

又由公式(23)，得

$$\tau_w = \frac{33,000\times 12}{2\pi} \times \frac{16}{\pi d^3} \times \frac{H.P.}{R.P.M.};$$

或　　$$d = \sqrt[3]{\frac{321,000}{\tau_w} \times \frac{H.P.}{R.P.M.}}.$$

就韌鋼言 $\tau_w=9,000$ 磅每方吋.

$$\therefore \quad d=3.3\sqrt[3]{\frac{H.P.}{R.P.M.}} \tag{23}$$

此為單純抗扭韌鋼圓軸之設計公式,

26. 扭力公式與扭角公式之展開用法* 軸有在幾個橫斷面上分受發動與被動力矩者,如工廠之天軸,其發動之馬力被動之馬力.與軸承消耗之馬力皆屬已知;由此馬力數及軸之轉數,其各處之發動力矩與抵抗力矩皆可由公式(23)求出;稱此為外扭力矩(external twisting moment),發動者示以正,抵抗者示以負.

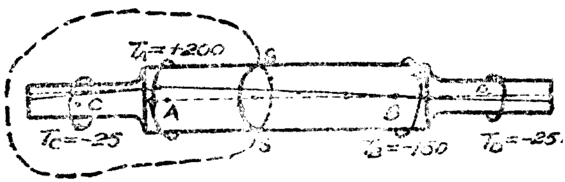


圖 56.

以外加之力矩而分軸為若干段,每段兩端所受對扭之力矩,等於由軸之一端至該段中部間諸外扭力矩之合.蓋以任一橫斷面如圖56之 s 者,截取軸之左部為自由體.可知加於斷橫面 s 之扭力矩,為自左端至該橫斷面諸外扭力矩之合.變易橫面 s 之位置而想之,可知加於 AB 段任一橫斷面上者皆為此值.又其兩端所受者等值而反號;如自軸之左端計至 A 點之右,得

$$T_C+T_A=-50+200,$$

* 此法由著者歸納而得

自軸之右端計至 B 點之左，得

$$T_D+T_B=-25-150.$$

但用全軸之平衡，得 $\quad T_C+T_A+T_D+T_B=0.$

故 $\quad T_D+T_B=-(T_C+T_A),$

卽 AB 一段兩端對扭之力矩相等也，故以此法規定每段所受之扭力矩 T，而以 l 及 d 示各段之長度及直徑，以 ϕ 示該段兩端對扭之角，則公式(26)及(27)可分用於各段也，

習 題 十 八

1，圖 56 之軸由 A 處輸入 10 馬力，由 B 處輸出 9 馬力，C 與 D 二承各耗 $\frac{1}{2}$ 馬力。軸每分鐘作 120 轉，設 (a) 每方吋之切應力不得超過 10,000 磅每方吋；(b) 長等於 20 倍直徑之軸兩端相對之扭角不得超過 1°，求各段之直徑，

解．(a) 在 A 處之發動力矩

$$=\frac{33,000\times12}{2\pi\times120}\times(H.P.)=525\times(H.P.)$$

$$=5,250 \text{ 磅吋}.$$

加於任一段之扭力矩，

$$T=525\times\Sigma(H.P.),$$

由左端至該段中部者．其 CA 段上者：

$$T=525\times\frac{1}{2}=262.5 \text{ 磅吋};$$

AB 段上者:　$T=525\times\left(10-\frac{1}{2}\right)=4,987.5$ 磅吋.

BD 段上者:　$T=525\times\left(-\frac{1}{2}+10-9\right)=525\times\frac{1}{2}=262.5$ 磅吋.

由公式(26),
$$\frac{\tau}{\left(\frac{d}{2}\right)}=\frac{T}{\left(\frac{\pi d^4}{32}\right)}.$$

$$\therefore\quad d^3=\frac{16}{\pi}\cdot\frac{T}{\tau}$$

$$=\frac{16}{10,000\pi}\cdot T=0.00051\times T.$$

故 AB 段者:　$d^3=0.00051\times 4,987.5=2.64$ 吋^3.

$\therefore\quad d=1.38$ 吋.

CA 或 BD 段者:　$d^3=0.00051\times 262.5=0.134$ 吋^3.

$\therefore\quad d=0.512$ 吋.

(b) 由公式(27),　$\phi=\frac{Tl}{GJ}$ 半徑角.

$$\therefore\quad \phi^\circ=\frac{180}{\pi}\times\frac{Tl}{12\times 10^6}\times\frac{32}{\pi d^4}.$$

但　$\frac{\phi^\circ}{l}\times 20\ d=1^\circ.$

$$\therefore\quad 1=\frac{180\times 32\times 20}{12\times 10^6\cdot\pi^2}\times\frac{T}{d^3},$$

而　$d^3=0.000973\ T.$

AB 段者:　$d^3=0.000973\times 4,987.5=4.85$ 吋^3.

$d=1.69$ 吋.

二承者: $d^3=0.000973\times262.5=0.255$

$\therefore\quad d=0.635$ 吋.

2. 圖 57 示汽輪發動之電機軸。假設 5 馬力每分 1,000 轉之 De Laval 汽輪,集中於橫斷面,3 仟瓦之電機,集中於 B, C 及 D 爲二承。$G=12\times10^6$ 磅每方吋,1馬力$=0.746$ Kw.

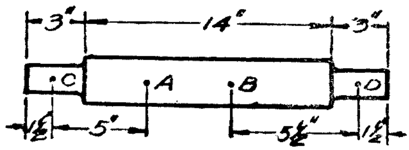


圖 57.

由題 1 之二限制,求其直徑。

答 (a) 0.53 吋, 0.246 吋; (b) 0.648 吋, 0.325 吋.

3. 圖 58 示天軸,每分鐘 120 轉,直徑 2 吋. $G=12\times10^6$ 磅每方吋. A, B, C 爲三承, F 爲發動之皮帶輪; E, G, H 爲掣動者。其馬力各在圖中註明。求(a)扭力矩以何段爲最大?(b)最大之切應力。(c)扭角以何段爲最大?(c)最大扭角合 20 倍直徑長有幾度?

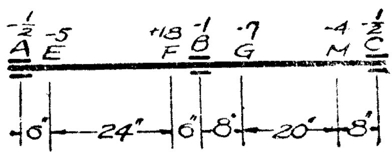


圖 58.

答(a)FB段; (b)4,180 磅每方吋; (c) EF 段之 Tl 最大; (d)每 40 吋長扭 0.72 度.

4. 鋼質圓柱兩端固定,在中段之 mn 面上受扭力矩 T. 設其資用切應力 τ_w 爲已知,求其扭角。

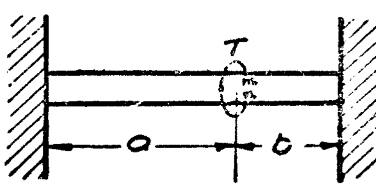


圖 ...

解. 兩段分任之扭力矩,

設爲 T_a 及 T_b，實卽兩端之反扭力矩也，僅由平衡不能規定之。論形變則兩段之扭角相等，故由公式(27)，得

$$aT_a = bT_b \tag{a}$$

又由平衡得， $$T_a + T_b = T \tag{b}$$

聯立解之得， $$T_a = T\frac{b}{a+b};$$

又 $$T_b = T\frac{a}{a+b}.$$

因 $a > b$， $\therefore\ T_b > T_a$

在公式(26)中，既知 $T = T_b$，$\tau = \tau_w$.

$$\therefore\ d = \sqrt[3]{\frac{16aT}{\pi(a+b)\tau_w}}.$$

然後由 d 求 J，用公式(27)求 ϕ.

5. 圖 60 示兩端固定之圓柱，受兩個扭力矩 T_1 及 T_2 同向扭之。設圖中之量皆屬已知，求三段所受之扭力矩。

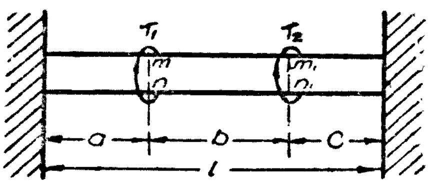


圖 60.

解. 以 T_a 代左端之反扭力矩，以 T_c 代右端者。左右兩段扭角之差卽中段之扭角；故由公式(27)，得 $$aT_a - cT_c = (T_1 - T_a)b \tag{a}$$

又由平衡，得 $$T_a + T_c = T_1 + T_2 \tag{b}$$

聯立解之得 $$T_a = \frac{T_1(b+c) + cT_2}{l}.$$

$$T_c = \frac{aT_1 + (a+b)T_2}{l};$$

又 中段之扭力矩 $= T_1 - T_a = \frac{aT_1 - cT_2}{l}$.

試按題 4 之解法，由兩個力矩分別求之，然後相加以作校對。

6. 圖 61 示皮帶式閘輪。設輪之半徑 10 吋，軸之直徑 3 吋，皮帶與輪間之將滑係數為 0.2，輪與軸逆時針迴轉，今以 100 磅之力按閘以停之。略去軸與承間之滑阻力，求軸表之切應力。

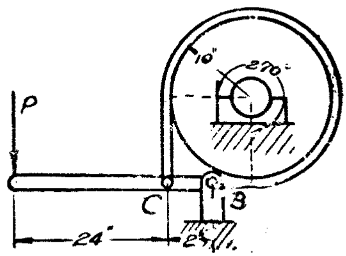


圖 62.

解. 皮帶 C 端之拉力

$$P_c = \frac{100(24+2)}{2} = 1,300 \text{ 磅}.$$

欲輪在皮帶下緩緩停止（即不按死閘），則皮帶在 B 端之拉力 P_b 不得超過 $P_c \cdot \epsilon^{\mu\theta}$（參看著者應用力學 147 頁式 1），即 P_b 最大為

$$1,300 \times 2.72^{0.2 \times \frac{3}{2}\pi} = 3,330 \text{ 磅}.$$

故 軸所受之扭力矩

$$= (3,330 - 1,300) \times 10 = 20,000 \text{ 磅吋}.$$

由公式(26)，$\tau = \frac{T}{J} r = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16 \times 20,000}{27\pi} = 3,800$ 磅每方吋.

7. 按圖 61 之安裝，惟輪順時針迴轉，餘皆與題 6 相同。求皮帶之最大拉力及軸內之切應力。

8. 兩個直徑 4 吋之軸以燊背輪 (couplings) 直接連合之。計用螺旋釘六枚排列於直徑 10 吋之圓周上。設軸表與螺釘之切應力皆限爲每方吋 10,000 磅,求螺釘之直徑.

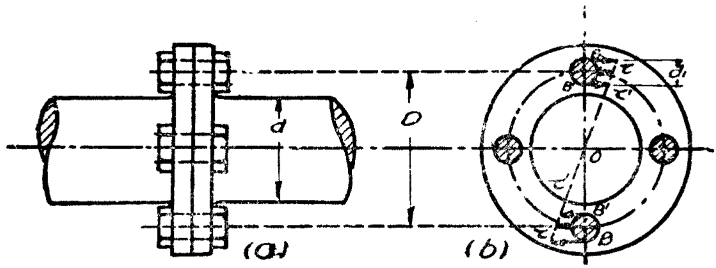


圖 62.

解. 由公式(26),傳遞之扭力矩

$$T=J\frac{\tau}{r}=\frac{\pi d^3}{16}\tau$$

$$=40,000\pi\text{ 磅吋}.$$

設直徑 AOB 扭轉之後,仍成直線,則螺釘橫斷面之切應變及切應力,必與距軸心 O 之遠近成正比例,即

$$\frac{\tau'}{\tau}=\frac{D-d_1}{D+d_1}.$$

$$\therefore\quad \tau'=\tau\cdot\frac{D-d_1}{D+d_1}.$$

$$\text{平均切應力}=\frac{\tau+\tau'}{2}=\frac{D}{D+d_1}\tau.$$

故　　　每釘之抗扭力矩$=\dfrac{\pi d_1{}^2}{4}\cdot\dfrac{D}{D+d_1}\tau\cdot\dfrac{D}{2}.$

而其六倍必等於二軸對扭之力矩,

$$\therefore \quad 6\times\frac{\pi d_1^2}{4}\cdot\frac{D}{D+d_1}\tau\cdot\frac{D}{2}=40,000\pi.$$

$$\therefore \quad d_1^2=\frac{16}{3}\cdot\frac{D+d_1}{D^2}.$$

若約 $D+d_1$ 爲 D，則

$$d_1=0.73 \text{ 吋}$$

設 $d_1=0.75$ 吋，則

$$\frac{16}{3}\times\frac{10.75}{10^2}=0.572;$$

而 $$d_1^2=(0.75)^2=0.562(\text{約合}).$$

9. 兩個 4 吋直徑之軸以靠背輪相連。螺釘之直徑 $\frac{3}{4}$ 吋，排列於直徑 8 吋之圓周上。設軸表之切應力限爲 10,000 磅每方吋，而釘內者限爲 9,000 磅每方吋，求所需之釘數。 答 [illegible].

提示 因釘數要近似整數，故釘內之平均切應力可約作 9,000 磅每方吋。

27. 空軸之抗扭力 空圓軸既扭之後，亦假設其橫斷面仍是平面，直徑仍是直線；則其橫斷面上各點之切應變及切應力亦必與半徑成正比，卽

$$\tau'=\tau\frac{\rho}{r},$$

惟只分佈於內半徑 r_1 與半徑 r 之間耳。故全面之抗切力矩

$$T=\frac{\tau}{r}\int_{r_1}^{r}\rho^2 dA=\frac{\tau}{r}\cdot J,$$

今 $$J=\frac{\pi(r^4-r_1^4)}{2}=\frac{\pi(d^4-d_1^4)}{32}.$$

又按第25節(a)式得每吋之扭角

$$\theta = \frac{\gamma}{r} = \frac{\tau}{rG} = \frac{T}{GJ}\cdot$$

若圓筒之厚度 h 較其直徑甚薄，則切應力可約爲平均分佈者，故其抗扭力矩

$$T = \pi\frac{d+d_1}{2}\cdot h\cdot\tau\cdot\frac{d+d_1}{4}\cdot \qquad \text{(a)}$$

欲將此式展用於各形式之薄筒，須將含徑之量改爲各形共有之量。令 $\frac{d+d_1}{4}$ = 薄筒之平均半徑，故 $\pi\left(\frac{d+d_1}{4}\right)^2$ = 薄筒概括之面積，代以 A，則(a)式可寫作

$$\tau = \frac{T}{2Ah} \qquad (29)$$

又每吋之扭角

$$\theta = \frac{\tau}{rG}\cdot$$

若以平均半徑代最大者，則

$$\theta = \frac{\tau}{G.\frac{d+d_1}{4}}\cdot$$

上下皆用平均周界 $s = \pi\frac{d+d_1}{2}$ 乘之，則

$$\theta = \frac{\tau s}{2GA} \qquad (30)$$

如此改造之公式(29)，(30)，可用於各形式之薄筒[1]，惟有急轉之角，宜將其改圓，抹角之半徑若大於 $\frac{1}{5}$ 吋，則 τ 較公式(29)大約加強1.5倍（參看著者進級材料力學）。

---

[1] 參考 T. Prescott, Phil. Mag.（哲學雜誌）0册，1920.

習 題 十 九

1. 船用槳(propeller)之空軸外直徑爲內直徑之二倍,每分鐘100轉,輸送8,000馬力;求直徑。

2. 圖63示正方薄筒,若以任扭,求其平均切應力。

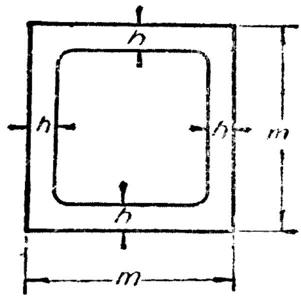


圖 63.

解. 由公式(29),平均切應力

$$\tau=\frac{T}{2Ah}=\frac{T}{2(m-h)^2h}.$$

其最大值在內角約爲上式之1.5倍.

3. 上題之扭力矩 $T=10^5$ 磅呎, $m=20$ 吋,材料之資用切應力爲9,000磅每方吋;求所須之厚度 h,及其每吋之扭角。

解. 材料內之平均切應力

$$=\frac{9000}{1.5}=6,000 \text{ 磅每方吋}.$$

由公式(29), $$h(20-h)^2=\frac{12\times100,000}{2\times6,000}.$$

$$\therefore\quad h(10-h)\doteqdot2\cdot5,\qquad (h^3\doteqdot0).$$

設 $h=0.25$, 則 $h(10-h)=2.44$;

若 $h=0.255$, 則 $h(10-h)=2.485$.

$$\therefore\quad h=0.256 \text{ 吋}.$$

又由公式(30)，　$\theta=\dfrac{4(m-h)\tau}{2(m-h)^2G}=\dfrac{2\times 6,000}{19.74\times 12\times 10^6}$

$$=5.07\times 10^{-5}\text{ 半徑角/吋}$$

4．今有用以減低轉數之空齒輪，其內直徑爲 3 吋，其平均外直徑爲 10 吋，每分轉數 2,900，輸送 9,000 馬力．設齒輪長 20 吋並可擬爲外直徑 10 吋之平軸，並設擔負沿其長度平均分佈，G 爲 11.2×10^6 磅每方吋，求一齒兩端相對之偏度。

答兩端相對偏角 $\phi=\dfrac{\left(\frac{T}{2}\right)l}{GJ}$；偏度 $\delta=\phi\cdot\dfrac{d}{2}=1.8\times 10^{-3}$ 吋．

5．直徑 1 吋之鋼圓軸，有兩 2 吋直徑之凸起環。厚 $\frac{1}{20}$ 吋之薄鋼筒，燒熱穿入鋼軸，以 50 磅呎之扭力矩，將軸扭偏 1°，以俟鋼筒冷卻而箍於其二環之上。及冷卻之後，移去扭力矩，求軸內殘留之扭力矩。

答 457 磅吋．

28．過彈性限度之扭力　韌鋼圓軸未達彈性限度以前，橫斷面上各點之切應力，與其半徑成正比，其示線之箭頭皆在 OB 直線上。設 AC 示材料之屈服點 τ_y．當其外表既達屈服點，雖其扭角仍隨外加之扭力臂共轉，而繼續增多，但其切應力則常等於 AC，以俟內部材料展其應力，故扭力公式(26)今後不可復用矣。及至內表之材料亦達屈服點，則此時全面上之切應力等強（圖 64 $A'C'=AC$），其抗扭力矩不難算出。

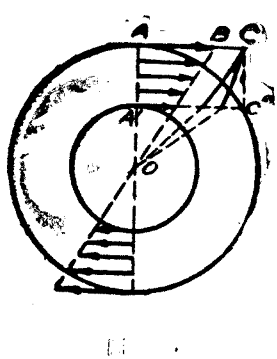


圖 64

當外表初達屈服點之時，軸表之扭角

尙可用公式(27)求之，以後則不可復用於此處矣。其內部初達屈服點處之扭角，仍由公式(27)求之，在此層以外之材料，切應力不增，姑隨之扭耳。及外表之扭角達某定值時，外表之材料先復其彈性，切應力仍繼續增高，而內部之既屈服者則追隨而扭轉。至內表亦復，則全部材料之 τ 又與 γ（可代表 ϕ）共增，惟其比 G 已非常數（τ 高則 G 減小），直至於斷折而止。

例題． 10呎長之韌鋼空軸，外直徑 4 吋，內直徑 2 吋。材料之切應力屈服點爲 10 長噸每方吋（英制 2240 磅＝1 長噸。美制以 2000 磅＝1 短噸）。設材料之既經屈服者切應力不增，求全屈服時之抗扭力矩及扭角。$G=12\times10^6$ 磅每方吋。

解． 至全屈服時全面之切應力強度皆爲 $\tau_y=10$ 短噸每方吋，

故 共切應力 $=\dfrac{\pi}{4}(d^2-d_1{}^2)\tau_y=\dfrac{\pi}{4}\times6\times2\times10$

$=30\pi$ 短噸。

其對中軸之抗扭力矩

$$=30\pi\times\frac{2+1}{2}=142 \text{ 長噸吋.}$$

內表初屈服時軸之扭角

$$\phi=\frac{\tau_y}{r_1}\cdot\frac{l}{G}=\frac{10\times2240}{1}\times\frac{120}{12\times10^6}$$

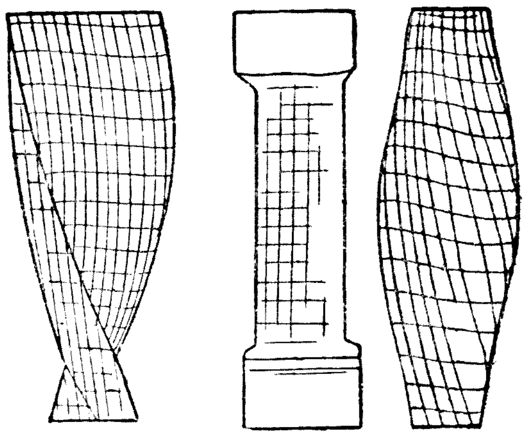
$=0.224$ 半徑角，即 $12.8°$。

外表初屈服時軸之扭角

$$\phi=\frac{\tau_y}{r}\cdot\frac{l}{G}=\frac{10\times2240\times120}{2\times12\times10^6}$$

$=0.112$ 半徑角，即 $6.4°$。

29. 非圓軸之任扭　凡非圓軸,其原來橫斷面至扭轉以後,皆非平面而捲曲——四個象限交錯凸凹。至其交界之一對,縱橫軸處凸凹之量皆減為零,故只此一對縱橫軸尚能保持為直線,餘均一半上彎,一半下彎。圖 65 示橢圓軸與方軸扭轉後表面上方格之形變。



c　b　a

圖 65。

硬材料之形變極微,不能直接觀察,至其形變能見之時,材料早已超過其彈性限度矣,故不能由其形變以推測其切應力之大小。彈性材料如橡皮可用以為模型。受範性材料如活字版之合金(銻、鉛、錫、)其不復之形變約與切應力成正比,故可用以代表材料在彈性限度內之形變,最適於作模型之用,由圖 65 推測在短軸兩端之方格形變最著,故切應力亦最強,此與假設橫斷面仍保持平面所得之推論恰相反。

在公元1917年以前，工程界不注意非圓軸之扭。此後方知I，T，L梁有時因擔負不正必須任額外之扭(參看第89節)。用算學研究非圓軸任扭時之切應力及扭角，創自 St. Venant(參考 Love 著 Theory of Elasticity，或 Prescott 著 Applied Elasticity)。用薄膜試驗推演之法，創於 Prandtl，成於 Griffith 與 Taylor(參考 Proc. Inst. Mech. Eng. 1917, p. 755)。本書只按 Bach 之簡略方法，討論橢圓軸與長方軸之切應力，各與其最長最短二度有何理論關係，然後詳列其試驗與理論相符之常數，以備應用而已。其證明中之假設或非常識所能擬想者，實難準以繩墨，亦姑寬假之而已。

在涉及本問題之前，吾人應先證明關於切應力方向之定理一則：即材料斷面上若任切應力，則在周界上者必沿切線。

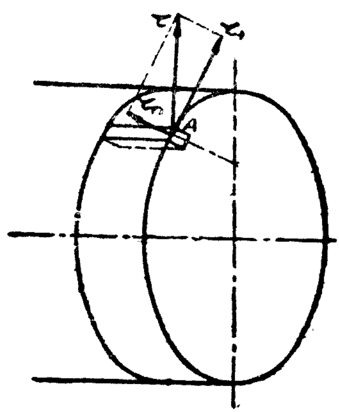


圖 66.

證. 圖66，設 A 點之切應力不沿切線，必可分解為沿切線之分力 τ_t 及垂直之分力 τ_n。在 A 處用一個與斷面平行之面，一個與切線平行者，一對與切線垂直者，界出小長方體。則在右面上既有 τ_t，左面必有反向之 τ_t，而更須上下面上等強之互補切應力以平衡之也(參看第24節)。同理，右面上既有 τ_n，左面上必有反向者，而前後面上必有等強之對扭者。但前面即外面，是外更無材料，必不能由材料之互切以生之也；若沿周面之基線又無擔負，則

此互補之切應力無由而生。再繼以左右方向之平衡，可知其內面雖有材料，亦不能有切應力也。既對扭者須等於零，則原來之 τ_x 必等於零，或 A 點之切應力必沿該點周邊之切線也。

在鉚釘橫斷面上之切應力，當如圖 67 所示者，惟關於各處強度，須加假設方能計算，不如不論方向，而假設其爲平均分配之簡單者。試驗鉚釘被切以求其切應力時，卽由此假設而計算之；除以安全因數後，再由此假設返回以作設計，雖該假設與自然或有不合，亦必不生錯誤。

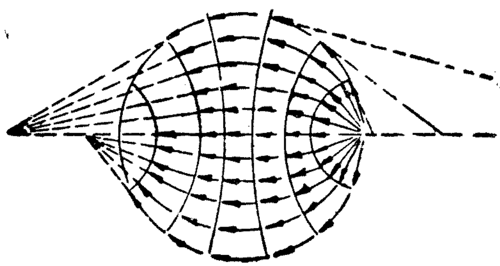


圖 67.

30.* 橢圓軸任扭　圖 68 示橢圓軸之橫斷面，其短直徑之長設爲 b，長直徑之長爲 h，扭後，此二者仍爲直線(看上節)。以 τ 示其表

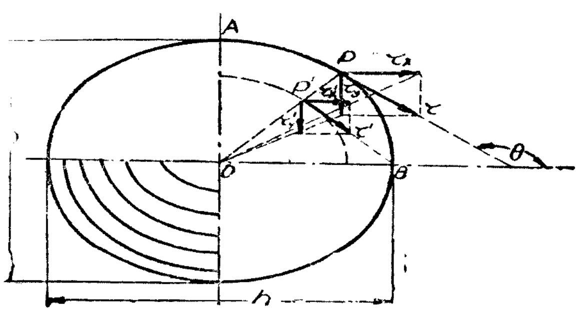


圖 68.

* 本節採自 Seely 之 Advanced Mechanics of Materials, 65 節.

面上 P 點之切應力。用相似橢圓分柱體爲薄筒，其接觸面上既無切應力（參看上節），故恰如不相連屬者。凡在一個半徑上之諸點曰對應點，如 P 與 P' 爲對應點。設 P 點之坐標爲 (x,y)，P' 點之坐標爲 (x',y')，經 P' 點橢圓之直徑爲 b',h'.

就 P 點言，
$$\frac{x^2}{\left(\frac{h}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1.$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{h^2}\cdot\frac{x}{y}.$$

就 P' 點言，
$$\frac{x'^2}{\left(\frac{h'}{2}\right)^2}+\frac{y'^2}{\left(\frac{b'}{2}\right)^2}=1.$$

$$\therefore\quad \frac{dy'}{dx'}=-\frac{b'^2}{h'^2}\cdot\frac{x'}{y'}.$$

負號示其第二象限內 θ 角之正切。因

$$\frac{b'}{h'}=\frac{b}{h},\qquad \text{又}\qquad \frac{x'}{y'}=\frac{x}{y},$$

故知對應點之切線平行，即二點之切應力 τ 與 τ' 平行也。

於是
$$\frac{\tau_y}{\tau_x}=+\frac{b^2}{h^2}\cdot\frac{x}{y};$$

且
$$\frac{\tau_y'}{\tau_x'}=+\frac{b'^2}{h'^2}\cdot\frac{x'}{y'}.$$

故
$$\frac{\left(\frac{\tau_y}{x}\right)}{\left(\frac{\tau_x}{y}\right)}=\frac{b^2}{h^2}=\frac{\left(\frac{\tau_y'}{x'}\right)}{\left(\frac{\tau_x'}{y'}\right)}.\qquad \text{(a)}$$

就一點而論，其切應力之分力與其坐標有何關係（即(a)式中四項之比爲何）尙屬未知；但知其合於 P 者必合於 P'。

故必 $$\frac{\tau_y}{x}=\frac{\tau_y'}{x'};\quad 而\quad \frac{\tau_x}{y}=\frac{\tau_x'}{y'}\tag{b}$$

用諸圓軸則 $$\left.\begin{aligned}\tau_y&=\tau\sin\theta\\ x&=r\sin\theta\end{aligned}\right\};\qquad \left.\begin{aligned}\tau_x&=\tau\cos\theta\\ y&=r\cos\theta\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}\tau_y'&=\tau'\sin\theta\\ x'&=r'\sin\theta\end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned}\tau_x'&=\tau'\cos\theta\\ y'&=r'\cos\theta\end{aligned}\right\},$$

由(b)式，得 $$\frac{\tau_x}{y}=\frac{\tau_x'}{y'}.\qquad \therefore\quad \frac{\tau'}{r'}=\frac{\tau}{r},$$

與圓軸結論第 25 節公式(b)相合。P' 點之切應力之分力對中軸之

抗扭力矩， $$T=\int\tau_x'\cdot y'\cdot dA+\int\tau_y'\cdot x'\cdot dA.$$

由(b)式，得 $$\tau_x'=\frac{\tau_x}{y}y';\quad 又\quad \tau_y'=\frac{\tau_y}{x}\cdot x'.$$

$$\therefore\quad T=\frac{\tau_x}{y}\cdot I_x+\frac{\tau_y}{x}\cdot I_y.$$

由(a)式，得 $$\frac{\tau_y}{x}=\frac{b^2}{h^2}\cdot\frac{\tau_x}{y},\quad 或\quad \frac{\tau_x}{y}=\frac{h^2}{b^2}\cdot\frac{\tau_y}{x}.$$

故 $$T=\frac{\tau_x}{y}\left(I_x+\frac{b^2}{h^2}I_y\right)$$

$$=\frac{\tau_x}{y}\left(\frac{\pi b^3h}{64}+\frac{b^2}{h^2}\cdot\frac{\pi bh^3}{64}\right)=\frac{\tau_x}{y}\cdot\frac{\pi b^3h}{32}.$$

或
$$T=\frac{\tau_y}{x}\left(\frac{h^2}{b^2}I_x+I_y\right)$$

$$=\frac{\tau_y}{x}\left(\frac{h^2}{b^2}\cdot\frac{\pi b^3h}{64}+\frac{\pi bh^3}{64}\right)=\frac{\tau_y}{x}\cdot\frac{\pi bh^3}{32}.$$

故
$$\tau_x=\frac{32T}{\pi b^3h}\cdot y.$$

在 A 點 $\quad \tau_x=\tau_A,\qquad y=\frac{b}{2}\cdot$

$$\therefore\quad \tau_A=\frac{16T}{\pi b^2h} \tag{31,a}$$

又
$$\tau_y=\frac{32T}{\pi bh^3}\cdot x.$$

在 B 點 $\quad \tau_y=\tau_B,\qquad x=\frac{h}{2}\cdot$

$$\therefore\quad \tau_B=\frac{16T}{\pi bh^2} \tag{31,b}$$

由公式(31,a)及(31,b),得 $\quad \frac{\tau_A}{\tau_B}=\frac{h}{b}$ (d)

用於圓軸 $\quad h=b=d.$

$$\therefore\quad \tau_A=\tau_B=\frac{16T}{\pi d^3}.$$

按 St. Venant 證明每吋之扭角,

$$\theta=\frac{4\pi^2}{A^4}\cdot J\cdot\frac{T}{G} \tag{32}$$

對橢圓軸(32)式,化爲　$\theta=\frac{16(b^2+h^2)}{\pi b^3h^3}\cdot\frac{T}{G}$　(33)

對圓軸(32)式,化爲　$\theta=\frac{32}{\pi d^4}\cdot\frac{T}{G}=\frac{T}{GJ}$,卽公式(27)也。

習　題　二　十

1. 橢圓軸之長短直徑各爲 $3\frac{1}{2}$ 吋及 $1\frac{1}{2}$ 吋,任扭力矩 13,500 磅吋。材料之切應力彈性限度爲 25,000 磅每方吋。求材料中之最大切應力。

答 $t=8,750$ 磅每方吋。

2. 橢圓軸之長短直徑各爲 $1\frac{1}{4}$ 吋與 $\frac{3}{4}$ 吋,材料之抗切彈性限度爲 30,000 磅每方吋,脊用切應力達此值之半,求其能任之扭力矩。

31.* 長方軸任扭　圖 69 示長方軸之橫斷面,長度爲 b,寬度爲 c。任扭以後,其兩個對稱軸仍設爲直線。其周邊之切應力皆沿周邊;在 C 角之切應力既不能沿兩個方向,則必等於零。設將橢圓拉成直線,則其

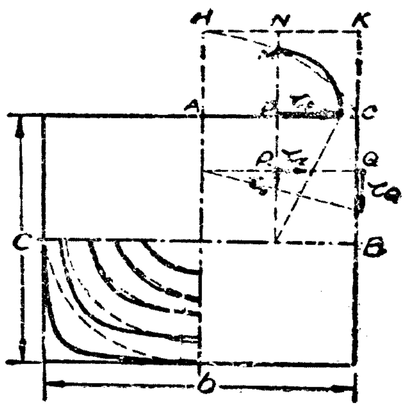


圖 69.

* 本節仿 Seely 之 Advanced Mechanics of Materials, 60 節而改編者。

半徑皆變成垂直線，故在垂直線上之點爲對應點，前論橢圓軸時，由式(b)已知對應點切應力之同向分力，與其垂直坐標成正比例，今仿此爲假設，則就 R 與 P 二對應點而言：

$$\frac{\tau_x'}{y'}=\frac{\tau_P}{\left(\frac{c}{2}\right)};\tag{a}$$

就 R 與 Q 二對應點而言，

$$\frac{\tau_y'}{x'}=\frac{\tau_Q}{\left(\frac{b}{2}\right)}\tag{b}$$

欲能求抗扭力矩 T，須知 τ_P 及 τ_Q 各與其坐標有何關係，此可按外表上方格之形變考查之：在 A 點方格之形變最多，至 C 爲零；由 A 至 C 測得其形變按拋物線遞減，故切應力強度亦按拋物線遞減。

$$\therefore\quad \frac{\tau_P}{\tau_A}=\frac{PM}{AH};$$

即

$$\frac{\tau_A-\tau_P}{\tau_A}=\frac{MN}{CK}=\frac{x^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

於是

$$\tau_P=\tau_A\left[1-\left(\frac{2x}{b}\right)^2\right];$$

$$\tau_Q=\tau_B\left[1-\left(\frac{2y}{c}\right)^2\right],\tag{c}$$

代(c)於(b)，則

$$\tau_x'=\frac{2\tau_A}{c}y'\left(1-\frac{4x^2}{b^2}\right),$$

$$\tau_y'=\frac{2\tau_B}{b}x'\left(1-\frac{4y^2}{c^2}\right).\tag{d}$$

圖 69 第三象限之曲線示切應力之方向，近 OA 與 OB 處皆類似橢

圓，惟近外表者中部向 C 角外突耳。故 τ_A，τ_B 與 b，c 之關係，仍可設與橢圓相同，即

$$\frac{\tau_A}{\tau_B}=\frac{b}{c} \tag{e}$$

然則，全面之抗扭力矩

$$T=\int\tau_x' y' dA+\int\tau_y' x' \cdot dA.$$

由(d)及(e)，

$$T=\frac{2\tau_A}{c}\left[\int y'^2 dA-\frac{4}{b^2}\int x'^2y'^2dA\right]$$

$$+2\tau_A\cdot\frac{c}{b^2}\left[\int x'^2 dA-\frac{4}{c^2}\int x'^2y'^2\cdot dA\right].$$

但

$$\int y'^2dA=\frac{bc^3}{12};$$

$$\int x'^2dA=\frac{cb^3}{12};$$

$$\int x'^2y'^2dA=\frac{b^3c^3}{144}.$$

$$\therefore\quad T=\frac{2}{9}bc^2\tau_A.$$

或

$$\tau_A=\frac{9}{2}\cdot\frac{T}{bc^2} \tag{f}$$

上式之證明有許多假設，故其結論式(f)之常數亦非甚確者常寫作

$$\tau_A=\frac{T}{\alpha bc^2} \tag{33}$$

其 α 之值隨 $\frac{b}{c}$ 而變，約等於 $\dfrac{1}{3+1.8\frac{c}{b}}$，其確值如下表。

又 τ_B 亦可寫作(32)式之形式，即

$$* \quad \tau_B=\frac{T}{\alpha bc^2}. \tag{33,a}$$

長方軸每时之扭角 θ 亦可用公式(32)計算之:

即 $$\theta=\frac{4\pi^2}{b^4c^4}\cdot\frac{bc^3+cb^3}{12}\cdot\frac{T}{G}=\frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{b^2+c^2}{b^3c^3}\cdot\frac{T}{G}.$$

若 c^2 較 b^2 甚小，則 $$\theta=\frac{T}{\beta bc^3G} \tag{34}$$

β 約等於 $\dfrac{3}{\pi^2\left(1+\dfrac{c^2}{b^2}\right)}$，其確値亦如下表。以此式與(27)式比較，$\beta bc^3$ 可稱爲矩形軸相當之極轉動慣量 J.

$\frac{b}{c}$	1.00	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	4.00	6	8	10	∞
α	.208	.231	.239	.246	.258	.267	.282	.299	.307	.313	.333
α_1	.208	.270	...	.309	...	.354	.379	.402	...	...	.448
β	.141	.196	.214	.229	.249	.263	.281	.299	.307	.313	.333

由此表可知 $b=3c$ 以上， 則 $\alpha=\beta$， 而 $\alpha_1=\frac{4}{3}\alpha$.

又如極薄之板任扭，則 α 與 β 皆約爲 $\frac{1}{3}$.

故薄板之任扭者，最大之 $$\tau=\frac{3T}{bc^2} \tag{35,a}$$

每时扭角 $$\theta=\frac{3T}{bc^3G} \tag{36,a}$$

* 此式見 Timoshenko 之 Strength of Materials，第一册 275 頁式(b).

其他形狀之薄板，如 L，[，I 橫斷面之鋼料，亦可用公式(35,a)及(36,a)以約計其切應力與扭角：如圖 70 (a)，則上式 $b=r\phi$，如同圖(b)及(c)，可想作不相連屬之薄長方板，分計其 bc^3 而綜合之，代入(36,a)式，以求其每时之扭角 θ.

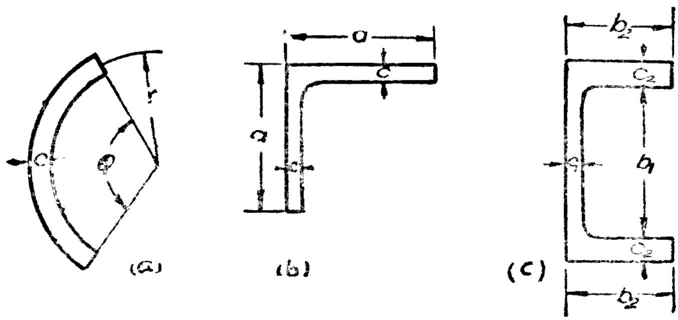


圖 70.

在同圖(b)，
$$\theta=\frac{3T}{(2a-c)c^3G};$$

在同圖(c)，
$$\theta=\frac{3T}{(b_1c_1^3+2b_2c_2^3)G} \qquad (36,b)$$

綜合各種軸每时之扭角 θ，皆可寫作

$$\theta=\frac{T}{GJ},$$

惟 J 爲各形之相當極轉動慣量。圓軸之極轉動慣量

$$J=\frac{\pi d^4}{32};$$

橢圓之相當極轉動慣量 $J=\dfrac{\pi h^3b^3}{16(h^2+b^2)}$；

矩形之相當極轉動慣量 $J=\beta bc^3$.

GJ 稱爲軸之抗扭硬度(torsional rigidity of shaft)。

因(36,a)式乘以Gc，卽得(35,a)式之最大切應力。故(36,b)式亦可作如是觀，惟須在部分中選最大之c以乘之耳。

同圖(b)最大之 $$\tau=\frac{3T}{(2a-c)c^2};$$

同圖(c)最大之 $$\tau=\frac{3T\cdot c_2}{b_1c_1^3+2b_2c_2^3} \qquad (35,b)$$

惟以各矩形實相連屬，故θ較(36,b)式所得者小。又因其相連角有急轉，故最大之τ較(35,b)式所得者大，如抹去內角之半徑大於$\frac{1}{5}$吋，宜照(35,b)式加強1.5倍，俾顯於內角處也。

習 題 二 十 一

1. 圖71(a),(b)二筒之材料與幾何度皆相同。惟(a)有縱裂縫，求其最大切應力及每吋之扭角。

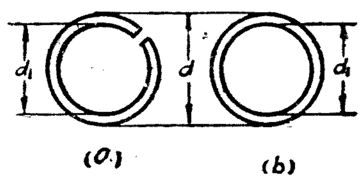


圖 71.

解. 圖(b)每吋之扭角

$$\theta=\frac{T}{GJ},$$

$$\theta=\frac{32T}{\pi(d^4-d_1^4)G}.$$

由公式(36,a)得圖(a) $$\theta_1=\frac{3T}{\pi\left(\frac{d+d_1}{2}\right)\left(\frac{d-d_1}{2}\right)^3G}.$$

$$\therefore \quad \frac{\theta}{\theta_1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{(d-d_1)^2}{d^2+d_1^2}\doteqdot\frac{4}{3}\left(\frac{h}{d}\right)^2.$$

又圖(b)之　　$$\tau=\frac{T}{J}\cdot\frac{d}{2}=\frac{16d}{\pi(d^4-d_1^4)}\cdot T$$

而圖(a)　　$$\tau_1=Gc\theta_1=\frac{3T}{\pi\left(\frac{d+d_1}{2}\right)\left(\frac{d-d_1}{2}\right)^2}.$$

$$\therefore \quad \frac{\tau}{\tau_1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{(d-d_1)d}{d^2+d_1^2}\doteqdot\frac{2}{3}\cdot\frac{h}{d}$$

2. 圖 70(c)之［字鋼料任扭力矩 20,000 磅吋.

設　$b_1=10$ 吋，　$b_2=3.5$ 吋，　$c_1=0.4$ 吋，

$c_2=0.6$ 吋，　$G=12\times10^6$ 磅每方吋。

求其每吋之扭角及其最大切應力。

答 $\theta=0.00233$ 半徑角每吋；$\tau=16,776$ 磅/方吋.

32. 扭轉所生之次要應力 圓軸被扭，則其表面基線化爲螺線，故其兩底較前移近，既有變長必生張應力。

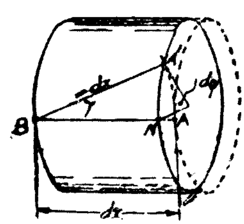


圖 72.

設其內外各層不相連屬，且於兩端只受單純扭力，則各層薄筒之短縮自由。今在其半徑等於 r 之一層上設想一段 BA 長 $=dx$. 扭轉 $d\phi$ 以後(設左面不動，右面半徑之相對扭角 $=d\phi$). 其一基線 BA 之長($=dx$)不變，扭至 BA'，而此段筒長變爲

$$BN=dx.\cos\gamma.$$

故其應變 $\epsilon = \frac{dx(1-\cos\gamma)}{dx} = 1-\left(1-\frac{\gamma^2}{2!}+\frac{\gamma^4}{4!}-\cdots\right)$,

$$\epsilon = \frac{\gamma^2}{2} = \frac{\tau^2}{2G^2} = \frac{1}{2}\left(r\cdot\frac{d\phi}{dx}\right)^2 = \frac{r^2\theta^2}{2} \qquad \text{(a)}$$

就實體軸之各層而論，$\frac{\tau}{\tau_{大}} = \frac{2r}{d}$，（$d$ 爲軸之直徑）。

$$\therefore\quad \epsilon_{在\gamma層者} = \frac{2r^2}{d^2}\cdot\frac{\tau_{大}^2}{G^2} \qquad \text{(b)}$$

此式示一拋物面 $A'OB'$. 實因各層互相牽掣，其近外皮者受內層之拖累，而致縮短不及(b)式之值，近中軸處受外層之提攜，以致縮短超乎(b)式之值。軸之底面如何除自然界外無有知者。但如鋼鐵等硬材料，其各層之縮減甚微，蓋據平常之測量，仍得平面（如 A_1OB_1），故各層之縮減必等於(b)式綜合之平均值。

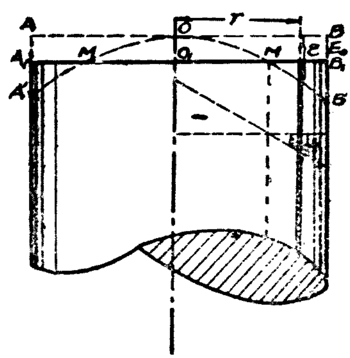


圖 73.

$$\therefore\quad \epsilon_0 = \frac{\int\epsilon\cdot dA}{\int dA} = \frac{2\tau_{大}^2}{d^2G^2}\cdot\frac{1}{A}\int_0^{d/2} r^2 dA$$

$$= \frac{2}{d^2}\cdot\frac{\tau_{大}^2}{G^2}\cdot k_j^2 = \frac{\tau_{大}^2}{4G^2}\ * \qquad \text{(c)}$$

（k_j^2 爲底面對中心之迴轉半徑平方 $= \frac{d^2}{8}$）.

* ϵ_0 之推算較 Timoshenko 之 Strength of Materials 第一冊，88 頁者有改正.

故各層平均之張應力　　$\sigma_{\circ}=\dfrac{E\tau_{大}^2}{4G^2}$　　(d)

然則 r 層實有之應變 $=\epsilon-\epsilon_{\circ}=\dfrac{\tau_{大}^2}{G^2}\left(\dfrac{2r^2}{d^2}-\dfrac{1}{4}\right)$

而　　實有之張應力 $=\sigma=E(\epsilon-\epsilon_{\circ})=\dfrac{E\tau_{大}^2}{G^2}\left(\dfrac{2r^2}{d^2}-\dfrac{1}{4}\right)$　　(e)

近外表者，(e)式得正，爲張應力．近中軸得負，爲壓應力。

在 $r=\dfrac{d}{2}$ 處張應力最大，　　$\sigma_{大}=\dfrac{E\tau_{大}^2}{4G^2}$；

在 $r=0$ 處張應力最小，　　$\sigma_{小}=-\dfrac{E\tau_{大}^2}{4G^2}$．

有一層之縮短不受牽掣者，曰自然層，必在 $\epsilon=\epsilon_{\circ}$ 處，即

$$r=\frac{d}{2\sqrt{2}}=k_j.$$

或由(a)式得 r 層之自然應變　$\epsilon=\dfrac{r^2\theta^2}{2}$．

就底面綜合而平均之，得　　$\epsilon_{\circ}=\dfrac{\theta^2}{2}\cdot\dfrac{\int r^2dA}{\int dA}=\dfrac{\theta^2}{2}k_j^2$．

故　　r 層實有之應變 $=\epsilon-\epsilon_{\circ}=\dfrac{\theta^2}{2}\cdot(r^2-k_j^2)$；

而其實有之張應力　　$\sigma=\dfrac{E\theta^2}{2}(r^2-k_j^2)$

$$=\frac{E\theta^2}{2}\left(r^2-\frac{d^2}{8}\right) \qquad \text{(f)}$$

素線扭轉以後與原位之傾角，$\gamma=r\theta$．

其張應力與底面平行之分力

$$=\sigma\sin(r\theta)\doteqdot\sigma r\theta=\frac{E\theta^3}{2}\left(r^3-\frac{rd^2}{8}\right),$$

$$\text{薄筒底上之共值}=\frac{E\theta^3}{2}\left(r^3-\frac{rd^2}{8}\right)2\pi r\,dr;$$

$$\text{對中心力矩}=\pi E\theta^3\left(r^5-\frac{r^3d^2}{8}\right)dr.$$

張應力對中軸共有之抗扭力矩

$$=\pi E\theta^3\int_0^{\frac{d}{2}}\left(r^5-\frac{r^3d^2}{8}\right)dr=\frac{\pi E\theta^3d^6}{1536}.$$

由於切應力及張應力共生之抗扭力矩

$$=JG\theta+\frac{\pi E\theta^3d^6}{1536}$$

$$T=\frac{\pi d^4}{32}G\theta\left(1+\frac{1}{48}\cdot\frac{E}{G}\cdot\theta^2\cdot d^2\right)\qquad(g)$$

就韌鋼而論，$\frac{E}{G}=2.6$，$G=11.5\times10^6$ 磅每方吋．如 $d=2$ 吋，雖扭力矩 $T=\frac{\pi}{2}\times11.5\times10^3$ 磅吋，而 $\theta+0.2\theta^3=0.001$．θ 既小於 0.001，故 $0.2\theta^3$ 極小，即就韌鋼圓軸而論，張應力增強，抗扭之作用甚微。

又

$$\tau_{大}=G\theta\frac{d}{2}=11.5\times10^6\times0.001\times\frac{2}{2}$$

$$=11,500\text{ 磅每方吋}.$$

而 $$\sigma_{大}=\frac{1}{4}\frac{E}{G^2}\tau_{大}{}^2=\frac{2.6}{4}\times\frac{11,500^2}{11,500,000}$$

$=3$ 磅每方吋，亦甚小者.

若軸非圓形而為薄矩形，或為其他碾製之 I 或 [橫斷面者，則張應力甚大，且其增強抗扭力矩（即減小扭角 θ）之作用亦甚著。玆就薄矩形之斷面 $b\times c$ ($b>c$) 而論之:
以經重心與 c 邊平行之軸為 Z 軸，距 Z 等於 y 的薄層之應變，比擬 (a) 式;

$$\epsilon=\frac{\gamma}{2}=\frac{y^2\theta^2}{2} \qquad (a')$$

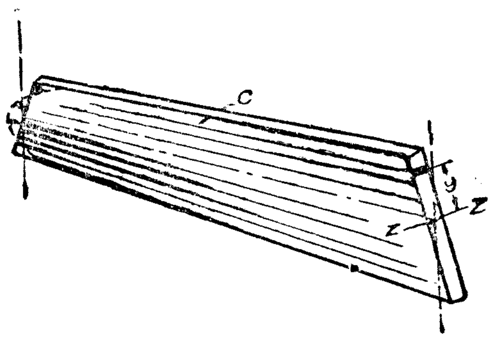


圖 74.

又由公式(35,a), $$\tau_{大}=\frac{3T}{bc^2};$$

由公式(36,a), $$\theta=\frac{3T}{bc^3G}.$$

$$\therefore\quad \tau_{大}=Gc\theta.$$

而距中立層等於 y 處之應變

$$\epsilon=\frac{y^2}{2c^2}\cdot\frac{\tau_{大}{}^2}{G^2} \qquad (b')$$

仍設於扭轉之後，兩底仍約爲平面〔此非謂不捲曲也；捲曲者，四個象限交錯凸凹。(b)及(b′)所示者爲拋物面，今約作平面，謂非拋物面，實則爲四個象限交錯凸凹之面也〕，則各層之平均應變

$$\epsilon_\circ=\frac{\int\epsilon\,dA}{\int dA}=\frac{\tau_{大}^2}{2c^2G^2}\cdot k_z^2=\frac{\tau_{大}^2}{24G^2}\cdot\frac{b^2}{c^2}\qquad(c')$$

k_z 爲底面對 Z 軸之迴轉半徑。

y 層實有之應變，
$$\epsilon-\epsilon_\circ=\frac{\tau_{大}^2}{2c^2G^2}\left(y^2-\frac{b^2}{12}\right)$$

其實有之張應力，
$$\sigma=\frac{E\tau_{大}^2}{2c^2G^2}\left(y^2-\frac{b^2}{12}\right)\qquad(e')$$

在 $y=\frac{b}{2}$ 處張應力最大，　$\sigma_{大}=\frac{E\tau_{大}^2}{12G^2}\cdot\frac{b^2}{c^2}$；

在 $y=0$ 處最小，　$\sigma_{小}=-\frac{E\tau_{大}^2}{24G^2}\cdot\frac{b^2}{c^2}$。

或由(a′)式，　$\epsilon=\frac{y^2\theta^2}{2}$；　就底面綜而均之，　$\epsilon_\circ=\frac{\theta^2b^2}{24}$。

而 y 層實有之張應力，
$$\sigma=E(\epsilon-\epsilon_\circ)=\frac{E\theta^2}{2}\left(y^2-\frac{b^2}{12}\right)\qquad(f')$$

$$\text{其平行 }Z\text{ 軸之分力}=\sigma\sin\gamma\rightleftharpoons\sigma y\theta=\frac{E\theta^3}{2}\left(y^3-\frac{yb^2}{12}\right).$$

故張應力對於中軸之抗扭力矩爲

$$\frac{E\theta^3}{2}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\left(y^3-\frac{yb^2}{12}\right)y\cdot c\,dy=\frac{Ec\theta^3b^5}{360}.$$

由切應力及張應力共生之抗扭力矩，

$$T=\frac{1}{3}bc^3G\theta+\frac{Ec\theta^3b^5}{360}.$$

$$T=\frac{1}{3}bc^3G\theta\left(1+\frac{1}{120}\cdot\frac{E}{G}\cdot\frac{b^4}{c^2}\cdot\theta^2\right) \qquad \text{(g}'\text{)}$$

就薄矩形而論，$\frac{b^4}{c^2}$ 甚大，故張應力之作用（增強抗扭力矩，減小扭角及切應力，與直接對四稜之作用）不可忽視矣。設扭力矩為已知，則由(g′)式求 θ，然後由 $\tau_{大}=Gc\theta$ 求最大切應力，再求最大張應力 $\sigma_{大}$.

設鋼質薄板之 $b=4$ 吋，$c=0.05$ 吋，$\frac{E}{G}=2.6$，$G=11.5\times10^6$ 磅每方吋，任扭力矩 $T=\frac{1}{3}bc^2\times15,000=50$ 磅吋.

若忽視張應力，則　　$\tau_{大}=\frac{3T}{bc^2}=15,000$ 磅每方吋.

又　　$\theta=\frac{3T}{bc^3G}=\frac{\tau_{大}}{cG}=0.0261$ 半徑角.

計及張應力之作用，由(g′)得

$$\theta(1+2,220\theta^2)=0.0261. \qquad \therefore\quad \theta=0.0164.$$

$$\tau_{大}=Gc\theta=11.5\times10^6\times0.05\times0.0164=9,430\ \text{磅每方吋}.$$

$$\sigma_{大}=\frac{E\tau_{大}^2}{12G^2}\cdot\frac{b^2}{c^2}=10,700\ \text{磅每方吋}.$$

第四章　簡梁之彎應力及切應力

33. 平面圖之轉動慣量與慣量積　有規則之平面圖，就任一極點而言，皆有易求轉動慣量之縱橫軸，概言之，皆爲與幾何度平行者，如長方形或三角形之高與底，圓之直徑是也。以 U 及 V 示此二軸，以 u 及 v 示小面 dA 之坐標，則易求之轉動慣量爲

$$I_u=\int_0^A v^2dA, \text{ 及 } I_v=\int_0^A u^2dA.$$

其

$$H_{uv}=\int_0^A uv\ dA$$

稱爲全圖對於該二軸之慣量積(product of inertia).

定理 1.　一對縱橫軸，若有一個是全圖之對稱軸，則全圖之慣量積必等於零。

證. 設 V 爲對稱軸（圖 75），則位於 V 軸兩側之相等小面，其 v 之相等者，其 u 反號，故 $uv\cdot dA$ 恰相消。就全圖言，$\int_0^A uv\cdot dA=0$.

定理 2.　設平面圖對於經重心一對軸之縱橫坐標 $H_{\bar{u}\bar{v}}$ 爲已知。若將 U 軸平行移至 a，V 軸平行移至 b；則對新軸之慣量積

$$H'_{uv}=H_{\bar{u}\bar{v}}+Aab \tag{37}$$

證.　　$u'=u+b,\qquad v'=v+a.$

其 a 及 b 皆須辨正負，圖 76 者皆正。

故 $$H'_{uv}=\int_0^A (u+b)(v+a)dA$$

$$=\int_0^A uv\cdot dA+ab\int_0^A dA+a\int_0^A u\cdot dA+b\int_0^A v\cdot dA.$$

因 U 與 V 經重心，故 $\overline{u}=0$， $\overline{v}=0$； 遂得公式(37)．

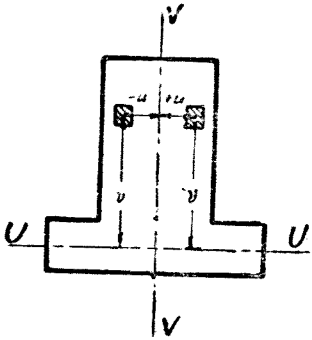


圖 75.

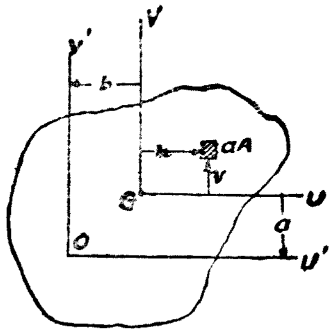


圖 76.

習 題 二 十 二

1. 求圖 77 之 H_{uv} 及 H'_{uv}.

解. 分全圖爲二矩形，每形之 $H_{\overline{uv}}=0$.

$$\therefore\ H_{uv}=0+\left(-\frac{h}{2}\right)\left(-\frac{a}{2}\right)ah+0$$

$$+\left(-\frac{h}{2}\right)\left(-\frac{a-h}{2}-h\right)h(a-h)$$

$$=\frac{a^2h^2}{4}+\frac{h^2(a^2-h^2)}{4}.$$

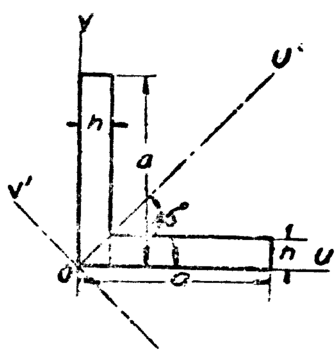


圖 77.

又 $H'_{uv}=0$　因 U' 爲對稱軸。

2. 試求圖 78 中之三圖對於圖示二軸之慣量積，

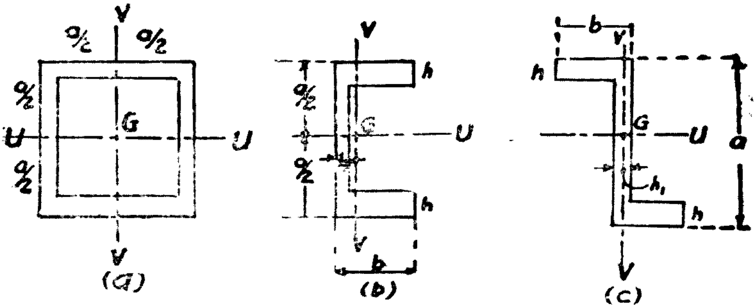


圖 78.

答 0; ; $2\left(\frac{a-h}{2}\right)\left(-\frac{b-h_1}{2}\right)bh$.

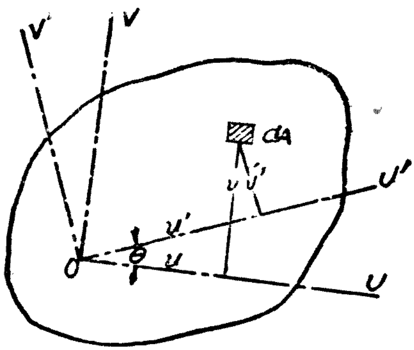


圖 79.

傾斜軸之轉動慣量　設 O 爲任一極點。今將 U,V 二軸旋轉 θ 角，則 dA 之新坐標

$$u'=u\cos\theta+v\sin\theta,$$

$$v'=v\cos\theta-u\sin\theta.$$

故
$$H'_{uv}=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\int_0^A uv\,dA$$
$$+\sin\theta\cos\theta\left(\int_0^A v^2dA-\int_0^A u^2dA\right)$$
$$=H_{uv}\cos 2\theta+\frac{I_u-I_v}{2}\sin 2\theta.$$

設縱橫軸轉至新位置，其慣量積等於零；則

$$\tan 2\theta=\frac{2H_{uv}}{I_v-I_u} \tag{38}$$

由此式可得二角，相差 180°；實即一對坐標兩端推轉之角也，故慣量積等於零之坐標只有一對。

又
$$I'_u=\int_0^A(v\cos\theta-u\sin\theta)^2dA$$
$$=I_u\cos^2\theta+I_v\sin^2\theta-H_{uv}\sin 2\theta$$
$$I'_u=\int_0^A(u\cos\theta+v\sin\theta)^2dA$$
$$=I_u\sin^2\theta+I_v\cos^2\theta+H_{uv}\sin 2\theta \tag{39}$$

(39)之二式相加，得
$$I'_u+I'_v=I_u+I_v \tag{40, a}$$

又相減，得
$$I'_u-I'_v=(I_u-I_v)\cos 2\theta-2H_{uv}\sin 2\theta \tag{40, b}$$

由(40, a), (40, b)，可由原位軸之轉動慣量與慣量積，求其對斜軸者

由公式(39)，可知當軸改變方位時，其轉動慣量皆變值；當

$\dfrac{dI_u'}{d\theta}=0$ 時，卽 $2I_v\sin\theta\cos\theta-2I_u\sin\theta\cos\theta-2H_{uv}\cos 2\theta=0$ 時，

或當 $\tan 2\theta=\dfrac{2H_{uv}}{I_v-I_u}$ 時，I_u' 爲最大或最小。

由公式(40,a)，可知當 I_u' 最大時 I_v' 必最小，反之亦確。又由公式(38)，可知慣量積等於零之一對縱橫軸，卽轉動慣量最大最小者也。此一對軸稱爲經該極點 O 之主軸(principal axes)．其轉動慣量稱爲對該軸之主轉動慣量(principal moment of inertia)；其最大者示以 I_Z，最小者示以 I_Y．

例題 據圖78，各求其最大最小之轉動慣量。

解． 圖(a)之 U 及 V 各爲對稱軸，故 $H=0$，而 I_u 及 I_v 卽最大最小轉動慣量。

又對角線亦對稱軸，$H=0$，故對於對角線之轉動慣量亦最大最小者也；是以必與前者相等。蓋半個三角形對於對角線之轉動慣量 $=\dfrac{1}{12}(\sqrt{2}a)\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^3$，故正方形對於對角線者 $=\dfrac{a^4}{12}$，恰等其對中線者，是以知二者皆爲最大也。圖(b)之 U 爲對稱軸，$H_{uv}=0$，而 I_u 爲最大，I_v 爲最小也。圖(c)無對稱軸，其主軸之方位須由公式(38)求之：由 I_u，I_v，H_{uv} 求 θ 之銳角値；然後 U 軸正轉 θ 角之轉動慣量最大，V 軸正轉 θ 角者最小；其値可由公式(39)求之。

迴轉半徑之橢圓 以任一點爲極，旣能求主轉動慣量 I_Z 及 I_Y，除以面積，遂得最長最短之主要迴轉半徑(principal radius of gyration) k_z 及 k_y．以此二者爲長短半徑作橢圓，然後其對任一軸 N 之半徑，卽由中心 O 至其平行切線 T_1T_2 之距離。

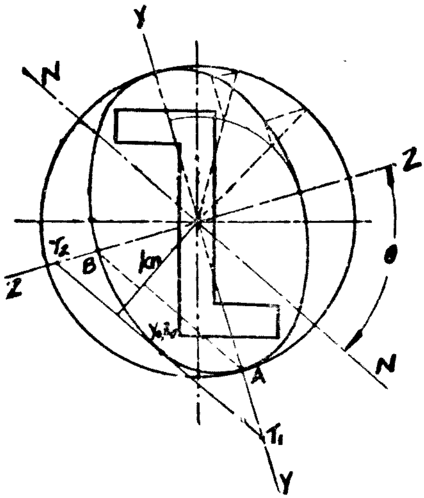


圖 80

證.* 切線公式爲 $\frac{y}{OT_1}+\frac{z}{OT_2}=1$;

就切點$(y_\circ, z_\circ)$而言 $\frac{y_\circ}{OT_1}+\frac{z_\circ}{OT_2}=1.$

因切點在橢圓上,故 $\frac{y_\circ^2}{k_z^2}+\frac{z_\circ^2}{k_y^2}=1.$

如此,則 $$\frac{y_\circ}{OT_1}+\frac{z_\circ}{OT_2}=\frac{y_\circ^2}{k_z^2}+\frac{z_\circ^2}{k_y^2};$$

或 $$\left(\frac{y_\circ^2}{k_z^2}-\frac{y_\circ}{OT_1}\right)+\left(\frac{z_\circ^2}{k_y^2}-\frac{z_\circ}{OT_2}\right)=0.$$

因 OT_1 與 $y_\circ$ 符號相同,OT_2 與 $z_\circ$ 符號亦相同;故二括號內各爲二正

* 此證由著者自擬.

量之差，而此二者或相等而反號，或各等於零。

由後述之結論，得 $$OT_1=\frac{k_z^2}{y_\circ},$$

而 $$OT_2=\frac{k_y^2}{z_\circ}.$$

於是切線公式化為 $$\frac{yy_\circ}{k_z^2}+\frac{zz_\circ}{k_y^2}=1 \tag{41}$$

由極點 O 至切線之垂線設為 r. 由 A 及 B 至 r 各作垂線，則按相似

三角形，得 $$\frac{r}{OT_1}=\frac{k_z\cos\theta}{k_z},$$

或 $$r=\frac{k_z^2}{y_\circ}\cos\theta.$$

$$\therefore\quad r^2\cdot\frac{y_\circ^2}{k_z^2}=k_z^2\cos^2\theta.$$

又 $$\frac{r}{OT_2}=\frac{k_y\sin\theta}{k_y},$$

或 $$r=\frac{k_y^2}{z_\circ}\sin\theta.$$

$$\therefore\quad r^2\cdot\frac{z_0^2}{k_y^2}=k_y^2\sin^2\theta.$$

相加，得 $$r^2=k_y^2\sin^2\theta+k_z^2\cos^2\theta \tag{a}$$

由公式(39)上式， $$I_n=I_Z\cos^2\theta+I_Y\sin^2\theta-H_{YZ}\sin 2\theta$$

因 Y, Z 為主軸，故 $$H_{YZ}=0.$$

於是 $$k_n^2=k_z^2\cos^2\theta+k_y^2\sin^2\theta \tag{42}$$

以(42)式與(a)式相較，$\therefore\ k_n=r.$

34. 簡單彎曲 簡單之棒任橫擔負則生彎曲者,是稱爲梁(beam). 連各橫斷面重心之直線,曰梁之中軸,各橫斷面對稱軸所定之面曰梁之對稱面。經各橫斷面對應點之一組主軸所定之面曰梁之主面(principal plane of beam),故梁能有一組平行主面,而經重心者只其一耳。

梁之彎曲情形與其支持方法,橫斷面形狀,擔負種類與其對橫斷面之位置皆有關係。今先設出一種最簡單的彎曲情形,而考究其所須之擔負;然後逐漸推展擔負之種類與橫斷面形狀,及擔負對橫斷面之位置。茲設:

(1)兩端皆屬自由支持者,如圖 81(a)所示者,梁端以活軸管於承上,承之下面以滾柱支持之;如是則梁端運動自由,可移可轉。

(2)梁之中軸原係直線,其橫斷面不變,其材料均質而且各向同性(參看第 2 節假設),又其張與壓之彈性係數 E 相同。

(3)設梁之中軸至彎曲之後仍在一個平面上,稱爲彎曲面 (plane of bending)。

(4)梁當彎曲之時,各橫斷面只繞其垂直彎曲面之軸迴轉,但其橫斷面仍各保持平面,且仍與梁之中軸垂直。

(5)梁當彎曲之時,各橫斷面對於中軸皆不扭轉,是爲簡單彎曲(simple bending)。如是則凡與中軸平行之直線必在平行彎曲面之平面上也。

(6)擔負只有上述之彎曲作用,但無橫切之作用,是爲單純彎曲(pure bending)。

依假設 4,可知在梁之凹入方面,各橫斷面間之材料被壓而縮

短，在凸出方面者，因拉而增長，中間必有一層只變作曲面，而其長度不變，是爲中立層（neutral plane）。中立層與橫斷面相交之直線，即該橫斷面轉移之軸也，謂之爲其中立軸(neutral axis)．若將梁投射在彎曲面上，則 mm 及 pp 示原來平行之二橫斷面。作 $n_1s_1 \parallel mm$．以 r 示小段中立層 nn_1 之曲率半徑。

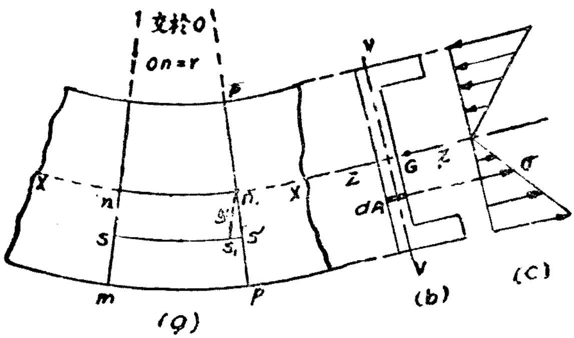


圖 81.

距中立層等於 y 者之縱應變　$$\epsilon=\frac{s's_1}{nn_1}=\frac{y}{r}\tag{43}$$

故此層之張應力　$$\sigma=\frac{E}{r}\cdot y\tag{44}$$

r 由曲率中心向外量爲正，y 在中立層以上者與 r 相反，爲負，σ 爲壓應力。合稱爲彎應力（bending stresses），如圖 81 (c)．

分橫斷面爲平行中立層之窄條，其一條之面積代以 dA，其各點之彎應力皆等於(44)式之值．

假設擔負無沿中軸之分力，則全橫斷面上彎應力之合必等於零．

卽 $$\int_0^A \sigma \cdot dA = \frac{E}{r}\int_0^A ydA = \frac{E}{r}A\bar{y} = 0. \qquad \therefore \quad \bar{y} = 0$$

卽中立軸必經橫斷面之重心也。

設 VV 爲垂直中立軸之直線，則彎應力對 VV 之力矩爲

$$\int_0^A \sigma z \cdot dA = \frac{E}{r}\int_0^A yz \cdot dA = \frac{E}{r}H_{VZ}.$$

依假設 4，橫斷面繞 VV 不轉。故若擔負無繞 VV 之力矩，則彎應力者亦必等於零，卽 $H_{VZ}=0$，而 VV 與 GZ 必爲一對主軸：雖中立軸 GZ 必經重心，而 VV 則不必需。換言之，若擔負之彎力矩在任一主面上如 VV 者，則梁只在擔負面內彎曲，而以經軸心之其他主軸爲中立軸。

又彎應力對於中立軸之力矩

$$M = \int_0^A \sigma y dA = \frac{E}{r}\int_0^A y^2 \cdot dA = \frac{E}{r} \cdot I, \tag{45}$$

欲橫斷面得其平衡，則擔負對中立軸之力矩亦須等於 M. 又依假設 6，擔負須無上下之合力，故知擔負須爲主面(非必經重心者)內兩端對扭之力偶，而後梁方以經重心之其他主軸爲中立，在力偶面內彎曲也。又由公式(45)及假設 2，可知 r 爲常數，卽梁曲作圓弧也。又內外力皆無繞中軸之力矩，故梁必不扭。

由公式(44)及(45)，得梁之彎力公式(flexual formula)，

$$\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} \tag{46}$$

又彈性彎度公式(elastic curve equation),

$$\frac{M}{I}=\frac{E}{r}, \quad 或 \quad \frac{1}{r}=\frac{M}{EI} \tag{45}$$

EI 稱爲梁之抗彎硬度(flexual rigidity).

習 題 二 十 三

1. 圖 82 示火車軸, A 與 B 爲輪心,相距 59 吋。P 與 P 爲彈簧,以承車之重量者也,距輪面各 13.5 吋,任重各 26,000 磅。軸之直徑 10 吋,材料爲鋼質, $E=30\times10^6$ 磅每方吋。求軸內之最大應力及彎度。

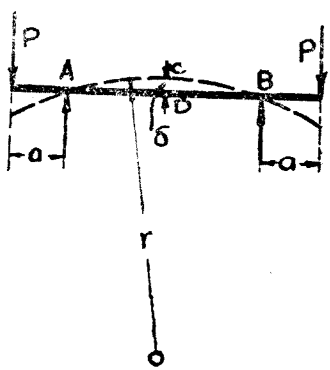


圖 82.

解. 兩輪中間一段軸任力偶爲簡單彎曲,彎曲線爲圓弧,其彎應力及彎度可用本節之方法解析之。兩輪以外之彎力矩生於非力偶,其彎曲線亦非圓弧,故須俟第 37 節末段討論之。論中間一段之彎力矩, $M=P\cdot a=26,000\times13.5$ 磅吋,在經重心之主面上。

橫斷面對水平直徑之轉動慣量 $I=\frac{\pi d^4}{64}$.

$$最大之\ y=\frac{d}{2}.$$

由公式(46)，最大之彎應力

$$\sigma=\frac{M}{I}\cdot\frac{d}{2}=\frac{32M}{\pi d^3}=\frac{32}{\pi}\times\frac{26,000\times 13.5}{1000}$$

$$=3,580 \text{ 磅每方吋.}$$

由公式(45)，得曲率

$$\frac{1}{r}=\frac{M}{EI}=\frac{\sigma}{Ey}=\frac{3,580}{5\times 30\times 10^6}=\frac{1}{41,900}\text{ 吋.}$$

由圓之幾何性質，可知

$$\overline{AD}^2=CD\ (2\times OC-CD),$$

即

$$\left(\frac{59}{2}\right)^2=\delta(2r-\delta).$$

$$\therefore\quad \delta\doteqdot\frac{59^2}{2}\times\frac{1}{2r}=\frac{59^2}{8\times 41,900}=0.0104\text{ 吋.}$$

2. 每邊 10 吋之方木梁，支於 A 及 B（參看圖 82），P 及 P 爲擔負。設 $AB=6$ 吋，$a=1$ 呎，$E=1.5\times 10^6$ 磅每方吋。設最大彎應力限爲每方吋 1000 磅，試約去其自己重量，求擔負 P 及最大彎度。

答 $P=18,900$ 磅；$\delta=0.0864$ 吋.

3. I 字斷面之鋼料，高 30 吋，$I_Z=9,150$ 吋^4.，梁長 20 呎，兩端懸於支點之外者各 10 呎，且任每呎 10,000 磅之重量，兩支點間無擔負（圖 83）。求其最大彎應力及最大彎度。

答 $\sigma=9,840$ 磅每方吋；$\delta=.157$ 吋.

4. 直徑 $\frac{1}{32}$ 吋之鋼絲繞於直徑20 吋之圓柱上，求最大彎應力。

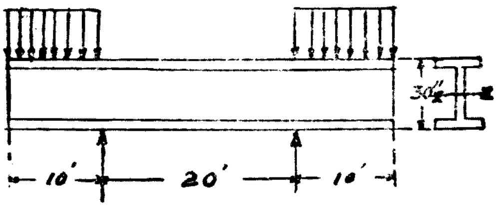


圖 83.

解. 由公式(44),

$$\sigma=\frac{E}{r}y=30\times10^6\times\frac{\frac{1}{32}\times\frac{1}{2}}{\frac{2}{2}+\frac{1}{32\times2}}$$

$$=\frac{30\times10^6}{10\times64}=46,900\text{ 磅每方吋.}$$

5. 長 10 吋之鋼尺橫斷面爲 $1''\times\frac{1''}{32}$. 兩端加對彎之力偶, 曲作 60° 之弧; 求其最大彎應力, 最大彎度, 及兩端對彎之力偶.

答 $\sigma=49,100$ 磅每方吋; $\delta=1.28$ 吋; $M=8.0$ 磅吋.

6. 設上題之鋼尺兩端加對彎之力偶, 使其中點之最大彎度爲 1 吋, 求力偶及最大彎應力。　答 $M=$[illegible].23 磅吋; $\sigma=28,200$ 磅每方吋.

7. 有自由支持之長方梁, 其橫斷面之高爲 h, 設下面溫度爲 t_1, 至上面按直線規則減爲 t; 以 α 代熱脹係數, E 代彈性係數, 求梁因熱而彎曲之半徑. 又設梁之兩端固定, 求其因熱脹而生之彎應力。

解. 中立層之溫度 $=\frac{t+t_1}{2}$. 距中立層等於 y 處之溫度較中立

層者高 $\frac{t_1-t_0}{h}y$，其 y 之在中立層以上者爲負，且較低，故此層較中立層之線脹係數
$$\epsilon=\alpha\cdot\frac{t_1-t_0}{h}\cdot y$$

由公式(43)，可知因熱脹而生之曲率半徑

$$r=\frac{h}{\alpha(t_1-t_0)};$$

此時梁之彎曲自由，故無彎應力。若此彎度用兩端及彎力偶（即支持力偶）以限制之，則恰如自由彎曲以後，兩端加對彎力偶以直之也。故其所生之彎應力可由(44)公式求之：

$$\therefore\quad 最大之\ \sigma=\frac{E}{r}\cdot\frac{h}{2}=\frac{1}{2}E\alpha(t_1-t_0).$$

35. 彎曲所生之次要應力及應變　(I) **反彈性彎曲***　中立層以下之材料所生之縱伸率，　$\epsilon_x=\frac{y}{r}$.

故其橫縮率
$$\epsilon_Z=-\mu\frac{y}{r}=-\frac{y}{\left(\frac{r}{\mu}\right)},$$

若 y 予以正負之辨，則此式亦可表中立層以上材料之橫伸率。若縱彎曲生於力偶，則梁之縱度曲作圓弧，於是橫斷面之橫度亦曲作圓弧，而仍與梁之縱斷面垂直也。縱彎之曲率半徑爲 r，則橫度彎曲之半徑較大，爲 $-\frac{r}{\mu}=R$（圖84），負號示其中心在前者之背面，故曰反

---

* 仿 J. Case 之 Strength of Materials, 129 節.

彈性彎曲(anti-elastic curvature). μ 之大者如橡皮,則 R 小,反彈性彎曲較顯著。此橫應變只生於縱應變,若材料之橫度不甚大,各縱條之橫形變皆得自由,則材料中並無橫應力.

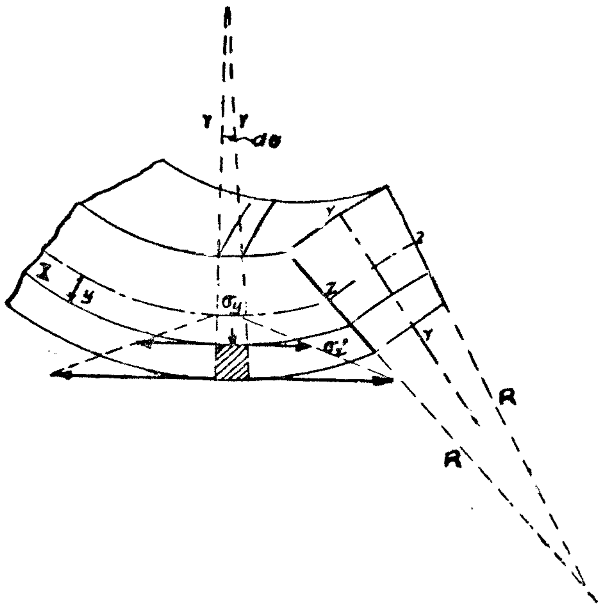


圖 84.

(II)沿徑壓應力 * 以相距 dx 之二橫斷面,梁之上(或下)表,及 y 層界出長方體(如圖 84 影示者)。至梁彎以後,其左右面互傾 $d\theta$ 角,該二面上縱應力遂有沿徑分力:長方體之在中立層以上者,下面受上向之壓力;其在中立層以下者,上面受下向之壓力.而後方得

* 仿 J. Case 之 Strength of Materials, 158 底註,由著者推解得(47)式.

平衡。以 σ_y 示 y 層沿徑壓力之強度，以 b 示梁之橫度（前後之寬度）沿 r 論平衡：

$$\sigma_y \cdot b \cdot dx = \int_y^{h/2} \sigma_x \cdot dA \cdot 2 \sin \frac{d\theta}{2}$$

$$= d\theta \cdot \frac{E}{r} \int_y^{h/2} y dA.$$

$$\therefore \quad \sigma_y = \frac{E}{b} \cdot \frac{\left[A\bar{y}\right]_y^{h/2}}{r^2} \tag{47}$$

因 $\frac{d\theta}{dx}$ = 曲率 = $\frac{1}{r}$。在 h 全厚皆是壓力，其強度與縱彎之曲率半徑 r 之平方成反比，故縱彎甚少時，沿徑壓應力尤小，此在工程上無絲毫重要性可言。

36. 各形橫斷面之比較 由第 34 節證明，已知中立層上下距離相等之薄層所任之張應力與壓應力等值。若材料之張與壓之屈服點相同，則其橫斷面宜製成上下對稱者，以使重心恰與中點等高。物件之不能如此製造者，如火車電車之鋼軌，則其上下材料須分配適宜，以使其重心仍在高度之中點爲要。

若材料之壓應力較強，如鑄鐵者，則宜增多其抗張之材料，而減少其抗壓者，故製爲 ⊥ 字或兩緣不等之 I 字斷面。前者若緣脊之比例適宜，後者若兩緣之大小得當，皆可使張應力與壓應力同時達到其資用之值。

最大彎應力只現於距中立層最遠之處，故欲節省材料，須將其由中立層移至等遠之處。圓面最不經濟，只其上下最遠之一線材料，能展其全力耳；矩形較佳；I 字者最經濟。詳言之，公式（46）可寫作

$$\sigma_Z = \frac{M}{\left(\frac{I}{c}\right)} = \frac{M}{S_Z},$$

其 S_Z 爲橫斷面(對中立軸)之轉動慣量，與其半高（垂直中立軸者，代以 c ）之比，稱爲橫斷面之係數(modulus of section)．任以相同之彎力矩，欲減小其彎應力則宜增大橫斷面之係數。

就圓面而論，
$$I_Z = \frac{\pi d^4}{64}, \quad c = \frac{d}{2}.$$

$$\therefore \quad S_Z = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{1}{8} Ad.$$

論 $b \times h$ 之矩形，立用者
$$I_Z = \frac{bh^3}{12}, \quad c = \frac{h}{2}.$$

$$\therefore \quad S_Z = \frac{bh^2}{6} = \frac{1}{6} Ah$$

故等面積之矩形高較寬愈大，則抗彎愈強，惟太薄則恐其橫彎耳。最經濟之橫斷面厥爲將全面之半分，置於上下 $\frac{h}{2}$ 處，則

$$S_Z = 2 \times \frac{A}{2} \times \frac{h}{2} = \frac{1}{2} Ah;$$

然此不可能，故用Ｉ字形以適應之。其上下者稱爲緣(flange)，中間者稱爲脊(web)，其緣可防止橫彎。就平常之Ｉ字橫斷面而言，其立用之 S_Z 約爲 $0.30Ah$．

此外尚有可注意之點：有時將橫斷面減去一部分可以增大其抗彎強度。如圖 85 之正方梁，任以對角面內之彎力矩。若每邊爲 a，則

其原有之 $$S_Z=\frac{a^4}{12}\times\frac{\sqrt{2}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

若將其上下角裁去，設 $mp=\alpha i$，則其新的轉動慣量:

$$I'_Z=\frac{a^4(1-\alpha)^4}{12}+2\frac{\sqrt{2}\alpha a}{3}\left[\frac{a(1-\alpha)}{\sqrt{2}}\right]^3$$

$$=\frac{a^4}{12}(1-\alpha)^3(1+3\alpha).$$

其新的橫斷面係數

$$S'_Z=I'_Z\cdot\frac{\sqrt{2}}{a(1-\alpha)}=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3(1-\alpha)^2(1+3\alpha).$$

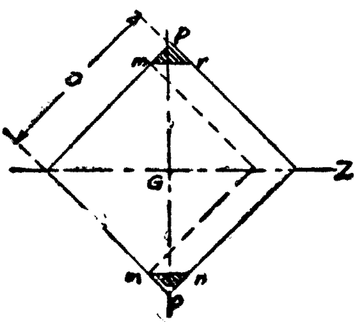


圖 85.

令 $\frac{dS'_Z}{d\alpha}$ 等於零，可求 α 之能使 S'_Z 爲最大者：得 $\alpha=\frac{1}{9}$. 如此則 S_Z' 較舊有者大 5%，而彎應力可減 5%. 其原因不難解明，蓋減去上下尖端，其轉動慣量減少者較小於高度之減少。作練習時試證圓面上下裁去弓形之高若爲 $0.011d$，則 S_Z 加大 0.7%；三角形宜裁去其上角幾何，而後斷面係數方爲最大？梁之橫斷面不宜有上下突出，如圖 86 (c) 所示者。

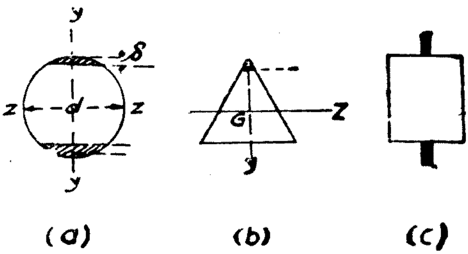


圖 86.

習題二十四

1. 圖 87 示⊥字橫斷面之鑄鐵梁。其高 $h=4$ 吋，緣與脊之厚度 t 各 1 吋。欲其實任張應力為壓應力之$\frac{1}{3}$，求其底之寬度。

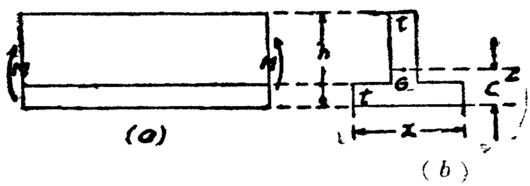


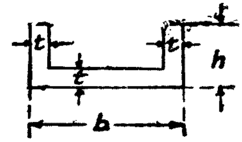
圖 87.

解. 欲壓應力較強 3 倍，則其橫斷面重心距底須為$\frac{1}{4}h$.

即
$$c=\frac{ht\cdot\frac{h}{2}+(x-t)\frac{t^{3}}{2}}{ht+(x-t)t}=\frac{h}{4}.$$

$$\therefore\quad x=t+\frac{h^{2}}{h-2t}=1+\frac{16}{4-2}=9\text{ 吋}.$$

2. 圖 88 示 ⊔ 字橫斷面之材料仰用為梁，以任兩端對彎之力偶，設 $h=10$ 吋，$t=2$ 吋；求其最大張應力與最大壓應力之比。　　答 3:(-7).



3. 圖 89 示鑄鐵梁之橫斷面。設最下面之張應力達每方吋 1 短噸，求其最上面之壓應力。

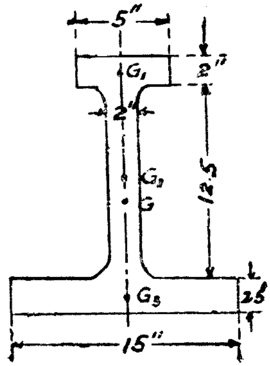


圖 89.

解. 分橫斷面為三個長方形，以最下邊為軸，論面積之一次矩，以求全圖之重心：

$$c_1=\frac{10\times16+25\times8.75+37.5\times1.25}{10+25+37.5}$$

$c_1=5.88$ 吋.　　而 $c_2=11.12$ 吋.

繼求全圖對於經重心水平軸之轉動慣量，列表如下：

各部分	對於經自己重心水平軸之 I_0 吋^4.	面積 A 方吋	重心至中立軸之 d 吋	Ad^2	對於中立軸之 I 吋^4
上緣	3.3	10	10.12	1024	1027.3
脊	32.5	25	2.87	203	531.0
下緣	19.4	37.5	4.63	803	822.4

故全圖對中立軸之

$$I=10.27.3+531+822.4=2,381 \text{ 吋}^4.$$

彎力矩 $$M=I\frac{\sigma_1}{c_1}=2,381\times\frac{1}{5.88}=405\text{ 短噸吋.}$$

又 $$\sigma_2=\frac{\sigma_1}{c_1}\cdot c_2=\frac{11.12}{5.88}=1.89\text{ 短噸每方吋}$$

4. 圖 90 之梁斷面，求其 h_1 須減至幾何而後其抗彎強度最大。

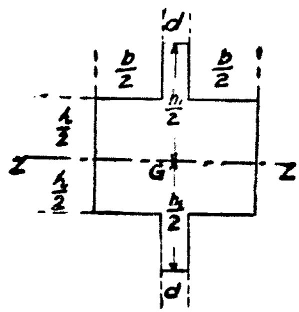


圖 90.

解. 橫斷面之係數

$$S_Z=\frac{bh^3}{6h_1}+\frac{dh_1^2}{6}.$$

竟用彎應力有定値，則橫斷面係數愈大，其彎應力之力矩愈強，故

$$\frac{dS_Z}{6h_1}\gtreqless 0$$

卽 $$-\frac{bh^3}{bh_1^2}+\frac{dh_1}{3}\gtreqless 0\qquad\therefore\qquad h_1^3<\frac{bh^3}{2d}.$$

5. 設有三梁，其橫斷面爲正圓，正方，及高等於寬的二倍之矩形；以任相等之彎曲力偶。若欲其最大彎應力相等，求其重量之比。

答 1.12 : 1 : 0.793.

37. 垂直擔負之彎曲 梁上之擔負若爲垂直於縱度之力則稱爲垂直擔負（transverse load）. 其加於梁面一橫度上者，曰集中擔負（concentrated load）；其散加於梁之上表(一段或全長)者，曰散布擔負（distributed load）. 散布擔負對於全梁之作用，恰如全部擔負集中於其重心者然；其對於一段梁之作用，亦恰如該部擔負集中於該部之重心者然。兩端自由支持〔參看圖 221 (a)〕之梁曰簡梁

(simple beam)；其一個支點(或兩個)不在梁之極端者曰過枕梁(over hanging beam)；此二者各有兩個支持力爲二未知量。一端固定他端自由之梁曰肱梁(cantilever beam)，其支持力計有反擔負之力及反彎之力偶，亦只此二未知量而已。若擔負皆屬垂直者，則按其平面平行力平衡之規則，可由已知之擔負求解，求其支持力也，故曰平衡可規定之梁(statically determinate beams)。擔負與支持力(概括支持力偶)統稱爲外力

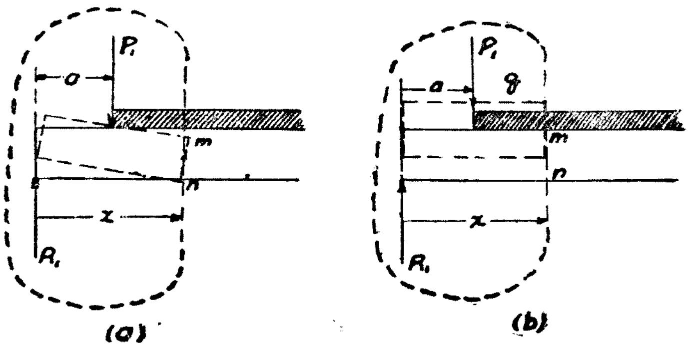


圖 91.

欲考究外力對於距梁左端 x 處的橫斷面 mn 之作用，宜以該橫斷面以左之一部分梁爲自由體：其所受之外力如圖 91 之 $R_1, P_1, q(x-a)$ 者，各化爲沿橫斷面 mn 之力及力偶。化得之力，上向者爲正以 R_1 表之，下向者爲負以 $-P_1$ 及 $-q(x-a)$ 表之；此三力之合，使 mn 以左之梁自 mn 橫切〔如圖 90(b)所示者〕。故一橫斷面所受之切力即由梁之左端至該橫斷面諸外力之合也，其推該橫斷面以左之部分上移者爲正。因全梁平衡，故自梁左端至一個橫斷面諸外力之合，恰等於自右端至該橫斷面者，惟符號相反耳。——利用

此理可以校對切力。化得之力偶使梁之下面生張應力者爲正，如 R_1x；其使上面生張應力者爲負，計有

$$-P_1(x-a) \text{ 及 } -q(x-a)\cdot\frac{x-a}{2}=-\frac{q(x-a)^2}{2}.$$

此三者之合，使 mn 以左之梁自 mn 彎折，故某橫斷面所受之彎力矩(bending moment)卽由梁之左端至該橫斷面諸外力力矩之合也。若擔負與梁之中軸垂直，則外力對於橫斷面上各水平軸之力矩相同。若有斜擔負，則支持力，亦必須斜交中軸，其垂直於中軸之分力力矩固無關乎水平軸在彎斷面上之位置，但其水平分力（加於梁之上表或下表）各宜化爲經橫斷面之重心，沿中軸之拉力或壓力，與對於經重心水平軸之彎力矩也。故概括斜擔負而言，某橫斷面上之彎力矩爲該橫斷面以左諸外力對於該橫斷面上經重心的水平軸之力矩總合也，使梁之下面生張應力者爲正。因全梁上諸外力對於該橫斷面上水平軸力矩之合等於零，故自左端計得之彎力矩與自右端計得者恰相等而反號，以此可校對某橫斷面之彎力矩。以後以 M 示一橫斷面之彎力矩，Q 示切力。

立用 [字橫斷面之梁，雖外力皆在含中軸之直立面上，繞中軸亦有扭轉(俟第 7 章第 69 節詳之)。今爲便於施用簡單彎曲公式計，故設橫斷面有對稱軸，而擔負與支持力皆在對稱面上，如是則按對稱卽知其不扭；此外雖尙有切力，但仍依簡單彎曲之假設——橫斷面仍保持平面。如是，則第 34 節之假設與推證以及公式(45)及(46)皆可應用。今日工程界卽用簡單彎曲公式以解決垂直擔負之彎曲，尙未見有顯著之錯誤也。

38. 擔負，切力，與彎力矩之關係　茲就筋梁與肱梁分別討論之如下：

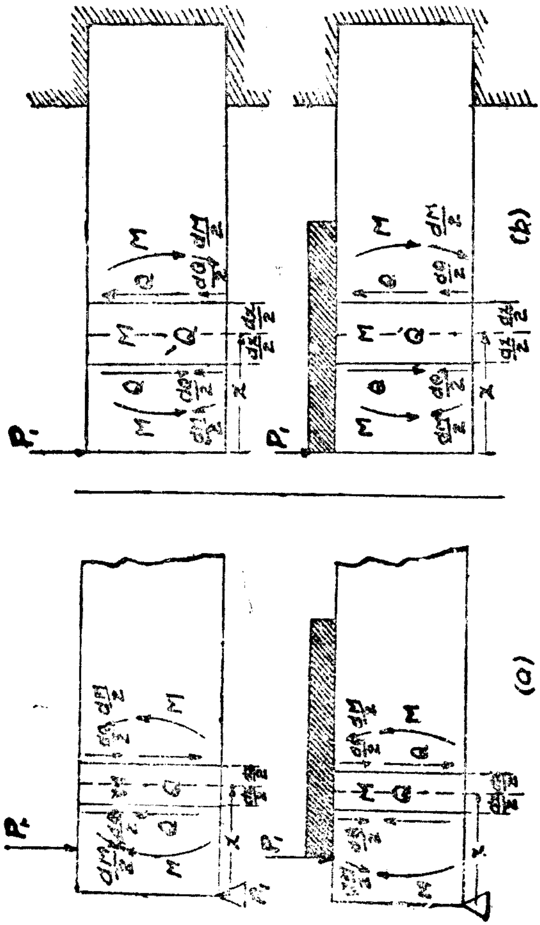


圖 92.

簡梁以左支點爲極，x 右向爲正。距左端等於 x 處之 M 爲正，而與 x 共增，故 dM 爲正。

dx 窄條左右兩面之 M 皆爲正。設以逆時針之示線示正，則左面上 M 之示線與此法不合。

$\frac{dM}{2}$ 爲正，其作用須加大右面之 M，而減小左面者，故其示線之指向在兩面皆合。

左面彎力矩之正值較小

$$=M-\frac{dM}{2};$$

右面者之正值較大

$$=M+\frac{dM}{2}.$$

距左端等於 x 處之 Q 爲正，x 增大則 Q 減小，故 dQ 爲負。

窄條兩面之 Q 皆爲正，故右面者之箭號與普通示力之法不合。

$\frac{dQ}{2}$ 爲負，須加大左面之正 Q，而減小右面者，故其箭示皆合。

肱梁之自由端繪於左方以爲極，x 右向爲正。M 爲負，x 愈大負值愈大，故 dM 爲負。

dx 窄條左右兩面之 M 皆負。設以逆時針之示線示正，則左面上 M 之示線與此法不合。

$\frac{dM}{2}$ 爲負，其作用須加大右面之負值，而減小左面上者，故其示線之指向，兩面皆合。

左面彎力矩之負值較小

$$=M-\frac{dM}{2};$$

右面者之負值較大

$$=M+\frac{dM}{2}.$$

距左端等於 x 處 Q 爲負，x 愈大則其負值愈大，故 dQ 爲負。

窄條兩面之 Q 皆負，故右面者之箭號與普通示力之法不合。

$\frac{dQ}{2}$ 爲負，須減小左面之負值而加大右面者，故其箭示皆不合。

左面切力之正值較大

$$=Q-\frac{dQ}{2};$$

右面者之正值較小

$$=Q+\frac{dQ}{2}.$$

設梁上有散布擔負，其強度爲 q，雖 q 變值，在 dx 小段上者可約爲不變，

論窄條之平衡，由 $\Sigma F_Y=0$ 得

$$\left(Q-\frac{dQ}{2}\right)=\left(Q+\frac{dQ}{2}\right)+qdx.$$

$$\therefore\quad \frac{dQ}{dx}=-q \tag{48}$$

若 $q=0$，卽圖(a)上之結果也。

又由對右下角之 $\Sigma M=0$ 得

$$\frac{dM}{2}\times 2=Q\cdot dx-\frac{dQ}{2}\cdot dx-(q\cdot dx)\frac{dx}{2}$$

以(48)式代 q，則得

$$\frac{dM}{dx}=Q \tag{49}$$

左面切力之負值較小

$$=Q-\frac{dQ}{2};$$

右面者之負值較大

$$=Q+\frac{dQ}{2}.$$

設梁上有散布擔負，其強度爲 q，雖 q 變值，在 dx 小段上者可約爲不變，

論窄條之平衡，由 $\Sigma F_Y=0$ 得

$$qdx=\left(Q-\frac{dQ}{2}\right)-\left(Q+\frac{dQ}{2}\right).$$

此式右方前後項之次序，須使之得正。

$$\therefore\quad \frac{dQ}{dx}=-q \tag{48}$$

若 $q=0$ 卽圖(b)上之結果也。

又由對右下角之 $\Sigma M=0$ 得

$$\frac{dM}{2}\times 2=Q\cdot dx-\frac{dQ}{2}\cdot dx-(q\cdot dx)\frac{dx}{2}.$$

以(48)式代 q，則得

$$\frac{dM}{dx}=Q \tag{49}$$

故其結論完全相同，

39. 切力及彎力矩圖 簡梁與過枕梁自左柱支點起量橫斷面之位置，貼梁則由自由端起量橫斷面之位置；並皆以此為橫坐標。按第37節定義，求各橫斷面之切力以為縱座標，譜得之圖稱為切力圖(shear force diagram)。又以各橫斷面之彎力矩為縱座標譜得之圖，稱為彎力矩圖(bending moment diagram)。

(1)任散布擔負之簡梁 q 為每呎之擔負，設有恆值；l 為梁之長，則兩柱之支持力各等於$\frac{ql}{2}$。在 x 一段上之擔負下切該段之力為 qx，故 x 處橫斷面所任之橫切力，$Q=\frac{ql}{2}-qx$。此式示下傾之直線，至 $x=\frac{l}{2}$(即梁之中點)，$Q=0$，過此為負，其最大值在右端為 $-\frac{ql}{2}$ (參看圖93)，與左端($x=0$處)之最大正值$\frac{ql}{2}$等值。

又在 x 處，彎力矩之生於左柱支持力者為$\frac{ql}{2}x$，生於 x 段上之擔負者為 $-\frac{qx^2}{2}$。

故
$$M=\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2}.$$

此式示拋物線 ABC 以 A 點為極者(圖93)。$\frac{dM}{dx}$為 M 曲線之切線，故最大彎力矩宜在切線水平處，即 $\frac{dM}{dx}=0$ 處，或按公式(49)在 $Q=0$ 處也。然則梁之任散布擔負者可將彎力矩之普通式對 x 之微率等於零以求其位置。

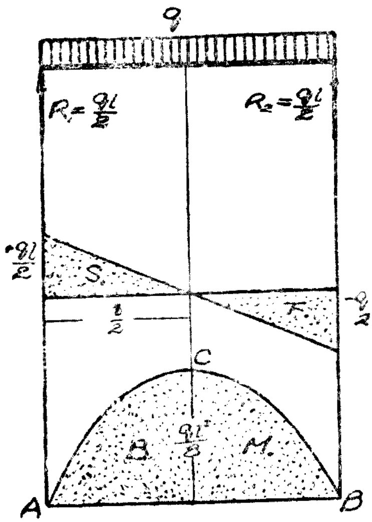


圖 93.

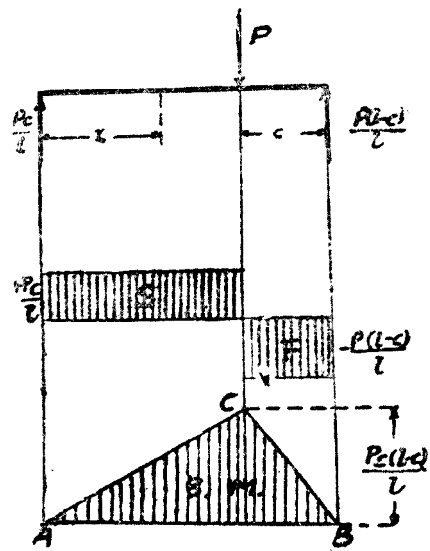


圖 94.

(2)簡梁任集中擔負者　設梁長為 l, 距右柱 c 處任擔負 P. 則左柱支持力 $=\frac{P\cdot c}{l}$. 在擔負以左，各橫斷面之切力皆等於此值。在擔負以右之橫斷面上者為 $\frac{P\cdot c}{l}-P=-\frac{P}{l}(l-c)$，亦等於常量。故切力圖為降級之二長方形，正在擔負之下改變符號。在擔負以左，距左柱等於 x 之處彎力矩　　$M=\frac{P\cdot c}{l}\cdot x$;

至擔負以右，距左柱等於 x 處之彎力矩

$$M=\frac{P\cdot c}{l}x-P[c-(l-x)]=\frac{P}{l}(l-c)(l-x).$$

前式示自 A 端起漸升之直線，後者示自擔負以右下降者．恰在擔負之下 $x=l-c$ 處，二式皆得 $\frac{P\cdot c}{l}(l-c)$，此爲最大值。$\frac{dM}{dx}$ 爲 M 曲線之切線，又等於切力 Q，最大 M 既在切線由右傾變爲左傾之處，即在切力變號之處也．

若有幾個集中擔負時，則切力圖由左柱支持力之值，爲水平線，每遇一擔負即驟減該擔負之值，其形如階。彎力矩圖爲傾斜直線自左支點初升，每遇一擔負即有一次驟折．詳言之，集中擔負非加於梁面一橫線上者，實散布於窄面上也．故恰在擔負下之切力圖亦猶散

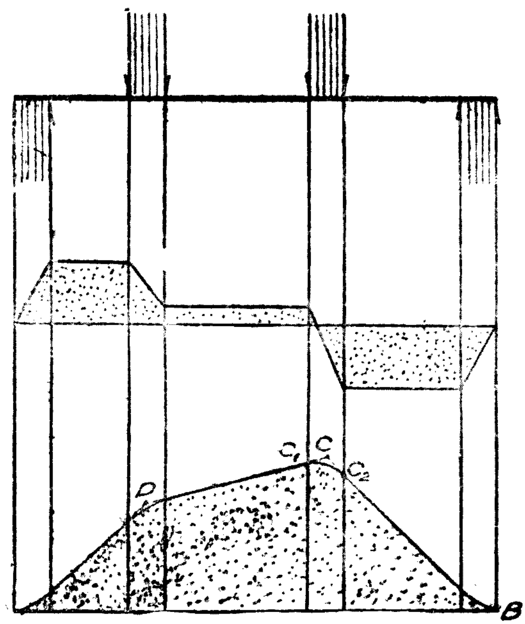


圖 95。

布擔負者然——由該集中擔負之左至其右循斜線減低，惟此中間之值，既非最大亦非最小，無關重要，故約爲直下降落也。又彎力矩自一集中擔負之左至其右，實以抛物線抹去銳角，但平常則須加以詳辨也。每在擔負間 $\frac{dM}{dx}=Q$，在擔負之下亦可仿第 38 節證明，仍得

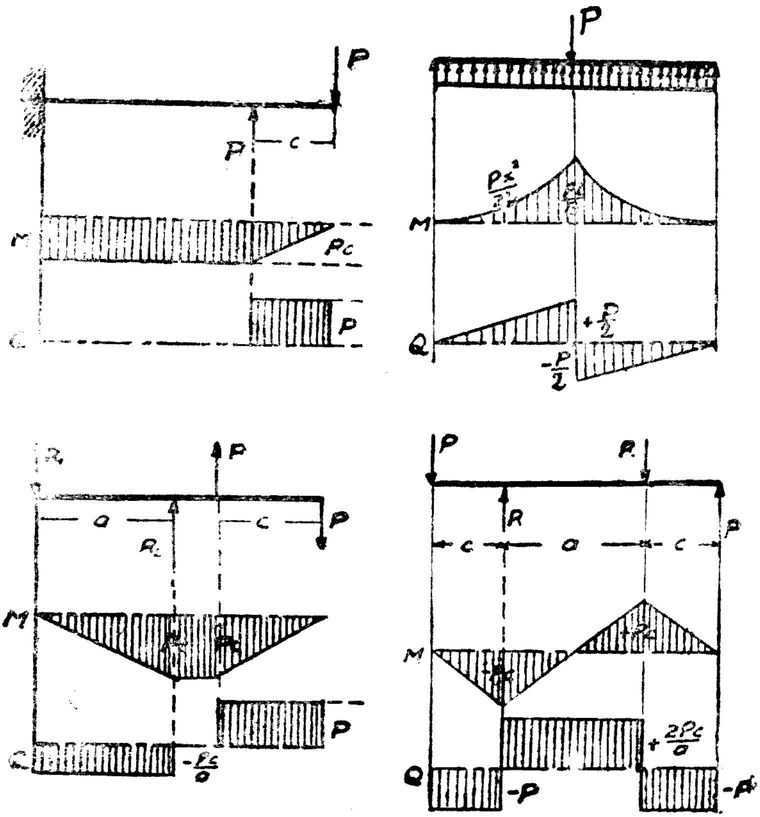


圖 93.

該式 惟$\frac{dM}{dx}$今有恆值，不能等於零以求最大之 M. 但最大彎力矩必現於$\frac{dM}{dx}$，即 Q 變號之處，故可由切力圖看出。或以其必在擔負之下，易由試計以求之也。

(3)肱梁之切力及彎力矩皆爲負值，並皆以固定端爲最大。

(4)無論簡梁肱梁，若任兩種擔負，則可分別作圖而相加之。

(5)梁之毀概由彎曲，故最大彎力矩之橫斷面曰危險橫斷面 (dangerous section).

習 題 二 十 五

1. 考察圖 96 各梁之切力圖及彎力矩圖，各寫出其切力與彎力矩之普通公式。

2. 圖 97 示 I 字簡梁，其散布擔負之強度皆每呎 400 磅。設略去梁之重量，並不論其切應力，只就彎應力不得超過 16,000 磅每方吋之限制，求其適宜之標準斷面(standard section).

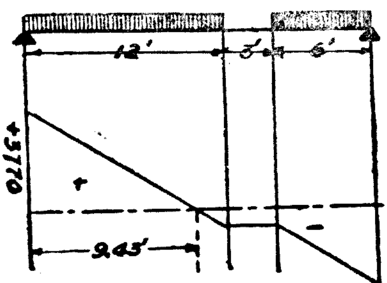


圖 97.

解. 左柱支持力

$$R_1=\frac{12\times400\times15+6\times400\times3}{21}=3,770\text{ 磅}.$$

距左柱 x 處之切力， $Q=R_1-qx$, $Q=3,770-400x$.

危險橫斷面在 $Q=0$ 處,

即
$$x=\frac{3770}{400}=9.43\text{ 呎處}.$$

最大之彎力矩,
$$M=3,770\times 9.43-\frac{400}{2}\times 9.43^2$$
$$=17,800\text{ 磅呎},\quad \text{或 } 17,800\times 12\text{ 磅吋}.$$

故所需橫斷面之係數,
$$S=\frac{M}{\sigma}=\frac{17,800\times 12}{16,000}=13.4\text{ 吋}^3.$$

檢附錄 II 表二,標準 I 字梁,8 吋高,每呎重 18.4 磅者,$S=14.2$ 吋^3,可用。

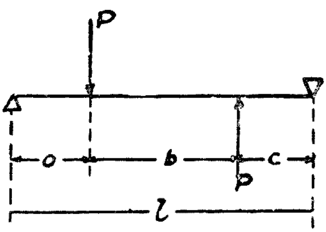


圖 98.

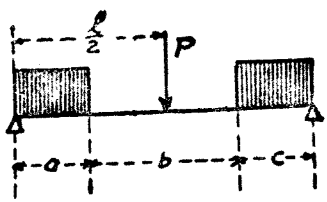


圖 99.

圖 98 所示之梁,$a=c=4$ 呎, $b=8$ 呎, $P=2,000$ 磅。求其最大彎力矩及最大切力。 答 $Q=1,000$ 磅; $M=4,000$ 磅呎.

4. 圖 99 所示之簡梁, 設 $P=2,000$ 磅, $q=400$ 磅每呎, $a=c=\dfrac{l}{4}=6$ 呎; 求作彎力矩圖及切力圖。設彎應力限為 15,000 磅每方吋,略去梁之重量,求其最適宜之 I 字鋼料。

答最大 $M=19,20$ 磅呎; $S=15.$ 吋^3.

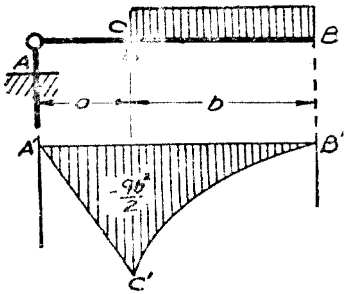


圖 100.

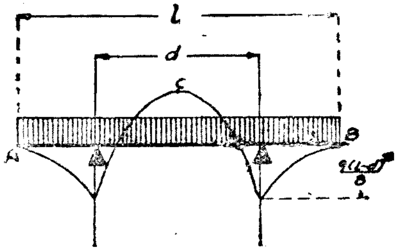


圖 101.

5. 圖 100 示圓木梁，C 點自由支持，A 端用活軸連於地基上，AB 段上散布擔負每呎 300 磅 $a=3$ 呎，$b=6$ 呎；作其彎力矩圖。設木材之資用張應力爲 1,200 磅每方吋，求所須之直徑。

解. 最大彎力矩在 C，其值 $M=64,800$ 磅吋。

又
$$I=\frac{\pi d^4}{64};\qquad S=\frac{\pi d^4}{64}\div\frac{d}{2}=\frac{\pi d^3}{32}$$

$$\therefore\quad d=\sqrt[3]{\frac{32}{\pi}\cdot\frac{M}{\sigma_w}}=8.2\ \text{吋}.$$

6. 圖 101 示過枕梁任散布擔負，兩端過枕之部等長。設梁之長度 l 不變，求其兩柱間最適宜之跨度(span).

解. 由左端至左柱之彎力矩普通公式爲

$$M_x=-\frac{qx^2}{2},$$

其最大負值爲
$$M_{\text{最大}}=\frac{q}{2}\left(\frac{l-d}{2}\right)^2.$$

介於兩柱間距左柱 x 處之彎力矩，

$$M_x=\frac{qd}{2}x-\frac{qx^2}{2}-\frac{q}{8}(l-d)^2.$$

按對稱可知 $x=\frac{d}{2}$ 處，爲最大。

$$\therefore\quad M_x=\frac{qd^2}{8}-\frac{q}{8}(l-d)^2;$$

若 $d>\frac{l}{2}$ 則得正值。兩柱間最適宜之距離，須使中間之正彎力矩與兩支點處之負值者相等，

即 $$\frac{q}{8}(l-d)^2=\frac{qd^2}{8}-\frac{q}{8}(l-d)^2.$$

$$\therefore\quad d=\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}l=0.586\,l.$$

7. 圖 102 之肱梁長 5 呎，近於自由端之 4 呎，每呎任 10 磅之擔負，在中點 C，有 250 磅之集中擔負。求其最大彎力矩。

答 7500+17,280 磅吋.

8. 簡梁之兩端受不等之力偶。設 $M_A>M_B$，求切力及彎力矩之普通公式，並作圖。

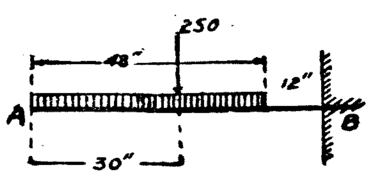


圖 102.

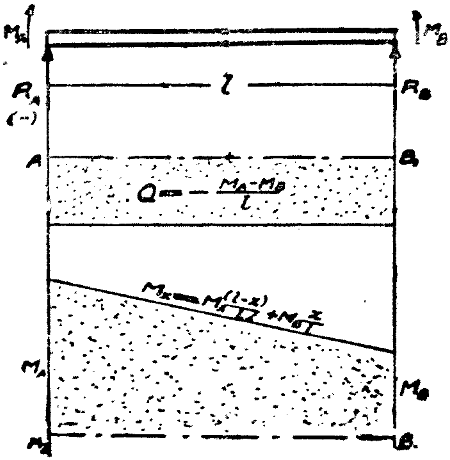


圖 103.

解. 論全梁之平衡，由 $\Sigma_B=0$ 得

$$R_A=-\frac{M_A-M_B}{l}.$$

負號示其實為下向之力。

又由 $\Sigma F_Y=0$，得 $$R_B=-R_A=\frac{M_A-M_B}{l}.$$

然則 $$Q_x=R_A=-\frac{M_A-M_B}{l}=\text{負常值}.$$

故切力圖為基線下之水平線

又 $$M_x=M_A+R_Ax=M_A-\frac{M_A-M_B}{l}\cdot x$$

$$=M_A\cdot\frac{l-x}{l}+M_B\cdot\frac{x}{l},\ \text{為直線}.$$

在 $x=0$ 處， $M_x=M_A$； 至 $x=l$， $M_x=M_B$.

9. 簡梁之中部任一力偶 M（圖 104）。求其切力及彎力矩之普通公式，並作圖。

解. 由全梁之平衡，得

$$R_A = -R_B = \frac{M}{l}.$$

$$\therefore \quad Q_x = R_A = \frac{M}{l}, \text{有恆值.}$$

由 $x=0$ 至 $x=l-a$，

$$M_x = R_A x = \frac{M \cdot x}{l}, \text{為直線。}$$

其最大正值在 C 點，其值為 $\frac{M(l-a)}{l}$.

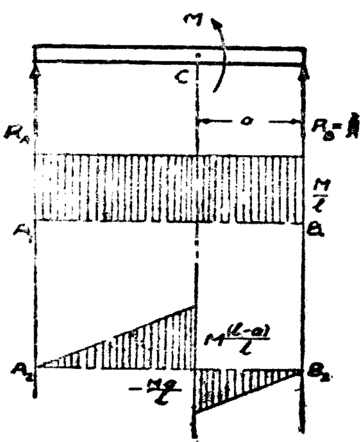


圖 104.

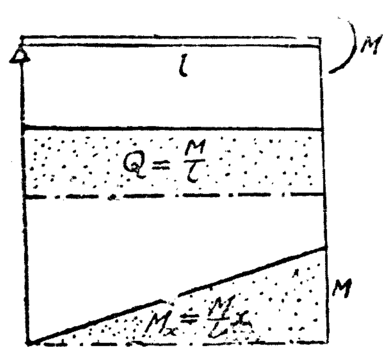


圖 105.

由 $x=l-a$ 至 $x=l$,

$$M_x=R_A\cdot x-M=-M\frac{l-x}{l},$$

亦係直線，其最大負值在 C 點，其值爲 $-\frac{M\cdot a}{l}$.

因 $Q_x=\frac{dM}{dx}$ 有恆值，故彎力矩圖之兩段直線傾角相等。

10. 簡梁之一端自由支持，他端任力偶。求作其切力及彎力矩圖。

答. 看圖 105.

11. 簡梁中段任散布擔負，求作切力及彎力矩圖。(圖 106)

解.
$$R_A=\frac{qb}{l}\left(c+\frac{b}{2}\right),$$

$$R_B=\frac{qb}{l}\left(a+\frac{b}{2}\right).$$

由 $x=0$ 至 $x=a$,

$$Q_x=R_A=\frac{qb}{l}\left(c+\frac{b}{2}\right), \text{平行線。}$$

$$M_x=R_A\cdot x=\frac{qb}{l}\left(c+\frac{b}{2}\right)x \tag{a}$$

由右柱向左量 x，自 0 至 c 之 Q_x 與 M_x 皆同上式，惟逢 c 換作 a 耳。

即
$$Q_x=\frac{qb}{l}\left(a+\frac{b}{2}\right);$$

$$M_x=\frac{qb}{l}\left(a+\frac{b}{2}\right)x \tag{b}$$

在(a)式 $x=a+\frac{b}{2}$,

則
$$M_x=\frac{qb}{l}\left(c+\frac{b}{2}\right)\left(a+\frac{b}{2}\right).$$

在(b)式 $x=c+\frac{b}{2}$,

則
$$M_x=\frac{qb}{l}\left(a+\frac{b}{2}\right)\left(c+\frac{b}{2}\right).$$

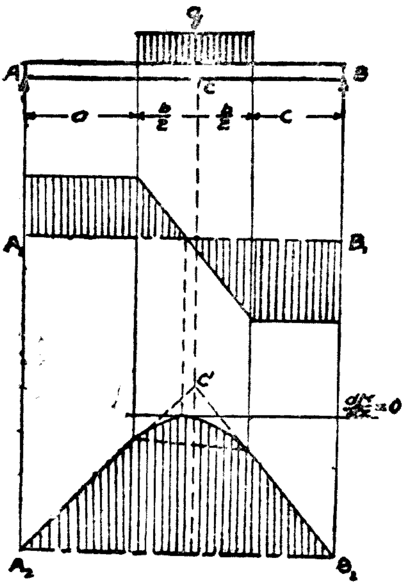


圖 106.

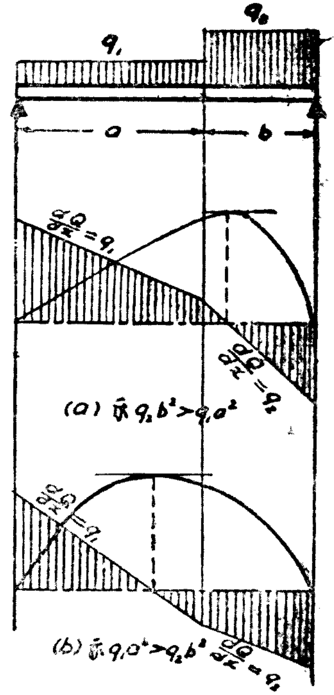


圖 107.

此二式所示之直線交於 b 之中點 c'. 仍由左端量 x, 由 a 至 $a+b$,

$$Q_x = R_A - q(x-a)$$

$$= \frac{qb}{l}\left(c+\frac{b}{2}\right) - q(x-a);$$

$Q_x = 0$ 在 $x = a + \frac{b}{l}\left(c+\frac{b}{2}\right)$處.

又由右端量 x, 由 a 至 $x=a+b$,

$$M_x = R_A x - \frac{q}{2}(x-a)^2$$

$$= \frac{qb}{l}\left(c+\frac{b}{2}\right)x - \frac{q}{2}(x-a)^2 \qquad \text{(c)}$$

其最大在 $\frac{dM_x}{dx} = q\frac{b}{l}\left(c+\frac{b}{2}\right)x - q(x-a) = 0$ 處,

即 $$x = a + \frac{b}{l}\left(c+\frac{b}{2}\right).$$

以此 x 之值代入(c)式得最大之 M.

12. 簡梁上散布擔負,兩段之強度不等. 求作切力圖及彎力矩圖。

解.
$$R_A = \frac{q_2 b^2}{2l} + \frac{q_1 a}{l}\left(b+\frac{a}{2}\right);$$

$$R_B = \frac{q_1 a^2}{2l} + \frac{q_2 b}{l}\left(a+\frac{b}{2}\right).$$

由左端量 $x=0$ 至 $x=a$,

$$Q_x = \frac{q_2 b^2}{2l} + \frac{q_1 a}{l}\left(\frac{a}{2}+b\right) - qx,$$

為下傾之直線，至 $x=a$ 處，

$$Q_{x=a}=\frac{q_2b^2-q_1a^2}{2l} \tag{a}$$

過 $x=a$ 以右．
$$Q_x=\frac{q_2b^2-q_1a^2}{2l}-q_2(x-a),$$

在 $x=a$ 處仍等於(a)式之值，故 a 與 b 兩段之 Q_x 曲線成一折線。

若 $q_2b^2>q_1a^2$，則 $Q_{x=a}$ 仍為正；而 Q_x 直線交基線於 b 段之內：此以由右端量 x 為便，其 $Q_x=R_B-q_2x$；$Q_x=0$ 在 $x=\dfrac{R_B}{q_2}$ 處，故此處彎力矩最大，其值為

$$R_B\cdot x-q_2\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}R_Bx.$$

若 $q_1a^2>q_2b^2$，則 $Q_{x=a}$ 已為負，Q_x 直線交基線於 a 段之內，交點之

$$x=\frac{R_A}{q_1},$$

此處之彎力矩最大 $\quad M_{最大}=R_Ax-q_1\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{1}{2}R_A\cdot x.$

兩個情形之彎力矩各有兩段公式，皆屬拋物線。

13. 圖 108 示鑄鐵製之機件，任擔負 $P=4,000$ 磅，求其橫斷面 AB 之最大張應力及最大壓應力．

答 $\bar{y}=3.5$ 吋；$\bar{I}=391$ 吋^4；

$\sigma_A=858$ 磅每方吋；$\sigma_B=-1,590$ 磅每方吋．

14. 圖 109 之 I 字梁，左端二釘在一橫線上（前後）不能防止

彎曲，A 處支柱上面覆以彈性材料，水筒 B 之全重 6,000 磅。試作其切力及彎力矩圖。若最大彎應力限爲 18,000 磅每方吋，求最適宜之橫斷面。

答 $S=36$ 吋^3.

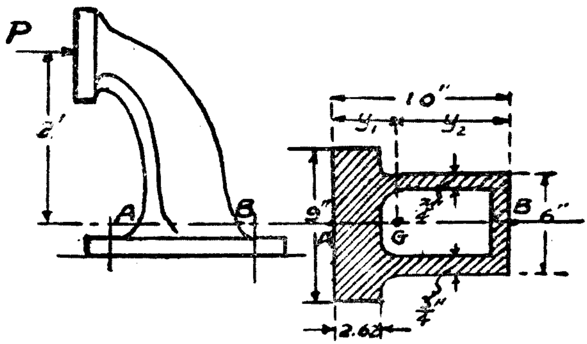


圖 108.

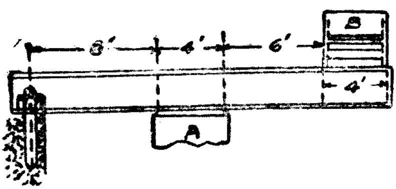


圖 109.

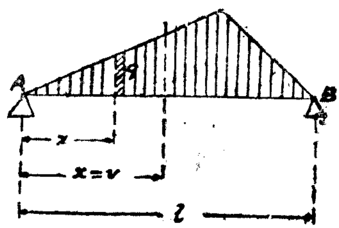


圖 110.

40．變值擔負之切力及彎力矩圖．（1）**擔負强度變遷有規則者**　此謂 x 處之强度 q 爲 x 之函式者，故按全梁之平衡，（參看圖110）。

由 $\Sigma M_B=0$，得
$$R_A=\frac{1}{l}\int_0^l q(l-x)dx \tag{a}$$

又 $x=v$ 處之切力
$$Q_v=R_A-\int_0^v q\,dx \tag{b}$$

又 $x=v$ 處之彎力矩　　$M_v=R_A\cdot v-\int_0^v q(v-x)dx$　　(c)

此三式內積可用微積法求之。

或(a)式內之積，為擔負全圖對於右支點之一次面矩，

(b)式內者，為 $x=v$ 段上擔負圖之面積。

(c)式內者，為 $x=v$ 段上之擔負圖對於 v 右端之一次面矩。

故此三者常可由擔負圖之幾何性質求之也。

習　題　二　十　六

1. 長方橫斷面之木棒排成水閘，其上下兩端皆自由支持，梁之高 $l=18$ 呎，垂直水壓面之厚 $h=1$ 呎。當上緣溢水時，求梁內之彎應力。

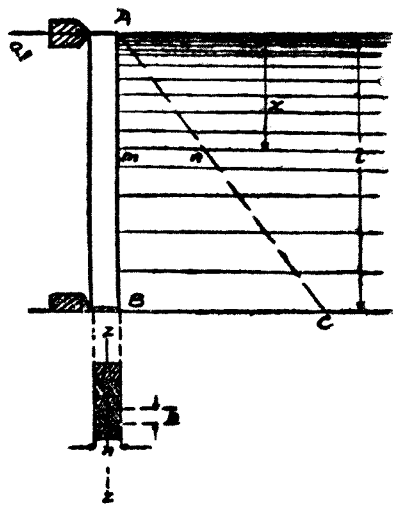


圖 111.

解. 設沿水壓面之寬為 b 呎。深 x 處(m 點)之水壓力每方呎為 $62.4x$ 磅，故該沿梁每呎之擔負為 $62.4\times bx$ 磅，以 mn 示之，連 An 則 ABC 為擔負圖。

全梁上共擔負

$$W=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC$$

$$=\frac{1}{2}\cdot l\times 62.4\times bl$$

$$=\frac{1}{2}\times 62.4\,bl^2.$$

其對 B 點之一次面矩$=W\cdot\frac{l}{3}$.

$$\therefore\quad R_A=\frac{W}{3}.$$

$$Q_x=R_A-\Delta Amn$$

$$=\frac{W}{3}-W\frac{x^2}{l^2}.$$

最大彎力矩在 $Q_x=0$ 處,即 $x=\frac{l}{\sqrt{3}}$.

此處之彎力矩 $M=R_A\cdot\frac{l}{\sqrt{3}}-\frac{l}{\sqrt{3}}$ 段上三角形對其下邊之一次面矩,即

$$M=\frac{W}{3}\cdot\frac{l}{\sqrt{3}}-\frac{W\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^2}{l^2}\times\frac{1}{3}\times\frac{l}{\sqrt{3}}=\frac{2Wl}{9\sqrt{3}}$$

$$=\frac{62.4}{9\sqrt{3}}bl^3=\frac{62.4\times18^3}{9\sqrt{3}}b \text{ 磅呎}.$$

又橫斷面之 $I_z=\frac{bh^3}{12}=\frac{b}{12}$ 呎^4,

距中立層最遠者 $c=\frac{h}{2}=\frac{1}{2}$ 呎.

故最大之彎應力 $\sigma=\frac{M}{I}c=\frac{62.4\times18^3}{9\sqrt{3}}\times6$ 磅每方呎

$$=\frac{62.4\times18^3\times2}{3\sqrt{3}\times(12)^2}=973 \text{ 磅每方吋}.$$

2. 簡梁之上，積以三角柱形之擔負，其共重 $W=12,000$ 磅。若 $l=12$ 呎；$d=3$ 呎。求其最大之彎力矩(圖 112)。

答 23,337 磅呎，距左端 6.71 呎。

3. 横木板爲水閘，其外以直立之柱支持之(圖 113)，柱之下端固定，上端自由，其横斷面作正方形，兩柱相距 $d=3$ 呎。設水深 6 呎，柱内之最大彎應力限爲 500 磅每方吋。求其所須之横斷面。

答 $b=9.9$ 吋。

4. 圖 114 (a) 示船之横斷面，實線示載荷，虛線示其下面所受之浮力。所標爲每呎長之短噸數，求其最大彎力矩。

解. 距左端等於 x 處之彎力矩，即 x 段上擔負圖與浮力圖對 x 右端一次面矩之合，擔負圖者爲負，浮力者爲正。

由 $x=0$ 至 $x=40$ 时，

$$M=\frac{1}{2}\times\frac{12}{40}x\cdot x\cdot\frac{x}{3}-4.5x\cdot\frac{x}{2}=\frac{x^3}{20}-2.25x^2.$$

在 $x=40$ 呎處，$M=-400$ 短噸呎.

由 $x=40$ 呎至 80 呎，

$$M=-4.5\times40(x-20)-\frac{15}{2}(x-40)^2$$

$$+\frac{40\times12}{2}\left(x-\frac{2}{3}\times40\right)+\frac{12}{2}(x-40)^2$$

$$=-\frac{3}{2}x^2+180x-5,200,$$

爲拋物線；在 $x=80$ 呎處，$M=-400$ 短噸呎.

$M=0$, 在 $-\frac{3}{2}x^2+180x-5,200=0$ 處, 或

$$x=60\pm\frac{5}{3}\sqrt{48}=60\pm11.6\text{ 呎}.$$

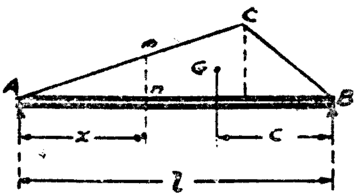


圖 112.

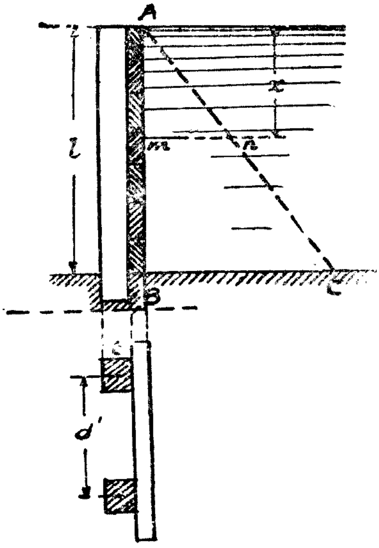


圖 113.

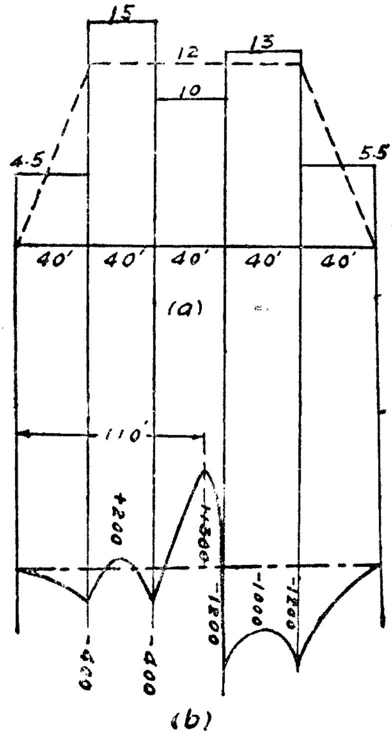


圖 114.

$\frac{dM}{dx}=0$ 在 $x=60$ 呎處;

故此段(40′ 至 80′)之最大正彎力矩

$$M=+200 \text{ 短噸呎}.$$

由 $x=80$ 呎至 120 呎, $M=x^2-220x+10,800.$

在 $x=120$ 呎處, $M=-1200$ 短噸呎.

$$\frac{dM}{dx}=2x-220=0.$$

故在 $x=110$ 呎處之最大正彎力矩

$$M=+1,300 \text{ 短噸呎}.$$

由 $x=120$ 呎至 160 呎,

$$M=-\frac{1}{2}x^2+140x-10,800.$$

在 $x=160$ 呎處, $M=-1200$ 短噸呎.

$$\frac{dM}{dx}=-x+140=0.$$

故在 $x=140$ 呎處,最小負彎力矩

$$M=-1000 \text{ 短噸呎}.$$

(因此段之 M 常為負,故必無等於零之處.故設 $M=0$, 則 $x=140\pm\sqrt{-8000}$ 不合理也)。

(11) 載負變強之無規則者*

由公式(49), $\frac{dM}{dx}=Q.$

---

* 本節選 J. Case 之 Strength of Materials, 99 節與 103 節.

$$\therefore \quad M_x - M_A = \int_A^x Q \cdot dx \tag{50}$$

由公式(48)，
$$\frac{dQ}{dx} = -q.$$

$$\therefore \quad Q_A - Q_x = \int_A^x q dx \tag{51}$$

就肱梁而論，名自由端爲 A，自此量橫斷面之位置 x，則

$$Q_A = 0, \qquad 且 \qquad M_A = 0.$$

$$\therefore \quad Q_x = -\int_A^x q \cdot dx,$$

卽擔負圖 x 段上之面積冠以負號也。

又
$$M_x = \int_A^x Q dx,$$

卽切力圖 x 段上之面積也，

以一吋表 s 呎，示橫斷面之位置，以一吋表 w 磅，示擔負強度以爲縱座標。作擔負圖。由自由端起量 x 段上擔負圖之方吋數，再以一吋表 n 方吋以爲縱座標，作切力圖：量 x 段上切力圖之方吋數，以一吋表 m 方吋以爲 x 處之縱座標，卽得彎力矩圖。

擔負圖之橫度一吋 $= s$ 呎，縱度一吋 $=$ 每呎 w 磅，

故擔負圖一方吋 $= ws =$ 磅，而切力圖之縱度一吋 $= nws$ 磅。

又切力圖橫度一吋 $= s$ 呎，縱度一吋 $= nws$ 磅，

故切力圖一方吋 $= nws^2$ 磅呎，而彎力矩圖之縱度一吋 $= mnws^2$ 磅呎。

就簡梁而論，$Q_A = R_A$，故欲由(51)式求 Q_x 須先求 R_A（參看圖115）：論全梁之平衡，由 $\Sigma M_B = 0$ 得

$$R_A l = \int_0^l q(l-x)\,dx.$$

是以知仍照上法作擔負圖，分爲若條，各求其面積對B點之一次面矩而總合之，除以l，即R_A，以方吋數計，以一吋表n方吋之比例尺，作$A'M$以示$Q_A(=R_A)$，作水平線MN．再求x段上擔負圖之方吋數，由MN線向下量得P點，則KP即示x處之切力，其比例尺仍如前述者1吋$=nws$磅．又$M_A=0$，故M_x仍爲x段上切力圖之面積；若以一吋示m方吋之切力圖，以爲縱座標，謂得彎力矩圖，則其縱度一吋$=mnws^2$磅吋．

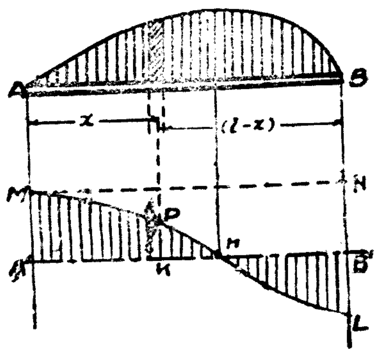


圖　115.

擔負強度之變遷有規則，如(1)段所述者，或如圖107所示者，皆可用本段之法，由切力圖以求彎力矩。若切力圖再屬簡單之規則圖，則由其幾何性質，或由Q_x之普通公式用積分，皆可求得；不待選用比例尺即可實行圖解矣。例如圖107(a)之最大彎力矩等於其切力圖中最右三角形之面積$=\frac{1}{2}R_B x$；又同圖(b)者爲切力圖最左三角形之面積$=\frac{1}{2}R_A\cdot x$.

習　題　二　十　七

1.　圖116之曲線q示飛機推進器(propeller)之一葉(blade)

上每呎長對於風之抵力之磅數。其最外端距迴轉軸 50 吋，最內端 5 吋。圖中方格為一方吋縮印者。長度比例尺 1 吋＝5 吋，擔負圖縱線一吋，示每吋 5 磅。求作切力圖及彎力矩圖。

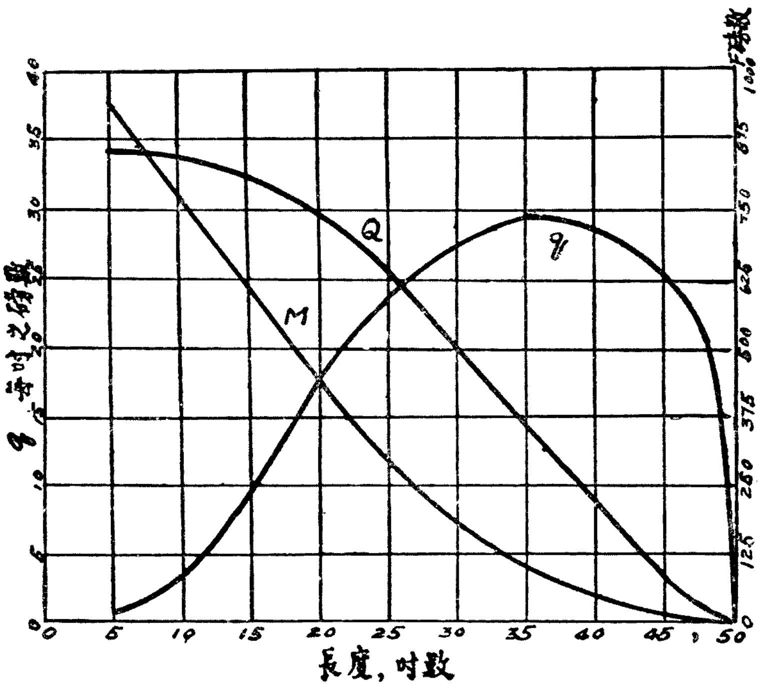


圖 116.

解. 擔負圖每方吋示 $5\times5=25$ 磅。由最外端（卽右端）起量擔負圖各縱線以右之方吋數；再以一吋示 5 方吋譜於各該縱線上，遂得切力曲線 Q，故該圖縱度一吋＝$5\times25=125$ 磅。

仍自最外端起量 Q 曲線各縱線以右之方吋數，則其一方吋示

5×125 磅吋。 若以一吋示 5 方吋，譜於各該縱線上，則得彎力矩圖 M，其縱度 1 吋 $=5\times(5\times125)=3,125$ 磅吋。故最大之彎力矩

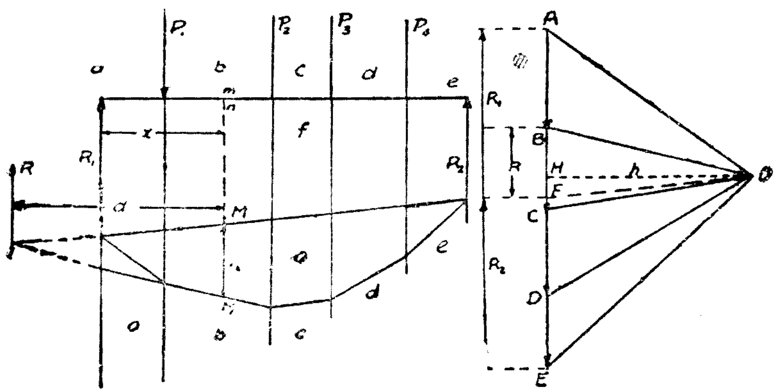
$$M=7.45\times3,125=23,300\text{ 磅吋.}$$

2. 飛機翼外端超過牽曳索以外的部分所受之浮力如下：

距支點之呎數	0	1	2	3	4	4.5	4.8	5
每方吋長之浮力(磅)	9.85	9.45	8.75	7.9	6.7	5.7	4.2	0.

求作其切力圖及彎力矩圖；各求其最大值。

41. 彎力矩之圖解法(Culmann **氏法***) 圖 117 示簡梁之任數個集中擔負者，求作其切力圖及彎力矩圖： 選適宜之長度比例尺作位置圖 (a)，並選示力比例尺作示力圖 (b)，選極，連輻，作連索圖 $o-abcdef$，作 OF 輻，遂得右支持力 EF 及左支持力 FA. mn 橫斷面之切力 $=R_1-P_1$ 即 FB 也； 換言之，自二支持力分點 F 以示



(a) 長度比尺：1吋＝s 呎 (b) 力量比尺：1吋＝w 磅

圖 117.

* 本節採 Seely 之 Resistance of Materials, ※ 節,

力比例，量至所論橫斷面近左擔負之箭端，即得該橫斷面上之切力；上量者爲正，下量者爲負。

又連索圖在 x 處平行擔負之高，與該處之彎力矩成正比，蓋 x 段上所受外力之合 $=R_1-P_1=R$，卽 FB；因此力可認爲 BO 與 OF 之合，故其力線在 (a) 圖必經 ob 與 of 之交點 L. 因三角形 LMN 與 OFB 相似，由 L 至 MN 作垂線 d，由 O 至 FB 作垂線 h，則

$$\frac{ix}{R}=\frac{d}{h}. \qquad \therefore \quad M_x=Rd=i_xh.$$

其 h 原在示力圖中宜度以示力比尺，i_x 原在位置圖中宜度以長度比尺。如長度以一吋示 s 呎，力以一吋示 w 磅，則 i_x 與 h 之吋數，宜分別以 s 及 w 乘之，而 $M_x=ws(i_x{}''\cdot h'')$ 磅呎。

任散布擔負之簡梁無論是否平均分配，皆可將其擔負分爲小段，而將其各小段擔負認爲經各該段重心之集中力，然後施以上法，得連索多邊形，其內切曲線卽彎力矩圖也。又用此法以求一組集中擔負行過簡梁時之最大彎力矩尤稱便易(參看下節題 2 解二)。此法創自 Culmann 氏。

42. 一組集中擔負行過簡梁 設有一組集中擔負，其相互之距離不變，行過一梁，如列車行過橋梁者；茲求其在梁內能生之最大彎力矩。

當諸擔負在任一位置時，其彎力矩圖爲折線，故知其最大值必在一個擔負之下。惟此擔負從衆而行，其下面之彎力矩常常變值；故欲求梁內能有之最大值，須先求每一擔負行過此梁時其下之最大彎力矩，然後在此等最大值中選其尤者。

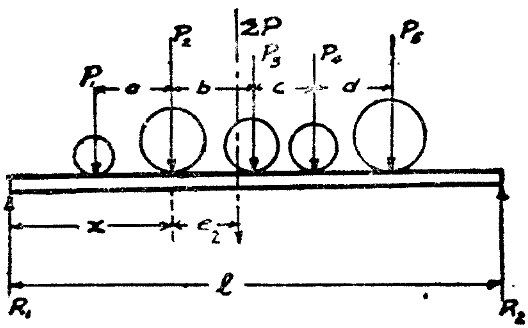


圖 118.

圖 118 示 P_1, P_2 等五個擔負,常保其相對距離,行過長等於 l 之簡梁,茲求 P_2 下之彎力矩以何位爲最大。

設諸擔負之合力 ΣP 距 P_2 爲 e_2,又設 P_2 距左柱爲 x,則

$$R_1 = \frac{l - e_2 - x}{l} \cdot \Sigma P.$$

而 P_2 下面之彎力矩　$$M_2 = \frac{l - e_2 - x}{l} \cdot x \cdot \Sigma P - P_1 a.$$

此式示拋物線,卽當諸擔負運行之際,其折線彎力矩圖之各角頂各走出拋物線之軌跡也。故令 $\frac{dM}{dx}$ 等於零,可得擔負下彎力矩最大之位置。今

$$\frac{dM_2}{dx} = \frac{l - e_2 - 2x}{l} \cdot \Sigma P = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{l}{2} - \frac{e_2}{2} \tag{52}$$

其在 ΣP 以右之擔負如 P_4 者,以 $x = \frac{l}{2} + \frac{e_4}{2}$ 時爲最大也,

任一擔負下之彎力矩，以其與諸擔負之合力分位於梁之中點之左右相等處為最大也。

欲求全梁能遇之最大彎力矩，須依次將各擔負置於上述之位置，各求其最大值，而於此諸最大值中選其尤者。於此有宜注意之點：當最前擔負已行踰支點之時，或最後者尚未行達之時，梁上擔負雖較少，而此時最大之彎力矩或較皆在梁上時為大；此蓋以擔負大小之分配與其互相距離之關係而然，故宜續作考較。

習題二十八

1. 某四輪車前軸任重 2,000 磅，後軸任重 4,000 磅，兩軸相距 6 呎。行過 12 呎之簡梁，求最大彎力矩。

解. 擔負之合力 6,000 磅距後軸 2 呎。按常識可知後軸下之最大彎力矩必較前軸下者大。故只將後軸與擔負之合力，分置於梁中點左右相等之處，卽得全車過梁上時能生之最大彎力矩矣。此時後軸距其已過之支點為 $6-1=5$ 呎；該支點之支持力為

$$\frac{6000}{12}\times 5=2,500 \text{ 磅。}$$

故最大之 $M=5\times 2,500=12,500$ 磅呎。

至前軸已出支點之外，梁上只餘 4,000 磅之擔負，約在梁之中點，故此時其彎力矩恰為最大 $=\dfrac{4000\times 12}{4}=12,000$ 磅呎，遜於前者。後軸達到以前之 M 則更小矣。

2. 圖 119 示列車行過簡橋梁，求梁內之最大彎力矩，

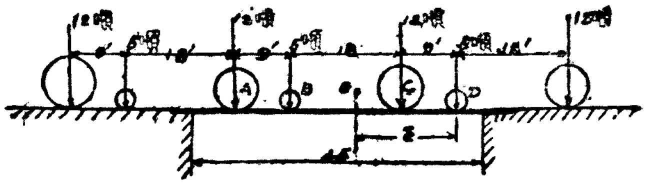


圖 119.

解一.* 設 $\bar{e}$ 爲 A, B, C, D 四者之重心與 D 之距離, 則

$$\bar{e}=\frac{12\times 36+5\times 27+12\times 9}{34}=19.9\text{ 呎}.$$

(1)先求 C 下面之最大彎力矩:

$$CG=19.9-9=10.9\text{ 呎}.$$

置 CG 之中點於梁之中點, 此時 C 下之彎力矩較其在他處皆大。

$$\text{此時 } G \text{ 距左柱}=22.5-\frac{10.9}{2}=17.05\text{ 呎}=C\text{ 距右柱}.$$

$$\text{此時右柱之支持力}=\frac{2(12+5)\times 17.05}{45}=12.88\text{ 短噸。}$$

故 C 下最大之 $M=12.88\times 17.05-5\times 9=174.6$ 短噸呎。

(2)求 D 下之最大彎力矩: $DG=19.9$ 呎.

置 DG 於梁之中點, 則 D 距右端 $=G$ 距左端

$$=22.5-\frac{19.9}{2}=12.55\text{ 呎}.$$

此時 A 尚未達左柱, 故宜就 B, C, D 三個擔負討論之, 俟後解.

---

* 本題與解一皆採自 J. Case 之 Strength of Materials 1 1 頁之例題.

(3)求 A 下之最大彎力矩:

$$AG=36-19.9=16.1\text{ 呎}.$$

置 AG 之中點於梁之中點,則 A 距左柱$=G$ 距右柱 $=\dfrac{45}{2}-\dfrac{16.1}{2}$ $=14.45$ 呎,小於 DG,故 D 已出右柱之外矣,又宜就 A,B,C 三個擔負討論之,見後解.

(4)求 B 下之最大彎力矩:

$$BG=16.1-9=7.1\text{ 呎}$$

置 BG 之中點於梁之中點,此時 B 下之彎力矩最大。

$$G\text{ 距右柱}=\frac{45}{2}-\frac{7.1}{2}=18.95\text{ 呎},$$

小於 DG,故 D 亦出右支點之右矣。

(5)三個擔負在梁上時之最大彎力矩:在(3)與(4),D 已出右柱之右,梁上只有 A,B,C 三個擔負,宜就此三者求 G,各求其下最大之彎力矩而比較之。惟因其較大者分位於小者之兩側,故必不若第(2)項情形(A 未達左柱時)B,C,D 三者中之最大彎力矩爲尤大也。此三者與重心 D 之距離　$d=\dfrac{12\times 9+5(18+9)}{12+5+5}=11.05$ 呎.

因 B,C,D 三者中 C 爲最大,又在中間,故 C 下之彎力矩必爲其尤大者。今 $CG=11.05-9=2.05$ 呎置 CG 之中點於梁之中點,則 G 距左柱$=G$ 距右柱 $=\dfrac{45}{2}-\dfrac{2.05}{2}=21.475$ 呎.

$$右柱支持力=\frac{(12+5+5)\times 21.475}{45}=10.5\ 短噸.$$

故 C 下之最大彎力矩 $=10.5\times 21.475-5\times 9=180.5$ 短噸呎.
此實全梁能遇之最大值.

解二. 利用 Culmann 氏之圖解法* 選長度比例尺，在圖 120(a) 係以 1 吋示 32 吋者，用透光紙作位置圖，並在梁上示四者之重心 G_4. 又選示力比例尺，在同圖(b)以 1 吋示 16 短噸，作示力圖。選極，連輻，作連索圖。另用紙作梁與二柱之中軸，並示出梁之中點（此圖未曾示出）。加同圖(a)於其上。右移透光圖，最初 A,B,C,D 四個擔負皆在梁上。將透光紙上 CG_4 之中點對在下圖梁之中點，連接連索圖交於下圖兩柱之二點，可看出連索圖在 C 點下之高度 i 為最大，以長度比例尺量之，得 4.8 呎；以示力比例尺量同圖(b)由極點至示力線之距離 h，得 36 短噸。
故知此時梁內之最大彎力矩在擔負 C 之下 $=4.8\times 36=173$ 短噸呎〔應即解一之(1)得數〕。
由上述之位置左移，則 A 出於左柱之外。求 B,C,D 三者之重心 G'，記在透光紙之同圖(a)上。將透光圖上 CG' 之中點對在下圖梁之中點上。連接連索圖與兩柱影相交之點，量 C 下之高度得 5 呎. 故此時梁內之最大彎力矩 $=5\times 36=180$ 短噸呎（應與解一之(5)得數相同）。
再右移透光圖至擔負 B 出右支點之外，二較大擔負近於二柱，故較第二次位置時之最大彎力矩為小矣。

* 此解法選自 Sutherland 之 Structural Theory, 47頁.

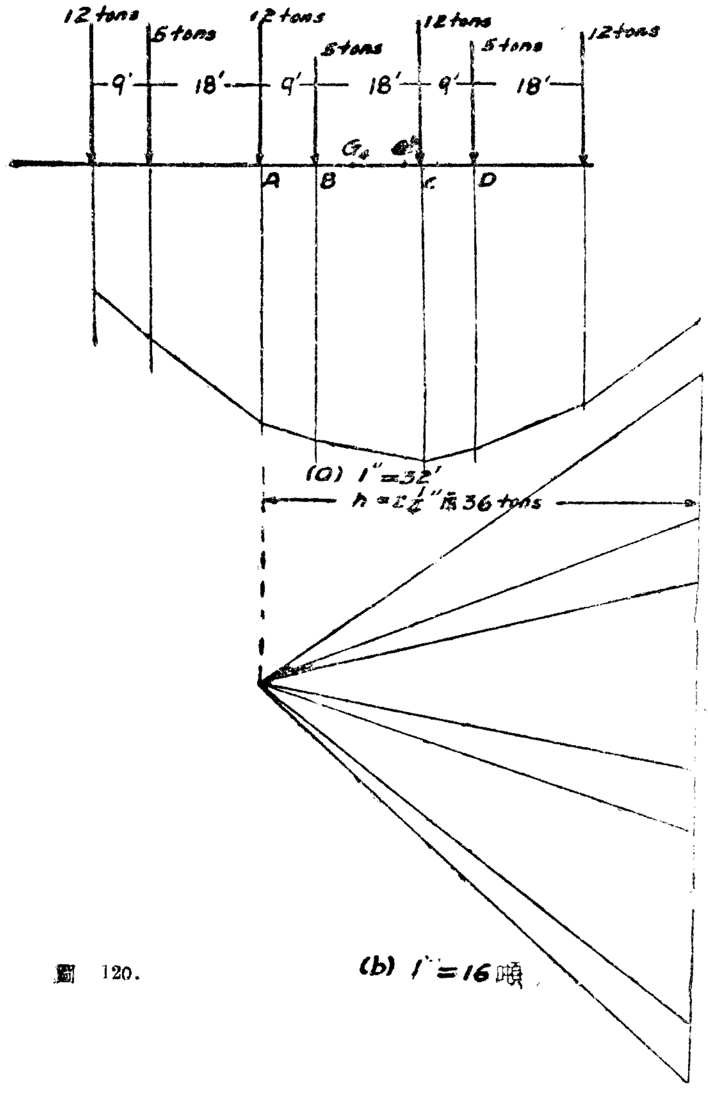

12 tons
5 tons
12 tons
5 tons
12 tons
5 tons
12 tons
9'
18'
9'
18'
9'
18'
A
B
C
D
(a) 1" = 32'
h = 2¼" 爲 36 tons
(b) 1" = 16 噸

圖 120.

故全梁能遇之最大彎力矩＝180 短噸呎。

3. 製曳機車前軸任擔負 6 短噸，後軸任擔負 9 短噸，前後軸相距 10 呎；行過一橋，其跨度(span)爲 40 呎，求橋梁內之最大彎力矩。

4. 10 短噸與 20 短噸之二集中擔負相距 8 呎，行過 20 呎長之簡梁。求梁內之最大彎力矩，並求其現於何處

答 113 短噸呎；距近小擔負之柱 11 呎 4 吋。

43. 矩形梁之切應力 垂直擔負對於梁之橫斷面之切力 Q，須有該橫斷面上之切應力以平衡之。就危險面以左之一部分梁而論，Q 爲正，上向，故橫斷面以右之材料，施於該橫斷面上之切應力之綜合，必下向而等於 Q。就矩形橫斷面而言，可假設各點之切應力皆與 Q 平行，且凡距中立層相等各點之強度必皆相等也。以擔負之方向爲 y，以中立軸之方向爲 z，則上述切應力之方向沿 y，且在垂直 x 之橫斷面上故以 τ_{yx} 示之，曰直切應力(transverse shear stress)。

用兩個相距 dx 之橫斷面，及相距 dy 之一對水平面，界出四稜柱體 $acde$，則 mn 面以右之材料加於該面之切應力爲下向之 τ_{yx}，故

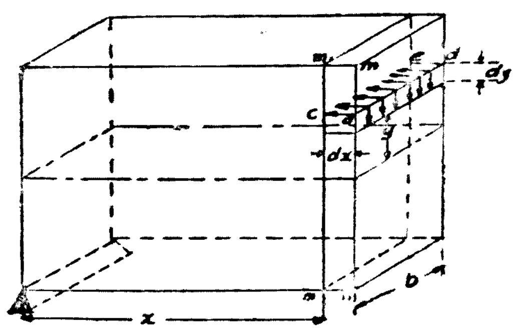


圖 121.

m_1n_1 面以左之材料加於該面上者必上向,其強度亦等於 τ_{yx};此二者合爲力偶。至梁既彎之後,四稜不復轉動,故其上下對面上,亦必有切應力 τ_{xy} 合爲力偶,以平衡上述者。

即 $(ad)dx \cdot \tau_{xy} \cdot dy = (ad)dy \cdot \tau_{yx} \cdot dx$. $\therefore$ $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

泛言之,在材料中一個平面上若有切應力,則在垂直於該面及該切應力之平面上,必有等強之切應力;此二者稱爲互補切應力 (complementary shear stresses)。此切應力之表現不難想見。如圖 122(a) 示兩個重疊之梁,任以垂直擔負,則各自彎曲。若在其交界面上沿橫度 b 而管以鍵,則槽與鍵相觝以供縱的切應力,而使二者之兩

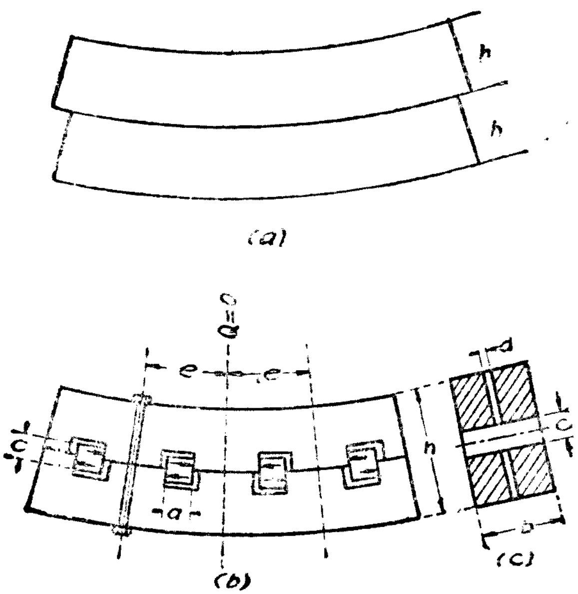


圖 122.

端當齊，恰似一梁者。自最大彎力矩以左在中立層以上之鍵觝於槽之右，類而推之。故若爲一體之梁在壓應力方面之材料，其距中立層較近者施於較遠者之縱切力皆指向危險之橫斷面：其在張應力方面，近者施於遠者則背之。

直切應力之強度無法考求，但縱切力之強度則易知。以相距 dx 之二橫斷面，及距中立層等於 y 之層，並梁之最上層界出薄板，而論其 x 方向之平衡。設左面之彎力矩爲 M，則距中立層 y' 處之應力

$$\sigma_x=\frac{M}{I}y'.$$

乘以 dA 而綜合之，則左面共受右推之力

$$F_1=\frac{M}{I}\int_y^{h/2}y'dA.$$

設右面之彎力矩爲 $M+dM$，則右面共受左推之力

$$F_2=\frac{M+dM}{I}\int_y^{h/2}y'dA.$$

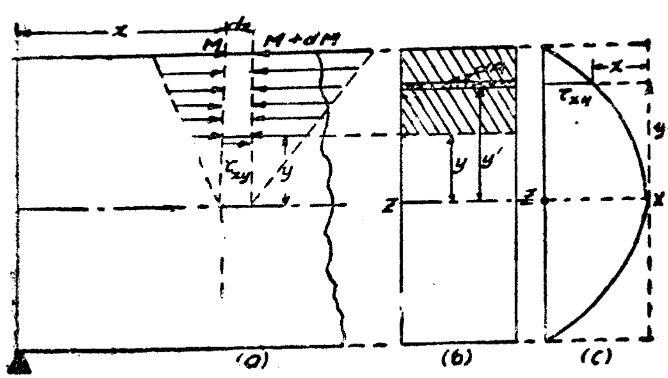


圖 123.

式中之 I 爲梁之橫斷面全部對中立軸之轉動慣量。若橫斷面沿梁不變，則二式中之積相等，皆爲橫斷面在 y 層以上部分對中立軸之一次面矩，dM 既爲正，則 y 層下面所受之縱切力必指向彎力矩較大之方面，其全値爲 $b\cdot dx\cdot\tau_{xy}$。最上面之縱切力必等於零(因以上更無材料以互切也)。等此全値之縱切力於左右推力之差，並以 Q 代 $\frac{dM}{dx}$，

則得
$$\tau_{xy}=\frac{Q}{Ib}\int_y^{h/2}y'\,dA \tag{53}$$

積號內者，意自 y 層至梁表間一部分橫斷面對中立軸之一次面矩，可寫作 $\left[a\bar{y}\right]_y^{\frac{h}{2}}$。

就矩形而言，$\int_y^{h/2}y'\,dA=\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$. 又 $I=\frac{bh^3}{12}$

$$\therefore\quad \tau_{xy}=\frac{6Q}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)=\frac{3Q}{2bh}-\frac{6Q}{bh^3}y^2 \tag{54}$$

末項示拋物線以頂點爲極之橫座標〔圖 123(c)之 x〕故 τ_{xy} 之箭頭在以 O 爲極之拋物線上，在梁之上下表皆等於零。

在 $y=0$ 處即中立層之 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ 爲最大，

$$其値=\frac{3}{2}\cdot\frac{Q}{bh} \tag{55}$$

即其平均値之 1.5 倍也。

又沿梁而論強度與 Q 成正比，即以兩端之中立層處最強，至彎力矩最大之橫斷面減爲零，如圖 124 所示者。

縱直切應力必生形變，如圖 125(a) 示危險斷面以左各方塊所受

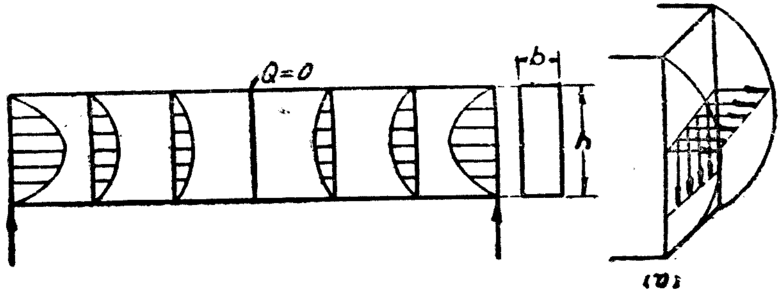


圖 124.

之切力與形變；距中立層愈遠者形變愈少，故原來橫斷面 mon 至梁彎以後，必捲作 $m'on'$。是以簡單彎曲之假設——至梁彎之後，橫斷面仍成平面——用於垂直擔負則不確切，惟以切應力之強度較彎應力者常甚小，今日工程界仍用簡單彎曲公式以解析垂直擔負之彎應力及彎度。

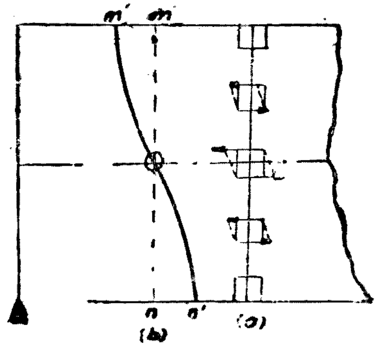


圖 125.

習 題 二 十 九

1. 矩形梁之橫斷面寬 8 吋，厚 10 吋，支點在兩端，距支點 1.5 呎各有擔負，且二者相等。若最大彎應力限為每方吋 800 磅，最大切應力限為每方吋 100 磅，各求其最大擔負。

解. 設擔負為 P，則支持力各等於 P，而最大彎力矩在擔負之間，其值為 $1.5\times12P$ 磅吋。

由公式(46)，
$$\frac{1.5\times 12P}{\frac{8\times 10^3}{12}}=\frac{800}{5}。$$

$$\therefore\quad P=5,390\text{ 磅}.$$

最大切力在支點與擔負之間各等於 P，此處橫斷面中立層之切應力(強度)最大；由公式(55)，
$$100=\frac{3}{2}\times\frac{P}{8\times 10}.$$

$$\therefore\quad P=5,330\text{ 磅}.$$

故知賫用切應力實規定最大擔負5,330磅也。

2. 矩形簡梁之橫斷面為8吋寬，10吋高，長6呎。距一端2呎處有集中擔負6000磅，求其最大彎應力及切應力。

答 $\sigma=720$；$\tau=75$ 磅每方吋。

3. 題2之簡梁，若易集中擔負為每呎1,000磅之散布擔負，求其最大切應力。

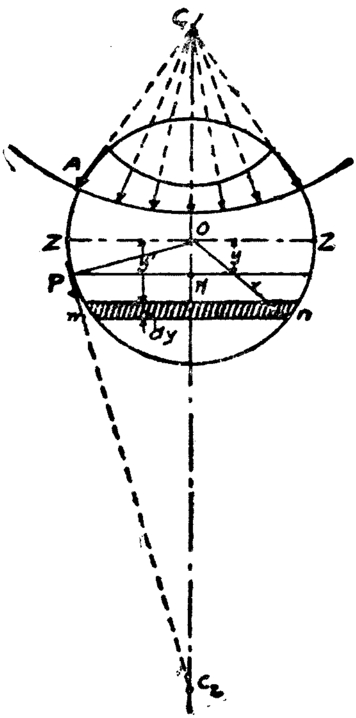


圖 126.

44. 圓梁之切應力 按圖66之證明，可知圓梁橫斷面上切應力之在 A 點者，必沿該點切線 AC_1（參看圖126）。吾人將推廣而假設之：凡在以 C_1 為中心以 C_1A 為半徑之圓弧上，各點切應力皆經 C_1。擬第

29 節之證明，界出長方形小體時垂直於切線之面，卽上述之緯面也，此緯面當爲縱切力對切之面 關於強度者，吾人仍依矩形梁之假設，距中立層相等各點之切應力，平行擔負之分力皆相等。如是，則 mn 窄條之寬等於 $2\sqrt{r^2-y'^2}$，其面積爲

$$dA=2\sqrt{r^2-y'^2}\cdot dy'.$$

橫斷面之自 y 層以外者對中立軸之一次面矩爲

$$M=\int_y^r 2\sqrt{r^2-y'^2}\cdot y'\cdot dy'=\frac{2}{3}(r^2-y^2)^{\frac{3}{2}}$$

又 y 層橫斷面之寬度 $b=2\sqrt{r^2-y^2}$.

故由公式(53)，得 y 層切應力平行擔負之分力，

$$\tau_{yx}=\frac{Q}{3I}(r^2-y^2).$$

每層切應力皆以近外表漸斜而漸強。卽緯線間示線之長短，約可表示切應力之強度。在 y 層者至兩端 P 點時，切應力強度

$$\tau=\frac{\tau_{yx}}{\cos PC_2N}=\frac{\tau_{yx}}{\cos OPN}$$

$$=\tau_{yx}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}=\frac{Q}{3I}r\sqrt{r^2-y^2} \qquad (56)$$

至中立層則各點切應力強度約與兩端之 Z 點者相等。

故全面最強之 $$\tau=\frac{Q}{3\frac{\pi r^4}{4}}\cdot r^2=\frac{4}{3}\cdot\frac{Q}{\pi r^2} \qquad (57)$$

卽平均值之 $\frac{4}{3}$ 倍也。

45. I字梁之切應力 按各點切應力方向必與外皮正切之定理,可知I字梁切應力方向當如圖127(a)所示者.

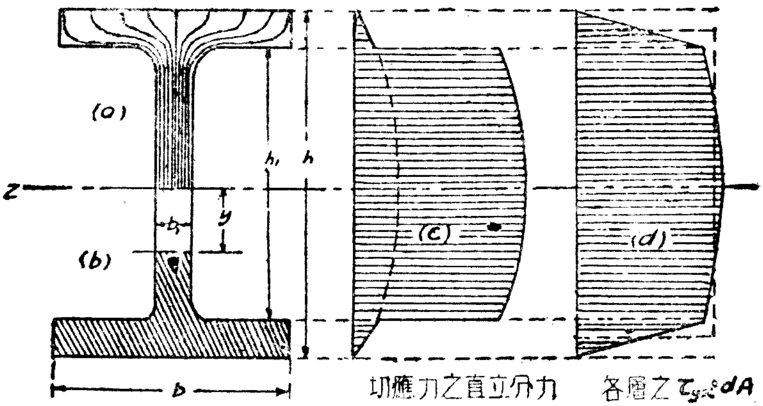


圖 127.

關於強度,按矩形梁之假設——無論在緣在脊,凡一個水平層上各點之切應力直立之分力皆相等,故該分力可按公式(53)計算之;其在脊上者

$$\tau_{yx}=\frac{Q}{Ib_1}\int_y^{h/2}b_1y'\,dy'$$

即

$$\tau_{yx}=\frac{Q}{Ib_1}\left[\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\frac{h_1^2}{4}\right)+\frac{b_1}{2}\left(\frac{h_1^2}{4}-y^2\right)\right] \tag{58}$$

其最大值在 $y=0$ 處,即中立層;

$$\tau_{大}=\frac{Q}{Ib_1}\left[\frac{bh^2}{8}-\frac{h_1^2}{8}(b-b_1)\right] \tag{a}$$

最小值在 $y=\frac{h_1}{2}$ 處,即緣脊交界,

$$\tau=\frac{Q}{Ib_1}\left(\frac{bh^2}{8}-\frac{bh_1^2}{8}\right) \tag{b}$$

因b_1較b甚小，故(a)與(b)約略相等，而脊上切應力可約作縱橫皆屬平均分配者。

至緣脊交界線以外切應力之直立分力，仍按公式(53)計算之，由其最大值$\frac{Q}{Ib}\left[\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\frac{h_1^2}{4}\right)\right]$按拋物線漸減至上下表成零。約言之，在緣脊交界線內外之$\int y\,dA$，變值甚微，而寬度由b_1驟增爲b，故緣上最大切應力之直立分力較脊上之最小者尙小$\frac{b}{b_1}$倍，而最小者等於零。因緣較脊寬$\frac{b}{b_1}$倍，故若論每緣分任之共剪力恰如緣與脊等寬而抗剪力之強度由脊兩極處之值減爲零者(看d圖)。假設將(d)圖之三角形(1)補於(1′)之位置，其面積無大差異；換言之設緣不任剪力而只由脊任之，則實有之最大抗剪力乘脊之面積卽全面之共剪力矣。

故最大之
$$\tau_{yx}=\frac{V}{h_1b_1} \tag{59}$$

返觀圖127(a)緣內切應力之直立分力雖甚小，但其水平分力與全量則頗大，該水平分力至緣之盡頭亦等於零，其值仍可按第43節之法推演之，其詳解與用途詳第69節。

習　題　三　十

1. 設有丄字梁：$b=5$ 吋，$b_1=\frac{1}{2}$ 吋，$h=12$ 吋，$h_1=10\frac{1}{2}$ 吋。若梁之最大切力 $Q=30,000$ 磅；求其脊內最大最小切應力，並求其約值。

答. 最大 5,870 磅每方吋；
最小 4,430 磅每方吋；
約 5,330 磅每方吋。

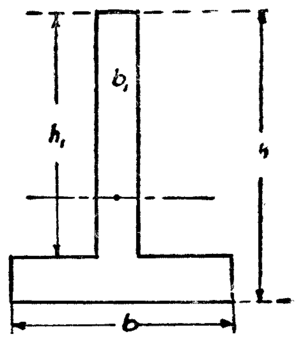


圖 128.

2. 圖 128 示丄梁，其 $h=8$ 吋，$h_1=7$ 吋，$b=4$ 吋，$b_1=1$ 吋。設 $Q=1000$ 磅；求其最大切應力。 答. 176 磅每方吋.

46. 拼造梁之應力 用小段材料定作三角欄，以組成較長之梁曰針管結構梁（參看第 7 節），若擔負加於其角頂，則各段只任拉力或壓力，其值可用靜力學及第 7 節之法求之。

與梁等長之材料用鉚釘縱接，以成較強較硬（強謂其能任之擔負大而彈性不易減衰，硬謂其彎度小也）之橫斷面（如丄字與 II 字者），而仍任垂直力之彎切作用者曰拼造梁（built up beam）. 茲討論其兩種應力之計算法，與管合各部之鉚釘與鍵之制定如下：

例如圖 122(b) 之拼造木梁，鍵所以任縱切力，而釘所以防止鍵之轉動也。設梁之寬為 b，全厚為 $2h$，鍵之厚為 $2c$，釘之直徑為 d. 鍵孔與釘孔雖不在一個橫斷面上，但計算橫斷面之轉動慣量時將此二者之面積一併減去，如圖 122(c)，故

$$I=\frac{b-d}{12}\left[(2h)^2-(2c)^2\right] \qquad (a$$

如此嚴格，為求安全耳，然後將梁看作一整體者，用彎力公式(46)以

計算其彎應力。

設 e 為二鍵之距離。每鍵各須在 be 面上之共切力。計算此切力時甚為簡單，可設梁之橫斷面上全無鍵孔或釘孔，而施用公式(55)以求其強度；故每鍵在其中間水平面上共任之切力

$$S = be \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b(2h)} = \frac{3Qe}{4h} \tag{b}$$

設以 a 代鍵沿梁中軸之寬度，則其中間水平橫斷面上之切應力為 $\frac{S}{ab}$，此值須小於鍵料之資用切應力。

又木材能由二鍵中間橫切，故 $\frac{S}{b(e-a)}$ 須小於木材之資用切應力。又木材與鍵相觝觸之面有相互壓力，其強度 $\frac{S}{bc}$ 須小於木材之資用壓應力。

約束釘扭緊以後，則任沿中軸之張力以壓緊上下木材，其滑阻力雖有補於上述之縱切應力，但為安全與簡單故，皆不計入。如此設計之拼造木梁，其強度只當一整體者之 75% 耳（Kidwell 教授在米西干大學之試驗）。

用鋼板與三角鋼料鉚製成 I 字梁。計算其橫斷面之 I 時，亦將其所有鉚釘孔皆投射在一個橫斷面上；然後代入公式(46)，以求其彎應力。

鉚釘內之切應力：A 列鉚釘之作用，所以防止緣之沿脊滑行也，以下稱緣，即連同其兩側之三角鋼概括在內。經 A 列之二鉚釘，設想兩個橫斷面 mn 與 m_1n_1。因此二面之抗彎力矩不等，遂生緣句推

緣之力，其推動 mn 上緣之力$=\frac{M}{I}\int ydA$，其積限於上緣之平板與兩個三角鋼之橫斷面，如圖 129(c)影示之部。

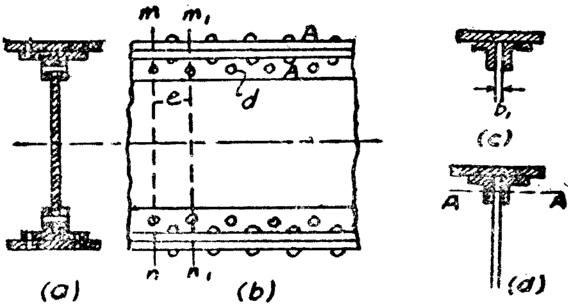


圖　129.

其推動 m_1n_1 上緣之力$=\frac{M+\Delta M}{I}\int y\cdot dA$，其積限同上。

故　　推上緣沿脊滑行之力$=\frac{\Delta M}{I}\int y\cdot dA$.

因　　$$\Delta M=Q\cdot e,$$

故鉚釘 A 其任之切力，　$$S=\frac{Qe}{I}\int y\cdot dA \tag{a$_1$}$$

A 列每釘有二個切應力面，故其實任之切應力

$$\tau=\frac{S}{2\times\frac{\pi d}{4}}=\frac{2Qe}{\pi d^2 I}\int y\cdot dA \tag{b$_1$}$$

鉚釘之直徑 d，按第 19 節之法，用其臨界值或較小者，爲已知。故等 τ 於材料之資用切應力，可以求鉚釘之距離 e. 因 Q 以近兩端爲大，

故 e 宜按最大之 Q 求之，接近危險橫斷面處，可以酌減鉚釘。

上緣平板與三角鋼之鉚接，即可用 A 列鉚釘之直徑與距離，因 $\int ydA$ 之變遷不多，每釘只一個抗切面而釘數已加倍矣。在 A 列每二鉚釘間之縱切力須由脊自行擔負，即在 b_1e 水平面上之共切力 S，須由 $b_1(e-d)$ 之面擔任之，故此處脊內之縱切應力

$$\tau'=\frac{S}{b_1(e-d)}=\frac{e}{e-d}\cdot\frac{Q}{b_1I}\int y\cdot dA \tag{c$_1$}$$

此式之積限，仍如圖 129(c)影示之部。

又脊隨梁彎，恰如矩形梁之自彎者，在 A 列二鉚釘間，脊之水平橫斷面上亦生縱切應力，其值仍由公式（55）計算之，惟須注意水平橫斷面 b_1e 上之共切力，只由 $b_1(e-d)$ 面擔任之耳，故須乘以 $\frac{e}{e-d}$．

於是
$$\tau''=\frac{e}{e-d}\cdot\frac{Q}{b_1I}\int ydA \tag{d$_1$}$$

此積只限於 A 列鉚釘以上脊之橫斷面。

故 A 列鉚釘間脊之水平橫斷面上實有之切應力

$$\tau_{yx}=\tau'+\tau''=\frac{e}{e-d}\cdot\frac{Q}{b_1I}\int y\cdot dA \tag{e$_1$}$$

此積限於上緣板，兩個三角鋼之全斷面，及鉚釘 A 以上之脊部〔如圖 129(d)影示之部〕。如此推算之 τ 是其平均值，實則在孔之上下，尚因局部應力集中（local stress concentration）而加強二倍。由第 45 節，已知輾製 I 字梁，在緣脊交界處之切應力約等於其中立層上者：今對排造梁，復因(1)鉚釘孔占去任切力之面，並(2)有應力集中

作用，而常較其中立層爲強矣。用此切應力與同地點之彎應力合計最大張應力與最大切應力（第5章第58節）尙有增加。但此種梁之破壞，率非由於應力，而係由抗壓緣之受壓而彎，以致失敗者居多。（參看著者進級材料力學，薄板之側彎）。

習題三十一

1. 二矩形木料拼製之梁，其橫寬5吋，其全厚16吋；鍵之寬3吋，厚$2\frac{1}{2}$吋，鍵之距離11吋；任中央擔負5,000磅。求每鍵共任之切力，及其切應力；並求鍵與梁間壓力之強度。

答 $S=\frac{3}{2}\times\frac{2,500\times11}{16}=2,580$ 磅.

$\tau=172$ 磅每方吋；$\sigma_c=413$ 磅每方吋

2. 鋼料拼造梁之脊厚$\frac{3}{4}$吋，高50吋，上下各用兩個三角鋼料鉚而爲緣，其三角鋼爲$6''\times6''\times\frac{1''}{2}$者。鉚釘之直徑4吋，相距4吋。設橫斷面上之切力爲150,000磅；求鉚釘實任之切應力，及脊內最大之縱直切應力。

解. 檢三角鋼料表，可知其橫斷面積爲5.75方吋，對於經重心平行一臂之軸$\overline{I}=19.9$ 吋^4，其重心距中立層$=25-1.7=23.3$吋。

故全橫斷面之

$$I_z=\frac{3}{4}\times\frac{50^3}{12}+4(19.9+5.75\times23.3^2)=20,400\text{ 吋}^4,$$

半個橫斷面對中立軸之一次面矩爲

$$\int_0^{h/2} y\cdot dA=\frac{3}{4}\times\frac{25\times25}{2}+2\times5.75\times23.3=502 \text{ 吋}^3 .$$

故在中立層之切應力爲

$$\frac{Q}{b_1 I_Z}\int_0^{h/2} y\cdot dA=\frac{150,000}{\frac{3}{4}\times20,400}\times502=4,920 \text{ 磅每方吋}^2.$$

又兩個三角鋼對中立軸之一次面矩$=268$ 吋^3,

由式(a_1)得每個鉚釘共任之切力,

$$S=\frac{150,000\times4}{20,400}\times268=7,880 \text{ 磅}.$$

故每個鉚釘之切應力,

$$\tau=\frac{7880}{2\times\frac{\pi}{4}\times1^2}=5,020 \text{ 磅每方吋}.$$

又(e_1)式中之

$$\int y\cdot dA=268+\int_{25''-8''}^{25''} y\cdot dA=268+\frac{3}{4}\times3\times23.5=296 \text{ 吋}^3 .$$

故二鉚釘間脊內之縱切應力爲

$$\frac{e}{e-d}\cdot\frac{Q}{b_1 I_z}\int y\cdot dA=\frac{4}{3}\times\frac{150,000}{\frac{3}{4}\times20,400}\times296=3,900 \text{ 磅}$$

每方吋,不及中立層處者。

3. 圖 130 之拼造梁以任數個集中擔負,已知二擔負間之直切

力爲 80 短噸。設每鉚釘之切力限爲 3 短噸，求證其鉚釘間之距離須爲 3.4 吋。

4. 圖 131 用兩條鋼軌拼造爲梁，已知每軌之橫斷面積爲 10 方吋，重心距底 3 吋，對於平行底面經重心軸之轉動慣量爲 40 吋^4，鉚釘相距 6 吋，梁任直切力 5,0.0 磅；求每個鉚釘實任之共切力。

答 $S=1,7?0$ 磅.

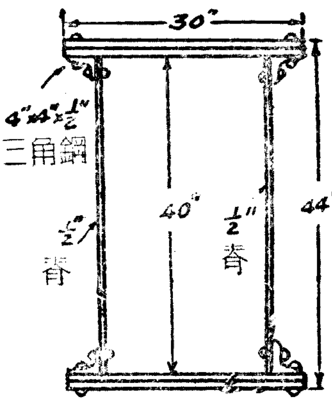


圖 13?

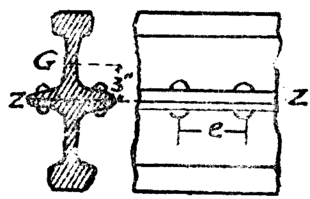


圖 131.

47. 垂直擔負所生之次要應力 除第 35 節 (11) 所述因彎曲而生之抗沿徑壓應力外，垂直擔負更能使梁之各水平層間生互壓之力，稱爲直壓應力 (transverse compressive stress).

設梁之上表每呎任散布擔負 q 磅，欲求其對 y 層所生之直壓應力 σ_y，卽以 y 層及相距 dx 之二橫斷面 mn 及 m_1n_1，與梁之上表界出薄片，而論其上下之平衡。設二橫斷面皆在危險橫斷面之左，則橫斷面 mn 所受之切力 Q 上指，任 y' 層之強度由公式(54)，爲

$$\tau_{yx}=\frac{Q}{2I}\left(\frac{h^2}{4}-y'^2\right),$$

故薄片左面共受上指之切力爲

$$\frac{Q}{2I}\int_y^{\frac{h}{2}}\left(\frac{h^2}{4}-y^{2\prime}\right)dy'=\frac{Qb}{2I}\left(\frac{h^3}{12}-\frac{h^2y}{4}+\frac{y^3}{3}\right).$$

橫斷面 m_1n_1 上下指之切力 $=Q-qdx$，以此代上式之 Q，則得

$$\frac{(Q-q\cdot dx)b}{2I}\left(\frac{h^3}{12}+\frac{h^2y}{4}-\frac{y^3}{3}\right).$$

由 $\Sigma F_Y=0$，得

$$\sigma_y b\cdot dx+\frac{qb\cdot dx}{2I}\left(\frac{h^3}{12}-\frac{h^2y}{4}+\frac{y}{3}\right)-q\cdot dx=0.$$

故 y 層直壓力，

$$\sigma_y=\frac{q}{2I}\left(\frac{h^3}{12}+\frac{h^2y}{4}-\frac{y^3}{3}\right) \tag{60}$$

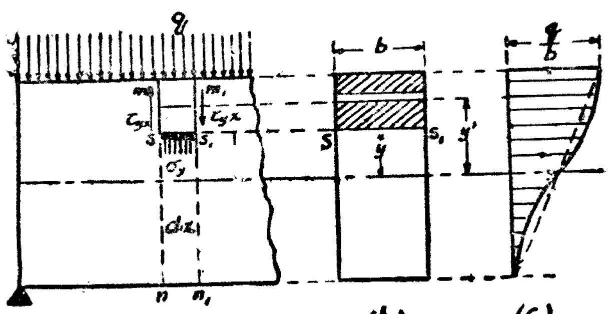


圖 132.

在最上表，　$y=+\frac{h}{2}$，　$\sigma_y=\frac{q}{b}$。

在中立層　$y=0$，　$\sigma_y=\frac{q}{2b}$，

恰為上式之半。在下表　$y=-\frac{h}{2}$，　$\sigma_Y=0$。

連接此三點之示線箭端得直線；而（60）式則示拋物線，其在中立層以上者突出該直線之外，在中立層以下者則突入其內也。

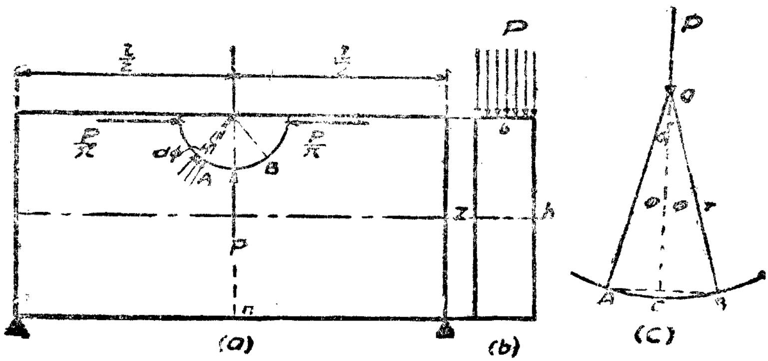


圖 133.

次論集中擔負 P 所生之輻射壓力(圖 133)。憑常識思考正在擔負 P 下之材料壓縮，則鄰近者亦隨之而下，愈遠愈少，故周圍之材料不僅感上述漸遠漸弱之直壓力，且因各層近於 P 而下彎，必在抗壓方面生彎曲之壓應力，此為次要彎應力(secondary bending stress)。設集中擔負 P 沿梁寬度 b 為平均分布者，先考究其所生之輻射壓力：以 P 之着力線為軸，擬想半徑等於 r 之半圓筒，距 OC 等於 ϕ 之線上之輻射壓力強度設為 σ_r。此半圓筒上輻射壓力直上指之總合必

等於P,但其強度之分配法,則不能由平衡規定之也,故必須考查OC,OA,OB諸半徑變長之關係。設OC之縮短爲$OO_1=e_0$〔參看同圖(c)〕,則OA與OB縮短者,必爲

$$e_r=e_0\cos\phi, \qquad \text{而} \qquad \sigma_r=\sigma_0\cos\phi.$$

論半圓筒之平衡:

$$P=\int^A\sigma_r\cos\phi\cdot dA=\sigma_0\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^2\phi\cdot br\cdot d\phi=\frac{\pi}{2}br\sigma_0.$$

$$\therefore\quad \sigma_0=\frac{2P}{\pi br}, \qquad \text{而} \qquad \sigma_r=\frac{2P}{\pi br}\cos\phi. \tag{a}$$

此式示各處(r,ϕ)輻射壓力之強度。

$$\text{加於 } A \text{ 處窄條之力}=\sigma_r\cdot br\cdot d\phi$$

$$=\frac{2P}{\pi}\cos\phi\, d\,\phi \qquad \text{(參看同圖 a)}$$

$$\text{其水平分力}=\frac{2P}{\pi}\sin\phi\cos\phi\, d\phi.$$

故半圓筒左象限共任之水平壓力爲

$$\frac{2P}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi\cos\phi d\phi=\frac{P}{\pi},$$

其力線距上表頗近,爲簡單計,即認其在上表;右象限者亦然。每一力可化爲沿中立層對壓之力,及對彎之力偶$\frac{P}{\pi}\cdot\frac{h}{2}$. 前者在全梁橫斷面上生縱壓應力$=-\frac{P}{\pi bh}$; 後者在梁之下表$n$點,生次要之彎曲張

應力，在上表 O 點生次要之壓應力，其強度為

$$\pm\frac{Ph}{2\pi I_Z}\cdot\frac{h}{2}=\pm\frac{3P}{\pi bh}\cdot\left(約\frac{P}{bh}\right).$$

設原來擔負在梁之中點，則 n 與 O 之應力為

$$\frac{Pl}{4}\cdot\frac{6}{bh^2}.$$

然則 n 點實任張應力（強度）為

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{Pl}{bh^2}-\frac{P}{\pi bh}+\frac{3}{\pi}\cdot\frac{P}{bh}=\frac{P}{bh}\left(\frac{3l}{2h}-\frac{2}{\pi}\right);$$

又 O 點實任壓應力為

$$\frac{3}{2}\frac{Pl}{bh^2}+\frac{P}{\pi bh}+\frac{3}{\pi}\frac{P}{bh}=\frac{P}{bh}\left(\frac{3l}{2h}+\frac{4}{\pi}\right).$$

即擔負所生輻射壓力之作用，可以減小抗張方面之張應力，而增大抗壓方面之壓應力；此作用以梁愈短而愈著。

第五章　混合應力

48. 主應力　以前各章只討論：(1)一種擔負；(2)在最易顯其應力性質之平面上所生之應力；如簡單拉力在橫斷面上所生之張應力，簡單扭力在縱橫斷面上所生之切應力等是。若同時有兩種擔負，則按'力不相干之原則'(principle of independency of forces)，各在其上逕易算之應力；如任扭圓軸，兩端再任壓力，則在軸表上，用縱橫斷面界出之薄板，其六個面之應力如圖 134 所示者，其橫斷面上有生於扭力之切應力

$$\tau=\frac{T}{J}\cdot r,$$

其縱斷面上有等強之互補切應力，其內外面上無應力(參看第24節)。又縱壓力在橫斷面生壓應力

$$\sigma=\frac{P}{A}.$$

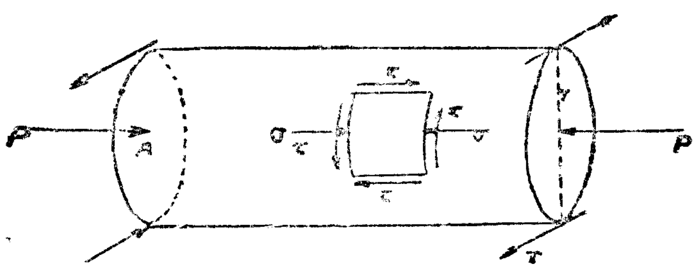


圖 134.

又一種擔負在最易推算應力之斷面上，亦能同時生兩種應力；如只任垂直擔負之梁，在抗張方面以水平面及橫斷面界出四稜柱，其六面之應力如圖 135(b) 所示者，前後皆爲零，橫斷面上有彎力矩所生之張應力

$$\sigma = \frac{M}{I}\cdot y,$$

其縱橫斷面上有等強之切應力

$$\tau = \frac{Q}{Ib}\left[A\bar{y}\right]_y^{h/2};$$

在抗壓方面者，其強度同上，惟 σ 爲壓應力耳。

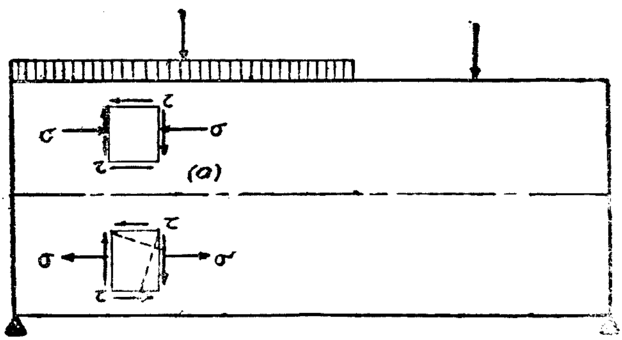


圖 135.

此種易算之應力是否即材料中能有的各種應力中之最大者，實工程之首要問題，今當詳細討論之。

以圖 136 爲例，設 *abcd* 爲材料中之立方體，其最易知之應力，計於左右面上有切應力 τ，則其上下面上亦必有等強之互補切應力 τ；並設左右面上有張應力 σ_n，上下面有張應力 σ_n'；前後面爲自由面。吾人將尋求(1)在何方面只有垂直應力而無切力，(2)材料實任之張

應力以何方面爲最強，(3)又切應力以何方面爲最強。

今設與 σ_n 作用面傾 ϕ 角之 ae 面上無切力，只任垂直張應力。若以 abe 三稜柱爲自由體，則其 ae 面上之垂直張應力 σ_x 與圖 136 所示者相反（因該圖係表示四稜柱體 $fghi$ 所受者）。設垂直紙面之長度爲 1，由沿 ae 之 $\Sigma F=0$ 得

$$\sigma_n \cdot ab \cdot \sin\phi + \tau \cdot be \cdot \sin\phi = \sigma_n' \cdot be \cdot \cos\phi + \tau \cdot ab \cdot \cos\phi;$$

以 ae 除之，

$$\sigma_n \sin\phi\cos\phi + \tau\sin^2\phi = \sigma_n' \sin\phi\cos\phi + \tau\cos^2\phi,$$

即
$$\frac{1}{2}(\sigma_n - \sigma_n')\sin 2\phi = \tau\cos 2\phi.$$

$$\therefore \quad \tan 2\phi = \frac{2\tau}{\sigma_n - \sigma_n'} \tag{61}$$

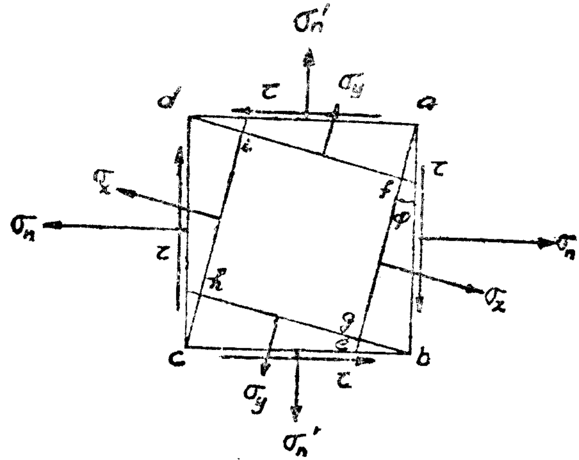


圖 136.

因 2ϕ 與 $(180^\circ+2\phi)$ 之正切相等，故無切力之方面有二：一與 σ_n 之作用面傾 ϕ 度，一與之傾 $(90^\circ+\phi)$ 度，二者互相垂直。

又垂直 ae 之 $\Sigma F=0$，

$$\sigma_x\cdot ae=\sigma_n\cdot ab\cdot\cos\phi+\sigma_n'\cdot be\cdot\sin\phi+\tau\cdot ab\sin\phi+\tau\cdot be\cdot\cos\phi,$$

以 ae 除之，並以 $\dfrac{\cos 2\phi+1}{2}$ 代 $\cos^2\phi$，以 $\dfrac{1-\cos 2\phi}{2}$ 代 $\sin^2\phi$，則得

$$\sigma_x=\frac{\sigma_n+\sigma_n'}{2}+\frac{\sigma_n-\sigma_n'}{2}\cos 2\phi+\tau\sin 2\phi.$$

由公式(61)，
$$\cos 2\phi=\pm\frac{\sigma_n-\sigma_n'}{\sqrt{(\sigma_n-\sigma_n')^2+4\tau^2}};$$

$$\sin 2\phi=\pm\frac{2\tau}{\sqrt{(\sigma_n-\sigma_n')^2+4\tau^2}},$$

對於較小之 ϕ 角用正號，較大者用負號，因其二倍相差 180° 也。

$$\therefore\quad \sigma_x=\frac{\sigma_n+\sigma_n'}{2}\pm\frac{(\sigma_n-\sigma_n')^2+4\tau^2}{2\sqrt{(\sigma_n-\sigma_n')^2+4\tau^2}}$$

$$=\frac{\sigma_n+\sigma_n'}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_n-\sigma_n')^2+4\tau^2}$$

ϕ 角較小之面上者，

$$\sigma_x=\frac{\sigma_n+\sigma_n'}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_n-\sigma_n')^2+4\tau^2}$$

ϕ 角較大之面上者，　(62)

$$\sigma_y=\frac{\sigma_n+\sigma_n'}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_n-\sigma_n')^2+4\tau^2}$$

注意：σ_x 與 σ_y 原設為張力，故用公式(63)求主應力得正為張力，得負則壓力也。

長方體$fghi$之前後面上亦不任切力，卽其三對面皆無切力，只有垂直應力σ_x，σ_y，0也。至於垂直應力之作用面須由σ_n者順轉ϕ度或逆轉ϕ度可用常識規定之；如圖136之τ匯於b點，故在順轉ϕ度之fg面上，生較強之張應力σ_n也。

泛言之，無論物件任何種擔負，在其各斷面中常能選出三個平面，互相直交，其切應力得零，而其應力皆屬垂直者；此謂之主應力(principal stresses)，有時其一個或兩個等於零；又其作用面稱爲主面(principal planes)。例如自鍋爐內表，以含徑斷面，環周斷面，及橫斷面界出極小之立方體(圖137)，其六面皆只任垂直應力，卽三對主面也。又例如圖136，設$\tau=0$，$\sigma_n'=0$；則化爲任簡單拉力之棒，其$\sigma_n=\dfrac{P}{A}$。由公式(61)得$\phi=0$，卽橫斷面爲一主面。與橫斷面垂直的一對直交面亦爲主面。又設$\sigma_n=0$，$\sigma_n'=0$；則圖136化爲任單純扭力之軸表上薄瓦，內外面卽一對主面；又由公式(61)，得斜斷面之與橫斷面傾45°及(90°+45°)者，卽他二主面也；由公式(62)，可知在前者之主應力$\sigma_x=+\tau$，在後者$\sigma_y=-\tau$，爲壓應力(參看第24節)。

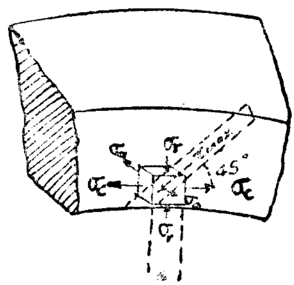


圖 137.

設$\sigma_n'=0$，而$\sigma_n=$正，則圖136化爲圖135(b)，梁之前後面是一對主面，其他二主面與橫斷面之傾角，可由公式(61)求之，一傾銳角ϕ，一與之垂直，其主應力在前後面者爲零；與橫斷面傾銳角之主面上者

$$\sigma_x=\frac{\sigma_n}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_n^2+4\tau^2};$$

與橫斷面傾鈍角之主面上者

$$\sigma_y=\frac{\sigma}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_n{}^2+4\tau^2},$$

因根項大於前項,故 σ_y 為負,為壓應力。

習題三十二

1. 設圖186示材料中之小立方體, $\sigma_n=5,000$ 磅每方吋, $\sigma_n'=3,000$ 磅每方吋, $\tau=1,000$ 磅每方吋。求主應力及主面方位。

答 $\sigma_x=5,414$ 磅每方吋,在與 σ_n 作用面傾 $22\frac{1}{2}^\circ$ 角之方面上;

$\sigma_y=2,586$ 磅每方吋,在與 σ_n 作用面傾 $12\frac{1}{2}^\circ$ 角之方面上。

2. 上題之 σ_n 若為 $-5,000$ 磅每方吋,餘均相同;求主面及主應力。

3. 扭緊之螺旋釘,在杆與頭相接處之表面上設想一弧形薄板,其六個面各任何種應力?設垂直中軸之二對面上任每方吋10,000磅之張力及每方吋8,000磅之切力;求其主應力及作用面。

答 $+14,450$ 磅每方吋, $\phi=29^\circ$; $-4,450$ 磅每方吋, 119°.

49. 主應力即材料中最大最小張應力　用上節方法可求得主面之方位。以三對主面及平行主應力 σ_z 之平面 bc,在材料中界出三稜柱體 abc. 所謂三個主應力之方向,為 X,Y,Z. 設 bc 面上之應力為 σ, bc 面既與 σ_z 平行,則前後兩底上 σ_z 之全值自得平衡,無論 σ_z 是否等於零,而 bc 面上之 σ 必無 σ_z 之分量也。以 x 與 y 代其平行 σ_x 與 σ_y 之二分量,論三稜柱之平衡:

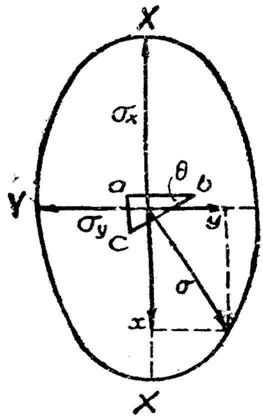


圖 138.

由 $\Sigma F_X=0$，得 $\sigma_x \cdot ab = bc \cdot x$.

$$\therefore \cos\theta = \frac{x}{\sigma_x}.$$

由 $\Sigma F_Y=0$，得 $\sigma_y \cdot ac = bc \cdot y$.

$$\sin\theta = \frac{y}{\sigma_y}.$$

平方相加，得
$$\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}=1.$$

故知垂直 XY 面之平面，如 bc 者，迴轉一周時，其應力箭頭之軌跡為橢圓，故以 σ_x 為最大，而 σ_y 為最小也。

同理垂直 XZ 面之諸平面，以 ab 面上之 σ_x 為最大，而以 abc 面上之 σ_z 為最小也。合而言之，三個主要張應力中有一個為材料中之最大張應力，另一個為最小者。如圖 137 之環周張應力 $\sigma_c=\frac{pr}{h}$，為材料中之最大張應力，最小者為沿徑張應力 $\sigma_r=-p$，即材料中之最大壓應力也。又如圖 136 之 $\sigma_z=0$；若 σ_y 由公式 (62, b) 算出，而得小於 σ_x 之正張應力，則 0 為最小；若 σ_y 得負，則 σ_y 即最小之張應力（或最大壓應力也）。

最大張應力學說之設計公式 既能求出最大張應力，則以此等於材料之资用張應力 σ_w，可得設計公式。如鍋爐筒既以在縱鉚接處之環周張應力為最大，則

$$\sigma_w=\frac{pr}{h}\div\text{鉚接效率} \qquad (63)$$

參看公式(19). 此係假設'彈性之衰退視乎最大張應力'之學說,所得的薄筒公式也。所謂彈性衰退者謂材料超過其彈性限度也。鉚接效率可預設為 75－80%,俟後設計鉚釘之時,只須各種效率均不在此預設之值以下,即可用矣。

習 題 三 十 三

1. 鍋爐之直徑須 4 呎,且須能任每方吋 180 磅之內壓力。設鋼板之資用張應力為 15,000 磅每方吋,鉚釘之效率約 80%。試按最大張應力學說,求其所須鋼板之厚。

解. 由公式(68),

$$h=\frac{pr}{\sigma_w}\div 0.8=\frac{180\times 24}{15,000\times 0.8}=0.36\text{ 吋}.$$

2. 設以厚 $\frac{3}{8}$ 吋鋼板鉚製鍋爐,以任每方吋 180 磅之內壓力。設鋼之資用張應力為 15,000 磅每方吋,鉚接效率設為 80%;試按最大張應力說求其直徑之最大限。 答 5 呎。

59. **材料中之最大切應力** 由三個主應力,可求材料實任之最大切應力。今就圖 136 之立方體 $fghi$,或就鍋爐外表,以同軸圓筒及直徑剖面與橫斷面界出之小立方體為例。以 σ_x, σ_y, 0 代其三個主要張應力,求材料中之最大切應力如下:設想斜斷面 fe 與 x 主面傾 ϕ 角〔參看圖 139(a)〕。設 x 主面 fg 之面積為 A,則 ge 之面積為 $A\tan\phi$,而 fe 之面積為 $\frac{A}{\cos\phi}$. 斜斷面 fe 上之垂直應力 σ_n 及正切應力 τ,可由三稜柱體 fge 之平衡求之:

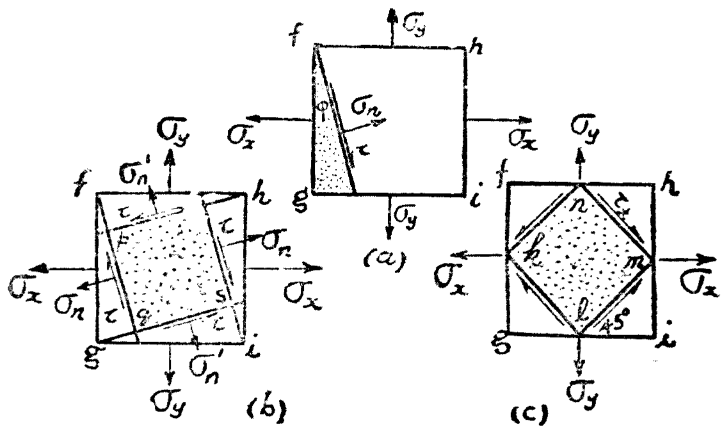


圖 139.

由垂直 fe 之 $\Sigma F=0$, 得

$$\sigma_n \cdot \frac{A}{\cos\phi} = \sigma_x \cdot A \cdot \cos\phi + \sigma_y \cdot A \tan\phi \cdot \sin\phi,$$

$$\therefore \quad \sigma_n = \sigma_x \cos^2\phi + \sigma_y \sin^2\phi.$$

或以 $\cos 2\phi$ 之函式代 $\sin^2\phi$ 及 $\cos^2\phi$, 則得

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\phi \tag{64}$$

由沿 fe 之 $\Sigma F=0$, 得

$$\tau \cdot \frac{A}{\cos\phi} = \sigma_x \cdot A \cdot \sin\phi - \sigma_y \cdot A \tan\phi \cdot \cos\phi,$$

$$\therefore \quad \tau = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\phi \tag{65}$$

用此二式可以解求縱橫拉力在斜斷面上所生之應力。又此二式可由

公式(18, a)與(18, b)，就 σ_x 與 σ_y 之混合作用求得之。以上討論，係假設 σ_x 與 σ_y 皆屬張力者；若 σ_y 為壓力，則稱為負張力，而(64)與(65)式之 σ_y，不須改變符號。

斜斷面 fe 上之結果應力

$$\sigma=\sqrt{(64\text{式})^2+(65\text{式})^2}$$

$$=\sqrt{\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y^2}{2}\cos 2\phi}.$$

由此式可知 σ 以 $\phi=0$ 時為最大，其值為 σ_x，此時之 $\tau=0$；又以 $\phi=90°$ 時為最小，其值為 σ_y，而此時之 τ 亦等於零：此足徵第 49 節之定理——最大最小張應力必為主應力也。

圖 139(b)之 $pqrs$ 示平行 fe 與垂直 fe 一組面界出之立方體，其四周箭號示其所受之應力，故 pq 面上之應力與圖(a)同一之面 fe 上者恰相反也；其 pq 與 rs 面上之應力，即公式(64)與(65)所示者。在 pr 與 qs 面上之應力可將該二式之 ϕ 換為$(90°+\phi)$以求之，於是

$$\sigma_n'=\frac{\sigma_a+\sigma_y}{2}-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\phi, \tag{64, b}$$

而

$$\tau=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\phi, \tag{65, b}$$

若將 $pqrs$ 擴大至 $fghi$ 之外，即圖 136 之 $abcd$ 也；故以上討論，可作為第 48 節之逆。

由公式(65)，當 $\phi=45°$ 時，τ 最大，其值為 $\tau=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}$，其作用面平分 σ_x 與 σ_y 間之角；但此時之 σ_n 與 σ_n' 相等而非零，惟在圖 139(c)中未經示出耳。

(1)若 σ_y 爲小於 σ_x 之正張力,則就 σ_x 與 σ_y 而論所得之切應力,尙不如就上下面之 σ_x 與前後面上之 0 而論所得者爲尤大也。其値爲 $\frac{\sigma_x}{2}$,其作用面平分 σ_x 與 σ_z 間之角,

(2)若 σ_y 爲負張力,則就 σ_x 與 σ_y 而論所得之 τ 爲最大,蓋其差實合也

然則最大切應力

$$\tau_{大}=\frac{1}{2}(最大主應力-最小主應力) \qquad (66)$$

就鍋爐內壁而言,其最大切應力

$$\tau_{大}=\frac{1}{2}(\sigma_c-\sigma_r),$$

其作用面與直徑剖面傾 45° 角(參看圖 137)。

習 題 三 十 四

1. 設圖 139(b)所示之 ϕ 爲 30°, $\sigma_x=10,000$ 磅每方吋, $\sigma_y=-5,000$ 磅每方吋。求 *prqs* 長方體四周之應力。

答. $\sigma_n=6,250$; $\sigma_n'=-1,250$; $\tau=6,49$ 磅每方吋.

2. 上題之長方體,若 ϕ 之方位使 τ 最大;求其四周之應力。

答. $\sigma_n=2,500$; $\sigma_n'\tau=2,500$ $\tau=7,500$ 磅每方吋.

3. 求第 48 節三個習題之最大切應力。

答 (1) $\tau_{大}=1,414$; 作用面平行於 σ_y 與 σ_x, 傾 45° 角; (3) $\tau=9,450$; 與橫斷面傾 74°.

51. 最大切應力說及本學說之薄筒公式 材料中任何種混合應力，皆可化為三個主要張應力——其由擔負直接求出者，如鍋爐筒是也；或先就擔負求簡單方面之垂直應力 σ_n 與 σ_n'，及該面之正切應力 τ，然後按第48節之法求之——於是遂知材料中之最大張應力矣。再按第50節之討論及公式(67)，可知材料實任之最大切應力。然則材料果因何而衰退其彈性？只視最大張應力如公式(63)所假設者，抑與其他主應力皆有關係、如有關係，既非直接者，則必由三個主應力共生他量——如(1)最大切應力，(2)最大增長係數，或(3)此三者對於每立方吋材料共儲之應變能——而後由各該量以規定彈性之衰退與否。於是彈性衰退之學說分而為四矣。

Guest 氏以為最大切應力既生於最大最小主應力，實即生於材料實有之應力也。故假設無論材料任何種擔負，必俟其最大切應力達其彈性限度，而後彈性始衰退；如是則等材料之資用切應力於其實任之最大切應力，亦可得設計之公式，如鍋爐筒之最大張應力為環周者，由公式(19)，$\sigma_c=\frac{pr}{h}\div$（鉚接效率），其最小而為沿徑者 $\sigma_r=-p$，故其最大切應力 $=\frac{1}{2}\left(\frac{pr}{h}\div\text{鉚接效率}+p\right)$，其作用面在鉚接處與直徑面傾45°角。於是

$$\tau_w-\frac{p}{2}=\frac{pr}{2h}\div\text{鉚接效率} \tag{67}$$

此即最大切力說之薄筒公式也。由附錄1表1，可知鋼之切應力彈性限度約為其張應力之$\frac{6}{10}$，故用相同之安全因數，則 $\tau_w=0.6\sigma_w$。

而(67)式可寫作 $$0.6\sigma_w-\frac{p}{2}=\frac{pr}{2h}\div\text{鉚接效率} \qquad (67,b)$$

因$\frac{p}{2}$較$0\cdot6\sigma_w$甚小,故約作

$$\sigma_w=\frac{pr}{1\cdot2h}\div\text{鉚接效率} \qquad (67,c)$$

以此式與(63)式相較,可用等厚之鋼板鉚爲等直徑之鍋爐,其能任之內壓力則較大1.2倍,此卽本學說之內容也.

習 題 三 十 五

1. 鍋爐之直徑設爲4呎,且須能任內壓力180磅每方吋,而鋼之資用張應力每方吋15,000磅,鉚接效率80%;試按最大張力及最大切力二學說,各求其所須鋼板之厚.

解. 由公式(63),

$$h=\frac{pr}{\sigma_w}\div0.8=\frac{180\times24}{15,000\times0.8}=0.36\text{ 吋}.$$

由公式(67,b),

$$h=\frac{pr}{1.2\sigma_w-p}\div0.8=\frac{180\times24}{17,820\times0.8}=0.30\text{ 吋}.$$

2. 設以$\frac{3}{8}$吋厚之鋼板鉚製鍋爐以任每方吋180磅之內壓力。設鋼之資用張應力爲15,000磅每方吋,資用切應力爲0.6×15,000磅每方吋,鉚接效率約80%;試按最大張力及最大切力二學說,求其直徑之最大限。

答 50吋;59.4吋.

52. Mohr 氏圓 (1)已知主應力求斜斷面上之應力 圖 139(b) 斜斷面 pq 或 rs 與主應力 σ_z 平行，而與 σ_x 之作用面傾 ϕ 角，茲圖解其應力 σ_n 與 τ：在水平軸上示垂直應力 σ，由 O 起，作 OA 以示 σ_x，作 OB 以示 σ_y．以 AB 為直徑作圓。經 O 作縱軸以示正切應力。因 pq（或 rs）由 σ_x 之作用面正轉 ϕ 角，故由 CA 起作正角 2ϕ，得 D 點，作 DF．則

$$OF = OC + CF = \frac{OA + OB}{2} + CD\cos 2\phi$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\phi = \sigma_n.$$

又

$$DF = CD\cdot\sin 2\phi = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\phi = \tau.$$

因 $\sin 2\phi$ 為正，故 τ 得正；正號可利用以示 pq 與 rs 面上之切應力合為順時針之力偶。

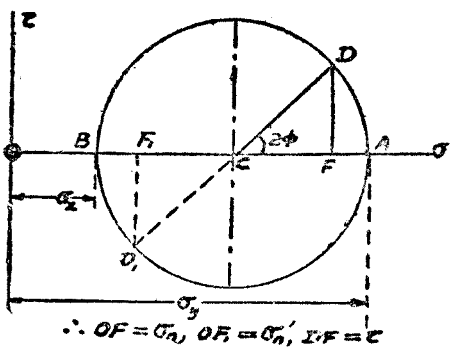


圖 140.

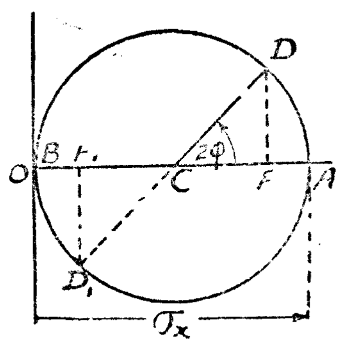


圖 141.

將 CD 向對方引長，交圓周於 D_1，其半徑 CD_1 由 CA 正轉 $(180°+2\phi)$，即示斜斷面之由 σ_x 作用面正轉 $(90°+\phi)$ 者，如 pr 與 qs 是也。今

$$OF_1=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos(180°+2\phi)$$

$$=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\phi=\sigma_n';$$

又

$$F_1D_1=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin(180°+2\phi)$$

$$=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\phi=-\tau,$$

參看公式(64, b)與(65, b)二式，可知 D_1 點之座標示 pr 與 qs 一對面上之應力：今 τ 為負，示該一對面上之切應力合為逆時針之負力偶。

圖 141 示 $\sigma_y=0$ 時之 Mohr 氏圓：若斜斷面與 σ_x 之作用面傾正角 ϕ，則 $OF=\sigma_n$，$OF_1=\sigma_n'$，而 $DF=+\tau$，示 ϕ 等於銳角一對面之

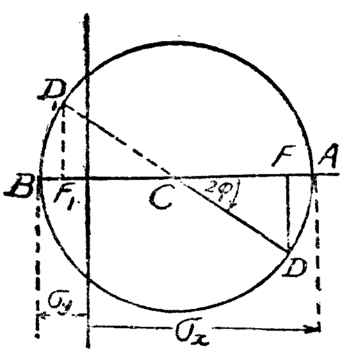


圖 142.

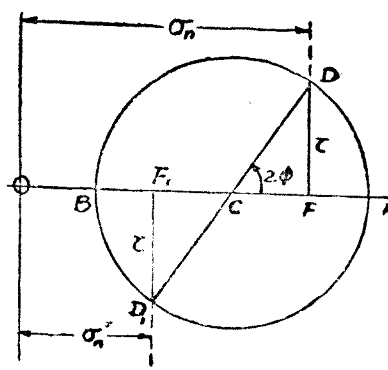


圖 143.

正切應力，合爲順時針之正力偶。

圖142示 σ_y 爲壓應力而斜斷面上 σ_x 作用面倒轉 ϕ 角時之 Mohr 氏圓；其 $OF=\sigma_n, OF_1=-\sigma_n', DF=-\tau$，示 ϕ 等於銳角一對面上之正切應力合爲逆時針之負力偶也。

(II) **已知易算之應力求主面方位及主應力**　如圖 136 由已知之 $\sigma_n, \sigma_n', \tau$；求 ϕ, σ_x, σ_y. 由 O 作 OF，以示 σ_n，作 OF_1 以示 σ_n'. 因 σ_n 作用面上之 τ，合爲順時針之正力偶，故 2ϕ 須爲正角，而 $DF=\tau$ 須作於水平線之上方。D_1F_1 亦等於 τ，須作於水平線之下方。連 DD_1 得圓心 C，以 CD 爲半徑作圓，得 A 及 B. 於是

$$OA=OC+CD=\frac{OF+OF_1}{2}+\sqrt{\left(\frac{FF_1}{2}\right)^2+\overline{DF}^2}$$

$$=\frac{\sigma_n+\sigma_n'}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_n-\sigma_n'}{2}\right)^2+\tau^2}=\sigma_x.$$

$$OE=OC-CD=\frac{\sigma_n+\sigma_n'}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma_n-\sigma_n'}{2}\right)^2+\tau^2}=\sigma_y.$$

2ϕ 既爲正角，則 σ_n 之作用面，須由 σ_x 作用面正轉 ϕ 角〔注意：此處不論已知與所求之先後次序，如此說法，欲與(I)段相同耳〕。由圖 143，可知無論 FD 作於 σ 軸之上方或下方，只須 F_1D_1 作於其對方即可求 σ_x, σ_y，與 2ϕ. 雖 2ϕ 之正負未辨，但由常識可知圖 136 之 σ_x 作用面須由 σ_n 作用面順時針轉 ϕ 角，而後 σ_x 方能爲最大也。

(III) **用 Mohr 氏圓求材料中之最大切應力及其作用面**　就圖 136 而論，已知材料在 $abcd$ 長方體之六面上實有之應力 $\sigma_n, \sigma_n', \tau$；則用 Mohr 氏圓能求主面之方位及主要張應力 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z(=0)$. 換

言之,以三對主面界出長方體 $fghi$; 若其六面上受上述之主要張應力,則在 $abcd$ 六面上必任其實有之應力,或任何面上亦必任其實有之應力也,故材料中實有之最大切應力亦可就主應力以求之。在圖 144 之三個主應力皆設為正。含 z 軸諸面上之切應力只生於 σ_x 與 σ_y,故可用圖 140 之 DF 示之,當 CD 直立時為最大,其作用面平分 σ_x 與 σ_y 間之傾角。在圖 145 中作 $OA=\sigma_x, OB=\sigma_y, OC=\sigma_z$. 以 AB 為直徑作圓,其半徑即示含 z 軸諸面上能有的最大切應力,其值為 $\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)$,其作用面平分 σ_x 與 σ_y 間之傾角。同理,BC 圓之半徑示含 x 軸諸面上能有的最大切應力 $\frac{1}{2}(\sigma_y-\sigma_z)$,其作用面平分 σ_y 與 σ_z 間之傾角。AC 圓之半徑為含 y 軸諸面能有之最大切應力 $=\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_z)$,其作用面平分 σ_x 與 σ_z 間之傾角。若 $\sigma_x>\sigma_y>\sigma_z$,則最大圓之半徑即示材料中各方面能有的最大切應力,其值 $=\frac{1}{2}$(最大 $\sigma-$ 最小 σ),其作用面平分該圓直徑兩端之主應力間之角。

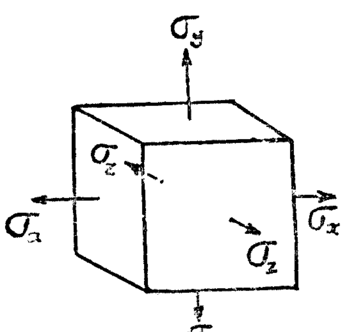


圖 144.

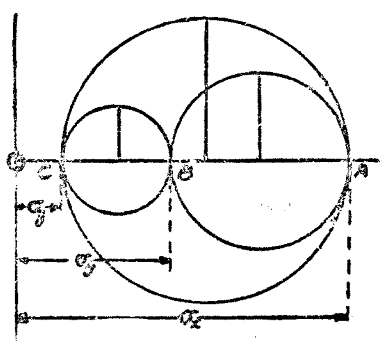


圖 144

習 題 三 十 六

1. 設有立方體,其兩組對面之張應力皆爲 σ,其他一對面不任應力,各面皆無切力。求作 Mohr 氏圓,並求其最大切應力。

答. 圖 145 AC 與 BC 圓相合直徑 $=\sigma$, AB 圓縮於 A 點.

最大之 $t=\frac{1}{2}\sigma$, 其作用面與一個 σ 平行, 與他個傾 45° 角.

2. 設立方體之三對面上皆無切力,分任張應力 $+\sigma$, $-\sigma$, 0. 求作 Mohr 氏圓以求其最大切應力。 答 $t_{大}=\sigma$.

3. 如圖 139(b),已知 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z=0$ 爲主應力。求 $\sigma_n=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)$ 之方面。 答 $\phi=\frac{\pi}{4}$.

53. 主應變 三個主應力對該三度每吋所生之變長曰主應變 (principal strains)。由任擔負之材料中,用三個主面界出立方體 (參看圖 144),設三個主應力皆是張力,茲求其三度之線應變。爲簡單起見,設立方體之每度皆爲一吋,則

σ_x 使 x 度生增長係數 $=\frac{\sigma_x}{E}$,

σ_y 使 x 度生縮短係數 $=\mu$ 倍其 y 度之增長係數 $=\mu\frac{\sigma_y}{E}$,

σ_z 使 x 度生縮短係數 $=\mu\frac{\sigma_z}{E}$.

故 x 度共生之增長係數

$$\epsilon_x=\frac{\sigma_x}{E}-\frac{\mu}{E}(\sigma_y+\sigma_z) \tag{67, a}$$

y 度共生之增長係數

$$\epsilon_y=\frac{\sigma_y}{E}-\frac{\mu}{E}(\sigma_z+\sigma_x) \tag{67, b}$$

z 度共生之增長係數

$$\epsilon_z=\frac{\sigma_z}{E}-\frac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y) \tag{67, c}$$

設 σ_x 爲最大，σ_z 爲最小，則由公式(69, a) 減其次二式皆得正，故 ϵ_x 爲最大增長係數。又由公式(69, c)減其上二式各得負，故 ϵ_z 爲最小增長係數在特別情形如圖 136 所示者 $\sigma_z=0$，則(67)式化爲

$$\epsilon_x=\frac{\sigma_x}{E}-\mu\frac{\sigma_y}{E};$$

$$\epsilon_y=\frac{\sigma_y}{E}-\mu\frac{\sigma_x}{E};$$

$$\epsilon_z=-\frac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y), \tag{68}$$

按同法，可知 ϵ_x 爲最大增長係數，而 ϵ_z 爲最小者也。

有時在任擔負之材料中，已知其縱橫線應變，而求其實生該縱橫線應變之縱橫應力，則由(68)式之前二式解得

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\mu^2}(\epsilon_x+\mu\epsilon_y);$$

$$\sigma_y=\frac{E}{1-\mu^2}(\epsilon_y+\mu\epsilon_x), \tag{69}$$

任一主應力若爲壓力，則冠以負稱爲負張力，故(67)，(68)，(69)諸式中主應力之前不須變號矣。

既由公式(67)求得其三度線應變則後來體積為

$$(1+\epsilon_x)(1+\epsilon_y)(1+\epsilon_z)$$

$$=1+(\epsilon_x+\epsilon_y+\epsilon_z)+\epsilon_x\epsilon_y\epsilon_z.$$

故其體積增大係數或稱體應變,(unit volume strain),

$$v=\epsilon_x+\epsilon_y+\epsilon_z \tag{70}$$

若六面(或周圍)之壓力均等於 p,則當未超過彈性限度以前三度縮短係數皆為

$$\epsilon=\frac{p}{E}(1-2\mu),$$

而體縮係數

$$v=\frac{3p}{E}(1-2\mu).$$

$$\therefore\quad \frac{p}{v}=\frac{E}{3(1-2\mu)}=\text{常數 } K \tag{71}$$

然則一般材料不踰彈性限度,則其周面壓應力(強度 p)與其體積壓縮係數(v)成正比;該定比稱為體彈性係數(volume modulus of elasticity).

彈性常數　關於材料之彈性有四個常數,卽 E, G, K, μ, 俱稱為彈性常數(elastic constants).示此四者相關之公式有二:卽公式(24)與(73)是也。故四者之中,若能直接測定其二,卽可用該二式以求其餘二者。線彈性係數 E 常用變長試驗機直接測定之,切力彈性係數 G 常用扭力試驗機由公式(27)測定之. 此二者之值見附錄1表1. 故體彈性係數 K, 與 Poisson 之比 μ 可由公式計之, 如劾鋼之

$$E=30\times10^6 \text{ 磅每方吋},$$

$$G=12\times10^6 \text{ 磅每方吋};$$

故由公式(24),

$$1+\mu=\frac{E}{2G}=1.25. \qquad \therefore \quad \mu=\frac{1}{4}.$$

又由公式(71),

$$K=\frac{E}{3(1-2\mu)}=\frac{30\times10^6}{3(1-0.5)}=20\times10^6\text{ 磅每方吋.}$$

鍋爐容積之變遷　鍋爐鋼殼之體積變遷可由(67)式求其三度之線應變而相加以求之,但無關乎工程之用。茲求其容積之變遷如下: 其沿徑張應力 $\sigma_r=-p$,較之環周張應力 $\sigma_c=\frac{pr}{h}$,及縱向張應力 $\sigma_a=\frac{pr}{2h}$ 皆甚小,姑約作 0. 故直徑增長係數=環周增長係數;

$$\epsilon_c=\frac{\sigma_c}{E}-\mu\frac{\sigma_a}{E}=\frac{pr}{Eh}\left(1-\frac{\mu}{2}\right);$$

中軸增長係數, $$\epsilon_a=\frac{\sigma_a}{E}-\mu\frac{\sigma_c}{E}=\frac{pr}{Eh}\left(\frac{1}{2}-\mu\right).$$

$$\text{後來之容積}=(1+\epsilon_a)(1+\epsilon_c)^2=1+(\epsilon_a+2\epsilon_c),$$

而　　$$\text{容積增加係數}=\epsilon_a+2\epsilon_c=\frac{pr}{Eh}\cdot\frac{5-4\mu}{2} \tag{72}$$

由溫度所生之容積應變$=3\alpha t$, α爲線脹係數。

習　題　三　十　七

1. 混凝土立方體按圖146之裝置法沿兩度加壓力 設其每邊

長 2 吋, $E=2.5\times10^6$ 磅每方吋, $\mu=0.1$, $P=20{,}000$ 磅. 求其體應變。

解. 每面共壓力 $=2P\cos45^\circ\approx28{,}300$ 磅.

$$\therefore\quad \sigma_x=\sigma_y=\frac{28300}{4}=-7{,}070 \text{ 磅每方吋.}$$

$$\sigma_x=\sigma_y=\frac{\sigma_x}{E}-\mu\frac{\sigma_y}{E}=-\frac{7070}{2.5\times10^6}(1-0.1)=-0.00254$$

$$\sigma_z=-\mu\frac{\sigma_x}{E}-\mu\frac{\sigma_x}{E}=\frac{7070}{2.5\times10^6}\times2\times0.1=+0.000569$$

故每立方吋之

體應變 $=\epsilon_x+\epsilon_y+\epsilon_z=-2\times0.00254+0.000569=-0.00451$,

是為縮減係數。

2. 圖 147 示薄鋼筒內充混凝土, 用以爲柱。設縱壓力只加於混凝土上, 其強度爲 p, 鋼筒內直徑爲 d, 厚度爲 h. 求鋼筒與土間之壓力。

解. 設 q 爲鋼筒與混凝土間之壓力。

則混凝土直徑之增長係數 $=\mu_c\cdot\dfrac{p}{E_c}+\mu_c\cdot\dfrac{q}{E_c}-\dfrac{q}{E_c}$.

鋼筒直徑之增長係數 $=\dfrac{qd}{2E_sh}$.

令此二者相等, 得
$$q=p\cdot\frac{\mu_c}{\dfrac{d}{2h}\cdot\dfrac{E_c}{E_s}+1-\mu_c}$$

3. 圖 148 示厚鋼筒內容橡皮柱, 若於柱之上面加壓力 P, 略去橡皮與鋼筒間之摩擦力. 求二者中間壓力之強度。

解. 鋼筒之直徑設爲不增大，則 $q=\frac{p\mu}{1-\mu}$.

4. 第2題之 p 設爲1000磅每方吋，$\mu_c=0.1$，$\frac{d}{2h}=7.5$. 求混凝土中之最大切應力。

答. $\tau=467$ 磅每方吋.

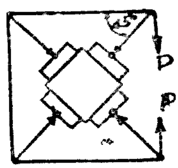


圖 146.

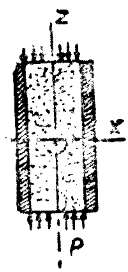


圖 147.

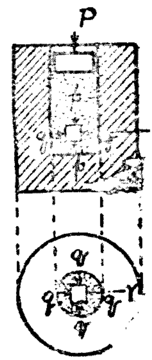


圖 148.

5. 潛水艇之容氣鋼筒厚 $\frac{3}{8}$ 吋，外直徑 $17\frac{3}{4}$ 吋，長5呎。排入空氣以後，壓力達每方吋1,500磅。求其直徑與長度各增幾何？

解. 環周張應力

$$\sigma_c=\frac{pr}{h}=\frac{1500\times 8.5}{0.375}=34,000 \text{ 磅每方吋}.$$

故　　縱張應力 $=17,000$ 磅每方吋.

沿徑壓應力由1,500磅每方吋減而爲零，約作零;

$$圓周增長係數=\frac{\sigma_c}{E}-\mu\frac{\sigma_a}{E}=\frac{34,000}{30\times10^6}\left(1-\frac{0.3}{2}\right)$$

$$=0.963\times10^{-3}=直徑增長係數,$$

$$中軸增長係數=\frac{\sigma_a}{E}-\mu\frac{\sigma_c}{E}=\frac{34000}{30\times10^6}\left(\frac{1}{2}-0.3\right)$$

$$=0.226\times10^{-3}.$$

故　外直徑共增之長$=17.75\times0.963\times10^{-3}=0.0171$ 吋.

長度共增之長$=60\times0.226\times10^{-3}=0.0136$ 吋.

6. 鋼筒內容高壓流體,(a)設其兩底爲一杆相連的二活塞,(b)兩底固定於筒上;各求其內直徑之增長。已知內直徑 8 吋,厚 0.2 吋,壓力每方吋 500 磅,$E=30\times10^6$ 磅每方吋,$\mu=\dfrac{1}{3.5}$.

答. (a)0.00267 吋; (b)0.00229 吋.

54. 最大線應變學說之薄筒公式　無論材料任何種複雜應力皆可化爲三個主要張應力。材料之彈性衰退與否,若不只由於最大之主應力,則必由此三者共產一量,而該量能規定彈性之衰退否也。St. Venant 設三個主應力共生之最大增長係數,若達到簡單拉力試驗所得彈性限度之對應値,則材料之彈性衰退,此謂最大線應變規定彈性衰退之學說。設 $\sigma_{p.l.}$ 爲簡單拉力試驗所得之彈性限度,則其對應之增長係數

$$\epsilon=\frac{\sigma_{p.l.}}{E}.$$

就鍋爐筒而論,其最大主要增長係數爲環周增長係數

$$\epsilon_c=\frac{\sigma_c}{E}-\mu\frac{\sigma_a}{E}\quad 其\ \sigma_r\ 約作\ 0.$$

或　$$\epsilon_c=\frac{pr}{Eh}\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\div(\text{鉚接效率}).$$

本學說謂彈性之衰退須

$$\frac{\sigma_{p.l.}}{E}=\frac{pr}{Eh}\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\div(\text{鉚接效率}).$$

或以 $\sigma_w=\frac{\sigma_{p.l.}}{n}$ 示材料之賫用張應力，則設計鍋爐之實用公式

$$\sigma_w=\frac{pr}{h}\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\div(\text{鉚接效率}) \tag{73}$$

習題三十八

1. 習題三十五題 1 之鋼，設 $\mu=0.3$，其餘各量皆與該題相同。按最大應變學說，求鋼板之厚度。

解.

$$h=\frac{pr}{\sigma_w}\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\div0.8=\frac{180\times24\times0.85}{15,000\times0.8}=0.306\text{ 吋}.$$

2. 習題三十五題 2 之鍋爐，設 $\mu=0.3$，試按最大應變說，求其直徑之最大限。　答. 59 吋.

55. 三個主應力共儲之應變能及最多儲能學說之薄筒公式

設三個主應力 σ_x, σ_y, σ_z 皆為正，其最大者亦未使材料達到彈性限度，則 σ_x 對每立方吋材料加入之功為

$$\frac{\sigma_x\epsilon_x}{2}=\frac{\sigma_x^2}{2E}-\frac{\mu}{2E}(\sigma_x\sigma_y+\sigma_z\sigma_x);$$

σ_y 對每立方吋材料加入之功爲

$$\frac{\sigma_y \epsilon_y}{2} = \frac{\sigma_y{}^2}{2E} - \frac{\mu}{2E}(\sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_y);$$

σ_z 對每立方吋材料加入之功爲

$$\frac{\sigma_z \epsilon_z}{2} = \frac{\sigma_z{}^2}{2E} - \frac{\mu}{2E}(\sigma_z \sigma_x + \sigma_y \sigma_z).$$

故三者對每立方吋材料共儲之應變能，

$$w = \frac{1}{2E}(\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 + \sigma_z{}^2) - \frac{\mu}{E}(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) \qquad (74)$$

每立方吋材料由其實有之應力共儲之能，必等於其三個主應力所共儲者；例如在簡梁之 $\sigma_n{}' = 0$，由第 48 節末段

$$\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 - 2\mu \sigma_x \sigma_y = \sigma_n{}^2 + 2(1+\mu)\tau^2.$$

以 $2E$ 除之，並由公式 (24) 以 G 代 $\frac{2(1+\mu)}{E}$，則得每立方吋材料共儲之應變能 $= \frac{\sigma_n{}^2}{2E} + \frac{\tau^2}{2G}$.

Haigh 氏假設每立方吋共儲之能，若與任簡單拉力達彈性限度時所儲者相等，則材料彈性衰退矣：此爲應變能規定材料彈性衰退之學說。故應變能衰退須

$$\frac{\sigma_{p.l.}{}^2}{2E} = \frac{1}{2E}(\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 + \sigma_z{}^2) - \frac{\mu}{E}(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x).$$

就鍋爐而論，

$$\sigma_z = \sigma_r = 0, \qquad \sigma_x = \frac{pr}{h} \div \text{鉚接效率}, \qquad \sigma_y = \frac{\sigma_x}{2}.$$

$$\therefore \quad \sigma_{p.l.}=\sqrt{\sigma_x{}^2+\sigma_y{}^2-2\mu\sigma_x\sigma_y}$$

$$=\sqrt{\frac{5-4\mu}{4}}\cdot\frac{pr}{h}\div\text{鉚接效率}.$$

實用設計鍋爐之公式，

$$\sigma_w=\sqrt{\frac{5-4\mu}{4}}\cdot\frac{pr}{h}\div\text{鉚接效率} \tag{75}$$

習　題　三　十　九

1. 習題三十五題1之鋼，設 $\mu=0.3$，其餘各量皆與該題相同。按應變能學說求鋼板之厚度。

解.
$$h=\sqrt{\frac{5-4\mu}{4}}\cdot\frac{pr}{\sigma_w}\div 0.8$$

$$=\sqrt{\frac{5-1.2}{4}}\times\frac{180\times 24}{15000\times 0.8}=0.35\text{ 吋}.$$

2. 習題三十五題2之鍋爐，設 $\mu=0.3$，試按最多儲能說計算其直徑之最大限，並與該題之得數及習題三十八題2之得數相較，以比較四個學說對鍋爐言以何者爲最安全，何者爲最危險。

3. 試就以前四個學說推演薄圓球之設計公式，並比較之。

56. 薄筒以薄半球作底 設 p 爲內壓力，r 爲半徑，圓筒之厚爲 h_1，半球之厚爲 h_2.

(1)若使二者等強，則無論按何種學說，副以公式(19)，(21)，皆可求其厚度之比：例如按最多應變能說，筒之厚須合公式(75)，就半球底而言，由公式(21)，
$$\sigma_x=\sigma_y=\frac{pr}{2h_2}.$$

故最多應變能說規定薄球之公式,可由公式(74)求之,得

$$\sigma_w = \sqrt{\frac{1-\mu}{2}} \cdot \frac{pr}{h_2} \div \text{鉚接效率}.$$

欲筒與底等強,則

$$\frac{1}{h_2}\sqrt{\frac{1-\mu}{2}} = \frac{1}{h_1}\sqrt{\frac{5-4\mu}{4}}. \qquad \therefore \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{1.64}.$$

(2) 若按上述之比,雖二者等強,但其環周應變未必相等,故任以壓力,則鉚口必不嚴合,而有漏汽之弊,因而鉚釘或須任一種額外之應力,鉚釘之設計,本欠精確,若再加額外應力殊多危險,故寧使其不等強,亦使其環周應變相等也。

由公式(19),(20),及(68)之前式,可知環筒周之增長係數:

$$\epsilon_x = \frac{pr}{Eh_1} - \mu\frac{pr}{2Eh_1}.$$

由公式(21)及(68)之前式可知環球周之增長係數;

$$\epsilon_x = \frac{pr}{2Eh_2} - \mu\frac{pr}{2Eh_2}.$$

若二者之增長係數相等,則

$$\frac{1}{h_1}\left(1-\frac{\mu}{2}\right) = \frac{1}{h_2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}\right). \qquad \therefore \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2.43}.$$

故底較弱 $\left(\frac{1}{1.64} - \frac{1}{2.43}\right) \Big/ \frac{1}{1.64} = 32.8\%$. (約$\frac{1}{3}$).

57. 彈性衰退之四個學說規定軸徑之法 任單純扭力之圓軸

表面上，用縱橫斷面界出方瓦（參看圖 55）$abcd$，其四周斷面上有等強之縱橫切應力 $\tau=\frac{T}{J}r$. 由第 48 節，已知在 ac 對角面上之主應力 $\sigma_x=\tau$，爲最大張應力；在 bd 對角面之主應力 $\sigma_y=-\tau$ 爲最小張應力；$\sigma_z=0$. 又最大切應力等於橫切力 τ. 材料有弱於抗張而強於抗切與抗壓者，如鑄鐵製爲圓軸以任扭，則沿 $45°$ 之螺旋面而毀於張力；故須按最大張應力，或最大應變學說以規定其直徑。

韌鋼圓軸任扭則毀於橫斷面；故須按最大切應力說以規定其直徑也。今就四個學說討論而比較之：韌鋼之賫用張應力 $=15,000$ 磅每方吋，賫用切應力 $=0.6\times15,000=9,000$ 磅每方吋.

最大切應力學說謂
$$0.6\sigma_w=\frac{T}{J}r \tag{a}$$

最大張應力學說謂
$$\sigma_w=\frac{T}{J}r \tag{b}$$

最多應變能學說謂
$$\frac{\sigma_w^2}{2E}=\frac{\sigma_x^2}{2E}+\frac{\sigma_y^2}{2E}-\mu\frac{\sigma_x\sigma_y}{E}.$$

$$\therefore\quad \frac{\sigma_w}{\sqrt{2+2\mu}}=\frac{T}{J}r, \tag{c}$$

最大線應變學說謂
$$\frac{\sigma_w}{E}=\frac{\sigma}{E}(1+\mu).$$

$$\therefore\quad \frac{\sigma_w}{1+\mu}=\frac{T}{J}r, \tag{d}$$

就實體圓軸而論，
$$\frac{r}{J}=\frac{16}{\pi d^3}:$$

又按公式(23)，
$$T=\frac{33,000\times 12}{2\pi}\times\frac{H.P.}{R.P.M.}.$$

$$\therefore\quad \frac{T}{J}r=\frac{33,000\times 12}{2\pi}\times\frac{16}{\pi d^3}\times\frac{H.P.}{R.P.M.}$$

$$=\frac{321,000}{d^3}\times\frac{H.P.}{R.P.M.}.$$

於是最大切應力說之(a)式化爲 $d=3.29\sqrt[3]{\frac{H.P.}{R.P.M.}}$

最大張應力說之(b)式化爲 $d=2.77\sqrt[3]{\frac{H.P.}{R.P.M.}}$

(76)

最多應變能說之(c)式化爲 $d=3.07\sqrt[3]{\frac{H.P.}{R.P.M.}}$

最大線應變說之(d)式化爲 $d=3.03\sqrt[3]{\frac{H.P.}{R.P.M.}}$

四個學說以最大張力說爲最危險，以最大切力說爲最安全，他二說則介乎其間，爲簡單其常數計，可約作 3.

58. 簡梁之主應力 設簡梁之中點任集中擔負，則除兩端之橫斷面只有切應力而無彎應力外，其他斷面上皆有兩種應力。茲討論其主應力如下：

在任一橫斷面 mn 處用水平面與橫斷面界出幾個長方體，如圖149之 1, 2, 3, 2′, 1′. 長方體 3 位於中立層處，其左右面上之彎應力 $=0$，其上下左右面上只任縱橫切應力 $\tau=\frac{Q}{Ib}\Big[a\bar{y}\Big]_0^{h/2}$〔參看公式

(53)〕。故其主面與橫斷面傾 45° 角，而其二主應力各等於 τ，一張一壓，距中立層等於 y 之長方體 2，左右面上彎應力 $\sigma_n=\frac{M}{I}y$，且其上下左右面上又有切應力 $\tau=\frac{Q}{Ib}\left[a\bar{y}\right]_y^{h/2}$，其值較體 3 者為小，其主面方位由公式(61)求之，其主應力由公式(62)求之。長方體 1 已達上表 $\tau=0$，其左右面上之彎應力 $\sigma_n=\frac{M}{I}\cdot\frac{h}{2}$，此卽其最大主要壓應力也，其最大主要張應力$=0$. 中立層以下之 2′ 及 1′ 處之主面方位及主應力可用同法求得之。

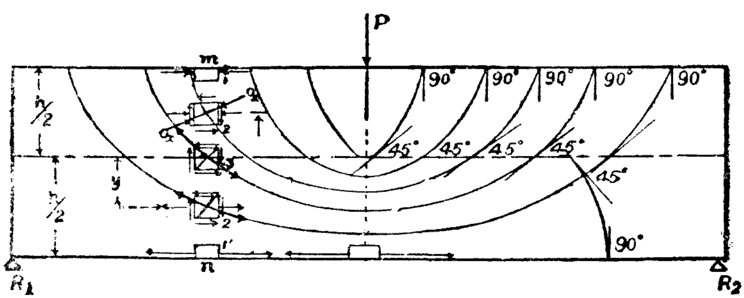


圖 149.

如此推想，吾人可擬出一組曲線，其所經各點之主要張應力皆與之正切，故曰主應力之方位線 (trajectory of principal stress). 每線經危險斷面時皆成水平，漸遠而漸峭，至中立層則與之傾 45° 角，至梁之抗壓上表主要張應力乃等於零，而曲線直立。同法亦可擬出一組主要壓應力之方位線，在圖 149 中未經示出，恰似該圖上下倒置時，諸曲線宜有之方位。

就均質(homogeneous)之長方、正方、圓梁而論,在上下表彎應力最大之處,切應力爲零,漸近中立層,雖漸助以切應力,而其本身漸減;故其各處之最大主應力,實遜於上下表之彎應力。又最大切應力亦小於中立層之縱直切應力。故此種梁之設計,只須等材料之資用張應力於最大彎應力,等其資用切應力於最大之縱橫切應力;不必討論主應力及主應力所生之最大切應力也。但對於下列之特種梁,則不可忽略之也。

(1)鋼骨混凝土梁:混凝土梁在抗張方面內加鋼骨,若土與鋼骨間之黏附力不足,則土必垂直於主要張應力而生裂罅,故於骨上特製成節狀,以增加二者攀附之力。鋼骨之條數,須按最大彎力矩規定之,愈近兩端,所須者愈小,故可沿主要張應力之方向撓起其一部分,以任所謂斜張力(diagonal tension)者(卽主要張應力也),至其極端更宜曲作鈎狀。

(2)I字梁:由上下表行至緣脊交界之處,彎應力 σ_n 之減少無多,而切應力則驟然加強(參看圖 127 c),故此處之主應力較優於最大彎應力,設計之時須注意也。

習　題　四　十

1. I字梁之緣爲 $5'' \times \frac{3''}{4}$,脊爲 $10\frac{1''}{2} \times \frac{1''}{2}$. 製爲簡梁長 2 呎,在中點任擔負 60,000 磅. 求(1)最大彎應力,(2)在緣脊交界處之主應力,(3)最大切應力。

解. 最大之 $M = \frac{Pl}{4} = \frac{60,000 \times 24}{4} = 360,000$ 磅吋.

故最大彎應力$=\dfrac{M}{I}\cdot\dfrac{h}{2}=\dfrac{360,000}{286}\times 6=7,550$ 磅每方吋.

緣作交界處之彎應力爲

$$\frac{7550}{12}\times 10\frac{1}{2}=6,610 \text{ 磅每方吋}.$$

此處之切應力$=\dfrac{Q}{Ib}(a\bar{y})_{\text{一緣者}}=\dfrac{30,000}{286\times\frac{1}{2}}\times 5\times\dfrac{3}{4}\left(5\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{8}\right)$

$=4,430$ 磅每方吋.

此處之主應力$=\dfrac{6610}{2}\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{(6610)^2+4(4430)^2}$

$=8,830$ 及 $-2,220$ 磅每方吋.

此處之最大切應力$=\dfrac{1}{2}(8830+2220)=5,525$ 磅每方吋.

中立層之縱直切應力爲

$$\frac{3}{2}\times\frac{30,000}{\frac{1}{2}\times\left(10\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)}=5,300 \text{ 磅每方吋}.$$

其各種應力在橫斷面上之分配如圖.

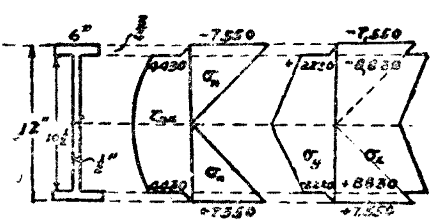


圖 150.

2．設上題鋼料之彈性限度為 36,000 磅每方吋，$\mu=0.3$；試就四個學說檢查此梁之安全因數。

解．(1)最大張應力說：

$$n=\frac{36,000}{8,830}=4.08$$

最大切應力　$\tau_{大}=\frac{1}{2}(3330+2220)=5,520$ 磅每方吋．

(2)材料之切彈性限$=0.6\times 36,000=21,600$ 磅每方吋．

$$\therefore\quad n=\frac{21,600}{5,525}=3.93.$$

(3 最大線應變　$\epsilon_x=\frac{\sigma_x}{E}-\mu\frac{\sigma_y}{E}=\frac{\sigma}{E}$，

故其相當之張應力(equivalent simple tensile stress)

$$\sigma=8,830+0.3\times 2220=9,496 \text{ 磅每方吋.}$$

$$\therefore\quad n=\frac{36,000}{9,496}=3.80.$$

(4)二主應力對每立方吋共儲應變能

$$W=\frac{1}{2E}(\sigma_x^2+\sigma_y^2-2\mu\sigma_x\sigma_y)$$

$$=\frac{1}{2E}(8830^2+2220^2+2\times 0.3\times 8830\times 2220)$$

$$=\frac{1}{2E}\times 94,670,000=\frac{1}{2E}\sigma^2.$$

故按此學說，材料中之相當張應力 $\sigma=9,740$ 磅每方吋．

$$\therefore \quad n=\frac{36,000}{9,740}=3.70.$$

是以第一說爲最樂觀，或用於設計時爲最危險也。

3. 第一題之梁須長幾呎而後最大主應力恰等於最大彎應力？

答. 39.7 吋.

4. 矩形肱梁寬 4 吋厚 8 吋，自由端任擔負 2,000 磅. 求距自由端 3 呎中立層下 2 吋處之最大最小主應力、主面方位、此處之最大切應力，以及中立層之最大切應力.

答. $\sigma_x=5.7$; $\sigma_y=-84$[illegible]$.7$ 磅每方吋. σ_x 由 x 軸順時針轉 85°16′.

5. $8'' \times 4''$ 之矩形簡梁長 10 呎，每呎任 1000 磅之散布擔負. 求距支點一呎之中立層上之最大最小張應力.

答. $\sigma_x=-\sigma_y=18$[illegible]$.5$ 磅每方吋.

59. 彈性衰退之學說　材料超過其彈性限度則有不復之形變，此之謂彈性衰退；物件因此不能保其原形而失效（failure），非謂其破裂（rupture）也。任簡單拉力之韌鐵棒，其橫斷面上之張應力達其彈性限度 $AN=\sigma_{p.l.}$ 之時，傾 45° 度之斜斷面上之切應力 $\tau=\frac{1}{2}\sigma_{p.l.}$ 此蓋即切彈性限也（$\tau_{p.l.}$ 就各種韌鋼言，約爲 0.5 至 0.6 倍 $\sigma_{p.l.}$）；其沿拉力方向之線應變 $ON=\epsilon_{p.l.}=\frac{\sigma_{p.l.}}{E}$；其每立方吋所儲之

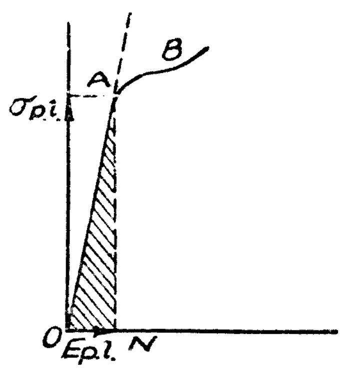


圖 151.

應變能$=\Delta OAN=\frac{1}{2}\sigma_{p.l.}\cdot\epsilon_{p.l.}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma_{p.l.}^2}{E}$. 此四者同時達到其彈性限度之對應值，故某一項爲彈性衰退之主因，實不能辨識，亦無須辨識也。

若以此材料任混合應力，則按公式(62)可求其主應力；然後可求其最大切應力(由公式66)，最大線應變(公式67)，及最多應變能(公式74)．惟此四者達到簡單拉力試驗彈性限度之對應值有先後。無論何者先達，卽衰退彈性皆可得一學說；於是彈衰之學說，析而爲四(參看第49節，第51節，第54節，第53節)．設定材料之資用應力，依此四說，各設爲彈性衰退之主因，可以求得物件所須之幾何度。但何種學說得數安全，何者危險，則因主應力之性質與其相對之大小，殊不一致；故比較其優劣尚有難處。例如對鍋爐薄筒，試綜合習題三十五題2，習題三十八題2，與習題三十九題2，可知最大切力說與最大線應變說所得直徑之限較大而危險。對於簡單扭力之圓軸，由公式(76)可知最大切力說所得直徑最大而安全，而最大張力說最危險，餘二說則介乎其間。故選用學說之法，尚待討論。

習　題　四　十　一

1．設有韌鋼，施以簡單拉力試驗，得其彈性限度爲25長噸每方吋，E爲30×10^6磅每方吋。又施簡單扭力試驗，得$G=11.5\times10^6$磅每方吋。由公式(24)算得其$\mu=0.3$．試就簡單拉力而論，求達其彈性限度時之最大切應力，最大線應變，及每立方吋能儲之應變能。

答．12.5長噸每方吋；0.00187；52吋磅每立方吋．

2. 今以此材料任單純切應力，求其韌性不至衰退之最大值。

解. 其最大主應力一正一負，皆等於其所任之切應力. 故最大張力說謂其張應力可達 25 長噸每方吋，即其實任之切應力可達斯值也.

最大切力說則謂其切應力不得超 12.5 長噸每方吋.

由公式(68)之前式，其最大增長係數

$$\epsilon_x=\frac{1+\mu}{E}\cdot\tau=\frac{25}{E}.$$

$$\therefore\quad \tau\text{可用至}\frac{25}{1.3}=19.3\text{長噸每方吋}.$$

由公式(74)， $$\frac{\tau^2}{2E}+\frac{\tau^2}{2E}-2\mu\frac{\tau(-\tau)}{2E}=\frac{25^2}{2E}.$$

$$\therefore\quad \tau\text{可用至}\sqrt{\frac{25^2}{2\times1.3}}=15.5\text{長噸每方吋}.$$

3. 設以此材料製鍋爐，求其能任之環周張應力.

解. 最大張力說謂其環周張應力可用到 25 長噸每方吋.

$$\text{最大切力}=\frac{1}{2}(\sigma_x-0)，\text{可用至}\ 0.6\times25\ \text{長噸每方吋}.$$

$$\therefore\quad \sigma_x\ \text{可用至}\ 30\ \text{長噸每方吋}.$$

最大增長係數

$$\delta=\frac{\sigma_x}{E}-\mu\frac{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)}{E}=\frac{\sigma_x}{E}(1-0.15)\text{可用至}\frac{25}{E}.$$

$$\therefore\quad \sigma_x\ \text{可用至}\ 29.4\ \text{長噸每方吋}.$$

每方吋共儲之應變能

$$W=\frac{\sigma_x^2}{2E}+\frac{1}{2E}\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2-\mu\frac{\sigma_x}{E}\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)\text{可用至}\frac{52^2}{2E}.$$

$$\therefore\quad \sigma_x=19.3\text{ 長噸方吋}.$$

60. 彈性疆界圖，及四個學說之比較* 為簡單計，設材料中之一個主應力 $\sigma_z=0$. 沿縱橫軸表其縱橫主應力 σ_x 及 σ_y，張應力示以正，壓應力示以負；則任何點之應力皆可用圖中一點之座標示之矣。今用此法圖示材料之彈性限度如下：

(I) **最大主應力學說之彈性疆界圖** 為簡單計，設材料之張壓彈性相等，皆為 $\sigma_{p.l.}$，又設 E 亦相同。作 OE, OF, OG, OH 皆等於 $\sigma_{p.l.}$ 經此四點作線與二軸平行，交出正方形 $ABCD$. 無論 σ_y 有何定值，只 σ_x 水平移動不出 AD 之右與 BC 之左，則材料不超過其彈性限度。同理，若 σ_x 不變，無論 σ_y 如何變化只 (σ_x,σ_y) 所示之點不出 AB 線或 CD 線下，則材料未踰其彈性限度。故 $ABCD$ 正方稱為本學說之彈性疆界圖。

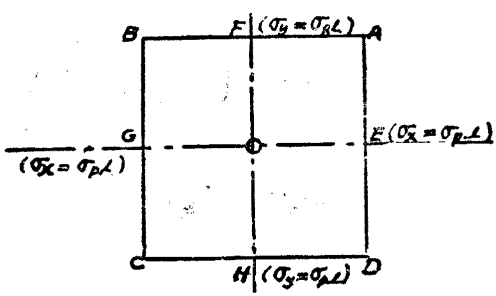


圖 152.

* 本節選 J. Case 之 Strength of Materials, 8 頁

(II)最大線應變學說之彈性畺界圖　沿 x 方向之

$$\epsilon_x=\frac{\sigma_x}{E}-\mu\frac{\sigma_y}{E}.$$

沿 y 方向之

$$\epsilon_y=\frac{\sigma_y}{E}-\mu\frac{\sigma_x}{E}.$$

若此二者有達 $\frac{\sigma_{p.l.}}{E}$ 者，則材料卽達其彈性限度。

故　$\sigma_x-\mu\sigma_y$ 須 $\leqq\sigma_{p.l.}$；

而　$\sigma_y-\mu\sigma_x$ 須 $\leqq\sigma_{p.l.}$

改寫爲　$\sigma_x\leqq\sigma_{p.l.}+\mu\sigma_y$；

與　$\sigma_y\leqq\sigma_{p.l.}+\mu\sigma_x$.

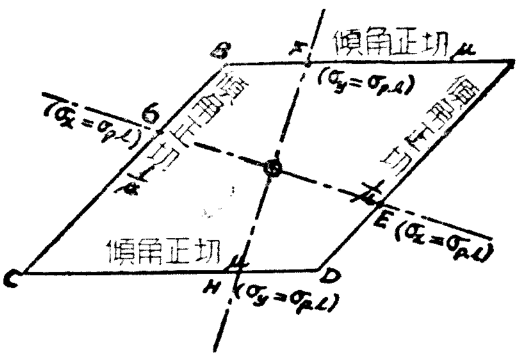


圖 153.

作 OE,OF,OG,OH 各等於 $\sigma_{p.l.}$ 前一式示經 E 點之直線，與 y 軸傾角之正切爲 μ，卽與 x 軸傾角之正切爲 $\frac{1}{\mu}$ 也。後者示經 F 之直線與 x 軸傾角正切 $=\mu$. 同理，在其他象限中亦皆如是，故交出菱形 $ABCD$.

無論 σ_x 與 σ_y 如何變値，只其所示之點不出該菱形之外，則上列之二式皆合，而材料不達其彈性限度。故此菱形為本學說之彈性疆界。

(III)**最大切應力說之彈性疆界圖**　三個主應力為 $\sigma_x, \sigma_y, 0$. 在第一象限中 σ_x 與 σ_y 皆為正，故 0 為最小者，而最大切應力等於 $\frac{1}{2}\sigma_x$。就韌鋼而言，切應力彈性限約為張應力者 $\frac{6}{10}$. 故當 $\frac{\sigma_x}{2} \leqq 0.6\sigma_{p.l.}$ 時，則材料未踰其彈性限度。作 $OE' = 1.2\sigma_{p.l}$，並作 $A'E'$ 與 y 軸平行。無論 σ_y 有何定値，只 σ_x 右移不逹 $A'E'$ 之右，則未踰彈性限度。

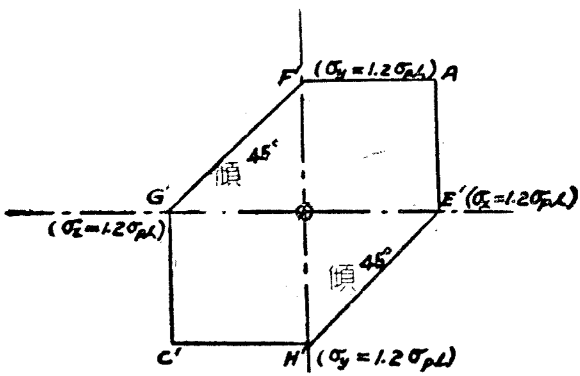


圖 154.

同理作 $OF' = 1.2\sigma_{p.l.}$，並作 $A'F'$ 與 x 軸平行。無論 σ_x 有何定値，只 σ_y 增大不出 $A'F'$ 之上，則材料不踰彈性限度。故 $E'A'F'$ 為第一象限內之彈性疆界。

就第四象限而言，σ_x 為正，σ_y 為負且為最小。故最大切應力為 $\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)$. 須 $\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \leqq 0.6\sigma_{p.l.}$ 材料方不踰其彈性限度。或

須 $\sigma_x \leqq 1.2\sigma_{p.l.}+\sigma_y$，此式示 σ_x 之界線為直線，交 x 軸於 E'，而與 y 軸傾角之正切為 1，即傾 45° 也；故此象限中彈性疆界為 $E'H'$.

推諸其他二象限即得本學說之彈性界限為 $A'F'G'C'H'E'A'$.

(IV) **最多應變能說之彈性疆界圖**　仍就 $\sigma_x, \sigma_y, 0$ 三個主應力論，由公式(74)得每立方吋之應變能為

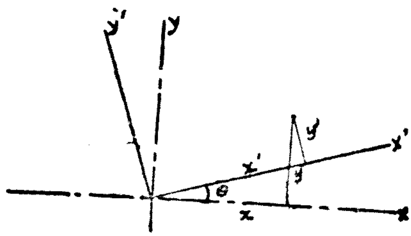
$$\frac{1}{2E}(\sigma_x^2+\sigma_y^2-2\mu\sigma_x\sigma_y).$$

就簡單拉力論，須每立方吋之應變能 $=\frac{\sigma_{p.l.}^2}{2E}$，乃達彈性限度，即須

$$\sigma_x^2+\sigma_y^2-2\mu\sigma_x\sigma_y \leqq \sigma_{p.l.}^2$$

也。此式示何種曲線，若不易知，則將其座標軸轉 θ 角而觀之：

以 x, y 代 σ_x, σ_y；並以 x', y' 代其沿新座標軸量得之值 σ_x' 及 σ_y'。



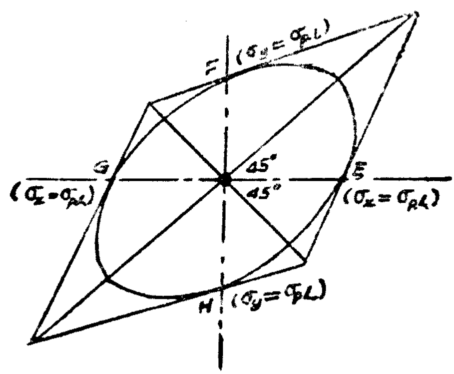


圖 155.

則　$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta;$$

而　$$y=x'\sin\theta+y'\cos\theta.$$

$$\therefore\quad x^2=x'^2\cos^2\theta+y'^2\sin^2\theta-2x'y'\sin\theta\cos\theta,$$

且　$$y^2=x'^2\sin^2\theta+y'^2\cos^2\theta+2x'y'\sin\theta\cos\theta.$$

又 $$-2\mu xy=-2\mu x'^2\sin\theta\cos\theta+2\mu y'^2\sin\theta\cos\theta-2\mu x'y'(\cos^2\theta-\sin^2\theta).$$

相加則原式化爲

$$\sigma_{p.l.}^2=x'^2(1-\mu\sin 2\theta)+y'^2(1+2\mu\sin 2\theta)-2\mu x'y'\cos 2\theta.$$

仍不易看出，則再向簡單情形設想——將轉過一角恰使含 $x'y'$ 之項成零．則 $\cos 2\theta=0$ 而 $\theta=45°$.

於是原式化爲 $$\sigma_{p.l.}^2=x'^2(1-\mu)+y'^2(1+\mu).$$

或寫作 $$x'^2\left(\frac{\sqrt{1-\mu}}{\sigma_{p.l.}}\right)^2+y'^2\left(\frac{\sqrt{1+\mu}}{\sigma_{p.l.}}\right)^2=1.$$

較以 $x^2\left(\frac{1}{a}\right)^2+y^2\left(\frac{1}{b}\right)=1$ 之公式，可知原式是一橢圓，其長半徑爲 $\frac{\sigma_{p.l.}}{\sqrt{1-\mu}}$，短半徑爲 $\frac{\sigma_{p.l.}}{\sqrt{1+\mu}}$；惟其座標由其二徑倒轉 45° 耳。此橢圓即應變能說之彈性疆界也。

其切線與 x 軸傾角之正切，$$\frac{d\sigma_y}{d\sigma_x}=\frac{\mu\sigma_y-\sigma_x}{\sigma_y-\mu\sigma_x}.$$

當 $\sigma_x=0$, $\frac{d\sigma_y}{d\sigma_x}=\mu$; 又當 $\sigma_y=0$ 時, $\frac{d\sigma_y}{d\sigma_x}=\frac{1}{\mu}$.

與圖 153 相較，可知此橢圓內切於該菱形之內；而 E, F, G, H, 爲其切點也。

圖 156 將四個學說之彈性疆界圖一並示出。由圖可知當 $\sigma_x=-\sigma_y$, $\sigma_z=0$ 時(即單純扭力)，以張應力說爲最危險．次爲線應變說．而切力說與應變能說之安全相若也。

當 $\sigma_x=2\sigma_y$, $\sigma_z=0$ 時（即鍋爐筒），則應變說與切力說之危險程

度相伴，而他二說之安全亦相埒也。

圖中之標誌爲 Guest 氏試驗任內壓之薄筒報告：據此可知就各種延性材料而言，最多應變能說最與試驗之結果相符。但對脆性材料如鑄鐵者，則最大張力說較近於試驗之結果。

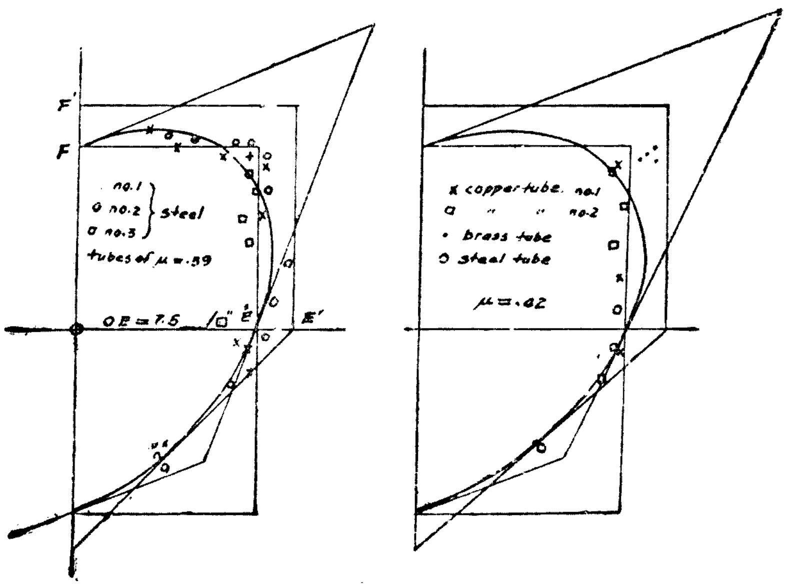


圖 156.

第六章　梁之彎度

61. 彎度曲線公式　前章論荷負所生之應力，若按材料之資用應力，以規定其横斷面之幾何度，則梁之強度（strength of beam）確已足用；但尚須考查其彎度已否超過定限（梁之最大彎度常限為跨度之$\frac{1}{360}$），此即謂其耐強性（stiffness）可至若何程度也。再如梁之支持力（及力偶）超過兩個者，則不能按平衡規定之，此謂平衡不能規定之梁（statically indeterminate beams），亦須藉其彎度與傾角之已知情形為助也（詳第8章）。

梁之中軸（連各横斷面重心者）彎曲後之位置曰彎度曲線（elastic curve）。若論彎力矩所生之彎度，則(1)其中軸上某點之彎度 y，(2)該點之位置 x，(3)該處横斷面之轉動慣量 I，(4)其所受

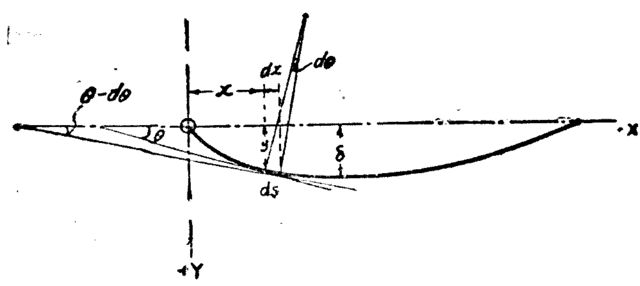


圖 157.

之彎力矩 M，互有關係；亦此四者相關之公式，曰彎度（曲線）公式。

簡梁以左柱之支點爲極，彎度(deflection) y 自水平線下向者爲正，橫斷面之位置 x 以右向者爲正。在 x 處彎度曲線與水平傾角之正切稱爲傾度(slope)；其 θ 則稱爲偏角或傾角(angular deflection)。

$$\tan\theta=\frac{dy}{dx}.$$

在最彎點之左方者，y 由 $+1.5$ 增爲 $+2.3$，故

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\cdot 3-1.5}{dx}=\text{正}.$$

在最彎點之右方者，y 由 $+3$ 變爲 $+2$，故

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-3}{dx}=\text{負}.$$

工程界實用之梁其傾度皆甚小，故

$$\theta\fallingdotseq\frac{dy}{dx},\qquad\text{而}\quad\frac{d\theta}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}.$$

無論所論之點在最彎點之左或右，$\frac{d^2y}{dx^2}$ 皆得負．如在右方者，其 $\frac{dy}{dx}$ 爲負而漸升起，由 -1.5 變爲 -2.5，故

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{-2.5-(-1.5)}{dx}=\text{負}.$$

在左方者其 $\frac{dy}{dx}$ 爲正而漸平，由 2 變爲 $+1.5$，故

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1.5-2}{dx}=\text{負}.$$

但 $$\frac{d\theta}{dx}\doteq\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{r},$$

r 為 x 處之曲率半徑，常為正。故

$$\frac{1}{r}=-\frac{d^2y}{dx^2}.$$

又由公式(45)， $$\frac{1}{r}=\frac{M}{EI},$$

彎力矩 M 之使下表生張應力者為正，故在圖 157 為正。然則就簡梁言，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M}{EI} \tag{77}$$

肱梁以自由端之原位為極，繪於左側；y 以下向為正，由 $+5$ 變為 $+3$，故

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3-5}{dx}=\text{負},$$

其值由 -2.5 變為 -1.5，故

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-1.5-(-2.5)}{dx}=\text{正}.$$

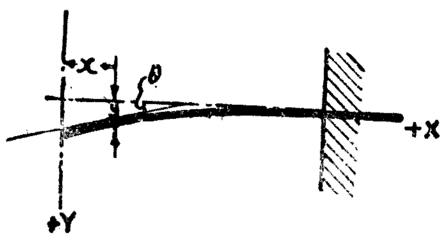


圖 158.

今彎力矩 M 在上面生張應力宜為負，故(77)式兩側之符號仍合。試以固定端繪於左方以為極點，y 仍以下向為正；雖 $\frac{dy}{dx}$ 為正，但 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 仍得正，而(77)式兩側之符號仍合。

利用公式(77)以求彎度之法甚多，本書只採用其二：

(1) 用積分方法 因 M 為 x 之函式，故積分一次可得各處之傾

度$\frac{dy}{dx}$，再積分一次可得各處之彎度y，其兩次積分常數可由二支點處之$y=0$求得之。

例題　長l之簡梁任散布擔負每呎q磅，茲求其最大彎度。

解．兩端支持力各為$\frac{ql}{2}$．

距左端x處之彎力矩　$M=\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2}$．

代入(77)式而積分之，得

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{qx^3}{6}-\frac{qlx^2}{4}+A \tag{a}$$

再積分之，則　$$EIy=\frac{qx^4}{24}-\frac{qlx^3}{12}+Ax+B \tag{b}$$

在左端$x=0, y=0$．故由(b)式得　$B=0$．

在右端$x=l, y=0$．故由(b)式得　$A=\frac{ql^3}{24}$．

於是(a)式化為　$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{qx^3}{6}-\frac{qlx^2}{4}+\frac{ql^3}{24} \tag{78}$$

(b)式化為　$$EIy=\frac{qx^4}{24}-\frac{qlx^3}{12}+\frac{ql^3x}{24} \tag{79}$$

最大彎度現於$\frac{dy}{dx}=0$處，令(78)式等於零，得

$$l^3-6lx^2+4x^3=0,$$

或　$$(l^2-4x^2)l-2x^2(l-2x)=0,$$

即　$$(l-2x)[l(l+2x)-2x^2]=0.$$

其合理之根，只有 $l-2x=0$，即 $x=\frac{l}{2}$ 處.

在(79)式中，凡 x 皆代以$\frac{l}{2}$，可得最大彎度

$$\delta=\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{EI}.$$

用此式時，l 與 q 皆以吋計，若 q 爲每呎之磅數，則其一個 l 必須以呎計；爲避免疏忽計，以 Q 代全梁上之散布擔負 pl，則

$$\delta=\frac{5}{384}\cdot\frac{Ql^3}{EI}. \tag{80}$$

此法對於簡梁不難施用，惟對於任集中擔負者，則因其各段之 M 不同，其式須分別討論之：又 I 不等之梁及平衡不能規定之梁，其解析均太冗長，故本書對於此法不再詳論，而用次法。

(2)其輭梁之解法，詳見以下各節。

習題四十二

1. 設肱梁之自由端任集中擔負，求距自由端 $=x$ 處之彎度及頃度。

答. $y_x=\frac{P}{6EI}(l-x)^2(2l+x)$；$\left(\frac{dy}{dx}\right)_x=\frac{P}{2EI}(l^2-x^2)$.

2. 肱樑任散布擔負，其強度不變，設爲 q，求距自由端 $=x$ 處之彎度與傾度.

答. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_x=\frac{q}{6EI}(l^3-x^3)$；$y_x=\frac{q}{24EI}(3l^4-4l^3x+x^4)$.

3.　長 l 之肱梁自由端任正力偶,其力矩爲 M;試求其自由端之彎度。

解.　由公式(77),　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{M}{EI}$. 今 M 爲正有恆值。

積分一次得　$$\frac{dy}{dx}=-\frac{Mx}{EI}+C.$$

在固定端 $x=0$,　$$\frac{dy}{dx}=0.\quad\therefore\quad C=0.$$

再積分之得　$$y=-\frac{Mx^2}{2EI}+C'.$$

在固定端 $x=0$, $y=0$.　$\therefore$ $C'=0$.

在自由端 $x=l$,故　$$\delta=-\frac{Ml^2}{2EI},$$

負號示其向上偏;又　$$\frac{dy}{dx}=-\frac{Ml}{EI}.$$

4.　求圖 160 所示簡梁之彎度。

解.　左柱之支持力 $=\dfrac{Pc}{l}$,

右柱之支持力 $=\dfrac{P}{l}(l-c)$.

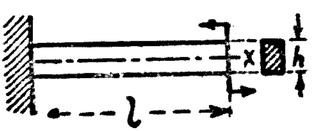


圖 159

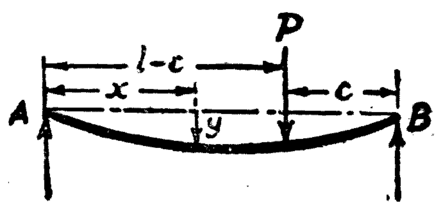


圖 160.

擔負以左一段之 $$M=\frac{Pc}{l}x.$$

故就左段言，彎度曲線公式爲

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{Pc}{EIl}x.$$

積分得 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{Pc}{2EIl}x^2+C_1 \tag{a}$$

又 $$y=-\frac{Pc}{6EIl}x^3+C_1x+C_2 \tag{b}$$

在 $x=0$ 處，$y=0$. $\therefore$ $C_2=0$. 惟 C_1 仍不能確知。

擔負以右之 $$M=\frac{Pc}{l}x-P(x-l+c).$$

$$\therefore\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{P}{EI}\left[\frac{cx}{l}-(x-l+c)\right].$$

積分得 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{P}{EI}\left[\frac{cx^2}{2l}-\frac{(x-l+c)^2}{2}\right]+D_1 \tag{c}$$

再積分得 $$y=-\frac{P}{6EI}\left[\frac{cx^3}{l}-(x-l+c)^3\right]+D_1x+D_2 \tag{d}$$

總計尚有三個未知，即 C_1, D_1, D_2.

擔負下之 $\frac{dy}{dx}$ 有定値，故在(a)與(c)式中以$(l-c)$代 x 則必相等。

$$\therefore\quad D_1=C_1.$$

又在擔負下之 y 有定値，故在(b)與(d)式中以$(l-c)$代 x 則必相等。

$$\therefore\quad D_2=0.$$

又就(d)式而言，$x=l$, $y=0$.

$$\therefore \qquad D_1=\frac{Pc}{6EIl}(l^2-c^2)=C_1.$$

以C_1代入(a)式，得 $$\frac{dy}{dx}=\frac{Pc}{6EIl}(l^2-c^2)-\frac{Pc}{2EIl}x^2 \qquad (81)$$

又代入(b)式，得 $$y=\frac{Pc}{6EIl}(l^2-c^2)x-\frac{Pc}{6EIl}x^3 \qquad (82)$$

同法以D_1代入(c)及(d)式，可得擔負右側之傾度與彎度公式。

最大彎度現於$\dfrac{dy}{dx}=0$處，卽式(a)$=0$,

卽 $$x^2=\frac{l^2-c^2}{3}, \qquad 或 \quad x=\frac{\sqrt{l^2-c^2}}{\sqrt{3}}處. \qquad (83)$$

以此x代入(d)式中得

$$\delta=\frac{Pc}{9\sqrt{3}EIl}(l^2-c^2)^{\frac{3}{2}} \qquad (84)$$

若將擔負以右之$\dfrac{dy}{dx}$(卽式c)等於零，則所得之x不合理，卽只一個最大彎度在較長段內也。

62. 利用共軛梁解求簡梁之彎度及傾度 設有簡梁，距其左支點x處之垂直切力為Q'，彎力矩為M'，又其所任散布擔負強度之在此處者為q'. 則由公式(49)得$\dfrac{dM'}{dx}=Q'$，又由公式(48)$\dfrac{dQ'}{dx}=-q'$

合此二公式，則得 $$\frac{d^2M'}{dx^2}=-q' \qquad (85)$$

式中各量正負號之辨，皆按以前習慣規定之，以此與公式(77)
$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M}{EI}$相較，可想到。

設想有二梁，其一之M,Q,q皆附以′辨識之；其他之y,M,I皆以平字指示之。若前者之$q'=$後者之$\frac{M}{EI}$，則前者之M'必恰等後者之彎度y：又前者之$Q'=\int -q'\,dx=$後者之$\int -\frac{M}{EI}dx=$後者之$\frac{dy}{dx}$，卽後者傾度也．換言之，後者爲吾人所欲求之彎度與傾度之梁，稱爲原梁 (given beam)；前者爲吾人幻擬之梁，稱爲共軛梁 (conjugate beam)．若共軛梁任變值之散布擔負，其強度恰等於原梁在對應點之彎力矩M除以EI者；則原梁在任一橫斷面之傾度，恰等於共軛梁在對應點之垂直切力Q'；又原梁在任一橫斷面之彎度y，恰等於共軛梁在對應處之彎力矩M'也。

設原梁爲簡梁，茲先判斷其共軛者爲何種梁如下：

(1)因此二梁在對應處之量分別相當，故共軛梁必與原梁等長。

(2)共軛梁必任變值之散布擔負，其擔負圖恰爲原梁之彎力矩圖除以抗彎硬度(EI,)者。

(3)原梁在兩端支點處之彎度y既等於零，則共軛者在兩端之彎力M'必等於零也。

(4)原梁在兩端支點處之傾度既有定值，則共軛者在兩端之垂直切力(卽支持力)必有定值也。

由(3)與(4)可知簡梁之共軛梁必爲兩端自由支持之簡梁。

簡梁任集中擔負者：

左端支持力　　　　$R_A=\dfrac{P\cdot c}{l}$,

右端支持力　　　　$R_B=\dfrac{P}{l}(l-c)$.

以 $A'B'=l$ 爲基線.

$$C\text{ 點之彎力矩}=\frac{Pc}{l}(l-c),$$

以 EI 除之,樹爲 C' 之縱座標,連其上端於 A' 及 B'. 則簡梁 $A'B'$ 載以變値之散布擔負,其強度如 $A'C_1B'$ 之縱度所示者,即原梁之共軛梁也。

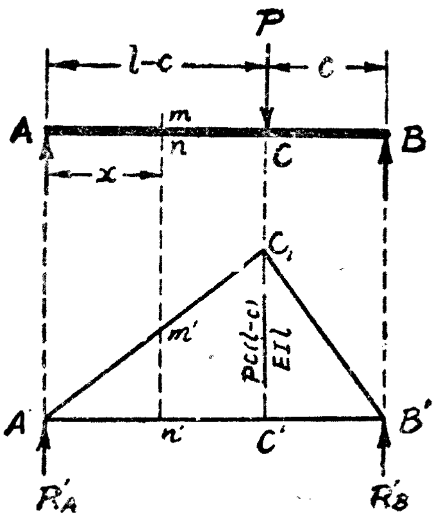


圖 161.

共軛梁 A' 端之支持力

$$R'_A=\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{Pc(l-c)}{EIl}\left[c\cdot\frac{2}{3}c+(l-c)\left(\frac{l-c}{3}+c\right)\right]$$

故原梁 A 端之傾度 $\theta_A=\left(\frac{dy}{dx}\right)_A=\frac{Pc(l^2-c^2)}{6EIl}$ (86)

共軛梁 B' 端之支持力

$$R'_B=\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{Pc(l-c)}{EIl}\left[c(l-c+\frac{c}{3})+(l-c)\frac{2}{3}(l-c)\right].$$

故原梁 B 端之傾角, $\theta_B=\frac{Pc(l-c)(2l-c)}{6EIl}$ (87)

原梁在 AC 間 x 處之傾度＝共軛梁 $m'n'$ 處之垂直切力；卽在 x 由 0 至 $(l-c)$ 間，$\frac{dy}{dx}=R'_A-\Delta A'm'n'$ 之面積爲

$$\frac{Pc(l^2-c^2)}{6EIl}-\frac{Pcx^2}{2EIl} \tag{81}$$

最大彎度現於 $\frac{dy}{dx}=0$ 處，卽(81)式＝0,

而 $$x^2=\frac{l^2-c^2}{3} \tag{83}$$

原梁在 AC 間 mn 處之彎度＝共軛梁在 $m'n'$ 處之彎力矩 $=R'_A\cdot x-\Delta A'm'n'$ 對 $m'n'$ 之一次面矩；

卽 $$y_{x=0\text{至}l-c}=\frac{Pc(l^2-c^2)}{6EIl}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{Pcx^2}{EIl}\cdot\frac{x}{3}$$

$$=\frac{Pcx}{6EIl}(l^2-c^2-x^2) \tag{82}$$

最大彎度可以(83)式之x代入(82)式求得之，故

$$\delta=\frac{Pc(l^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}{9\sqrt{3}EIl} \tag{84}$$

以此解法與習題四十二題4相較，可知其較簡易。

欲求BC間一點之傾度與彎度，可將梁左右倒置，而自B端量x；如是則BC段內之x由0增至c而止。

$$\therefore\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{BC}=\frac{Pc(l-c)(2l-c)}{6EIl}-\frac{Pc(l-c)}{EIl}\cdot\frac{x}{c}\cdot\frac{x}{2}$$

$$=\frac{Pc(l-c)}{6EIl}\left(2l-c-\frac{3x^2}{c}\right) \tag{88}$$

令(88)式等於零，則得最彎點距B端之

$$x=\sqrt{\frac{(2l-c)c}{3}}.$$

因　$l>2c$.　$\therefore\ 2l>4c$，而　$\frac{2l-c}{3}>c$.　$\therefore\ x>c$，即最彎點不在BC段內也。

又
$$y_{BC}=\frac{Pc(2l-c)}{6EIl}\cdot x-\frac{Pc(l-c)}{EIl}\cdot\frac{x}{c}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3},$$

$$=\frac{Pc(l-c)x}{6EIl}\left(2l-c-\frac{x^2}{c}\right) \tag{89}$$

擔負以下之彎度可用(82)式以$(l-c)$代x求之；或用(88)式以c代x求之：皆得

$$y_{x=l-c}=\frac{Pc^2(l-c)^2}{3EIl} \tag{90}$$

任梁中點之彎度可由(82)式以$\frac{l}{2}$代x求之，

$$y_{x=\frac{l}{2}}=\frac{Pc}{48EI}(3l^2-4c^2) \tag{91}$$

在公式(83)內c之最大值限爲$\frac{l}{2}$，故x最小$=\frac{l}{2}$，即最彎點在中點與擔負之間也。又最彎點距中點$=\sqrt{\frac{l^2-c^2}{3}}-\frac{l}{2}$；即使$c=0$，擔負極近一端，最彎點距中點亦不過$l\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\right)=0.077l$耳.

且此時中點彎度比最大者爲

$$\frac{3l^2-4c^2}{48}:\frac{(l^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}{9\sqrt{3}l}=\frac{l^2}{16}\times\frac{9\sqrt{3}}{l^2}=0.975.$$

或最大者較中點者只大2.5%耳，故對普通之擔負位置，爲省推求最彎點之位置，即可以其中點之彎度代最大者。

若有數個集中擔負共加於一簡梁上，則按上法分別計算其傾度與彎度而相加，此謂重疊方法(method of superposition).

簡梁之全長皆任散布擔負者 此例亦可將擔負分爲窄條，看作集中者，而施以重疊方法。其每窄條之擔負$=q\cdot dc$.其在中點所生之彎度由公式(91)，爲

$$\frac{q\cdot c\cdot dc}{48EI}(3l^2-4c^2).$$

左半側擔負在中點共生之彎度爲

$$\frac{q}{48EI}\int_{0}^{l/2}(3l^2-4c^2)cdc,$$

亦卽右半側擔負在中點共生者也。故全部擔負在中點共生之彎度

$$y_{x=\frac{l}{2}}=\frac{2q}{48EI}\int_{0}^{l/2}(3l^2-4c^2)cdc$$

或 $$\delta=\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{EI}=\frac{5}{384}\cdot\frac{Ql^3}{EI}.$$

或按共軛梁法解之：共軛梁須爲簡梁（何故?），其在 x' 處擔負之強度 $=\frac{ql}{2EI}x'-\frac{qx'^2}{2EI}$，此式示拋物線，其高爲 $\frac{ql^2}{8EI}$.

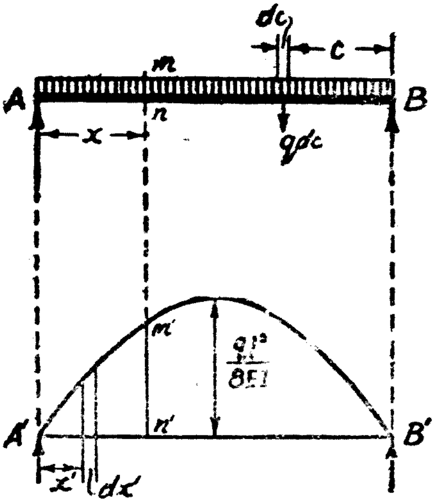


圖 163.

故共軛梁擔負圖對其一端之一次面矩為

$$\frac{2}{3}\cdot l\,\frac{ql^2}{8EI}\cdot\frac{l}{2}=\frac{ql^4}{24EI};$$

而其兩端支持力 R' 各等於 $\frac{ql^3}{24EI}$ = 原梁兩端之傾度. (78)

共軛梁在 x 處之彎力矩等於原梁之彎度,即

$$y_x=\frac{ql^3x'}{24EI}-\int_0^x\left(\frac{ql}{2EI}x'-\frac{qx'^2}{2EI}\right)(x-x')dx'.$$

$$\therefore\quad y_x=\frac{q}{24EI}(l^3x-2lx^3+x^4) \qquad (79)$$

按對稱,可知在 $x=\frac{l}{2}$ 處彎度最大,且

$$\delta=\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{EI}=\frac{5}{384}\cdot\frac{Ql^3}{EI} \qquad (80)$$

簡梁之一段任散布擔負者: 如圖 163 所示者,若 a 與 b 不相等,則最彎點不在梁之中點.欲確定其位置,無論用微積法或共軛梁法,皆須繁瑣之積分.本書則約計之:仍將散布擔負分作窄條如 $q\cdot dc$ 者,其各窄條擔負所生之最大彎度約皆等於其在梁之中點所生者(參看上面「簡梁之全長皆任散布擔負者」一段):故就全部擔負言,亦可以中點彎度當作最大者

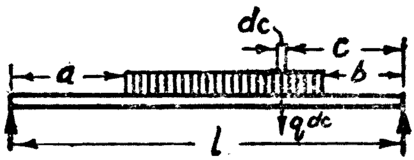


圖 183.

由 $c=a$ 至 $c=\frac{l}{2}$ 一段內諸窄條擔負在中點共生之彎度，由公式(91)得

$$y_{1_{x=\frac{l}{2}}}=\int_a^{\frac{l}{2}}\frac{q\cdot c\cdot dc}{48EI}(3l^2-4c^2).$$

由 $c=b$ 至 $c=\frac{l}{2}$ 一段內，擔負在中點共生之彎度，

$$y_{2_{x=\frac{l}{2}}}=\int_b^{\frac{l}{2}}\frac{q\cdot c\cdot dc}{48EI}(3l^2-4c^2).$$

故最大彎度

$$\delta=y_{x=\frac{l}{2}}=\frac{q}{48EI}\left[\int_a^{l/2}(3l^2-4c^2)c\cdot dc+\int_b^{l/2}(3l^2-4c^2)c\cdot dc\right]$$

$$=\frac{q}{48EI}\left[\frac{5}{8}l^4-\frac{3}{2}l^2(a^2+b^2)+(a^4+b^4)\right] \qquad (92)$$

若 $a=b$，則 δ 確等於(92)式所得者。若 a 與 b 皆等於零，則

$$\delta=\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{EI}.$$

簡梁之一端任偶力者：設其兩端之支持力可向上可向下。

原梁左端之支持力 $R_A=\frac{M}{l}.$

其在 x 處之彎力矩， $M_x=\frac{M}{l}x.$

原梁兩端之傾度皆有定值，則其軛者之兩端必皆有垂直切力，卽皆須支持力也。

原梁兩端之彎度皆等於零，則其軛者兩端皆無彎力矩，即無須支持之力偶也.

然則其軛梁仍為等長之簡梁. 其擔負之強度

$$q_x' = \frac{Mx}{EIl},$$

此式示直線 $A'C'$，其最大值在 $x=l$ 處，且 $=\frac{M}{EI}$.

原梁左端之傾度，θ_1 = 其軛者左端之垂直切力（即支持力 R_A'。）

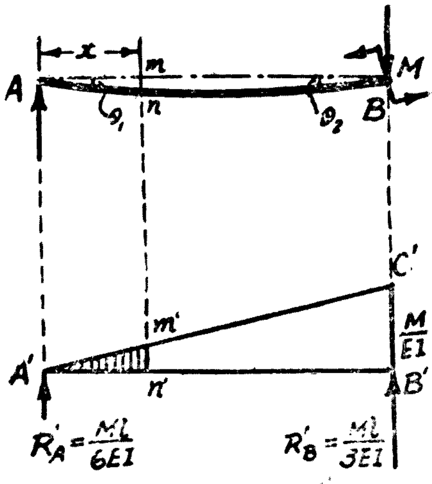


圖 164.

$$\therefore \quad \theta_1 = \frac{1}{l}\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot\frac{M}{EI}\cdot\frac{l}{3}\right) = \frac{Ml}{6EI} \tag{93}$$

原梁右端之傾度，

$$\theta_2 = R_B' = \frac{1}{l}\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot\frac{M}{EI}\cdot\frac{2}{3}l\right) = \frac{Ml}{3EI} \tag{94}$$

原梁在 x 處之彎度，

$$y_x = M_x' = \frac{Ml}{6EI}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{Mx}{EIl}\cdot x\cdot\frac{x}{3}$$

$$= \frac{Mlx}{6EI}\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right) \tag{95}$$

注意：若將圖 161 之 $P\cdot c$ 看作力偶矩 M，而將 c 看作零，則如圖 164

之情形。故在(86)式若以 M 代 $P\cdot c$，而等其獨立之 c 於零，可得(95)式，又在(87)式中如此代替，可得(94)式，又在(82)式中如此替代，可得(95)式。

習題四十三

1. 圖165所示之簡梁，求其兩端之傾度，並求擔負下及梁中點之彎度。

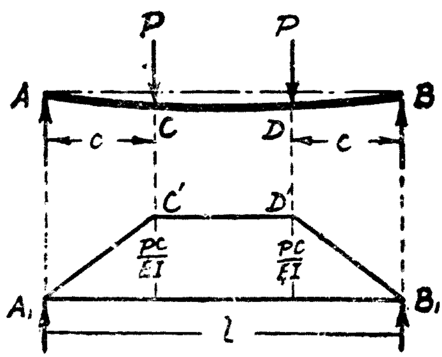


圖 165.

解. 共軛梁之擔負圖爲梯形，其高爲 $\dfrac{P\cdot c}{EI}$，其面積爲 $\dfrac{P\cdot c}{EI}(l-c)$. 故其兩端之支持力各爲 $\dfrac{Pc}{EI}\cdot\dfrac{l-c}{2}$，此卽原梁兩端之傾度也。

擔負下之彎度，
$$y_{x=c}=\frac{Pc^2(l-c)}{2EI}-\frac{Pc}{EI}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{c}{3},$$

$$=\frac{Pc^2}{2EI}\left(l-\frac{4}{3}c\right).$$

中點之彎度等於(91)式之2倍，

$$y_{x=\frac{l}{2}}=\frac{Pc}{24EI}(3l^2-4c^2).$$

2. 試求圖 111 每梁兩端之傾度。

答 $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=\frac{1}{180}\cdot\frac{Wl^2}{EI}$; $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l}=\frac{8}{180}\cdot\frac{Wl^2}{EI}$.

3. 圖 166 之簡梁，設 $I_z=91.4$ 吋^4.，$E=30\times10^6$ 磅每方吋，$l=24$ 呎，$a=12$ 呎，$b=8$ 呎，$q=$ 每呎 500 磅。求其中點之彎度。

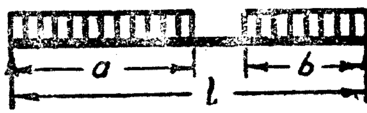


圖 166.

解. 因 $a=\frac{l}{2}$，故該段上擔負在梁中點所生之彎度宜爲公式(80)之半，

$$\therefore\quad y_{1\,\frac{l}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{EI}.$$

b 段上擔負在中點所生之彎度，

$$y_{2\,\frac{l}{2}}=\int_0^{b=l/3}\frac{q\cdot c\cdot dc}{48EI_z}(3l^2-4c^2)$$

$$=\frac{25}{48\times162}\times\frac{ql^4}{EI_z}.$$

二者共計，

$$y_{x=\frac{l}{2}}=\left(\frac{1}{2}\times\frac{5}{384}+\frac{25}{48\times162}\right)\frac{ql^4}{EI_z}$$

$$=1.02 \text{ 吋，當梁長之 } \frac{1}{282.4}.$$

4. 四輪車前軸任重 2,000 磅，後輪任重 4,000 磅，兩軸相距 6 呎，行過 12 呎之簡梁。當車行至之位置能在梁內生最大彎力矩時，求梁的中點之彎度。

暗示：最大彎力矩之位置如習題二十八題 1。以 e_1 代後軸與車重心之距離，e_2 代前軸者。中點之彎度可用 (91) 式與重疊方法求之：對後軸以 $\frac{l}{2}-\frac{e_1}{2}$ 代 c，對前軸以 $\frac{l}{2}-\frac{e_1}{2}e_2$ 代 c.

5. 圖 98 所示之梁，就 a,b,c,P，求其二擔負間一段之彎度普通式。

暗示：右方擔負所生者上彎，可直接由公式(82)求得之。左方擔負所生者仍用該式，以 a 代 c，以 $(l-x)$ 代 x.

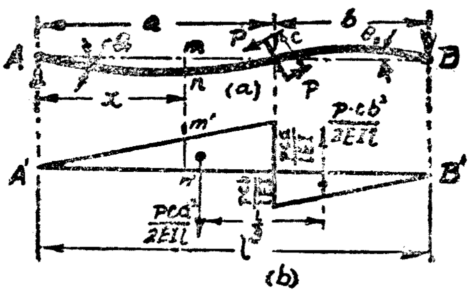


圖 167.

6. 圖 167 所示之梁，兩端浮支，中段任力偶 Pc. 求其兩端之傾度，及任意點之彎度。

解. (b)圖示其虛梁之擔負，b 段上者上向。

其左端支持力，
$$A'=\frac{1}{l}\left[\frac{P\cdot c\cdot a^2}{2lEI}\left(b+\frac{a}{3}\right)-\frac{Pcb^2}{2lEI}\cdot\frac{2}{3}b\right]$$
$=$原梁 A 端之傾角 θ_1；

右端支持力，
$$B'=\frac{1}{l}\left[\frac{Pca^2}{2lEI}\cdot\frac{2}{3}a-\frac{Pcb^2}{2lEI}\left(a+\frac{b}{3}\right)\right]$$
$=$原梁 B 端之傾角 θ_2.

若 $a=b=\frac{l}{2}$. 則　　$\theta_1=\theta_2=\frac{Pcl}{24EI}$.

共軛梁在 $m'n'$ 處之彎力矩，卽原左段之彎度 y

$$y_{x>0<a}=A'x-\frac{Pca}{2lEI}\cdot\frac{x^2}{a}\cdot\frac{x}{3}$$

$$=\frac{Pcx}{2l^2EI}\left[a^2\left(b+\frac{a}{3}\right)-\frac{2}{3}b^2\right]-\frac{Pcx^3}{6lEI}.$$

7. 圖168示兩端浮支之梁，兩端予任彎曲力偶 M_1 及 M_2. 求其兩端之傾角；並求其彎度以何處為最大。其最大值為若干。

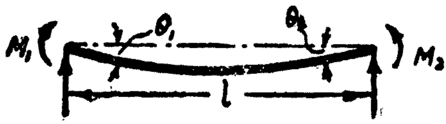


圖 168.

解. 由公式(93)與(94)用重疊方法得

$$\theta_1=\frac{M_1l}{3EI}+\frac{M_2l}{6EI};\qquad 又\quad \theta_2=\frac{M_2l}{3EI}+\frac{M_1l}{6EI}.$$

彎度之生於 M_2 者，可由公式(95)直接寫出；其生於 M_1 者，可用該式以 $(l-x)$ 代 x 求得之。

故距左端 x 處之

$$y=\frac{M_1l(l-x)}{6EI}\left[1-\frac{(l-x)^2}{l^2}\right]+\frac{M_2lx}{6EI}\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right).$$

將上式之微率等於零，可求最彎點之位置。

8. 圖 169 示一簡梁，兩端各任力偶。若欲其反彎點 (point of inflection 卽 $M=0$ 處) 在 $\frac{l}{3}$ 處，求其兩端力偶之比。　　答　$M_2=2M_1$

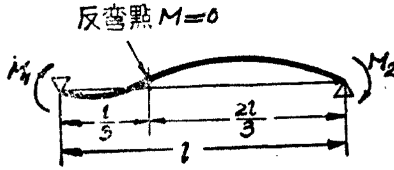


圖 169.

9. 同質之二板長寬相等，惟厚度不同。今疊用爲簡梁（中間並無約束）以任散布擔負（圖 170），求其最大彎應力之比。

解. 因 $M=\frac{EI}{r}$. 今此二板各處之曲率相同，故其分任之彎應力矩 M 與其橫斷面之轉動慣量 I 成正比，卽與 h^3 成正比。又其橫斷面之係數 $\left(S=I\Big/\left(\frac{h}{2}\right)\right)$ 與 h^2 成正比。故其彎應力 $\left(\sigma=\frac{M}{S}=\frac{h^3}{h^2}\right)$ 與 h 成正比也。

圖 170.

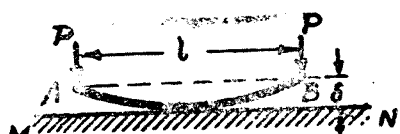


圖 171.

10. 圖 171 之彎鋼棒兩端，各加力 P，按於硬平板 MN 上以平直之，其原有之曲率，恰使其平直以後，與平面間壓力之強度均等。設棒之橫斷面積爲正方形，每邊 $h=1$ 吋，棒之長度 $l=20$ 吋，$\delta=0.1$ 吋，求所須之力 P 及棒內之最大彎應力

解．欲梁於平直之後，與 MN 間之壓力強度均等，其原有之彎曲線，須與直前梁任等強散布擔負後所生者相同：其每吋長所受之共壓力

$$q=\frac{2P}{l},$$

而

$$\delta=\frac{5}{384}\times\frac{2P}{l}\times\frac{l^4}{EI}.$$

$$\therefore\quad P=\frac{384}{5}\times\frac{30\times10^6}{2\times20^3}\times\frac{1^4}{12}\times0.1$$

$$=1,2000\text{ 磅，即可按平。}$$

此時之最大彎力矩，

$$M_{大}=\frac{2P}{l}\cdot\frac{l^2}{8}=\frac{Pl}{4}.$$

$$\therefore\quad \text{最大彎應力，}\sigma_{大}=\frac{M_{大}}{I}\cdot\frac{h}{2}=\frac{1200\times20}{4}\times\frac{12}{1}\times\frac{1}{2}$$

$$=36,000\text{ 磅每方吋.}$$

63．用共軛梁法解求肱梁之彎度　肱梁以自由端爲極，繪於左側，則由第 38 節可知　$\dfrac{dQ'}{dx}=-q'$；　又　$\dfrac{dM'}{dx}=Q'$.

故對於肱梁，

$$\frac{d^2M'}{dx^2}=-q'\text{，仍可施用.}$$

又公式(77)，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M}{EI}\text{，對於肱梁亦合.}$$

故若共軛梁載以散布擔負，其強度 $q'=$ 原有肱梁之 $\dfrac{M}{EI}$，則共軛梁之彎力矩 M'，恰示原有肱梁之彎度。

又共軛梁之切力 $$Q'=\int -q'dx=\int -\frac{M}{EI}dx=\frac{dy}{dx},$$

即原來肱梁之傾度也。因原有肱梁之 M 為負，故共軛梁之 q' 亦須為負，即由梁下面向上也。

(1)因二者在對應點之量相當，故必等長

(2)原有肱梁在固定端之彎度與傾度皆等於零，故共軛梁在此對應端之彎力矩 $M'=0$，而切力 $Q'=0$；即自由也。原有肱梁在自由端之 y 及 $\dfrac{dy}{dx}$ 皆有定値，故共軛梁在此端之彎力矩及切力（即支持力）亦必皆有定値。故共軛梁為倒插之肱梁

(3)共軛之倒插肱梁任向上之散布擔負，其強度為原有肱梁之彎力矩以抗彎硬度 EI 除之者。

任集中擔負之肱梁 上述結論，無論以何端為極皆確，如圖172以原梁之固定端為極，在擔負內距固定端等於 x 處之彎力矩 $=-P(c-x)$，共軛梁在對應點之擔負強度

$$q'=-\frac{P(c-x)}{EI},$$

其擔負圖如 $A'C_1B'$ 所示者。

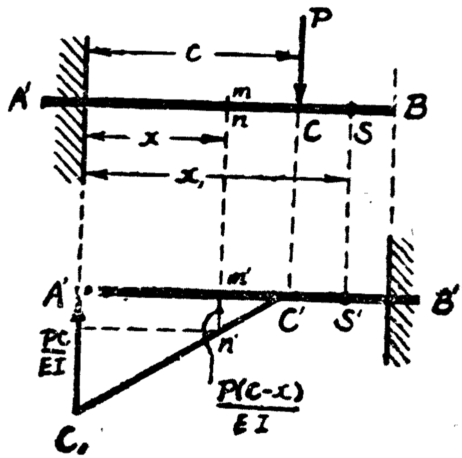


圖 172.

原有肱梁在 x 處之彎度＝共軛肱梁在對應點之彎力矩，即

$$M'=\frac{P(c-x)}{EI}x\cdot\frac{x}{2}+\left[\frac{Pc}{EI}-\frac{P(c-x)}{EI}\right]\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{2x}{3}$$

$$=\frac{Pcx^2}{2EI}-\frac{Px^3}{6EI} \tag{96}$$

$$C\text{ 點之彎度}=\frac{Pc^3}{3EI} \tag{97}$$

原有肱梁距固定端 x 處之傾度＝共軛梁在對應點之切力

$$\therefore\quad\left(\frac{dy}{dx}\right)_x=\frac{P(c-x)}{EI}x+\left[\frac{Pc}{EI}-\frac{P(c-x)}{EI}\right]\frac{x}{2}$$

$$=\frac{Pcx}{EI}-\frac{Px^2}{2EI} \tag{98}$$

在 C 點之傾度， $$\theta_c=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=c}$$

$$=\frac{Pc^2}{2EI}\text{，自 }C\text{ 至 }B\text{，此傾度不變} \tag{99}$$

CB 段 S 點之偏度＝C 點偏度＋$(x_1-c)\times C$ 點傾度＝$\Delta A'C'C_1$ 對 $C'C$ 之一次面矩＋$(x_1-c)\cdot\Delta A'C'C_1$ 之面積，仍等於擠負圖對 SS' 之一次面矩。

至 B 點，則 $$\delta_B=\frac{Pc}{EI}\cdot\frac{c}{2}\left[\frac{2c}{3}+(l-c)\right]$$

$$=\frac{Pc^2}{2EI}\left(l-\frac{c}{3}\right) \tag{100}$$

設擔負在自由端，則　　$c=l$.

$$\therefore\quad \delta_{大}=\frac{Pc^2}{2EI}\left(l-\frac{l}{3}\right)=\frac{Pl^3}{3EI},$$

與在（97）式中以 l 代 c 者相同。

肱梁之任散布擔負者　原梁之彎力矩圖爲一拋物線，其式爲 $-\frac{qx^2}{2}$；若以 EI 除之，即得共軛梁之擔負強度，如 $B'C'$ 曲線所示者。

原有肱梁距自由端爲 x 處之傾度＝共軛者在 $m'n'$ 之切力。

$$\therefore\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_x=\int_l^x-\frac{qs^2}{2EI}ds=\frac{q}{6EI}(l^3-x^3).$$

$$\therefore\quad \theta_B=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=}=\frac{ql^3}{6EI}\qquad(101)$$

原有肱梁距自由端 x 處之彎度＝共軛者在 $m'n'$ 處之彎力矩。

$$\therefore\quad y_x=\int_l^x-\frac{qs^2ds}{2EI}(s-x)=\frac{q}{2EI}\left(x\frac{s^3}{3}-\frac{s^4}{4}\right)_l^x$$

$$=\frac{q}{24EI}(3l^4-4l^3x+x^4)\qquad(101a)$$

最大之偏度，　　$\delta=y_{x=}=\frac{ql^4}{8EI}$

若肱梁上散布擔負之強度不等，則先示其擔負圖。設想橫斷面 n 距自由端＝x（參看圖 173 a）。將 x 段上擔負圖分爲窄條，而求各窄條對於 mn 一次面矩之合，即 n 點之彎力矩也，故可作其彎力矩之全圖（或按第 40 節 (II) 及其習題二十七題 1 之法，由 x 段上切力圖

之面積求之亦可)。其彎力矩曲線約如圖 173 (b),惟不規則耳。由(101)式之上式,可知 n 點與 A 點切線之傾角等於 n 與 A 間彎力矩圖各窄條之面積,以 EI 除後而總合之者。又由(101, a)式之上式,可知 n 點由 A 端水平線之偏度等於由 n 至 A 間彎力矩圖各窄條對 mn 之一次面矩除以 EI 而總合之者。故最大偏度為全部彎力矩圖各窄條,對原梁自由端之一次面矩,除以 EI 而總合之也。

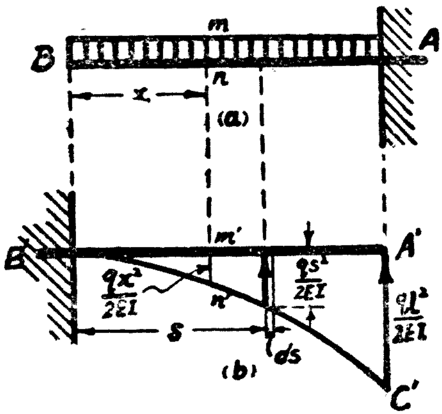


圖 173.

習題四十四

1. 圖 174 之 M 曲線示飛機推進器一臂之彎力矩,橫坐標示橫斷面與迴轉軸之距離。其各橫斷面之轉動慣量 I 如下表第二行所列者。距迴轉軸等於 9 吋以內為軸孔,可看作固定者。設 $E=1.6\times10^6$ 磅每方吋,求臂端之偏度。

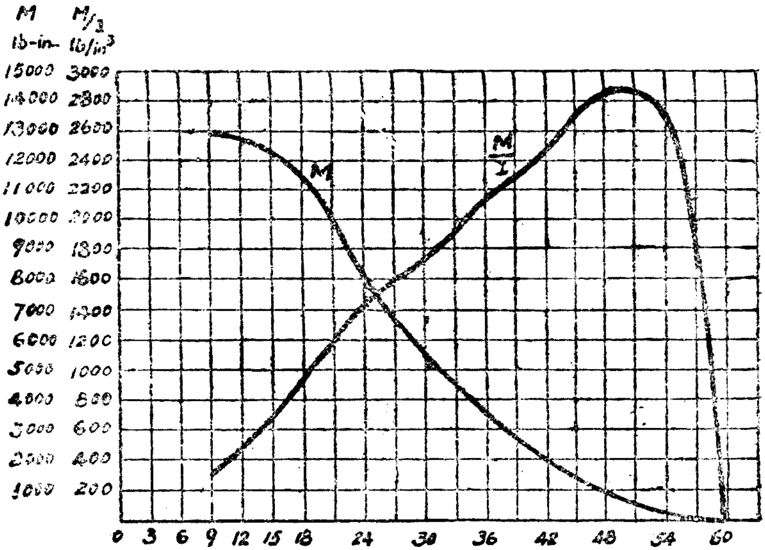


圖 174.

解． 表解如下:

與迴轉軸之距離(吋)	I (吋^4)	由上圖看得之 M 磅吋	$\frac{M}{I}$ (磅/吋^3)	$\frac{M}{I}$ 曲線下各窄條對自由端之一次面矩(磅/吋)．
9	50.8	12,800	252	
12	27.4	12,600	460	$6\times500\times48=144,000$
15	17.4	12,200	708	
18	12.25	11,400	925	$6\times920\times42=232,000$
24	5.65	8,000	1,415	$6\times1400\times36=302,000$
30	3.23	5,500	1,700	$6\times1700\times30=306,000$
36	1.69	3,600	2,130	$6\times2100\times24=303,000$
42	0.783	1,900	2,420	$6\times2500\times18=270,000$
48	0.278	850	2,870	$\begin{cases}3\times2800\times13.5=113,500\\3\times2900\times10.5=91,500\end{cases}$
54	0.074	200	2,700	
57	0.0298	…	…	$3\times2400\times4.5=32,300$
60	0	0	0	$3\times\frac{2000}{2}\times2=6,000$

$\therefore\quad\Sigma=1,800,000$

列至第四行譜之圖中。然後按 $\frac{M}{I}$ 曲線傾度變遷之緩急,酌量選用窄條之寬窄。本解自 9 吋以右連用寬 6 吋之窄條六個,以後連選寬度 3 吋之窄條三個。每條平均之縱座標×寬度×其與右端距離,即得 $\frac{M}{I}$ 曲線下各窄條對自由端之一次面矩;如第五行之第一列數,係窄條由 9 吋至 1.5 吋者,平均縱座標為 500,與自由端距離為 48 吋,如此列得第五行數;求得其總合 $=1.8\times10^6$ 磅/吋.

$$\therefore \quad \delta=\frac{1.8\times10^6}{1.6\times10^6}=1.12 \text{ 吋}.$$

2. 由習題二十七題 1. 於圖 116 已知之擔負曲線 q,分作窄條,計其一次面矩,列表解求 M,以免尋求比例尺之苦。設 I 在距軸 5 吋處為 45 吋^4,至自由端為零,中間者與距自由端之遠近成正比例。設 $E=1.5\times10^6$ 磅每方吋,求其自由端之偏度。

3. 肱梁長 l 呎,每呎任散布擔負 q 磅,在自由端並任集中擔負 P 磅;求其最大彎度與傾度。 答 $\delta=\frac{Pl^3}{3EI}+\frac{ql^4}{8EI}$.

4. 求圖 113 立柱上端之偏度與偏角。

解. 每柱擔負之水壓力全值

$$W=\frac{1}{2}\times62.4dl^2 \text{ 磅}。$$

故自 mn 以上水壓力之全值 $=W\frac{x^2}{l^2}$;其力線在 mn 以上 $\frac{x}{3}$ 處.

故 mn 橫斷面上之彎力矩等於 $-\frac{Wx^3}{3l^2}$.

倒插的共軛梁在距固定端等於 x 處之擔負強度

$$q' = -\frac{Wx^3}{3l^2EI}.$$

共軛梁上全部擔負對其固定端之彎力矩為

$$\int_0^l \frac{Wx^4}{3l^2EI} \cdot dx.$$

故原梁上端之偏度

$$\delta = \frac{Wl^3}{15EI} = \frac{3\times 6^2\times 62.4\times 6^3\times 12^3\times 12}{2\times 15\times 1.5\times 10^6\times 9.9^4} = 0.07 \text{ 吋}.$$

5. 圖 175 之肱梁自由端任力偶 M, 求其自由端之偏度與傾度。

答 $y_{x=l} = -\frac{Ml^2}{2EI}$; $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = -\frac{Ml}{EI}$.

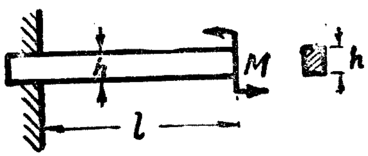


圖 175.

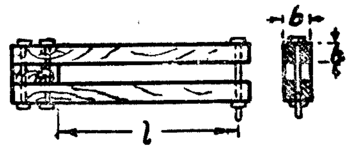


圖 176.

6. 圖 176 二木梁之幾何度全相等。左端互相固着，旋緊右端之鋼螺釘，則二者相向而偏。設 $l=3$ 呎，$h=8$ 吋，$b=6$ 吋，鋼之資用張應力為 12,000 磅每方吋，木材之資用張應力為 1200 磅每方吋。鋼釘之直徑須為若干吋，而後二者之應力方各達其資用之值？

解. 設 P 為此時螺釘內之拉力，

則
$$\frac{4P}{\pi d^2} : \frac{6Pl}{bh^2} = 12000:1200 = 10.$$

$$\therefore\quad d=0.476\text{ 吋};$$

而
$$P=12000\times\frac{\pi}{4}(0.476)^2=2,130\text{ 磅}.$$

每梁之最大偏度，

$$\delta=\frac{Pl^3}{3EI}=\frac{2130\times3^3\times12^3\times12}{3\times1.5\times10^6\times6\times8^3}=0.0864\text{ 吋}.$$

7. 圖 177 所示之二肱梁材料與幾何度相同，又其散布擔負之強度亦同；求二者最大偏度之比。　　答 7 : 41.

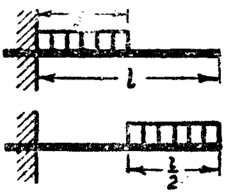


圖 177.

圖 178.

8. 圖 178 示原來已彎之肱梁。若欲其擔負 P 右行之時常在一個水平線上，求肱梁原有之彎度曲線公式。　　答 $y=-\frac{Px^3}{3EI}$.

9. 圖 175 之肱梁，設其彎應力限為 σ_w，其最大偏度，可達何值？

答 $\delta=\frac{\sigma_w l^2}{Eh}$，$\delta=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sigma_w l^2}{Eh}$.

又設肱梁自由端任集中擔負，若其彎應力亦限為 σ_w；求其最大偏度。

10. 圖 179 肱梁之下面為剛體圓柱，其半徑為 R；當肱梁上無

擔負時，二者恰在 A 點相切。設 P 漸增大，以使肱梁漸與圓柱相接。求 B 端之偏度與 P 之關係式。

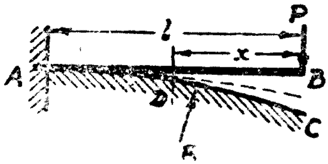


圖 179.

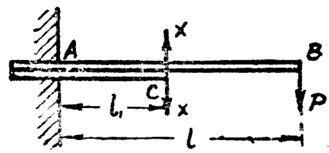


圖 180.

解. 擔負 P 在 A 點所生之曲率 $\frac{1}{r}=\frac{M}{EI}=\frac{Pl}{EI}$;

若此曲率小於 $\frac{1}{R}$，則肱梁與圓柱只在 A 點相切，

即 $$\frac{Pl}{EI}<\frac{1}{R} \qquad \text{或} \qquad P<\frac{EI}{Rl}.$$

故 $$P_1=\frac{EI}{Rl} \text{者，即此時之極限值也。} \tag{a}$$

此時 B 端之偏度， $$\delta=\frac{P_1 l^3}{3EI}=\frac{l^2}{3R}.$$

若 $P>P_1$，則肱梁接於圓柱面之部分漸增；至 AD 一段相接之時，其餘段長 x 者恰當(a)式之 l，

故餘段未接時之 $$P=\frac{EI}{Rx} \tag{b}$$

此時 B 端由原位已生之偏度，有下列之三部分:

(1)因 AD—段曲作圓弧，故 D 點自 A 點水平線下移之偏度，

$$\delta_1=\frac{\overline{AD}^2}{2R}=\frac{(l-x)^2}{2R},$$

由(b)式 $$\delta_1=\left(l-\frac{EI}{PR}\right)^2\times\frac{1}{2R}.$$

(2)雖 DB 一段不彎，亦須沿 D 點切線，故 B 點之偏於 D 點水平線下者，
$$\delta_2=\frac{AD}{R}\cdot x=\left(l-\frac{EI}{PR}\right)\times\frac{EI}{PR^2}.$$

(3)因 BD 一段彎曲而生之偏度，

$$\delta_3=\frac{Px^3}{3EI}=\frac{(EI)^2}{3R^3P^2}.$$

故當餘 x 段未接時，B 點共生之偏度，

$$\delta=\delta_1+\delta_2+\delta_3=\frac{l^2}{2R}-\frac{E^2I^2}{6R^3P^2} \tag{c}$$

故知 δ 與 P 不成正比，而肱梁之崛強性，爲

$$\frac{P}{\delta}=\frac{6R^3P^3}{3lR^2P^2-E^2I^2},$$

卽 P 愈大而崛強性愈增，必至 $P=\infty$ 而後 x 方 $=0$ 也。

11. 圖 180 之肱梁 AB 在自由端任重 P，其下面以肱梁 AC 支持之。設二者之橫斷面相同，求 C 點互相作用之力；又其相接是否只限於 C 點？

解. 設 X 爲二梁在 C 點互相作用之力。因二者在 C 點之偏度必相等。

在公式(96)，以 l 代 c，以 l_1 代 x，可得擔負 P 對 AB 肱梁在 C 點之偏度。

又 X 使 AB 之 C 點上偏 $\frac{Xl_1^3}{3EI}$； AC 肱梁之 C 點下偏者亦 $\frac{Xl_1^3}{3EI}$.

$$\therefore\quad \frac{Xl_1^3}{3EI}=\frac{P}{EI}\left(\frac{ll_1^2}{2}-\frac{l_1^3}{6}\right)-\frac{Xl_1^3}{3EI}.$$

$$\therefore\quad X=\frac{3}{4}P\left(\frac{l}{l_1}-\frac{1}{3}\right).$$

作二者之共軛梁，可以看出與 AB 共軛者在 C 點之切力，較與 AC 共軛者在 C 點之切力大$\left[\frac{3}{4}l+\frac{2}{3}l_1\right]:\left[\frac{3}{4}l-\frac{l}{3}\right]$；即 AB 在 C 點之傾度大於 AC 之在 C 點者。故知二者只在 C 相接也。

64. 過枕梁之彎度與傾度 過枕梁可分解爲兩部分：其在兩柱中間者爲簡梁，兩柱以外者爲肱梁。在每個分截之處，皆宜添入對彎之力偶（如圖 181 之 M_1 及 M_2），與對切之力（如圖 181 之 Q_1 及 Q_2）。切力 Q_2 對於兩柱間之簡梁，只增加其兩柱之支持力，而與其彎度及傾度皆不生影響；故兩柱間之段，恰如簡梁之於其實任擔負之外，而在其一端或兩端任額外之力偶也；其各處之偏度與傾度，可由原有擔負與力偶所生者相加以求之。兩柱以外部分之彎度亦有兩部分：其一由中段鄰端之傾角而生者，可由該傾角乘以横斷面至該支柱之距離以求之；其二生於支柱以外部分上原有之擔負者，可擬諸肱梁以求之也：傾角則由中段鄰端之傾角，與肱梁由擔負所生者相加以求之。分論各段時，當比擬以前各該獨立情形，分選極點以便施用以前之公式。

茲以一端過枕任散布擔負者爲例（圖 181,a）。自横斷面 B 截去

過枕段，添入下向之切力 $Q_2=qa$，及力偶 $M_2=\frac{qa^2}{2}$. 切力直傳於右柱 B，對於中段之彎度與傾度皆無關係；故中段恰如任散布擔負之簡梁，而於右端任力偶 $\frac{qa^2}{2}$ 者。

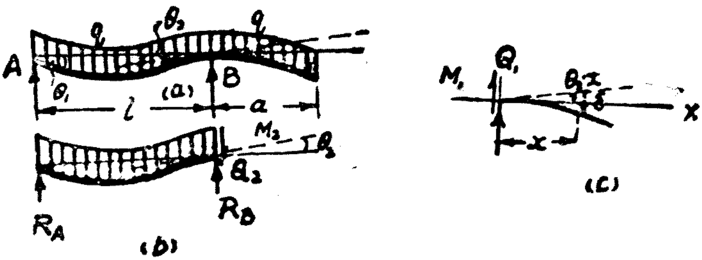


圖 181.

故距左柱 x 處彎度之生於散布擔負者，可由公式(79)求得，其生於右端力偶者可由公式(95)求得。若以下向者為正，則

$$y_x=\frac{q}{24EI}(l^3x-2lx^3+x^4)-\frac{qa^2l}{12EI}\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right).$$

中段右端之傾角 θ_2 之生於散布擔負者，可由(78)式求之；其生於右端力偶者由(94)式求之。以自水平線下傾之角為正，則

$$\theta_2=\frac{ql^3}{24EI}-\frac{qa^2l}{2\times 3EI}.$$

右方過枕段以 B 點為極，右向量 x，則 x 處偏度之生於 θ_2 者等於 $\theta_2\cdot x$ 上偏，其生於原來散布擔負者，由(101)式以 $(a-x)$ 代 x 求得之。若以上偏為正，則

$$y_x=\left(\frac{ql^3}{24EI}-\frac{qa^2l}{6EI}\right)x-\frac{q}{24EI}(6l^2x^2-4lx^3+x^4).$$

習題四十五

1. 圖 182 (a),求 C 端之偏度與傾度。

答 偏度 $=\dfrac{Pa^2(l+a)}{3EI}$；傾度 $=\dfrac{Pa(2l+3a)}{6EI}$.

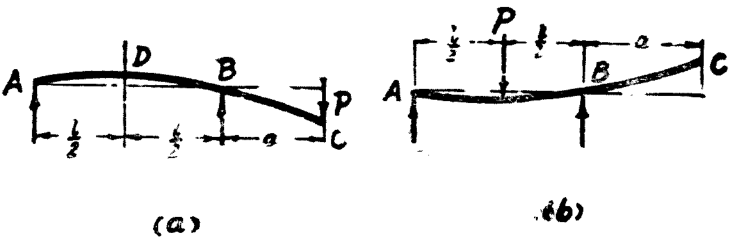


圖 182.

2. 圖 182 (a)與(b)之相同字母皆示相等之量。試證(a)圖 D 點之彎度恰等於(b)圖之在 C 點者。

答 皆為 $\dfrac{Pl^2a}{16EI}$.

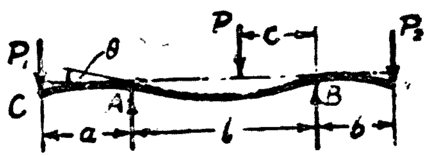


圖 183.

3. 圖 183 之過枕梁,求 C 端及兩柱中點之彎度。

解. 兩柱間之一段恰同簡梁之任擔負 P,並於 A 端與 B 端分任力偶 P_1a 與 P_2b 者。故其中點之彎度可由(91)式及(95)式所示。用重疊方法求之。

$$\delta=\frac{P\cdot c}{48EI}(3l^2-4c^2)-\frac{P_1al^2}{16EI}-\frac{P_2bl^2}{16EI}.$$

A點與水平之傾角可由(8)式與(93)式,(94)式相加以求之;以下傾者為正,則　$\theta_1=\dfrac{Pc(l^2-c^2)}{6lEI}-\dfrac{P_1al}{3EI}-\dfrac{P_2bl}{6EI}$.

[illegible]點之偏度,若以下向者為正,則為　$\dfrac{P_1a^2}{3EI}-a\theta_1$.

4.　全長等於l之梁,兩端過枕之部分相等,各長x,設於兩端任相等之集中擔負P.(1)若欲其中點之彎度與兩端者相等,求x與l之比;(2)若欲其中點彎度達其最大值,求x與l之比。

答.(1) $x=0.152l$;(2) $x=\frac{1}{6}l$

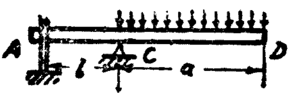


圖 184.

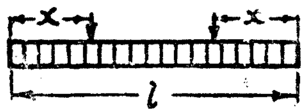


圖 185.

5.　圖184示圓木梁A端以活軸管於柱上,C點以滾柱支持之。CD一段任散布擔負,強度為q.設$a=6$呎,$l=3$呎,$q=300$磅每呎,木材之資用張應力σ_w限為1200磅每方吋。求其直徑與D端之偏度。

答　$\delta_D=\dfrac{qa^4}{8EI}+\dfrac{qa^3l}{6EI}$.

6.　長l之梁,兩端有等長之過枕部分,全長任散布擔負,其強度為q.今欲其中點之彎力矩最小,求其過枕段之長度x;並求此時中點之彎度。

解.　由習題二十五題6之解法,$x=0.207l$.

中點之彎度,　$\delta=\dfrac{5}{384}\cdot\dfrac{q(l-2x)^4}{EI}-\dfrac{qx^2(l-2x)^2}{16EI}$,

前項生於兩柱間之散佈擔負者參看(80)式，後項生於兩端扭力矩$\left(各等於\dfrac{qx^2}{2}\right)$者，參看公式(95)。

65. 由切力而生之彎度與傾度　以前討論之彎度與傾度乃生於彎力矩者：切力亦能使梁彎曲。

未任擔負以前，二橫斷面 mn 與 m_1n_1（參看圖 186）中間之梁係長方薄板。加擔負以後，則 m_1n_1 與 mn 對切。

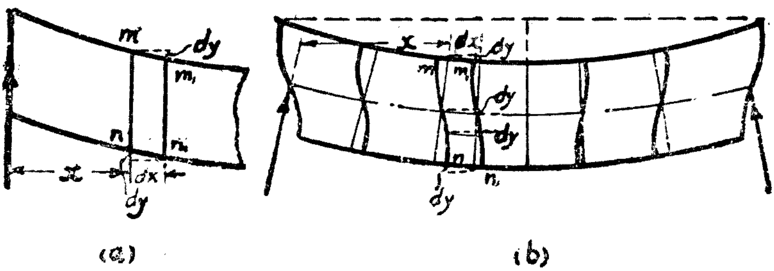


圖 186.

(a)設切力 Q 在橫斷面（$=A$）上平均分配，則各點切應力皆為 $\dfrac{Q}{A}$，而二橫斷面上對應點（原在一水平線上者）之相對位移皆下向而等值，設為 dy，又設二橫斷面相距為 dx；則 $dy=dx$ 一段梁因切力而生之彎度，而 $\dfrac{dy}{dx}=$材料因切應力而生之切應變。由公式(24)，得 $\dfrac{dy}{dx}=Q/AG$，G 為材料之切力彈性係數。

(b)實則切力在梁之橫斷面上非平均分配者，故各橫斷面皆捲曲如圖(b)（參看圖 125 之解釋）。其各點切力之強度既不等，則各點

之應變卽不相等，亦且不同向；故 m_1n_1 對 mn 而言，沿曲率半徑之彎度 dy 亦不能如理論的圖(a)之簡單。爲避免討論各點形變之方向，故以應變能之方法解析之：設 m_1n_1 對 mn 沿曲率半徑外移 dy，則由外力 Q 儲於 m_1n_1 與 mn 中間材料之應變能爲

$$\frac{1}{2}Q\cdot dy \tag{a}$$

設擔負爲緩緩加上，切力由 0 漸增至 Q 者。

橫斷面上距中立層等於 c 之水平窄條面積 $=dA$，其切應力 $=\tau$．則此處每立方吋儲能〔(25)式〕$=\dfrac{\tau^2}{2G}$．相距一吋的二橫斷面間薄板共儲之能 $=\displaystyle\int_0^A\frac{\tau^2}{2G}dA$．爲簡單計以矩形爲例；則　$dA=b\cdot dc$。

又由公式(54)，
$$\tau=\frac{6Q}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4}-c^2\right).$$

$$\therefore\quad \tau^2=\frac{36Q^2}{b^2h^6}\left(\frac{h^4}{16}-\frac{h^2c^2}{2}+c^4\right).$$

故相距 dx 的二橫斷面間薄板共儲之能爲

$$dx\int_0^{\frac{h}{2}}\frac{\tau^2}{G}\cdot b\cdot dc=dx\int_0^{h/2}\frac{36Q^2}{bh^6G}\left(\frac{h^4}{16}-\frac{h^2c^2}{2}+c^4\right)dc$$

$$=dx\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{Q^2}{bhG}. \tag{b}$$

令此式等於(a)式，則得
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{6}{5}Q}{GA}=\frac{1.2}{G}\cdot\frac{Q}{A}.$$

泛言之，對任何形狀橫斷面之梁，其切力所生之彎度 y 對橫斷面位

置 x 之微率皆可寫作* $$\frac{dy}{dx}=\frac{kQ}{GA} \tag{102}$$

圓形簡梁按應變能之法，可求得 $k=\frac{32}{9\pi}=1.14$

（參看公式(56)之 τ，試以此爲習題）。

簡梁距左柱 x 處由切力共生之彎度，可積分(102)式以求之，

即 $$y_x=\frac{k}{GA}\int_0^x Q\,dx=\frac{kM_x}{GA}. \qquad 而 \quad \delta=\frac{k}{GA}\cdot M_{大} \tag{103}$$

故因切力而生之彎度，仍可由彎力矩求得之也。

任散布擔負 q 之簡梁 其 $M_x=\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2}$.

$$\therefore \quad y_x=\frac{k}{GA}\left(\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2}\right); \qquad 而 \quad \delta=y_{x=\frac{l}{2}}=\frac{k}{GA}\cdot\frac{ql^2}{8} \tag{c}$$

由彎曲與横切作用共生之最大彎度，

$$\Delta=\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{EI}+\frac{k}{GA}\cdot\frac{ql^2}{8}=\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{EI}\left(1+\frac{48}{5}\cdot k\cdot\frac{r^2}{l^2}\cdot\frac{E}{G}\right)$$

r 爲横斷面抗彎時之轉動半徑。若爲矩形鋼梁，則 $r^2=\frac{h^2}{12}$，$k=\frac{6}{5}$，

由公式(24)， $$\frac{E}{G}=2(1+0.3)=2.6.$$

$$\therefore \quad \Delta=\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{EI}\left(1+2.5\frac{h^2}{l^2}\right) \tag{d}$$

若 $\frac{l}{h}=10$，則切力所生之彎度只當彎曲所生者2.5%耳。

---

* 本節求 k 之法，譯自 J. Case 之 Strength of Materials，244 頁.

任一集中擔負距右柱等於 c 之簡梁 其左柱支持力 $=\dfrac{Pc}{l}$.

$$\therefore\quad M_{x>0<(l-c)}=\frac{Pcx}{l};\quad y_x=\frac{k}{GA}\cdot\frac{Pcx}{l};$$

$$\text{擔負下之}\,\delta\,\text{最大}=\frac{k}{GA}\cdot\frac{Pc(l-c)}{l}.$$

簡梁在中點任集中擔負者 此時 $c=\dfrac{l}{2}$ 而 $\delta_{大}=\dfrac{k}{GA}\cdot\dfrac{Pl}{4}$.

由彎力矩與切力共生之彎度,

$$\Delta=\frac{Pl^3}{48EI}\left(1+12k\cdot\frac{r^2}{l^2}\cdot\frac{E}{G}\right).$$

I 字梁之 k 常大於 2 按簡約解析 k 可約作 $\dfrac{\text{最大之}\,\tau}{\text{平均之}\,\tau}$. 以公式

(58)之(a)式代最大切應力,以 $\dfrac{Q}{A}$ 代平均者,則

$$k=\frac{A}{b_1I}\left[\frac{bh^2}{8}-\frac{h_1^{\,2}}{8}(b-b_1)\right]\text{(參看圖 127)}.$$

如 24 吋 105.9 磅/每呎之 I 字鋼, $A=31$ 方吋, $b=7.875$ 吋, $b_1=0.625$ 吋, $I=2811.5$ 吋^4. 設 $l=6h$, 則 $k=2.42$.

若任散布擔負,則

$$\Delta=\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{EI}\left(1+\frac{48}{5}\times2.42\times\frac{2811.5}{31\times144^2}\times2.6\right)$$

$$=1.265\times\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{EI}.$$

切力所生之彎度達 26.5%,故對較高之短 I 字梁不可忽視也。

利用共軛梁解求簡梁共有之彎度　須將共軛梁之擔負加多以使其增多之彎力矩，恰等於原梁由切力所生之彎度也。就簡梁之任散布擔負者而論，因　$\frac{dy}{dx}=\frac{k}{G}\cdot\frac{Q}{A}$.

$$\therefore\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{k}{GA}\cdot\frac{dQ}{dx}=-\frac{k}{GA}q.$$

故共有之
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M}{EI}-\frac{k}{GA}q=-\left(\frac{M}{EI}+\frac{k}{GA}q\right).$$

以此式與共軛梁之 $\frac{d^2M'}{dx^2}=-q'$ 相較，可知共軛梁之散布擔負強度須爲 $\frac{M}{EI}+\frac{k}{GA}q$: 即以等強之散布擔負強度之爲 $\frac{k}{GA}q$ 者，加於散布擔負強度爲 $\frac{M}{EI}$ 者之上；或將以前共軛梁擔負圖之基線 $A'B'$（叄看圖 162），按照原梁上散布擔負強度 q 平行移下 $\frac{k}{GA}q$（叄看圖 187）。

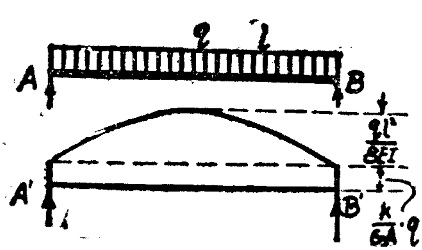


圖　187.

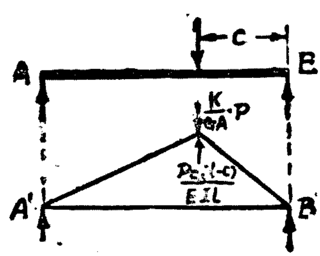


圖　188.

任集中擔負距右柱等c之簡梁　因$\frac{dQ}{dx}=0$，故上述之解析法不能施用，只知對共軛梁不宜加散布擔負耳。但共軛梁左柱支持力必須增多R'，以使其對x處增多之彎力矩，恰等於原梁在該處因切力而增多之彎度。

故
$$R'x=\frac{k}{GA}\cdot\frac{Pcx}{l}. \qquad \therefore \quad R'=\frac{k}{GA}\cdot\frac{Pc}{l}.$$

此宜增之R'，可於共軛梁對應原梁擔負處，加集中擔負$=\frac{kP}{GA}$以得之也。*（參看圖188）。

66．簡梁橫斷面之規定法　設簡梁跨度與擔負皆屬已知，則其橫斷面之幾何度可按下列之標準規定之：

（1）由已知之最大彎力矩及材料之資用張應力，按彎力公式定之。

（2）由已知之最大切力及材料之資用切應力，按切力公式規定之。

（3）用工程許可之最大彎度，按本章之最大彎度公式規定之。梁內之切應力常甚小，對於均質之梁，可以不討論。

最簡單之橫斷面只有一未知度如正圓正方者，則按材料之資用張應力，用公式（46）規定之。或按允許之最大彎度（常限爲跨度$\frac{1}{360}$）亦可規定之。依據定限則視應用之目的而定。凡依據一個定限規定者必按其他定限檢查之。

---

* 此項解釋，由著者自擬。

矩形橫斷面之二未知度，雖可用此二限制公式聯立而解之，但平常矩形梁皆立用，為防其擔負面不能恰與其長主軸相合而生側彎也，其高度常限為寬度之 2.5 倍至 3 倍：用此經驗限制及上述之任一限制，可並求其兩度，然後再檢討其超過他限否。

碾製之鋼料橫斷面之未知度過多，不能依據上述之限制以各個規定之。普通按最大之彎力矩 M 與鋼料之資用張應力，由彎力公式 $\frac{M}{\sigma_w}=\frac{I}{c}$ 以求其橫斷面之係數 $\left(\frac{I}{c}\right)$，然後按此值檢工部規章，或製造廠之樣表，以求其近似橫斷面；則高度，每呎重量以及其他各度皆有制定矣。一個橫斷面係數常有兩個不等高之近似橫斷面，設計者可任選其一，大概高者價廉；至於所占空間之大小以及是否為常備之材料，則均須顧及之。如此規定之 I 梁，不但其最大彎度須要檢查，若以之任集中擔負，則在危險斷面之緣與脊之相接處之主要張應力須要求出，此應不超過材料之資用值方為足強（參看習題四十題 1）；但若非甚短之梁，則此主應力常不若上下表之彎應力較大也。任散布擔負者，則 M 與 Q 之最大值不在一個橫斷面上，故交界處之主應力常不如危險面上下表之張應力為優。至其他學說之檢討（參看習題四十題 2）更無必要。

第七章　特殊簡梁之强度與屜强性

以前證明的彎力與彎度公式 $\frac{M}{I}=\frac{E}{r}=\frac{\sigma}{c}$ 須合下列之限制方可施用:

(1)在加擔負以前,須係直梁　本章則討論其原有彎度之不甚大者;如原有之曲率甚大,則詳於著者進級材料力學之彎梁章。

(2)梁之橫斷面須不變　本章則詳論橫斷面有改變時之彎力矩,彎應力,與彎度之解求法。

(3)梁之橫斷面須有對稱軸,且擔負面須與該軸相合,然後方無扭轉,而有關各式始有效。如無對稱軸,或擔負面不與對稱軸相合,則(a)須尋求擔負面必經橫斷面上某點,而後始不生扭轉;(b)雖經該不扭中心,但與橫斷面之主軸不相合,須如何援用彎力與彎度公式。

(4)材料須服從 Hooke 定律　不然,如鑄鐵者,須如何求其抗彎力矩與曲率半徑。

(5)材料尚未超過彈性限度　本章則論已超過屈服點之彎曲。

(6)材料之壓彈性係數與張彈性係數相等　本章則論其不等者。

(7)材料須係同質的　本章則論兩種材料拼造者之梁。

67. 原來已彎之梁　設想介於沿徑斷面 ms 與 m_1s_1 間之一小段，C 爲其中心，$d\theta$ 爲其所對之中心角（參看圖 189）。任擔負之後，設其曲率更增；若MN爲中立層，則 m_1Nn_1 面必轉 $\Delta(d\theta)$ 角至 $m_1'Nn_1'$，而新曲率中心爲 C'. CM＝中立層原有之曲率半徑 $r_\circ$，$C'N=C'M$＝新曲率半徑 r. 距中立層等於 y 之一層，其原長爲

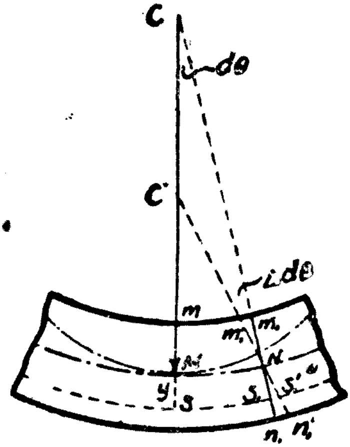


圖 189.

$$ss_1=(r_\circ+y)d\theta.$$

其變長$=s_1s_1'=y\cdot\Delta(d\theta)$.

故其線應變 $\epsilon=\dfrac{y}{r_\circ+y}\cdot\dfrac{\Delta(d\theta)}{d\theta}$.

但
$$\frac{\Delta(d\theta)}{d\theta}\doteqdot\frac{\sin\Delta(d\theta)}{\sin d\theta}=\frac{CC'}{C'N}=\frac{r_\circ-r}{r}$$

$$\therefore\quad\epsilon=\frac{y}{r_\circ+y}\cdot\frac{r_\circ-r}{r}=y\cdot\frac{r_\circ-r}{rr_\circ\left(1+\dfrac{y}{r_\circ}\right)}.$$

若$\dfrac{y}{r_\circ}$甚小，或梁之厚度較其原有之 $r_\circ$ 甚小，則

$$\epsilon=y\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_\circ}\right).\qquad 而\qquad \sigma=Ey\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_\circ}\right)\qquad(104)$$

又斷面 m_1n_1 之抗彎力矩，

$$M=\int_0^A\sigma y\,dA=E\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_\circ}\right)\int_0^A y^2dA,$$

此宜與外力加於該面之彎力矩相等。

$$\therefore \quad M=EI\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right) \tag{105}$$

合(104)(105)兩式,得 $\frac{\sigma}{y}=\frac{M}{I}$,

與直梁之彎力公式相同。

如原係直梁,則 $\frac{1}{r_0}=0$. 公式(105)化爲直梁之彎曲線式。M 以增加曲率者(卽減小半徑者)爲正,則 $\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}=$ 正,而(105)式兩端之符號恰相合。y 以背中心外量爲正,向中心量爲負(因 r 向外量爲正),則 σ 之得正者爲張應力,負則爲壓應力。

然則,如梁之厚度與其曲率半徑之比甚小(如彈簧者,其曲率半徑雖不甚小,而厚度則甚小;又如拱梁(arch)之斷面雖非甚薄,而曲率半徑則甚大)者,仍可用彎力公式以求彎應力,而彎度公式則改用公式(105),自原位量得之彎度 $=y$,則

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M}{EI}+\frac{1}{r_0}. \tag{106}$$

茲以疊板彈弓(leaf spring)爲例:* 以板彎作圓弧,其長遞減,重疊爲梁,以箍束之。當其屈伸之時,板與板間可以滑動。若兩個合用,則於兩端管以軸,各於中點任擔負,裝於車與軸間可以緩和震蕩。因其所任之彎力矩近中點益大,故板亦於中部加多,所以使其各層之彎應力相等也。板之盡頭處,全梁之 $\frac{I}{c}$ 生遽變,彎應力亦生急變,

* 採自 J. Case 之 Strength of Materials, 394 頁

故製爲三角形，其極點盡於下層三角之起處，所以使每層上下表之彎應力在各處皆相等。

更詳論之，板與板間傳遞擔負只在兩端，蓋其較長者先行平直也。每層尖端之起末點受上下層反向之力皆爲$\frac{W}{2}$。設 a 爲三角尖端之長，則各層中部皆任力偶$=-\frac{Wa}{2}$，故必曲作圓弧，其

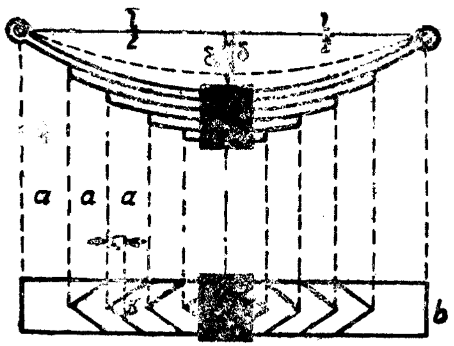


圖 190.

$$\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}=-\frac{M}{EI}=\frac{6Wa}{bh^3E}.$$

每層尖端之彎力矩擬以肱梁$=-\frac{W}{2}x$，若欲其連續全部曲作圓弧，則

$$\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}=-\frac{M_x}{EI_x}=-\frac{M}{EI}.$$

故距尖端 x 處之寬度，須使$\frac{M_x}{I_x}=\frac{M}{I}$，

或
$$I_x=\frac{\frac{Wx}{2}}{\frac{Wa}{2}}\cdot\frac{bh^3}{12}=\frac{\left(\frac{b}{a}x\right)h^3}{12},$$

即其寬度 $b'=\frac{b}{a}x$，故須作成三角尖端。

各處上下層之彎應力

$$\sigma=\frac{M}{I}c=\frac{\frac{1}{2}Wa}{\frac{bh^3}{12}}\times\frac{h}{2}=\frac{\frac{1}{2}Wx}{\frac{b}{a}\cdot x\cdot\frac{h^3}{12}}\times\frac{h}{2},$$

$$=\frac{3W}{bh^2}\cdot\frac{\left(\frac{l}{2}\right)}{n}=\frac{3}{2}\cdot\frac{Wl}{nbh^2} \tag{a}$$

n 爲板之層數，$\left(\frac{l}{2}\right)\Big/n=a.$

設 δ_0＝梁之中點至水平線之原有彎度，δ 爲任 W 以後者。

則 $$\delta_0=\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2r_0-\delta_0}\doteqdot\frac{l^2}{8r_0};\qquad 而 \qquad \delta=\frac{l^2}{8r}.$$

故任 W 以後減少之彎度爲

$$\delta_0-\delta=\frac{l^2}{8}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)=\frac{l^2}{8}\times\frac{\frac{Wa}{2}}{E\frac{bh^3}{12}}=\frac{3}{8}\cdot\frac{Wl^3}{nbh^3E}.$$

設 W_0 爲最大擔負之能壓平彈弓(使 $\delta=0$)者，則 $\delta_0-\delta=\delta_0$,

或 $$\delta_0=\frac{3}{8}\cdot\frac{W_0l^3}{nbh^3E}.\qquad\therefore\quad W_0=\frac{8}{3}\cdot\frac{nbh^3E\delta_0}{l^3} \tag{107}$$

最大之彎應力 $$\sigma_0=\frac{3}{2}\cdot\frac{W_0l}{nbh^2}=\frac{4Eh\delta_0}{l^2} \tag{108}$$

W_0, δ_0, E, σ_0 皆屬已知量，故設定 h 與 b，由式(108)求 l，更由(107)式求 n。

習 題 四 十 六

1. 用 3 吋寬，$\frac{3}{8}$ 吋厚之鋼條製成車用彈弓。其弦長 3 呎，條計六層，不任擔負時之最彎度爲 $2\frac{1}{2}$ 吋，條之盡頭製成三角尖端，其長皆等於最短條全長之半。求壓平之力。

答 4,070 磅.

2. 鋼條製成之車用彈弓，弦長 30 吋，以其中點任擔負 $\frac{1}{2}$ 短噸，每條寬 3 吋，厚 $\frac{1}{4}$ 吋。若欲其彎應力不踰 12 短噸每方吋，幾層纔可足用？其中點原有彎度若干？各條原來半徑須曲成幾何？已知 $E=14.5$ 短噸每方吋。設 $\frac{1}{2}$ 短噸已可壓平。

答 $\delta_0=0.83''$; $r_0=135$ 吋.

68. 梁之橫斷面有形變者 梁之橫斷面若無急遽改變，則前兩章之彎力公式及彎度公式皆可用。欲徵此言，可設三角板立用爲肱梁，而求其彎應力及抗彎力矩：

設 M 點之坐標爲 r, ϕ. 欲求經此點沿 r 方向之張應力，須先求在該點沿該方向之線應變，僅用平衡不能規定之也。

擬想圖 191(b)之三角結構，設於 O 點加直下之擔負，作 O 點之位移圖 OO_1O_2O'. 則 OD(或 OE)之變長 $OO_1=OO'\sin\phi$.

設將同圖 (a) 視作許多三角結構之組合體，則沿任一方向 ϕ 之

變長亦必爲 $\sin\phi$ 之函式。在 M 點(或 N 點)之線應變,宜爲該函式以 r 函式除之(因 OM 之原長$=r$),可寫作 $\epsilon=\epsilon_0\sin\phi$,其 ϵ_0 爲函 r 之式。然則在方位 ϕ,距 O 點 r 處之應力强度 σ(卽 M 處之張應力,或 N 處之壓應力)必爲 $\sigma=\sigma_0\sin\phi$,其 σ_0 爲函 r 之式。 (a)

若 r 變値,則 σ 與 σ_0 皆變。又擬以同圖(b)橫斷 OD 或 OE 無切力,故 σ 爲主應力。

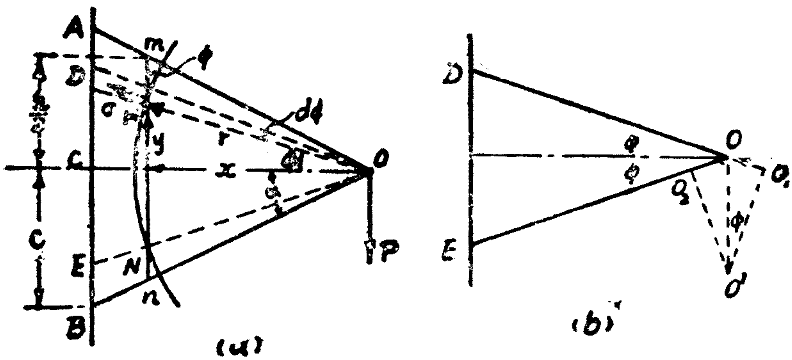


圖 191.

截取半徑$=r$ 之扇形而論其平衡:在截開之弧面上只有沿徑之 σ 惟其値隨 ϕ 而不同耳。

故沿 $\overline{OD}$ 之全力$=\sigma\cdot br\cdot d\phi=\sigma_0 br\cdot\sin\phi\cdot d\phi=$在 N 點沿 $\overline{EO}$ 者。此二者之直上分力$=2\sigma_0 br\sin^2\phi\,d\phi$.

由 $\Sigma F_Y=0$ 得 $$2\sigma_0 br\int_0^{\alpha}\sin^2\phi d\phi=P \qquad \text{(b)}$$

$$\therefore \quad \sigma_0=\frac{P}{\left(\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)br};$$

而
$$\sigma=\frac{P\sin\phi}{\left(\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)br}. \tag{c}$$

此式爲求(r,ϕ)點主應力之公式。

距擔負着加點平行擔負截取斷面 mn. 此面自 OD 四稜柱之 M 點處截成斜斷面，其面積$=\frac{b\cdot rd\phi}{\cos\phi}$，又 M 點之主應力在該面上，此處之垂直應力 σ_n 由第15節爲

$$\sigma_n=\sigma\cos^2\phi=\frac{P}{\left(\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)br}\sin\phi\cos^2\phi \tag{d}$$

此式可求(r,ϕ)點垂直擔負之應力.

mn 面上之垂直應力共生之抗彎力矩

$$M=\int_0^A \sigma_n y dA.$$

$$M=\frac{P}{\left(\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)br}\int_{-\alpha}^{+\alpha} x\tan\phi\cdot\sin\phi\cos^2\phi\cdot\frac{brd\phi}{\cos\phi}$$

$$=\frac{2Px}{\left(\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)br}\int_0^{\alpha}\sin^2\phi\, d\phi=Px \tag{e}$$

此式示距 O 點 x 處平行擔負之斷面上之抗彎力矩仍等於平常方法求得之彎力矩。

返觀(d)式，以 xy 乘其子母，並以 $\frac{r}{\cos\phi}$ 代分母之 r，以 $x\tan\phi$ 代分母之 y，則得

$$\sigma_n=\frac{My}{\left(\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)bx^3}\cos^4\phi.$$

再以 $\left(\frac{h}{2}\right)\Big/\tan\phi$ 代 x，則

$$\sigma_n=\frac{2\tan^3\alpha\cos^4\phi}{3\left(\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)}\cdot\frac{My}{I} \tag{f}$$

最大之 σ_n 在 m 與 n，此處之 $y=c=\frac{h}{2}$，$\phi=\alpha$. 故上式化爲

$$(\sigma_n)_{大}=\frac{2\sin^2\alpha\cos\alpha}{3\left(\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)}\cdot\frac{M}{I}c=\beta\cdot\frac{M}{I}c \tag{g}$$

β 爲舊彎力公式用於此種肱梁時之校正因數。

設 $\alpha=5°, 10°, 15°, 20°$; 則 $\beta=1.00, 0.97, 0.947, 0.906$.

故知斷面之改變不急（即變細之傾度緩），用舊彎力公式即無大差異。至於遽變，則在粗細兩部皆可用舊式以求應力，惟在交界處須以應力集中因數乘其細段者。該因數因粗細之比與圓角半徑，與細段幾何度之比皆有關係；如粗細之比爲 2，圓角半徑與細段幾何度之比爲 $\frac{1}{4}$，則因數爲 1.7.（詳表參看著者進級材料力學集中應力章)。

彎力公式既可用，則彎度公式與其輾梁法皆可施用。茲以等強肱梁(cantilever beam of equal strength)爲例，而求其彎度。所謂等強

者，謂其各橫斷面上下表之彎應力相同也。設其只在自由端任集中擔負 P，則 x 處之彎力矩 $=Px$. 無論橫斷面須如何改變，其彎應力 $\sigma=\dfrac{Px}{I/c}$；欲 σ 不變，其斷面係數須與 x 成正比，即 $\dfrac{I}{c}=Kx$.

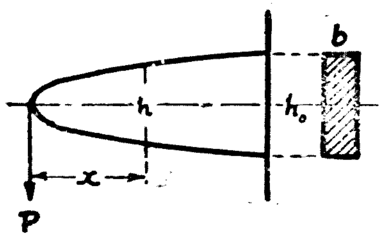


圖 192.

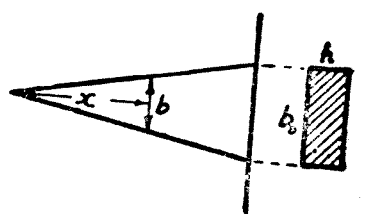


圖 193.

(a)參看圖 192，設其寬度常為 b，只變其厚度。則

$$\frac{h^2}{h_0^2}=\frac{x}{l}, \qquad 或 \qquad h^2=\frac{h_0^2}{l}\cdot x,$$

以式示拋物線之以自由端為極者。其

$$I_x=\frac{bh^3}{12}=\frac{bh_0^3}{12}\left(\frac{x}{l}\right)^{3/2}=I_0\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

其彎度由第 63 節，

$$\delta=\int_0^l\frac{M_x\cdot x\cdot dx}{EI_x}=\frac{P}{EI_0}l^{\frac{3}{2}}\int_0^l x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{Pl^3}{EI_0}.$$

較厚皆等於 h_0 者大 2 倍。

(b)設厚度不變，則寬度須與 x 成正比（參看圖 193）。於是

$r=\frac{EI}{M}$有恆值，故彎度曲線爲圓弧。

$$\therefore\quad \delta=\frac{l^2}{2r-\delta}\doteqdot\frac{l^2}{2r}=\frac{l^2}{2}\cdot\frac{M_0}{EI_0}=\frac{Pl^3}{2EI_0}.$$

（參看第 67 節疊板彈弓之三角尖端）。

簡梁橫斷面之形變如非急遽，其彎應力亦按彎力公式求之。其傾度與彎度仍用共軛梁之解法。惟須注意原梁之轉動慣量增加$\frac{I_1}{I_0}$倍之處（如圖 194 FF 段者），恰如轉動慣量不增（全等於I_0）而彎力矩縮小$\frac{I_0}{I_1}$倍者，故將彎力矩圖改爲影示圖以爲共軛梁之擔負，則原梁之傾度與彎度，即等於共軛梁之切力與彎力矩，皆用EI_0除之。

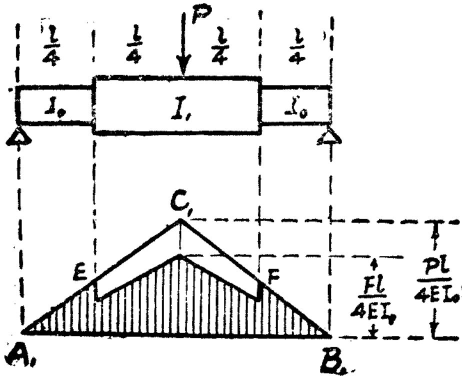


圖 194

不然，則如圖 195，設原梁之轉動慣量皆等於中段之最大者，而將他段之彎力矩按轉動慣量之比而增大之，然後共軛梁之切力與彎力矩皆以中段之抗彎硬度除之，亦得原梁之傾度與彎度。

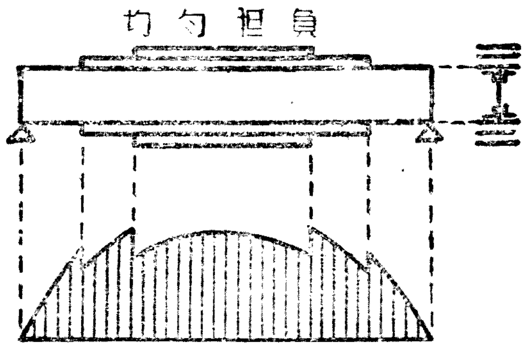


圖 195.

習題四十七

1. 圖 196 所示之肱梁任擔負 P,求其 C 端之偏度。

解. 化 P 為經 B 點之力及力偶 $M=Pl$. C 點之彎度計有下列三項:

(1) B 點之彎度 $=\dfrac{Pl^3}{3EI}+\dfrac{Ml^2}{2EI}=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{Pl^3}{EI}$.

(2) 因 B 點傾度致 C 點下偏者為

$$\frac{Pl^2}{2EI}\cdot l+\frac{Ml}{EI}\cdot l=\frac{Pl^3}{2EI}+\frac{Pl^3}{EI}.$$

(3) 因 BC 段作圓弧致 C 點下偏者為

$$\frac{l^2}{2r}=\frac{l^2}{2}\cdot\frac{M_B}{EI_B}=\frac{Pl^3}{2EI}.$$

三項相加，得 $$\delta_C=2\frac{5}{6}\cdot\frac{Pl^3}{EI}.$$

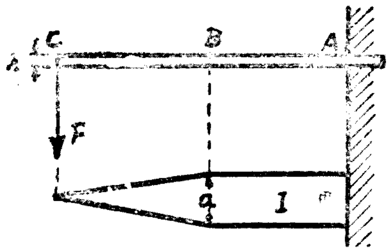


圖 196

2. 圖 194 之圓梁，設 $I_1=2I_0$. 並設有等長同質之圓梁，其 $I_1=I_0$，以任同樣擔負，求其中點彎度與一端傾度之比。

解. 圖 194 所示者之抗彎大，故彎度傾度皆較小。

其一端傾度之比＝影示部之面積：$A_1C_1B_1$面積$=\frac{5}{8}:1$.

其中點彎度之比＝影示部之左半對左支點之一次面矩，比三角形之左半對左支點者$=\frac{9}{16}:1$.

3. 圖 197 示兩端自由支持之梁，任以圖示之擔負，設其寬度不變。若欲其各處上下表所任之彎應力等強，求證其 x 處之厚度爲

$$h_0\left(6\frac{x}{l}-12\frac{x^2}{l^2}+8\frac{x^3}{l^3}\right).$$

4. 圖 198 示鋼板製成之簡梁，厚$\frac{1}{2}$吋，在其中點任 20 磅之擔負，求其最彎度。

解. 設將其各橫斷面之轉動慣量化爲中央橫斷面者 I_z. 則其彎力矩圖 $A_1C_1B_1$ 化爲梯形 A_1CDB_1. 於是

$$\delta=\frac{11}{8}\cdot\frac{Pl^3}{48EI}.$$

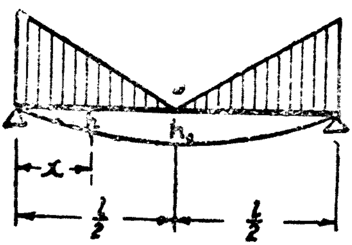


圖 197

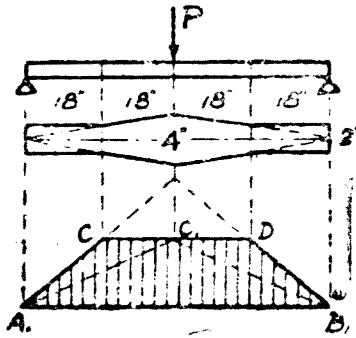


圖 198

5. 疊板彈弓之弦長 36 吋, 厚 $\frac{1}{2}$ 吋, $E=30\times10^6$ 磅每方吋。設資用彎應力達 60,000 磅每方吋, 求其最大彎度 答 5.18 吋

6. 設簡梁之橫斷面雖有變更, 而其厚度不變. 試證切力公式 (53) 仍可用。

解. 設一個橫斷面之切力 $=Q$, 彎力矩 $=M$, 寬度 $=b$, 並設其在危險斷面之左。

在左方 $\frac{\Delta x}{2}$ 處者爲 $Q-\frac{\Delta Q}{2}$, $M-\frac{\Delta M}{2}$, $b-\frac{\Delta b}{2}$.

左面窄條面積 $$dA=\left(b-\frac{\Delta b}{2}\right)dy.$$

右方 $\frac{\Delta x}{2}$ 處者爲 $Q+\frac{\Delta Q}{2}$, $M+\frac{\Delta M}{2}$, $b+\frac{\Delta b}{2}$.

右方橫斷面上窄條面積 $dA=\left(b+\frac{\Delta b}{2}\right)dy.$

又 $$\frac{dI}{db}=\frac{I}{b}.$$

按第 43 節方法，約去小量之相乘積，仍得

$$\tau=\frac{Q}{Ib}\int^{h/2}ydA.$$

69. 主面內之彎曲及不扭中心 前在第 34 節證明受力偶彎曲之梁，只力偶在主面內，則各橫斷面繞梁之中軸不生扭轉，梁之橫斷面不必有對稱軸，而力偶所在之主面亦不必經橫斷面之重心也；蓋以兩個向上之力，若使梁扭轉，則他二力必使之倒扭，而恰相削也。惟垂直擔負之梁，雖擔負面與經重心之主面相合，亦未必不扭，故在第 37 節說彎力公式用於垂直擔負時，須梁之橫斷面有對稱軸，而擔負面須合該軸也。

梁無對稱軸者（如 Z 梁），或雖有對稱軸而擔負面不合該軸者（如立用之 [字梁與平用的不等緣之 I 字梁），其擔負面須經橫斷面上某點而後只彎而不扭也。只彎不扭曰簡彎曲（simple bending），倘有垂直切力，故非即單純彎曲也。此點謂之不扭中心（center of twist 或 shear center），連接各橫斷面不扭中心之直線曰彎曲中軸（bending axis）。設擔負面經不扭中心 O，則經該中心亦有一對主軸，爲易知其方位，可設梁之橫斷面有一個對稱軸，惟不若第 37 節之在擔負面內耳（圖 199 a, b, c）。此對稱軸 Z 與其垂線 Y 即是一對主軸。設擔負面合其非對稱之主軸，則按第 34 節之證法，可知彎應

力對於 Y 軸之力矩 $=\frac{E}{R}\int yz\,dA$，因其為主軸，故等於零。擔負對於 Y 軸亦無力矩，則橫斷面無繞 Y 軸迴轉之趨勢，而只繞他主軸迴轉，即其彎曲只在擔負面內，故以前之彎力公式可用。梁既不扭，又只在擔負面內彎曲，則橫斷面上各點之彎度必皆相同，而以前之彎度公式亦可用矣。然則，不扭中心之位置實為首要問題。

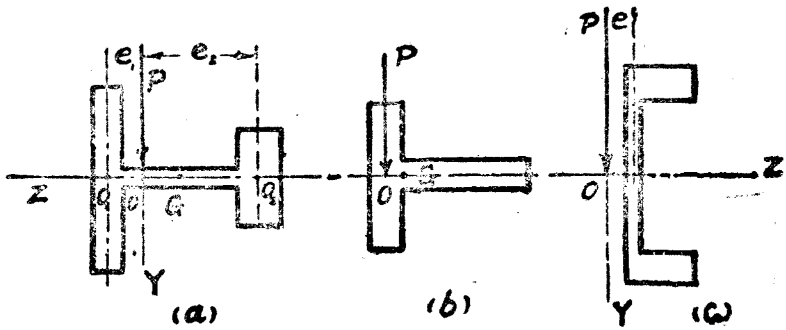


圖 199

茲以兩緣不等之 I 梁為例（圖 196, a），先用簡單解析以求其不扭中心。首須重申者，即脊較緣甚薄，其分任之共切力較緣之所任者小，約為零。設擔負經 O 點即不扭，是必其兩緣分任之共切力 V_1 及 V_2 之合經過 O 點也。故 $V_1e_1=V_2e_2$， 或 $\frac{e_2}{e_1}=\frac{V_1}{V_2}$.

又其兩緣分任之共切力即其分任之外力（支持力與擔負）P_1 及 P_2 也。兩緣分任之彎力矩 M_1 及 M_2 實生於其分任之外力，故 $\frac{M_1}{M_2}=\frac{P_1}{P_2}$.

既設不扭，則兩緣之彎度必相同，故其分任之彎力矩與其轉動慣量 I_1 及 I_2 成正比例，即 $$\frac{M_1}{M_2}=\frac{I_1}{I_2}.$$

於是
$$\frac{e_2}{e_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}=\frac{P_1}{P_2}=\frac{M_1}{M_2}\right)=\frac{I_1}{I_2} \tag{109}$$

即擔負須分兩緣之中心距離為兩段，而與其轉動慣量成反比例也。或不扭中心由全面之重心移向大緣。其極也小緣化為無有，即成橫用之T字梁，其不扭中心極近立臂中心，惟橫臂仍任少許切力，故不能合於立臂中心；可用(109)式詳解之。

再論第二例，即立用之[字梁擔負面與對稱軸垂直(圖199,c)；玆解析其擔負面須經何點，而後方能以對稱軸為中立軸，只彎而不扭也。設梁下彎，又自梁之後端計至前面所示橫斷面之切力上向為Q(圖200)，則本橫斷面脊上之切應力必下向以平衡之，至緣背水平在抗壓緣上者向脊，在抗張緣上者背之(參看圖127,a)，此二者合為一

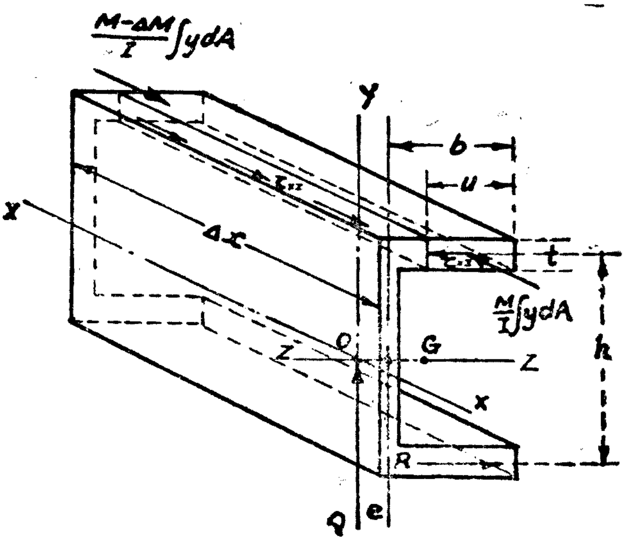


圖 200

力偶，更與脊內下向之力合爲一力，下向而經脊後（緣之對方）之 O 點。故欲不扭，其所受之切力必上向亦經 O 點。然則擔負面（擔負與支持力所在之面）必位於緣之對方而經 O 點。欲求擔負面之偏度 e，須先求緣上之水平橫切力。設在前方橫斷面上之切力爲 Q，上向，則此橫斷面必在危險斷面之後方，若在此橫斷面上之彎力矩爲 M，則在其後方 Δx 處者必爲 $(M-\Delta M)$。全梁橫斷面之轉動慣量設爲 I_Z。自距緣端等於 u 處截取上緣一條以爲自由體，而論其沿 x 方向之平衡：

推動此條向後方之力 $=\dfrac{M}{I_Z}\displaystyle\int ydA$.　推其向前者 $=\dfrac{M-\Delta M}{I_Z}\displaystyle\int ydA$.

故在壓應力緣縱截面上必有向前方之水平縱切力，其強度爲 τ_{xz}，並設緣之厚度爲 t，則

$$\Delta x\cdot t\cdot\tau_{xz}=\frac{\Delta M}{I_Z}\int y\cdot dA. \qquad \therefore\quad \tau_{xz}=\frac{Q}{I_Z t}\int ydA.$$

在前方橫斷面之上緣，距緣端等於 u 處必有互補切力，即受於再前截去面之水平橫切力也，其強度亦爲 τ_{zx}，必等於 τ_{xz}。$\displaystyle\int ydA$ 與 u 成正比，故 τ_{zx} 亦必與 u 成正比，在緣端 u 與 τ_{zx} 皆等於零，至脊最大，

其最大值
$$(\tau_{zx})_{大}=\frac{Q}{I_Z t}\cdot tb\cdot\frac{h}{2}=\frac{Qbh}{2I_Z}=(\tau_{xz})_{大}.$$

故抗壓緣上向脊橫切力之合力，

$$R=\frac{(\tau_{zx})_{大}}{2}\cdot bt=\frac{Qb^2ht}{4I_Z}.$$

同理抗張緣上背脊橫切力之合亦等於此值；此二者合爲力偶矩

$$\frac{Qb^2h^2t}{4I_Z}.$$

統計一橫斷面之平衡如下:

(1) $\Sigma M_Z=0$, 即彎力矩=抗彎力矩.

(2) $\Sigma F_Y=0$, 即所受上向之切力 Q=脊上下向之共切應力.

(3) $\Sigma F_Z=0$, 即兩緣上共切力 R 之水平作用相消.

(4) 但兩個 R 合爲力偶,尚須平衡.故(2)項之 Q 必須偏加於緣之對方,以與脊上下向之縱切力合爲力偶以平衡之也(即 $\Sigma M_X=0$).

設 e 爲 Q 之偏度,則
$$Qe=\frac{Qb^2h^2t}{4I_Z},$$

$$\therefore\quad e=\frac{b^2h^2t}{4I_Z}. \tag{110}$$

擔負面經此不扭中心,而與經此點之主軸 Y 相合;則彎應力與距 Z 軸之 y 成正比,而對 Y 軸無力矩。內外力既對 Y 軸皆無力矩,故彎曲只限於主面 Y(即擔負面)內,而以前之彎力與彎度公式皆可用矣。

圖 201 (a) 之 L 梁,任壓力臂上之 R 向脊,任張力者背之.二者之合爲一力必經脊之中心,故擔負面亦必經此點而後不扭也;再若擔負面與主軸 Y 相合,則各點之彎曲面皆與擔負面平行。

圖 201(b) 立用之 I 字梁即兩個 [字梁之合背者也,四個 R 分對抵消,故不扭中心合於重心.若將等緣之 I 字梁交半截去其緣,即得 Z 梁,其兩個 R 雖不相削,但只使梁左行而不扭也.此力甚易以支持力抵消之,故不扭中心亦合於重心.若擔負面經此點則不扭,若更含主軸 Y,則只在擔負面內彎曲矣。

綜合本節結論:有無對稱軸之梁面,只若擔負經不扭中心,無論其沿何方面,梁皆不扭,惟彎曲面未必與擔負面相合耳(詳次節);若

更與經中心之主軸相合，則不但不扭，且以他主軸爲中立軸，只在擔負面內彎曲；而以前之彎力與彎度公式皆可施用矣。

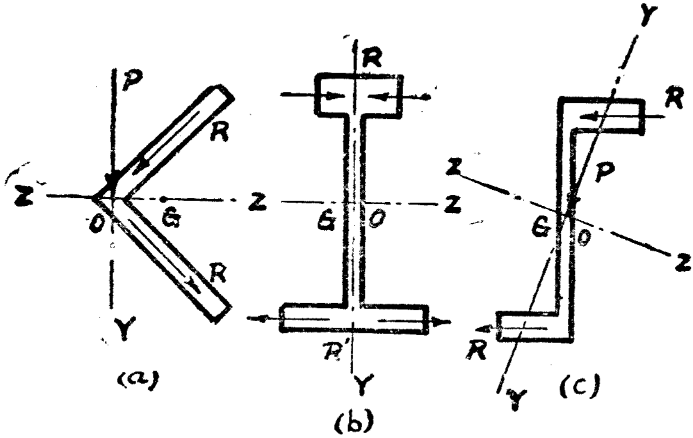


圖 201

70. **擔負不在主面內之彎曲**　工程界常用之橫斷面，無論有無對稱軸，皆已能求其不扭中心，擔負面必經此點以使其不扭，以不扭中心爲極，用第 33 節 11 之法，由易算之轉動慣量求其主軸 Y, Z 之方位，並求其對主軸之轉動慣量，設最大者爲 I_Z，最小者爲 I_Y。若擔負面與一個主軸相合，則用第 69 節之法解析之。若擔負面與主軸 Y 傾 α 角，欲求其某橫斷面之彎應力時，須將外力加於該橫斷面上之彎力矩 M（在圖 202，M 以擔負面內之直線示之）分解爲繞 Z 軸之彎力矩 $M_Z = M\cos\alpha$，及繞 Y 軸之 $M_Y = M\sin\alpha$。此二者沿 Y 與 Z 所生之彎度，各由彎度公式求之：

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_Z}{EI_Z};\qquad \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{M_Y}{EI_Y} \tag{111}$$

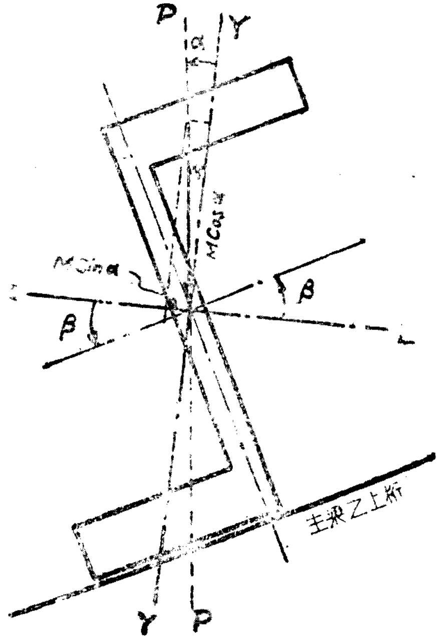


圖 202

彎度 y 與 z 皆以彎度所向之方面爲正，力矩分量皆爲正。實有之彎度爲 y 與 z 之向量合；彎曲面與 Y 軸之傾角爲 $\tan^{-1}\frac{z}{y}$．又兩個分力矩在某橫斷面上一點所生之彎應力皆易由彎力公式求得之，然後按性質而加減之；其符號自易想出，但爲說明第二方法，不得不辨符號——爲施用彎度公式(111)，凡與彎度同向之距離皆爲正，M 之分量皆爲正，在距中立層等於正之方面，其彎應力爲抗張宜爲正；故

$$\sigma=\frac{M}{I}y.$$

而 y,z 點之彎應力，

$$\sigma=\frac{M_Z}{I_Z}y+\frac{M_Y}{I_Y}\cdot z=M\left(\frac{y\cos\alpha}{I_Z}+\frac{z\sin\alpha}{I_Y}\right) \tag{112}$$

用式(111)與(112)爲第一解法，最爲簡便。

第二解法，就彎力矩 M 之全部作用而言，設有中立層。則其方位必在 $\sigma=0$ 處，即

$$\frac{y\cos\alpha}{I_Z}+\frac{z\sin\alpha}{I_Y}=0.$$

故其與 Z 軸傾角之正切爲

$$\tan\beta=\frac{y}{z}=-\frac{I_Z}{I_Y}\tan\alpha \tag{a}$$

負號示其與 α 在相鄰之象限內。$\tan\beta$ 常不等於 $\tan\alpha$，即中立層常不與擔負面垂直，或彎曲面常不在擔負面內也。但當

$\alpha=0$ 時，即擔負面含主軸 Y；則 β 亦 $=0$，而以他主軸爲中立層也。

$\alpha=90^\circ$ 時即擔負面含主軸 Z；則 β 亦 $=90^\circ$，而以主軸 Y 爲中立層也。

$I_Y=I_Z$ 時，即正圓橫斷面；則 $\beta=\alpha$，即中立層與擔負面垂直也。

設 I_Y 較 I_Z 甚小，則 $\tan\beta$ 較 $\tan\alpha$ 甚大。即立用之薄板，若擔負面由長主軸稍偏，則其中立層由短主軸偏出甚多，即其彎曲面約與長主軸垂直矣。故地板下立用之木梁須用橫棒牴之，所以防其橫彎也。

在圖 203，以 NN 示中立層，PP 表擔負面，則二者間之傾角 $\theta=90^\circ-\beta+\alpha$. 假設梁彎之後，橫斷面仍保持平面，則距中立層等於 w 者，其應變 $\epsilon=\frac{w}{r}$ 〔參看(43)式〕，彎應力 $\sigma=E\cdot\frac{w}{\gamma}$.

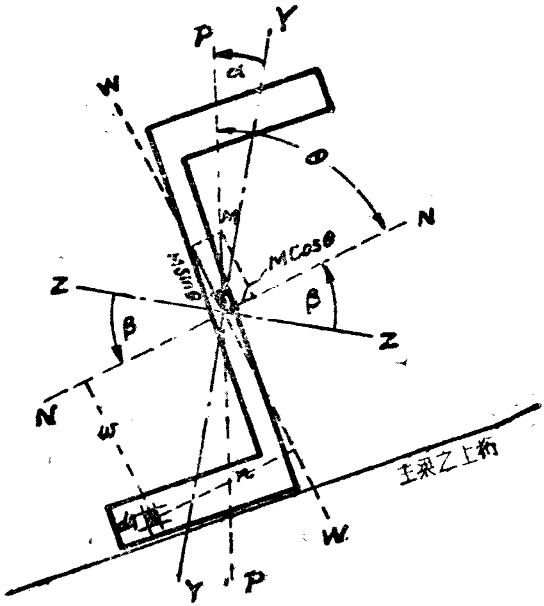


圖 203

$$M\sin\theta=\int^{A}\sigma\cdot w\cdot dA=\frac{E}{r}\int w^{2}dA=\frac{E}{r}I_{N}.$$

$$\therefore\quad \frac{M\sin\theta}{I_N}=\frac{E}{r}=\frac{\sigma}{w}. \tag{113}$$

利用此式以求 σ，即第二解法也。先由易算之轉動慣量求主軸之方位，及兩個主轉動慣量 I_Z 及 I_Y；再由 α 求 β，遂得中立軸之位置及最遠之 w；由主轉動慣量求 I_N，而後可由式(113)以求 σ。又梁之彎曲面與中立層垂直，則距一端等於 x 處之彎度 w 可由次式求之：

$$\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{M\sin\theta}{EI_N}. \tag{114}$$

用此法求 σ，較第一法尤費手續，因須多求 I_N 故也。但若利用第 97 節柱頂心之比擬，則只由易算之轉動慣量求柱頂心，卽可求 σ，甚至主軸方位與主轉動慣量皆不須求，較第一法尤爲簡捷。彎力矩之第二分量 $M\cos\theta$ 不另生彎度與彎應力。其作用與上述彎應力對 WW（垂直 NN）之力矩恰相抵，故不須格外生彎度以生彎應力以平衡之矣。

上述彎應力對 WW 之力矩爲

$$\int^A \sigma\cdot n\cdot dA=\frac{E}{r}\int^A w\cdot n\cdot dA=\frac{E}{r}H_{WN}=H_{WN}\cdot\frac{M\sin\theta}{I_N}$$

（由式 113）.

若此而等於 $M\cos\theta$，則 $\tan\theta$ 須等於 $\dfrac{I_N}{H_{WN}}$．今

$$\tan\theta=\tan[90^\circ+(\alpha-\beta)]=-\cot(\alpha-\beta)=-\frac{1}{\tan(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{1+\tan\beta\tan\alpha}{\tan\beta-\tan\alpha}=\frac{1+\dfrac{I_Y}{I_Z}\tan^2\beta}{\tan\beta\left(1-\dfrac{I_Y}{I_Z}\right)}=\frac{I_Z\cos^2\beta+I_Y\sin^2\beta}{(I_Z-I_Y)\sin\beta\cos\beta}.$$

由第 33 節（II）之公式（39）可知分子爲 I_N，因 $H_{YZ}=0$；又由公式（38）之上式，可知分母卽 H_{WN}，因 $H_{YZ}=0$ 也.

故知只繞 NN 彎曲所生之 σ，已足平衡外力之全部彎力矩 M（卽 $M\sin\theta$ 與 $M\cos\theta$）矣，故不須他方面之彎度以另生應力也.

習題四十八

1. 圖 204 之 Z 字簡梁:

(1) 擔負面須經何點而後不扭?

(2) 求主軸之方位及主轉動慣量。

(3) 設用爲樑簷,傾 30° 角,求其擔負面與主軸之傾角。

(4) 設擔負爲平均分配者,求其最大應力,並求其所現之點。

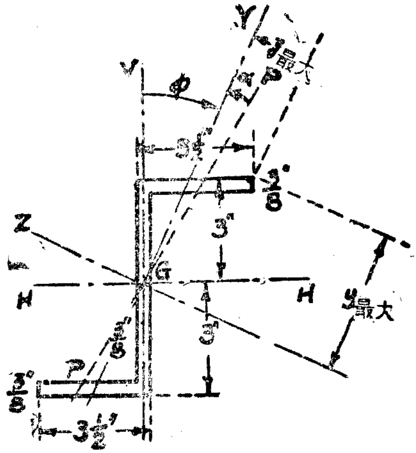


圖 204

(5) 求其最大之彎度及彎曲面之方位。

解:

(1) 經重心。

(2) 對經重心與緣平行軸之轉動慣量

$$I_H=\frac{3}{8}\times\frac{6^3}{12}+2\left[\frac{25}{8}\times\frac{1}{12}\left(\frac{3}{8}\right)^3+\frac{25}{8}\times\frac{3}{8}\left(3-\frac{3}{16}\right)^2\right]$$

$=25.32$ 吋^4.

經重心與脊平行軸之轉動慣量

$$I_V=\frac{6}{12}\left(\frac{3}{8}\right)^3+2\left[\frac{3}{8}\left(\frac{25}{8}\right)^3\times\frac{1}{12}+\frac{3}{8}\times\frac{25}{8}\left(\frac{25}{16}+\frac{3}{16}\right)^2\right]$$

$=9.12$ 吋^4.

對於 H 與 V 之慣量積

$$H_{HV}=\frac{3}{8}\times\frac{25}{8}\times\left(-\frac{28}{16}\right)\left(-\frac{45}{16}\right)+\frac{3}{8}\times\frac{25}{8}\left(\frac{28}{16}\right)\left(\frac{45}{16}\right)$$

$$=11.52\text{ 吋}^4.$$

設 ϕ 為主軸與 H 及 V 之傾角,則

$$\tan 2\phi=\frac{2H_{HV}}{I_V-I_H}=\frac{2\times 11.52}{9.12-25.32}=-1.425.$$

$\therefore\quad \phi=-27°29'$,負號示其由 H 與 V 倒轉以生也。

以最大轉動慣量之主軸為 Z,最小者為 Y,則

$$I_Z=\frac{I_H+I_V}{2}+\frac{I_H-I_V}{2}\cos 2\phi-H_{HV}\sin 2\phi$$

$$=17.22+8.1\times 0.5745+11.52\times 0.8186=31.32\text{ 吋}^4.$$

$$I_Y=(9.12+25.32)-31.32=3.12\text{ 吋}^4.$$

(3) 為使擔負面趨近於主軸 Y 以減低彎應力〔參看公式(113),α 愈小則 θ 與 σ 愈小〕,其上方之緣須向房脊。故知擔負面由 V 軸向房脊傾 30° 角,而 Z 軸則同向傾 27°30′ 角. $\therefore\quad \alpha=2°30'$.

(4) 由圖量得最大之 $y=3.8$ 吋, 最大之 $z=1.8$ 吋。最大彎力矩在梁之中點 $=\dfrac{ql^2}{8}$.

由公式(112),最大之應力

$$\sigma=\frac{ql^2}{8}\left[\frac{\cos 2°30'}{I_Z}\times 4+\frac{\sin 2°30'}{I_Y}\times 1.8\right]$$

$$=\frac{ql^2}{8}(0.0319\times 4+0.0139\times 1.8).$$

故最大之應力 $$\sigma=0.153\frac{ql^2}{8},$$

在下緣之端爲張應力，在上緣之端爲壓應力。

（5）沿主面 Y 之最大彎度，

$$\delta_Y=\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{E}\cdot\frac{\cos 2^\circ 30'}{I_Z}=\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{E}\times 0.0319.$$

沿主面 Z 之最大彎度，

$$\delta_Z=\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{E}\cdot\frac{\sin 2^\circ 30'}{I_Y}=\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{E}\times 0.0139.$$

實有之最大彎度，

$$\Delta=\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{E}\cdot\sqrt{0.0319^2+0.0139^2}=\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{E}\times 0.035.$$

彎曲面與 Y 軸傾角之正切爲

$$\frac{\delta_Z}{\delta_Y}=\frac{0.0139}{0.0319}=0.436,\qquad \therefore\quad 角=23^\circ 35'.$$

彎曲面與擔負面之傾角爲

$$23^\circ 35'-2^\circ 30'=21^\circ 5'.$$

2. 圖 205 之 Z 字肱梁長 100 吋，其上緣水平，自由端任重 400 磅。已知圖中之角 $\alpha=17^\circ 20'$，$I_Z=60.3$ 吋^4，$I_Y=3.54$ 吋^4. 其 a, b, c, d 諸距離，皆可由圖量取，

求其最大彎應力，並求其水平面上與直立面上之最大彎度。

答 $\sigma=6,420$ 磅每方吋；$\delta_{水平}=0.336$ 吋；$\delta_{直立}=0.178$ 吋

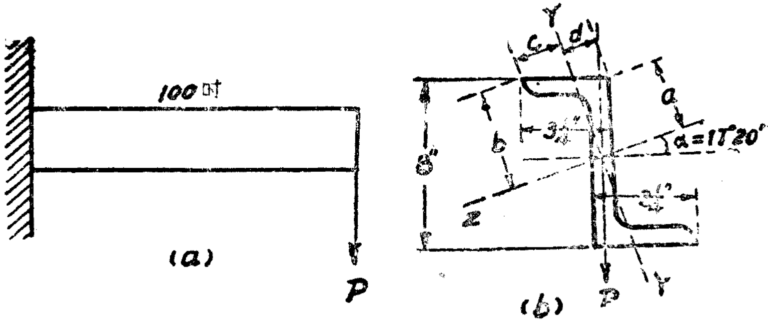


圖 205.

3. 矩形橫斷面之肱梁一端任擔負。設擔負在直立面上轉變方向一周，求其自由端中心之軌跡。 答 橢圓，其半軸為 $\frac{Pl^3}{3EI_Z}$ 及 $\frac{Pl^3}{3EI_Y}$

4. 木質矩形檩長 10 呎，厚 8 吋，寬 6 吋，每呎任擔負 200 磅，簷之傾角正切 $=\frac{1}{3}$，擔負經橫斷面重心，$E=2\times10^6$ 磅每方吋；求其最大彎應力及直下之彎度。 答 $\sigma=643$ 磅每方吋直下，$\delta=0.126$ 吋

5. 高 5 吋，緣寬 $3\frac{1}{4}$ 吋，脊厚 $\frac{5}{16}$ 吋之 Z 字鋼料，用以為檩；起脊之正切為 $\frac{1}{2}$，檩長 10 呎，每呎任 100 磅之散布擔負，擔負直下經不扭中心。(a) 以上緣端向房脊（正用），求材料中之最大彎應力。(b) 上緣端背房脊（用錯），求最大彎應力。

答 (a) 下緣端之 $\sigma=+2,260$；下脊端之 $\sigma=2,660$ 磅每方吋

(b) 下緣端之 $\sigma=-8,100$；下脊端之 $\sigma=9,610$ 磅每方吋

6. 高 6 吋之[字梁用以爲標，其緣何以必向房脊？設簷傾 30° 角，標之上表任等强之散布擔負，欲標不扭，在下列兩種製成之鋼料中選其適宜者。

高 (吋)	每呎長之磅數	橫斷面 (方吋)	緣之寬 (吋)	緣與脊之厚 (吋)	軸與脊垂直 I_Z	迴轉半徑 r (吋)	$\frac{I}{c}$	軸與緣垂直 I_Y	r (吋)	$\frac{I}{c}$	重心距脊外面
6	15.5	4.54	2.28	0.56	19.5	2.07	6.5	1.30	0.53	0.73	0.55
6	8.2	2.39	1.93	0.20	13.0	2.34	4.3	0.70	0.54	0.50	0.52

解. 欲擔負面趨近不扭中心，兩緣須向房脊。擔負面須經上緣之中點，且交主軸 Z 於距脊中心 $=e=\dfrac{b^2h^2t}{4I_Z}$ 處〔參看公式(110)〕.

故
$$\left(e+\frac{b}{2}\right)=\frac{h}{2}\cdot\tan 30^\circ.$$

以上式代 e，得
$$b\left(\frac{9bt}{I_Z}+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}.$$

就表中上列之鋼料論，
$$2.28\left(\frac{9\times2.28\times0.559}{19.5}+0.5\right)$$
$=2.48''$，大於 $\sqrt{3}$ 者甚多.

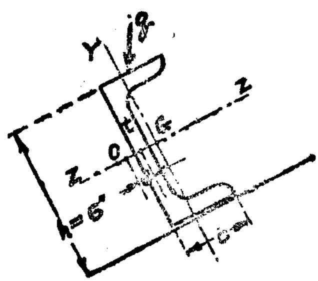


圖 208.

就表中下列之鋼料論，
$$1.92\left(\frac{9\times1.92\times0.5}{13}+0.5\right)=1.47，較近於\sqrt{3}.$$

7. 證明圖 204 之擔負面，約須經上緣之中點，則標不扭。題 4 中標之擔負面交其上面之線，距右上稜須爲幾吋？ 須用何法以使

其擔負面適經該處？又題6之〔字樑簷傾若干度而後擔負面適經上緣之中點及不扭中心？ 答 0.7 吋；39°35′.

8. $4'' \times 5''$，11磅之T字鋼料用以爲樑，按圖207安置之。擔負面與脊傾45°角，最大彎應力限爲$7\frac{1}{2}$長噸每方吋，已知$I_Z = 7.77$吋^4，

$I_Y = 1.89$吋^4

（軸皆經重心）；求其能任之彎力矩。

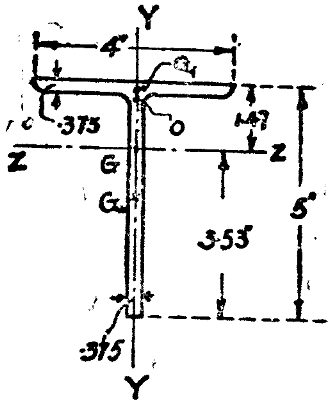


圖 207.

解. 將所求之彎力矩M，沿二主軸而分解之：

其平行於主軸Y者$= M\cos 45° = \dfrac{M}{\sqrt{2}}$，對梁生對稱彎曲，決無扭轉作用。

其平行於主軸Z者$= M\sin 45° = \dfrac{M}{\sqrt{2}}$，須經不扭中心$O$，乃能不生扭轉，

欲求O點之位置，須先求緣對Y軸之

$$I_f = \frac{0.375 \times 4^3}{12} = 2\text{ 吋}^4,$$

及脊對Y軸之 $$I_w = \frac{(5-0.375) \times 0.375^3}{12} = 0.0203\text{ 吋}^4.$$

以G_f示緣之重心，以G_w示脊之重心；則按式(109)，

$$\frac{G_fO}{G_wO} = \frac{I_w}{I_f} = \frac{0.02}{2} = \frac{1}{100}. \qquad \therefore \frac{G_fO}{G_fG_w} = \frac{1}{101}$$

故 $$G_1O=\left(\frac{5-0.375}{2}+\frac{0.375}{2}\right)\times\frac{1}{101}=0.0248\text{ 吋},$$

而 $$GO=1.47-\frac{0.375}{2}-0.0248=1.26''.$$

緣右端之壓應力較大於左端者。

$$\text{右端壓應力}=\frac{M}{\sqrt{2}}\left(\frac{1.47}{7.77}+\frac{2}{1.89}\right)=\frac{M}{\sqrt{2}}\times\frac{1.47+8.23}{7.77}.$$

脊下端之張應力 $=\frac{M}{\sqrt{2}}\times\frac{3.53}{7.77}$，亦遜於緣右端之壓應力.

$$\therefore\ \frac{M}{\sqrt{2}}\times\frac{1.47+8.23}{7.77}=7.5 \qquad \therefore\ M=8.52\text{ 長噸吋}.$$

若擔負與兩端之支持力謬加於重心，則梁必順時針扭轉，因生切應力，及因扭而生之張應力如第 32 節所論者。設計問題將太煩難矣。

8. L字橫斷面之簡梁，臂長各 8 吋、厚 $\frac{3}{4}$ 吋，一臂向上，一臂水平，梁長 120 吋，其兩個 $\frac{1}{3}$ 接點處，各有直下之擔負 5,000 磅。求擔負面須經何點而後不扭？並求兩臂及脊端之彎應力。

答　立臂上端 −19,000；平臂外端 −4,820；沿稜者 16,200磅每方吋。

71. 材料不服從 Hooke 定律之簡梁　由實際觀察任何種材料之梁，脆性材料如鑄鐵混凝土，延性材料如韌鋼，其橫斷面雖至彎曲之後，仍保持平面，故其各層之線應變與其距中立層之遠近成正比，即 $\epsilon=\frac{y}{r}$；在第四章中就延性材料而言，其彎應力與應變成正

比，故 $\sigma=E\frac{y}{r}$；由此推得中立層必經重心及彎力彎度諸公式。脆性材料之梁，雖仍合 $\epsilon=\frac{y}{r}$，但 σ 不與 ϵ 成正比，故中立層不必經橫斷面之重心，而彎力與彎度公式皆不切於用矣。

設中立層距抗張外層爲 h_1，距抗壓外層爲 h_2，

則最大拉長係數 $\epsilon_1=\frac{h_1}{r}$， 最大壓縮係數 $\epsilon_2=\frac{h_2}{r}$ (a)

欲求中立層之位置及抗彎力矩，須藉助應力(張與壓)與應變相關之實驗曲線，如圖 208(b)所示者。

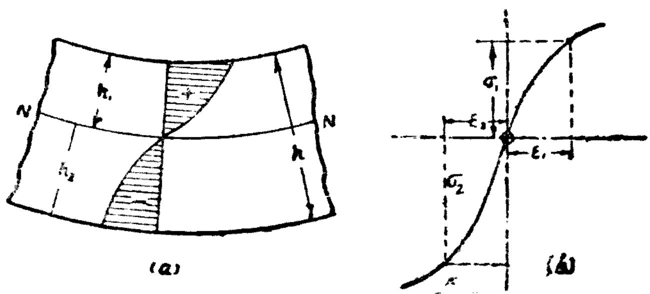


圖 208.

然後按沿梁之平衡， $$\int_{-h}^{h_1}\sigma\cdot dA=0 \qquad (b)$$

及如次之抗彎力矩以推解之， $$M=\int_{-h_2}^{h_1}\sigma\cdot y\cdot dA \qquad (c)$$

爲簡單計，設橫斷面爲矩形，寬$=b$，厚$=h$．故 $dA=bdy$．又由 $r\epsilon=y$ 得 $dA=br\cdot d\epsilon$，代入(b)式得

$$\int_{-\epsilon_2}^{\epsilon_1}\sigma\cdot d\epsilon=0,\qquad \text{或}\qquad \int_0^{\epsilon_1}\sigma d\epsilon=\int_{-\epsilon_2}^{0}\sigma d\epsilon \tag{b'}$$

此式意謂 $\sigma-\epsilon$ 曲線在 ϵ_1 以上之面積與在 ϵ_2 以下者相等。材料之最大張應力（或資用張應力）σ_1 係已知，故 ϵ_1 可由（$\sigma-\epsilon$）圖看出。然後將該圖分爲直立之窄條，寫出其面積，必能求得 ϵ_2 須等於若干，而後壓縮曲線上之面積方與拉長線下之面積相等。如此求得 ϵ_2，可知與 σ_1 對應之 σ_2 矣。

又由(a)式 $\qquad \dfrac{h_1}{h_2}=\dfrac{\epsilon_1}{\epsilon_2},\qquad$ 而 $\quad h_1+h_2=h.$

聯立解 h_1 與 h_2，可知中立層之位置。再由式(a)求 $r\left(=\dfrac{h_1}{\epsilon_1}\right).$

由此解法，可知中立層之位置，與材料實任之張應力 σ_1（即與其所受之彎力矩）有關係，非只關乎橫斷面之形狀與幾何度而已。

既知中立層之位置，則由(c)式得抗彎力矩

$$M=\int_{-\epsilon_2}^{\epsilon_1}\sigma\cdot r\epsilon\cdot br\cdot d\epsilon,$$

即
$$M=br^2\left[\int_0^{\epsilon_1}\sigma\cdot\epsilon\cdot d\epsilon+\int_{-\epsilon_2}^{0}\sigma\cdot\epsilon\cdot d\epsilon\right] \tag{c'}$$

括號內之前項爲拉長曲線下由 ϵ_1 至 O 之面積對 σ 軸之一次面矩，後項爲壓縮曲線上由 ϵ_2 至 O 者。仍用以前劃分之窄條，其面積各乘以 ϵ，消去負號而相加之，乘以 br^2，即得最大張應力等於 σ_1 時之抗彎力矩（即材料中張應力達 σ_1 時能任之彎力矩也）。

72. 已過屈服點之彎曲 按普通韌鋼之性質，達屈服點後（圖

209, Y 點), 其應變常增加 10 倍至 15 倍而應力不增(圖 209 Y' 點, $\frac{\epsilon_Y'}{\epsilon_Y}=10$ 至 15). 此後其應力方能恢復, 而與 ϵ 按變値之新比率 E' 而共增。

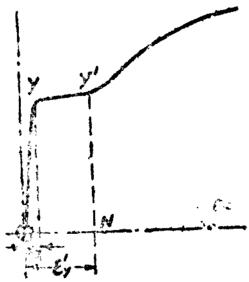


圖 209.

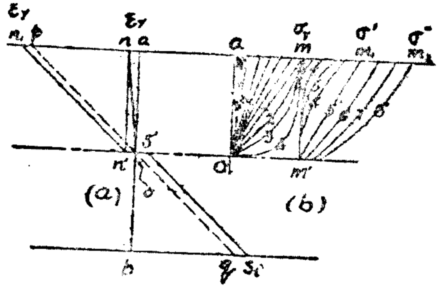


圖 210.

以矩形橫斷面之梁爲例, 設寬度爲 b, 厚度爲 h. 當上表應力方達屈服點 Y〔圖 210 (b) 之 m〕時, 其內部者僞按直線 om 分布。

故其抗彎力矩　　$M_Y=\frac{bh^2}{6}\cdot\sigma_Y.$

外力之彎力矩如再增多, 則上表之應力常爲 σ_Y, 以俟內部材料施展其應力。故應力之分布線由直線變爲 2, 3, 4 等曲線, 至 5 則變爲直立, 最近中立層者亦屈服矣。至全面均屈服時之抗彎力矩

$$M'_Y=\left(b\cdot\frac{h}{2}\cdot\sigma_Y\right)\frac{h}{2}=\frac{bh^2}{4}\sigma_Y \tag{a}$$

故全屈服與方屈服時抗彎力矩之比,

$$\frac{M'_Y}{M_Y}=\frac{3}{2}=1.5 \tag{b}$$

若外力之彎力矩再增，則上表張應力按新彈性係數 E' 與 ϵ 共增；初過 Y' 點時 E' 漸增，至近終極強度 σ_u 之前，E' 又漸減。故外層過屈服點，其內部亦依次過屈服點。其應力之恢復，初以外層者爲速，如圖 210(b) 之 1′, 2′, 3′, 4′ 等線所示者。至近中立層者，亦過屈服點如 5′ 線以後，則外層之應力因近終極強度其增加反不如內部之速，如 6′, 7′, 8′. 今姑均作直線論之，當外層應力爲 $\sigma'(>\sigma_Y<\sigma_u)$ 時，其全面之抗彎力矩 M' 等於由 $oamm'$ 所生者加 $mm'm_1$ 者。

$$\therefore\ M'=\frac{bh^2}{4}\sigma_Y+\frac{bh^2}{6}(\sigma'-\sigma_Y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{bh^2}{6}\sigma_Y+\frac{bh^2}{6}\sigma' \qquad \text{(c)}$$

至 $\sigma'=\sigma_u$ 時，則終極抗彎力矩

$$M_u=\frac{bh^2}{6}\sigma_u\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma_Y}{\sigma_u}\right);$$

如韌鋼之 $\sigma_Y=35,000$, $\sigma_u=55,000$;

$$\therefore\ \frac{M_u}{\frac{bh^2}{6}\sigma_u}=1+\frac{1}{2}\times\frac{35}{55}=1.32.$$

即實有之終極抗彎力矩較仍用彎力公式算得者大 1.32 倍。$\frac{bh^2}{6}$ 爲橫斷面之係數 (modulus of section)，M_u 爲實驗折斷之終極抗彎力矩(ultimate resisting moment)；假如仍用彎力公式，則

$$\sigma_r=M_u\Big/\left(\frac{I}{c}\right),$$

此 $\sigma_r=1.32\sigma_u$ 稱爲彎折係數(modulus of rupture)。材料之彎折係數即可用此法求之。用已知之彎折係數代入彎力公式，可以求梁

之終極抗彎力矩;而彎折係數則由實驗之終極抗彎力矩,用彎力公式算得也(參看附錄1表2)。

繼論彎度未達屈服點之前,其各層應變之分配亦沿直線。至外層已屈服,其應力雖不復增,但其應變則由 Y 點對應之 ϵ_Y 漸增,俟近中立層者亦達 ϵ_Y,則外層者增至 Y' 點對應之 ϵ_Y' 矣。中間各層者必依次遞減,沿直線 n_1n'(圖 210, a)。故原來之橫斷面 oh 變為 $n_1n'os's_1$。因 on' 只為 an_1 之 $\frac{1}{10}$ 乃至 $\frac{1}{15}$,故可約作 n_1os_1 平面,此可解釋超過屈服點,斷面仍保平面,而 $\epsilon = \frac{h}{2r}$ (約) (d)

外表達屈服點時之曲率半徑,仍用 $\frac{1}{r} = \frac{M_Y}{EI}$ 求之。

全面既屈服之後,其曲率半徑 r_Y' 則由第 71 節式(c')求之:

$$M_Y' = br_Y'^2 \times 2(OYY'N \text{對 } \sigma \text{ 軸之一次面矩})(\text{參看 圖209}).$$

$$= br_Y'^2 \times 2\left(\sigma_Y\epsilon'_Y \cdot \frac{\epsilon_Y'}{2} - \sigma_Y \cdot \frac{\epsilon_Y}{2} \cdot \frac{\epsilon_Y}{3}\right)$$

$$= br_Y'^2\sigma_Y\epsilon'_Y{}^2\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\epsilon_Y}{\epsilon'_Y}\right)^2\right].$$

以 $\frac{h}{2r_Y'}$ 代 ϵ_Y',則 $M_Y' = \frac{bh^2}{4}\sigma_Y\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\epsilon_Y}{\epsilon'_Y}\right)^2\right]$.

若以 M_Y' 代 $\frac{bh^2}{4}\sigma_Y$ (參看第 72 節式 a),則 [ ]$=1$.,誠然。

若以 $bh^2\sigma_Y$ 等於 $6M_Y$,則

$$M_Y' = \frac{3}{2}M_Y\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\epsilon_Y}{\epsilon'_Y}\right)^2\right].$$

或 $$\frac{\epsilon_Y}{\epsilon'_Y}=\sqrt{3-2\frac{M'_Y}{M_Y}}=\frac{r_Y'}{r_Y},\quad \left(由\ \epsilon\doteq\frac{h}{2r}\right).$$

故 $$\frac{1}{r'_Y}=\frac{M'_Y}{EI}\cdot\frac{1}{\frac{M'_Y}{M_Y}\sqrt{3-2\frac{M'_Y}{M_Y}}} \tag{e}$$

是故至全面既屈服之後，恰如其抗彎硬度之由 EI 變爲 $EI\cdot\frac{M'_Y}{M_Y}\sqrt{3-2\frac{M'_Y}{M_Y}}$ 者。如韌鋼者，$\frac{M'_Y}{M_Y}=\frac{3}{2}$（參看第72節式 b），故在全面既屈服之橫斷面處，方根近於零，硬度極小，r'_Y 亦必極小。此卽前述各層應變驟增十數倍之結果也。且可解釋抗彎之梁至其最大彎力矩，已足使該處全面屈服之時，則該處之曲率驟增，而他處者則無大變化也。

73. 壓彈性係數與張彈性係數不等之梁 彈性限度不等而彈性係數相同之梁已在習題二十四題1與2論過，今論其彈性係數不相同者。實際材料具有此性者甚少，幾不能舉出一例，但任壓而彎之柱，其壓應力方面如已超過屈服點，則 E 頓減，其任壓與張方面之 E 則未變，恰如材料之 E 原卽不同者然。

爲簡單計，以矩形之簡梁爲例，仍假設其橫斷面常保持爲平面。設 E_1 爲抗張方面之彈性係數，h_1 爲下表至中立層之距離；E_2，h_2 爲抗壓方面者。

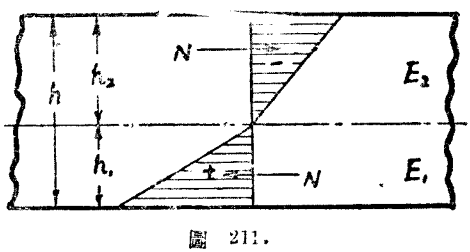


圖 211.

則 $$\sigma_{大}=E_1\frac{h_1}{r}, \qquad 而 \quad \sigma_{小}=E_2\frac{h_2}{r}. \tag{a}$$

在一個橫斷面上之其張力與其壓力相等，故

$$\frac{\sigma_{大}}{2}\cdot bh_1=N=\frac{\sigma_{小}}{2}\cdot bh_2,$$

由式(a)得 $$E_1h_1{}^2=E_2h_2{}^3. \qquad 又 \quad h_1+h_3=h.$$

聯立而解之，得

$$h_1=\frac{h\sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}}; \qquad 而 \quad h_2=\frac{h\sqrt{E_1}}{\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}} \tag{b}$$

又此兩個等值反向之 N 合為力偶矩，

$$M=\frac{2}{3}hN=\frac{\sigma_{大}}{2}\cdot bh_1\cdot\frac{2}{3}h=\frac{\sigma_{大}\cdot bh^3}{3}\cdot\frac{\sqrt{E_2}}{\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}}.$$

$$\therefore \quad \sigma_{大}=\frac{3M}{bh^2}\left(1+\sqrt{\frac{E_1}{E_2}}\right) \tag{115}$$

若 $E_1=E=E_2$， 則 $\sigma_{大}=\frac{6M}{bh^2}$，與彎力公式之結果恰相合。

又將(a)式代入(115)式，則

$$\frac{1}{r}=\frac{3M}{bh^2Eh_1}\left(1+\sqrt{\frac{E_1}{E_2}}\right),$$

復由(b)式得 $$\frac{1}{r}=\frac{12M}{bh^3}\cdot\frac{(\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2})^2}{4E_1E_2} \tag{116}$$

若 $$E_1=E=E_2, \qquad 則 \quad \frac{1}{r}=\frac{12M}{bh^3E}=\frac{M}{EI}.$$

故若將此式之 E 換作 $E' = \dfrac{4E_1E_2}{(\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2})^2}$,

卽得(116)式。此 E' 稱爲相當彈性係數(reduced modulus of elasticity). 若將此校正之 r 代入(a)式,卽得公式(115).

若 $E_1=E=E_2$, 則 $E'=E$; 如 $E_1=\dfrac{3}{2}E_2$,

則 $E'=0.77E_1$; 如 $E_1=\dfrac{E_2}{2}$ 則 $E'=1.32E_1$.

74. 兩種材料拚造之梁 木梁之抗張表面上常貼鋼飯以爲助。若二者中間不能互滑,則彎力與彎度公式甚易改造也。以 E_w 代木材之彈性係數,以 E_s 代鋼者。今設保持木材原有之高度 h, 而將其寬度 b 縮減,以變作寬度等於 b_1 之相當鋼脊。所謂相當者,謂其分任之抗彎力矩及曲率半徑前後相同也。

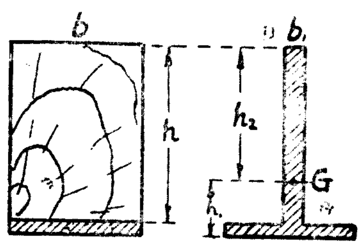


圖 212.

$rM=EI$ 旣屬常量,則

$$E_w \cdot b = E_s \cdot b_1. \qquad \therefore \quad b_1 = \frac{E_w}{E_s} \cdot b.$$

於是橫斷面化爲鋼質之⊥字梁,而以前之彎力公式及彎度公式皆可適用矣。

設木材厚 6 吋,寬 4 吋;鋼板厚 $\dfrac{1}{2}$ 吋,寬 1 吋;梁長 10 呎,中心任重 1000 磅. 又設 $E_w=\dfrac{1}{20}E_s$. 則 $b_1=\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}$ 吋.

$$h_1=\frac{1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+6\times\frac{1}{5}\times4.5}{1\times\frac{1}{2}+6\times\frac{1}{5}}=2.54\text{ 吋};$$

$$h_2=6.5-2.54=3.96\text{ 吋}.\qquad I=7.37\text{ 吋}^4;$$

$$M=\frac{1000\times120}{4}=30,000\text{ 磅吋}.$$

$$\therefore\quad \sigma_{大}=2.54\times\frac{30,000}{7.37}=10,300\text{ 磅每方吋};$$

$$\sigma_{小}=-3.96\times\frac{30,000}{7.37}=-16,100\text{ 磅/吋}^2.$$

再反作木材，其寬度旣增$\frac{b}{b_1}=\frac{E_s}{E_w}$倍，其應力必減小$\frac{E_w}{E_s}$倍也。

卽木材之壓應力　$\sigma_w=-\frac{16,100}{20}=-800$ 磅每方吋.

再以 3：7 蒙銅(monel metal; 含銅 28，鎳 67，鐵，錳，碳，矽)與鋼鉚製之棒爲例。若以外力彎之，恰與上例相同，玆不復贅。今設無外力，而討論其由溫度變遷所生之彎度與應力，此種複棒常用以製造恆溫器之電門。

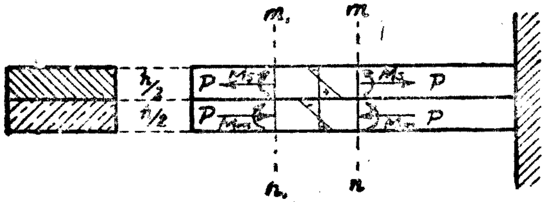


圖 212.

設二板之厚度各爲$\frac{h}{2}$，寬度各爲b. 以E_sI_s代表鋼板之抗彎硬度，E_mI_m代表3：7蒙銅者。以α_s及α_m代表二者之熱脹係數. 因$\alpha_m>\alpha_s$，故當溫度增高t度，板之自由端必向鋼質方面彎曲，以使蒙銅板加長也。論其互相作用之力，鋼板受彎力矩M_s. 蒙銅板受彎力矩M_m；鋼板受蒙銅板之拉力P_s，蒙銅板受鋼板之壓力P_m. 論mn及m_1n_1二橫斷面間一部分之平衡:

$\Sigma F_X=0$.　　　∴　$P_m=P_s=P$.

又$\Sigma M=0$.　　　∴　$P\frac{h}{2}=M_s+M_m$.

因諸力矩均係力偶，故彎曲線必爲圓弧；以r代其半徑，則

$$M_s=\frac{E_sI_s}{r};\qquad 而\qquad M_m=\frac{E_mI_m}{r}.$$

故

$$\frac{Ph}{2}=\frac{E_sI_s+E_mI_m}{r}\tag{a}$$

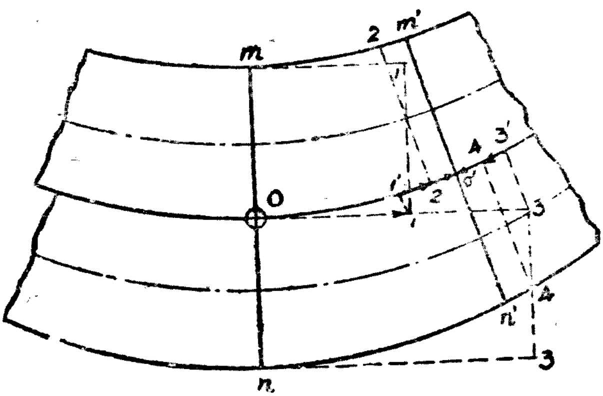


圖 216

此式中計兩個未知 P 與 r，只賴平衡不能解析，其第二個相關式爲沿兩棒界面處其應變必相等也。欲考其應變，可設二鉚釘中間者爲單位長度。圖 214 $m'o'n'$ 爲鉚釘 mon 後來之位置。若無鉚釘，則兩個直棒自由脹長，鋼板增長係數 $01_1=\alpha_s t$，蒙銅板增長係數 $03=\alpha_m t$。今因有實際限制，故（1）互相以 P 力牽掣因而彎曲，（2）鉚釘終須與棒垂直。

只論（1）之作用：橫斷面 11 因彎曲轉至 22。在彎曲線上截取 $01'$弧$=01$，$1'2$ 爲鋼板內層因彎曲應生之增長係數，故 $1'2=\epsilon=\dfrac{h}{4r}$。同理，在交界弧線上截取 $03'=03$，則 $3'4$ 爲蒙銅板內層因彎曲應生之壓縮係數 $\epsilon=\dfrac{h}{4r}$。

又因鉚釘之第（2）作用：橫斷面 22 必被拉至 $m'o'$，其增長係數 $20'=\dfrac{P}{b\cdot\dfrac{h}{2}\cdot E_s}$。同理蒙銅板之橫斷面 44 必被鉚釘壓迫縮至 $o'n'$，

其壓縮係數爲$\dfrac{P}{b\cdot\dfrac{h}{2}\cdot E_m}$。

由圖 214 可知
$$\alpha_s t+\frac{h}{4r}+\frac{2P}{bhE_s}=\alpha_m t-\frac{h}{4r}-\frac{2P}{bhE_m}$$

改寫爲
$$\frac{2P}{bh}\left(\frac{1}{E_s}+\frac{1}{E_m}\right)+\frac{h}{r}=(\alpha_m-\alpha_s)t \tag{b}$$

(a)與(b)爲解求 P 與 r 之二式。

先消去 P，得

$$\frac{4}{bh^2r}(E_sI_s+E_mI_m)\left(\frac{1}{E_s}+\frac{1}{E_m}\right)+\frac{h}{2r}=(\alpha_m-\alpha_s)t,$$

因 $$I_m=I_s=\frac{bh^3}{96},$$

故 $$\frac{h}{r}\left\{\frac{1}{24}\cdot\frac{(E_s+E_m)^2}{E_sE_m}+\frac{1}{2}\right\}=(\alpha_m-\alpha_s)t,$$

又 $$E_s=1.15E_m,$$

而 $$\frac{(E_s+E_m)^2}{E_sE_m}=\frac{E_m}{E_s}+2+\frac{E_s}{E_m}\doteq 4.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{r}=\frac{3}{2}\cdot\frac{(\alpha_m-\alpha_s)t}{h} \tag{117}$$

又由(a)得 $$P=\frac{3}{h^2}(\alpha_m-\alpha_s)t(E_s+E_m) \tag{c}$$

又 $$M_s=\frac{3}{2}\cdot\frac{(\alpha_m-\alpha_s)t}{h}\cdot E_sI_s;$$

$$M_m=\frac{3}{2}\cdot\frac{(\alpha_m-\alpha_s)t}{h}\cdot E_mI_m. \tag{d}$$

由(c)與(d)，可求鋼板內表之最大張應力，

$$\sigma_{大}=\frac{2P}{bh}+\frac{M_s}{I_s}\cdot\frac{h}{4}=\frac{(\alpha_m-\alpha_s)t(E_s+E_m)}{16}$$

$$+\frac{3}{2}\cdot\frac{(\alpha_m-\alpha_s)t}{4}\cdot E_s.=\frac{h}{24r}(7E_s+E_m).$$

又蒙銅板內表之最大壓應力

$$\sigma_{小}=-\frac{2P}{bh}-\frac{M_m}{I_m}\cdot\frac{h}{4}=-\frac{h}{24r}(E_s+7E_m).$$

其應力之分布，如圖 213 中 m_1n_1 與 mn 中間斜線所示者。

75 鋼骨混凝土梁 混凝土之普通配合，其體積比例多用水泥(cement)1，砂 2，石礫 4，是爲 1 : 2 : 4 混凝土。此種混凝土之張應力甚弱，故製爲梁時，在抗張方面輒以鋼骨助之。此種梁固可用前節之法解析，但爲計算簡單計，(1) 設混凝土完全不任張力，此假設頗能與事實相合，蓋其張應力甚低時已生破裂，而完全由鋼骨獨當之矣。(2) 鋼骨與混凝土頗能附着，今更在鋼骨外皮製成竹節狀，則更不易抽動，故鋼與土之在一個橫斷面內者，至彎曲之後，仍在一個平面中。(3) 混凝土之壓彈性係數雖非恆值，但以其實任之壓應力甚低，故約爲常量(不用第 72 節之法)。綜以上之三假設，繼以下述之平衡公式：(a)中立層以上混凝土共任之壓應力，必與鋼骨共任之張應力相等，(b)此二者合爲力偶矩必與外力之彎力矩相等。則中立層之位置及材料中之應力皆易求得；不須運用公式或另立新規則。

習 題 四 十 九

1. 已知鋼之 E_s 與混凝土之 E_c 之比爲 15. 今有寬 5 吋，厚 $10\frac{1}{2}$ 吋之矩形梁，用直徑 $\frac{7}{16}$ 之圓鋼骨兩條以韌之，其中心距上面 $8\frac{1}{2}$ 吋，其下面混凝土之厚常不下 2 吋以防其乾裂也。設混凝土之壓

應力限爲 500 磅每方吋，求其能任之抗彎力矩及此時鋼骨內之張應力。

解. 設中立層距上表爲 h. 因線應變與距中立層之遠近成正比例，故

$$\frac{\sigma_s}{E_s}\Big/\frac{\sigma_c}{E_c}=\frac{8.5-h}{h}.$$

或
$$\frac{\sigma_s}{\sigma_c}=\frac{15(8.5-h)}{h} \qquad (a)$$

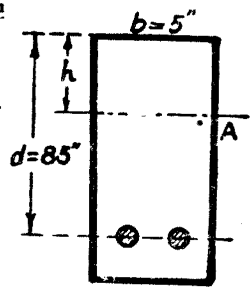


圖 215.

又混凝土共任之壓力 $=\frac{1}{2}\sigma_c\cdot bh$. 鋼骨共任之張力 $=A_s\sigma_s$.

此二者相等，故
$$\frac{\sigma_s}{\sigma_c}=\frac{bh}{2A_s}=\frac{5h}{2\times2\times\frac{\pi}{4}\left(\frac{7}{16}\right)^2}=\frac{5\times16^2h}{49\pi} \qquad (b)$$

等(a)與(b)，得 $h^2+1.81h-15.4=0$. $\therefore$ $h=3.12$ 吋.

$$\text{力偶臂}=(d-h)+\frac{2}{3}h=(8.5-3.12)+\frac{2}{3}\times3.12=7.46 \text{ 吋}.$$

$$\therefore \quad \text{抗彎力矩}=\frac{500}{2}\times5\times3.12\times7.46=29,100 \text{ 磅吋}.$$

鋼之張應力 $\sigma_s=500\times\frac{15(8.5-3.12)}{3.12}=12,900$ 磅每方吋.

2. 設混凝土之資用壓應力爲 500 磅每方吋，鋼之資用壓應力爲 10,000 磅每方吋. $\frac{E_s}{E_c}=10$. 問圖 216 之 d 須爲若干，而後中立層恰在 AB 線上? 二鋼骨直徑須爲若干? 設梁長 20 呎，兩端自由支

持，求其能任之散布擔負。

答　$d=15$ 吋，直徑 1.09 吋；$q=35$ 磅每吋。

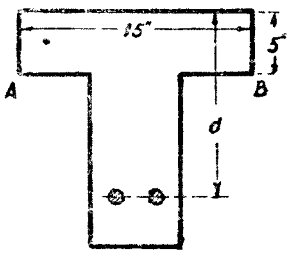


圖 216.

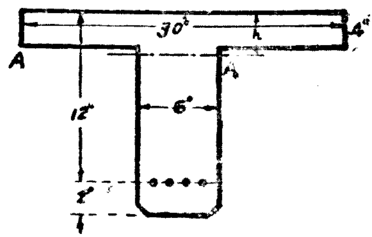


圖 217.

3.　設鋼之應變彈性係數 $E_s=30\times10^6$ 磅每方吋，混凝土者 $E_c=2\times10^6$ 磅每方吋。鋼之張應力不得過 16,000 磅每方吋，混凝土之壓應力不得過 600 磅每方吋；欲使二者各達其適宜之應力，則中立層距上面須等於 4.3 吋，試證明之（參看圖 217）。（1）設混凝土不任張力，求鋼骨之橫斷面積；（2）再設其任張力而求之。依假設（1）求其抗彎力矩。

解.　設中立層距上面爲 x 吋，

則　　$$\frac{\sigma_s}{E_s}:\frac{\sigma_c}{E_c}=\frac{12-x}{x},\qquad \text{即}\qquad \frac{16000}{600}\times\frac{1}{15}=\frac{12-x}{x}.$$

$$80x=12\times45-45x.\qquad\qquad \therefore\quad x=4.3\text{ 吋}.$$

混凝土共任之壓應力

$$\sigma_c=\frac{600}{2}\times30\times4.3-\frac{1}{2}\left(\frac{600}{4.3}\times0.3\right)\times(30-6)\times0.3,$$

$$=\frac{600}{2}\left(30\times4.3-\frac{24\times0.09}{4.3}\right)=300(129-0.5).$$

鋼骨共任之張力$=16,000A_s$.

$$\therefore \quad A_s=\frac{300\times128.5}{16,000}=2.42\text{ 方吋}.$$

若混凝土能任張力，則

$$16,000A_s+\frac{1}{2}\left\{\frac{600}{4.3}\times(14-4.3)\right\}\times6(14-4.3)$$

$$=300(129-0.5).$$

$$\therefore \quad A_s=\frac{300(128.5-131.3)}{16,000}=\text{負},$$

謂不須鋼骨已足，但此時混凝土中之張應力

$$\sigma_t=\frac{600}{4.3}\times(14-4.3)=1,300\text{ 磅每方吋},$$

久已破裂。故雖 A_s 得正亦不可不用。

$$\text{力偶臂}=(12-4.3)+\frac{2}{3}\times4.3=10.567\text{ 吋}.$$

故全面之抗彎力矩$=2.42\times16,000\times10.57=410,000$ 磅吋.

4．類似圖 217 之混凝土地板梁，橫臂 20 吋，厚 4 吋，立臂寬 8 吋，厚 14 吋。鋼骨為兩條圓杆，直徑 $1\frac{1}{2}$ 吋，其中心距下面 2 吋。設 $E_s:E_c=12$．當混凝土中壓應力達 500 磅每方吋時，求鋼骨內之張應力，及全面之抗彎力矩。 答 $\sigma_s=8,550$ 磅每方吋；$M=423,000$ 磅吋.

混凝土梁之彎度

鋼骨增長係數 $\epsilon_s=\frac{e_s}{l}=\frac{(d-h)d\theta}{r\,d\theta}$ $\quad\therefore\ \frac{1}{r}=\frac{\sigma_s}{E_s(d-h)}$.

改右側爲抗彎力矩 M：以中立軸爲軸，論力矩，則

$$M=\sigma_s A_s(d-h)+\frac{\sigma_c}{h}\int_0^h y^2 dA;$$

或
$$M=\frac{\sigma_s E_s}{E_s(d-h)}\cdot A_s(d-h)^2+\frac{\sigma_c E_c}{hE_b}\int_0^h y^2 dA.$$

因橫斷面仍保持平面，

故
$$\frac{\sigma_s}{E_s(d-h)}=\frac{\sigma_c}{E_c h}$$

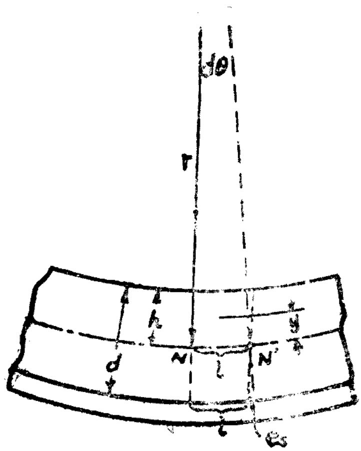


圖 218.

於是
$$M=\frac{\sigma_s}{E_s(d-h)}\left[E_s I_s+E_c I_c\right]$$

$$=\frac{E_s I_s+E_c I_b}{r}$$

$$\therefore \frac{1}{r}=\frac{M}{E_s I_s+E_c I_c}$$

式中之 I_c 爲中立層以上混凝土橫斷面對中立軸之轉動慣量。I_s 爲鋼骨橫斷面對中立軸之轉動慣量，$E_s I_s+E_c I_c$ 卽梁之抗彎硬度：如習題四十九題 3，欲求某橫斷面處之曲率半徑 r，仍須先求中立層之位置 h，該題解得 $h=4.3$ 吋。

$$\therefore I_c=\frac{30(4.3)^3}{12}-2\times\frac{6(0.3)^3}{3}=795-0.1=795\text{吋}^4.$$

又該解求得 $A_s=2.42$ 方吋，

$$\therefore I_s=2.42(12-4.3)^2=143.5\text{ 吋}^4,$$

故全面之抗彎硬度 $=30\times10^6\times143.5+2\times10^6\times795$

$=5895\times10^6$ 磅吋^2.

以此硬度用於其輙梁,或用於第六章之公式內,可求最大彎度。

76. 混凝土梁之切應力 在壓應力方面各層間之水平縱切應力與同質梁者之解析法完全相同。若係矩形橫斷面,其強度仍按拋物線分配。若屬T字形橫斷面則與I字形者之上半相同。無論何形,皆以中立層者爲最大,中立層以下之混凝土不任應力,故其各層之切應力無由再變。欲求此最大之強度,仍但想以前證法,以兩個橫斷面與中立層界出薄板爲自由體,其下面之切應力 τ_{xy} 爲最強,且其共值等於二橫斷面上共壓應力之差。以鋼骨橫斷面之連心線爲力矩軸,則全面之抗彎力矩 M 可只用 σ_c 說明之(因 σ_s 之力矩 $=0$),故各處之壓應力 $\sigma_c'=\frac{\sigma_c}{h}\cdot y$ 皆可用 M 以說明之。設二橫斷面相距 dx,則

$\tau_{xy}\cdot b\cdot dx=$ 左右面的 $\int_0^h\sigma' dA$ 之差 $=dM$ 之一次函式,故 τ_{xy} 與剪力 Q 之關係可知,並可由此推得鋼骨與混凝土間之黏着力矣。(參看下列習題1之解)

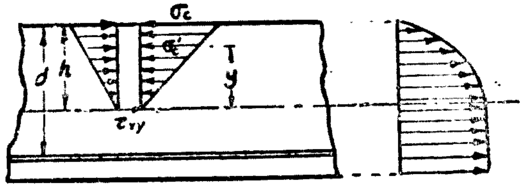


圖 219.

習 題 五 十

1. T字混凝土之地板上面寬98吋，厚4吋；脊寬11吋，高20吋。鋼骨爲$1\frac{1}{8}$吋直徑之圓杆，凝於距下面2吋處。設$E_s : E_c = 15$，橫斷面上之切力爲23,000磅，求混凝土中之最大切應力，及其與鋼骨接觸面上之黏着力。

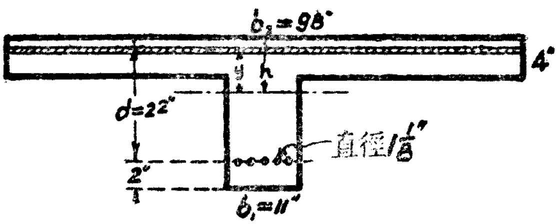


圖 226.

解. 先求h:

$$\frac{\sigma_s}{E_s} \div \frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{d-h}{h}, \qquad 或 \quad \frac{\sigma_s}{\sigma_c} = 15 \times \frac{22-h}{h} \tag{a}$$

中立層以上混凝土共任之壓應力$= \frac{\sigma_c}{2} \times 98h - \frac{\sigma_c}{2h}(h-4)^2 \times 87$，

與鋼骨共任之張力$5 \times \frac{\pi}{4}\left(\frac{9}{8}\right)\sigma_s$相等，

$$\therefore \quad \frac{\sigma_s}{\sigma_c} = \frac{64 \times 2}{81 \times 5\pi} \times \frac{11h^2 + 696h - 1932}{h} \tag{b}$$

(a)等於(b)，求h，得 $h^2 + 76.8h - 425 = 0$. $\therefore\ h = 5.2$ 吋.

以鋼骨橫斷面之中心線為軸，論中立軸以上壓應力之力矩，卽得全面之抗彎力矩，

$$M=\int_0^h \sigma'_c(d-h+y)dA$$

$$=\frac{\sigma_c}{h}\cdot b_1\int_0^{h-4}(d-h+y)ydy+\frac{\sigma_c}{h}\cdot b_2\int_{h-4}^{h}(d-h+y)ydy,$$

$$=\frac{\sigma_c}{h}\left\{11\int_{1}^{1.2}(16.8+y)ydy+98\int_{1.2}^{5.2}(16.8+y)ydy\right\}$$

$$=25,740\frac{\sigma_c}{h}.$$

距中立層$=y$處之壓應力 $\sigma_c'=\frac{\sigma_c}{h}y=\frac{M}{25,740}\cdot y;$

故中立層以上立脖之共壓力$=\frac{11M}{25740}\int_{1}^{1.2}ydy=\frac{7.92}{25740}M;$

橫脖之共壓力$=\frac{98M}{25740}\int_{1.2}^{5.2}ydy=\frac{1253}{25740}M.$

二者之合$=0.049M$，而兩個相鄰橫斷面上共壓力之差$=0.049dM$。以相距dx之二橫斷面與中立層界出薄板為自由體，由$\Sigma F_X=0$得

$$11\tau_{xy}\cdot dx=0.049dM \qquad \therefore \tau_{xy}=0.00445Q=102 \text{ 磅每方吋}.$$

水泥1，砂2，石礫4之混凝土終極切應力為1300磅每方吋，實用者為200磅每方吋。設q為鋼骨與混凝土中間每方吋接觸面之黏着力，並以自中立層以下之脖(至下表)縱長$=1$吋者為自由體，

由$\Sigma F_X=0$，得 $\qquad 11\times1\times\tau_{xy}=5\pi\frac{9}{8}\times1\times q.$

$$\therefore \quad q = 0.049Q \times \frac{8}{45\pi} = 63.6 \text{ 磅每方吋}.$$

此黏着力常限爲每方吋 100 磅。欲使鋼骨不拔，不完全藉助黏着力，宜於鋼骨表面製成節狀，並將鋼骨之兩端曲作鉤形。

2. 矩形橫斷面之鋼骨混凝土梁 求證：

（1）其全面之抗彎力矩 $M = \frac{bh\sigma_c}{2}\left(d - \frac{h}{3}\right)$.

（2）y 層之切應力 $\tau_{xy} = \frac{Q(h^2 - y^2)}{bh^2\left(d - \frac{h}{3}\right)}$.

（3）其最大之切應力 $\tau_{xy\text{大}} = \frac{Q}{b\left(d - \frac{h}{3}\right)}$.

（4）鋼骨與混凝土間每方吋接觸面之黏着力 $q = \frac{Q}{S\left(d - \frac{h}{3}\right)}$,

S 爲每呎長鋼骨之表面積，

3. 矩形混凝土梁寬 12 吋，用兩條直徑 $\frac{1}{2}$ 吋之鋼骨，其中心距上面 $3\frac{1}{2}$ 吋，梁長 12 呎，兩端自由支持，每呎任擔負 150 磅。設 $E_s : E_c = 15$，求鋼骨與混凝土間每方吋之黏着力。 答 95 磅每方吋。

16·30

13.00